А.С. Бортаковский
В.М. Закалюкин

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

А.С. БОРТАКОВСКИЙ В.М. ЗАКАЛЮКИН

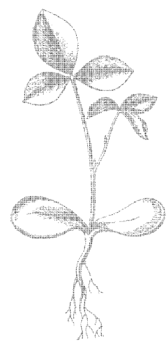
ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

Рекомендовано
Редакционным советом
факультета "Прикладная математика и физика"
Московского авиационного института
(государственного технического университета)

Москва

Издательство МАИ

2006



ББК 16.2
Б 82
УДК 51

Бортаковский А.С., Закалюкин В.М.

Б 82 Задачи повышенной сложности по математике для абитуриентов: Учебное пособие. – 2-е изд., исправл. – М.: Изд-во МАИ, 2006. – 368 с.: ил.

ISBN 5-7035-1636-6

Пособие содержит экзаменационные задачи повышенной сложности, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в МАИ в за последние 20 лет. Подробно обсуждаются методики решения уравнений и неравенств с параметрами, задач с логическими трудностями, применение графических методов в алгебре и аналитических методов в геометрии. В соответствии с предложенной классификацией, нестандартные задачи распределены по темам. По каждой теме рассматриваются правила и методы решения задач, приводятся примеры, подводящие к сложным задачам, а также задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для абитуриентов, слушателей и преподавателей подготовительных курсов, учителей математики и учащихся старших классов.

ISBN 5-7035-1636-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию ... 4

Предисловие ко второму изданию ... 7

Глава 1. Квадратный трехчлен и его свойства ... 8
§1. Преобразования квадратного трехчлена ... 8
§2. Теорема Виета ... 11
§3. График квадратного трехчлена ... 17
§4. Экстремум квадратичной функции ... 21
§5. "Плавающая" парабола ... 26

Глава 2. Специальные методы решения уравнений и неравенств ... 38
§6. Преобразования алгебраических выражений ... 38
6.1. Разложение многочленов на множители ... 38
6.2. Преобразования рациональных выражений ... 47
6.3. Преобразования иррациональных выражений ... 52
§7. Преобразования показательных, логарифмических и тригонометрических выражений ... 70
§8. Оценивание выражений в уравнениях и неравенствах ... 79
8.1. Применение алгебраических неравенств ... 81
8.2. Использование ограниченности функций и неизвестных ... 84

Глава 3. Целые и рациональные числа ... 91
§9. Десятичная запись натуральных чисел и признаки делимости ... 91
§10. Целые и рациональные решения уравнений и неравенств ... 101

Глава 4. Исследование функций ... 111
§11. Свойства и графики функций ... 111
§12. Функции, зависящие от параметров ... 123

Глава 5. Уравнения и неравенства с параметрами ... 129
§13. Прямые методы анализа решений ... 130
§14. Обратные методы синтеза множеств решений ... 137
14.1. Использование симметричности выражений ... 138
14.2. Число корней уравнения ... 141
14.3. Качественные признаки ... 144
§15. Графические методы ... 156
§16. Логический анализ задач с несколькими параметрами ... 172

Глава 6. Построения на координатной плоскости ... 178
§17. Изображение решений уравнений и неравенств ... 178
§18. Геометрические построения ... 191

Глава 7. Планиметрия ... 197
§19. Треугольники и четырехугольники ... 207
§20. Аффинные свойства треугольников и четырехугольников ... 215
§21. Окружности, их комбинации с другими фигурами ... 227

Глава 8. Стереометрия ... 248
§22. Многогранники ... 248
§23. Сечения многогранников ... 275
§24. Круглые тела, их комбинации с многогранниками ... 283
§25. Фигуры, зависящие от параметра ... 306
§26. Логический анализ в геометрических задачах ... 310

Глава 9. Геометрические задачи на экстремум ... 319
§27. Применение производной ... 319
§28. Геометрические неравенства ... 327

Глава 10. Векторы и метод координат ... 338
§29. Элементы векторной алгебры ... 338
§30. Элементы аналитической геометрии ... 357
Авторы нестандартных задач ... 365
Библиографический список ... 366

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Вступительные экзамены в Московский авиационный институт письменные. Продолжительность экзамена 4 часа (240 минут). Экзаменационные билеты содержат задания по всем разделам школьного курса математики (алгебре и началам анализа, геометрии и тригонометрии). Задачи соответствуют программе вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения РФ, а также программе вступительных экзаменов по математике в МАИ.

Вариант содержит разные по сложности задачи. Большая часть – это стандартные задачи. Для их решения используются обычные методы и правила. Необходимо умение выполнять алгебраические и тригонометрические преобразования, знание формул и правил решения типовых задач, внимательность, самоконтроль и умение делать проверку.

Институт заинтересован в отборе в первую очередь наиболее одаренных абитуриентов. Поэтому в билет конкурсного экзамена включают и сложные нестандартные задачи, которые могут решить наиболее способные школьники. Нестандартные задачи являются хорошей моделью маленького исследования, для которого достаточно времени, отведенного на экзамен. При этом проверяются умение и способность абитуриента понять постановку задачи, вникнуть в суть поставленного вопроса, обдумать и выбрать наиболее рациональный путь решения, обосновать и изложить решение в письменном виде. Абитуриента, обладающего такими навыками, пусть даже не ярко выраженными, проще обучать не только математическим дисциплинам, но и любым другим техническим специальностям. Именно из них вырастают хорошие инженеры.

Наконец, включение новых нестандартных задач в экзаменационные билеты гарантирует приемной комиссии, что высокие баллы получат действительно способные школьники, а не специально подготовленные на курсах или репетиторами. Как показывает опыт, "натаскать" школьника на решение нестандартных задач нельзя. Для этого нужно существенно поднять уровень всей математической подготовки абитуриента. Что, в свою очередь, требует качественного процесса обучения на протяжении 2-х и более лет с большим объемом учебных часов. Таким объемом учебной нагрузки не располагают ни преподаватели курсов, ни тем более репетиторы. Статистика показывает, что высшие баллы получают абитуриенты, обучающиеся не менее двух лет в базовых школах, в физико-математических классах, либо в классах с углубленным изучением математики.

Пособие написано для абитуриентов и предназначено для интенсивного повторения школьного курса математики. Цель повторения – повышение общего уровня математической подготовки за счет изучения новых эффективных методов и приемов, неожиданных подходов и логических заключений, в выработке новых навыков и умений, использующихся для решения нестандартных задач.

В первой главе пособия рассматриваются задачи, связанные с квадратным трехчленом и его свойствами. Эти задачи, включая задачи на "плавающую параболу", являются прекрасным введением в нестандартные алгебраические задачи. Благодаря простоте объекта исследования, здесь изучаются довольно сложные (в логическом плане) постановки задач. Во второй главе рассматриваются специальные методы и приемы решения уравнений и неравенств. Здесь изучаются методы преобразования выражений, подстановки и замены неизвестных, переходы от уравнений к системам уравнений и наоборот. Первые две главы содержат мало нестандартных задач. В вузах с серьезным экзаменом по математике редко встретишь задачи непосредственно на "плавающую параболу". Эти задачи, несмотря на их разнообразие, решаются, вообще говоря, одним методом. Чаще в билеты включают задачи, которые после некоторых преобразований сводятся к "плавающей параболе". Сложные уравнения, решение которых сводится только к удачному преобразованию или замене неизвестной, обычно не включают в билеты. Успех решения этих уравнений зависит от того, угадал абитуриент замену или нет, что мало характеризует уровень его подготовки. Другое дело, когда решение зависит от умения обнаружить симметрию выражений, проанализировать область допустимых значений неизвестной и т.п.

В третьей главе рассматриваются задачи на целые и рациональные числа. Методы решения уравнений в целых числах существенно отличаются от уравнений с действительными корнями. Здесь показаны приемы использования десятичной записи натуральных чисел, признаков делимости, сравнения остатков и т.п.

Четвертая глава посвящена исследованию функций. Изучаются способы задания, свойства и графики функций, использование производной. Эти вопросы распространяются на функции, зависящие от параметров.

В пятой главе рассматриваются уравнения и неравенства с параметрами. Эти нестандартные алгебраические задачи встречаются наиболее часто. Сначала объясняются методы прямого анализа решений (§13), затем – методы синтеза множества решений (§14). Применению графических методов посвящен §15. Уравнения и неравенства с несколькими параметрами и особенности их анализа рассматриваются в §16.

В главе 6 изучаются различные построения на координатной плоскости. В первую очередь, это изображения решений уравнений и неравенств. Кроме того, в этой главе рассматриваются задачи с геометрическим содержанием, решение которых сводится к построениям множеств на координатной плоскости.

Главы 7–10 посвящены геометрии. Большинство задач по геометрии, за исключением самых простых, можно отнести к нестандартным: каждый раз план решения приходится составлять заново. Поэтому мы начинаем с обсуждения порядка решения геометрических задач: построения чертежа, анализа данных, методик расчетов. Даны опорные рисунки, типовые дополнительные построения. Рассмотрены методы решения треугольников и четырехугольников, их аффинные свойства, комбинации окружностей с другими фигурами.

Глава 8, посвященная стереометрии, также начинается с порядка решения задач. Обсуждаются правила построения чертежей пространственных фигур. В §22 приводятся основные метрические и аффинные соотношения, используемые для решения многогранников, а также типовые задачи расчета правильных пирамид и призм, треугольных пирамид, приемы вычисления величин углов и расстояний. Сечения многогранников, метрические и аффинные свойства сечений рассматриваются в §23. Комбинации круглых тел с многогранниками изучаются в §24. Глава завершается двумя сложными параграфами, в которых показываются приемы анализа фигур, зависящих от параметра, а также синтеза геометрических фигур или их взаимного расположения.

Геометрическим задачам на экстремум посвящена глава 9. Здесь разбираются два подхода к решению экстремальных задач. Первый подход использует для нахождения экстремальных значений алгебраические неравенства и производную функции. При втором геометрическом подходе применяются геометрические неравенства. Эти методы используются как для планиметрических задач, так и для стереометрических.

В последней главе рассматриваются векторы и метод координат. Эти методы являются мощным средством решения задач по планиметрии и стереометрии. В §29 объясняются элементы векторной алгебры и основной метод применения векторов. В §30 излагаются элементы аналитической геометрии, а также их использование для решения задач.

В каждом параграфе имеется теоретический раздел, в котором напоминаются основные формулы и понятия, формулируются методы и правила решения задач. Применение этих методов и специальных приемов рассматриваются на примерах. В конце каждого параграфа предлагаются задачи для самостоятельного решения, снабженные только ответами.

В конце пособия приведены образцы вариантов экзаменационных билетов вступительных экзаменов в МАИ за несколько лет и ответы к ним. Дана программа вступительного экзамена по математике в МАИ. Большинство задач и все варианты составлены авторами пособия. Часть задач составлена другими преподавателями МАИ. В конце пособия указаны авторы нестандартных задач.

Пособие предназначено для абитуриентов МАИ, для старшеклассников, слушателей и преподавателей подготовительных курсов, физико-математической школы, учащихся и учителей базовых школ МАИ.

Работа над материалами этого пособия была начата совместно с нашими товарищами В.Н. Серегиным и А.М. Скуридиным, светлой памяти которых посвящается эта книга.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Использование первого издания этого пособия для подготовки к вступительному экзамену показало, что наилучших результатов добиваются те абитуриенты, которые, изучая методы и приемы решения нестандартных задач, вместе с тем повторяют и закрепляют навыки и умения решать базовые (стандартные) задачи школьного курса алгебры и геометрии. Для тематического повторения базовых разделов элементарной математики и решения стандартных задач рекомендуем часто переиздаваемое пособие *А.С. Бортаковский, В.М. Закалюкин, В.П. Шапошников* "Экзаменационные задачи и варианты по математике" (М.: Изд-во МАИ, 2001, 2003, 2004 или 2006 г.), которое вместе с настоящей книгой по нестандартным задачам образуют единый учебно-методический комплекс для интенсивной подготовки абитуриентов.

Во втором издании исправлены замеченные в первом издании опечатки и ошибки. Чтобы не дублировать материал, включенный в указанное выше пособие по стандартным задачам, в настоящем пособии по нестандартным задачам исключены варианты экзаменационных билетов и программа по математике для поступающих в МАИ.

Авторы благодарны своим коллегам А.А. Куртасову, Е.А. Руденко, Н.И. Чуркиной и особенно М.У. Хафизову за критические замечания к первому изданию пособия.

ГЛАВА 1. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН И ЕГО СВОЙСТВА

В первой главе рассматриваются задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена. Это простое алгебраическое выражение включается в разнообразные задачи, удобные для проверки знаний и умений абитуриента. Методическая ценность таких заданий велика. Поэтому они традиционно входят в экзаменационные билеты вступительных экзаменов многих вузов.

В §1 даны различные полезные формы представления квадратного трехчлена.

Теореме Виета и ее применениям посвящен §2. Здесь же разбираются задачи на определение знаков корней квадратного уравнения.

В §3 рассматриваются графики квадратичной функции, а также влияние коэффициентов на вид и расположение параболы. Экстремальные значения квадратных трехчленов рассматриваются в §4. Так называемые "задачи на плавающую параболу" рассматриваются в §5.

§1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Квадратным трехчленом от переменной x называется алгебраическое выражение

$$ax^2+bx+c,$$

где a, b, c – заданные числа, причем $a \neq 0$. Числа a, b, c называются ***коэффициентами квадратного трехчлена***, a – ***старший коэффициент***, c – ***свободный член***. Квадратный трехчлен

$$x^2+px+q$$

со старшим коэффициентом, равным 1, называется ***приведенным***.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно записать в другой форме, выделив полный квадрат или разложив на множители.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА

К первым двум членам ax^2+bx квадратного трехчлена ax^2+bx+c добавим (а затем отнимем, чтобы не изменить значение) такое выражение, чтобы, по формуле $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$, получить квадрат суммы:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Выражение в скобках – квадрат суммы двух слагаемых – называется ***полным квадратом***. Следовательно, квадратный трехчлен можно всегда представить в виде

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (1.1)$$

Этот прием – ***выделение полного квадрата*** – часто используется для доказательства неравенств.

Пример 1.1. Доказать, что неполный квадрат суммы (разности) не меньше нуля:

$$a^2\pm ab+b^2\ge 0.$$

Решение. Считая, что левая часть неравенства является квадратным трехчленом относительно переменной a, выделим в нем полный квадрат:

$$a^2\pm ab+b^2=a^2\pm 2a\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+b^2=\left(a\pm\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}.$$

Получаем сумму двух неотрицательных слагаемых, которая, очевидно, больше или равна нулю, *что и требовалось доказать*.

РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ.

Выражение $D=b^2-4ac$ называется ***дискриминантом*** квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Предполагая, что дискриминант неотрицательный ($D\ge 0$), выполним преобразование правой части (1.1), применяя формулу разности квадратов $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right).$$

Следовательно, при неотрицательности дискриминанта квадратный трехчлен может быть представлен как произведение двух линейных множителей (линейных двучленов переменной x):

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \text{ при } D\ge 0. \qquad (1.2)$$

Полученное равенство называется ***формулой разложения квадратного трехчлена на линейные множители***. В равенстве (1.2) через x_1 и x_2 обозначены *корни квадратного трехчлена*

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad (1.3)$$

т.е. такие численные значения переменной x, при которых квадратный трехчлен равен нулю.

Таким образом, если дискриминант положительный $(D>0)$, то квадратный трехчлен может быть представлен как произведение двух различных линейных множителей (1.2). Если дискриминант равен нулю, квадратный трехчлен представляет собой полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{при } D=0.$$

Если дискриминант отрицательный $(D<0)$, разложить квадратный трехчлен на линейные множители нельзя.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

При линейной замене $x=\alpha t+\beta$ ($\alpha\neq 0$) переменной x новой переменной t квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ преобразуется в другой квадратный трехчлен

$$y=a(\alpha t+\beta)^2+b(\alpha t+\beta)+c=a\alpha^2t^2+\alpha(2a\beta+b)t+a\beta^2+b\beta+c.$$

При помощи такой замены, выбирая надлежащим образом коэффициенты α, β, можно получить тот или иной вид квадратного трехчлена. Например:

– чтобы уничтожить линейный член $\alpha(2a\beta+b)x$, достаточно взять $\beta=-\frac{b}{2a}$ (при этом в квадратном трехчлена выделяется полный квадрат);

– чтобы обнулить свободный член, нужно взять в качестве β любой корень квадратного трехчлена, что возможно, если $D\geq 0$ (при этом фактически получаем разложение квадратного трехчлена на линейные множители);

– если $a>0$, то можно сделать квадратный трехчлен приведенным при помощи линейной замены $x=\alpha t+\beta$, взяв $\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Выделить в квадратном трехчлене полный квадрат.

1.1. x^2+ax+a^2. *Ответ*: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}$.

1.2. $-x^2+2ax+a^2$. *Ответ*: $-(x-a)^2+2a^2$.

1.3. $ax^2+6a^2x+10a^3$. *Ответ*: $a(x+3a)^2+a^3$.

Разложить квадратный трехчлен на линейные множители.

1.4. $x^2+ax-2a^2$. *Ответ*: $(x-a)(x+2a)$.

1.5. $x^2-2(a+1)x+4a$. *Ответ*: $(x-2)(x-2a)$.

1.6. x^2+ax+a^2. *Ответ*: разложить нельзя.

Доказать неравенство, выделяя полный квадрат.

1.7. $x^2+ax+2a^2 \geq 0$.

1.8. $a^2+2ab+2b^2 \geq 0$.

1.9. $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$.

1.10. $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$.

Разложить выражение на множители, рассматривая его как квадратный трехчлен относительно подходящей переменной.

1.11. $2x^3-2ax-ax^2+a^2$. *Ответ*: $(a-x^2)(a-2x)$.

1.12. $x^3-x^4+xy+y^2$. *Ответ*: $(y+x^2)(y-x^2+x)$.

1.13. $x^2y^2-x^3-y^3+xy+yz+xz-x^2z-y^2z+z^2$.

Ответ: $(z-x^2+y)(z+x-y^2)$.

Для квадратного трехчлена $4x^2+3x-7$ *найти такую линейную замену* $x=\alpha t+\beta$, *после которой вновь полученный квадратный трехчлен (переменной* t *) окажется приведенным и*

1.14. свободный член будет равен нулю.

Ответ: $x=\pm\,0{,}5t+1$ или $x=\pm 0{,}5t-1{,}75$.

1.15. будет отсутствовать линейный член. *Ответ*: $x=0{,}5t-0{,}375$.

§2. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Помимо явной формулы корней квадратного уравнения (1.3), содержащей иррациональные выражения, имеются более простые формулы Виета, связывающие корни квадратного трехчлена и его коэффициенты.

Прямая теорема Виета. *Если* x_1 *и* x_2 *корни квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$, *то*

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{2.1}$$

Обратная теорема Виета. *Для любых двух чисел* x_1 *и* x_2 *существует приведенное квадратное уравнение* $x^2+px+q=0$, *корнями которого они являются, причем*

$$p=-(x_1+x_2) \quad \text{и} \quad q=x_1x_2\ . \tag{2.2}$$

Теорема Виета справедлива для любых квадратных уравнений, в том числе, и для тех, которые имеют комплексные корни. Поэтому, применяя теорему для решения задач, в которых рассматриваются только действительные корни, нужно обязательно проверить существование таких корней.

Пример 2.1. Пусть x_1, x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Выразить через p и q:

а) $x_1^2+x_2^2$; **б)** $x_1^3+x_2^3$; **в)** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; **г)** $(x_1-x_2)^2$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. Преобразуем заданные выражения, выделяя в них сумму и произведение корней:

а) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$;

б) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=(-p)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=-p(p^2-3q)$;

в) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{p^2-2q}{q}$;

г) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q$.

Ответ: **а)** p^2-2q; **б)** $-p^3+3pq$; **в)** $\frac{p^2-2q}{q}$; **г)** p^2-4q.

Замечание. В пункте **г)** примера 2.1. доказано, что дискриминант приведенного квадратного трехчлена равен квадрату разности его корней:

$$D=p^2-4q=(x_1-x_2)^2.$$

Пример 2.2. Пусть x_1, x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются:

а) x_1+x_2, x_1x_2; **б)** $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета для данного квадратного уравнения имеем: $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$. Требуется составить новое приведенное квадратное уравнение $x^2+Px+Q=0$, корни которого выражаются через корни данного уравнения. Для этого достаточно определить коэффициенты P и Q, что можно сделать, используя обратную теорему Виета.

а) $-P=(x_1+x_2)+x_1x_2=-p+q$; $Q=(x_1+x_2)\cdot(x_1x_2)=-pq$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2+(p-q)x-pq=0$.

б) $-P=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{p^2-2q}{q}$;

$Q=\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2}{x_1}=1$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$x^2-\frac{p^2-2q}{q}x+1=0.$$

Ответ: **а)** $x^2+(p-q)x-pq=0$; **б)** $x^2-\dfrac{p^2-2q}{q}x+1=0$.

Пример 2.3. Составить приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $1+\sqrt{2}$.

Решение. Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q имеет корень $x_1=1+\sqrt{2}$, то второй корень $x_2=-p-1-\sqrt{2}$, а их произведение

$$x_1x_2=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-p-1-\sqrt{2}\right)=-p-1-2-\sqrt{2}(-p-2)=q,$$

где q – целое число. Поэтому $p=-2$ и $q=-1$. *Ответ*: $x^2-2x-1=0$.

По теореме Виета, т.е. не решая квадратного уравнения, *можно определить знаки корней*. Действительно, для корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ справедливы следующие условия:

корни имеют разные знаки $\Leftrightarrow$ $q<0$;

оба корня положительные $\Leftrightarrow \begin{cases}-p>0,\\ q>0,\\ D>0;\end{cases}$

оба корня отрицательные $\Leftrightarrow \begin{cases}-p<0,\\ q>0,\\ D>0.\end{cases}$

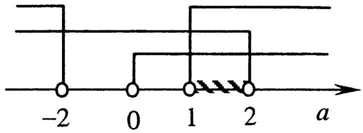
Покажем, например, что выполнение условий последней системы неравенств обеспечивает отрицательность корней x_1, x_2. В самом деле, уравнение имеет два корня, так как дискриминант больше нуля. Произведение корней положительно ($x_1x_2=q>0$), следовательно, они имеют одинаковые знаки. Сумма корней отрицательна ($x_1+x_2=-p<0$), значит, оба корня – отрицательные.

Таким образом, рассматриваемые условия являются достаточными для существования двух отрицательных корней приведенного квадратного уравнения. Необходимость этих условий очевидна.

Пример 2.4. При каких значениях a уравнение $x^2+2ax-a+2=0$ имеет два отрицательных корня?

Решение. Составляем систему условий (необходимых и достаточных) для существования двух отрицательных корней, а затем решаем ее:

$$\begin{cases} -2a<0 \\ -a+2>0 \\ 4a^2+4a-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<2 \\ (a-1)(a+2)>0 \end{cases}$$



Ответ: $a\in(1;2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Пусть x_1 *и* x_2 *– корни уравнения* $x^2+px+q=0$. *Составить приведенное квадратное уравнение* $X^2+PX+Q=0$, *корни* X_1 *и* X_2 *которого удовлетворяют равенствам:*

2.1. $X_1=x_2$, $X_2=x_1$. *Ответ*: $X^2+pX+q=0$.

2.2. $X_1=\dfrac{1}{x_1}$, $X_2=\dfrac{1}{x_2}$. *Ответ*: $X^2+\dfrac{p}{q}X+\dfrac{1}{q}=0$.

2.3. $X_1=x_1^2+x_2^2$, $X_2=x_1x_2$. *Ответ*: $X^2-(p^2-q)X+q(p^2-2q)=0$.

Составить приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого задан.

2.4. $x_1=\sqrt{3}$. *Ответ*: $x^2-3=0$.

2.5. $x_1=1+\sqrt{2}$. *Ответ*: $x^2-2x-1=0$.

2.6. $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$. *Ответ*: $x^2-4x-1=0$.

2.7. $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. *Ответ*: такого уравнения нет.

2.8. При каком значении p разность корней уравнения $x^2 + px + 2 = 0$ равна 1? *Ответ*: ± 3.

2.9. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 254. Найти число p. *Ответ*: ± 16.

2.10. Найти коэффициент b, если разность корней квадратного уравнения $x^2 + bx + 30 = 0$ равна 1. *Ответ*: ± 11.

2.11. Найти p и корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - px + 2 = 0$, если

$\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{17}{4}$. *Ответ*: $p = \pm 5$; $x_1 = \mp 0{,}5$; $x_2 = \mp 2$.

2.12. При каких значениях a один из корней уравнения $ax^2 + 8x + a + 4 = 0$ в три раза больше другого? *Ответ*: -6.

2.13. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 - 3ax + a + 15 = 0$ в два раза больше другого? *Ответ*: 3.

2.14. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 - 7x + 2a = 0$ в два раза больше одного из корней уравнения $x^2 - 5x + a = 0$?

Ответ: 6.

2.15. Найти все a, при которых в уравнении $a^3x^2 + (3a^2 - 7a)x + 1 = 0$ один из корней равен квадрату другого. *Ответ*: 1,5.

2.16. Найти все значения k, при которых уравнение $3x^2 - 12x - k = 0$ имеет два положительных корня. *Ответ*: $k \in (-12;0)$.

Найти все значения q, при которых уравнение $x^2 - 2x + q = 0$

2.17. имеет два корня разных знаков. *Ответ*: $q < 0$.

2.18. имеет два положительных корня. *Ответ*: $0 < q < 1$.

2.19. не имеет отрицательных корней. *Ответ*: $q \geq 0$.

2.20. не имеет положительных корней. *Ответ*: $q > 1$.

2.21. не имеет корней. *Ответ*: $q > 1$.

2.22. имеет ровно один положительный корень. *Ответ*: $q \leq 0$ или $q = 1$.

Дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Записать необходимые и достаточные условия для следующей комбинации знаков корней этого уравнения:

2.23. корни имеют разные знаки (один корень положительный, другой отрицательный). *Ответ*: $q < 0$.

2.24. корни имеют одинаковые знаки (либо оба положительные, либо оба отрицательные). *Ответ*: $q > 0$ (и) $p^2 - 4q > 0$.

2.25. оба корня больше нуля. *Ответ*: $q > 0$ (и) $p < 0$ (и) $p^2 - 4q > 0$.

2.26. ровно один корень больше нуля.

Ответ: $\{ q < 0 \}$ (или) $\{ p < 0$ (и) $[p^2 - 4q = 0$ (или) $q = 0] \}$.

2.27. хотя бы один корень больше нуля.

Ответ: $\{ q < 0 \}$ (или) $\{ q > 0$ (и) $p < 0$ (и) $p^2 - 4q \geq 0 \}$.

2.28. нет положительных корней.

Ответ: $\{ q \geq 0$ (и) $p \geq 0 \}$ (или) $\{ p^2 - 4q < 0 \}$.

При каждом значении a определить количество и знаки корней уравнений.

2.29. $ax^2 + 2ax + a^2 + 5a + 7 = 0$.

Ответ: при $a < 0$ – корни разных знаков; при $a \geq 0$ – нет корней.

2.30. $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + a^2 + a + 1 = 0$.

Ответ: при $a < 2$ – два корня разных знаков; при $a \geq 2$ – нет корней.

2.31. $ax^2 - 2x + 1 = 0$.

Ответ: при $a < 0$ – два корня разных знаков; при $a = 0$ – один положительный корень; при $0 < a < 1$ – два положительных корня; при $a = 1$ – один положительный корень; при $a > 1$ – нет корней.

2.32. $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$ – нет корней; при $a = 1$ – один отрицательный корень; при $a = 2$ или $a = 6$ – один положительный корень; при $a \in (1; 1{,}5)$ – два отрицательных корня; при $a = 1{,}5$ – один отрицательный корень, другой равен нулю; при $a \in (1{,}5; 2)$ – два корня разных знаков; при $a \in (2; 6)$ – два положительных корня.

§3. ГРАФИК КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Графиком квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c$$

является ***парабола***, ось симметрии которой параллельна оси ординат (оси Oy). Для построения этой параболы определяем:

1) направление ветвей:

   если $a > 0$, то ветви направлены вверх;

   если $a < 0$, то ветви направлены вниз;

2) координаты (x_B, y_B) вершины параболы: $x_B = -\dfrac{b}{2a}$; $y_B = -\dfrac{D}{4a}$.

Затем находим несколько точек (трех, четырех точек бывает достаточно), через которые проходит график, вычисляя их координаты $(x; ax^2 + bx + c)$ при некоторых значениях x. Отмечаем эти точки и вершину параболы на координатной плоскости и рисуем график, учитывая, что он симметричен относительно прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$.

При необходимости находим точки пересечения параболы с осями координат:

если дискриминант положительный ($D > 0$), то парабола пересекает ось абсцисс (ось Ox) в двух точках:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

если дискриминант равен нулю ($D = 0$), то парабола касается оси x в одной точке $x_B = \dfrac{-b}{2a}$;

если дискриминант отрицательный ($D < 0$), то парабола не пересекает ось абсцисс.

Ось ординат график пересекает всегда в точке $(0; c)$.

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ВИД И РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКА

Знак старшего коэффициента (a) квадратного трехчлена определяет направление ветвей параболы. Чем больше по абсолютной величине коэффициент a, тем круче ветви параболы. На рис. 3.1 изображены графики функции $y = ax^2$ при различных значениях a.

От коэффициента b зависит, в первую очередь, положение оси симметрии, которая имеет уравнение $x = -\dfrac{b}{2a}$. Геометрический смысл b – это угловой коэффициент касательной к параболе, проведенной в точке пересечения параболы с осью ординат, т.е. $b = y'(0)$. Величина b показывает скорость возрастания (при $b > 0$) или убывания (при $b < 0$) квадратного трехчлена в нуле.

Свободный член c показывает, где парабола пересекает ось ординат (это точка $y = c$).

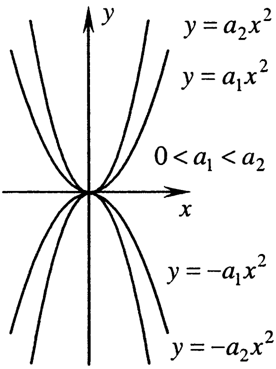


Рис.3.1

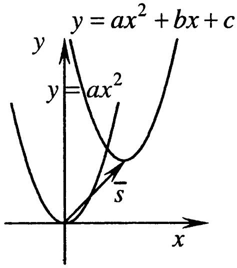


Рис.3.2

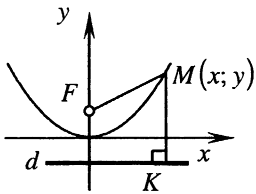


Рис.3.3

График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ можно получить (см. рис. 3.2) параллельным переносом параболы $y = ax^2$ на вектор

$$\bar{s} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right).$$

Заметим, что квадратный трехчлен задается тремя параметрами (его коэффициентами). Поэтому график квадратного трехчлена можно построить, если даны три независимых условия. Это могут быть координаты трех точек (с разными абсциссами), принадлежащих параболе, или координаты вершины параболы и еще одной ее точки, или другие аналогичные условия. Если известно, что точка $M(x_1; y_1)$ принадлежит графику квадратного трехчлена, то его коэффициенты связаны уравнением $ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$.

В заключение приведем геометрическое определение параболы. ***Параболой*** называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки F (***фокус параболы***) и данной прямой

d (***директриса параболы***). Для параболы $y = ax^2$ фокусом является точка $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$, а директриса задается уравнением $y = -\frac{1}{4a}$. На рис. 3.3 точка M, лежащая на параболе, равноудалена от фокуса F и директрисы d, т.е. $FM = MK$. Запишем это соотношение в координатной форме:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = y + \frac{1}{4a}.$$

Возводя обе части равенства в квадрат и приводя подобные члены, получаем уравнение $y = ax^2$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Определить знак дискриминанта D и знаки коэффициентов a, b, c квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, если его график имеет вид, изображенный на рис. 3.4, *а, б, в, г, д, е*.

Ответ: **а)** $D > 0$, $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$; **б)** $D > 0$, $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$;
в) $D < 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; **г)** $D > 0$, $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
д) $D < 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$; **е)** $D = 0$, $a < 0$, $b = 0$, $c = 0$.

3.2. На рис. 3.5, *а, б, в* изображены графики двух квадратных трехчленов $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ (парабола 1) и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ (парабола 2). Сравнить между собой величины соответствующих коэффициентов.

Ответ: **а)** $a_1 > a_2$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 > c_2$; **б)** $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 = c_2$;
в) $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 > c_2$.

3.3. На рис. 3.6, *а, б, в* изображены графики двух приведенных квадратных трехчленов $y = x^2 + p_1x + q_1$ (парабола 1) и $y = x^2 + p_2x + q_2$ (парабола 2). Сравнить дискриминанты $D_1 = p_1^2 - 4q_1$ и $D_2 = p_2^2 - 4q_2$ и соответствующие коэффициенты.

Ответ: **а)** $D_1 = D_2$, $p_1 > p_2$, $q_1 < q_2$; **б)** $D_1 < D_2$, $p_1 > p_2$, $q_1 = q_2 = 0$;
в) $D_1 > D_2$, $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$.

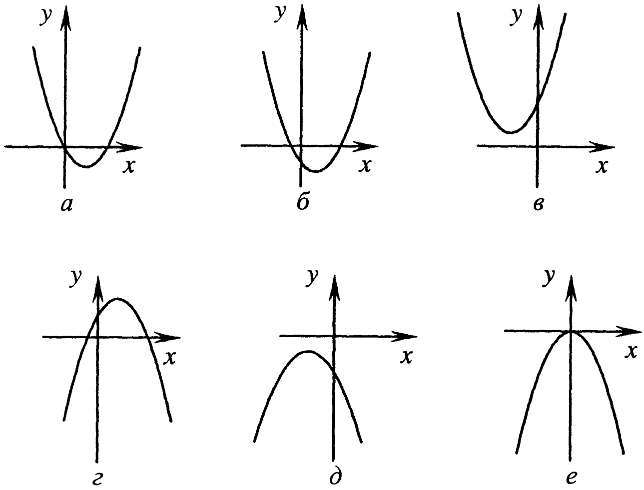


Рис.3.4

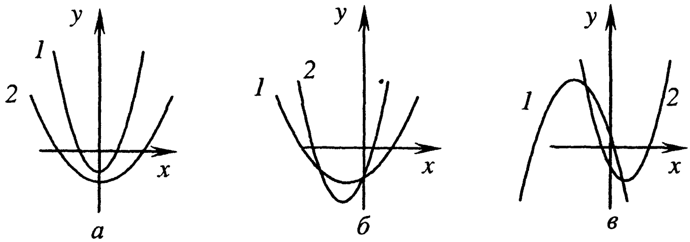


Рис.3.5

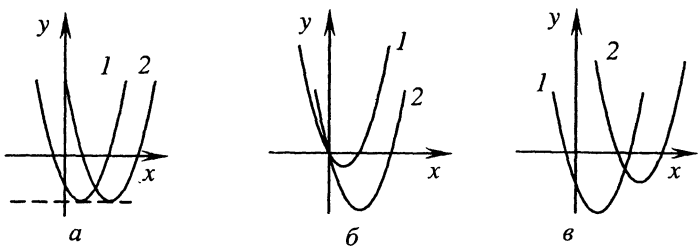


Рис.3.6

Найти коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что его график:

3.4. проходит через точки $A(0;1)$, $B(1;-2)$, $C(2;-1)$.

Ответ: $a = 2$; $b = -5$; $c = 1$.

3.5. симметричен относительно прямой $x = -1$ и проходит через точки $A(-1;1)$ и $B(1;-5)$. *Ответ*: $a = -1{,}5$; $b = -3$; $c = -0{,}5$.

3.6. касается прямой $y = 1$ в точке $A(2;1)$ и проходит через точку $B(0;-3)$.

Ответ: $a = -1$; $b = 4$; $c = -3$.

3.7. При каких значениях a прямая $y = 2 - x$ проходит через вершину параболы $y = -x^2 + 2ax - 2a$? На координатной плоскости изобразить данную прямую и параболу при найденном значении a. *Ответ*: -1; 2.

Построить параметрическое семейство парабол (с параметром a).

3.8. $y = ax^2 + 1$. *Ответ*: пучок парабол с общей вершиной $A(0;1)$.

3.9. $y = (x - a)^2 + 1$.

Ответ: семейство парабол с вершинами на прямой $y = 1$.

3.10. $y = x^2 + a(x + 1) + 1$. *Ответ*: пучок парабол с общей точкой $A(-1;2)$.

3.11. $y = (x - a)^2 + 2a$.

Ответ: семейство парабол с вершинами на прямой $y = 2x$.

§4. ЭКСТРЕМУМ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

ТОЧКА ЭКСТРЕМУМА КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Квадратный трехчлен, рассматриваемый как функция $y = ax^2 + bx + c$ аргумента x, имеет одну критическую точку $x_B = -\dfrac{b}{2a}$ (это абсцисса вершины параболы). Если $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх), то x_B – точка минимума. Если $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз), то x_B – точка максимума. Экстремальное значение функции совпадает с ординатой вершины параболы $y_B = -\dfrac{D}{4a}$.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Задача нахождения экстремальных значений квадратичной функции на заданном промежутке числовой оси сводится к сравнению значений функции на концах промежутка и в критической точке x_B, если она принадлежит заданному промежутку.

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Найти критическую точку $x_B=-\dfrac{b}{2a}$ квадратного трехчлена.

2. Вычислить $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ – значения функции $f(x)$ на концах заданного отрезка $[\alpha;\beta]$. Если критическая точка x_B принадлежит интервалу $(\alpha;\beta)$, то вычислить значение $f(x_B)$.

3. Среди вычисленных в пункте 2 значений выбрать большее и меньшее – это будут, соответственно, наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена на заданном промежутке.

Пример 4.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2-4x-1$ на промежутке

а) $[0;1]$; **б)** $[0;5]$; **в)** $[0;+\infty)$.

Решение. Находим критическую точку $x_B=2$ (это абсцисса вершины параболы). Вычисляем значения квадратного трехчлена при $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=5$: $f(0)=-1$, $f(1)=-4$, $f(2)=-5$, $f(5)=4$. Теперь для задач **а** и **б** выполним отбор наибольшего и наименьшего значений (пункт 3 алгоритма):

а) так как критическая точка $x_B=2$ не принадлежит отрезку $[0;1]$, то экстремальные значения достигаются на концах отрезка

$$f_{наиб}=\max\{-1;-4\}=-1;\quad f_{наим}=\min\{-1;-4\}=-4;$$

б) критическая точка $x_B=2$ принадлежит рассматриваемому отрезку $[0;5]$, поэтому сравниваем три значения:

$$f_{наиб}=\max\{-1;-5;4\}=4;\quad f_{наим}=\min\{-1;-5;4\}=-5.$$

В задаче (**в**) промежуток неограничен. Так как старший коэффициент (при x^2) положительный, то при неограниченном возрастании аргумента x функция принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, наибольшего значения на заданном промежутке функция не достигает. Наименьшее значение функция принимает в критической точке $x_B=2$: $f_{наим}=f(2)=-5$.

Ответ: **а)** $f_{\max} = -1$, $f_{\min} = -4$; **б)** $f_{\max} = 4$, $f_{\min} = -5$;
в) наибольшего значения нет, $f_{\min} = -5$.

Экстремальное значение квадратного трехчлена можно найти, **выделив в нем полный квадрат**. Этот прием часто используется для доказательства неравенств (см. пример 1.1). Реже используется обратный прием, когда из условия знакопостоянства квадратного трехчлена заключают, что его дискриминант меньше или равен нулю.

Пример 4.2. Доказать неравенство (***Коши – Буняковского***):

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Решение. Заметим, что при $a_1 = a_2 = 0$ неравенство выполняется (как равенство). Поэтому далее будем предполагать, что a_1 и a_2 не равны нулю одновременно, т.е. $a_1^2 + a_2^2 \ne 0$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$y = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2,$$

которая при любых значениях аргумента x принимает неотрицательные значения. Раскрывая скобки, получаем квадратный трехчлен

$$y = \left(a_1^2 + a_2^2\right)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + b_1^2 + b_2^2,$$

который не принимает отрицательных значений. Учитывая, что старший коэффициент этого квадратного трехчлена положительный, заключаем, что его дискриминант не больше нуля:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \le 0.$$

Отсюда следует справедливость доказываемого неравенства. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда числа a_k и b_k ($k = 1,2$) пропорциональны, т.е. когда существует число такое x, что $b_1 = xa_1$ и $b_2 = xa_2$. Неравенство Коши – Буняковского *доказано.*

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Задача определения области значений функции связана с задачей нахождения наибольшего и наименьшего ее значений. Пусть требуется определить область значений функции $y = f(x)$. Эту задачу можно, в свою очередь, рассматривать как задачу нахождения таких значений параметра y, при которых уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение. Если уравнение $f(x) = y$ сводится к квадратному, то можно воспользоваться необходимым и достаточным условием существование корней квадратного уравнения, а именно, условием неотрицательности дискриминанта. Рассмотрим применение этих соображений на примере.

Пример 4.3. Найти область значений функции $y=\dfrac{3x^2-12x}{x^2+9}$.

Решение. Поставленная задача равносильна следующей: найти все значения y, при которых уравнение $\dfrac{3x^2-12x}{x^2+9}=y$ имеет решение. Преобразуем данное уравнение, умножив обе части на знаменатель дроби:

$$3x^2-12x=y\left(x^2+9\right)\Leftrightarrow (3-y)x^2-12x-9y=0.$$

При $y=3$ получаем линейное уравнение, которое имеет решение. При $y\neq 3$ это уравнение – квадратное. Оно имеет решение только тогда, когда его дискриминант неотрицательный:

$$D=144+36y(3-y)\geq 0.$$

Решая квадратное неравенство

$$144+36y(3-y)\geq 0 \Leftrightarrow y^2-3y-4\leq 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-4)\leq 0,$$

получаем искомую область значений функции $-1\leq y\leq 4$.

Ответ: $-1\leq y\leq 4$.

Задачи для самостоятельного решения

Выделяя полный квадрат, найти экстремальные (максимальные или минимальные) значения функций.

4.1. $y=2-x-x^2$. *Ответ*: $y_{\max}=2{,}25$.

4.2. $y=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$. *Ответ*: $y_{\max}=1$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанном промежутке.

4.3. $y=2-2x-x^2$, $x\in[-2;2]$. *Ответ*: $y_{\text{наиб}}=3$; $y_{\text{наим}}=-6$.

4.4. $y=\dfrac{1}{12-6x+x^2}$, $x\in[0;4]$. *Ответ*: $y_{\text{наиб}}=\dfrac{1}{3}$; $y_{\text{наим}}=\dfrac{1}{12}$.

Найти области значений функций.

4.5. $y=x^2-2x$. *Ответ*: $[-1;+\infty)$.

4.6. $y=x+\dfrac{1}{x}$. *Ответ*: $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

4.7. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$. *Ответ*: $[2; +\infty)$.

4.8. $y = x + \frac{a^2}{x}$. *Ответ*: $(-\infty; -2\cdot|a|] \cup [2\cdot|a|; +\infty)$.

4.9. $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$. *Ответ*: $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Для неотрицательных величин a *и* b *доказать неравенства для средних величин (возвести в квадрат обе части неравенств, а затем выделить полные квадраты):*

4.10. $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$ (при $a + b \ne 0$) – *среднее гармоническое* не превосходит *среднего геометрического*;

4.11. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ – *среднее геометрическое* не превосходит *среднего арифметического*;

4.12. $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ – *среднее арифметическое* не превосходит *среднего квадратичного*.

4.13. Составить такой квадратный трехчлен $f(x)$, чтобы при каждом действительном t наименьшее значение функции $g(x) = f(x) - t\cdot x$ было равно $1 + t - t^2$. *Ответ*: $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 1{,}25$.

4.14. Найти коэффициенты квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что двойное неравенство

$$f(x) < f'(x) < 1 - 2x$$

выполняется при всех x, кроме $x = -1$.

Ответ: $a = -1$, $b = -4$, $c = -5$.

§ 5. "ПЛАВАЮЩАЯ" ПАРАБОЛА

К задачам на "плавающую" параболу относятся те задачи, в которых требуется установить существование действительных корней квадратного трехчлена и определить их расположение на числовой оси. Здесь обычно используют эскизы графиков тех квадратных трехчленов, которые удовлетворяют условиям задачи. При этом формулы корней квадратного уравнения малопригодны из-за их иррациональности.

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Необходимым и достаточным условием существования действительных корней квадратного трехчлена является условие неотрицательности его дискриминанта. Кроме того, учитывая, что графиком квадратного трехчлена является парабола, можно обосновать следующие свойства:

если функция $f(x)=ax^2+bx+c$ *принимает на концах промежутка* $(\alpha;\beta)$ *значения разных знаков* $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, *то на интервале* $(\alpha;\beta)$ *существует один из двух корней уравнения* $ax^2+bx+c=0$;

чтобы квадратное уравнение имело два корня x_1 *и* x_2, *удовлетворяющих условию* $x_1<s<x_2$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $a\cdot f(s)<0$.

Пример 5.1. Доказать, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два решения, если $a(a+b+c)<0$.

Решение. Заметим, что по условию задачи $a\neq 0$, поэтому речь идет о квадратном уравнении. Обозначим $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда, учитывая, что $f(1)=a+b+c$, неравенство $a(a+b+c)<0$ можно записать так $af(1)<0$. Это условие достаточно для существования двух различных корней, лежащих на числовой оси по разные стороны от точки $x=1$. Действительно, если ветви параболы направлены вверх ($a>0$) и значение функции при $x=1$ отрицательное ($f(1)<0$), то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2, причем $x_1<1<x_2$. Такой же вывод получаем и в случае, когда ветви параболы направлены вниз (при $a<0$). *Утверждение доказано.*

"ПЛАВАЮЩАЯ" ПАРАБОЛА

Применение эскизов графика квадратного трехчлена для решения задач, связанных с расположением корней квадратного уравнения, рекомендуется делать по следующей схеме.

1. Нарисовать *подходящую* по условиям задачи параболу (эскиз графика квадратного трехчлена). Таких парабол может быть потребуется несколько.

2. Записать *необходимые* условия для подходящего расположения эскиза графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Обычно указываются:

– направление ветвей параболы ($a \gtrless 0$);

– существование или отсутствие действительных корней ($D \gtrless 0$);

– условия положительности или отрицательности функции в характерных точках ($f(s) \gtrless 0$);

– положение оси параболы относительно характерных точек ($x_B \gtrless s$).

3. Проверить *достаточность* полученной системы условий для подходящего положения параболы. Вместо доказательства достаточности надо попытаться построить параболу, удовлетворяющую полученной системе условий, но не подходящую по условию задачи. Если это удалось, то полученная система условий не гарантирует нужного положения параболы. В противном случае система условий достаточна. Если в процессе проверки достаточности обнаружились лишние условия, то их можно исключить из рассмотрения.

4. Решить полученную в пунктах **2**, **3** систему неравенств.

5. Проверить удовлетворяют ли условиям задачи *крайние положения* подходящей параболы (когда парабола проходит через характерные для задачи точки числовой оси).

6. Записать в ответ множество решений, полученное в пункте **4**, которое дополнить решениями, найденными в пункте **5**.

Замечания. 1. Положение оси параболы можно задавать с помощью производной. Например, неравенство $af'(s) < 0$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы ось параболы располагалась правее прямой $x = s$, что равносильно условию $x_B > s$.

2. Если имеются такие значения параметра, при которых старший коэффициент квадратного трехчлена обращается в нуль, то для этих значений параметра применять алгоритм **1-6** нельзя. Такие значения параметра нужно исследовать отдельно: проверить, подставляя в формулировку задачи, удовлетворяют они условию или нет.

3. Если старший коэффициент квадратного трехчлена в зависимости от параметра может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то приходится рассматривать два случая: когда ветви подходящей параболы направлены вверх, и когда ветви направлены вниз. В некоторых задачах вместо рассмотрения этих двух случаев удобнее умножить квадратный трехчлен на старший коэффициент (тогда старший коэффициент нового квадратного трехчлена будет положительным при любых значениях параметра) и рассматривать подходящие параболы с ветвями, направленными только вверх.

Пример 5.2. При каких значениях a ровно один корень уравнения

$$x^2 - ax + 4a = 0$$

принадлежит промежутку $[-1;2]$?

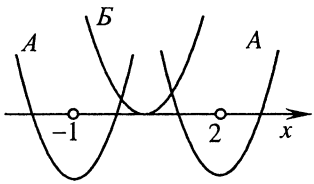


Рис.5.1

Решение. На числовой оси отметим промежуток $[-1;2]$. Эскизом графика функции $f(x) = x^2 - ax + 4a$ при любых значениях a является парабола, ветви которой направлены вверх. Построим подходящие параболы, которые либо пересекают отмеченный промежуток в одной точке (параболы вида A на рис. 5.1), либо касаются этого промежутка (парабола вида *Б*).

Запишем условие, необходимое для указанного положения парабол вида A :

$$f(-1)f(2) < 0\,.$$

Это условие является достаточным для того, чтобы парабола пересекала промежуток $(-1;2)$ числовой оси в одной точке. Подставляя значения $x = -1$ и $x = 2$ в выражение для функции $f(x)$, получаем неравенство $(1 + a + 4a)(4 - 2a + 4a) < 0 \;\Leftrightarrow\; (a+2)(a+0{,}2) < 0 \;\Leftrightarrow\; a \in (-2;-0{,}2)$. Следовательно, все значения параметра a из интервала $(-2;-0{,}2)$ удовлетворяют условию задачи.

Рассмотрим теперь параболу вида *Б*. Она касается оси абсцисс в точке, принадлежащей отрезку $[-1;2]$. Для такого расположения графика функции $f(x) = x^2 - ax + 4a$ необходимо и достаточно выполнения двух условий

$$\begin{cases} D = 0, \\ -1 \le x_B \le 2, \end{cases}$$

где x_B – абсцисса вершины параболы. Приравнивая дискриминант нулю, получаем

$$D = a^2 - 16a = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \text{ (или) } a = 16\,.$$

Второму условию системы $-1 \le \dfrac{a}{2} \le 2$ удовлетворяет только значение $a = 0$. Следовательно, значение $a = 0$ нужно записать в ответ.

Теперь проанализируем крайние положения подходящей параболы. Это случаи, когда она проходит через точки $x = -1$ или $x = 2$. Если $x_1 = -1$ – корень уравнения $x^2 - ax + 4a = 0$, то $a = -0{,}2$, а второй корень – $x_2 = 0{,}8$. Как видим, этот случай не годится, так как имеются два корня на промежутке $[-1;2]$. Пусть $x_1=2$ – корень уравнения $x^2-ax+4a=0$, тогда $a=-2$ и второй корень $x_2=-4$. Этот случай подходит, так как только один из корней принадлежит отрезку $[-1;2]$.

Объединяя найденные значения параметра a, записываем *ответ*: $a\in[-2;-0{,}2)\cup\{0\}$.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛЫ И ПРЯМОЙ, ДВУХ ПАРАБОЛ

Важной характеристикой взаимного положения двух кривых на плоскости является количество их общих точек, т.е. точек пересечения кривых или точек их касания.

На рис. 5.2 изображены все возможные случаи (по количеству общих точек) взаимного расположения параболы $y=ax^2+bx+c$ и прямой:

а) прямая пересекает параболу (в двух точках);

б) прямая касается параболы;

в) прямая не пересекает параболу;

г) прямая пересекает (не касаясь) параболу в одной точке.

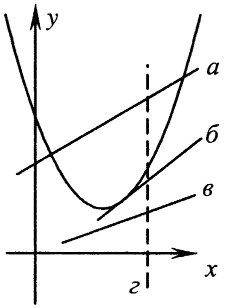


Рис.5.2

Если прямая задается графиком линейной функции $y=kx+l$, то возможны только варианты *а, б, в*. Случай (*г*) не реализуется, так как график функции $y=kx+l$ не может быть вертикальной прямой (параллельной оси ординат, оси симметрии параболы).

Координаты $(x;y)$ общих точек (точек пересечения или касания) параболы $y=ax^2+bx+c$ и прямой $y=kx+l$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=kx+l. \end{cases}$$

Исключая y, получаем квадратное уравнение:

$$ax^2+(b-k)x+c-l=0, \qquad (5.1)$$

корнями которого служат абсциссы точек пересечения параболы и прямой.

Теперь вопрос о взаимном расположении рассматриваемых графиков сводится к количеству решений уравнения (5.1). Если уравнение (5.1) имеет два решения, то прямая пересекает параболу (случай *а* на рис.5.2). Если уравнение (5.1) имеет единственное решение, то прямая касается параболы (случай *б* на рис.5.2). Если же уравнение (5.1) не имеет решений, то прямая и парабола не пересекаются (случай *в* на рис.5.2). Количество решений квадратного уравнения обычно определяют по знаку дискриминанта.

Взаимное расположение двух парабол

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{и} \quad y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \tag{5.2}$$

можно также характеризовать количеством точек пересечения. Составив для координат $(x; y)$ общих точек двух парабол (точек пересечения или касания) систему уравнений:

$$\begin{cases} y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \\ y = a_2x^2 + b_2x + c_2, \end{cases}$$

и исключив из этой системы y, приходим к уравнению

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0, \tag{5.3}$$

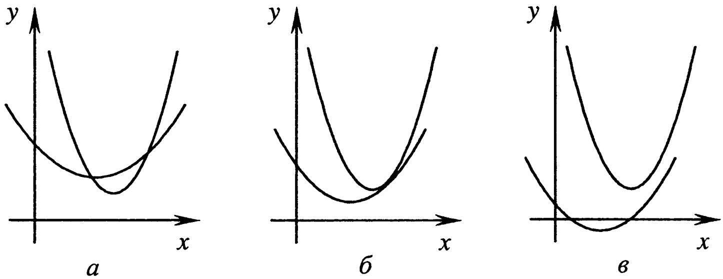


Рис.5.3

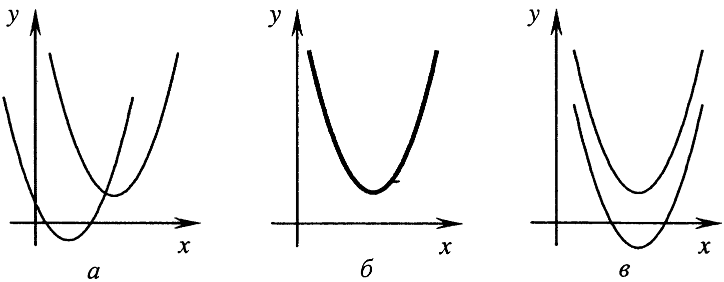


Рис.5.4

которому удовлетворяют абсциссы общих точек. Если уравнение (5.3) квадратное, т.е. $a_1 \neq a_2$, то оно может иметь два корня, один корень или не иметь корней. Этим случаям соответствуют следующие расположения графиков (рис. 5.3): параболы пересекаются в двух точках – (*а*), параболы касаются друг друга – (*б*), параболы не пересекаются – (*в*). Если же $a_1 = a_2$, то уравнение (5.3) не является квадратным. Тогда оно имеет либо одно решение (при $b_1 \neq b_2$), либо бесконечно много решений (когда $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$), либо не имеет решений (при $b_1 = b_2$ и $c_1 \neq c_2$). Этим случаям соответствуют следующие расположения графиков (рис. 5.4): параболы пересекаются в одной точке – (*а*); параболы совпадают – (*б*); параболы не пересекаются – (*в*). Заметим, что при равенстве старших коэффициентов $a_1 = a_2$ квадратные трехчлены (5.2) задают "равные" параболы, которые получаются одна из другой параллельным переносом.

Пример 5.3. При каких значениях c парабола $y = x^2 - 3x + c$:

а) касается прямой $y = 0{,}75x + 1$;

б) высекает на прямой $y = 0{,}75x + 1$ отрезок длины 5;

в) касается параболы $y = -x^2$?

Решение. **а**) Составим уравнение (5.1)

$$x^2 - 3{,}75x + c - 1 = 0. \qquad (5.4)$$

По условию задачи заключаем, что это уравнение должно иметь единственное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был равен нулю

$$D = 3{,}75^2 - 4c + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{289}{64}.$$

б) Пусть парабола пересекает прямую в точках A и B, причем $AB = 5$. Найдем проекцию отрезка AB на ось абсцисс (рис. 5.5). Так как $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$, то $\cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow x_2 - x_1 = AB \cdot \cos\alpha = 4$.

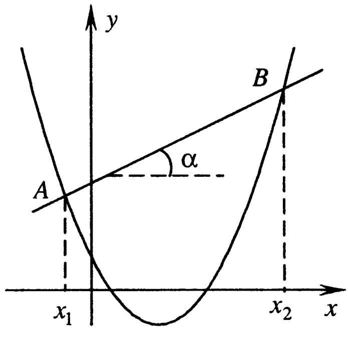


Рис.5.5

Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = 0{,}75x + 1$ и параболы $y = x^2 - 3x + c$ являются корнями уравнения (5.4). Так как дискриминант приведенного квадратного уравнения равен квадрату разности корней, то

$$D = (x_2 - x_1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow D = 3{,}75^2 - 4c + 4 = 16 \Leftrightarrow c = \frac{33}{64}.$$

в) Составим уравнение (5.3) $2x^2 - 3x + c = 0$ и запишем условие существования единственного решения – равенство нулю дискриминанта:

$$D = 9 - 8c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{9}{8}.$$

Ответ: **а**) $c = \frac{289}{64}$; **б**) $c = \frac{33}{64}$; **в**) $c = \frac{9}{8}$.

Пример 5.4. При каких значениях a, b, c параболы

$$y = ax^2 + bx + 1 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 3x + c$$

имеют три общие точки?

Решение. Составим уравнение (5.3):

$$(a-1)x^2 + (b-3)x + 1 - c = 0.$$

Согласно условию задачи, уравнение имеет три решения. Следовательно, это уравнение не квадратное, т.е. $a = 1$. Далее заключаем, что $b = 3$, иначе уравнение имеет только одно решение. Наконец, получаем, что $c = 1$. Таким образом, если две параболы имеют три (более двух) общие точки, то они совпадают. *Ответ*: $a = 1$; $b = 3$; $c = 1$.

Замечание. Касание двух кривых, например графиков двух функций, нужно понимать следующим образом: две кривые считаем ***касающимися*** в некоторой точке, если в этой точке обе кривые касаются одной и той же прямой.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Доказать следующие достаточные условия существования двух корней квадратного уравнения. Если выполняется неравенство

а) $ac < 0$; **б)** $(a - b + c)c < 0$; **с)** $(a + c)^2 < b^2$,

то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два решения.
Справедливо ли обратное утверждение? *Ответ*: **а)** нет; **б)** нет; **в)** нет.

При каких значениях a уравнения имеют единственное решение?

5.2. $ax^2 + (a+5)x + a + 8 = 0$. *Ответ*: 0; $-\dfrac{25}{3}$; 1.

5.3. $\dfrac{ax^2 + (a-4)x + 0{,}5}{x+2} = 0$. *Ответ*: $-4{,}25$; 0; 2; 8.

5.4. $x + \dfrac{a+2}{x} = 2a$. *Ответ*: -2; -1; 2.

5.5. $\dfrac{2ax^2 + 4(a+3)x - 1}{2x^2 + x - 1} = 0$. *Ответ*: $-6{,}5$; $-4{,}5$; 0.

5.6. При каждом действительном значении a вычислить сумму различных действительных корней уравнения $(x+2)\left(x^2-ax+0{,}5a^2-a+1\right)=0$.

Ответ: -1 при $a=2$; -2 при $a\neq 2$.

5.7. Найти все значения a, при которых два уравнения

$$x^2+\left(a^2-4a\right)x+a^3-5a^2+6a=0 \quad \text{и} \quad ax^2-4x=a^2x$$

равносильны. *Ответ*: 0; 2.

При каких значениях a прямая $y=ax+1$ касается

5.8. параболы $y=x(2-x)$? *Ответ*: 0; 4.

5.9. гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$? *Ответ*: $-\dfrac{1}{4}$.

5.10. окружности $(x-4)^2+y^2=1$? *Ответ*: $-\dfrac{8}{15}$; 0.

При каких значениях c парабола $y=x^2+c$ касается

5.11. прямой $y=2x-3$? *Ответ*: -2.

5.12. параболы $y=-x^2+2x$? *Ответ*: 0,5.

5.13. графика функции $y=\dfrac{-1}{x^2}$? *Ответ*: -2

5.14. окружности $x^2+y^2=1$? *Ответ*: $-1{,}25$; 1.

5.15. При каких значениях a один корень уравнения $ax^2-x+2=0$ больше 1, а другой меньше 1? *Ответ*: $a\in(-1;0)$.

5.16. При каких значениях a корни x_1, x_2 квадратного уравнения $2x^2-ax-a^2=0$ удовлетворяют неравенству $x_1<1<x_2$?

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

5.17. Найти все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2-6ax+9a^2-2a+2=0$ больше 3. *Ответ*: $a\in\left(\dfrac{11}{9};+\infty\right)$.

5.18. При каких значениях a только один корень уравнения $x^2-2(a+1)x+6a-3=0$ больше 2? *Ответ*: $a\in(-\infty;1{,}5)\cup\{2\}$.

5.19. При каких значениях a все корни уравнения $2ax^2+4(a-1)x+1=0$ больше (-1)? *Ответ*: $a\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[2;\frac{5}{2}\right)$.

5.20. При каких значениях a один корень уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+a-2=0$ принадлежит промежутку $(0;2)$, а второй – промежутку $(3;5)$? *Ответ*: $a\in(1;3)$.

5.21. При каких значениях a ровно один корень уравнения $(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$ больше 1? *Ответ*: $a\in(-\infty;0{,}25)\cup(1;+\infty)$.

5.22. Как расположены корни квадратного уравнения $2ax^2+4(a-1)x+1=0$ относительно точки 2 числовой оси?

Ответ: $x_1<x_2<2$ при $a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{7}{16};\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$; $x_1<2<x_2$ при $a\in\left(0;\frac{7}{16}\right)$; $x_1<x_2=2$ при $a=\frac{7}{16}$; единственное решение $x=1<2$ при $a=0{,}5$; единственное решение $x=-0{,}5<2$ при $a=2$; нет корней при $a\in(0{,}5;\ 2)$.

Дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$. *Записать необходимые и достаточные условия для следующего расположения корней* x_1 *и* x_2 *этого уравнения*:

5.23. один корень меньше 1, другой – больше 1 ($x_1<1<x_2$).

Ответ: $1+p+q<0$.

5.24. оба корня больше 1. *Ответ*: $1+p+q>0$ (и) $p^2-4q>0$ (и) $\frac{-p}{2}>1$.

5.25. оба корня меньше 1. *Ответ*: $1+p+q>0$ (и) $p^2-4q>0$ (и) $\frac{-p}{2}<1$.

5.26. ровно один корень больше 1.

Ответ: { $1+p+q<0$ } (или) { $\frac{-p}{2}>1$ (и) $p^2-4q=0$ }.

5.27. хотя бы один корень больше 1.

Ответ: $\{\ 1+p+q<0\ \}$ (или) $\{\ 1+p+q>0$ (и) $p^2-4q>0$ (и) $\dfrac{-p}{2}>1\ \}$ (или) $\{\ \dfrac{-p}{2}>1$ (и) $p^2-4q=0\ \}$.

5.28. нет корней, больших 1.

Ответ: $\{\ p^2-4q<0\ \}$ (или) $\{\ 1+p+q\geq 0$ (и) $p^2-4q\geq 0$ (и) $\dfrac{-p}{2}\leq 1\ \}$.

При каких значениях a ровно один корень уравнения $x^2+2ax+4=0$

5.29. принадлежит промежутку $(1;3)$; *Ответ*: $a\in\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{13}{6}\right]\cup\{-2\}$.

5.30. принадлежит промежутку $[1;3]$. *Ответ*: $a\in\left[-\dfrac{5}{2};-\dfrac{13}{6}\right)\cup\{-2\}$.

Найти все значения a, при которых

5.31. оба корня уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат промежутку $(1;3)$;

Ответ: $a\in\left(2\sqrt{2};3\right)$.

5.32. оба корня уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат промежутку $[1;3]$;

Ответ: $a\in\left(2\sqrt{2};3\right]$.

5.33. ровно один корень уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежит интервалу $(1;3)$. *Ответ*: $a\in\left\{2\sqrt{2}\right\}\cup\left[3;\dfrac{11}{3}\right)$.

5.34. При каких значениях a все решения уравнения $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-3=0$ принадлежат промежутку $(-1;5)$?

Ответ: $a\in\{1\}\cup\left(\dfrac{19}{8};+\infty\right)$.

5.35. При каких значениях a все корни уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ принадлежат промежутку $(0;3)$? *Ответ*: $a\in\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\{1\}$.

5.36. При каких значениях a все корни уравнения $x^2-2a^2x+a^4=4a^2$ принадлежат промежутку $(-1;15]$? *Ответ*: $[-3;-1)\cup(-1;1)\cup(1;3]$.

5.37. При каких значениях a все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ принадлежат промежутку $[2;4]$? *Ответ*: $a=3$.

5.38. Найти все значения a, при которых все корни уравнения $x^2+x+a>0$ больше a. *Ответ*: $a<-2$.

5.39. При каких действительных значениях a только один из двух корней уравнения $ax^2-10x+2a=0$ принадлежит интервалу $\left(\frac{1}{a};\, a\right)$?

Ответ: $\left(1{,}5\sqrt{2};\, 2\sqrt{2}\right)$.

5.40. При каких значениях a корни уравнений $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ чередуются (между корнями каждого уравнения лежит ровно один корень другого уравнения)? *Ответ*: $a<-2$.

Дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$. *Записать необходимые и достаточные условия для следующего расположения корней этого уравнения (относительно заданного промежутка числовой оси):*

5.41. корни лежат по разные стороны промежутка $[1;2]$.

Ответ: $p+q+1<0$ (и) $2p+q+4<0$.

5.42. оба корня лежат на промежутке $[1;2]$.

Ответ: $p+q+1\ge 0$ (и) $2p+q+4\ge 0$ (и) $-4<p<-2$ (и) $p^2-4q>0$.

5.43. корни лежат вне промежутка $[1;2]$.

Ответ: { $p+q+1<0$ (и) $2p+q+4<0$ }

(или) { $p+q+1>0$ (и) $2p+q+4>0$ (и) { $p<-4$ (или) $p>-2$ }}.

5.44. ровно один корень принадлежит промежутку $(1;2)$.

Ответ: $(p+q+1)(2p+q+4)<0$ (или) { $-4<p<-2$ (и) $p^2-4q=0$ }.

5.45. хотя бы один корень принадлежит промежутку $(1;2)$.

Ответ: $(p+q+1)(2p+q+4)<0$ (или)

{ $p+q+1\ge 0$ (и) $2p+q+4\ge 0$ (и) $-4<p<-2$ (и) $p^2-4q\ge 0$ }.

5.46. нет корней на промежутке $[1;2]$.

Ответ: $p^2-4q<0$ (или)

$\{\ p+q+1>0$ (и) $p>-2\ \}$ (или) $\{\ 2p+q+4>0$ (и) $p<-4\ \}$.

5.47. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2-ax+1<0$ содержит отрезок $[1;2]$. *Ответ*: $a\in(2{,}5;+\infty)$.

5.48. Найти все значения a, при которых неравенство $x^2-ax+a>0$ является следствием неравенства $|x|<1$. *Ответ*: $a>0$.

5.49. При каких значениях a неравенство $(a-2)x^2-2(a+3)x+12a<0$ является следствием неравенства $3\le x\le 4$? *Ответ*: $a\in(-\infty;2{,}4)$.

5.50. При каких значениях a неравенство $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a<0$ является следствием неравенства $2\le x\le 3$? *Ответ*: $a\in(-\infty;5)$.

5.51. При каких значениях a из неравенства $x<2$ следует неравенство $ax^2+(a+1)x-3<0$? *Ответ*: $a\in\left(-7-4\sqrt{3};0\right]$.

5.52. Найти все значения a, при которых неравенство $x^2+4x+3<0$ является следствием неравенства $x^2-a\left(1+a^2\right)x+a^4<0$.

Ответ: $a\in\left(-\sqrt[3]{3};-1\right]\cup\{0\}\cup\{1\}$.

5.53. При каких значениях a абсциссы всех общих точек графиков двух функций

$$y=(a+1)x^2+6ax+8-15a \quad \text{и} \quad y=6x-7a$$

больше 1? *Ответ*: $\left[-1;\dfrac{1}{17}\right]$.

5.54. При каких значениях a ординаты всех общих точек графиков двух функций

$$y=ax^2-(10-3a)x+7-2a \quad \text{и} \quad y=-4x+3$$

меньше 1? *Ответ*: $\left[0;\dfrac{18}{17}\right]$.

ГЛАВА 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В этой главе рассматриваются специальные приемы решения уравнений и неравенств, такие, как преобразования выражений в уравнениях (и неравенствах), замена неизвестной, приемы разложения на множители, переход от уравнения к системе уравнений и наоборот. Эти приемы применяются в примерах и задачах в §6 и §7.

В §8 разбираются методы решения, основанные на оценках выражений. Оценивание производится с использованием классических неравенств, ограниченности функций или ограниченности допустимых значений неизвестных.

В §9 рассматриваются уравнения, которые не изменяются при специальной замене неизвестной. В этом случае можно говорить о некоторой симметрии данного уравнения и использовать это обстоятельство для нахождения корней.

§6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Различные преобразования алгебраических выражений, входящих в уравнения (или неравенства), – это основной метод их решения. Цель преобразований – получение более простого равносильного уравнения или его следствия. Некоторые стандартные виды преобразований (разложение на множители, замены переменных и т.п.) рассматриваются ниже.

6.1. Разложение многочленов на множители

Многочленом степени n ***от переменной*** x называется выражение вида

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \, ,$$

где a_0, $a_1, \ldots$, a_n – некоторые числа (называемые ***коэффициентами***). Число a_n – ***старший коэффициент*** ($a_n \neq 0$), a_0 – ***свободный член***. Как видим, многочлен – это алгебраическое выражение, в котором над переменной x производятся только операции умножения (в частности, возведение в натуральную степень) и сложения (вычитания). Поэтому любые значения переменной x являются допустимыми. Число α называется ***корнем многочлена*** $p_n(x)$, если $p_n(\alpha) = 0$.

Целое алгебраическое уравнение – это уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Степень многочлена, стоящего в левой части уравнения, называют ***порядком*** уравнения.

Карл Гаусс доказал, что всякий многочлен выше первой степени с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных множителей вида $(x-\alpha)$ и (или) квадратичных множителей $(x^2 + px + q)$ с отрицательным дискриминантом $D = p^2 - 4q < 0$. Однако для произвольного многочлена выше четвертой степени точные значения коэффициентов линейных и квадратичных множителей в разложении получить нельзя. Для многочленов третьей и четвертой степеней точное разложение можно записать только в виде громоздких выражений. Поэтому в предлагаемых на экзаменах целых алгебраических уравнениях и неравенствах обычно встречаются специально подобранные многочлены, которые можно разложить на множители, используя некоторые стандартные приемы.

Разложение многочлена на линейные множители тесно связано с задачей нахождения его корней. По **теореме Безу** *остаток от деления многочлена* $p_n(x)$ *на линейный двучлен* $(x-\alpha)$ *равен* $p_n(\alpha)$. Следовательно, если многочлен $p_n(x)$ имеет корень $x = \alpha$ ($p_n(\alpha) = 0$), то этот многочлен делится (без остатка) на линейный двучлен $(x-\alpha)$, т.е. многочлен $p_n(x)$ можно разложить на множители $p_n(x) = (x-\alpha)\cdot q_{n-1}(x)$, где $q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ (частное от деления $p_n(x)$ на $x-\alpha$). Поэтому, если многочлен разложен на линейные множители

$$p_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n),$$

то он имеет n корней x_1, $x_2, \ldots,$ x_n, и наоборот, если x_1, $x_2, \ldots,$ x_n – корни многочлена $p_n(x)$, то его можно представить в виде произведения

$$p_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n).$$

ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

1. ***Квадратный трехчлен*** $ax^2 + bx + c$ с неотрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac \ge 0$ раскладывается на линейные множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если дискриминант равен нулю, то квадратный трехчлен является ***полным квадратом*** $ax^2 + bx + c = a(x - x_B)^2$, где $x_B = \dfrac{-b}{2a}$. В этом случае говорят, что квадратный трехчлен имеет ***кратный (двойной) корень***. Если дискриминант D отрицательный, то квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

2. ***Трехчленные уравнения*** вида $ax^{2m} + bx^m + c = 0$ сводятся к квадратным заменой $y = x^m$.

3. ***Возвратное уравнение третьей степени***

$$ax^3 + bx^2 + b\lambda x + a\lambda^3 = 0$$

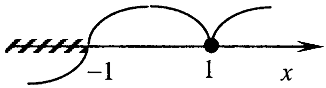
имеет корень $x = -\lambda$. Поэтому многочлен $ax^3 + bx^2 + b\lambda x + a\lambda^3$ делится на $(x + \lambda)$, и в частном получится квадратный трехчлен, разложение которого (если оно возможно) проводится согласно п.**1**.

Этот же прием применяется для решения ***возвратных уравнений произвольной нечетной степени*** $2n+1$:

$$a_n x^{2n+1} + a_{n-1}x^{2n} + \ldots + a_0 x^{n+1} + a_0 \lambda x^n + a_1 \lambda^3 x^{n-1} + \ldots + a_n \lambda^{2n+1} = 0.$$

Пример 6.1. Решить неравенство: $x^3 - x^2 - x + 1 \le 0$.

Решение. Найдем корни возвратного уравнения $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Один корень известен: $x = -1$. Поэтому делим многочлен $x^3 - x^2 - x + 1$ на двучлен $x + 1$.



$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - x^2 - x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3 + x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{1-1}
-\,-2x^2 - x + 1 & \\
-2x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
-\,x + 1 & \\
x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Рис.6.1

Следовательно, $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x^2 - 2x + 1)$. Учитывая, что во второй скобке стоит полный квадрат, получаем $x^3 - x^2 - x + 1 = \; = (x+1)(x-1)^2$. Таким образом, исходное неравенство можно записать в виде $(x+1)(x-1)^2 \le 0$. Применяя метод интервалов (рис. 6.1), приходим к *ответу*: $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$.

4. ***Возвратные уравнения четвертой степени***

$$ax^4+bx^3+cx^2+b\lambda x+a\lambda^2=0$$

сводятся к квадратному заменой $y=x+\dfrac{\lambda}{x}$. Чтобы сделать такую замену, нужно сначала поделить уравнение на x^2 и перегруппировать его члены следующим образом: $a\left(x^2+\dfrac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\dfrac{\lambda}{x}\right)+c=0$. Заметив, что $x^2+\dfrac{\lambda^2}{x^2}=y^2-2\lambda$, получаем для новой неизвестной y квадратное уравнение $a\left(y^2-2\lambda\right)+by+c=0$. Разложение полученного квадратного трехчлена производится согласно п.**1**.

Эта же замена применяется для решения **возвратных уравнений произвольной четной степени** $2n$:

$$a_n x^{2n}+a_{n-1}x^{2n-1}+\ldots+a_1x^{n+1}+a_0x^n+a_1\lambda x^{n-1}+a_2\lambda^2x^{n-2}+\ldots+a_n\lambda^{2n}=0.$$

Пример 6.2. Решить неравенство: $x^4+2x^3-6x^2+2x+1\le 0$.

Решение. Разложим многочлен $x^4+2x^3-6x^2+2x+1$ на множители. Воспользуемся приведенным выше правилом решения возвратных уравнений 4-й степени для разложения левой части неравенства на множители. Вынесем множитель x^2 за скобки и перегруппируем члены следующим образом:

$$x^4+2x^3-6x^2+2x+1=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right].$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках. Сделаем замену $y=x+\dfrac{1}{x}$. Тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, так как $y^2=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$. В результате замены получим $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=y^2-2+2y-6=y^2+2y-8$.

Квадратный трехчлен y^2+2y-8 раскладывается на линейные множители (см. п.1): $y^2+2y-8=(y+4)(y-2)$. Следовательно, возвращаясь к переменной x, получаем разложение выражения в квадратных скобках на множители: $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=\left(x+\dfrac{1}{x}+4\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)$. Значит, исходный многочлен раскладывается на два квадратных множителя:

$$x^4+2x^3-6x^2+2x+1=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right]=$$
$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2-2x+1\right).$$

Первый из полученных множителей раскладывается на два линейных $x^2+4x+1=\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)$, а второй множитель – полный квадрат $(x-1)^2$. Поэтому исходное неравенство можно записать в виде $\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)(x-1)^2\le 0$.

Решая его методом интервалов (рис. 6.2), получаем *ответ*:

$$x\in\left[-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right]\cup\{1\}.$$

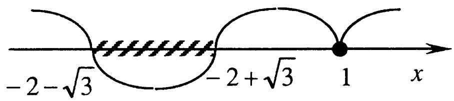


Рис.6.2

5. Уравнения вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$ при $a+d=b+c$ сводятся к квадратному при помощи "***метода серединки***", который состоит в следующем. Перемножаем попарно крайние и средние скобки. Получаем уравнение $\left[x^2+(a+d)x+ad\right]\cdot\left[x^2+(b+c)x+bc\right]=e$, которое сводится к квадратному заменой $y=x^2+(a+d)x$.

Пример 6.3. Решить неравенство: $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)>40$.

Решение. Преобразуем неравенство, используя "метод серединки". Перемножив между собой (попарно) две крайние скобки и две средние скобки, получаем

$$\left(x^2-6x+5\right)\cdot\left(x^2-6x+8\right)>40.$$

Сделаем замену неизвестной $y=x^2-6x$. Для новой неизвестной y получаем квадратное неравенство $(y+5)(y+8)>40 \quad\Leftrightarrow\quad y^2+13y>0 \quad\Leftrightarrow$ $y(y+13)>0$. Подставим в полученное неравенство выражение $y=x^2-6x$: $\left(x^2-6x\right)\left(x^2-6x+13\right)>0$. Первый сомножитель раскладывается на множители, а второй – нет. Следовательно, неравенство можно записать в виде $x(x-6)\left(x^2-6x+13\right)>0$. Решая это неравенство методом интервалов (рис. 4.4), получаем *ответ*: $x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

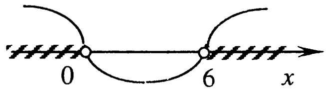


Рис.6.3

6. Уравнения вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2$ при $ad=bc$ сводятся к квадратному при помощи "метода серединки" и последующего деления на x^2. Действительно, перемножив попарно крайние и средние скобки в левой части уравнения, получаем

$$\left(x^2+(a+d)x+ad\right)\cdot\left(x^2+(b+c)x+bc\right)=ex^2.$$

Разделим теперь обе части уравнения на x^2, причем в левой части каждый из двух множителей разделим на x. Тогда получим уравнение $\left[x+\dfrac{ad}{x}+a+d\right]\cdot\left[x+\dfrac{bc}{x}+b+c\right]=e$, которое является квадратным относительно новой неизвестной $y=x+\dfrac{ad}{x}$: $(y+a+d)(y+b+c)=e$.

7. ***Подбор рациональных корней*** алгебраического уравнения с целыми коэффициентами выполняется, используя следующее утверждение: *если несократимая дробь* $x=\dfrac{p}{q}$, *где* $p\in Z$, $q\in N$, *является корнем уравнения*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *то старший коэффициент* a_n *делится (без остатка) на* q ($a_n \vdots q$), *а свободный член* a_0 *делится (без остатка) на* p ($a_0 \vdots p$).

Пример 6.4. Решить неравенство: $2x^3-3x^2-5x+6>0$.

Решение. Если многочлен $2x^3-3x^2-5x+6$ имеет рациональный корень $\dfrac{p}{q}$ ($p\in Z$, $q\in N$), то старший коэффициент (2) должен делится на q, а свободный член (6) – на p. Следовательно, натуральное число q равняется либо 1, либо 2, а целое число p – один из следующих восьми делителей свободного члена: ±1, ±2, ±3, ±6. Перебирая указанные значения p и q, составим все возможные дроби $\dfrac{p}{q}$: ±1, ±2, ±3, ±6, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{3}{2}$.

Если многочлен $2x^3-3x^2-5x+6$ имеет рациональные корни, то эти корни совпадают с какими-либо из перечисленных выше двенадцати рациональных чисел. Подставляя каждое из этих чисел в многочлен, убеждаемся, что числа 1, 2, $-\dfrac{3}{2}$ являются его корнями. Следовательно, многочлен раскладывается на множители $2x^3-3x^2-5x+6=2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. Тогда исходное неравенство можно переписать в виде $2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)>0$ и получить методом интервалов *ответ*: $x\in\left(-\frac{3}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

8. ***Однородные уравнения*** вида $a(p(x))^2+bp(x)q(x)+c(q(x))^2=0$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены (или даже произвольные выражения), после деления на $(q(x))^2$ сводятся к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$ при помощи замены $y=\frac{p(x)}{q(x)}$. Разумеется, при такой замене можно потерять те корни исходного уравнения, которые являются корнями уравнения $q(x)=0$. Поэтому нужно найти все решения уравнения $q(x)=0$ и проверить (подстановкой), являются ли они корнями исходного уравнения.

Такая же замена $y=\frac{p(x)}{q(x)}$ используется для решения однородных уравнений вида: $a_n p^n(x)+a_{n-1}p^{n-1}(x)q(x)+\ldots+a_1 p(x)q^{n-1}(x)+a_0 q^n(x)=0$.

Пример 6.5. Решить неравенство: $x^2(x+1)^2+x(x^2-1)-42(x-1)^2<0$.

Решение. Разложив разность квадратов x^2-1, получаем неравенство:

$$x^2(x+1)^2+x(x+1)(x-1)-42(x-1)^2<0.$$

Левая часть неравенства представляет собой однородное выражение относительно многочленов $p(x)=x(x+1)$ и $q(x)=x-1$. Согласно приведенному выше правилу, нужно разделить неравенство на $q^2(x)=(x-1)^2$ и сделать замену $y=\frac{x(x+1)}{x-1}$. Прежде чем делить неравенство на $(x-1)^2$, проверим, является ли значение $x=1$ решением. Подставляя $x=1$ в неравенство, получаем противоречие: $4<0$. Следовательно, при $x=1$ неравенство не выполняется, и при делении на $(x-1)^2$ никаких решений не потеряем. Считая, что $x\neq 1$, делаем указанную замену и приходим к квадратному неравенству относительно пере-

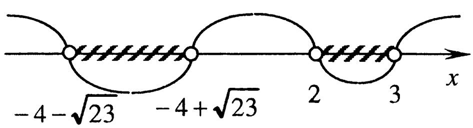


Рис.6.4

менной y: $y^2+y-42<0$. Раскладывая квадратный трехчлен на множители, получаем $(y+7)(y-6)<0$. Возвращаемся к старой неизвестной x:

$$\left(\frac{x(x+1)}{x-1}+7\right)\left(\frac{x(x+1)}{x-1}-6\right)<0.$$

Приведем левую часть к общему знаменателю и умножим на $(x-1)^2$: $(x^2+8x-7)(x^2-5x+6)<0$. Раскладывая квадратные трехчлены на линейные множители, получаем неравенство

$$(x-3)(x-2)\left(x+4+\sqrt{23}\right)\left(x+4-\sqrt{23}\right)<0,$$

которое решаем методом интервалов (рис. 4.5).

Ответ: $x\in\left(-4-\sqrt{23};-4+\sqrt{23}\right)\cup(2;3)$.

9. Если в уравнение входят разные двучлены, например $x+a$ и $x+b$, то полезно сделать ***симметризацию выражений***, содержащих неизвестную. Для этого нужно взять в качестве новой неизвестной среднее арифметическое $t=\dfrac{(x+a)+(x+b)}{2}$, при этом $x+a=t-\dfrac{b-a}{2}$, $x+b=t+\dfrac{b-a}{2}$.

Пример 6.6. Решить уравнение $(x-3)^4+(x+1)^4=38$.

Решение. Если раскрыть скобки, получим уравнение 4-го порядка

$$x^4-4x^3+30x^2-52x+22=0,$$

которое нельзя решить, подбирая рациональные корни. Поэтому этот путь не годится. Попробуем симметризовать выражения $x-3$ и $x+1$. Сделаем замену $t=\dfrac{x-3+x+1}{2}=x-1$, т.е. $x=t+1$. Для новой неизвестной имеем уравнение

$$(t-2)^4+(t+2)^4=38.$$

Раскрывая скобки, получаем биквадратное уравнение $t^4+24t^2-3=0$. Отсюда $t^2=7\sqrt{3}-12$ (отрицательный корень $t^2=-7\sqrt{3}-12$ отбрасываем). Следовательно, $t=\pm\sqrt{7\sqrt{3}-12}$. Возвращаясь к старой неизвестной, получаем $x=1+t=1\pm\sqrt{7\sqrt{3}-12}$. *Ответ*: $1\pm\sqrt{7\sqrt{3}-12}$.

ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Если различные выражения в уравнении обозначить как новые неизвестные, то оно существенно упрощается. Правда, получаем уравнение с несколькими неизвестными. Для решения этого уравнения к нему надо при-соединить обозначения новых неизвестных. При этом получим систему уравнений равносильную исходному уравнению.

Рассмотрим уравнение $(x-3)^4+(x+1)^4=38$ **примера 6.6.** Обозначим $a=3-x$ и $b=x+1$, тогда уравнение примет вид $a^4+b^4=38$. Присоединим к нему обозначения новых неизвестных

$$\begin{cases} a^4+b^4=38, \\ a=3-x, \\ b=x+1. \end{cases}$$

Исключая старую неизвестную x из последних двух уравнений, приходим к симметрической системе

$$\begin{cases} a^4+b^4=38, \\ a+b=4. \end{cases}$$

Стандартный путь решения этой системы – замена неизвестных $a+b=p$, $ab=q$ – приводит к квадратному уравнению относительно q:

$$\left(p^2-2q\right)^2-2q^2=38, \text{ где } p=4.$$

Кроме перечисленных выше методов разложения многочленов на множители имеются также общие приемы: использование формул сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки, группировка выражений, добавление взаимно уничтожающихся членов и т.п. К сожалению, умение уверенно и эффективно применять эти приемы приходит не сразу, а по мере накопления опыта.

Пример 6.7. Решить уравнение $\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2-8x-48\right)=21x^2$.

Решение. Можно раскрыть скобки и получить уравнение 4-го порядка, а затем попытаться найти его рациональные корни как в пункте 7. Однако лучше сделать по-другому. Разложив квадратные трехчлены в левой части, получим уравнение $(x-1)(x+3)(x+4)(x-12)=21x^2$, которое решаем "методом серединки" как в п.**6**. Приходим к квадратному уравнению $(y-13)(y+7)=21$ относительно новой неизвестной $y=x+\dfrac{12}{x}$. Решая квадратное уравнение, получаем $y=-8$ и $y=14$, а затем находим корни исходного уравнения: $x_1=-6$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=7\pm\sqrt{37}$. Заметим, что первоначальный план с подбором рациональных корней был тоже приемлем, так как уравнение имеет два целых корня.

6.2. Преобразования рациональных выражений

Выражение вида $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены, называется ***рациональным выражением*** одной переменной x (или ***рациональной функцией*** аргумента x). Уравнение, в котором сравниваются значения двух рациональных функций $R_1(x)=R_2(x)$, называется ***рациональным уравнением*** с одной неизвестной x.

Обычно при решении рациональных уравнений, содержащих дробные выражения, указывают ***область допустимых значений*** (ОДЗ) неизвестной, а затем, умножая на общий знаменатель, сводят уравнение к целому алгебраическому уравнению. Эти действия всегда можно сделать. Однако в результате можем получить целое алгебраическое уравнение высокого порядка (выше второго). Его нужно разложить на множители, применяя, например, приемы **1-9** предыдущего пункта. Если это сделать не удается, то нужно вернуться к исходному рациональному уравнению и попробовать преобразовать дроби. Цель этих преобразований – приведение рационального уравнения к виду, в котором либо все дроби имеют общий множитель, либо можно сделать замену неизвестной, упрощающую уравнение.

ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ

Целую часть неправильной дроби выделяют, находя при делении числителя на знаменатель неполное частное и остаток. Если дробь $\dfrac{p}{q}$ – неправильная: $p \ge q$, $p \in N$, $q \in N$, то можно выделить ее целую часть, т.е. представить дробь $\dfrac{p}{q}$ в виде:

$$\frac{p}{q}=s+\frac{r}{q},$$

где s – целая часть, а r – остаток $0 \le r < q$. Например, $\dfrac{25}{7}=3+\dfrac{4}{7}$. Здесь: 3 – частное (неполное), а 4 – остаток.

Аналогично преобразуются рациональные выражения $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены. Если степень числителя $p(x)$ рационального выражения $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ больше или равна степени знаменателя $q(x)$, то можно выделить целую часть дроби, т.е. представить дробь в виде

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \tag{6.1}$$

где $s(x)$ – ***целая часть***, а $r(x)$ – ***остаток*** от деления многочлена $p(x)$ на $q(x)$. При этом степень остатка $r(x)$ меньше степени делителя $q(x)$.

Преобразование (6.1) обычно делается при помощи деления "уголком" так же, как и для неправильных числовых дробей.

Пример 6.8. Решить уравнение

$$\frac{x^4+5x^3+8x^2+7x-2}{x^2+2x+3} = \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+1} + \frac{x^2+2x-5}{x+3}.$$

Решение. Разделим "уголком" многочлен $x^4+5x^3+8x^2+7x-2$ на многочлен x^2+2x+3:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4+5x^3+8x^2+7x-2 & x^2+2x+3 \\
 & x^4+2x^3+3x^2 & \overline{x^2+3x-1} \\
\hline
- & 3x^3+5x^2+7x-2 & \\
 & 3x^3+6x^2+9x & \\
\hline
- & -x^2-2x-2 & \\
 & -x^2-2x-3 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}$$

Следовательно, $x^4+5x^3+8x^2+7x-2=(x^2+3x-1)(x^2+2x+3)+1$, тогда

$$\frac{x^4+5x^3+8x^2+7x-2}{x^2+2x+3} = x^2+3x-1+\frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Аналогично выделяем целые части двух других дробей:

$$\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+1} = x^2+2x+\frac{1}{x+1}, \qquad \frac{x^2+2x-5}{x+3} = x-1-\frac{2}{x+3}.$$

Теперь уравнение принимает вид

$$x^2+3x-1+\frac{1}{x^2+2x+3} = x^2+2x+\frac{1}{x+1}+x-1-\frac{2}{x+3}.$$

Приводя подобные члены, получаем уравнение

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3},$$

которое после умножения на общий знаменатель оказывается линейным.

Ответ: $x=0$.

Многократное выделение целой части применяется для преобразования дроби в ***цепную дробь***. Преобразуем, например, правильную несократимую дробь $\frac{19}{32}$ в цепную:

$$\frac{19}{32}=\frac{1}{\frac{32}{19}}=\frac{1}{1+\frac{13}{19}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{19}{13}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{6}{13}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{6}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}}.$$

Как видим, нужно правильную дробь "перевернуть", записав как величину, обратную к неправильной дроби, а затем выделить целую часть неправильной дроби. Аналогичное преобразование можно делать с рациональными выражениями $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Пример 6.9. Решить уравнение $\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x+2}-\frac{x^2+1}{x^3-3x^2-2x-2}=1$.

Решение. Преобразуем правильные дроби, входящие в левую часть уравнения. Для этого запишем обратные величины и выделим их целые части:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x+2}=\frac{1}{\frac{x^3+x^2-2x+2}{x^2+1}}=\frac{1}{x+1-\frac{3x-1}{x^2+1}},$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x^2-2x-2}=\frac{1}{\frac{x^3-3x^2-2x-2}{x^2+1}}=\frac{1}{x-3-\frac{3x-1}{x^2+1}}.$$

Сделаем замену неизвестной: $t=x-\frac{3x-1}{x^2+1}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-3}=1 \quad \Rightarrow \quad t^2-2t+1=0,$$

которое имеет один корень $t=1$. Чтобы получить корни исходного уравнения, возвращаемся к старой неизвестной:

$$x-\frac{3x-1}{x^2+1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-x-2)=0.$$

Ответ: -1 ; 0; 2.

Дробь вида $\dfrac{ax+b}{(x+\alpha)(x+\beta)}$ всегда можно представить в виде суммы двух дробей

$$\frac{ax+b}{(x+\alpha)(x+\beta)}=\frac{A}{x+\alpha}+\frac{B}{x+\beta}. \qquad (6.2)$$

Это преобразование – разложение на ***элементарные дроби*** – является обратным по отношению к сложению дробей. Коэффициенты A и B находятся из тождества после умножения (6.2) на общий знаменатель.

Пример 6.10. Решить уравнение $\dfrac{3x+7}{x^2+3x+2}+\dfrac{8x+22}{x^2+6x+8}=\dfrac{8x+8}{x^2-4}$.

Решение. Разложим первую дробь на элементарные. Запишем для нее равенство (6.2), предварительно разложив знаменатель на множители $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$:

$$\frac{3x+7}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

Умножив на общий знаменатель, получаем равенство (тождество)

$$3x+7=A(x+2)+B(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+7=(A+B)x+2A+B,$$

которое должно выполняться при всех x. Приравнивая коэффициенты линейных двучленов в левой и правой частях равенства, получаем

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 2A+B=7, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=4, \\ B=-1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем следующее разложение:

$$\frac{3x+7}{(x+1)(x+2)}=\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x+2}.$$

Справедливость полученного равенства легко проверить, приводя, как обычно, дроби в правой части к общему знаменателю.

Аналогично раскладываем две другие дроби:

$$\frac{8x+22}{x^2+6x+8}=\frac{5}{x+4}+\frac{3}{x+2}, \qquad \frac{8x+8}{x^2-4}=\frac{6}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$

Используя эти разложения, запишем исходное уравнение

$$\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x+4}+\frac{3}{x+2}=\frac{6}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$

Дроби с одинаковыми знаменателями взаимно уничтожаются:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+4}=\frac{6}{x-2}.$$

Умножая на общий знаменатель и приводя подобные члены, получаем квадратное уравнение $x^2-9x-22=0$. Оно имеет два корня $x_1=11$ и $x_2=-2$. Второй корень – посторонний (обращает в нуль знаменатели). *Ответ*: 11.

ВЫБОРОЧНОЕ СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Если в уравнении имеется несколько дробных слагаемых, то можно использовать **"метод серединки"** – сложить попарно несколько дробей так, чтобы образовались выражения, допускающие замену неизвестной.

Пример 6.11. Решить уравнение

$$\frac{10}{x+1}+\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x+3}+\frac{10}{x+4}=\frac{11}{x}+\frac{11}{x+5}.$$

Решение. В левой части сложим попарно первую дробь с четвертой, вторую – с третьей, а также сложим дроби в правой части:

$$\frac{10(2x+5)}{x^2+5x+4}+\frac{10(2x+5)}{x^2+5x+6}=\frac{11(2x+5)}{x^2+5x}.$$

Сократим обе части на общий множитель, отметив, разумеется, что $x=-2{,}5$ – корень уравнения. При этом уравнение принимает вид

$$\frac{10}{x^2+5x+4}+\frac{10}{x^2+5x+6}=\frac{11}{x^2+5x}.$$

После замены $x^2+5x=t$ получаем уравнение $\frac{10}{t+4}+\frac{10}{t+6}=\frac{11}{t}$, которое сводится к квадратному $9t^2-10t-264=0$. Отсюда $t_1=6$, $t_2=-\frac{44}{9}$. Теперь, возвращаясь к старой неизвестной x, остается решить два квадратных уравнения: $x^2+5x=6$ и $x^2+5x=-\frac{44}{9}$. *Ответ*: -6; $-\frac{11}{3}$; $-2{,}5$; $-\frac{4}{3}$; 1.

ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Рассмотренный для целых алгебраических уравнений прием – переход к системе уравнений – применяется и для решения рациональных уравнений.

Пример 6.12. Решить уравнение $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$.

Решение. Обозначим $a=x$, $b=\frac{x}{x-1}$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $a^2+b^2=8$. Заметим, что $a+b=x+\frac{x}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}=ab$. Добавим эту связь к полученному уравнению:

$$\begin{cases} a^2+b^2=8, \\ a+b=ab. \end{cases}$$

Сделаем стандартную для симметрической системы замену: $a+b=p$, $ab=q$:

$$\begin{cases} p^2-2q=8, \\ p=q. \end{cases}$$

Отсюда $p=q=4$ или $p=q=-2$. Возвращаясь к старой неизвестной, получаем *ответ*: $x=2$; $x=-1\pm\sqrt{3}$.

6.3. Преобразования иррациональных выражений

СТАНДАРТНЫЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

При помощи замены можно некоторые иррациональные выражения сделать рациональными относительно новой переменной.

Пусть R – рациональное выражение от нескольких переменных (двух или трех). Если вместо переменной в рациональное выражение подставить радикал, то выражение станет иррациональным. Например, выражение $R(x,y,z)=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{z}{y+1}$ – рациональное, а выражение

$$R\left(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x^2+1}\right)=\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x+1}+1}$$

– иррациональное.

А. Иррациональное выражение вида $R\left(x,\sqrt{x-a}\right)$ после замены $t=\sqrt{x-a}$ становится рациональным относительно переменной t:

$$R\left(t^2+a,t\right).$$

Б. Иррациональное выражение вида $R\left(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}\right)$ после замены $t=\sqrt[6]{x}$ становится рациональным относительно переменной t:

$$R\left(t^6,t^3,t^2\right).$$

В. Иррациональное выражение вида $R\left(\sqrt{x-a}\pm\sqrt{b-x},\sqrt{(x-a)(b-x)}\right)$ после замены $t=\sqrt{x-a}\pm\sqrt{b-x}$ становится рациональным относительно переменной t: $R\left(t,\pm\dfrac{t^2+a-b}{2}\right)$.

Пример 6.13. Решить уравнение

$$2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right).$$

Решение. Найдем ОДЗ: $x\in[-1;\infty)$. В уравнение входит сумма корней $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$ и их произведение $\sqrt{x^2+4x+3}$. Сделаем замену как в пункте **В**: сумму корней примем за новую неизвестную $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$, а произведение выразим через t^2. Действительно, возводя в квадрат равенство $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$, получаем $t^2=2x+4+2\sqrt{x^2+4x+3}$. Следовательно, левая часть исходного уравнения равна t^2-4. Итак, после замены получаем квадратное уравнение

$$t^2-4=3(t-2),$$

корни которого $t_1=1$, $t_2=2$. Теперь возвращаемся к старой неизвестной x.

Для $t_1=1$ имеем уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=1$. Левая часть уравнения больше или равна $\sqrt{2}$. Следовательно, это уравнение не имеет решений.

Для $t_2=2$ имеем уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=2$. Дважды возводим его в квадрат, предварительно уединяя радикал:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=2 \iff \sqrt{x+3}=2-\sqrt{x+1} \iff x+3=x+5-4\sqrt{x+1} \iff$$

$$\iff 2\sqrt{x+1}=1 \iff 4(x+1)=1 \iff x=-0{,}75.$$

Получили единственный корень исходного уравнения. *Ответ*: $x=-0{,}75$.

Пример 6.14. Решить уравнение $\sqrt{x^2-x+1}=(x-1)^2+x^2$.

Решение. Преобразуем правую часть

$$(x-1)^2+x^2=x^2-2+1+x^2=2\left(x^2-x+1\right)-1$$

и сделаем замену $t=\sqrt{x^2-x+1}$. Для новой неизвестной ($t>0$) получаем квадратное уравнение:

$$2t^2-t-1=0,$$

которое имеет один положительный корень $t=1$. Следовательно,

$$\sqrt{x^2-x+1}=1 \iff x^2-x=0 \iff x_1=0,\ x_2=1.$$

Ответ: 0; 1.

Пример 6.15. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}+\sqrt{1-\dfrac{2x}{2+x}}=\dfrac{10}{3}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x \in (-2; 2)$ и представим исходное уравнение в виде $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{10}{3}$. Сделав подстановку $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = t > 0$, получаем уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$, которое сводится к квадратному $3t^2 - 10t + 3 = 0$. Находим корни $t_1 = 3$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Теперь надо решить два простых иррациональных уравнения с уединенными радикалами

$$\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = 3 \quad \text{(или)} \quad \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{1}{3}.$$

Возводя в квадрат каждое уравнение, получаем

$$\frac{2+x}{2-x} = 9 \quad \text{(или)} \quad \frac{2+x}{2-x} = \frac{1}{9}.$$

Эти уравнения сводятся к линейным и легко решаются. *Ответ*: $\pm 1{,}6$.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ ПОЛНОГО КВАДРАТА (КУБА)

Этот прием позволяет избавиться от радикалов в иррациональном уравнении без возведения обеих его частей в квадрат (куб). Напомним, что при извлечении корня четной степени, необходимо ставить знак модуля:

$$\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)|,$$

а для нечетной степени – модуль не нужен:

$$\sqrt[2n+1]{(f(x))^{2n+1}} = f(x).$$

Обнаружить полный квадрат (куб) помогают знание формул сокращенного умножения и умение преобразовывать выражения, делать замены, анализировать ОДЗ.

Пример 6.16. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 + 2x + 1$; **б)** $\sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} + \sqrt{x^2 + x - 2x\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 3$.

Решение. **а)** Здесь подкоренное выражение – полный квадрат:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно следующему уравнению с модулем

$$|x - 1| = x^2 + 2x + 1.$$

Раскрывая модуль, находим корни $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

б) Сделаем замену $t = \sqrt{x}$. Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^4+t^2-2t^3}=t+3\,.$$

Извлекая корни из полных квадратов, получаем уравнение с модулями

$$|t+1|+\left|t^2-t\right|=t+3\,.$$

Знак первого модуля можно отбросить, так как $t \geq 0$. После упрощений получаем уравнение с уединенным модулем

$$\left|t^2-t\right|=2\ \left|t^2-t\right|=2\,,$$

корни которого легко находятся: $t_1=-1$ и $t_2=2$. Первый корень не подходит по условию $t \geq 0$, а для второго получаем $\sqrt{x}=2 \;\Leftrightarrow\; x=4$.

Ответ: **а**) -3; 0; **б**) 4.

УМНОЖЕНИЕ НА "СОПРЯЖЕННОЕ" ВЫРАЖЕНИЕ

Это преобразование связано с применением формул сокращенного умножения, таких, как разность квадратов, сумма и разность кубов двух чисел. Например, иррациональное выражение $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ после умножения на $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ становится рациональным: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$. Иррациональные выражения $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ называют ***“сопряженными”*** по отношению друг к другу. Для выражений $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ “сопряженными” будут неполные квадраты $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ соответственно, так как при умножении на них получим по формуле суммы (разности) кубов рациональные выражения $a \pm b$.

Таким образом, умножением на “сопряженное” выражение можно избавиться от иррациональности. Заметим, однако, что при этом возможно появление посторонних корней. Рассмотрим использование этого преобразования на примерах.

Пример 6.17. Решить уравнения:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=x+\sqrt{x+1}$; **б**) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=3$.

Решение. **а**) В знаменателе дроби стоит разность квадратных корней. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}>0$. Получим равносильное уравнение

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}=x+\sqrt{x+1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=x+\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{x+2}=x\,.$$

Возводя обе части в квадрат, получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$. Из двух его корней $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ подходит только положительный.

б) Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$. Получим

$$3 = 3\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}\right).$$

Запишем это уравнение вместе с исходным в виде системы

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем $2\sqrt{x+2} = 4 \iff x = 2$.

Ответ: **а**) 2; **б**) 2.

ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Для иррациональных уравнений переход к системе – весьма эффективный прием. В самом деле, если иррациональные выражения в уравнении обозначим как новые неизвестные, то для них получим рациональные связи. Тем самым избавимся от иррациональности, что является основой решения иррациональных уравнений.

Пример 6.18. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+3} = 3$; **б)** $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$.

Решение. **а)** Обозначим иррациональности $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt{x+3} = b$. Тогда исходное уравнение примет вид $a + b = 3$. Еще одну связь между новыми неизвестными находим, исключая x из равенств

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{x}, \\ b = \sqrt{x+3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = x, \\ b^2 = x+3, \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^3 + 3.$$

Таким образом, для новых неизвестных имеем систему

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ b^2 = a^3 + 3. \end{cases}$$

Подставляя $b = a - 3$ во второе уравнение, имеем $a^2 - 6a + 9 = a^3 + 3$. Перенося все члены в левую часть и раскладывая на множители, получаем $(a-1)(a^2+6) = 0$. Отсюда $a = 1$. Следовательно, $x = 1$.

б) Обозначим $a = \sqrt{x+2}$ и $b = \sqrt{x-1}$. Для новых неизвестных исходное уравнение принимает вид $a + b = 3$. Приписывая к этому равенству обозначения, получаем систему

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a=\sqrt{x+2}, \\ b=\sqrt{x-1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3, \\ a^2-b^2=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3, \\ a-b=1, \end{cases} \begin{cases} a+b=3, \\ a-b=1. \end{cases}$$

Отсюда $a=2$ и $b=1$. Следовательно, $x=2$. *Ответ*: **а**) 1; **б**) 2.

Замечание. Оба решения одного и того же уравнения "б" из примеров 6.17, 6.18 сводились к системам уравнений. В примере 6.17 это была система двух уравнений с одной неизвестной, а в примере 6.18 – с двумя неизвестными. Как правило, говоря о системах уравнений, мы имеем в виду системы с несколькими неизвестными. Однако прием, который использовался при решении примера 6.17,"б", тоже весьма распространенный. Он заключается в том, что к уравнению $f(x)=0$ приписывается его следствие $g(x)=0$. Такой переход является равносильным

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{cases}$$

если $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad g(x)=0$.

Пример 6.19. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб и припишем к исходному уравнению:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x}=1, \\ 2x+1+x+3\cdot\sqrt[3]{x(2x+1)}\cdot\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x}\right)=1. \end{cases}$$

Эта система равносильна исходному уравнению. Подставив первое уравнение во второе, получим следствие $3x+1+3\cdot\sqrt[3]{x(2x+1)}\cdot 1=1$. Отсюда имеем

$$\sqrt[3]{x(2x+1)}=-x \quad \Leftrightarrow \quad x(2x+1)=-x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1)^2=0.$$

Следовательно, $x_1=0$ или $x_2=-1$. Второй корень – посторонний.

Ответ: 0.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ

От иррациональностей вида

$$\sqrt{a^2-x^2}, \quad \sqrt{x^2-a^2}, \quad \sqrt{x^2+a^2}$$

можно избавиться, делая замены переменной

$$x=a\cdot\sin t, \quad x=\frac{a}{\sin t}, \quad x=a\cdot\operatorname{tg} t$$

соответственно. Действительно, в выражении $\sqrt{a^2-x^2}$ (считая, что $a>0$) область допустимых значений неизвестной x представляет собой промежуток $[-a;a]$. Множество значений функции $x(t)=a\cdot\sin t$ есть такой же отрезок. Поэтому можно сделать замену $x=a\cdot\sin t$. При этом иррациональность уничтожается:

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cdot\left|\cos t\right|.$$

Ограничив допустимые значения неизвестной t условием $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, можно отбросить и знак модуля (так как $\cos t\ge 0$). Таким образом,

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\left|\cos t\right|\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad \text{где } t\in\left[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right].$$

Пример 6.20. Решить уравнение $\left(4x-\sqrt{3}\right)\sqrt{1-x^2}=x$.

Решение. Находим ОДЗ: $x\in[-1;1]$. Значит, что можно положить $x=\sin t$, а значения новой неизвестной t ограничить промежутком $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Выполняя подстановку $x=\sin t$ в исходное уравнение, получаем тригонометрическое уравнение: $\left(4\sin t-\sqrt{3}\right)\cos t=\sin t$. Решаем это уравнение на промежутке $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left(4\sin t-\sqrt{3}\right)\cos t=\sin t \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin 2t=\sin t+\sqrt{3}\cos t \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin 2t=\sin\left(t+\tfrac{\pi}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad t_1=-\tfrac{4\pi}{9};\ t_2=\tfrac{2\pi}{9};\ t_3=\tfrac{\pi}{3}.$$

Возвращаемся к неизвестной x: $x_1=\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$, $x_2=\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $x_3=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right),\ \sin\dfrac{2\pi}{9},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

В заключение рассмотрим пример, в котором анализ равносильности преобразований приводит к ответу.

Пример 6.21. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+\sin x}+\sqrt{6x^2+x-\cos x}=\sqrt{2x^2-x-\cos x}+\sqrt{x^2-x+\sin x}\ .$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2+\sin x}-\sqrt{x^2-x+\sin x}=\sqrt{2x^2-x-\cos x}-\sqrt{6x^2+x-\cos x}\ .$$

Левую и правую части преобразуем, умножив и разделив на соответствующие “сопряженные” выражения, а именно левую часть умножим и разделим на $\sqrt{3x^2+\sin x}+\sqrt{x^2-x+\sin x}$, правую часть – на

$$\sqrt{2x^2-x-\cos x}+\sqrt{6x^2+x-\cos x}\ .$$

Заметим, что такое преобразование является равносильным, если указанные выражения не равны нулю (делить на нуль нельзя). Отметим те значения x, при которых

$$\sqrt{3x^2+\sin x}+\sqrt{x^2-x+\sin x}=0 \text{ (или) } \sqrt{2x^2-x-\cos x}+\sqrt{6x^2+x-\cos x}=0.$$

Первое равенство возможно, если

$$\begin{cases} 3x^2+\sin x=0, \\ 2x^2-x+\sin x=0, \end{cases} \Rightarrow \ 2x^2+x=0 \ \Leftrightarrow \ x_1=0 \text{ или } x_2=-0{,}5.$$

Второе равенство возможно, если

$$\begin{cases} 2x^2-x-\cos x=0, \\ 6x^2+x-\cos x=0, \end{cases} \Rightarrow \ 4x^2+2x=0 \ \Leftrightarrow \ x_1=0 \text{ или } x_2=-0{,}5.$$

Причем $x_1=0$ не подходит, так как среди подкоренных выражений будут отрицательные. Второе значение $x_2=-0{,}5$ является корнем уравнения, в чем убеждаемся, выполняя проверку. Докажем теперь, что других корней уравнение не имеет. Действительно, при $x\neq-0{,}5$ и $x\neq 0$ $x\neq 0$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{3x^2+\sin x-x^2+x-\sin x}{\sqrt{3x^2+\sin x}+\sqrt{x^2-x+\sin x}}=\frac{2x^2-x-\cos x-6x^2-x+\cos x}{\sqrt{2x^2-x-\cos x}+\sqrt{6x^2+x-\cos x}}.$$

Приведем подобные члены, перенесем дробь в левую часть и вынесем общий множитель:

$$(2x^2+x)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3x^2+\sin x}+\sqrt{x^2-x+\sin x}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{2x^2-x-\cos x}+\sqrt{6x^2+x-\cos x}}\right]=0.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, не может быть равным нулю, так как оно положительно. Сомножитель в круглых скобках равен нулю, при $x=0$ или $x=-0{,}5$. Но оба эти значения мы исключили из рассмотрения.

Таким образом, $x=-0{,}5$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $-0{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить трехчленные уравнения.

6.1. $x^4+x^2-2=0$. *Ответ*: ± 1.

6.2. $x^6-9x^2+8=0$. *Ответ*: 1; 2.

6.3. $x^8 - 272x^4 + 4096 = 0$. *Ответ*: ± 2; ± 4.

Решить возвратные уравнения (3-го порядка).

6.4. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$. *Ответ*: -1; 0,5; 2.

6.5. $4x^3 - 7x^2 - 7x + 4 = 0$. *Ответ*: -1; $\dfrac{11 \pm \sqrt{57}}{8}$.

Решить возвратные уравнения (4-го порядка).

6.6. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. *Ответ*: $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6.7. $12x^4 + 16x^3 - 11x^2 + 16x + 12 = 0$. *Ответ*: -2; $-0{,}5$.

6.8. $3x^4 + 7x^3 - 46x^2 - 7x + 3 = 0$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{3}$; 3; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

6.9. $2x^4 + x^3 - 51x^2 + x + 2 = 0$. *Ответ*: $\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$.

Решить уравнения, сводя их к квадратному методом "серединки".

6.10. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 360$. *Ответ*: 1; 10.

6.11. $(x-3)(x+1)(x+2)(x+6) = -96$. *Ответ*: -5; 2; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

6.12. $(x-3)(x-2)(x+7)(x+6) = 220$. *Ответ*: -8; 4; $-2 \pm \sqrt{5}$.

6.13. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{1}{2}$.

Решить уравнения, поделив обе части на x^2 и сделав подходящие замены неизвестной.

6.14. $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$. *Ответ*: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

6.15. $(x^2 + x - 4)(x^2 - 2x - 4) = -2x^2$. *Ответ*: ± 2; $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Решить уравнения (использовать метод "серединки", затем разделить обе части на x^2 и сделать подходящую замену неизвестной).

6.16. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$. *Ответ*: -4; -6; $\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

6.17. $(x-2)(x+3)(x+4)(x-6) = -14x^2$. *Ответ*: 3; 4.

Решить уравнения (разложить квадратные трехчлены на множители, а затем использовать метод "серединки").

6.18. $(x^2+3x+2)(x^2+9x+18)=168x^2$. *Ответ*: 1; 6; $\dfrac{-19\pm\sqrt{337}}{2}$.

6.19. $(x^2+2x-3)(x^2-4x-12)=-20x^2$. *Ответ*: 2; 3.

6.20. Решить неравенство $(x^2+4x-5)(x^2-12x-45)+63x^2<0$.

Ответ: $\left(\dfrac{13-\sqrt{109}}{2};\dfrac{13+\sqrt{109}}{2}\right)$.

Решить уравнения, подбирая рациональные корни.

6.21. $x^4+2x^3-2x^2-6x+5=0$. *Ответ*: 1.

6.22. $12x^3-4x^2-17x-6=0$. *Ответ*: $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{2}$.

6.23. $3x^3-16x^2+8x-1=0$. *Ответ*: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

6.24. $6x^4+5x^3+7x^2+5x+1=0$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{3}$.

6.25. $36x^4+12x^3-11x^2-2x+1=0$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$.

Решить уравнения, используя их однородность.

6.26. $x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2$. *Ответ*: $1\pm\sqrt{2}$.

6.27. $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$. *Ответ*: -1; 9; $\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

Решить уравнения, делая замену неизвестной для симметризации выражений, либо переходя к системам уравнений.

6.28. $(x-1)^3-(x-3)^3=8$. *Ответ*: 1; 3.

6.29. $(x-6)^4+(x-8)^4=82$. *Ответ*: 5; 9.

6.30. $(x-a)^3-(x-b)^3=(b-a)^3$. *Ответ*: a; b.

Решить уравнения, разлагая многочлены на множители.

6.31. $x^5-2x^3-3x^2+6=0$. *Ответ*: $\pm\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$.

6.32. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$. *Ответ*: $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{1}{2}$; 3.

Решить уравнения, выделяя полные квадраты.

6.33. $x^4+x^2-6x-8=0$. *Ответ*: -1; 2.

6.34. $x^4+4x-1=0$. *Ответ*: $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

Решить уравнения, делая замену неизвестной.

6.35. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$. *Ответ*: -4; 2.

6.36. $2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+32=0$. *Ответ*: 1; 2.

6.37. $(x^2-1)(x-2)^2(x-3)(x-5)=-60$. *Ответ*: 0; 4; $2\pm\sqrt{3+2\sqrt{6}}$.

Решить уравнения, применяя метод "серединки" (попарно складывая дроби).

6.38. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{4}{x+4}=0$. *Ответ*: 0; $\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

6.39. $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-4}=0$. *Ответ*: $\dfrac{11}{2}$; $\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}$.

6.40. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$. *Ответ*: $\dfrac{12}{5}$; $\dfrac{6}{5}$.

Решить уравнения, выделяя целые части дробей.

6.41. $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+6}{x+3}+\dfrac{x+10}{x+5}=6$. *Ответ*: 0; $-3\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

6.42. $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{3x-4}{x+4}$. *Ответ*: -2; $-\dfrac{2}{3}$.

6.43. $31\cdot\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\cdot\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+5}\right)$. *Ответ*: $-\dfrac{5}{2}$.

Решить уравнения, выделяя целые части и применяя затем метод "серединки".

6.44. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+5}{x-5}=\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+4}{x-4}$. *Ответ*: 0; $7\pm2\sqrt{3}$.

6.45. $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{28}{15}$. *Ответ*: ±2; $\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

6.46. $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}-\dfrac{x^2+3x+3}{x+3}-\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}=0$.

Ответ: 0; $\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

Решить уравнения, сделав подходящую замену неизвестной.

6.47. $\frac{x^2-1}{x}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{13}{6}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.

6.48. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$. *Ответ*: 0; -2; $\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$.

6.49. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$. *Ответ*: 0,5; 2.

6.50. $x^2+15x+\frac{1}{x^2}-\frac{15}{x}=18$. *Ответ*: $-8\pm\sqrt{65}$; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

6.51. $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{12}$. *Ответ*: -3; 1.

6.52. $(x+2)^2+\frac{24}{x^2+4x}=18$. *Ответ*: -6; 2; $-2\pm\sqrt{6}$.

6.53. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$. *Ответ*: -3; 1.

Решить уравнения, сделав замену неизвестной после деления числителя и знаменателя каждой дроби на x (или на x^2).

6.54. $\frac{x}{5x^2-6x-2}+\frac{7x}{5x^2+12x-2}=\frac{2}{3}$. *Ответ*: -1; $-0{,}2$; 0,4; 2.

6.55. $\frac{x}{x^2+7x+3}-\frac{x}{x^2-7x+3}=\frac{50}{63}$. *Ответ*: $\pm0{,}6$; ±5.

6.56. $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}+\frac{5}{4}=0$. *Ответ*: 1; 2; $-2\pm\sqrt{2}$.

6.57. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{4x^2+7x-20}{x^2+x-5}=0$. *Ответ*: -5; 1; $-1\pm\sqrt{6}$.

6.58. $\frac{x(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{10}{9}$. *Ответ*: 0,5; 2.

6.59. $\frac{x}{x^2+x-2}+\frac{x^2}{x^4-5x^2+4}=\frac{x^2-2}{3x}$. *Ответ*: $\pm\sqrt{2}$; $1\pm\sqrt{3}$; $-1\pm\sqrt{3}$.

6.60. $\frac{x}{x^2-2x-3}-\frac{2x^2}{x^4-10x^2+9}=\frac{x^2-3}{5x}$. *Ответ*: $\pm\sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Решить уравнения, разлагая дроби на элементарные.

6.61. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{4}{5}$. *Ответ*: -5; 1.

6.62. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x+5}{x^2+10x+24}=\frac{x+1}{x^2+2x}+\frac{x+4}{x^2+8x+15}$. *Ответ*: $-2{,}5$.

Решить уравнения, используя однородность.

6.63. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$. *Ответ*: $\frac{2}{3}$; 3.

6.64. $\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+5\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^2=6\frac{x^2-16}{x^2-4}$. *Ответ*: 0; $\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$.

Решить уравнения, выделяя полные квадраты, либо приводя к системе уравнений.

6.65. $x^2+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40$. *Ответ*: $1\pm\sqrt{19}$.

6.66. $x^2+\left(\frac{2x}{x-2}\right)^2=5$. *Ответ*: -2; 1.

Решить уравнения, умножая на общий знаменатель и разлагая многочлен на множители.

6.67. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x+1)(x+2)(x+3)$. *Ответ*: -1; -2; -3.

6.68. $x^4=\frac{11x-6}{6x-11}$. *Ответ*: -1; 0,5; 2.

Решить уравнения, сделав подходящую замену неизвестной.

6.69. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=6$. *Ответ*: 64.

6.70. $\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2-\sqrt{2-x}$. *Ответ*: 1.

6.71. $\frac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{x-1}-1}=6\sqrt{x-1}$. *Ответ*: 26.

6.72. $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$ $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$. *Ответ*: 4.

6.73. $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=3\left(\sqrt{x+1}-2+\sqrt{x+3}\right)$. *Ответ*: $-0{,}75$.

6.74. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{13x-9-4x^2}=4-\sqrt{9-4x}$. *Ответ*: 1,25; 2.

Решить уравнения, извлекая корень из полного квадрата (куба).

6.75. $2\sqrt{x^2}=1-x$. *Ответ*: -1; $\frac{1}{3}$.

6.76. $\sqrt{x^2}=x^2+2x$. *Ответ*: -3; 0.

6.77. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=2-x$. *Ответ*: -2; 0.

6.78. $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+4}}$. *Ответ*: 0; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

6.79. $\frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-2}=9x^2-9x+2$. *Ответ*: $\frac{1}{3}$; 1.

6.80. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$. *Ответ*: $[1;2]$.

6.81. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-1$. *Ответ*: 3; 15.

6.82. $\sqrt[3]{1+9x^2+3x(x^2+1)\sqrt{3}}=3x^2-1$. *Ответ*: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решить уравнения, внося множитель под радикал.

6.83. $x\cdot\sqrt{\frac{x+9}{x}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{x^2+9x}=0{,}8(x+7)$. *Ответ*: $-\frac{147}{11}$; -12; 3.

6.84. $15(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+10}{x+1}}+5\cdot\sqrt{x^2+11x+10}=12(x+8)$. *Ответ*: $-\frac{158}{11}$; -13; 2.

Решить уравнения, выделяя общий множитель.

6.85. $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+7x+6}=2(x+1)$. *Ответ*: -1; 3.

6.86. $7\cdot\sqrt{(2x+4)x}=5\cdot\sqrt{(2x+4)(x+3)}+3\cdot\sqrt{(2x+4)(x-5)}$.

Ответ: -4; -2; $\frac{16}{3}$.

6.87. $3x+2=\frac{6x-8+\sqrt{27x^3+8}}{3x-2}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

Решить уравнения, умножая выражения на сопряженные.

6.88. $\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.89. $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}\right)=9$. *Ответ*: 2.

6.90. $\dfrac{2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=3$. *Ответ*: -2; 1.

6.91. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{1}{x}$. *Ответ*: $-1{,}6$; 2.

6.92. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$. *Ответ*: -2.

Решить уравнение, возводя обе части в квадрат и сделав замену неизвестной.

6.93. $\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{\dfrac{2}{x}}$. *Ответ*: $\sqrt{5}-2$; 1.

6.94. $\sqrt{3x+19-\dfrac{3}{x}}=1+\sqrt{3x+18+\dfrac{3}{x}}$. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{13}-5}{2}$; $3+\sqrt{6}$.

6.95. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$. *Ответ*: $\dfrac{-5-\sqrt{73}}{14}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{4}{5}$.

Решить уравнения, делая тригонометрическую подстановку.

6.96. $(2x+\sqrt{3})\sqrt{4-x^2}=x$. *Ответ*: $-\sqrt{3}$; $-2\sin 40^o$; $2\sin 80^o$.

6.97. $1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}=x+\sqrt{1-x^2}$. *Ответ*: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 0; 1.

6.98. $\sqrt{\dfrac{1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$. *Ответ*: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Решить уравнения, определяя ОДЗ неизвестной.

6.99. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2-x-30}=x^3+4x^2+25$. *Ответ*: -5.

6.100. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2x^2-2x}=x^2+1$. *Ответ*: -1; 0.

Решить уравнения.

6.101. $2\cdot\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x+4}=0$. *Ответ*: $26\pm 10\sqrt{5}$.

6.102. $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}=4+\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{27x^2}}$. *Ответ*: ± 64.

6.103. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}}-2x=1$. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.104. $\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5$. *Ответ*: 10.

6.105. $x^2-2x\sqrt{3}+\sqrt{x}+3=\sqrt{3}$. *Ответ*: $\left(\dfrac{1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}\right)^2$; $\left(\dfrac{\sqrt{1+4\sqrt{3}}-1}{2}\right)^2$.

6.106. $\sqrt{5-x}=x^2-5$. *Ответ*: $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Решить неравенство, сводя его к системе уравнений и неравенств.

6.107. $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}\geq 4$. *Ответ*: $[-40;40]$.

6.108. $\sqrt[4]{80+x}+\sqrt[4]{2-x}\leq 4$. *Ответ*: $[-80;-79]\cup[1;2]$.

6.109. $(x-3)\cdot\sqrt{x^2-9}\leq x+3$. *Ответ*: $(-\infty;-3]\cup[3;5]$.

Решить симметрические системы уравнений.

6.110. $\begin{cases} 1+xy=\dfrac{5xy}{x+y}, \\ 1+x^2y^2=\dfrac{8{,}5x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{cases}$ *Ответ*: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$, $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$, $(2;2)$.

6.111. $\begin{cases} x+y+x=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$ *Ответ*: $(1;2;-2)$, $(1;-2;2)$, $(2;-2;1)$,

$(2;1;-2)$, $(-2;2;1)$, $(-2;1;2)$.

6.112. $\begin{cases} x+y+x=6, \\ xy+yz+zx=11, \\ xyz=6. \end{cases}$ *Ответ*: $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;3;1)$,

$(2;1;3)$, $(3;2;1)$, $(3;1;2)$.

6.113. $\begin{cases} x+y+x=4, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^4+y^4+z^4=98. \end{cases}$ *Ответ*: $(-1;2;3)$, $(-1;3;2)$, $(2;3;-1)$,

$(2;-1;3)$, $(3;2;-1)$, $(3;-1;2)$.

Решить системы уравнений.

6.114. $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2}+5y=6, \\ 2\cdot\sqrt[6]{x^2y^3}-y=1. \end{cases}$ *Ответ*: $(\pm1;1)$, $\left(\pm\left(\dfrac{11}{\sqrt{21}}\right)^3;\dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$.

6.115. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-y}=\sqrt{3}+1, \\ x^2(x^2-y)=3. \end{cases}$ *Ответ*: $(1;-2)$, $(\sqrt{3};2)$,

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{4+6\sqrt{3}}}{2};-(1+\sqrt{3})\sqrt{4+6\sqrt{3}}\right).$$

6.116. $\begin{cases} x^3y+xy^3=1, \\ x^2-y^2=\sqrt{3}. \end{cases}$ *Ответ*: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

6.117. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{cases}$ *Ответ*: $(5;3)$,

$$\left(-\sqrt{4{,}5+1{,}5\sqrt{109}};\frac{-15}{\sqrt{4{,}5+1{,}5\sqrt{109}}}\right).$$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+y}=10, \\ 1+xy=16\cdot\sqrt{xy}. \end{cases}$

Ответ: $\left(32+12\sqrt{7};2+0{,}75\sqrt{7}\right)$, $\left(32-12\sqrt{7};2-0{,}75\sqrt{7}\right)$,
$\left(2+0{,}75\sqrt{7};32+12\sqrt{7}\right)$, $\left(2-0{,}75\sqrt{7};32-12\sqrt{7}\right)$.

6.119. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$ *Ответ*: $(3;1)$, $\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$.

6.120. $\begin{cases} x^2+4y^2-4z+5=0, \\ x-y-z=0. \end{cases}$ *Ответ*: $(2;-0{,}5;2{,}5)$.

6.121. $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2, \\ \dfrac{xyz}{y+z}=1{,}2, \\ \dfrac{xyz}{z+x}=1{,}5. \end{cases}$ *Ответ*: $(1;2;3)$, $(-1;-2;-3)$.

6.122. $\begin{cases} xy+\dfrac{9}{xz}=5, \\ zx+\dfrac{9}{yz}=4, \\ yz+\dfrac{9}{xy}=8. \end{cases}$ *Ответ*: $(1;2;3)$, $\left(\dfrac{11\sqrt{6}}{36};\dfrac{6\sqrt{6}}{13};\dfrac{13\sqrt{6}}{11}\right)$,

$(-1;-2;-3)$, $\left(-\dfrac{11\sqrt{6}}{36};-\dfrac{6\sqrt{6}}{13};-\dfrac{13\sqrt{6}}{11}\right)$.

6.123. $\begin{cases} 2x^2+xy=1, \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$ *Ответ*: $\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};2\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};2\right)$.

6.124. $\begin{cases} y^2(1+y)^4-2xy(1+y)^2=2, \\ y^2+4xy(1-y)^2=8(1-y)^4. \end{cases}$ *Ответ*: $\left(\dfrac{-187+45\sqrt{17}}{32};\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{-187-45\sqrt{17}}{32};\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

6.125. Найти три числа таких, что куб первого числа на 2 больше их произведения, куб второго числа на 3 меньше их произведения, а куб третьего числа на 3 больше их произведения.

Ответ: $\left(2;\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{9}\right)$, $\left(\sqrt[3]{0{,}5};-\sqrt[3]{4{,}5};\sqrt[3]{1{,}5}\right)$.

§7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения с помощью преобразований должны сводиться к соответствующим простейшим уравнениям. Других уравнений на экзаменах не бывает. Конечно, приведение уравнения к простейшему может оказаться довольно сложной процедурой. Обычно стараются привести все степени и логарифмы к одному основанию, а все тригонометрические функции – к одному углу. При этом пользуются соответствующими свойствами и формулами. Многообразие формул, особенно тригонометрических, является существенным препятствием для выбора правильного пути. Разумеется, что такие общие приемы, как разложение на множители, замена неизвестной и т.п., применимы и к этим уравнениям.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА

А. В произведении логарифмов можно менять местами основания (a и c)

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d .$$

В частности, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Б. В выражениях вида $a^{\log_b c}$ можно менять местами a и c, так как

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} .$$

В. Логарифмическое неравенство $\log_{a(x)} b(x) \geq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{b(x)-1}{a(x)-1} \geq 0, \\ a(x) > 0, \\ b(x) > 0. \end{cases}$$

Г. Чтобы упростить произведение $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^n \alpha$, нужно его умножить (и разделить) на $\sin\alpha$.

Д. Чтобы упростить сумму косинусов $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$ или сумму синусов $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$, нужно ее умножить (и разделить) на $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Рассмотрим уравнения, в которых неизвестная (или выражения с неизвестной) входит в основание и в показатель степени. Пусть, например, требуется решить уравнение вида

$$(a(x))^{b(x)} = c(x).$$

Здесь, в первую очередь, нужно разобраться с ОДЗ выражения a^b:

если $a > 0$, то b – любое действительное число;

если $a < 0$, то b – любое целое число;

если $a = 0$, то b – любое положительное рациональное число.

Поэтому решение рассматриваемого уравнения распадается на три случая. В первом случае (при $a(x) > 0$) обе части уравнения можно прологарифмировать по любому основанию, например десятичному. Во втором случае (при $a(x) < 0$) задача сводится к уравнению с целыми числами. В третьем случае (при $a(x) = 0$) достаточно решить уравнение $a(x) = 0$ и проверить его корни подстановкой в исходное уравнение.

Пример 7.1. Решить уравнение $x^{x+7} = x^{x^2+1}$.

Решение. В уравнение входят степени с одинаковым основанием x. Рассмотрим три случая. Если $x > 0$, то логарифмируя, получаем

$$\lg x^{x+7} = \lg x^{x^2+1} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} (x+7)\lg x = (x^2+1)\lg x \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x - 6)\lg x = 0.$$

Приравнивая к нулю множители в левой части, находим

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 0, \\ x^2 - x - 6 = 0, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2.$$

Отрицательный корень $x_3 = -2$ в данном случае не подходит, так как $x > 0$. Следовательно, найдены два корня (1 и 3) исходного уравнения.

Рассмотрим второй случай, когда $x < 0$. При этом показатели степеней должны быть целыми числами. Следовательно, надо рассмотреть множество отрицательных целых чисел $x = -1; -2; -3 \ldots$. Подставляя $x = -1$ в исходное уравнение, имеем верное числовое равенство: $(-1)^6 = (-1)^2$. Следовательно, $x = -1$ — корень уравнения. Для остальных x из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство их показателей, т.е. для $x = -2, -3, \ldots$ получаем

$$x^{x+7} = x^{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad x + 7 = x^2 + 1.$$

Решая уравнение $x + 7 = x^2 + 1$, из двух корней $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ отбираем второй (корень $x_1 = 3$ отбрасываем). Следовательно, при $x < 0$ уравнение имеет два корня: -2, -1.

В третьем случае, когда основание степени равно нулю, подставляем $x=0$ в уравнение. Получаем верное равенство $0^7=0^1$. Следовательно, $x=0$ – корень уравнения.

Найденные в трех случаях корни записываем в *ответ*: -2, -1, 0, 1, 3.

Замечание. Определение степени числа дают в школьном курсе несколько раз, последовательно расширяя множество показателей. Сначала изучаются степени с натуральным показателем, затем – арифметические корни и далее – степени с целым, рациональным и действительным показателями. По мере расширения множества показателей приходится ограничивать множество оснований, чтобы сохранить привычные свойства степеней. Учитывая эти трудности, в экзаменационных задачах показательно-степенные уравнения даются, как правило, с положительными (или, по крайней мере, с неотрицательными) основаниями.

Пример 7.2. Решить уравнение $2^{\log_2^2 x+1}+x^{\log_2 x}=48$.

Решение. Хотя основанием степени служит x, нет необходимости рассматривать три случая как в предыдущем примере, поскольку допустимы только положительные значения неизвестной $x>0$. При помощи основного логарифмического тождества преобразуем выражение

$$2^{\log_2^2 x+1}=2\cdot 2^{\log_2^2 x}=2\cdot\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}=2\cdot x^{\log_2 x}.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$2\cdot x^{\log_2 x}+x^{\log_3 x}=48 \quad\Leftrightarrow\quad x^{\log_2 x}=16.$$

Логарифмируем обе части уравнения по основанию 2 и приводим его к совокупности двух простейших:

$$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 16 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2^2 x=4 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2 x=\pm 2.$$

Решаем их

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2,\\ \log_2 x=-2,\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x_1=4,\ x_2=\frac{1}{4}$$

и записываем *ответ*: 0,25; 4.

Пример 7.3. Решить неравенство

$$\log_{0,2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2\cdot\log_2\frac{(x-2)(x-1)}{x+3}\ge\log_2\left(\frac{x-3}{3}\right)^2\cdot\log_{0,2}\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}.$$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-3;1)\cup(2;3)\cup(3;11)$. В произведении логарифмов в левой части поменяем местами основания (см. свойство **А**). Тогда в левой и правой частях неравенства получим общий множитель

$\log_2\left(\frac{x-3}{3}\right)^2$. Переносим все члены в правую часть и выносим общий множитель за скобки:

$$\log_2\left(\frac{x-3}{3}\right)^2\cdot\left(\log_{0,2}\frac{(x-2)(x-1)}{x+3}-\log_{0,2}\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}\right)\geq 0.$$

Применяя свойство **В** и учитывая, что функция $y=\log_{0,2}x$ убывающая, получаем неравенство

$$\left[\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-1\right]\cdot\left(\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}-\frac{(x-2)(x-1)}{x+3}\right)\geq 0,$$

которое равносильно исходному неравенству на ОДЗ.
Раскладывая разность квадратов и приводя дроби к общему знаменателю, приходим к неравенству

$$\left(\frac{x-3}{3}-1\right)\left(\frac{x-3}{3}+1\right)\cdot\frac{(x-2)(x-1)(2x-8)}{(11-x)(x+3)}\geq 0,$$

которое решаем методом интервалов: $x\in[0;1)\cup(2;4]\cup[6;11)$. Учитывая ОДЗ, получаем *ответ*: $x\in[0;1)\cup(2;3)\cup(3;4]\cup[6;11)$.

Пример 7.4. Решить неравенство

$$8\left(-2^x+3^x\right)\left(-2^{x-1}+3^x\right)\left(-2^x+3^{x+1}\right)\left(-2^{x-2}+3^x\right)+81^x\leq 0\ .$$

Решение. Преобразуем левую часть заданного неравенства, приводя все степени к одному показателю x:

$$8\left(-2^x+3^x\right)\left(\frac{-2^x}{2}+3^x\right)\left(-2^x+3\cdot 3^x\right)\left(\frac{-2^x}{4}+3^x\right)+81^x\leq 0.$$

Используем множитель 8 так: вторую скобку умножим на 2, а четвертую – на 4. Получим неравенство

$$\left(-2^x+3^x\right)\left(-2^x+2\cdot 3^x\right)\left(-2^x+3\cdot 3^x\right)\left(-2^x+4\cdot 3^x\right)+3^{4x}\leq 0.$$

Разделим обе части неравенства на $81^x=3^{4x}>0$:

$$\left(\frac{-2^x+3^x}{3^x}\right)\left(\frac{-2^x+2\cdot 3^x}{3^x}\right)\left(\frac{-2^x+3\cdot 3^x}{3^x}\right)\left(\frac{-2^x+4\cdot 3^x}{3^x}\right)+1\leq 0.$$

В каждой скобке выделим целую часть дроби:

$$\left(-\frac{2^x}{3^x}+1\right)\left(-\frac{2^x}{3^x}+2\right)\left(-\frac{2^x}{3^x}+3\right)\left(-\frac{2^x}{3^x}+4\right)+1\leq 0.$$

Теперь видно, что можно сделать замену переменных, обозначив $-\dfrac{2^x}{3^x}=t$.

Последнее неравенство примет вид $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)+1\le 0$. Используем "метод серединки": умножим первую скобку на четвертую, а вторую – на третью. Получим неравенство $(t^2+5t+4)(t^2+5t+6)+1\le 0$, в котором заменим $t^2+5t=z$. Неравенство относительно новой неизвестной величины z – квадратное: $z^2+10z+25\le 0 \Leftrightarrow (z+5)^2\le 0$. Следовательно, оно выполняется только тогда, когда $z=-5$. Вернемся к переменной t: $t^2+5t=-5$. Из этого уравнения находим $t_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. Учитывая, что $-\dfrac{2^x}{3^x}=t$, запишем $\dfrac{2^x}{3^x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Из последнего равенства находим *ответ*: $x=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическим уравнением с одной неизвестной x называется уравнение, в котором неизвестная или выражение с неизвестной x служит аргументом тригонометрической функции. Из-за периодичности тригонометрических функций уравнения имеют бесконечное число корней, представляющих собой, как правило, набор арифметических прогрессий, состоящих из чисел, отличающихся друг от друга на целое число периодов. Решения уравнений записывают в виде ***серии*** корней, указывая формулу, позволяющую вычислить любой корень уравнения в зависимости от целочисленного параметра. Бесконечность множества решений (серии) – важное отличие тригонометрических уравнений от алгебраических.

Пример 7.5. Сколько корней имеет уравнение $8\cos x\cos 2x\cos 4x=1$ на промежутке $[0;10\pi]$?

Решение. Упростим левую часть уравнения, умножив и разделив ее на $\sin x$ (см. свойство **Г**):

$$\frac{8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x}{\sin x}=1.$$

По формуле синуса двойного угла преобразуем числитель дроби

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=2\sin 4x\cos 4x=\sin 8x.$$

Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{\sin 8x}{\sin x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin 8x=\sin x, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда $\sin 8x=\sin x \;\Leftrightarrow\; \sin 8x-\sin x=0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{9x}{2}=0$. Следовательно, $x=\frac{2\pi n}{7}$, $x=\frac{\pi+2\pi m}{9}$, где $n\in Z$, $m\in Z$. Среди полученных решений есть посторонние, так как $x\neq\pi k$, где $k\in Z$.

Подсчитаем количество корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку $[0;10\pi]$. Для первой серии $x=\frac{2\pi n}{7}$, решая неравенство $0\le\frac{2\pi n}{7}\le 10\pi$, получаем $0\le n\le 35$. Следовательно, в первой серии имеется 36 подходящих корней. Аналогично определяем, что из второй серии $x=\frac{\pi+2\pi m}{9}$ на промежутке $[0;10\pi]$ лежат 45 корней, причем обе серии не пересекаются. Всего получается 81 корень. Однако среди них имеются 11 посторонних корней из третьей серии $x=\pi k$, которые нужно отбросить.

Ответ: 70.

Задачи для самостоятельного решения

В ответах к уравнениям предполагается, что n – любое целое число.

Вычислить (*без калькулятора*).

7.1. $4^{\frac{1}{\log_3 2}}+9^{\frac{1}{\log_2 3}}$. *Ответ*: 13.

7.2. $\log_2 5\cdot\log_5 10\cdot\lg 2$. *Ответ*: 1.

7.3. $\lg\operatorname{tg}1^o\cdot\lg\operatorname{tg}2^o\cdot\lg\operatorname{tg}3^o\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^o$. *Ответ*: 0.

7.4. $\lg\operatorname{tg}1^o+\lg\operatorname{tg}2^o+\lg\operatorname{tg}3^o+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^o$. *Ответ*: 0.

7.5. $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}$.

7.6. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}$.

7.7. $\operatorname{tg}20^o\cdot\operatorname{tg}40^o\cdot\operatorname{tg}60^o\cdot\operatorname{tg}80^o$. *Ответ*: 3.

Решить уравнения.

7.8. $\operatorname{tg}(3\sin x)=1$. *Ответ*: $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{12}+\pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi n$.

7.9. $\sqrt{\sin x}=\operatorname{tg} x$. *Ответ*: πn; $\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+2\pi n$.

7.10. $\left|3\sin^2 x+4\sin x+1\right|=3\sin x+1$. *Ответ*: πn; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$.

7.11. $\sin^2 x-\cos^2 x=2\operatorname{tg}2x\cdot\cos 2x+1$. *Ответ*: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

7.12. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$. *Ответ*: $\frac{\pi}{2}n$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

7.13. $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\pi n$.

7.14. $5\sin 5x+3\sin x=4\cos x$. *Ответ:* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

7.15. $1{,}5\cdot\sin 2x-1=\cos^3 x-\sin^3 x$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\pi n$.

7.16. $\sin x+2\sin 2x+\sin 3x+2\sin 4x+\sin 5x=0$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$; $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+2\pi n$.

7.17. $8\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\cos 15x$.

Ответ: $\frac{\pi n}{14}$, где n не делится на 14.

7.18. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Ответ: $\frac{2\pi n}{9}$, где n не делится на 9.

7.19. $\cos^3 x\cdot\sin 3x+\sin^3 x\cdot\cos 3x=\frac{3}{4}$. *Ответ*: $\frac{\pi n}{8}+\frac{\pi n}{2}$.

7.20. $\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=8\sin x$. *Ответ*: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\pi n$.

7.21. $4\cos 2x=\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x+1$. *Ответ*: $\frac{\pi}{6}+\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$.

7.22. $2\cdot \operatorname{tg}3x+\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\sin 2x\cdot\cos 2x}$. *Ответ*: $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$.

7.23. $2\cdot \operatorname{tg}5x+\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}3x+\dfrac{1}{\sin 2x\cdot\cos 2x}$.

Ответ: πk, где $k\in Z$, k не кратно 5.

Решить неравенства.

7.24. $\lg x+\sqrt{\lg x}+\sqrt{\lg x+2}+\sqrt{\lg x\cdot(\lg x+2)}\geq 3$. *Ответ*: $\left[\sqrt[4]{10};+\infty\right)$.

7.25. $9\cdot 2^x\sqrt{3+x}-x+3\geq 27\cdot 2^x+\sqrt{3+x}-9x\cdot 2^x$. *Ответ*: $[1;+\infty)$.

7.26. $\left||x|-2\right|^{x^2+x-6}>1$.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$.

7.27. $x^{-64\log_5^3 x+5\log_5 x^4}\leq(0{,}2)^{\log_{0,5}8+2}$. *Ответ*: $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}};\sqrt[4]{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

7.28. $\left(4x^2+2x+1\right)^{\lg x^2}>1$. *Ответ*: $(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup(1;+\infty)$.

7.29. $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{2}+3\right)^{x^2-x-7}>\dfrac{4}{x^2-6x+12}$. *Ответ*: $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.

7.30. $\dfrac{\sqrt{16-x^2}-x}{x\sin x}\geq 0$. *Ответ*: $(-\pi;0)\cup(0;2\sqrt{2}\,]\cup(\pi;4]$.

7.31. $\dfrac{2\sin x-1+\cos 2x}{\sin 2x}\geq \operatorname{tg}x$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x\leq\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$;

$-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x<2\pi n$; $2\pi n<x\leq\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$.

Решить уравнения.

7.32. $\log_3\left(\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\cdot\left|\sqrt{x}-1\right|\right)$. *Ответ*: $[0;1]\cup\{4\}$.

7.33. $(1+\sin x)^{\sin^2 x+1,5\sin x+0,5}=1$. *Ответ*: πn; $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

7.34. $\log_{0,8(2-x-x^2)}\cos\left(\pi\left(x^2+2x+0,75\right)\right)=0$. *Ответ:* $-\frac{1}{2}$.

7.35. $x(x-1)\cdot\lg x+3x^2\log_x 100+\log_2 1024=$

$=5x^2+\lg\left(x^2\cdot 10^{-5x}\right)+6(x+2)\log_x 10$. *Ответ:* 2; 100; 1000.

Решить системы уравнений.

7.36. $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2,\\ \cos x\cdot\cos y=0,5.\end{cases}$ *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+m);\frac{\pi}{4}+\pi(k-m)\right)$, где $k\in Z$, $m\in Z$.

7.37. $\begin{cases}\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=2,\\ \sin x\cdot\sin y=0,5.\end{cases}$ *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(n-k);\frac{3\pi}{4}+\pi(k+n)\right)$, где $k\in Z$, $n\in Z$.

7.38. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \cos 2x-\cos 2y=1.\end{cases}$ *Ответ:* $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$;

$\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, где $k\in Z$, $n\in Z$.

7.39. $\begin{cases}\lg(xy)\cdot\lg\frac{x}{y}=3,\\ \lg^2 x^2+\lg^2 y^2=20.\end{cases}$ *Ответ:* $(100;10)$, $(-100;-10)$, $(0,01;10)$, $(-0,01;-10)$,

$(100;0,1)$, $(-100;-0,1)$, $(0,01;0,1)$, $(-0,01;-0,1)$.

7.40. $\begin{cases}x^{\lg y}+y^{\lg x}=2000,\\ \lg x+\lg y=2\cdot\lg 0,01.\end{cases}$ *Ответ:* $(0,1;\ 0,001)$, $(0,001;\ 0,1)$.

7.41. $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=6,\\ x^{\log_y 2}=y^{4\log_x 2}.\end{cases}$ *Ответ:* $(16;4)$, $\left(2^{12};\ 2^{-6}\right)$.

7.42. $\begin{cases}\lg x^4\cdot\lg y^2=8\lg 5,\\ xy=50.\end{cases}$ *Ответ:* $(10;5)$, $(-10;-5)$, $(5;10)$, $(-5;-10)$.

7.43. $\begin{cases}9\cdot\log_y\sqrt[3]{x}+2^{xy}=19,\\ 3\cdot\log_y\sqrt[3]{x^2}+2^{xy}=18.\end{cases}$ *Ответ:* $(2;2)$.

7.44. $\begin{cases}\log_2(xy)+\log_3(xy)=\log_2(xy)\cdot\log_3(xy),\\ \log_{\frac{6}{xy}}x+\log_{\frac{xy}{6}}y=2.\end{cases}$ *Ответ:* $\left(6;\frac{1}{6}\right)$.

§8. ОЦЕНИВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ В УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Оценивание выражений применяется для решения уравнений (и неравенств), для которых стандартные пути явно не годятся. Как правило, это либо алгебраические уравнения большой степени, либо тригонометрические уравнения с углами большой кратности, либо трансцендентные уравнения, содержащие смесь алгебраических, тригонометрических, показательных, логарифмических выражений от неизвестной. Рассмотрим несколько типовых примеров использования оценок для решения уравнений.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНЫХ КВАДРАТОВ

Если уравнение удалось привести к сумме квадратов:

$$(a(x))^2+(b(x))^2=0,$$

то все его корни являются решениями системы

$$\begin{cases} a(x)=0, \\ b(x)=0. \end{cases}$$

Пример 8.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4+2xy+4x^2=16, \\ y^2+x^2y+xy+8=0. \end{cases}$

Решение. К первому уравнению прибавим удвоенное второе и приведем подобные члены:

$$x^4+2x^2y+2y^2+4x^2+4xy=0.$$

Выделяя полные квадраты, получаем $(x^2+y)^2+(2x+y)^2=0$. Отсюда следует, что $x^2=-y=2x$. Имеем два решения уравнения

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2, \\ y=-4. \end{cases}$$

Первое решение не удовлетворяет исходной системе, а второе – подходит.

Ответ: $(2;-4)$.

ОЦЕНИВАНИЕ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ

Пусть требуется решить уравнение

$$a(x)+b(x)=c(x).$$

Причем в результате исследования входящих в уравнение выражений удалось установить, что для всех допустимых значений неизвестной выполняются неравенства: $a(x)\geq 0$, $b(x)\geq 0$, $c(x)\leq 0$. Следовательно, левая часть уравнения больше или равна нулю, а правая – меньше или равна нулю. Поэтому равенство возможно только при одновременном выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} a(x)=0, \\ b(x)=0, \\ c(x)=0. \end{cases}$$

Пример 8.2. Решить неравенство $\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{1}{x^2(x-\pi)^2+2}\geq 2^{\sin^2 x}$.

Решение. Оценим выражения в левой и правой частях неравенства:

$$\frac{\cos x}{2}\leq\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x^2(x-\pi)^2+2}\leq\frac{1}{2}, \quad 2^{\sin^2 x}\geq 1.$$

Следовательно, левая часть неравенства меньше или равна 1:

$$\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{x^2(x-\pi)^2+2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

а правая часть – больше или равна 1. Поэтому для выполнения исходного неравенства необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись три равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2(x-\pi)^2+2}=\dfrac{1}{2}, \\ 2^{\sin^2 x}=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=1, \\ x^2(x-\pi)^2=0, \\ \sin x=0. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение $x=0$. *Ответ*: $x=0$.

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Пусть требуется решить уравнение

$$x^2+p(x)\cdot x+q(x)=0.$$

Если рассматривать это уравнение как квадратное (считая выражения $p(x)$ и $q(x)$) коэффициентами квадратного трехчлена), то для существования его корней необходимо и достаточно условие неотрицательности дискриминанта:

$$(p(x))^2-4q(x)\geq 0.$$

Это дополнительное условие может помочь при решении уравнения.

Пример 8.3. Решить уравнение $x^2+2x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)+1=0$.

Решение. Обозначим $\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)=p$. Для квадратного уравнения $x^2+2px+1=0$ запишем условие неотрицательности дискриминанта: $p^2-1\geq 0$. Учитывая, что $|\,p\,|\leq 1$, так как синус по модулю не превосходит 1, заключаем, что $p=\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)=\pm 1$. Если $p=1$, то исходное уравнение $x^2+2x+1=0$ имеет один корень $x=-1$, который удовлетворяет условию $p=\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)=1$. Если $p=-1$, то исходное уравнение $x^2-2x+1=0$ имеет один корень $x=1$, который не удовлетворяет условию $p=\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right)=-1$. Следовательно, $x=1$ не является решением уравнения. *Ответ*: $x=-1$.

Для оценивания применяются алгебраические неравенства между средними величинами (например, между средним арифметическим и средним геометрическим), неравенства, связанные со свойствами модуля (абсолютной величины), а также ограничения на область значений некоторых функций (например, тригонометрических) функций. Для нахождения наибольших и наименьших значений функции применяется также дифференцирование. Во многих задачах при оценивании выражений существенным образом используется ограниченность области допустимых значений переменных.

8.1. Применение алгебраических неравенств

НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Для любых положительных величин a и b справедливо неравенство

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

– среднее гармоническое $\dfrac{2ab}{a+b}$ не превосходит среднего геометрического $\sqrt{ab}$, среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического $\dfrac{a+b}{2}$, среднее арифметическое не превосходит среднего квадратичного $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство всех средних величин достигается только при $a=b$.

Замечание. Неравенство средних справедливо и для большего количества переменных. Например, для любых трех положительных величин a, b, c:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ СУММЫ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫХ ВЕЛИЧИН

Для всех $a \neq 0$ справедливо неравенство

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \ge 2$$

– сумма взаимно-обратных величин (по модулю) больше или равна 2. Равенство достигается при $a = \pm 1$.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Для любых значений a и b справедливо неравенство

$$\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|$$

– модуль суммы не превосходит суммы модулей и больше или равен модуля их разности. Равенство $|a+b| = |a|+|b|$ имеет место только при условии $ab \ge 0$. Равенство $\big||a|-|b|\big| = |a+b|$ справедливо только при условии $ab \le 0$.

НЕРАВЕНСТВО КОШИ – БУНЯКОВСКОГО

Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Равенство достигается только в случае пропорциональности:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n.$$

Пример 8.4. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие равенству

$$\sqrt[4]{x-38} - \log_x y^3 = \log_y x^3 - \sqrt[4]{200-x}.$$

Решение. Перенесем иррациональные и логарифмические выражения в разные части:

$$\sqrt[4]{x-38} + \sqrt[4]{200-x} = \log_y x^3 + \log_x y^3.$$

Пусть $a=\sqrt[4]{x-38}$, $b=\sqrt[4]{200-x}$, $t=\log_y x$. Тогда $\log_y x^3=3\log_y x=3t$, $\log_x y^3=3\log_x y=\dfrac{3}{t}$. В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $a+b=3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$. Оценим левую и правую части этого равенства. Так как левая часть положительна, то и правая часть должна быть больше нуля, т.е. $t>0$. Для любых $t>0$ справедливо неравенство $t+\dfrac{1}{t}\geq 2$, причем равенство имеет место только при $t=1$. Следовательно, правая часть не меньше 6.

Теперь оценим левую часть. Для этого воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{и, в свою очередь,} \quad \frac{a^2+b^2}{2}\leq\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

Значит $\quad a+b\leq 2\cdot\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\leq 2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}=2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-38+200-x}{2}}=2\cdot\sqrt[4]{81}=6.$

Левая часть не больше 6, причем равенство возможно только при $a=b$. Таким образом, исходное равенство выполняется только при выполнении двух условий

$$\begin{cases} a=b, \\ t=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x-38}=\sqrt[4]{200-x}, \\ \log_y x=1, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=119. \qquad \textit{Ответ}: (119;119).$$

Пример 8.5. Решить неравенство

$$\sin\frac{\pi}{2}\geq\cos\pi+\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}+\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}+\left(\sin\frac{3\pi}{10}\right)^{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Решение. Упростим неравенство, подставив значения $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $\cos\pi=-1$ и преобразовав тригонометрические функции:

$$\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\frac{3\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}, \quad \cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 5x.$$

После упрощения получаем

$$2\geq\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{-\sin 5x}.$$

Оценим правую часть. Во-первых, учитывая очевидное неравенство $a+|a|\geq 0$, делаем вывод, что $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\geq 0$, причем равенство нулю имеет место только при $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$. Во-вторых,

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{-\sin 5x}\geq 2$$

как сумма положительных взаимно-обратных величин, причем равенство возможно только при условии $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}=1$. Таким образом, правая часть неравенства больше или равна 2. Поэтому, исходное неравенство выполняется только для тех x, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0,\\ \left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^{\sin 5x}=1,\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0,\\ \sin 5x=0.\end{cases}$$

Решая уравнение, получаем $x=\dfrac{\pi n}{5}$, где $n\in Z$. Из этой серии выбираем те значения, которые удовлетворяю неравенству $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{5}+k\pi$; $\dfrac{3\pi}{5}+m\pi$, где $k,m\in Z$.

8.2. Использование ограниченности функций и неизвестных

Область допустимых значений (ОДЗ) неизвестных в уравнениях или неравенствах определяется следующими условиями:

1) знаменатель дроби не равен нулю, т.е.

выражение $\dfrac{a}{b}$ имеет смысл при $b\neq 0$;

2) выражение под корнем четной степени больше или равно нулю, т.е.

выражение $\sqrt[2n]{a}$, где $n\in N$, имеет смысл при $a\geq 0$;

3) основание степени с нецелым показателем больше нуля, т.е.

выражение a^r, где $r\notin Z$, имеет смысл при $a>0$;

4) выражение $\log_a b$ имеет смысл при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$;

5) по определению $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ имеют смысл при $\cos x\neq 0$ и при $\sin x\neq 0$ соответственно;

6) выражения $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены для $-1\leq x\leq 1$.

Эти условия ограничивают область, в которой надо искать решения уравнения или неравенства, что может существенным образом упростить задачу.

Пример 8.6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-y} = -2x - x^2, \\ \sqrt{x-y-1} = y^2 - 4. \end{cases}$

Решение. ОДЗ неизвестных определяется неравенством $x - y \geq 1$. Отсюда следует, что $\sqrt{x-y} \geq 1$ – левая часть первого уравнения системы больше или равна единицы. Правая часть этого уравнения меньше или равна 1, так как

$$-2x - x^2 = 1 - (x+1)^2 \leq 1.$$

Поэтому для решений первого уравнения системы справедливы равенства

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ -2x - x^2 = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases}$$

Подставляя пару $(-1; -2)$ во второе уравнение исходной системы, получаем верное числовое равенство. Значит, $(-1; -2)$ – единственное решение исходной системы. *Ответ*: $(-1; -2)$.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Для оценивания выражений в уравнениях и неравенствах наиболее часто используются следующие ограничения на область значений функций:

1) $x^2 + px + q \geq -\dfrac{p^2 - 4q}{4}$; $\sqrt{x} \geq 0$; $a^x > 0$;

2) $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$; $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$;

3) $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$; $0 \leq \arccos x \leq \pi$; $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$; $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

С помощью производной можно находить наибольшие и наименьшие значения функций на заданных промежутках, выясняя тем самым область их значений. Монотонность функций также используется при оценивании. Например, на области определения возрастающей функции $f(x)$ равносильны следующие неравенства:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2.$$

Пример 8.7. Решить уравнение $9 \cdot \sin x = \sin 9x$.

Решение. Вычтем из обеих частей $\sin x$ и преобразуем разность синусов в произведение

$$8 \cdot \sin x = \sin 9x - \sin x \;\Leftrightarrow\; 8 \cdot \sin x = 2 \sin 4x \cos 5x.$$

По формуле синуса двойного угла получаем

$$8 \cdot \sin x = 4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x \;\Leftrightarrow\; 8 \cdot \sin x = 8 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \text{ (или) } \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 1.$$

Первое уравнение совокупности – простейшее – имеет корни $x = \pi n$, где $n \in Z$. В силу ограниченности косинусов левая часть второго уравнения по модулю не превосходит единицы:

$$\left|\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x\right| = \left|\cos x\right| \cdot \left|\cos 2x\right| \cdot \left|\cos 5x\right| \le 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Поэтому корни второго уравнения по необходимости должны удовлетворять условию $\left|\cos x\right| = 1$, т.е. $x = \pi n$, где $n \in Z$. Следовательно, никаких других корней, кроме найденной ранее серии $x = \pi n$, исходное уравнение не имеет.

Ответ: πn, где $n \in Z$.

Пример 8.8. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x - x\sqrt{1-4y^2} = x^2 y + y \ .$$

Решение. Запишем уравнение в виде $y \cdot x^2 - \left(1 - \sqrt{1-4y^2}\right) \cdot x + y = 0$.

Если $y = 0$, то равенство выполняется для любых действительных значений x. Если $y \ne 0$, то уравнение можно рассматривать как квадратное относительно неизвестной x. Для существования решения этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицательным:

$$\left(1 - \sqrt{1-4y^2}\right)^2 - 4y^2 = 2 - 8y^2 - 2\sqrt{1-4y^2} = 2\sqrt{1-4y^2}\left(\sqrt{1-4y^2} - 1\right) \ge 0.$$

При $y \ne 0$ из неравенства $1 - 4y^2 < 1$, в силу монотонности квадратного корня, имеем $\sqrt{1-4y^2} < 1$. Следовательно, выражение в скобках отрицательно. Тогда для выполнения неравенства необходимо, чтобы $\sqrt{1-4y^2} \le 0$. Но по определению квадратного корня $\sqrt{1-4y^2} \ge 0$. Следовательно, $1 - 4y^2 = 0$, т.е. $y = \pm 0{,}5$. Подставляя найденные значения $y = \pm 0{,}5$ в уравнение, получаем $x = \pm 1$ соответственно.

Ответ: $(1; 0{,}5)$, $(-1; -0{,}5)$, $(x; 0)$, где x – любое число.

Пример 8.9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - \sqrt{x^2} = 0, \\ \sqrt{4 - y^2} = x + \dfrac{1}{x} + \arccos(x). \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы равносильно равенству $x - \left|x\right| = 0$, которое справедливо при всех $x \ge 0$. Оценим выражения во втором уравнении системы:

$4 - y^2 \le 4 \ \Rightarrow \ \sqrt{4 - y^2} \le 2$ – левая часть уравнения меньше или равна 2;

$x+\dfrac{1}{x}\geq 2$; $\arccos(x)\geq 0$ – следовательно, правая часть больше или равна 2.

Таким образом, решения исходной системы должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sqrt{4-y^2}=2\,;\ x+\frac{1}{x}=2\,,\ \arccos x=0\,;\ x\geq 0\,.$$

Отсюда получаем $y=0$, $x=1$. *Ответ*: $(1;0)$.

Пример 8.10. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению:

$$(\sin 3y+3\sin y)^2=(\mathrm{tg}(x-y)-\mathrm{ctg}(y-x))^3\,.$$

Решение. Оценим части этого уравнения. Правая часть – куб суммы взаимно-обратных величин:

$$(\mathrm{tg}(x-y)-\mathrm{ctg}(y-x))^3=(\mathrm{tg}(x-y)+\mathrm{ctg}(x-y))^3\,.$$

Следовательно, правая часть по модулю больше или равна 8, причем равенство имеет место только при $\mathrm{tg}(x-y)=1$ (значение $\mathrm{tg}(x-y)=-1$ не подходит, так как левая часть исходного уравнения неотрицательна).

Оценим левую часть. Для этого рассмотрим функцию $f(y)=\sin 3y+3\sin y$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значения. Приравнивая производную нулю, имеем

$$3\cos 3y+3\cos y=0\ \Leftrightarrow\ 12\cos^3 y-6\cos y=0\ \Leftrightarrow\ \cos y\cdot\left(2\cos^2 y-1\right)=0\,.$$

Отсюда $\cos y=0$ или $\cos y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставляя эти выражения в $f(y)$, получаем значения функции в критических точках: $f=\pm 2$ или $f=\pm 2\sqrt{2}$. Следовательно, $|\,f(y)\,|\leq 2\sqrt{2}$. Тогда левая часть исходного уравнения меньше или равна 8.

Таким образом, корни исходного уравнения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{tg}(x-y)=1\,,\\ \sin y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.\end{cases}$$

Отсюда получаем *ответ*: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\,\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $\left(\pi k;\,-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$, где $k,n\in Z$.

Пример 8.11. Найти все пары $(x;y)$ действительных чисел, удовлетворяющие уравнению: $\quad x\sin^2 3y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}}{2\cos 4y-x\sqrt{x^2-2x+2}}$.

Решение. Правая часть уравнения отлична от нуля, так как $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}\geq 1$. Поэтому $x\sin^2 3y\neq 0$. Следовательно, можно перейти к равенству для обратных величин:

$$\frac{1}{x\sin^2 3y}=\frac{2\cos 4y-x\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-2x+2}} \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{1}{x\sin^2 3y}=\frac{2\cos 4y}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Оценим по модулю обе части. Левая часть

$$\left|x+\frac{1}{x\sin^2 3y}\right|=\frac{1}{|\sin 3y|}\cdot\left|x\sin 3y+\frac{1}{x\sin 3y}\right|\geq\frac{2}{|\sin 3y|}\geq 2.$$

Правая часть $\left|\dfrac{2\cos 4y}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right|\leq\dfrac{2}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\leq 2$. Поэтому равенство возможно, но только при одновременном выполнении условий $\begin{cases}\sin^2 3y=1,\\ |\cos 4y|=1,\\ x=1.\end{cases}$

Решая эту систему, приходим к *ответу*: $\left(1;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, где $n\in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения.

8.1. $7\cdot\sin x=\sin 7x$. *Ответ*: πn, где $n\in Z$.

8.2. $\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{2x-1}$. *Ответ*: 2.

8.3. $\sqrt{2-x}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{1-2x}$. *Ответ*: -1.

8.4. $\sqrt{x-50}\cos\dfrac{\pi x}{30}-\sqrt{250-x}\sin\dfrac{\pi x}{12}+20=0$. *Ответ*: 150.

8.5. $2x\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}\right)+\dfrac{x^2}{2}+1=0$. *Ответ*: $-\sqrt{2}$.

8.6. $\left|2\sqrt{x}-3\right|-\left|2\sqrt{x}-7\right|=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$. *Ответ*: 1.

8.7. $\dfrac{81x^2+72\pi x+144\pi^2}{96\pi x}=\cos 2x+2\cos x$. *Ответ*: $\dfrac{-4\pi}{3}$.

8.8. $2\sqrt{6}\sin x+3\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos x=7$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+2\pi n$, где $n\in Z$.

Решить неравенства.

8.9. $\left|4x+\dfrac{1}{|x|}\right|\geq 32x(1-2|x|)$. *Ответ*: $[-0{,}5;0)\cup(0;+\infty)$.

8.10. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}<x^2-6x+11$. *Ответ*: $[2;3)\cup(3;4]$.

8.11. $\dfrac{\log_{1-x}(x-2\operatorname{tg}x+\sin x)-\log_{1-x}2}{x^2-x\sqrt{1-x^2}-1}\leq 0$. *Ответ*: $\left(-1;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8.12. $\dfrac{3x-x^3}{|x|+\sqrt{1-x^2}+1}\geq\dfrac{x^2+1}{2x}$. *Ответ*: $[-1;0)\cup\{1\}$.

Решить системы уравнений.

8.13. $\begin{cases} y^4+4xy+4y^2=16, \\ 2x^2+xy^2+xy+4=0. \end{cases}$ *Ответ*: $(-2;2)$.

8.14. $\begin{cases} y^2\cdot(x^2+4)=36x, \\ y^3+9x^2-9(4x-7)=0. \end{cases}$ *Ответ*: $(2;-3)$.

8.15. $\begin{cases} y+\sqrt{y^2}=0, \\ \sqrt{9-x^2}+\pi-\arccos(y)=y+\dfrac{1}{y}+2. \end{cases}$ *Ответ*: $(\pm 3;-1)$.

8.16. $\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2-x^4y^4}=y^6+x^2(1-x), \\ \sqrt{1+(x+y)^2}+x(2y^3+x^2)=\lg(2x^2y^2-x^4y^4). \end{cases}$ *Ответ*: $(1;\ -1)$.

8.17. $\begin{cases} 32\left(y-\sqrt{x^2-32y+8}\right)=x^2-312, \\ \dfrac{7x^2y^2}{2}-\dfrac{32}{x^2y}+x^2=28-\dfrac{1}{y^2}+64y(x-16y). \end{cases}$ *Ответ*: $(8;0{,}25)$.

8.18. $\begin{cases} \sqrt{\operatorname{tg}(x-y)\cdot(1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)} = \operatorname{tg}(\pi-x)\cdot(2+\operatorname{tg}x), \\ \sqrt{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot(1-\operatorname{tg}y)} = \operatorname{tg}^2 y-4. \end{cases}$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $y=-\operatorname{arctg}2+\pi k$, где $k,n\in Z$.

Найти все пары $(x,\ y)$, удовлетворяющие уравнениям.

8.19. $5\cdot\sin x-12\cdot\cos x=-y^2+4\cdot|y|-17$.

Ответ: $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\pm 2\right)$, где $n\in Z$.

8.20. $8\cdot\sin x-15\cdot\cos x=y^2-6\cdot|y|+26$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{15}{8}+2\pi n;\pm 3\right)$, где $n\in Z$.

8.21. $2\cos 2x+8\cos x\cdot\cos y+7=4\sin y$.

Ответ: $\left(\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, где $k\in Z$, $n\in Z$.

8.22. $\cos\left(\dfrac{\pi y}{\sqrt{6}}\right)=1+\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi y}{2\sqrt{6}}\right)}\left(x\sqrt{6}-x^2-2\right)$.

Ответ: $\left(0{,}5\sqrt{6};\ 0{,}5\sqrt{6}(1+4k)\right)$, где $k\in Z$.

8.23. $\log_{\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}}\dfrac{\cos^2 x+\cos^2 y}{2}=\log_{\sin^2 x}\cos y+\log_{\cos^2 y}\sin x$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, где $k\in Z$, $n\in Z$.

8.24. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{3x^2+3y^2+x^2y^2}{x^4+y^4+9}\ge 1.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

ГЛАВА 3. ЦЕЛЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В этой главе рассматриваются задачи, при решении которых используются свойства целых и рациональных (соответственно иррациональных) чисел. Напомним обозначения основных числовых множеств:

– множество натуральных чисел $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$;

– множество целых чисел $Z = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$;

– множество рациональных чисел $Q = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m \in Z; n \in N \right\}$;

– множество действительных чисел R.

Для множества иррациональных чисел специального обозначения не вводят. По определению это действительные числа, которые не являются рациональными.

В §9 рассматриваются задачи, в формулировках которых используется понятие десятичной системы записи чисел, а также задачи на делимость. В следующем параграфе показываются приемы решения уравнений и неравенств на множестве целых или рациональных чисел.

§9. ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для записи натуральных чисел принята десятичная позиционная система, в которой используется 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, если в задаче речь идет о произвольном трехзначном числе, то его обозначают символом $\overline{xyz}$, ставя черту, чтобы отличить от произведения трех чисел. В записи $\overline{xyz}$: x, y, z – десятичные цифры из набора $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, причем x – количество сотен ($x \neq 0$, так как в записи натуральных чисел нет лидирующих нулей), y – количество десятков, z – количество единиц. Величина трехзначного числа $\overline{xyz}$ равна $100x + 10y + z$. Заметим, что числа выражают величины (количества), а цифры – это символы. Например, набор цифр 007 не является числом, а представляет лишь некоторый номер (символическую запись).

Пример 9.1. Найти двузначное число, если известно, что при уменьшении его на 72 получается двузначное число, записанное теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке.

Решение. Обозначим искомое двузначное число символом $\overline{xy}$. Тогда условие задачи можно символически записать так:

$$\overline{xy}-72=\overline{yx}.$$

Составим теперь по этой записи уравнение, заменяя символы двузначных чисел их величинами

$$10x+y-72=10y+x.$$

Значит, $x=y+8$. Учитывая, что x и y – это цифры, отличные от нуля, получаем единственное решение $x=9$ и $y=1$. Следовательно, искомое число – это 91. *Ответ*: 91.

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Любое целое число m можно ***разделить с остатком*** на любое натуральное число n, т.е. представить число m в виде:

$$m=qn+r,$$

где q и r – целые числа, q – ***частное***, r – ***остаток***, причем $0\le r<n$. Если остаток равен нулю, то говорят, что число m ***делится на*** n (или m ***кратно*** n). В этом случае число n называют ***делителем числа*** m.

Натуральное число, не равное единице, называется ***простым***, если оно делится только на себя и на единицу. Например, простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д. Не трудно показать, что ***простых чисел бесконечно много***. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется ***составным***. По основной теореме арифметики *всякое натуральное число, кроме единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и притом единственным образом (с точностью до перестановок сомножителей)*.

Всякое целое число, которое делится одновременно на целые числа a и b, называется ***общим кратным*** этих чисел. Наименьшее натуральное общее кратное двух чисел a и b называется ***наименьшим общим кратным*** этих чисел, и обозначается $НОК(a,b)$.

Всякое целое число, на которое одновременно делятся целые числа a и b, называется ***общим делителем*** этих чисел. Наибольший из общих делителей чисел a и b называется ***наибольшим общим делителем*** этих чисел и обозначается $НОД(a,b)$. Если $НОД(a,b)=1$, то числа a и b называются ***взаимно простыми***.

НОК и *НОД* двух или более натуральных чисел можно найти, используя разложения этих чисел на простые множители. Из основной теоремы арифметики также следует, что $НОК(a,b)\cdot НОД(a,b)=ab$.

Пример 9.2. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 6, а в остатке 4. Найти это число.

Решение. Пусть $\overline{xy}$ – искомое двузначное число. По условию задачи составляем уравнение $10x + y = 6(x + y) + 4$. Отсюда $4x = 5y + 4$. Следовательно, y делится на 4, т.е. $y = 0$, или $y = 4$, или $y = 8$. В первом случае $x = 1$, во втором – $x = 6$, в третьем – $x = 11$. Последний результат сразу же отбрасываем, так как x – это цифра ($x \neq 11$). Остаются два числа – 10 и 64. Первое число не подходит, так как оно делится на сумму цифр (1) без остатка. Второе число 64 удовлетворяет всем условиям задачи. *Ответ*: 64.

Пример 9.3. Найти наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из трех чисел 12, 9, 70, дает в остатке 1.

Решение. Обозначим искомое число через x. По условию задачи число $x-1$ делится на 12, на 9, на 70. Найдем наименьшее общее кратное этих трех чисел. Для этого разложим каждое на простые множители:

$$12 = 2^2 \cdot 3; \qquad 9 = 3^2; \qquad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Следовательно, $НОК(12; 9; 70) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Таким образом, число $x-1$ кратно 1260. Тогда $x = 1260 \cdot n + 1$, где $n \in Z$. Выбирая из этого множества наименьшее натуральное число, отличное от единицы, получаем *ответ*: 1261.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Натуральное число делится (без остатка)

– *на* 2 $\Leftrightarrow$ *число оканчивается на* 0, *или* 2, *или* 4, *или* 6, *или* 8;
– *на* 3 $\Leftrightarrow$ *сумма его цифр делится на* 3;
– *на* 4 $\Leftrightarrow$ *две последние его цифры образуют число, которое делится на* 4;
– *на* 5 $\Leftrightarrow$ *число оканчивается на* 0 *или* 5;
– *на* 8 $\Leftrightarrow$ *три последние его цифры образуют число, которое делится на* 8;
– *на* 9 $\Leftrightarrow$ *сумма его цифр делится на* 9.

Здесь символ "$\Leftrightarrow$" заменяет слова "тогда и только тогда, когда", т.е. перечисленные условия являются необходимыми и достаточными.

Например, число 78540 делится на 2, на 3 (так как сумма цифр, равная 24, делится на 3), на 4 (так как число 40 делится на 4), на 5, на 6 (так как число делится на 2 и на 3), и не делится на 8 (так как число 540 не делится на 8) и на 9 (так как сумма цифр, равная 24, не делится на 9).

Пример 9.4. Найти все натуральные числа, обладающие следующим свойством: если к искомому числу приписать слева одну цифру, а затем из полученного числа вычесть число, полученное из искомого приписыванием к нему справа цифры 2, то разность окажется в 3 раза больше искомого числа.

Решение. Пусть искомое число x является n-значным. Если приписать к нему слева цифру p, то получим $(n+1)$-значное число, величина которого равна $x+p\cdot 10^n$. Если к числу x справа приписать цифру 2, то получим число $10x+2$. По условию задачи составляем уравнение

$$x+p\cdot 10^n-(10x+2)=3x \quad \Leftrightarrow \quad p\cdot 10^n-12x=2.$$

При $n\geq 2$ левая часть делится на 4, а правая часть на 4 не делится. Поэтому $n=1$, т.е. искомое число x является однозначным. Учитывая это, получаем равенство $10p=12x+2$, или, что то же самое, $6x=5p-1$. Перебирая все возможные цифры p, находим единственное решение $x=4$ (при $p=5$).

Ответ: 4.

СРАВНЕНИЕ ОСТАТКОВ

Говорят, что целые числа a и b ***сравнимы по модулю*** p, если остатки от деления чисел a и b на натуральное число p равны между собой. Будем обозначать сравнимость так $a\overset{p}{\equiv}b$. Например, $47\overset{7}{\equiv}-9$, так как при делении 47 и -9 на 7 получается один и тот же остаток 5: $47=6\cdot 7+5$; $-9=-2\cdot 7+5$.

Операция сравнения по модулю обладает следующими свойствами:

1) $a\overset{p}{\equiv}b$ *тогда и только тогда, когда разность* $a-b$ *делится на* p;

2) *если* $a\overset{p}{\equiv}c$ *и* $b\overset{p}{\equiv}d$, *то* $a+b\overset{p}{\equiv}c+d$ *и* $ab\overset{p}{\equiv}cd$;

3) *если* $a\overset{p}{\equiv}b$, *то* $a^n\overset{p}{\equiv}b^n$ *для любого* $n\in N$.

На основе этих свойств можно доказать следующие утверждения:

а) *если натуральное число* m *делится на натуральное число* n *с остатком* r ($m=qn+r$), *то* $НОД(m,n)=НОД(r,n)$;

б) *среди любых* n *последовательных целых чисел найдется ровно одно число, которое делится на* n;

в) *для любого простого числа* p *и любого целого числа* a *разность* a^p-a *делится на* p, т.е. $a\overset{p}{\equiv}a^p$ (***малая теорема Ферма***).

Пример 9.5. Найти остаток от деления числа $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$ на 3.

Решение. Имеем $13\overset{3}{\equiv}1$; $2\overset{3}{\equiv}-1$; $5\overset{3}{\equiv}-1$. По свойству (3) получаем $13^{16}\overset{3}{\equiv}1^{16}$; $2^{25}\overset{3}{\equiv}(-1)^{25}$; $5^{15}\overset{3}{\equiv}(-1)^{15}$. Тогда по свойству (2):

$$13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}\overset{3}{\equiv}1^{16}-(-1)^{25}(-1)^{15}.$$

Правая часть равна нулю, т.е. данное число делится на 3. *Ответ*: 0.

Пример 9.6. В магазине было 6 ящиков с яблоками массой 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг и 31 кг. Две организации взяли 5 ящиков, причем одна из них взяла по массе в два раза больше яблок, чем другая. Какой ящик (по массе) остался в магазине?

Решение. Всего было $15+16+18+19+20+31=119$ кг яблок. Если одна организация взяла x кг, то другая – $2x$ кг. Тогда осталось $119-3x$ кг. Найдем массу оставшегося ящика. Остаток от деления числа $119-3x$ на 3 равен 2. Такой же остаток при делении на 3 дает число 20 (остальные числа 15, 16, 18, 19, 31 дают другие остатки). Следовательно, в магазине остался ящик массой 20 кг. *Ответ*: 20 кг.

Пример 9.5. Найти значение $\cos\frac{\pi n^2}{12}$, если известно, что n – натуральное число большее 9, и для всякого натурального k, меньшего n, уравнение

$$\frac{\sin^2(nx)+\sin^2(kx)}{\sin x}=0$$

не имеет действительных решений.

Решение. Чтобы сумма квадратов двух функций, стоящая в числителе, обращалась в нуль, нужно, чтобы каждая из них равнялась нулю. Тогда при заданных n и k исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin nx=0,\\ \sin kx=0,\\ \sin x\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}nx=\pi m,\\ kx=\pi l,\\ x\neq \pi p,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{m}{n},\\ \dfrac{x}{\pi}=\dfrac{l}{k},\\ \dfrac{x}{\pi}\neq p.\end{cases}$$

Здесь l,m,p – произвольные целые числа. Другими словами, $\frac{x}{\pi}$ не должно быть целым числом, но должно записываться в виде двух дробей со знаменателями n и k.

Заметим, что если n не является простым (т.е. $n=ab$, причем $a,b>1$), то решение такой системы всегда найдется. Для этого достаточно взять $m=a$, $l=1$, $k=b$, $x=\frac{\pi}{b}$. Если же n – простое число, то система решений не имеет. Дробь с простым знаменателем нельзя записать в виде дроби с меньшим знаменателем. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений, когда n – простое.

Теперь рассмотрим числа $(n-1)$ и $(n+1)$. Оба они – четные (так как n – нечетное), причем одно из них делится на 4, поскольку это два соседних четных числа. Кроме того, среди чисел $(n-1)$, n, $(n+1)$ одно делится на 3 (но это – не n). Таким образом, произведение $(n-1)(n+1)$ делится на $2\cdot 3\cdot 4=24$, т.е. $n^2-1=24\cdot r$, где $r\in N$. Тогда $\cos\frac{\pi n^2}{12}$ представляется в виде

$$\cos\frac{\pi n^2}{12}=\cos\left(2\pi r+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Делится ли число 145860 на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9, на 11?
Ответ: да, да, да, да, да, нет, нет, да.

9.2. Найти *НОК*(12600; 6468) и *НОД*(12600; 6468). *Ответ*: 970200; 84.

9.3. Найти наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из трех чисел 18, 24, 34, дает в остатке 1. *Ответ*: 1225.

9.4. Может ли число, состоящее из нулей и 300 единиц, быть квадратом целого числа? *Ответ*: нет.

9.5. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 23? *Ответ*: нет.

9.6. Найти остаток от деления числа $13^{20}+2^{10}\cdot 11^{10}$ на 7. *Ответ*: 2.

9.7. Доказать, что при делении квадрата нечетного числа на 8 остаток равен 1.

9.8. Доказать, что при любом натуральном n число n^3-n делится на 3.

9.9. Доказать, что при делении квадрата любого простого числа (большего 3) на 24 остаток равен 1.

9.10. Найти два натуральных числа, разность которых равна 66, а их наименьшее общее кратное равно 360. *Ответ*: 90; 24.

9.11. Найти двузначное число, если известно, что оно больше на 63, чем двузначное число, записанное теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке. *Ответ*: 81; 92.

9.12. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 2, а в остатке 7. Найти это двузначное число. *Ответ*: 29.

9.13. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 5, а в остатке 9. Найти это число. *Ответ*: 99.

9.14. Найти наименьшее натуральное число обладающее следующим свойством: если к десятичной записи числа приписать такое же число, то получим число, которое делится на 3465. *Ответ*: 135.

9.15. Найти количество трехзначных натуральных чисел, удовлетворяющих условию: если между первыми двумя цифрами вставить цифру 4, а перед последней цифрой вставить цифру 5, то получим пятизначное число, которое делится на 36. *Ответ*: 20.

9.16. Найти все натуральные числа, каждое из которых является первым членом такой арифметической прогрессии с разностью, равной 7, сумма первых нескольких членов которой равна 2744.

Ответ: 119 ; 371 ; 2744 .

9.17. Все натуральные числа в десятичной системе счисления выписаны подряд, начиная с единицы. Определить, какая цифра стоит на 199804-ом месте. *Ответ*: 2.

9.18. Сколько существует различных натуральных чисел n, для которых число $\dfrac{2n^2+3n+27}{2n-3}$ является целым? *Ответ*: 4.

9.19. Сколько существует различных натуральных чисел n, для которых число $\dfrac{2n^2-3n+55}{2n-5}$ является целым? *Ответ*: 6.

9.20. Известно, что числа $(m-1)$ и (m^2-2m+3) – натуральные и к тому же простые. Чему равно значение $\log_2 m$ при этих условиях?

Ответ: 1; 2.

9.21. Известно, что a и b – натуральные числа и число a^2+ab+1 делится без остатка на число b^2+ab+1. Какие значения при этих условиях может принимать выражение

$$\frac{4-2ab+a^2+b^2}{2+a-b}\ ?$$

Ответ: 2.

9.22. Найти два различных простых числа, произведение которых делится на число $(2m^2+15m+18)(6mn-n^2-8m^2-32)$ при некоторых натуральных значениях m и n. *Ответ*: 13 и 17, 23 и 37.

9.23. Два однозначных числа и одно двузначное число являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найти эти три числа, если известно, что искомое двузначное число делится на 7 (без остатка). *Ответ*: $(2;8;14)$, $(4;9;14)$.

9.24. Два однозначных числа и одно нечетное двузначное число являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найти эти три числа, если известно, что искомое двузначное число делится на 5 (без остатка). *Ответ*: $(1;8;15)$, $(3;9;15)$.

9.25. Сумма цифр нечетного двузначного натурального числа равна сумме цифр произведения этого числа на некоторое четное однозначное число. Сколько существует таких двузначных чисел? *Ответ:* 13.

9.26. Натуральные числа k и m удовлетворяют условию: остаток от деления произведения $k\cdot m$ на 163 в семь раз больше числа m. Найти наибольшее двузначное натуральное число p такое, что произведение $p\cdot k$ делится на 163 с остатком 1. *Ответ*: 70.

9.27. Найти все натуральные числа, обладающие следующим свойством: если от числа, полученного из искомого приписыванием к нему слева одной цифры, вычесть число, полученное из искомого приписыванием к нему справа одной цифры, не равной 0 или 8, то разность окажется в 15 раз больше искомого числа. *Ответ*: 1; 2; 29.

9.28. Двузначное, трехзначное и четырехзначное натуральные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если в записи двузначного числа стереть последнюю цифру, а в трехзначном и четырехзначном стереть по две последних цифры, то полученные три числа, в указанном порядке, являются последовательными членами геометрической прогрессии. Какие числа остались после стирания цифр? *Ответ*: 3, 6, 12 или 4, 8, 16.

9.29. Школьник купил за 30 монет 30 предметов (карандашей, ластиков, ручек). За каждые три карандаша он заплатил 1 монету, за каждые 2 ластика – также 1 монету, за каждую ручку – 2 монеты. Сколько куплено карандашей, ластиков, ручек?

Ответ: 9 карандашей, 10 ластиков, 11 ручек.

9.30. Артель готовит на заказ книжные полки двух видов по цене 130 и 150 рублей за каждую. За рабочий день артель может изготовить не более 60 полок обоих видов. Сколько полок каждого вида изготовила артель за один день, если за полки первого вида было получено от заказчиков на 1250 рублей больше, чем за полки второго вида?

Ответ: 20 и 9; 35 и 22.

9.31. На автомобильной стоянке, имеющей 50 мест, располагаются автомобили трех марок A, B и C, при этом стоянка не заполнена целиком. Если бы число машин марки A не изменилось, число машин марки B уменьшилось вдвое, а количество машин марки C возросло в два раза, то и в таком случае стоянка не была бы полностью заполненной. Однако если бы со стоянки выехали все машины марки A, число машин марки B не изменилось, а количество машин марки C удвоилось, то стоянка заполнилась бы целиком и, возможно, некоторые машины остались бы без места. Сколько машин указанных марок находилось на стоянке, если известно, что увеличенному в пять раз количеству машин марки A на стоянке не разместиться?

Ответ: 11; 26; 12; или 11; 24; 13.

9.32. На станцию привезли несколько контейнеров с телевизорами. В каждом контейнере одинаковое число (большее одного) телевизоров. Телевизоры перегрузили в вагоны одинаковой емкости. Получилось 7 полных вагонов и еще осталось 5 телевизоров. Через неделю привезли другое количество таких же контейнеров. При перегрузке получилось 11 полных вагонов, а в 12-м не хватало 1-го телевизора до полноты вагона. Сколько телевизоров вмещает один контейнер? *Ответ*: 67.

9.33. В институт приняли 1512 первокурсников. Первоначально их распределили поровну по учебным группам. В связи с сокращением числа специальностей количество групп уменьшилось на 9. Всех первокурсников перераспределили по новым группам, причем так, что в группах снова получилось равное число студентов. Сколько стало групп, если число студентов в одной группе меньше 28? *Ответ*: 63.

9.34. Для изготовления бриллиантов из 11 алмазов весом 20, 25, 26, 29, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 40 кар (карат – сокращенно кар – мера веса драгоценных камней) два ювелира выбрали 10 алмазов для их огранки. Вес всех алмазов, взятых первым ювелиром, в три раза меньше, чем вес всех алмазов, взятых вторым. Какой алмаз (по весу) остался невыбранным? Какие алмазы (по весу) взял первый ювелир?

Ответ: остался алмаз весом 35 кар; первый ювелир взял либо два алмаза весом 38 и 40 кар, либо три алмаза весом 20, 25, 33 кар.

9.35. С завода каждое утро отправляли в магазин полный контейнер с телевизорами, а вечером получали этот же контейнер обратно с бракованными телевизорами. Причем каждый день оказывалось 8 бракованных телевизоров. Через месяц с лишним бракованные телевизоры уложили в эти же контейнеры. При этом 13 контейнеров оказались пустыми, в одном не хватало 7 телевизоров до полноты, а остальные были заполнены полностью. Сколько дней шли поставки с завода в магазин?

Ответ: 50 или 124.

9.36. На учебных стрельбах каждому солдату выдали полную коробку с патронами. После стрельбы каждый солдат вернул коробку с 20-ю неиспользованными патронами. Эти патроны переложили в те же коробки. При этом 5 коробок осталось пустыми, в одной оказалось 7 патронов, а остальные коробки были заполнены полностью. Сколько солдат участвовало в стрельбах, если каждый из них сделал не менее 10 выстрелов?

Ответ: 7.

9.37. В эстафете принимают участие несколько команд. В каждой команде одинаковое количество мужчин и одинаковое количество женщин, причем в каждой команде меньше 7 человек. Если в каждой команде число женщин оставить без изменений, а число мужчин увеличить в 3 раза, то общее число мужчин, участвующих в соревновании, будет на 50 человек больше общего количества женщин, а число спортсменов в каждой команде превысит 12. Найти число команд, а также количество мужчин и женщин в каждой команде.

Ответ: 5 команд; 2 женщины; 4 мужчины.

9.38. За некоторые последовательные неодинаковые периоды времени, равные целому числу месяцев, ежемесячные проценты, начисленные на вклад в банке, составили $2\frac{1}{12}\%$, $2\frac{6}{7}\%$, $3\frac{19}{27}\%$, $4\frac{1}{6}\%$. Сколько месяцев вклад находился в банке, если в итоге он вырос на $36\frac{1}{9}\%$?

Ответ: 10 месяцев.

9.39. Число атомов в молекуле полимера A на 336 превосходит число атомов в четырех молекулах полимера B. Известно, что 7056 – это минимальное количество атомов, из которых без остатка можно изготовить несколько молекул полимера A, либо – несколько молекул полимера B. Сколько атомов в молекуле полимера A? *Ответ:* 2352.

9.40. Спортсмен несколько раз стреляет по мишеням. Количество промахов оказалось меньше $\frac{7}{15}$, но больше $\frac{5}{12}$ от общего числа сделанных спортсменом выстрелов. Какое минимальное количество выстрелов сделал спортсмен?

Ответ: 7.

§10. ЦЕЛЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В этом параграфе рассматриваются уравнения и неравенства, в которых требуется найти целые или рациональные решения. Это обстоятельство существенным образом влияет на ход решения. Надо применять признаки делимости, основную теорему арифметики, десятичную форму записи чисел (см. §9) и т.п. Нередко возникают ветвления решения. Здесь нужно выяснить, сколько имеется разных вариантов, а затем перебрать их, обоснованно отбрасывая неподходящие.

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ

Пусть требуется найти целое (или рациональное) решение уравнения $f(x)=0$ с одной неизвестной x. Сначала рассмотрим случай, уравнение решается стандартными методами. При этом нужно решить уравнение, а затем отобрать среди корней целые (или рациональные).

Пример 10.1. Найти рациональные решения уравнения

$$\sin\left(x^2\right)+\sin x=0.$$

Решение. Преобразуем сумму синусов в произведение

$$2\sin\frac{x^2+x}{2}\cos\frac{x^2-x}{2}=0.$$

Следовательно,

$$x^2+x=2\pi n \quad \text{(или)} \quad x^2-x=\pi+2\pi n, \text{ где } n\in Z.$$

Так как x – рациональное число, то выражения x^2+x и x^2-x принимают рациональные значения. Число π – иррациональное, поэтому выражение $2\pi n$ рационально только при $n=0$, а $\pi+2\pi n$ – иррационально при всех $n\in Z$. Значит, равенство $x^2+x=2\pi n$ верно только при $n=0$ для $x=0$ и $x=-1$, а равенство $x^2-x=\pi+2\pi n$ ложно при любых $x\in Q$ и любых $n\in Z$. Таким образом, уравнение имеет два рациональных корня.

Ответ: -1; 0.

Другая, более сложная ситуация складывается, когда уравнение $f(x)=0$ нельзя решить стандартными методами на множестве действительных чисел (при $x\in R$). В этом случае ограничения $x\in Z$ (или $x\in Q$) надо использовать уже для нахождения корней. Как правило, здесь применяется перебор вариантов. Причем этот перебор нужно правильно организовать. Во-первых, нужно ограничить количество вариантов, так как множество целых (рациональных) чисел бесконечно. Во-вторых, обеспечить полноту перебора, чтобы не пропустить ни одного возможного варианта.

Пример 10.2. Найти все натуральные значения x, удовлетворяющие уравнению $2^{x^2+2x}+2^{x^2}=272$.

Решение. Это уравнение стандартными методами не решить, так как оно не сводиться к простейшему показательному уравнению. Поэтому преобразуем его, разложив на множители левую и правую части:

$$2^{x^2}\cdot\left(2^{2x}+1\right)=16\cdot17.$$

При любом натуральном x в левой части равенства стоит произведение натуральных чисел, причем число $2^{2x}+1$ – нечетное (больше 1). Поэтому годиться только один вариант, когда $2^{2x}+1=17$, т.е. при $x=2$. Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем верное числовое равенство.

Ответ: 2.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим линейное уравнение с двумя неизвестными x и y (***диофантово уравнение***)

$$ax+by=c,$$

где a, b, c – целые числа. Требуется найти целочисленные решения, т.е. пары (x,y) целых чисел x и y, удовлетворяющие этому уравнению.

Будем предполагать, что свободный член $c>0$, в противном случае умножим обе части уравнения на (-1). Коэффициенты a и b при неизвестных тоже будем считать положительными. Если, например, $a<0$, то делаем замену $z=-x$. В случае $a=0$ уравнение легко решить: если c делится на b (без остатка), то имеется бесконечное множество решений $\left(x,\dfrac{c}{b}\right)$, где $x\in Z$; если же c не делится на b, то уравнение не имеет решений. Таким образом, считаем, что все коэффициенты a, b, c уравнения – натуральные числа.

Идея решения повторяет алгоритм Евклида. Рассмотрим коэффициенты a и b при неизвестных в уравнении. Если один из коэффициентов равен 1, то решение уравнения записать очень просто. Например, если $b=1$, то $y=c-ax$. Причем эта формула дает целые значения y для любых целых x. Поэтому все решения уравнения составляют пары $(x,c-ax)$, где $x\in Z$. Если же оба коэффициента больше 1, то их можно уменьшить следующим образом. Пусть, например $a>b>1$. Разделим a на b с остатком: $a=a_1b+b_1$, где $b>b_1$. Запишем исходное уравнение в виде $b(a_1x+y)+b_1x=c$, и сделаем замену $x_1=a_1x+y$. В результате получим диофантово уравнение

$$bx_1+b_1x=c,$$

у которого коэффициенты при неизвестных соответственно меньше, чем у исходного уравнения: $b<a$ и $b_1<b$. Продолжая таким способом уменьшать коэффициенты, придем к случаю, когда хотя бы один из них окажется равным 1. Это обязательно произойдет, так как натуральные числа ограничены снизу.

Пример 10.3. Найти все пары целых чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющие уравнению $381x-156y=15$.

Решение. Сделаем замену $x_1=-y$, чтобы получить уравнение

$$381x+156x_1=15$$

с натуральными коэффициентами. Коэффициенты 381 и 156 при неизвестных больше 1. Поэтому разделим 381 на 156 с остатком ($381=2\cdot156+69$) и преобразуем уравнение

$$381x+156x_1=15 \quad \Leftrightarrow \quad 156(2x+x_1)+69x=15.$$

После замены $x_2=2x+x_1$ получим уравнение $156x_2+69x=15$. Коэффициенты этого уравнения опять больше 1. Поэтому записываем его в виде

$$69(2x_2+x)+18x_2=15$$

и делаем замену $x_3=2x_2+x$. Получаем уравнение $69x_3+18x_2=15$. Продолжаем процесс:

$$18(3x_3+x_2)+15x_3=15\text{; замена: } x_4=3x_3+x_2;$$

$$\text{новое уравнение: } 18x_4+15x_3=15;$$

$$15(x_4+x_3)+3x_4=15\text{; замена: } x_5=x_4+x_3;$$

$$\text{новое уравнение: } 15x_5+3x_4=15.$$

Разделив обе части на 3, получаем уравнение $5x_5+1\cdot x_4=5$ с коэффициентом, равным 1. Выражаем неизвестную x_4 (для сокращения записей вместо x_5 будем писать n): $x_4=5-5n$. Далее последовательно находим

$$x_3=x_5-x_4=n-(5-5n)=6n-5;$$
$$x_2=x_4-3x_2=(5-5n)-3(6n-5)=20-23n;$$
$$x=x_3-2x_2=(6n-5)-2(20-23n)=52n-45;$$
$$x_1=x_2-2x=(20-23n)-2(52n-45)=110-127n;$$
$$y=-x_1=-(110-127n)=127n-110.$$

Таким образом, для любого целого числа n пара

$$\begin{cases} x=52n-45, \\ y=127n-110 \end{cases}$$

удовлетворяет исходному уравнению, и наоборот, любое решение уравнения имеет указанный вид. *Ответ*: $(52n-45;\, 127n-110)$, где $n\in Z$.

Поиск целых решений нелинейных уравнений значительно сложнее, чем линейных. Обычно задача сводится к перебору вариантов. Например, придавая одной неизвестной допустимые значения. Как отмечалось выше, важна правильная организация перебора – его полнота и ограниченность. Уменьшение количества допустимых вариантов достигается, как правило, за счет оценок выражений и признаков делимости целых чисел.

Пример 10.4. Найти целые решения уравнения $2x^2-2xy+9x+y=2$.

Решение. Это уравнение квадратное относительно неизвестной x и линейное относительно y. Выразим y

$$y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}.$$

Заметим, что знаменатель не равен нулю, так как x – целое число. Выделим теперь целую часть дроби (см. §6):

$$y=x+5+\frac{3}{2x-1}.$$

Сумма в правой части будет целым числом, если 3 делиться на $2x-1$ (без остатка). Следовательно, допустимы только 4 варианта: $2x-1=\pm1;\pm3$. Отсюда находим x, а потом вычисляем соответствующие значения y.

Ответ: $(-1;3)$, $(0;2)$, $(1;9)$, $(2;8)$.

Пример 10.5. Найти целые решения уравнения

$$4x^2+8xy+5y^2+2y=4.$$

Решение. Это уравнение квадратное относительно обеих неизвестных. Выделим полные квадраты

$$4(x+y)^2+(y+1)^2=5.$$

Сумма квадратов равна 5, поэтому $|x+y|\le\frac{\sqrt{5}}{2}\approx1{,}1$. Следовательно, сумма $x+y$ целых чисел может принимать только три значения: -1, 0, 1. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ (y+1)^2=1, \end{cases}$$

которая имеет два решения $(-1;0)$ и $(1;-2)$. Во втором случае (при $x+y=0$) целых решений нет. В третьем случае получаем еще два решения.

Ответ: $(-1;0)$, $(1;0)$, $(1;-2)$, $(3;-2)$.

Пример 10.6. Найти целые решения уравнения $3x^2+4xy-7y^2=13$.

Решение. Это уравнение квадратное относительно обеих неизвестных. Выделение полных квадратов в данном случае не дает ограничения значений левой части, так как получим не сумму квадратов, а разность. Разложим левую часть на множители, считая ее квадратным трехчленом относительно переменной x:

$$(x-y)(3x+7y)=13.$$

Получилось, что простое число 13 представлено как произведение двух целых чисел. Но простые числа делятся только на 1 и на себя. Поэтому возможны только 4 варианта

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x+7y=13, \end{cases} \text{(или)} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ 3x+7y=-13, \end{cases} \text{(или)} \quad \begin{cases} x-y=13, \\ 3x+7y=1, \end{cases}$$

$$\text{(или)} \quad \begin{cases} x-y=-13, \\ 3x+7y=-1. \end{cases}$$

Последние две системы не имеют целых решений. Из первых двух систем получаем *ответ*: $(-2;-1)$, $(2;1)$.

Пример 10.7. На координатной плоскости задана точка (1997; 850). Сколько точек с целыми координатами удалено от нее на расстояние 32?

Решение. На координатной плоскости расстояние между точками $(x,\ y)$ и (1997; 850) выражается формулой $\sqrt{(x-1997)^2+(y-850)^2}$. По условию задачи составляем уравнение $\sqrt{(x-1997)^2+(y-850)^2}=2^5$. Сделаем замену $x=1997+a$; $y=850+b$. Тогда задача сводится к решению в целых числах квадратного уравнения

$$a^2+b^2=2^{10}$$

с двумя неизвестными a и b.

Нетрудно найти четыре пары $(a;b)$ целых чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Очевидно, подходят: $a=\pm 2^5, b=0$; $a=0$, $b=\pm 2^5$. Следовательно, 4 решения уравнение имеет. Основная трудность этой задачи – показать, что других целых решений нет. Для этого рассмотрим три случая.

1. Если одно из чисел a или b – четное, а другое – нечетное, то равенство $a^2+b^2=2^{10}$ ложное (в этом случае левая часть – нечетное число, а правая – четное).

2. Пусть a, b – нечетные числа, т.е. $a=2k+1$, $b=2m+1$, где m, k – целые числа. Подставляя эти выражения в уравнение и сокращая на 2, получаем

$$2(k^2+k)+2(m^2+m)+1=2^9.$$

Левая часть последнего равенства – нечетное число, а правая часть – четное. Значит, равенство – ложное.

3. Пусть a, b – четные числа, не равные нулю. Тогда их можно представить в виде $a = 2^p \cdot A$, $b = 2^q \cdot B$, где A и B – нечетные числа, а p, q – натуральные. Подставив a и b в уравнение, получаем $2^{2p}A^2 + a^{2q}B^2 = 2^{10}$. Если $p > q$, то $2^{2q} \cdot \left(2^{2(p-q)}A^2 + B^2\right) = 2^{10}$. В левой части равенства есть нечетный множитель, стоящий в круглых скобках, а справа нет нечетного множителя. Следовательно, равенство неверно. Аналогично для $p < q$. Если $p = q$, то, сокращая левую и правую части на 2^{2p}, получаем случай, аналогичный случаю 2.

Таким образом, доказано, что уравнение имеет только четыре указанных ранее решения. *Ответ*: 4.

УРАВНЕНИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим особенности нахождения рациональных решений уравнений с иррациональными коэффициентами. В первую очередь надо напомнить, что иррациональное число, по определению, нельзя представить в виде дроби $\dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Иррациональными, например, являются:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,… – числа вида $\sqrt{n}$, если натуральное число n не является квадратом какого-либо натурального числа;

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$,… – числа вида $\sqrt[3]{n}$, если натуральное число n не является кубом какого-либо натурального числа;

и т.д.

Докажем, например, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число. Предположим противное. Пусть $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, причем дробь несократимая: $НОД(m,n) = 1$. Возведем обе части равенства в квадрат и умножим на знаменатель:

$$2n^2 = m^2.$$

Значит, m^2 – четное число. Тогда и m – четное. Запишем его в виде $m = 2k$, где $k \in Z$. Подставляя в равенство, получаем

$$2n^2 = 4k^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 2k^2.$$

Значит, n^2 – четное, тогда и n – четное.

Получили противоречие, оба числа m и n четные, т.е. $НОД(m,n) = 2$. Это противоречие доказывает иррациональность $\sqrt{2}$.

Аналогичным образом можно доказать, что для иррационального числа α при любых рациональных p и q число

$$p+q\cdot\alpha$$

является иррациональным, за исключением случая $q=0$.

Отдельно отметим, что числа π и e также являются иррациональными, однако, доказательство этого факта не входит в программу для поступающих в вузы.

Пример 10.8. Найти все такие рациональные числа x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2\sqrt{3}-3=(x+y)\sqrt{3}-2\sqrt{3xy}\ .$$

Сокращая обе части на $\sqrt{3}$, получаем

$$2-\sqrt{3}=(x+y)-2\sqrt{xy}\ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{xy}=(x+y-2)+\sqrt{3}\ .$$

Еще раз возведем обе части в квадрат:

$$4xy=(x+y-2)^2+2\sqrt{3}(x+y-2)+3\,.$$

В левой части имеем рациональное число, так как x и y – рациональны. Правая часть будет рациональным числом только при $x+y-2=0$. Следовательно, рассматриваемое равенство справедливо при условиях

$$\begin{cases}x+y=2,\\4xy=3.\end{cases}$$

Решая эту систему (например, по теореме Виета), получаем два решения $(1{,}5;\,0{,}5)$ и $(0{,}5;\,1{,}5)$. Второе решение, как показывает проверка, постороннее.

Ответ: $x=1{,}5$; $y=0{,}5$.

В заключение рассмотрим задачу, в формулировке которой нет требования целочисленности (или рациональности) корней. Это условие возникает в процессе решения.

Пример 10.9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\cos 2x+\cos 2y=z^2+\dfrac{1}{z^2},\\[2ex] x\left(\sqrt{\dfrac{y}{\pi}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{y}}\right)^2=243\pi.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Оценим выражения в левой и правой частях этого уравнения. Левая часть не превосходит 2 из-за ограниченности косинуса. Правая часть не меньше 2 как сумма положительных взаимно обратных чисел:

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\frac{z^4+1}{z^2}=\frac{z^4-2z^2+1}{z^2}+2=\left(\frac{z^2-1}{z}\right)^2+2\geq 2.$$

Следовательно, равенство обеих частей уравнения возможно только при одновременном выполнении трех условий:

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos 2y=1,\\ z^2=1.\end{cases}$$

Отсюда $x=\pi n$, $y=\pi k$, $z=\pm 1$, где k и n – некоторые целые числа. Подставляя найденные для x и y выражения во второе уравнение системы, получаем

$$n\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2=243.$$

Отсюда делаем вывод, что k и n – такие натуральные числа, для которых выполняется равенство $n(k+1)^2=243k$.

Натуральное число k не имеет общих множителей с натуральным числом $(k+1)^2$. Поэтому для выполнения равенства число $243=3^5$ должно делиться на $(k+1)^2$. Это возможно только в двух случаях: $(k+1)^2=9$ или $(k+1)^2=81$. Следовательно, либо $k=2$ (и тогда $n=54$), либо $k=8$ (и тогда $n=24$). Подставляя найденные k и n в выражения для x и y, получаем ответ. *Ответ*: $(24\pi;\,8\pi;\,1)$, $(24\pi;\,8\pi;\,-1)$, $(54\pi;\,2\pi;\,1)$, $(54\pi;\,2\pi;\,-1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

10.1. $\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos(x^2)}{2}=\cos x-\cos^2 x$. *Ответ*: 0.

10.2. $2\log_2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)-3\sin\left(\pi\log_4\dfrac{8x}{33\pi}\right)=3$. *Ответ*: 33π.

10.3. $4x^2+31x+38=8\cdot\sin\frac{\pi}{x}+\sqrt{\lg\left(\cos^2(\pi x)\right)}$. *Ответ*: -6; -2.

10.4. $\cos\frac{\pi x}{12}\left(\sin\frac{\pi x^3}{12}-\cos\frac{\pi x}{12}\right)=\sin\frac{\pi x}{12}\left(\cos\frac{\pi x^3}{12}+\sin\frac{\pi x}{12}\right)+\sin^2(\pi x)$.

Ответ: $2+8m$, где $m\in Z$.

10.5. Найти все натуральные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992.$$

Ответ: 3.

10.6. Найти все целые числа n, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\left(n^5-5n^3+4n\right)\right)=2\cdot\sin\frac{\pi}{n-12}.$$

Ответ: 11; 13; 15.

Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнениям:

10.7. $113x+179y=17$. *Ответ*: $(179n-323;\,204-113n)$, где $n\in Z$.

10.8. $2x|y|=x+2y+5$. *Ответ*: $(-5;0)$, $(3;-1)$, $(3;2)$, $(7;1)$.

10.9. $x^2(x-y+2)=x(y+4)-5y-7$. *Ответ*: $(1;-2)$, $(2;15)$, $(-3;10)$, $(-2;-5)$.

10.10. $5x^2+8xy+4y^2=4+4x$. *Ответ*: $(0;-1)$, $(0,1)$, $(4;-5)$, $(4;-3)$.

10.11. $(x+2)^4-x^4=y^3$. *Ответ*: $(-1;0)$.

10.12. $\log_{x-y}\left(9-x^2-y^2\right)\cdot\log_4\left(x^2-y^2\right)=1$. *Ответ*: $x=2$; $y=-1$.

10.13. Найти все рациональные числа x и целые числа y, удовлетворяющие уравнению $x^5+5xy-2=0$. *Ответ*: $x=2$; $y=-3$.

10.14. Найти все пары $(a;b)$ целых чисел таких, что уравнение $x^3-\frac{a}{4}x^2-|bx+1|=0$ имеет корень $\sqrt{3}+1$. *Ответ*: $(6;3)$, $(10;-1)$.

10.15. Сколько различных действительных решений имеет уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi x}{x^2-5x+7}\right)=0 \quad ?$$

Ответ: 7.

10.16. Сколько существует различных пар (x, y) целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$\left|x^2+y^2-10\right|+\left|x^2-9\right|+\left|y^2-4\right|=15.$$

Ответ: 2.

10.17. Сколько существует различных пар чисел (x,y), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2^{\sin(\pi x)}+2^{\sin(\pi y)}=1, \\ \left|x-2\right|+\left|y-3\right|\le 3\ ? \end{cases}$$

Ответ: 6.

10.18. Сколько существует различных наборов натуральных чисел x, y, z таких, что $y<10301$ и

$$\sin\left(\pi\frac{\left(x^3+2x\right)y}{x^4+3x^2+1}\right)=x^{z-1}-y^{z-1} \quad ?$$

Ответ: 2570.

Решить системы уравнений:

10.19. $\begin{cases} 5x^2+8xy+4y^2=4+4x, \\ \sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0. \end{cases}$

Ответ: $(4;-5)$, $(0;-1)$, $(4;-3)$, $(0;1)$.

10.20. $\begin{cases} 2x^4+2xy+\cos\left(\dfrac{2\pi}{z}\right)+1=0 \\ 2+\sin^2\left(\pi xz\right)=\cos^2\left(\pi y\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{z}\right). \end{cases}$

Ответ: $(-1;2;\pm 1)$, $(1;-2;\pm 1)$.

10.21. $\begin{cases} \cos\left(\pi x+\pi y\right)\cdot\cos\left(\pi x-\pi y\right)=1, \\ 3x^2-2x^5y^2+x^8y^4=10+\cos\left(2\pi x-6\pi y\right). \end{cases}$

Ответ: $(1;2)$, $(1;-2)$.

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В этой главе рассмотрены задачи, постановка которых включает понятие функциональной зависимости, а решение существенным образом опирается на свойства функций. В задачах §11 рассматриваются различные способы задания функций, их свойства и графики. В §12 изучаются приемы исследования функций, зависящих от параметра.

§11. СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Говорят, что на множестве $D \subset R$ ***определена*** (***числовая***) ***функция*** $f(x)$, если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие *одно и только одно* число $y = f(x)$. Множество D называется ***областью определения функции***. Переменную x называют ***аргументом функции*** или ***независимой переменной***, а y – ***зависимой*** (от x). ***Множество значений функции*** состоит из всех значений $f(x)$ при $x \in D$.

Способы задания функций

Числовые функции задаются разными способами. Наиболее распространенные: аналитический, при помощи графика, в виде сложной или неявной функции. Табличный способ и словесное описание функции (правило) в экзаменационных задачах практически не встречается.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ

Обычно функции задаются формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение с одной переменной x, содержащее известные обозначения. Если при этом область определения функции не указана, то считается, что функция определена на области допустимых значений x (ОДЗ) в выражении $f(x)$.

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

Если заданы две функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, причем область определения функции $g(y)$ содержит область значений функции $f(x)$, то каждому значению x из области определения функции $f(x)$ можно поставить в соответствие такое число z, что $z = g(y)$, где $y = f(x)$. Эта функция $z = g(f(x))$ называется ***сложной функцией*** (или ***композицией функций*** f и g).

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть задано уравнение вида $F(x,y)=0$, содержащее две неизвестных x и y. Пусть имеется такое множество D, что для каждого фиксированного числа $x\in D$ существует, по крайней мере, одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x,y)=0$. Тогда это число y можно поставить в соответствие числу x, т.е. определить функцию $y=f(x)$, для которой равенство $F(x,f(x))=0$ будет выполняться при всех $x\in D$. Эту функцию $y=f(x)$ называют ***неявной функцией***. Например, уравнение $x^2+y^2=1$ имеет решения при всех $x\in[-1;1]$. Причем для фиксированного $x\in(-1;1)$ имеем два решения $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$. Поэтому уравнение $x^2+y^2=1$ неявно задает, по крайней мере, две функции $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, так как для каждой из них равенство $x^2+\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)^2=1$ выполняется для всех $x\in[-1;1]$. Другие примеры неявных функций, задаваемых этим уравнением, приведите самостоятельно.

ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ

Для наглядного представления функциональной зависимости $y=f(x)$ строят график функции на координатной плоскости Oxy (в прямоугольной системе координат): ось абсцисс Ox обычно проводят горизонтально; ось ординат Oy – вертикально. ***Графиком функции*** $y=f(x)$ называется совокупность точек (координатной плоскости Oxy) с координатами $(x;f(x))$ при всех x из области определения функции $f(x)$.

Пример 11.1. Множество точек на координатной плоскости Oxy задано уравнением $2y^3+3ay^2+12ay=6x+18y$. При каких значениях параметра a это множество является графиком некоторой функции $y=f(x)$?

Решение. Множество точек на координатной плоскости Oxy является графиком функции $y=f(x)$, если всякая прямая, параллельная оси ординат, либо не пересекает данное множество точек, либо пересекает его ровно в одной точке. Этот вывод следует из определения числовой функции $y=f(x)$, которая каждому значению аргумента x (из области определения функции) ставит в соответствие единственное значение функции. Поэтому рассматриваемую задачу можно сформулировать так: найти все значения параметра a, при которых уравнение $2y^3+3ay^2+12ay-18y=6x$ (с неизвестной y) имеет единственное решение при каждом значении x. Обозначим левую часть этого уравнения через $g(y)=2y^2+3ay^2+12ay-18y$. Функция $g(y)$ является многочленом третьей степени. Для того чтобы каждое свое значение функция $g(y)$ принимала только в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы она была монотонной. Следовательно, задача сводится к нахождению таких значений параметра a, при которых производная $g'(y)=6y^2+6ay+12a-18$ не меняет знака. Заметим, что производная $g'(y)$ представляет собой квадратный трехчлен, а требование знакопостоянства квадратного трехчлена равносильно неположительности его дискриминанта $D=(6a)^2-4(12a-18)=36(a^2-8a+12)\le 0$. Таким образом, задача свелась к решению квадратного неравенства: $a^2-8a+12\le 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-6)\le 0$, т.е. $a\in[2;6]$ – искомые значения параметра. *Ответ*: $[2;6]$.

Далее в этом параграфе рассматриваются задачи, в которых функции задаются неявным способом или описанием ее свойств, что и вызывает определенные трудности при их решении. Но прежде напомним основные свойства функций.

Некоторые характеристики функций

Функция $y=f(x)$ называется ***четной*** (***нечетной***), если ее область определения D симметрична относительно нуля и для всех $x\in D$ выполняется равенство

$$f(x)=f(-x) \qquad (\text{соответственно } f(-x)=-f(x)\ ).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат (Oy), *график нечетной функции симметричен относительно начала координат* (точки O).

Функция $y=f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число T, что для всех x из области определения функции числа $x\pm T$ также принадлежат области определения и

$$f(x)=f(x+T).$$

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, то существует касательная к графику функции в точке $(x_0;f(x_0))$, уравнение которой имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Значение $f'(x_0)$ производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла α между касательной и осью абсцисс:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

угол α – острый при $f'(x_0)>0$ и тупой при $f'(x_0)<0$. Величина $f'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной.

Функция называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на промежутке, если она определена на нем и для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)>f(x_2)$). *Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке, если* $f'(x)>0$ (соответственно $f'(x)<0$) *для всех x из этого промежутка (за исключением, быть может, его концов).*

Критической точкой функции называется внутренняя точка области определения, в которой производная функции равна нулю или не существует. Точка x^* называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $f(x)$, если существует такая окрестность $O(x^*)$ этой точки, целиком лежащая в области определения функции, что для всех $x\in O(x^*)$ выполняется неравенство

$$f(x^*)\le f(x) \quad (\text{соответственно } f(x^*)\ge f(x)).$$

Точки минимума или максимума называются ***точками экстремума*** функции.

Если в критической точке x^* производная функции меняет знак с минуса на плюс (для всех $x\in O(x^*)$: $f'(x)<0$ при $x<x^*$ и $f'(x)>0$ при $x>x^*$), то x^* является точкой минимума. Если в критической точке x^* производная меняет знак с плюса на минус, то x^* является точкой максимума функции.

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на промежутке D, принимает в точке $x_0\in D$ ***наибольшее значение*** (***наименьшее значение***), если для всех $x\in D$

$$f(x)\le f(x_0) \quad (\text{соответственно } f(x)\ge f(x_0)).$$

ПРАВИЛО НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$ нужно:

1) найти все критические точки этой функции, принадлежащие интервалу $(a;b)$;

2) вычислить значения функции в точках a, b и в найденных критических точках;

3) выбрать среди вычисленных значений наибольшее и наименьшее.

Если в задаче не указывается промежуток $[a;b]$, то поиск следует проводить на всей области определения. Если речь идет о наибольшем и наименьшем значениях периодической функции (на неограниченном промежутке), то достаточно будет рассмотреть любой отрезок длиной в период.

Пример 11.2. Найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$, если для всех $x \in [0;\,1]$ имеет место равенство:

$$2f(x)+f\left(\sqrt{1-x^2}\right)=x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Решение. Функция $f(x)$ задана необычным способом. В первую очередь, необходимо получить явное выражение этой функции. Пусть $t=\sqrt{1-x^2}$, тогда $t \in [0;\,1]$ и $x=\sqrt{1-t^2}$. Подставив это выражение в исходное равенство, получим

$$2f\left(\sqrt{1-t^2}\right)+f(t)=t\sqrt{1-t^2}\,.$$

Это равенство выполняется для всех $t \in [0;\,1]$. Так как в тождестве переменная величина может быть обозначена любой буквой, то, заменив букву t на букву x, перепишем последнее равенство в виде

$$2f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+f(x)=x\sqrt{1-x^2}\,.$$

Рассматривая его совместно с исходным равенством, имеем систему

$$\begin{cases} 2f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+f(x)=x\sqrt{1-x^2}, \\ 2f(x)+f\left(\sqrt{1-x^2}\right)=x\sqrt{1-x^2}, \end{cases}$$

справедливую для всех $x \in [0;\,1]$. Относительно выражений $f(x)$ и $f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ система линейна и легко решается. Получим $f(x)=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{3}$. Итак, удалось выразить функцию явным образом. Далее просто. Для нахождения наибольшего значения можно применить стандартный план с использованием производной. Поступим, однако, иначе. Заметим, что для неотрицательной функции $f(x)$ ее наибольшее значение и наибольшее значение функции $(f(x))^2$ достигается в одной и той же точке. Поэтому будем искать наибольшее значение функции $(f(x))^2=\dfrac{1}{9}x^2\left(1-x^2\right)$. Сделав замену $x^2=u$,

$u \in [0;1]$, получим квадратичную функцию $g(u) = \frac{1}{9}\left(u - u^2\right)$, которая достигает наибольшего значения в точке $u = 0{,}5$ (абсцисса вершины параболы). Это значение равно $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{36}$. Следовательно, $f(x)$ достигает наибольшего значения в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и это значение равно $\frac{1}{6}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}$.

Пример 11.3. Составить уравнение касательной к графику четной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, если известно, что для всех действительных x справедливо равенство

$$f\left(2x^3 - x\right) - 4x^2 f\left(x^2 - x - 1\right) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2 \; .$$

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ имеет вид $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Поэтому задача сводится к нахождению двух величин $f(1)$ и $f'(1)$ – значений функции и ее производной при $x = 1$.

Найдем сначала значение $f(1)$. Для этого подставим $x = 1$ в заданное тождество и получим равенство $f(1) - 4f(-1) = -9$. Так как функция $f(x)$ – четная, то $f(-1) = f(1)$. Следовательно, $f(1) - 4f(1) = -9$, т.е. $f(1) = 3$.

Найдем теперь значение производной $f'(1)$. Для этого продифференцируем заданное тождество:

$$f'(2x^2 - x)\left(6x^2 - 1\right) - 8xf(x^2 - x - 1) - 4x^2 f'(x^2 - x - 1)\left(2x - 1\right) =$$

$$= 40x^4 - 24x^2 - 22x \, .$$

Подставим в полученное равенство $x = 1$: $5f'(1) - 8f(-1) - 4f'(-1) = -6$. Учитывая, что $f(-1) = f(1) = 3$, имеем равенство $5f'(1) - 4f'(-1) = 18$. Покажем, что производная четной функции является нечетной функцией. Действительно, дифференцируя тождество $f(x) = f(-x)$, получаем $f'(x) = -f'(-x)$. Следовательно, $f'(-1) = -f'(1)$. Тогда $9f'(1) = 18 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(1) = 2$. Запишем уравнение касательной: $y = 2x + 1$.

Осталось показать, что существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая условию задачи. Подберем подходящую функцию среди функций вида $f(x) = ax^2 + b$. Из условия $f'(1) = 2a = 2$ находим, что $a = 1$, а из условия $f(1) = 1 + b = 3$ находим, что $b = 2$. Проверкой убеждаемся, что вия $f(1)=1+b=3$ находим, что $b=2$. Проверкой убеждаемся, что функция $f(x)=x^2+2$ удовлетворяет условию задачи. *Ответ*: $y=2x+1$.

Пример 11.4. Построить график приведенного квадратного трехчлена $y=f(x)$, если известно, что прямая $y=-1$ касается графика функции $y=f(f(x))$ в точке, лежащей на оси ординат.

Решение. Пусть приведенный квадратный трехчлен имеет вид

$$f(x)=x^2+px+q.$$

Тогда $f(f(x))=(x^2+px+q)^2+p(x^2+px+q)+q$. По условию задачи график сложной функции $y=f(f(x))$ проходит через точку $(0;1)$ и касается в этой точке горизонтальной прямой $y=-1$. Следовательно, при $x=0$ функция равна (-1), а ее производная $y'=f'(f(x))\cdot f'(x)$ равна нулю:

$$\begin{cases} f(f(0))=-1, \\ f'(f(0))\cdot f'(0)=0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему выражение для функции, получаем

$$\begin{cases} q^2+pq+q=-1, \\ 2pq+p^2=0. \end{cases}$$

Второе уравнение равносильно совокупности $p=0$ (или) $p=-2q$. При $p=0$ первое уравнение не имеет решений. При $p=-2q$ имеем два решения $q_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Находим соответствующие значения p и строим две параболы. *Ответ:* две параболы $y=x^2-(1\pm\sqrt{5})x+0{,}5(1\mp\sqrt{5})$.

Пример 11.5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(1;3)$, если известно, что при каждом действительном значении параметра a уравнения $f(x+2a)=0$ и $f(x)=a^3+2a$ равносильны.

Решение. По условию задачи точка A лежит на графике функции, поэтому $f(1)=3$. Подберем теперь такое значение a, чтобы $a^3+2a=3$. Разложив последнее равенство на множители: $a^3-a+3a-3=0$ $\Leftrightarrow (a^2+a+3)(a-1)=0$, заключаем, что $a=1$, так как уравнение $a^2+a+3=0$ корней не имеет. Следовательно, при $a=1$ уравнение $f(x)=a^3+2a$ имеет корень $x=1$. Такой же корень имеет и уравнение

$f(x+2a)=0$, т.е. $f(1+2\cdot 1)=0$. Запишем теперь равенство $f(3)=0$ следующим образом: $0=f(3)=f((3-2a)+2a)$. Рассматривая последнее равенство, справедливое при всех действительных a как уравнение вида $f(x+2a)=0$, заключаем, что при всех a число $x=3-2a$ является его корнем. Из равносильности следует, что это же число служит корнем уравнения $f(x)=a^3+2a$. Поэтому при всех a справедливо равенство $f(3-2a)=a^3+2a$. Сделав линейную замену $a=\dfrac{3-x}{2}$, получаем выражение для искомой функции: $f(x)=\dfrac{(3-x)^3}{8}+2\cdot\dfrac{3-x}{2}$. Осталось записать уравнение касательной. Находим: производную $f'(x)=-\dfrac{1}{8}(3x^2-18x+35)$; ее значение при $x=1$: $f'(1)=-\dfrac{5}{2}$; составляем искомое уравнение: $y-3=\dfrac{-5}{2}(x-1)$. *Ответ*: $y=-2{,}5x+5{,}5$.

Пример 11.6. Найти критические точки функции $f(x)$, определенной для всех действительных значений x, причем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, если известно, что две функции $y=f(x)\cos(x+\pi)+\sin(2x+1)$ и

$$y=f(x)+\sin(2x+\pi)\cos x+2\cos(4x+3)$$

являются периодическими с периодом, равным π.

Решение. Запишем условия периодичности для двух указанных функций:

$$\begin{cases} f(x+\pi)\cos(x+2\pi)+\sin(2x+2\pi+1)=f(x)\cos(x+\pi)+\sin(2x+1), \\ f(x+\pi)+\sin(2x+3\pi)\cos(x+\pi)+2\cos(4x+4\pi+3)= \\ =f(x)+\sin(2x+\pi)\cos x+2\cos(4x+3). \end{cases}$$

Преобразуем эти равенства, учитывая периодичность тригонометрических функций:

$$\begin{cases} [f(x)+f(x+\pi)]\cos x=0, \\ f(x)-f(x+\pi)=2\sin 2x\cos x. \end{cases}$$

Если $\cos x\neq 0$, то, разделив первое уравнение системы на $\cos x$ и сложив со вторым уравнением, получим $f(x)=\sin 2x\cos x$. Для $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in Z$, первое равенство системы выполняется, а второе равенство принимает вид: $f(\frac{\pi}{2}+\pi k)=f(\frac{3\pi}{2}+\pi k)$. Учитывая, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, заключаем, что $f(x)=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in Z$. Заметим, что выражение $\sin 2x\cos x$ также обращается в нуль при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Таким образом, для всех действительных x

$$f(x)=\sin 2x\cos x.$$

Осталось найти критические точки этой функции, т.е. решить уравнение $f'(x)=0$. Найдем производную и приравняем ее нулю:

$$2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=0 \Rightarrow 2\cos 2x\cos x-2\cos x\sin^2 x=0 \Rightarrow$$

$$\cos x(3\cos 2x-1)=0 \Rightarrow \cos x=0 \text{ или } \cos 2x=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$, где $k\in Z$.

Пример 11.7. На координатной плоскости Oxy прямая a касается графика функции $y=f(x)$ в точке $A(2;-4)$, прямая b касается графика функции $y=g(x)$ в точке $B(2;0{,}5)$, прямая c касается графика функции $y=\frac{f(x)}{g(x)}-x^2$ в точке $C(2;-12)$. Найти координаты точки пересечения прямых b и c, если известно, что они взаимно перпендикулярны, а прямая a проходит через начало координат.

Решение. Для нахождения точки пересечения прямых b и c нужно составить уравнение каждой прямой, а затем совместно их решить. Пусть угловые коэффициенты прямых a ,b и c будут k_a, k_b и k_c соответственно. Тогда по условиям задачи уравнения этих прямых будут следующие:

прямая a: $y=-2x$, так как $k_a=-2$;

прямая b: $y=k_b(x-2)+0{,}5$;

прямая c: $y=k_c(x-2)-12$.

Нужно определить в этих уравнениях неизвестные коэффициенты k_b и k_c. Для этого воспользуемся тем, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной, вычисленной в точке касания. Так как график функции $y=f(x)$ проходит через точку $A(2;-4)$ и касается прямой a, то $f(2)=-4$ и $f'(2)=-2$. Для функции $y=g(x)$, график которой проходит через точку $B(2;0{,}5)$ и касается в этой точке прямой b, заключаем, что $g(2)=0{,}5$ и $g'(2)=k_b$. Аналогичный вывод можно сделать для функции $y=h(x)$, где $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}-x^2$. График этой функции проходит через точку $C(2;-12)$ и касается в этой точке прямой c. Следовательно, $h(2)=-12$ и $h'(2)=k_c$. Выразим производную функции $h(x)$ через функции $f(x)$, $g(x)$ и их производные:

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}-2x\ .$$

Найдем значение этой производной при $x=2$:

$$h'(2)=\frac{-2\cdot 0{,}5-(-4)k_b}{(0{,}5)^2}-2\cdot 2=16k_b-8\ ,$$

т.е. $k_c=16k_b-8$. Из условия перпендикулярности прямых b и c следует, что $k_b\cdot k_c=-1$. Объединяем полученные уравнения в систему и решаем ее:

$$\begin{cases} k_c=16k_b-8, \\ k_bk_c=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_c=16k_b-8, \\ 16k_b^2-8k_b+1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_c=-4, \\ k_b=0{,}25. \end{cases}$$

Получив угловые коэффициенты, записываем уравнения прямых:

прямая b: $y=0{,}25(x-2)+0{,}5 \ \Rightarrow\ y=0{,}25x$;

прямая c: $y=-4(x-2)-12 \ \Rightarrow\ y=-4x-4$.

Координаты точки пересечения этих прямых находим, решая систему:

$$\begin{cases} y=0{,}25x, \\ y=-4x-4, \end{cases} \Rightarrow\ x=-\frac{16}{17},\ y=-\frac{4}{17}\ .$$

Ответ: $\left(-\dfrac{16}{17};-\dfrac{4}{17}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. График функции $y=f(x)+2\cdot g(x)$ представляет собой прямую, проходящую через точки $A(-1;3)$ и $B(1;2)$, а график функции $y=3\cdot f(x)-g(x)$ является прямой, симметричной прямой AB относительно оси ординат. Найти функции $f(x)$, $g(x)$ и построить их графики.

Ответ: $f(x)=\dfrac{x+15}{14}$; $g(x)=\dfrac{-2x+5}{7}$.

11.2. На графике функции $y=2|x|-|x-1|-1$ выбираются 4 различные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4 составляют одну арифметическую прогрессию, а ординаты y_1, y_2, y_3, y_4 – другую. Найти все возможные значения отношения разностей этих арифметических прогрессий. *Ответ*: ± 1; $\frac{1}{3}$.

11.3. На графике функции $y=\frac{1}{x}$ взяты четыре точки так, что они являются вершинами некоторой трапеции. Произведение абсцисс этих четырех точек равно 4, а сумма их ординат равна 3. Составить уравнение прямой, содержащей среднюю линию этой трапеции.

Ответ: $y=\frac{x+3}{2}$; $y=\frac{3-x}{2}$.

11.4. Найти коэффициенты p и q квадратного трехчлена $f(x)=x^2+px+q$, если известно, что прямая $y=g(x)$, пересекающая ось абсцисс, касается графиков функций $y=f(g(x))$ и $y=g(2\cdot f(x))$.

Ответ: $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{64}$.

11.5. Старшие коэффициенты квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ касаются одной и той же прямой в точках $F(1;1)$ и $G(3;5)$ соответственно. Прямая $y=7-3x$ пересекает каждый график в двух точках. Найти сумму абсцисс и сумму ординат этих четырех точек пересечений. *Ответ*: сумма абсцисс 8; сумма ординат 4.

11.6. Найти все пары целых чисел (a,b), для каждой из которых прямая $y=bx+x-a+2$ является касательной к параболе $y=ax^2+2bx+2x-2a$. *Ответ*: $(-2;-1)$, $(-1;-3)$, $(-1;1)$, $(0;-1)$.

11.7. Касательная к графику квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ с рациональными коэффициентами p и q образует с осью Ox угол 60^o и пересекает эту ось в точке с целочисленной абсциссой. Какие значения может принимать $\sin(\pi q)$? *Ответ*: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.8. Найти функцию $f(x)$, если известно, что при всяком x, отличном от нуля, выполняется равенство

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}+2+\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ответ: $f(x)=x(x^2+3)+\cos x+2$.

11.9. Решить неравенство $\left|66f(x)-90\right|\le 24$, если известно, что уравнение $3\cdot f(x)+x=4$ имеет два корня, сумма которых равна $\frac{-2}{11}$, и функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\frac{1}{2^c}\left(|\,x\,|^a+|\,x\,|^b\right)^c$, где a, b, c – некоторые положительные числа. *Ответ*: $\left[-\frac{13}{11};-1\right]\cup\left[1;\frac{13}{11}\right]$.

11.10. Функция $f(x)$ принимает положительные значения при всех положительных значениях аргумента x. Известно также, что для любых острых углов α, β и $\alpha+\beta$ выполняется равенство

$$f(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta)=f(\operatorname{tg}\alpha)\cdot f(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)).$$

Найти численное значение $\log_{f(5)} f\left(\frac{4}{7}\right)$. *Ответ*: $\frac{4}{35}$.

11.11. Автолюбитель заметил, что задние колеса его автомобиля изнашиваются, пройдя 1200 км, а передние – 1300 км. Какое наибольшее расстояние может проехать автолюбитель на одном комплекте новых колес, если он имеет возможность один раз поменять местами передние и задние колеса автомобиля? *Ответ*: 1248 км.

11.12. Через точку $(3;0)$ координатной плоскости проведены четыре прямые. На этих прямых взято 8 различных точек, произведение абсцисс и ординат каждой из которых одинаково и отлично от нуля. Найти сумму абсцисс этих точек. *Ответ*: 12.

11.13. Нечетная функция $f(x)$ имеет обратную функцию $g(x)$. Неравенство $f(x)<2x+1$ выполняется при всех действительных x, а уравнение $|\,g(x)|=52-2x^2$ имеет два корня. Найти эти два корня, приближенно с абсолютной погрешностью $0{,}2$. *Ответ*: $x_1\approx x_2\approx 5$.

§12. ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В этом параграфе собраны задачи, связанные с исследованием функций, зависящих от параметров. Исследование проводится традиционными методами, основанными на определениях и признаках свойств функций. При этом нужно учитывать влияние параметра на свойства функции. Как правило, полное исследование функции проводить не нужно. Обычно в задачах требуется рассмотреть какое-либо одно свойство, например, четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность. При решении задач этого параграфа существенную помощь оказывает понимание свойств основных элементарных функций (линейной, обратно пропорциональной, квадратичной, тригонометрических, показательной и логарифмической), а также влияния на них параметров.

Пример 12.1. Найти наибольшее из всех возможных наименьших значений функции

$$y = x^2 + 2\left(a + \frac{2a+b}{a^2}\right)x + \frac{2a+b}{a},$$

если уравнение $x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b = 0$ имеет не более двух различных корней.

Решение. Решим уравнение $x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b = 0$, раскладывая левую часть на множители:

$$x^2(x-b) - a^2(x-b) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - a^2\right)\left(x-b\right) = 0.$$

Уравнение имеет три корня $x_1 = a$, $x_2 = -a$, $x_3 = b$, причем первые два корня не совпадают, так как $a \neq 0$. Следовательно, $b = a$ или $b = -a$.

Пусть $a > 0$. Если $b = a$, то функция имеет вид

$$f(x) = x^2 + 2\left(a + \frac{3}{a}\right)x + 3.$$

Наименьшее значение этого квадратного трехчлена достигается при $x_1^* = -a - \dfrac{3}{a}$ и равно $f(x_1^*) = 3 - \left(a + \dfrac{3}{a}\right)^2$. Наибольшее значение полученного выражения на промежутке $a > 0$ равно (-9), так как $a + \dfrac{3}{a} \geq 2\sqrt{3}$.

Если $b = -a$, то функция имеет вид $f(x) = x^2 + 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)x + 1$. Наименьшее значение этого квадратного трехчлена достигается при $x_2^* = -a - \dfrac{1}{a}$

и равно $f(x_2^*)=1-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$. Наибольшее значение полученного выражения на промежутке $a>0$ равно (-3), так как $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$.

Случай $a<0$ можно не рассматривать, так как, подставляя $b=\pm a$, приходим к тем же результатам. *Ответ*: -3.

Пример 12.2. Наименьшее значение функции $y=x^2-2ax+2a^2-4a$ на отрезке $[0;3-a]$ равно $m(a)$. При каком a функция $m(a)$ достигает своего наименьшего значения? Найти это наименьшее значение.

Решение. Наименьшее значение функция $y=x^2-2ax+2a^2-4a$ принимает при $x_0=a$, так как это абсцисса вершины параболы. Это значение: $y(a)=a^2-4a$.

Наименьшее значение функции на отрезке $[0;3-a]$ может достигаться либо на концах промежутка, либо в точке $x_0=a$. Вычислим значения функции на концах промежутка: $y(0)=2a^2-4a$; $y(3-a)=5a^2-16a+9$.

Рассмотрим три случая взаимного расположения абсциссы x_0 вершины параболы и заданного промежутка $[0;3-a]$.

Если $a<0$, то точка x_0 лежит на оси Ox левее промежутка $[0;3-a]$. Следовательно, при $a\leq 0$:

$m(a)=y(0)=2a^2-4a$.

Если $a\in[0;1{,}5]$, то точка x_0 лежит на оси Ox на промежутке $[0;3-a]$, поэтому

$m(a)=y(a)=a^2-4a$.

Если $a\in(1{,}5;3)$, то точка x_0 лежит на оси Ox правее промежутка $[0;3-a]$. Следовательно, $m(a)=y(3-a)=5a^2-16a+9$.

Значения $a\geq 3$ не допускаются по условию задачи.

Осталось найти наименьшее значение $m(a)$ при $a<3$. При $a\leq 0$ наименьшее значение функции $m(a)=2a^2-4a$, равное нулю, достигается при $a=0$. При $a\in[0;1{,}5]$ наименьшее значение функции $m(a)=a^2-4a$ равняется $(-3{,}75)$ и достигается при $a=1{,}5$. При $a\in(1{,}5;3)$ наименьшее значение функции $m(a)=y(3-a)=5a^2-16a+9$ равняется $(-3{,}8)$ и достигается при

$a = 1{,}6$. Эта величина ($-3{,}8$) является искомым наименьшим значением функции $m(a)$. *Ответ*: $a = 1{,}6$; наименьшее значение $m(a) = -3{,}8$.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Найти производную функции $y = f(x)$, если известно, что для любого значения параметра a график функции $y = f(x+a)+3a$ совпадает с графиком функции $y = f(x-2a)-a$. *Ответ*: $-\dfrac{4}{3}$.

12.2. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + \left|x^2 - 4x + 3\right|$ больше единицы.

Ответ: $\left(1;\, 4 + 2\sqrt{2}\right)$.

12.3. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - |x+a| + x - a$ больше a? *Ответ*: $(-\infty; -1)$.

12.4. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = 3(x-1)\left(1 - |x-1|\right) - (x-a)^3$$

убывает на всей числовой оси? *Ответ*: $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

12.5. При каких значениях a функция $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{a - 2 - 3x - x^2}$ не является убывающей ни на каком отрезке, принадлежащем ее области определения? *Ответ*: $[5 - 3\sqrt{3};\, 5 + 3\sqrt{3}]$.

12.6. При каких значениях параметра a функция $f(x) = ax^2\left(x - a^2 + 1\right)$ не является убывающей на промежутке $[0; 1]$? *Ответ*: $(-\infty; -1) \cup \left[0; \sqrt{2{,}5}\right)$.

12.7. При каждом действительном значении a вычисляется наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + \dfrac{a^2}{4\left(a^2+4\right)^2 x^2}$ на всей области определения. Найти такие a, при которых это наименьшее значение будет наибольшим возможным. *Ответ*: ± 2.

12.8. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x)=2^x+2^{b-x}+2^{-b-x}$. Найти все значения a, для которых найдется такое b, что функция $f(x+a)$ является четной. *Ответ*: $a\ge 0{,}5$.

12.9. Найти все значения c, при которых нет ни одного такого b, что функция $y(x)=g(x+c)$ будет нечетной, если функция $g(x)$ задана в виде

$$g(x)=\left(b^2+1\right)2^x-b\cdot 2^{-x}.$$

Ответ: $c>-0{,}5$.

12.10. Найти все значения параметра a, при которых функция

$$f(x)=\log_{a+4}\left(4^x-2^{x+2}a+3a^2\right)$$

определена при всех отрицательных значениях x.

Ответ: $(-4;-3)\cup(-3;0]\cup(1;+\infty)$.

12.11. При каких a при любом x по крайней мере одно из значений функций

$$f_1(x)=x^2+x-2\,,\;\; f_2(x)=a\left(3-x^2\right)^2+5a-4-x^2$$

положительно? *Ответ*: $\left(\dfrac{7+3\sqrt{6}}{10};+\infty\right)$.

12.12. При каких значениях a найдется такая функция $f(x)$, определенная на всей числовой оси, что для всех x выполняется равенство

$$f\left(x^3-x\cdot\sin^2 a\right)=x\cdot\cos a\ ?$$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}$, где $n\in Z$.

12.13. При каких значениях a существует единственная функция $f(x)$ такая, что для всех положительных x выполняется равенство

$$f\left(a^2x\right)=2\cdot f\left(\frac{2a^2}{x}\right)+1\ ?$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

12.14. При каких значениях a наибольшее значение функции $f(x)$ больше a, если при всех x выполняется равенство

$$x\cdot f(x)+a\cdot f(a-x)=1\ ?$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

12.15. Найти наименьшее значение параметра a, при котором область определения функции

$$y = \log_{a-2}\left(\frac{64}{(2a-3)^2} - (x-a)^2\right)$$

содержит не более одного целого числа. *Ответ*: $\dfrac{13+\sqrt{113}}{4}$.

12.16. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{7x^2 - 14ax + 14a^2 + 8a + 28}{8x^2 - 16ax + 16a^2 + 32}$$

является целым числом? *Ответ*: $4 \pm 2\sqrt{3}$.

12.17. При каких рациональных значениях a и b точка $A(1-\sqrt{3}; b+\sqrt{3})$ принадлежит графику функции $y = \left|x^2 - a\right| x$? *Ответ*: $a = 5$; $b = -5$.

12.18. При каких значениях параметра a график функции $y = x^2 + 2a \cdot \sin(\cos(x-a))$ имеет единственную общую точку с прямой $y = 2ax - 2a^2$? *Ответ*: 0; $-2\sin 1$.

12.19. Найти все значения a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 12$$

на отрезке $x \in [a; a+2]$ наименьшая. *Ответ*: $a = \dfrac{9 \pm \sqrt{69}}{6}$.

12.20. Найти все такие целые числа a, при которых область значений функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - (5a-6)x + 4a^2}$$

и область определения функции $z = \ln(ay^2 + ay - 2a)$ не пересекаются.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

12.21. При каких значениях параметра $a \neq 0$ все общие точки прямой $y = 2ax$ и параболы $y = (x-a)^2 + a^2$ лежат на параболе $y = (x+a^2)^2 + a^4$. *Ответ*: $a = -1$.

12.22. При каких значениях a и b для всякого значения x из области определения функции

$$f(x) = \frac{x^2 - ax - b}{x^2 - 3x - 4}$$

выполняется неравенство $|f(x) - 3| < |f(x) + 5|$?

Ответ: $a = 3$; $b = 4$.

12.23. При каких значениях b можно найти такие значения a, что функция $y = \dfrac{x^3 + ax + 1}{x - b}$ положительна при всех допустимых значениях аргумента x? *Ответ*: $\left[-\sqrt[3]{4}; 0\right)$.

12.24. Найти все рациональные значения параметра a, при которых функции

$$\sin\left(\frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}\right)$$

имеют одинаковые периоды. *Ответ*: 0; -1; $\dfrac{1}{3}$.

12.25. Найти все натуральные числа a, для каждого из которых найдется такое нецелое число b, что множества значений функций

$$f(x) = a\cos\left(\frac{\pi b \sin x}{4}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = b\sin\left(\frac{\pi a \cos x}{12}\right)$$

совпадают. *Ответ*: 3; 4; 5.

12.26. При каких значениях a и b для функции $f(x) = a|x-b| + 3a|x-b^2|$ выполнено условие: $f(x) = f(f(x))$ при всех действительных x.

Ответ: $a = 0$, $b \in R$; $a = \pm\dfrac{1}{4}$, $b = 0$; $a = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{3}$.

ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

В этой главе рассматриваются методы и приемы решения уравнений и неравенств с параметрами. Количество параметров (один или несколько), входящих в уравнения, обычно влияет на выбор методов решения. Уравнения и неравенства с одним параметром рассматриваются в §§13-14, а с двумя и более параметрами – в §16. Если в уравнение (неравенство) входит параметр, то в зависимости от его значений меняются свойства уравнения (неравенства) и множество его решений. При исследовании нужно учитывать все допустимые значения параметра, если в условии задачи нет соответствующих ограничений.

В §13 рассматриваются задачи, в которых нужно выяснить зависимость множества решений уравнения (неравенства) от параметра. Такой анализ выполняется прямыми методами. Решение уравнения (неравенства) проводится по стандартным правилам, но в зависимости от значений параметра процесс решения разветвляется, выделяются разные варианты, особые случаи и т.п.

В §14 рассматриваются задачи, в которых задается описание множества решений (или его свойств) и требуется найти такие значения параметра, при которых множество решений подходит под данное описание. Нужно понять, как выбор параметра влияет на множество решений уравнения (неравенства). Здесь, как правило, прямые методы не годятся, и на первый план выходят специальные приемы, учитывающие особенности данного уравнения, структуру его множества решений, например, симметрию или периодичность входящих в уравнение функций.

В §15 рассматриваются графические методы. Они хороши как для анализа влияния параметров на свойства или множества решений уравнений (неравенств), так и для синтеза (построения) заданных множеств решений. Обычно строятся графики, выражающие зависимости между неизвестными или параметром и неизвестным, или между одним из неизвестных и одним из нескольких параметров. К сожалению, построить графики (параметрические семейства кривых) для сложных уравнений не легко.

В §16 рассматриваются задачи с несколькими параметрами. Анализ и синтез множества решений в таких задачах делать сложнее, чем с одним параметром. Здесь, как правило, возникают логические трудности, если параметры не однотипные – по-разному входят в уравнение или в формулировке задачи имеют разные логические оттенки (разные кванторы). Методы преодоления этих трудностей изучаются на примерах.

При решении задач этой главы применяются, разумеется, также методы, рассмотренные в предыдущих главах.

§13. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ

Рассмотрим уравнения (неравенства, системы уравнений) с одним параметром. Задача формулируется так: требуется решить уравнение (неравенство, систему уравнений) при всех значениях параметра.

При решении нужно провести полный анализ, "перебирая" все допустимые значения параметра. Как правило, само уравнение (неравенство, система уравнений) при замене параметра фиксированным числом нетрудно решить, применяя стандартные методы и правила. Сложность заключается в том, что стандартные действия нужно проводить, считая параметр фиксированным, но неизвестным числом. Поэтому необходимо, учитывая область допустимых значений параметра, следить за равносильностью преобразований. Такие операции, как деление на параметр (или на выражение с параметром), извлечение корня четной степени, возведение четную степень, логарифмирование и т.п., могут не иметь смысла или оказаться не равносильными, при некоторых "плохих" значениях параметра. Разумеется, эти, условно говоря, "плохие" значения нельзя отбрасывать. Каждое преобразование, которое может оказаться не равносильным, приводит к разветвлению решения: для "хороших" и "плохих" значений параметра. Заметим еще, что в зависимости от значений параметра тип уравнения тоже может меняться, что также приводит к ветвлению решения. Например, решая уравнение $ax^2+bx+c=0$, нужно рассматривать два случая: когда это уравнение квадратное (при $a \neq 0$) и когда оно линейное ($a=0$).

Ответы к рассматриваемым задачам должны быть полными. Формулировка "решить уравнение" означает, что нужно найти все его корни или показать, что уравнение не имеет решений. Поэтому в ответе должны быть записаны все допустимые значения параметра и для каждого из них указаны все решения или их отсутствие.

Пример 13.1. При всех действительных значениях a решить:

а) уравнение $ax^2=a^2$; **б**) неравенство $\dfrac{\sqrt{x-a}}{a} \le \sqrt{x}$;

в) систему уравнений $\begin{cases} ax+y=a, \\ x+ay=a^3. \end{cases}$

Решение. **а**) Уравнение решается в два действия: нужно поделить обе части уравнения на a и извлечь квадратный корень. Однако делить на нуль нельзя. Поэтому рассмотрим два случая. Если $a=0$, то получим уравнение $0 \cdot x=0$, которому удовлетворяют все действительные числа, т.е. $x \in R$. Если $a \neq 0$, то, разделив обе части на a, получаем уравнение $x^2=a$. Левая часть неотрицательна. Поэтому, если $a<0$ – решений нет. При $a>0$ имеем два корня $x=\pm\sqrt{a}$. Записываем *ответ*: при $a<0$ уравнение не имеет решений; при $a=0$ любое число $x\in R$ является решением; при $a>0$ уравнение имеет два корня $x=\pm\sqrt{a}$.

б) Стандартный план – умножить обе части неравенства на a, затем возвести в квадрат. Заметим, что по условию задачи $a\neq 0$. Умножение неравенства на неизвестную величину может изменить его знак. Поэтому рассмотрим сначала случай, когда $a<0$. В этом случае левая часть исходного неравенства меньше или равна нулю, а правая – неотрицательна. Следовательно, неравенство выполняется для всех допустимых x. Из двух условий на ОДЗ $x\geq a$ и $x\geq 0$ получаем $x\geq 0$, так как $a<0$. Теперь рассмотрим случай $a>0$. Упростим неравенство, сделав равносильные на ОДЗ преобразования:

$$\frac{\sqrt{x-a}}{a}\leq\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x-a}\leq a\sqrt{x} \Leftrightarrow x-a\leq a^2x \Leftrightarrow x\left(1-a^2\right)\leq a.$$

Нужно разделить обе части неравенства на $\left(1-a^2\right)$. Это действие требует некоторой осторожности. Если $a=1$, то имеем неравенство $0\cdot x\leq 1$, которое верно при всех $x\in R$. Учитывая ОДЗ исходного неравенства, получаем ответ $x\geq 1$. Если $0<a<1$, то, разделив на $\left(1-a^2\right)$, приходим к неравенству $x\leq\frac{a}{1-a^2}$. С учетом ОДЗ имеем $a\leq x\leq\frac{a}{1-a^2}$. Если $a>1$, то, разделив на $\left(1-a^2\right)$, меняем знак неравенства: $x\geq\frac{a}{1-a^2}$. Так как $a\geq\frac{a}{1-a^2}$ (при $a>1$), то условие $x\geq a$ (ОДЗ) сильнее полученного неравенства. Следовательно, при $a>1$ в ответ надо записать промежуток $x\geq a$.

Итак, формулируем *ответ*: $x\geq 0$ при $a<0$; $a\leq x\leq\frac{a}{1-a^2}$ при $0<a<1$; $x\geq a$ при $a\geq 1$. Заметим, что все допустимые значения a в ответе указаны.

в) Применяем метод исключения неизвестных. Выразим из первого уравнения $y=a-ax$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получим

$$x+a(a-ax)=a^3 \Leftrightarrow \left(1-a^2\right)x=a^3-a^2 \Leftrightarrow (1-a)(1+a)x=a^2(1-a).$$

Надо разделить обе части на $(1-a)(1+a)$. Как обычно, разбираем возможные случаи. Если $a=1$, то имеем тождество $0\cdot x=0$, т.е. x – любое. В этом случае система имеет бесконечное множество решений вида $(x,1-x)$, где $x\in R$. Если $a=-1$, то имеем равенство $0\cdot x=2$, которому не удовлетворяет ни одно число x. Следовательно, при $a=-1$ система не имеет решений. При $a \neq \pm 1$ выражаем сначала $x=\dfrac{a^2}{1+a}$, а затем $y=a-\dfrac{a^3}{1+a}$.

Итак, записываем *ответ*: при $a=-1$ нет решений; при $a=1$ система имеет бесконечное множество решений $(x, 1-x)$, где $x \in R$; при каждом $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение $\left(\dfrac{a^2}{1+a}, a-\dfrac{a^3}{1+a}\right)$.

Пример 13.2. При всех a решить неравенство:

$$\frac{(a^2+1)(2ax+1)x-(a+1)^2}{(a^2+1)x-1} \geq 2a \ .$$

Решение. Неравенство рациональное, в числителе стоит квадратный трехчлен (относительно неизвестной x), в знаменателе – линейный двучлен. Стандартный метод решения таких неравенств – метод интервалов.

Упростим неравенство, перенося все в левую часть и приводя к общему знаменателю:

$$\frac{(a^2+1)(2ax+1)x-(a+1)^2-2a(a^2+1)x+2a}{(a^2+1)x-1} \geq 0 \ .$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на $a^2+1 \neq 0$ и разложив числитель на множители, получаем

$$\frac{(2ax+1)(x-1)}{x-\dfrac{1}{a^2+1}} \geq 0 \, .$$

Обозначим нули числителя $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2a}$ (при $a \neq 0$) и знаменателя $x_3=\dfrac{1}{a^2+1}$. Сразу же рассмотрим случай $a=0$, чтобы в дальнейшем не задумываться над существованием $x_2=-\dfrac{1}{2a}$. При $a=0$ имеем неравенство $\dfrac{x-1}{x-1} \geq 0$, которое верно для всех $x \neq 1$.

Тогда, используя обозначения (x_2 и x_3), исходное неравенство приведем к виду

$$\frac{a(x-x_2)(x-1)}{x-x_3} \geq 0 \, .$$

Рассмотрим все случаи взаимного расположения трех величин 1, x_2, x_3 в зависимости от a. Для этого определяем характерные значения параметра:

$$x_2 = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2};$$

$$x_3 = x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} = -\frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

$$x_3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0;$$

Равенства $x_3 = 1$ не может быть, так как $x_3 = \frac{1}{a^2+1} < 1$ при $a \neq 0$.

Таким образом, все не нулевые значения параметра разбиваются характерными точками $a = -1$ и $a = -\frac{1}{2}$ на 4 промежутка. Рассматриваем последовательно эти промежутки, не отбрасывая, разумеется, и характерные точки.

1) Если $a < -1$, то $x_3 < x_2 < 1$ и

$$\frac{a(x-x_2)(x-1)}{x-x_3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-x_2)(x-1)}{x-x_3} \leq 0.$$

Следовательно, $x \in (-\infty; x_3) \cup [x_2; 1]$, т.е. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a^2+1}\right) \cup \left[-\frac{1}{2a}; 1\right]$.

2) Если $a = -1$, то $x_3 = x_2 < 1$ и неравенство $\frac{(-1)(x-0{,}5)(x-1)}{x-0{,}5} \geq 0$ имеет решение $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 1]$.

3) Если $-1 < a < -\frac{1}{2}$, то $x_3 < x_2 < 1$, поэтому решение будет как в случае 1.

4) Если $a = -\frac{1}{2}$, то $x_3 < x_2 = 1$ и неравенство $\frac{-0{,}5 \cdot (x-1)^2}{x-0{,}8} \geq 0$ имеет решения $x \in (-\infty; 0{,}8) \cup \{1\}$.

5) Если $-\frac{1}{2} < a < 0$, то $x_3 < 1 < x_2$ и неравенство $\frac{a(x-1)(x-x_2)}{x-x_3} \geq 0$ равносильно неравенству $\frac{(x-1)(x-x_2)}{x-x_3} \leq 0$. Отсюда

$$x \in (-\infty; x_3) \cup [1; x_2], \text{ т.е. } x \in \left(-\infty; \frac{1}{a^2+1}\right) \cup \left[1; -\frac{1}{2a}\right].$$

6) Если $a>0$, то $x_2<x_3<1$ и неравенство $\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x-x_3}\ge 0$ равносильно неравенству $\frac{(x-1)(x-x_2)}{x-x_3}\ge 0$. Отсюда $x\in[x_2;x_3]\cup[1;+\infty)$, т.е. $x\in\left[-\frac{1}{2a};\frac{1}{a^2+1}\right]\cup[1;+\infty)$.

Все случаи разобраны, теперь можно записать ответ, который не намного короче решения.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;-0{,}5)$: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a^2+1}\right)\cup\left[-\frac{1}{2a};1\right]$;

при $a=-1$: $x\in(-\infty;0{,}5)\cup(0{,}5;1]$;

при $a=-0{,}5$: $x\in(-\infty;0{,}8)\cup\{1\}$;

при $a\in(-0{,}5;0)$: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a^2+1}\right)\cup\left[1;-\frac{1}{2a}\right]$;

при $a=0$: $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$;

при $a\in(0;\infty)$: $x\in\left[-\frac{1}{2a};\frac{1}{a^2+1}\right)\cup[1;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти все действительные значения a, при которых имеют решения уравнения.

13.1. $\frac{x(x-1)}{x-2}+\frac{a(x-2)}{x^2-x}=1$. *Ответ*: $(-\infty;0)\cup(0;10\sqrt{2}-14]$.

13.2. $1-2\cdot\operatorname{tg}ax\cdot\operatorname{ctg}2ax-3a\cdot\operatorname{tg}ax=a^2(6-a^2)$. *Ответ:* $\left[-\frac{\sqrt{33}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\sqrt{33}}{2}\right]$.

13.3. $\cos x+\sqrt{1+a}\sin x=1+\sqrt{1-a}$. *Ответ*: $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$.

При всех допустимых значениях a решить уравнения.

13.4. $9x^2-42x\sin(ax)+49=0$.

Ответ: $x=\pm\frac{7}{3}$ при $a=\frac{3\pi\pm12\pi n}{14}$, где $n\in Z$;

при других значениях a уравнение не имеет решений.

13.5. $\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^{\sqrt[4]{a-|x-a|}}=\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)^{\sqrt{a-\sqrt{x+1}}}$.

Ответ: $x=0$ при $a=1$; $x=2+2\sqrt{2}$ при $a=1+\sqrt{2}$;

при других a нет решений.

Для каждого положительного значения параметра a решить неравенства.

13.6. $x^4+2ax^2-8x+a^2+4a\geq0$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{1-a}\right]\cup\left[1+\sqrt{1-a};+\infty\right)$ при $a\in(0;1]$;

$x\in R$ при $a\in(1;+\infty)$.

13.7. $\log_{x^2}\sqrt{a+x}\leq\frac{1}{2}$.

Ответ: $[x_1;0)\cup(0;1)\cup[x_2;+\infty)$ при $a\in(0;1]$;

$(-a;-1)\cup[x_1;0)\cup(0;1)\cup[x_2;+\infty)$ при $a\in(1;2]$;

$(-a;x_1]\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup[x_2;+\infty)$ при $a\in(2;+\infty)$,

где $x_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

При всех допустимых значениях a решить неравенства.

13.8. $\frac{x-1}{a-1}+x<\frac{1}{1-a}$.

Ответ: $(0;+\infty)$ при $a\in(0;1)$; $(-\infty;0)$ при $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$;

нет решений при $a=0$.

13.9. $\left|x^2-1\right| \le ax$.

Ответ: $\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}; \dfrac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$ при $a<0$;

$\{-1;1\}$ при $a=0$;

$\left[\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}; \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$ при $a>0$.

13.10. $\dfrac{x-a}{x+a}+a^3 \le x\left(x^2-a^2+ax\right)$.

Ответ: если $a\in(-\infty;0)$, то $x\in[a;-a)\cup[-a+1;+\infty)$;

если $a=0$, то $x\in[1;+\infty)$;

если $a\in(0;0{,}5]$, то $x\in(-a;a]\cup[-a+1;+\infty)$;

если $a\in(0{,}5;+\infty)$, то $x\in(-a;-a+1]\cup[a;+\infty)$.

13.11. При каких значениях параметра a существует тройка чисел x, y, z, удовлетворяющая уравнению

$$\left|x^2-ax+a^3\right|+\left|a^3-x^2\right|+\left|ay-y^2-a^3\right|+\left|y^2-a^3\right|+$$
$$+\left|a^3-z^2\right|+\left|az-z^2-a^3\right|=-ax+ay+az-2z^2 \quad ?$$

Ответ: $a=0$; $a=0{,}25$.

§14. ОБРАТНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим уравнения (неравенства, системы уравнений) с одним параметром. Требуется найти значения параметра, при которых множество решений соответствует заданному описанию. Другими словами, нужно при помощи выбора значений параметра построить (***синтезировать***) указанное в задаче множество решений с нужными свойствами. При описании множества решений используются разные формулировки, отражающие его количественные или качественные характеристики. Самый простой случай, когда множество решений задано. Например, требуется найти значения параметра, при которых неравенство выполняется при всех значениях неизвестной, либо выполняется на заданном промежутке. Встречаются "***количественные***" формулировки: "при каких значениях параметра уравнение (система уравнений) имеет единственное решение, два, три, бесконечно много решений и т.п.". Примерами "***качественных***" характеристик множеств решений могут служить следующие: корни уравнения образуют прогрессию, множество решений неравенства является промежутком, объединением двух непересекающихся интервалов, содержит два целых числа и т.п. Часто "качественное" описание формулируется в терминах равносильности или следствий уравнений (неравенств). Таким образом, формулировки таких задач весьма разнообразны.

Общих методов решения таких задач, разумеется, не существует. И все же исследование нужно начинать с вопроса о применимости прямых методов. Можно ли решить уравнение (неравенство, систему уравнений) при всех значениях параметра? Если это возможно, то, применяя стандартные правила и технические приемы §13, проводим полный анализ зависимости множества решений от параметра, а затем выбираем подходящие значения параметра. К сожалению, этот путь редко ведет к цели. Попадаются сложные уравнения (неравенства, системы неравенств), которые нельзя решить при любых значениях параметра. Например, алгебраическое уравнение высокой степени. Но выяснить, при каких значениях параметра уравнение имеет единственное решение – можно. Получается, что вместо прямого пути (от записи уравнения к нахождению его корней) надо использовать обратный ход (от заданного множества корней уравнения к нахождению значений параметра). В этом и состоит особенность рассматриваемых в этом параграфе задач. Если прямые методы не годятся, то нужно использовать обратные. Ключ к решению задачи надо искать в особенностях данного уравнения и в описании множества решений. Здесь на первый план выходят общие соображения – понимание структуры решения (каким может быть множество корней данного уравнения), знание частных случаев, а также умение находить и использовать особые свойства: симметричность алгебраических выражений, четность, нечетность, периодичность, ограниченность входящих в уравнение функций и т.п.

Разберем примеры применения обратных методов. Сначала рассмотрим задачи, для решения которых используются соображения симметрии (п.14.1). Затем решим задачи, в которых множество решений задается либо количественными (п.14.2), либо качественными (п.14.3) характеристиками.

14.1. Использование симметричности выражений

Понятия четности или нечетности функции $f(x)$ формулируются при помощи замены переменной x на $(-x)$ (см. §11). Например, четная функция не меняется при замене $x \leftrightarrow (-x)$, т.е. $f(-x) \equiv f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат. Эти понятия можно обобщить. Если выражение $f(x, y)$ не меняется при замене x на y и y на x ($x \leftrightarrow y$): $f(y, x) \equiv f(x, y)$, то оно называется *симметрическим*. Например, симметрические системы с двумя неизвестными составлены из симметрических выражений. Простейший пример – система с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q, \end{cases}$$

где p, q – заданные числа.

Заметим, что если уравнение $f(x, y) = 0$ симметрическое, то множество его решений на координатной плоскости Oxy симметрично относительно прямой $y = x$. Может оказаться, что выражение $f(x)$ выдерживает более сложную замену, например, $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$, т.е. $f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv f(x)$. В этом случае тоже можно говорить о некоторой симметричности выражения, не имея в виду геометрического смысла симметрии.

Рассмотрим типичные приемы использования симметричности выражений. Пусть дано уравнение $f(x, a) = 0$ с параметром a, в котором функция $f(x, a)$ аргумента x является четной: $f(-x, a) \equiv f(x, a)$ при всех x и a (условие симметричности области значений аргумента x при всех a подразумевается). Требуется найти все значения a, при которых это уравнение имеет единственное решение. Идея решения заключается в следующем. Если x_1 корень уравнения при некотором значении a, то число $(-x_1)$ также будет корнем уравнения при том же значении параметра a, поскольку уравнение не изменяется при замене $x \leftrightarrow (-x)$. Поэтому всегда имеем пары корней, за исключением случая $x_1 = 0$. Таким образом, если данное уравнение имеет единственное решение, то это решение $x = 0$. Поэтому параметр a удовлетворяет уравнению $f(0, a) = 0$. Это необходимое условие позволяет найти подозрительные значения a, которые затем надо проверять, подставляя в исходное уравнение.

Пример 14.1. При каких значениях a уравнение $ax^2+\cos\left(\frac{a\pi x}{2}\right)=a^2$ имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что уравнение не меняется при замене $x \leftrightarrow (-x)$. Поэтому необходимым условием единственности решения является требование, чтобы это решение было нулевым. Подставляя $x=0$ в уравнение, получаем $1=a^2$. Следовательно, $a=\pm 1$. Осталось сделать проверку. При $a=1$ получаем уравнение $x^2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1-x^2$. Решение $x=0$ не является единственным, очевидно, подходят, например, $x=\pm 1$. Поэтому значение $a=1$ не годится. При $a=-1$ получаем уравнение $-x^2+\cos\left(-\frac{\pi x}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1+x^2$, которое имеет только один корень $x=0$. При $x \neq 0$ левая часть меньше или равна 1, а правая часть больше 1.

Ответ: $a=-1$.

Аналогичные соображения используются в задачах с **симметрическими системами**. Пусть требуется найти значения a, при которых система

$$\begin{cases} f(x,y,a)=0, \\ g(x,y,a)=0, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Причем система – ***симметрическая***, ее уравнения не изменяются при замене $x \leftrightarrow y$. Тогда каждому решению $(x;\, y)$ системы соответствует еще одно ее решение $(y,\, x)$. Поэтому, если система имеет единственное решение, то это решение, в котором $x=y$. Полагая $x=y$ в уравнениях исходной системы, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решая ее, находим подозрительные значения параметра, которые затем проверяем.

Пример 14.2. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x+y=2a, \\ x^2y^2=a^3, \end{cases}$ имеет три различных решения?

Решение. Система, очевидно, симметрическая, так как ее уравнения не меняются при замене $x \leftrightarrow y$ (буква x заменяется на y, а буква y – на x одновременно). Каждому решению (x,y) системы можно приписать еще одно решение (y, x). Вообще говоря, система имеет четное число решений, за исключением случая, когда $x = y$. Поэтому для существования нечетного числа решений необходимо условие $x = y$. Подставив $y = x$ в систему, получаем

$$\begin{cases} 2x = 2a\,, \\ x^4 = a^3\,. \end{cases}$$

Следовательно, $x = a$ и $a^4 = a^3$. Решая последнее уравнение, находим подозрительные значения параметра $a = 0$, $a = 1$.

Делаем проверку. При $a = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 0\,, \\ xy = 0\,, \end{cases}$$

которая имеет только одно решение $(0, 0)$. При $a = 1$ получаем

$$\begin{cases} x + y = 2\,, \\ x^2 y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Эта система имеет три решения $(1; 1)$, $(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Ответ: $a = 1$.

Пример 14.3. Найти все действительные значения a, при которых уравнение

$$(x - \sin \pi a x)(\cos \pi x - \sin \pi x - 2\cos a + 16x^2 + 72x + 81) = 0$$

имеет четное количество различных действительных корней.

Решение. Рассмотрим сомножители, входящие в левую часть уравнения. Первый сомножитель является нечетной функцией аргумента x. Поэтому уравнение $x - \sin \pi a x = 0$ имеет нечетное число корней, причем $|x| \le 1$. Преобразуем второй сомножитель:

$$\cos \pi x - \sin \pi x + 16x^2 + 72x + 81 - 2\cos a =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + 16\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - 2\cos a =$$

$$= \sqrt{2}\cos \pi\left(x + \frac{9}{4}\right) + 16\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - 2\cos a\,.$$

Следовательно, он является четной функцией

$$f(t) = \sqrt{2}\cos \pi t + 16t^2 - 2\cos a$$

аргумента $t = x + \frac{9}{4}$. Уравнение $f(t) = 0$ всегда имеет четное число корней, за исключением случая $t = 0$, когда $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Осталось доказать, что нули обоих сомножителей исходного уравнения не совпадают. В самом деле, если второй сомножитель равен нулю, то $16t^2 \le \sqrt{2} + 2 < 4 \Rightarrow |t| < \frac{1}{2}$. Значит, $x \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$, а нули первого сомножителя удовлетворяют условию $|x| \le 1$. *Ответ*: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

14.2. Число корней уравнения

Рассмотрим задачи, в которых указывается количество решений уравнений (систем уравнений) и требуется найти соответствующие значения параметра. В первую очередь нужно определить тип данного уравнения, чтобы понять, сколько корней оно может иметь. Напомним количество действительных корней уравнений некоторых типов.

Линейное уравнение $ax + b = 0$ (при $a \ne 0$) имеет одно решение. Если $a = 0$ (в этом случае уравнение не называется линейным), то уравнение $0 \cdot x + b = 0$ либо не имеет решений (при $b \ne 0$), либо имеет бесконечно много решений $x \in R$ (при $b = 0$).

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \ne 0$) может иметь два корня, один корень или не иметь корней в зависимости дискриминанта. Если $a = 0$ (в этом случае уравнение не является квадратным), то либо уравнение имеет один корень, либо бесконечно много, либо не имеет решений.

Алгебраическое уравнение n-й степени

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \ne 0)$$

имеет не более чем n корней.

Рациональное уравнение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены степени n и m соответственно, имеет не более чем n корней.

Уравнение с модулем вида $|x - a| = b$ имеет два корня (при $b > 0$), один корень (при $b = 0$), либо не имеет корней (при $b < 0$).

Уравнение с модулями вида $|x-a|+|x-b|=c$ имеет либо два корня (при $|a-b|<c$), либо один корень (при $|a-b|=c=0$), либо ни одного корня (при $|a-b|>c$), либо бесконечно много корней (при $|a-b|=c$).

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{x+a}=b$ имеет не более одного корня.

Тригонометрическое уравнение вида $a\sin x+b\cos x=c$ при $|c|\le\sqrt{a^2+b^2}$ имеет бесконечно много корней, в противном случае не имеет корней.

Простейшее показательное $a^x=b$ (***логарифмическое*** $\log_a x=b$) ***уравнение*** при $a>0$ и $a\neq 1$ имеет не более одного корня.

Определить возможное количество решений системы уравнений сложнее. Рассмотрим системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Система линейных уравнений $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет либо одно решение при $a_1b_2\neq a_2b_1$, либо бесконечно много (если коэффициенты уравнений пропорциональны: $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$), либо не имеет решений (если $a_1:a_2=b_1:b_2\neq c_1:c_2$).

Система с линейным уравнением $\begin{cases} ax+by=c, \\ f(x,y)=0 \end{cases}$ решается методом исключения неизвестных. Поэтому количество ее решений, например, при $b\neq 0$ совпадает с количеством решений уравнения $f\left(x,\dfrac{c-ax}{b}\right)=0$. Например, система с линейным и квадратным уравнением

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y=f_1 \end{cases}$$

имеет не более двух решений (в невырожденном случае). Здесь не рассматриваются вырожденные случаи, когда, например, второе уравнение тоже линейное ($a_1=b_1=c_1=0$), или когда вообще все коэффициенты равны нулю. В этих случаях система может иметь и бесконечное количество решений.

Система двух квадратных уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y=f_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y=f_2 \end{cases}$$

имеет не более четырех решений (в невырожденном случае, когда в процессе решения все уравнения остаются квадратными).

План решения задачи обычно следующий. Опираясь на приведенную выше классификацию, надо проанализировать данные уравнения и установить возможное количество решений. Выяснить, какому случаю (вырожденному или нет) отвечает указанное в задаче количество решений уравнения (системы уравнений). Затем искать соответствующие значения параметра.

Пример 14.4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3x = a \\ a^2 y^3 - 3y = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Система состоит из двух не связанных между собой уравнений. В первое уравнение входит только неизвестное x, а во второе – только y. Поэтому для единственности решения системы необходимо и достаточно, чтобы каждое из уравнений системы имело единственное решение.

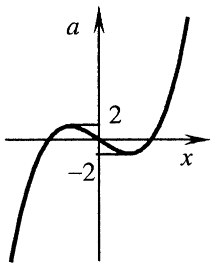


Рис.14.1

Рассмотрим первое уравнение системы $x^3 - 3x = a$. Левая часть уравнения представляет собой многочлен $f(x) = x^3 - 3x$ третьей степени, эскиз графика которого изображен на рис. 14.1. Найдем точки экстремумов этого многочлена. Критические точки получаем, решая уравнение $f'(x) = 0$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ – точка максимума; $x = 1$ – точка минимума.

Вычисляем значения функции в этих точках: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$. Следовательно,

– при $a < -2$ (или) $a > 2$ уравнение имеет одно решение;

– при $a = \pm 2$ уравнение имеет два решения;

– при $-2 < a < 2$ уравнение имеет три решения.

Итак, первое уравнение системы имеет одно решение при $|a| > 2$.

Рассмотрим теперь второе уравнение системы: $a^2 y^3 - 3y = 1$. Считая, что $|a| > 2$, запишем равносильное уравнение $a^3 y^3 - 3ay = a$. Обозначив $t = ay$, получаем уравнение $t^3 - 3t = a$, аналогичное первому уравнению системы, которое, как показано выше, имеет единственное решение при $|a| > 2$.

Таким образом, для единственности решения второго уравнения достаточно выполнения того же условия $|a| > 2$, что и для единственности решения первого уравнения. Следовательно, при $|a| > 2$ система имеет единственное решения. *Ответ*: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Пример 14.5. Найти значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(x - a\sqrt{3}\right)^2 + y^2 = 2y \\ \sqrt{3}|x| = y + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Выразим из второго уравнения y через x: $y = \sqrt{3}|x| - 4$, и подставим в первое уравнение. Получим

$$\left(x - a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}|x| - 4\right)^2 = 2\left(\sqrt{3}|x| - 4\right).$$

Рассмотрим два случая раскрытия модуля $|x|$. В обоих случаях мы придем к квадратному уравнению, для единственности решения которого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был равен нулю.

1) Пусть $x \geq 0$. Тогда уравнение приводится к виду

$$4x^2 + 2x\sqrt{3}(-a - 5) + 3a^2 + 24 = 0.$$

Записываем условие равенства нулю его дискриминанта: $3a^2 - 10a + 7 = 0$. Отсюда находим первые два значения параметра: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{7}{3}$.

2) Пусть $x < 0$. Тогда уравнение приводится к виду

$$4x^2 + 2x\sqrt{3}(-a + 5) + 3a^2 + 24 = 0.$$

Так же, как в первом случае, приравниваем дискриминант нулю: $3a^2 + 10a + 7 = 0$. Отсюда находим еще два значения параметра: $a_3 = -1$, $a_4 = -\frac{7}{3}$. *Ответ*: ± 1, $\pm\frac{7}{3}$.

14.3. Качественные признаки

Для решения каждой конкретной задачи нужно понять, каким может быть множество решений данного уравнения (неравенства, системы уравнений), и в каких случаях это множество отвечает указанным в задаче признакам. После этого анализа нужно приступать к поиску соответствующих значений параметра.

Пример 14.6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left|a^2x-1\right|+\left|xa^2-a^3\right|=a^3-1$$

имеет более трех различных целочисленных решений.

Решение. Хотя в задаче указано число решений, нельзя сказать, что это только количественная характеристика, поскольку имеется качественный признак – целочисленность. Множество решений уравнения должно содержать, по крайней мере, 4 целых числа. Постараемся выяснить, сколько действительных (не обязательно целых) корней может иметь данное уравнение. В первую очередь заметим, что левая часть уравнения неотрицательна, следовательно, $a^3-1\geq 0 \iff a\geq 1$. Тогда можно разделить обе части уравнения на a^2:

$$\left|x-\frac{1}{a^2}\right|+\left|x-a\right|=a-\frac{1}{a^2}.$$

Получили типовое уравнение с модулями вида $\left|x-A\right|+\left|x-B\right|=C$. Как отмечалось в п.14.2, это уравнение может иметь два корня, один корень, бесконечно много корней или не иметь ни одного корня. Для рассматриваемого уравнения выполняется условие $\left|A-B\right|=C$, так как $\left|a-\frac{1}{a^2}\right|=a-\frac{1}{a^2}$ при $a\geq 1$. Следовательно, все $x\in\left[\frac{1}{a^2};a\right]$ являются действительными корнями. Осталось выбрать те значения параметра, при которых промежуток $\left[\frac{1}{a^2};a\right]$ содержит 4 или более целых чисел. Так как $\frac{1}{a^2}\leq 1$ при $a\geq 1$, то достаточно потребовать $a\geq 4$. *Ответ*: $a\in[4;+\infty)$.

Пример 14.7. При каких действительных значениях параметра a все положительные решения уравнения

$$\sin^2(ax)-3a\cdot\left|\sin(ax)\right|+2a^2=0$$

образуют арифметическую прогрессию?

Решение. Пусть $a\neq 0$. Обозначим $ax=y$. Если решения уравнения, т.е. найденные значения неизвестного x, образуют арифметическую прогрессию, то значения y также образуют арифметическую прогрессию и наоборот. Левую часть исходного уравнения можно разложить на множители:

$$\left(\left|\sin y\right|-a\right)\left(\left|\sin y\right|-2a\right)=0.$$

Следовательно, оно равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}|\sin y| = a,\\ |\sin y| = 2a.\end{array}\right.$$

Если $a > 1$ или $a < 0$, то уравнения совокупности решений не имеют.

Если $a \in \left(\dfrac{1}{2};1\right]$, решения имеет только первое уравнение совокупности:

$$\sin y = \pm a.$$

Изобразим единичную окружность (рис.14.2,*а,б*). Точки на окружности, соответствующие решениям, разбивают окружность на две или четыре дуги. Так как решения должны образовывать арифметическую прогрессию, то дуги должны быть равными. Это возможно только в том случае, когда $\sin y = \pm 1$ (для двух дуг) или $\sin y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (для четырех дуг).

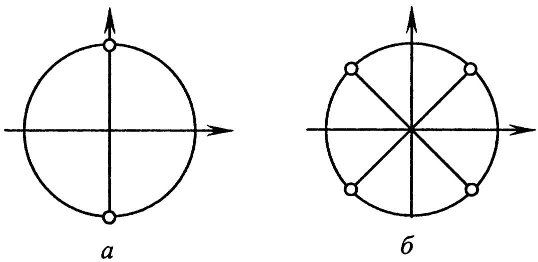
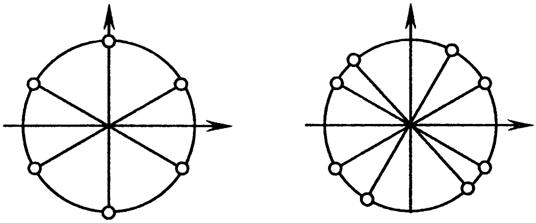


Рис.14.2

Если $a \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right]$, то решения имеют оба уравнения совокупности. Эти решения разбивают единичную окружность на шесть или восемь дуг (рис. 14.3). Как и в предыдущем случае, дуги должны быть равными. При $a = \dfrac{1}{2}$ получаем шесть равных дуг (рис. 14.3,*а*). При $a \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ получаем восемь дуг (рис. 14.3,*б*). Однако эти восемь дуг не могут быть равными, поскольку в этом случае получается, что должно выполняться равенство $\sin\dfrac{3\pi}{8} = 2\sin\dfrac{\pi}{8}$, которое не является верным.

При $a = 0$ решением заданного уравнения является любое число, а это множество не является арифметической прогрессией.

Таким образом, подходящими значениями параметра a являются только следующие числа: $1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}$. *Ответ*: $1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}$.



а *б*

Рис.14.3

Пример 14.8. Найти все значения a, при которых среди решений неравенства

$$\frac{1}{ax+1} \geq a^3 - 2a + 1$$

нет наибольшего.

Решение. Приведем неравенство к виду

$$\frac{(a^3-2a+1)(ax+1)-1}{ax+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a(a^3-2a+1)x + a(a^2-2a)}{ax+1} \leq 0 .$$

При $a=0$ неравенство выполняется при всех x, в том числе и для сколь угодно больших значений x. В этом случае в множестве решений неравенства нет наибольшего элемента, т.е. $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

Предположим далее, что $a \neq 0$. Разделим на a числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{(a^3-2a+1)x + a^2 - 2a}{x + \frac{1}{a}} \leq 0 .$$

При $a^3 - 2a + 1 = 0$ решением неравенства $\dfrac{a^3-2a}{x+\frac{1}{a}} \leq 0$ будет либо множество $x < -\dfrac{1}{a}$, либо множество $x > -\dfrac{1}{a}$, в зависимости от знака числителя дроби. Ни то, ни другое множество не имеет наибольшего элемента.

При $a^3 - 2a + 1 \neq 0$ преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(a^3-2a+1)(x-x_1)}{x-x_2} \leq 0 ,$$

где $x_1 = -\dfrac{a^2-2a}{a^3-2a+1}$, $x_2 = -\dfrac{1}{a}$. Уравнение $\dfrac{a^2-2a}{a^3-2a+1} = \dfrac{1}{a}$ решений не имеет (оно сводится к квадратному уравнению с отрицательным дискриминантом), поэтому при любом a корни числителя и знаменателя не совпадают ($x_1 \neq x_2$).

При $a^3-2a+1<0$ множество решений неравенства включает в себя промежуток $(x_1;+\infty)$ или $(x_2;+\infty)$ в зависимости от расположения корней x_1 и x_2 на числовой оси. Это множество не имеет наибольшего элемента.

При $a^3-2a+1>0$ множество решений неравенства лежит между корнями x_1 и x_2. Это либо промежуток $[x_1;x_2)$, если $x_1<x_2$, либо промежуток $(x_2;x_1]$, если $x_1<x_2$. Первое множество не имеет наибольшего элемента, а второе – имеет наибольший элемент x_1. Выясним, при каких значениях a выполняется неравенство $x_1<x_2$: $-\dfrac{a^2-2a}{a^3-2a+1}<-\dfrac{1}{a}$. Учитывая условие $a^3-2a+1>0$, приведем неравенство к виду $\dfrac{2a^2-2a+1}{a}<0$. При всех a числитель $2a^2-2a+1>0$, следовательно, $a<0$.

Таким образом, множество решений исходного неравенства не будет иметь наибольшего элемента, если:

$$a=0 \quad \text{или} \quad a^3-2a+1\le 0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^3-2a+1>0, \\ a<0. \end{cases}$$

Определим знаки многочлена a^3-2a+1. Для этого разложим его на множители. Так как $a=1$ – корень, то $a^3-2a+1=(a-1)(a^2+a-1)$. Раскладывая квадратный трехчлен на линейные множители, получаем

$$a^3-2a+1=(a-1)\left(a+0{,}5+0{,}5\sqrt{5}\right)\left(a+0{,}5-0{,}5\sqrt{5}\right).$$

Методом интервалов находим решения неравенства и системы неравенств, затем объединяем их решения.

Ответ: $a\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

Симметричность выражений

14.1. При каких значениях a уравнение $\dfrac{37-14\cos x}{12}=4^{a-\cos x}+4^{\cos x-a}$ имеет нечетное количество решений на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{7\pi}{3}\right)$?

Ответ: -2.

14.2. Найти все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=\dfrac{1}{4}a^3, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$$

имеет единственное решение. *Ответ*: -2.

14.3. Найти все действительные значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a, \\ x=\sqrt{b-y^2}, \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение. *Ответ*: $a=0$; $b\in(0;1]$.

14.4. Найти все действительные значения a, при которых уравнения

$$2x^2+ax-1=0 \quad \text{и} \quad 4{,}5x^2(1-x)^{-4}-1{,}5ax\left(1-2x+x^2\right)^{-1}-1=0$$

имеют общий корень. *Ответ*: 2.

Количественные характеристики

14.5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2a\sin x-\cos 2x+6a=7$$

имеет ровно одно решение на промежутке $(0;2\pi)$. *Ответ*: $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{3}$.

14.6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\cos 2x - 2a\cos x - 6a = 7$$

имеет ровно одно решение на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$.

14.7. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{\sin x} + 27\sin^3 x = \frac{2^a}{16^{\cos x}} + (a - 4\cos x)^3$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;2\pi]$? *Ответ*: ± 5.

14.8. При каких значениях a уравнение $\sin x = |\cos x| + a$ имеет ровно два решения на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$? *Ответ*: $(-\sqrt{2};-1)\cup[0;1)$.

14.9. При каких значениях a уравнение

$$\frac{x^4}{x-1} + a(x-1) = 6x^2$$

имеет более двух различных решений? *Ответ*: $(-\infty; 0]$.

14.10. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + 5x^2 + 3x + a = 0$$

имеет хотя бы два корня, больших a? *Ответ*: $[-9;-1)$.

14.11. Найти все значения x из отрезка $\left[\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right]$, которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a - ax) \le 1$ при любых значениях a из интервала $(0;2)$. *Ответ*: $[2; 2{,}5]$.

14.12. При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(\sqrt{\frac{|a|x + a - a|a|}{x-a}}\right)^{a^3-a+6} < \left(\sqrt{\frac{2a^2 + a - 2ax}{x-a}}\right)^{a^3-a+6}$$

выполняется при всех допустимых значениях x? *Ответ*: $(-2;0)$.

14.13. Найти все такие значения a, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x + 2a\sin x \le a^2 + 2a - 4$$

выполняется при любом действительном x.

Ответ: $\left(-\infty; -2-\sqrt{2}\right] \cup [2;+\infty)$.

14.14. При каких значениях параметра a существует единственная пара действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4x^2+1}\right) + y^2 = ay - 2 \ ?$$

Ответ: ± 2.

14.15. При каких значениях a имеется не более двух пар $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x^3}{y} + \frac{16y^3}{x} = \sqrt{xy} - a \ ?$$

Ответ: $\left[\frac{1}{32}; +\infty\right)$.

Качественные признаки

14.16. Найти все значения a, при которых все корни уравнения

$$(x-1)(2 + 2\sin 2x - 2\sqrt{2}(a-1)(\sin x + \cos x) - 5a^2) + x = 1$$

положительны.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{5}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

14.17. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0, \\ \dfrac{x^2 - a^2 x}{a^3 - a^2} + \cos^2(\pi x) \le 0 \end{cases}$$

имеет не более трех различных решений?

Ответ: $(1;3) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$.

14.18. Найти все целые значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos x + \sqrt{\frac{8-a}{3a+1}} = 0$$

имеет ровно два решения на отрезке $\left[\frac{45\pi}{4}; \frac{38\pi}{3}\right]$.

Ответ: 5; 6; 7; 8.

14.19. При каких значениях a уравнение

$$\frac{16}{1+x^2}+8(a-4)+(6-a)(1+x^2)=0$$

имеет наибольшее возможное количество решений? *Ответ*: $\left(\frac{10}{7};2\right)$.

14.20. При каких значениях a найдутся такие значения x, что три числа

$$16^{ax},\quad a\cdot 4^{ax}-5\cdot 2^{ax-1},\qquad 5\cdot 8^{ax}+1$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $a\geq 6$.

14.21. При каких значениях a уравнение $x\left(x^{12}-a\,x^6+a^4\right)=0$ имеет ровно пять корней, образующих арифметическую прогрессию?

Ответ: $\frac{8}{65}$.

14.22. При каких значениях параметра a три корня уравнения

$$x^3-7\sin\left(\frac{\pi a}{4}\right)\cdot x^2+\left(a^2+12a+50\right)\cdot x-8=0$$

являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ: -6.

14.23. Уравнение $x^3-2a^2x^2-a^4x+2a^6=0$ с параметром a имеет два корня, которые являются третьим и одиннадцатым членами возрастающей арифметической прогрессии. При каком n сумма первых n членов этой прогрессии будет наименьшей? *Ответ*: 6 или 7; 5.

14.24. При каких a наименьшее решение системы неравенств $\begin{cases} x\geq 2a \\ x\geq 1-a \end{cases}$ является решением уравнения $\sin\left(\pi\sqrt{4-x^2}\right)=0$?

Ответ: $-1;\ 1-\sqrt{3};\ \sqrt{2};\ 4$.

14.25. При каких a наименьшее решение системы неравенств $\begin{cases} x\geq a \\ x\geq 1-2a \end{cases}$

является решением уравнения $\mathrm{tg}\left(\pi\sqrt{3-x^2}\right)=0$?

Ответ: $-5;\ 1-2\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 3$.

14.26. Найти, при каких значениях параметра a всякое решение уравнения $\sin \pi x = 0$ удовлетворяет неравенству

$$x^2 + 2 + \frac{1}{a} \ge x\left(1 + a + \frac{2}{a}\right).$$

Ответ: -1 ; 2.

14.27. Найти все значения a, при которых для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $7x \ge x^2$, выполняется неравенство

$\sin^2 x + 2a\cos x < a^2 + a - 2$. *Ответ*: $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

14.28. Найти все действительные значения a, при которых уравнения

$$\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x \quad \text{и} \quad 2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$$

равносильны. *Ответ*: 2.

14.29. При каких значениях a неравенство

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} < ax - 0{,}5a$$

равносильно неравенству $x \ge 1$? *Ответ:* $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

14.30. При каких положительных значениях a всякое положительное решение неравенства

$$\left|\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right| > \sin x$$

является решением неравенства $\frac{a - 4x^2}{2x - 1} < 0$? *Ответ*: $(0;4)$.

14.31. При каких значениях a все пары $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$y - 2x^2 + 4ax > 4a^2 - 2\sqrt{8 - a^2},$$

удовлетворяют неравенству $x^2 - y < a^2$? *Ответ*: $2 < |a| \le 2\sqrt{2}$.

14.32. Найти все значения a, при которых из неравенства $x^2 - a\left(1 + a^2\right)x + a^4 < 0$ следует неравенство $\frac{x^2 + 16a}{2} < (1 + 4a)x$.

Ответ: $\left[-2\sqrt{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup \left(2; 2\sqrt{2}\right)$.

14.33. При каких значениях a всякое решение уравнения

$$\sqrt{x}+\sqrt{8a^2-x}=a^2$$

является также решением уравнения $\log_{a^2} x^{|a|}=2-a$?

Ответ: -4.

14.34. При каких значениях параметра a из выполнения неравенства

$$|x-a|+|x+a^2|\neq|a^2+a|$$

следует выполнение равенства

$$\left|\left|x-\frac{a}{2}\right|-|x+a+1|\right|=\left|\frac{3a}{2}+1\right| \ ?$$

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

14.35. При каких значениях a всякое решение неравенства

$$\log_2\left(a^2x^2-|3ax+1|+1\right)\leq 1$$

является решением неравенства $|x-a|>0$?

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right)\cup\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}};+\infty\right)$.

14.36. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x^2+3a^2\leq 4ax, \\ ax^2-2\geq x-2ax \end{cases}$$

равносильна какому-нибудь одному из этих неравенств?

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-1\right]\cup[1;+\infty)$.

14.37. При каких значениях параметра a неравенства

$$x^2+2<\frac{\left(2a^2+1\right)x}{a} \quad \text{и} \quad |\operatorname{ctg}(\pi x)|\cdot\left(x^2+2\right)<\frac{\left(2a^2+1\right)x\cdot|\operatorname{ctg}(\pi x)|}{a}$$

равносильны?

Ответ: $\left(-\frac{3}{4};-\frac{2}{3}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$.

14.38. При каких значениях параметра a любое решение неравенства

$$\frac{ax}{\sqrt{ax+9}} \le \sqrt{1+ax}-1$$

удовлетворяет неравенству $x \ne a$?

Ответ: $\left(-\infty;-1{,}5\sqrt{5}\right)\cup\left(1{,}5\sqrt{5};+\infty\right)$.

14.39. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} \sin(\pi a x) \ge a^2, \\ ax^2+\dfrac{6}{a} \ge 5x \end{cases}$$

равносильна уравнению $6+2x=\log_{|a+3|}(-2x-3)$?

Ответ: -1; -2; -3; -4.

14.40. Даны два уравнения

$$\cos\frac{a\left(a+\sqrt{2}\right)x}{14}=1 \quad \text{и} \quad \sin\frac{\left(3a^2+\sqrt{2}-4\right)x}{3a+17}=0.$$

При каких рациональных значениях a верно каждое из следующих утверждений:

а) первое уравнение является следствием второго;

б) второе уравнение является следствием первого;

в) оба уравнения равносильны?

Ответ: а) первое уравнение является следствием второго при $a=0$ и $a=\dfrac{4}{3}$;

б) второе уравнение является следствием первого при $a=-1$ и $a=\dfrac{4}{3}$;

в) оба уравнения равносильны при $a=\dfrac{4}{3}$.

§15. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Для наглядного представления множества решений уравнения (неравенства, системы уравнений, системы неравенств) удобны графические методы. Обычно строятся параметрические семейства графиков функций и других линий, определяющих зависимость множества решений от параметра. Рассмотрим пример уравнения с одной неизвестной и одним параметром.

Пусть требуется при всех a найти количество корней уравнения $F(x,a)=0$. Рассмотрим несколько подходов к решению этой задачи. В зависимости от вида уравнения используем разные формы графического представления множества решений.

А. Предположим, что на координатной плоскости Oxa (Ox – ось абсцисс (горизонтальная), Oa – ось ординат (вертикальная)) удалось построить множество решений этого уравнения (жирная линия на рис.15.1). Тогда полный анализ количества решений сделать очень просто. Любому фиксированному значению параметра на координатной плоскости Oxa соответствует горизонтальная прямая. Количество пересечений этой прямой с множеством решений определяет количество корней уравнения (при этом фиксированном значении параметра). Поэтому отмечаем на рис. 15.1 характерные значения a_1, a_2, a_3 параметра и проводим горизонтальные прямые, подсчитывая в каждом случае количество пересечений. Если $a < a_1$ (этому случаю соответствует штрихпунктирная прямая 1), то уравнение имеет одно решение (так как прямая 1 пересекает множество решений уравнения в одной точке). При $a = a_1$ уравнение имеет два корня. При $a_1 < a < 0$ (штрихпунктирная прямая 2) имеем 3 корня; при $0 \le a < a_2$ (прямая 3) – 4 корня; при $a = a_2$ – 3 корня; при $a_2 < a < a_3$ (прямая 4) – 2 корня; при $a = a_3$ – одно решение; при $a > a_2$ (прямая 5) – нет решений. Таким образом, получена структура ответа. Осталось вычислить характерные значения параметра (a_1, a_2, a_3), что делается для конкретного выражения $F(x,a)$.

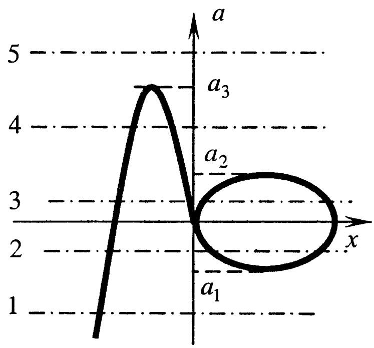


Рис.15.1

Б. Пусть уравнение $F(x,a)=0$ удалость решить относительно параметра, т.е. выразить параметр через неизвестную: $a = f(x)$. Тогда множество решений уравнения $F(x,a)=0$ совпадает с графиком функции $a=f(x)$. Строим график этой функции на координатной плоскости Oxa и анализируем аналогично предыдущему случаю (**А**).

В. Пусть уравнение $F(x,a)=0$ можно решить относительно неизвестной, т.е. получить выражение для корней $x_1=g_1(a)$, $x_2=g_2(a)$ и т.д. для остальных корней. Тогда на координатной плоскости Oax (Oa – ось абсцисс (горизонтальная), Ox – ось ординат (вертикальная)) строим графики функций $x=g_1(a)$, $x=g_2(a)$ и т.д. (рис.15.2). Каждому фиксированному значению параметра на рис.15.2 соответствует вертикальная прямая. Количество пересечений этой прямой с графиками функций определяет число корней уравнения при выбранном значении параметра. Поэтому, проводя вертикальные прямые при разных значениях параметра, находим структуру ответа: при $a<a_1$ уравнение не имеет решений; при $a_1 \le a < a_2$ уравнение имеет один корень; при $a_2 \le a < 0$ – два корня; при $a=0$ – один корень; при $0<a<a_3$ – два корня; при $a=a_3$ – один корень; при $a>a_3$ – два корня.

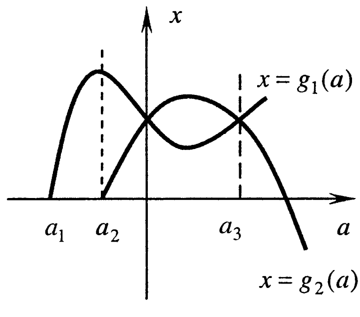


Рис.15.2

Г. Пусть уравнение $F(x,a)=0$ удалось представить в виде $f(x)=g(x,a)$. На координатной плоскости Oxy построим график $y=f(x)$ левой части уравнения, которая не зависит от параметра. Затем, нужно изобразить параметрическое семейство графиков $y=g(x,a)$. Обычно, достаточно изобразить несколько кривых $y=g(x,a)$ при некоторых значениях параметра и установить, как меняются (перемещаются, деформируются и т.п.) эти кривые при изменении (возрастании) параметра. Корни уравнения $f(x)=g(x,a)$ – это абсциссы точек пересечения графиков $y=f(x)$ и $y=g(x,a)$. Поэтому количество решений соответствует количеству точек пересечения графиков. Пусть, например, график функции $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рис.15.3

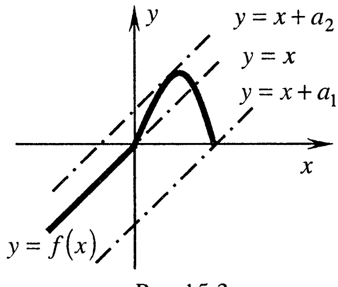


Рис.15.3

(жирная кривая), а семейство $y = g(x, a)$ – это параллельные прямые $y = x + a$ (штрихпунктирные линии).

Проводя прямые при разных значениях параметра, получаем структуру ответа: при $a < a_1$ уравнение не имеет решений; при $a_1 \le a < 0$ уравнение имеет один корень; при $a = 0$ уравнение имеет бесконечное число решений (любое число $x \le 0$ является корнем); при $0 < a < a_2$ – два корня; при $a = a_2$ – один корень; при $a > a_2$ – нет решений.

Пример 15.1. При каких значениях a уравнение $\cos^2 t + a \sin t = 5$ имеет решения?

-1

Решение. Сделаем замену $x = \sin t$, тогда уравнение преобразуется к квадратному: $x^2 - ax + 4 = 0$. Учитывая ограничение $|x| = |\sin t| \le 1$, исходную задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение имеет хотя бы один корень на промежутке $[-1; 1]$? Это типичная задача на плавающую параболу, которую можно решить, используя приемы, рассматриваемые в §5. Заметим, что это приемы – графические, так как задача сводится к построению подходящих парабол. Покажем на этом примере применение подходов **В** и **Г**.

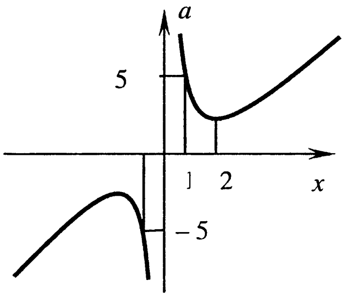


Рис.15.4

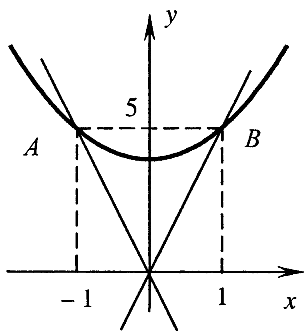


Рис.15.5

Применение способа **В**. Решим уравнение $x^2 - ax + 4 = 0$ относительно

-1

параметра $a = \dfrac{x^2 + 4}{x}$. Заметим, что $x = 0$ не является корнем рассматриваемого уравнения. На координатной плоскости Oxa (рис.15.4) построим эскиз графика функции $a = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ (построение облегчается, если учесть что она нечетная и представить функцию в виде суммы $a = x + \dfrac{4}{x}$). Допустимым значениям $x \in [-1; 1]$ соответствуют значения $|a| \ge 5$.

Применение способа **Г**. Запишем уравнение в виде $x^2 + 4 = ax$. На координатной плоскости Oxy изобразим параболу $y = x^2 + 4$ (рис. 15.5) и пучок прямых $y = ax$, проходящих через начало координат. С ростом параметра a прямые $y = ax$ поворачиваются против часовой стрелки. При $a \le -5$ или $a \ge 5$ прямая $y = ax$ пересекает дугу AB параболы. Следовательно, уравнение имеет корень на промежутке $x \in [-1; 1]$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.

Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными $F(x, y, a) = 0$. Для анализа решений нужно на координатной плоскости Oxy построить **параметрическое семейство решений** этого уравнения. Построение, как правило, упрощается, если удается решить это уравнение относительно какой-либо неизвестной: $y = f(x, a)$ или $x = g(y, a)$. Перечислим **типовые семейства**, используемые в задачах.

1. Пучок прямых $y = a(x - x_0) + y_0$, проходящих через точку $(x_0; y_0)$.

2. Семейства парабол, например: $y = ax^2$; $y = (x-a)^2$; $y = x(x-a)$, $y = (x-a)^2 - a^2$.

3. Семейства гипербол, например: $y = \dfrac{a}{x}$; $y = \dfrac{1}{x-a}$.

4. Разнообразные семейства окружностей, например: $x^2 + y^2 = a^2$; $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 1$; $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

5. Семейства квадратов, например: $|x| + |y| = a$; $|x-a| + |y| = 1$; $|x-a| + |y| = a$.

Перечисленные семейства полезно построить, выбирая несколько (3–5) конкретных значений параметра и определяя, как меняется на координатной плоскости множество решений при увеличении (или уменьшении) значений параметра.

Замечание. Графические методы применимы не ко всем задачам. Во-первых, общее количество неизвестных и параметров не должно быть больше 2-х или 3-х. Иначе придется выполнять построения не на координатной плоскости, а в пространстве – что гораздо труднее и менее наглядно. Во-вторых, анализируемые уравнения (неравенства) не должны быть сложными, в противном случае трудно изобразить множества их решений.

Теперь рассмотрим примеры применения графических методов для решения экзаменационных задач.

Пример 15.2. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 - 3ax + a = 0$$

имеет единственное решение?

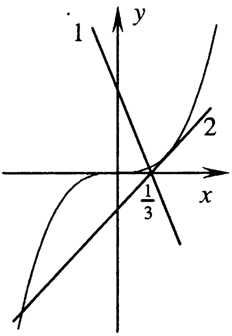


Рис.15.6

Решение. Представим уравнение в виде $x^3 = 3ax - a$. Графиком левой части является кубическая парабола (см. рис.15.6), а графиком правой части – пучок прямых $y = 3ax - a$, проходящих через точку $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. При увеличении углового коэффициента $3a$ прямая $y = 3ax - a$ поворачивается против часовой стрелки. Если $a \le 0$, то прямая $y = 3ax - a$ пересекает график $y = x^3$ в одной точке (прямая 1 на рис.15.6). Если $a > 0$, то пересечений может быть несколько. Критический случай – касание. Обозначим через a^* значение параметра, при котором прямая (2) касается кубической параболы. При $a < a^*$ имеется одна точка пересечения; при $a = a^*$ – две; при $a > a^*$ – три. Получили структуру ответа: уравнение имеет один корень при всех $a < a^*$. Осталось вычислить a^*. Записываем условия касания графиков:

$$\begin{cases} x^3 = 3ax - a, \\ 3x^2 = 3a. \end{cases}$$

Первое равенство определяет абсциссы общих точек графиков, а второе – равенство угловых коэффициентов касательной к $y = x^3$ и прямой (2) из пучка. Решая систему, получаем $a = 0$ или $a = 0{,}25$. Случай $a = 0$ не годится, так как $a^* > 0$. Поэтому $a^* = 0{,}25$. Теперь записываем *ответ*: $a \in (-\infty; 0{,}25)$.

Пример 15.3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left|x^2 - 1\right| + a(x - 0{,}5) = 0{,}75$$

имеет ровно три различных действительных решения.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\left|x^2 - 1\right| = 0{,}75 - a(x - 0{,}5)$.

Для анализа количества корней этого уравнения используем его графическое представление. Рассмотрим две функции:

$$f(x)=\left|x^2-1\right| \qquad \text{и} \qquad g(x,a)=0{,}75-a(x-0{,}5)\,.$$

Построим график функции $y=f(x)$, раскрывая модуль по определению (рис.15.7). График состоит из трех дуг парабол. Вторая функция $y=g(x,a)$ зависит от параметра a. При каждом фиксированном значении a график этой функции представляет собой прямую с угловым коэффициентом ($-a$), проходящую через точку $A(0{,}5;\,0{,}75)$. Строя эти прямые при разных значениях a, получаем пучок прямых, проходящих через точку A.

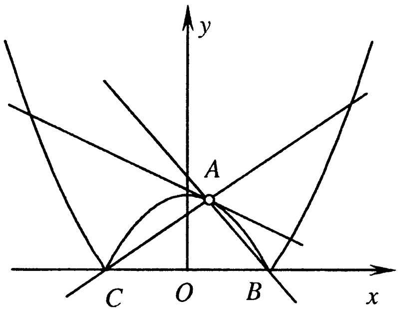


Рис.15.7

Количество корней исходного уравнения (при фиксированном значении a) совпадает с количеством точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с прямой $y=g(x,a)$. Таких точек будет три, если:

– прямая $y=g(x,a)$ касается графика функции $y=f(x)$ в точке A;

– прямая $y=g(x,a)$ проходит через точку $B(1;0)$ или точку $C(-1;0)$.

Найдем значения параметра a для каждого из перечисленных случаев. Угловые коэффициенты для прямых AB и AC легко находятся по координатам точек:

$$(AB):\ -a=\frac{-0{,}75}{0{,}5} \ \Rightarrow\ a=1{,}5\,; \quad (AC):\ -a=\frac{0{,}75}{1{,}5} \ \Rightarrow\ a=-0{,}5\,.$$

Угловой коэффициент касательной к параболе $y=1-x^2$ в точке A получаем, вычисляя производную:

$$y'=-2x \ \Rightarrow\ y'(0{,}5)=-1 \ \Rightarrow\ -a=-1 \ \Rightarrow\ a=1\,.$$

Ответ: $a=-0{,}5$; $a=1$; $a=1{,}5$.

Пример 15.4. Найти все значения *a*, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2-2x\le a\,, \\ ax^2+a^2\le xa^2+x^2 \end{cases}$$

равносильна какому-нибудь одному неравенству этой системы.

Решение. Запишем систему неравенств в виде

$$\begin{cases} x^2-2x-a\le 0\,, \\ (a-1)x^2-a^2x+a^2\le 0\,. \end{cases}$$

При $a<-1$ первое неравенство не имеет решений. В этом случае система также не имеет решений. Следовательно, при $a<-1$ система неравенств равносильна первому неравенству. Далее рассматриваем $a\geq -1$.

При $a=1$ второе неравенство принимает вид $x\geq 1$. Первое неравенство выполняется на промежутке $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$. Множеством решений системы неравенств будет отрезок $[1;1+\sqrt{2}]$. Следовательно, $a=1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq 1$ воспользуемся графическим методом. Изобразим на плоскости Oxa множество решений каждого неравенства системы. Для этого, разложив левую часть второго неравенства на множители, перепишем систему:

$$\begin{cases} a\geq x^2-2x, \\ (a-x)(x-1)\left(a-\dfrac{x}{x-1}\right)\geq 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства на плоскости Oxa образуют все точки $(x;a)$, лежащие не ниже параболы $a=x^2-2x$ (заштрихованное множество на рис.15.8,*а*). Для решения второго неравенства изобразим на плоскости Oxa прямые $a=x$, $x=1$ и гиперболу $a=\dfrac{x}{x-1}$, которые разбивают плоскость на восемь областей. Взяв "пробные" точки в каждой области, определим знаки левой части неравенства и заштрихуем подходящие области (рис.15.8,*б*).

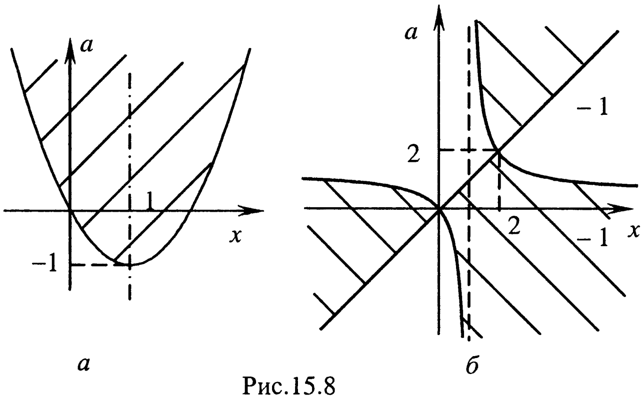


Рис.15.8

Теперь наложим рисунки друг на друга (рис.15.9). Множество решений системы неравенств получается как пересечение решений первого и второго неравенств. В задаче требуется найти такие значения параметра a, при которых множество решений одного из неравенств является подмножеством решений другого неравенства. Чтобы выделить эти значения параметра, поступим следующим образом. Проведем на плоскости Oxa горизонтальную прямую $a = a_0$, отвечающую фиксированному значению $a_0 \ge -1$ параметра a. Эта прямая пересекает области, заштрихованные на рис.15.8 (*а* или *б*). Отрезок прямой $a = a_0$, попадающий в заштрихованную область на рис.15.8,*а*, соответствует множеству решений первого неравенства при $a = a_0$ (точнее сказать, что проекция этого отрезка на ось абсцисс является множеством решений первого неравенства при фиксированном значении параметра). Части прямой $a = a_0$, находящиеся в заштрихованных областях на рис.15.8,*б*, соответствуют множеству решений второго неравенства системы при $a = a_0$. Проводя горизонтальные прямые $a = a_0$, при различных значениях a_0, выбираем все те случаи, когда отрезок прямой, соответствующий решениям первого неравенства, целиком принадлежит множеству решений второго неравенства, и наоборот.

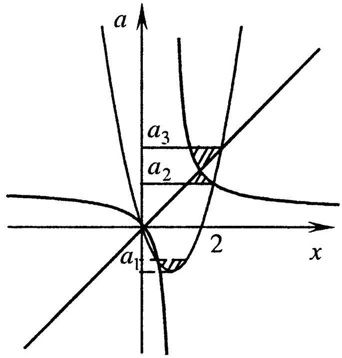


Рис.15.9

На рис.15.9 заштриховано множество точек $(x; a)$, ординаты которых образуют множество удовлетворяющих условию задачи значений параметра (в рассматриваемом случае, т.е. при $a \ge -1$). Присоединив к этому множеству ранее найденный промежуток $a < -1$, получаем структуру ответа: $a \in (-\infty; a_1] \cup [a_2; a_3]$, где неизвестные значения a_1, a_2, a_3 подлежат определению. Эти значения находим как ординаты точек пересечения параболы с прямой и с гиперболой. Составляем системы уравнений для нахождения точек пересечения

параболы и прямой: $\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x; \end{cases}$ параболы и гиперболы: $\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = \dfrac{x}{x-1}. \end{cases}$

Из первой системы находим, что $a_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, из второй – $a_3 = 3$. Следовательно, *ответ*: $a \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$.

Пример 15.5. Найти все значения a, при которых среди решений неравенства

$$\left((x-a)^2+y^2-4\right)\left(x^2+(y-a)^2-4\right)\le 0$$

есть хотя бы одна пара $(x;y)$, удовлетворяющая уравнению $|x|+|y|=1$.

Решение. Изобразим на координатной плоскости Oxy множество точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющих неравенству. Границей этого множества являются окружности радиуса 2 с центрами в точках $(0;a)$ и $(a;0)$. Решением неравенства $(x-a)^2+y^2-4\le 0$ является круг радиуса 2 с центром в точке $(a;0)$. Решением неравенства $(x-a)^2+y^2-4\ge 0$ является объединение окружности и множества точек, лежащих вне круга. Аналогично для сомножителя $x^2+(y-a)^2-4$. Так как произведение этих сомножителей меньше или равно нулю, то решениями неравенства является множество точек окружностей и множество точек, лежащих внутри каждого круга, но вне другого (рис.15.10,15.11).

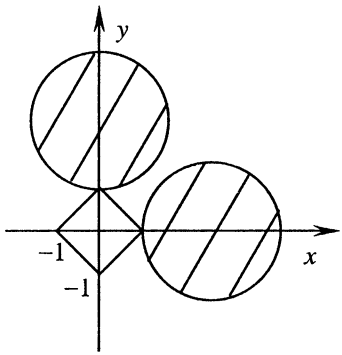


Рис.15.10

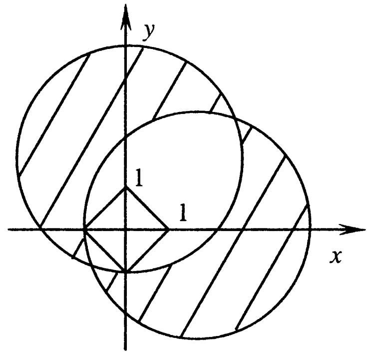


Рис.15.11

Множество решений уравнения $|x|+|y|=1$ представляет собой квадрат с вершинами в точках $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$. Учитывая симметрию, рассмотрим только случай $a\ge 0$. При $a>3$ (см. рис.15.10) нет пересечений кругов и квадрата. При $a\le 3$ появляется пересечение. Но так как пересечение кругов не входит в множество решений неравенства, то, очевидно (рис.15.11), что при $0\le a<1$ квадрат не имеет общих точек с множеством решений неравенства. Добавляя к положительным решениям задачи $a\in[1;3]$ симметричное множество $a\in[-3;-1]$, получаем окончательный ответ.

Ответ: $1\le|a|\le 3$.

Пример 15.6. Найти значения a, при которых площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой неравенств

$$\begin{cases} a^2|x|\left(x^2+y^2\right)\le\left(a^4+7\right)|x|+\left(a^4-7\right)x, \\ x^2-3xy+2y^2\le 0 \end{cases}$$

будет наименьшей.

Решение. Преобразуем сначала второе неравенство системы. Раскладывая левую часть на множители (как квадратный трехчлен относительно переменной x), получаем $(x-y)(x-2y)\le 0$. Точки, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, лежат между прямыми $y=x$ и $y=0{,}5x$ (рис.15.12).

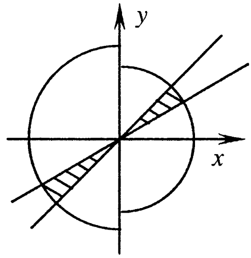


Рис.15.12

Рассмотрим теперь первое неравенство системы. При $a=0$ неравенство выполняется для любых точек координатной плоскости. Следовательно, множество точек, удовлетворяющих системе, будет неограниченным (в этом случае площадь, очевидно, не минимальная). Рассмотрим теперь случай, когда $a\ne 0$. При $x=0$ первому неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на оси ординат. Среди них только точка $O(0;0)$ удовлетворяет второму неравенству. Если же $x\ne 0$ (и $a\ne 0$), то, разделив обе части неравенства на $a^2|x|$, приведем неравенство к виду

$$x^2+y^2\le a^2+\frac{7}{a^2}+\left(a^2-\frac{7}{a^2}\right)\cdot\frac{x}{|x|}.$$

При $x>0$ получаем $x^2+y^2\le 2a^2$. Этим условиям удовлетворяют все точки полукруга радиуса $|a|\sqrt{2}$ (в правой полуплоскости). При $x<0$ получаем $x^2+y^2\le\frac{14}{a^2}$. Этим условиям удовлетворяют все точки полукруга радиуса $\frac{\sqrt{14}}{|a|}$ (в левой полуплоскости). Таким образом, множество решений системы неравенств (при $a\ne 0$) представляет собой два сектора двух концентрических кругов (заштрихованное множество на рис. 15.12). Пусть γ – величина двух равных центральных углов этих секторов, тогда сумма S их площадей выражается формулой $S=\frac{\gamma}{2}2a^2+\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{14}{a^2}=\gamma\left(a^2+\frac{7}{a^2}\right)$. Наименьшее значение суммы $a^2+\frac{7}{a^2}$ достигается при $a=\pm\sqrt[4]{7}$. *Ответ*: $\pm\sqrt[4]{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти все значения a, при которых уравнения имеют ровно одно решение.

15.1. $\dfrac{\sqrt{x+a}-x-1}{x^2-x}=0$. *Ответ*: $\{0{,}75\}\cup[1;3)\cup(3;+\infty)$.

15.2. $\sqrt{-2x-3}=-ax^2$. *Ответ*: $-0{,}25$; 0.

15.3. $\cos(2\cdot\arccos x)-a\cdot|x-1|+2=0$. *Ответ*: $a\in\{2\sqrt{6}-4\}\cup(1{,}5;+\infty)$.

15.4. Сколько существует действительных значений параметра a, $|a|<7$, при которых уравнение

$$x^2+4x+2a\cdot\cos a=2+2\sin a$$

имеет хотя бы один корень, являющийся целым числом? *Ответ:* 13.

15.5. При каких значениях a существуют три различных числа, каждое из которых является решением уравнения

$$x^3-4x^2-ax=4ax-ax^2+a^2$$

и которые являются длинами сторон некоторого треугольника?

Ответ: $(-4;-3)\cup\left(-3;2-2\sqrt{5}\right)$.

15.6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x-a^2|-|x+4a|-2a=\frac{(3x+2|x|+1)\sin x}{|x|}$$

имеет конечное количество решений.

Ответ: $\left(-\infty;-3-\sqrt{14}\right)\cup\left(-5;-1-\sqrt{2}\right]\cup\left(-3+\sqrt{14};+\infty\right)$.

15.7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2+|x-a|<3$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение. *Ответ*: $[-3{,}25;3)$.

15.8. При каких значениях параметра a существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее неравенству

$$\left(x^2+(5a+2)x+4a^2+2a\right)\sqrt{4-a^2-x^2}<0\ ?$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3};\sqrt{2}\right)$.

15.9. Найти все действительные значения a, при которых неравенство

$$\left(x^2-4\right)^2\geq a|x|+1$$

выполнено для всех действительных x.

Ответ: $a\leq\dfrac{4\sqrt{3}(29-4\sqrt{61})}{9\sqrt{4+\sqrt{61}}}$.

15.10. Найти все значения a, при которых среди решений неравенства

$$2\cdot|3x-a-4|+3\cdot|2x+a-6|-5\cdot|a-2|\leq 0$$

имеется ровно одно натуральное число. *Ответ*: $(0;4)$.

15.11. Найти все значения a, при которых среди решений уравнения

$$|x-a|+|2x-a-6|=|6-x|$$

имеется ровно одно целое число.

Ответ: $(3;4)\cup(4;5]\cup\{6\}\cup[7;8)\cup(8;9)$.

15.12. Найти, при каких значениях параметра a всякое решение уравнения $\sin\pi x=0$ удовлетворяет неравенству

$$x^2+2+a+\frac{1}{a}\geq x\left(2+a+\frac{1}{a}\right).$$

Ответ: -1; 1.

15.13. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$\left|\frac{10\cdot|x|-19}{|x|-2}\right|>a$$

является объединением пяти непересекающихся интервалов?

Ответ: $[0;9{,}5)$.

15.14. При каких значениях a множество решений неравенства

$$x-\sqrt{\left(\frac{a}{2}-x\right)(x+a)}\geq 2a+1$$

является отрезком числовой оси?

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{21}\right]\cup\left(-\frac{2}{3};\frac{-1}{3}\right)$.

15.15. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x^5+10x<5x^3+a$ состоит из двух непересекающихся промежутков числовой оси? *Ответ*: $\left(-6;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[4\sqrt{2};6\right)$.

15.16. Найти все значения a, при которых отношение наибольшего отрицательного решения неравенства

$$x^3+(1-a)x^2-\left(2a^2+a\right)x-2a^2\geq 0$$

к его наименьшему положительному решению достигает своего наименьшего значения. *Ответ*: $[-0{,}5;0)$.

15.17. При каких значениях a наибольшее отрицательное решение неравенства

$$x^3+(a-1)x^2-\left(2a^2+a\right)x+2a^2\leq 0$$

не превосходит по абсолютной величине наибольшего положительного решения? *Ответ*: $(-\infty;0)\cup(0;0{,}5]$.

15.18. При каких значениях a для всякой пары положительных чисел x, y такой, что $|2y+ax|\leq 2+ax$ выполняется неравенство

$$|2x-ay|\leq 2-ay\ ?$$

Ответ: $a\leq -2$.

15.19. Найти все неотрицательные значения параметра a, при которых для всех $x\geq 0$ и $y\geq 0$ из неравенства $axy\geq 4x+7y+a$ следует неравенство $xy\geq 5$. *Ответ*: $0<a\leq\sqrt{35}$.

15.20. При каких значениях a неравенство $|y|<1-ax^2$ является следствием неравенства $a|x|+|y|<a$? *Ответ*: $(-\infty;1]$.

15.21. Найти все значения a, для каждого из которых выполнено условие: любое число x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{a-x} \geq -x$, является также решением неравенства $x > \frac{1}{a}$. *Ответ*: $[-0{,}25; 0)$.

15.22. Найти все значения a, при которых неравенство

$$2 \cdot \left| x^3 - 3ax \right| \leq 7 \cdot |a|$$

выполняется для всех x, удовлетворяющих неравенству $4x^2 \leq 9 \cdot |a|$.

Ответ: $a \geq -\frac{16}{81}$.

15.23. При каких действительных значениях a система

$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений? *Ответ*: $a \in (0{,}2; 0{,}25)$.

15.24. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} xy = 2y + 1, \\ x^2 + y^2 - 4x = a \end{cases}$$

имеет четыре различных решения? *Ответ*: $(-2; +\infty)$.

15.25. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4y = a - 5, \\ 2xy + 4x - 2y = a + 3 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений? *Ответ*: $a \leq 0{,}5$.

15.26. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + (x^2 + 2x - 3)(3 - x^2) = 0, \\ y - ax - 6a = 0 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений?

Ответ: $\left(-\infty; -12 + 2\sqrt{33}\right) \cup \left(10 - 2\sqrt{21}; +\infty\right)$.

15.27. При каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = z \\ x + y + z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение? *Ответ*: $-0{,}5$.

15.28. Найти все значения a, для которых найдется пара чисел x, y, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} a^2 + 2ax + y = 0, \\ |x+2| + |y+3| \le 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left[-1; 2-\sqrt{6}\right] \cup \left[3; 3+\sqrt{12}\right]$.

15.29. Найти все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = a(x-1), \\ \dfrac{1}{\log_{x+1} 3} + \dfrac{1}{\log_y 3} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. *Ответ*: $(0;1) \cup (1;+\infty)$.

15.30. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \left(x^2 y^2 - 1\right)\left(\big|\,|x| - |y|\,\big| - 1\right) \ge 0, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет конечное число различных решений? *Ответ*: 0; $\pm\sqrt{3}$.

15.31. При каких значениях параметра a среди решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(x+y) < 1 - 2a^2, \\ x^2 + y^2 + 2a(x-y) < 1 - 2a^2 \end{cases}$$

найдутся пары (x,y), удовлетворяющие неравенству $x^2 + y^2 > \dfrac{a^2}{2}$?

Ответ: $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{5-2\sqrt{2}}};\ \sqrt{\dfrac{2}{5-2\sqrt{2}}}\right]$.

15.32. При каких значениях параметра a среди решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-2ax+y^2\le 1-a^2 \\ x^2-2ay+y^2\le 1-a^2 \end{cases}$$

найдутся пары (x,y), удовлетворяющие неравенству $x^2+y^2\ge a^2$?

Ответ: $\left(-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}};\ \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)$.

15.33. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x)+\operatorname{ctg}(\pi x)=2 \\ x^2-(a^2+a)x+a^3\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $(-0{,}75;-0{,}5]\cup[0{,}25;0{,}5]\cup\{1\}\cup\left[0{,}5\sqrt{5};1{,}5\right)$.

15.34. Найти все такие a, при которых верно следующее утверждение: как бы ни были в следующих формулах

$$\begin{cases} x^2-2ax\otimes 4, \\ x^2-x-a\otimes 6, \end{cases}$$

поставлены знаки "$\le$" или "$\ge$" вместо знака $\otimes$, каждая из полученных таким образом четырех систем неравенств имеет действительные решения.

Ответ: $\left[\dfrac{-21-5\sqrt{33}}{8};0\right]\cup\left[\dfrac{-21+5\sqrt{33}}{8};+\infty\right)$.

15.35. Найти все действительные значения a, при которых существует единственная тройка чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(\sin x+\cos x)-2^{-z}-2^{z-4}}{\sqrt{1+y}}\ge 0, \\ x^2+y^2=a^2-z^2. \end{cases}$$

Ответ: $a=\pm\sqrt{\dfrac{\pi^2}{16}+4}$; $\sqrt{\dfrac{\pi^2}{16}+5}\le|a|<\sqrt{\dfrac{49\pi^2}{16}+4}$.

§16. ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследование множества решений уравнения или неравенства с несколькими параметрами представляет собой довольно сложную задачу. Дополнительно возникают логические сложности. Роль разных параметров может быть различной (например, условие типа "при каких значениях a существует b, что для всех c уравнение ..."). Такие формулировки задач вызывают наибольшие затруднения. Решение задач данного параграфа поможет преодолеть эти трудности.

Для записи логических условий принято использовать кванторы ***общности*** ($\forall$) и ***существования*** ($\exists$): символ $\forall$ заменяет слова "для любого", "для всех", "для каждого"; символ $\exists$ заменяет слова "существует...такой, что", "найдется...такой, что" и т.п. Эти обозначения позволяют кратко записать условие задачи и ясно выразить различия в логических требованиях к параметрам или неизвестным. С помощью несложных правил задачу можно заменить, либо на эквивалентную, либо перейти к противоположной задаче. И то, и другое бывает полезно для решения.

Рассмотрим, например, задачу: при каких значениях a для всякого положительного b существует x, что $f(x,a)=b$?

Запишем ее с помощью обозначений: $a-?\ \forall b>0\ \ \exists x\in R:\ f(x,a)=b$. Условие $\forall b>0\ \ \exists x\in R:\ f(x,a)=b$ говорит о том, что область значений функции $f(x,a)$ аргумента x содержит все положительные числа. Следовательно, задачу можно переформулировать так: при каких значениях a неравенство $f(x,a)>0$ имеет хотя бы одно решение? Такая постановка кажется проще, так как имеется только один параметр.

Иногда полезно перейти к отрицанию формулировки и решать противоположную задачу. При этом кванторы меняются на противоположные. Для рассматриваемой задачи противоположная формулировка имеет вид: $a-?\ \exists b>0\ \ \forall x\in R:\ f(x,a)\neq b$, т.е. при каких значениях a существует такое $b>0$, что для всех x выполняется неравенство $f(x,a)\neq b$. Решая противоположную задачу, находим все такие значения a, которые не годятся для исходной задачи. Следовательно, зная ответ к противоположной задаче не трудно записать все решения исходной задачи.

Пример 16.1. При каких значениях a существует такое c, что для любого b уравнение $ax^2+bx+c^2+2c+b=0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. В первую очередь проверим $a=0$. Очевидно, что уравнение $bx+c^2+2c+b=0$ имеет решение для любого b, если взять, например, $c=0$. Следовательно, $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a\neq 0$. В этом случае данное уравнение является квадратным, поэтому оно имеет решения при условии неотрицательности дискриминанта:

$$b^2-4ab-4ac^2-8ac\geq 0.$$

Надо найти при каких a и c это неравенство выполняется для любого b. Это неравенство квадратное относительно неизвестной b. Чтобы оно выполнялось при всех b, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был отрицателен:

$$16a^2+16ac^2+32ac<0 \quad\Leftrightarrow\quad 16a\left(c^2+2c+a\right)<0.$$

Надо найти при каких значениях a существует c, удовлетворяющее этому неравенству. Если $a>0$, то неравенство $c^2+2c+a<0$ будет иметь решения при неотрицательности дискриминанта: $4-4a\geq 0$. Следовательно, значения $0<a\leq 1$ удовлетворяют условиям задачи. При $a<0$ получаем неравенство $c^2+2c+a>0$, которое всегда (для любого a) имеет решение, т.е. все $a<0$ удовлетворяют условиям задачи. Объединяя найденные решения, получаем *ответ*: $a\leq 1$.

Рассмотрим теперь задачи, в формулировке которых имеются несколько **однотипных** параметров, а именно ко всем параметрам предъявляются одинаковые логические требования. Например, "при всех значениях параметров решить уравнение", "при каких значениях параметров уравнение имеет решение" и т.п. Несмотря на однотипность параметров они, как правило, входят в уравнение (неравенство) по-разному. Поэтому оказывают разное влияние на множество решений. При анализе обычно применяют последовательный подход, рассматривая параметры по очереди. Например, требуется при всех a и b решить уравнение $f(x,a)=b$. Можно, считая a фиксированным, искать множество значений функции $f(x,a)$. При этом получим все значения b, соответствующее выбранному a, при которых данное уравнение имеет решения. Либо зафиксировав произвольное значение b, решать уравнение при всех a. Таким образом, фиксируя один из параметров, получаем задачу с меньшим числом параметров и анализируем множество ее решений. Такая схема сводит многопараметрический анализ к однопараметрическому.

Пример 16.2. Найти все тройки чисел $(a;b;c)$, для которых уравнение $|x-a|+|x-b|=a^2-b^2$ равносильно неравенству $x^2-c(c+1)x+c^3\leq 0$.

Решение. Преобразуем неравенство

$$x^2 - c(c+1)x + c^3 \le 0 \Leftrightarrow (x-c)(x-c^2) \le 0.$$

В зависимости от величины c решениями неравенства будут:

$[c; c^2]$, когда $c<0$ или $c>1$;

$[c^2; c]$, когда $0<c<1$;

0 или 1, когда соответственно $c=0$ или $c=1$.

Теперь рассмотрим уравнение.

Здесь следует исследовать три случая.

1) $a=b$. Тогда уравнение приобретает вид $|x-a|=0 \Rightarrow x=a$. Оно равносильно неравенству только при $c=0$ или $c=1$. Получаем две тройки чисел $(0;0;0)$, $(1;1;1)$.

2) $a<b$. Изобразим график функции $y=|x-a|+|x-b|$, раскрывая модули (рис.16.1). При $x<a$ функция $y=-2x+(a+b)$. При $a \le x \le b$ функция $y=b-a$. И, наконец, при $x>b$ функция $y=2x-(a+b)$. Очевидно, что при $a^2-b^2<b-a$ уравнение не имеет решений и не равносильно неравенству. При $a^2-b^2>b-a$ уравнение имеет два решения и также не равносильно неравенству. Когда $a^2-b^2=b-a$, решением уравнения является отрезок $[a;b]$. Из условия $a^2-b^2=b-a$ получаем, что $a+b+1=0$. При этом должно выполняться условие $a=c$ или $a=c^2$. Получаем уравнение $c^2+c+1=0$, которое не имеет решений. Следовательно, во втором случае решений нет.

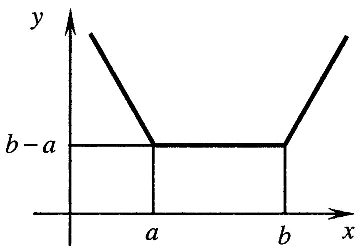


Рис.16.1

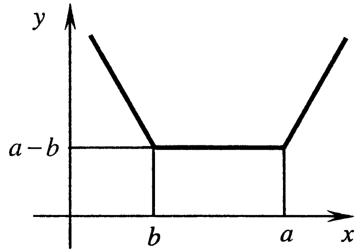


Рис.16.2

3) $a>b$. В этом случае график функции $y=|x-a|+|x-b|$ имеет вид, изображенный на рис.16.2. Проводя рассуждения, аналогичные второму случаю, приходим к уравнению $a+b-1=0 \Rightarrow c^2+c-1=0$. Корни этого уравнения

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad c_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Так как $c_1 \in (0;1)$, то $a = c_1$, $b = c_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Так как $c_2 < 0$, то $a = c_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $b = c_2$.

Ответ: $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

16.1. Найти все x, при которых существуют y и z, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6xz + y^2 - 4yz + 13z^2 - 4 \le 0, \\ |4x + 5y| \le 10. \end{cases}$$

Ответ: $\left[-\frac{5(3+\sqrt{13})}{11}; \frac{5(3+\sqrt{13})}{11}\right]$.

16.2. При каких действительных значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sin(\pi y) = \sin(\pi b), \\ x^2 + y^2 + 2 = \dfrac{(a^2+2)\cdot y}{a} \end{cases}$$

имеет решения для любого значения параметра b?

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{4}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

16.3. При каких действительных значениях параметра a найдутся такие действительные значения параметра b, что при всяком действительном $x \ne 0$

$$\left(x - \frac{b}{x} - a\right)\left(x^2 + (a-6)x + 8 + b\right) \ne 0 \,?$$

Ответ: $\left(3-\sqrt{7}; 3+\sqrt{7}\right)$.

16.4. При каких значениях a найдется такое действительное значение b, что уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x+\frac{\sin(x-b)}{\sin(x+b)+\sin(x-b)}=\cos a+\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+b)+\sin(x-b)}$$

имеет три различных решения, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$? *Ответ*: $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $n\in Z$.

16.5. Найти все значения a, при которых найдется положительное b такое, что среди решений системы:

$$\begin{cases} x^2|y|>4, \\ |x-y|<a, \end{cases}$$

нет ни одной пары $(x;y)$, удовлетворяющей неравенству $xy<b$.

Ответ: $a\le 3$.

16.6. Найти наименьшее значение выражения a^2+b^2, где a и b – значения параметров, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(x-a)^2-5(x-a)(y-b)+2(y-b)^2=0 \\ 2xy=2+|ab| \end{cases}$$

имеет три решения. *Ответ*: 4.

16.7. Найти все значения a и b, для которых существует ровно две различных пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 1-16\left(x^2+b^2+y^2+4a^2b^2\right)+32b(x+2ay)=0, \\ 2a\cdot|x|-|y|\ge 2. \end{cases}$$

Ответ: $a=4$, $b=0$.

16.8. Найти все действительные значения x, для которых существует три положительных числа a, b, c такие, что $c>1$, $ab\le c^6$, $bc^2\le a^3$, $b^3\ge ac^2$, $b^3=c^x a^2$. *Ответ*: $[-2;8]$.

16.9. При каких значениях x для любого y найдется такое z, что

$$\sin(x+y+z)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left|y+\frac{1}{2}\right|+\frac{\left|y-\frac{3}{2}\right|}{2\cos x}\ ?$$

Ответ: $\pi+2\pi k$, где $k\in Z$.

16.10. Найти все значения параметра a, при которых найдется такое b, что система уравнений

$$\begin{cases}(x-a\cdot\cos b)^2+(y-a\cdot\sin b)^2=a^2\sin^2 a,\\(x-a\cdot\sin b)^2+(y+a\cdot\cos b)^2=a^2\cos^2 a,\end{cases}$$

имеет единственное решение. *Ответ*: $a=0$; $a=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in Z$.

16.11. При каких значениях параметров a и b система уравнений

$$\begin{cases}\log_x((a+b)y)=2\\\log_y((a-b-4)x)=\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$$

имеет более одного решения? *Ответ*: $a=3$; $b=-1$.

16.12. Найти все пары $(a;b)$, для каждой из которых найдется такое c, что уравнения

$$|\sin x+a\cos x|=b \text{ и } \sin x\cdot\cos x=c$$

имеют решения и являются равносильными.

Ответ: $a=\pm1$; $0\le b\le\sqrt{2}$.

16.13. Найти, при каких значениях x для любых чисел a,b,c выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$a\ne b^2-\ln b;\quad x-a\ne c^2.$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1+\ln 2}{2}\right)$.

16.14. При каких значениях a для всякого b найдется c, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases}b=\operatorname{tg}(\pi c),\\a\cdot(c^2+1)\le(a^2+1)\cdot c\ ?\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};+\infty\right)$.

16.15. При каких значениях a найдется такое b, что неравенство

$$\frac{a}{b-x^2+3x}>1$$

выполнено для любого x из промежутка $[-2;2]$?

Ответ: $(-\infty;-12{,}25)\cup(12{,}25;+\infty)$.

ГЛАВА 6. ПОСТРОЕНИЯ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Построения на координатной плоскости включают, с одной стороны, алгебраические методы и метод координат, а с другой стороны, признаки и свойства плоских фигур и геометрических мест точек. Задачам, в которых в основном используются алгебраические методы, посвящен §17. Задачи, в которых геометрическое содержание превалирует, рассматриваются в §18.

§17. ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Не редко на экзаменах требуется изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому условию (обычно уравнению или неравенству с двумя неизвестными). Чтобы успешно решать такие задачи, надо знать уравнения прямой и окружности, графики основных элементарных функций, преобразования графиков, в том числе, и преобразования, связанные с модулем. Нужно уметь изображать на координатной плоскости множества решений типовых уравнений и неравенств и, наоборот, составлять уравнения линий, расположенных на координатной плоскости, находить точки пересечения или касания этих линий.

Уравнение $f(x,y)=0$ (или неравенство) с двумя неизвестными определяют на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют этому уравнению (при подстановке координат в уравнение оно превращается в верное числовое равенство). Наоборот, для любого данного множества точек на координатной плоскости можно составить такое уравнение $f(x,y)=0$, которому удовлетворяют все точки из данного множества и только они. Например, уравнения $y=ax+b$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ задают на координатной плоскости прямую и окружность, соответственно. Заметим, что с помощью уравнения можно задавать не только линии, но и области. Например, уравнение $|y|-1+\big||y|-1\big|=0$ задает на координатной плоскости "полосу" $|y|\le 1$.

Рассмотрим два уравнения $f(x,y)=0$ и $g(x,y)=0$, множества решений которых обозначим F и G соответственно. Тогда множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases}$$

представляет собой пересечение множеств $F\cap G$;

– уравнение $f(x,y)\cdot g(x,y)=0$ или, что то же самое, совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y)=0\,, \\ g(x,y)=0\,, \end{array}\right.$$

задает объединение множеств $F\bigcup G$;

– следствие $f(x,y)=0 \Rightarrow g(x,y)=0$ означает, что $F\subset G$ – множество G решений следствия содержит все решения F исходного уравнения;

– равносильность уравнений $f(x,y)=0 \Leftrightarrow g(x,y)=0$ означает совпадение множеств решений $F=G$ (включая случай, когда оба множества пусты).

Для построения множеств решений неравенств обычно используют ***метод областей***, аналогичный методу интервалов. Например, требуется изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $f(x,y)\geq 0$. Сначала изображаем на координатной плоскости ОДЗ неравенства, вычеркивая точки (кривые, области), для которых функция $f(x,y)$ не определена. Затем строим множество решений уравнения $f(x,y)=0$. Как правило, это множество состоит из кривых, которые разбивают ОДЗ неравенства на несколько непересекающихся областей. Выбираем в каждой области "пробную" точку. Подставляем координаты "пробной" точки в исходное неравенство. Если получаем верное числовое неравенство, то область, содержащую эту "пробную" точку, отмечаем как подходящую (например, заштриховываем), в противном случае – отбрасываем. Объединяя подходящие области, получаем множество решений исходного неравенства.

Пример 17.1. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \left(y^2\right)^x \geq 1\,, \\ \left|\dfrac{1}{x}\right|^{-\frac{1}{y}} \leq 2\,. \end{cases}$$

Решение. Найдем ОДЗ неизвестных: $x\neq 0$, $y\neq 0$, и прологарифмируем оба неравенства системы:

$$\begin{cases} 2x\lg|y|\geq 0\,, \\ \dfrac{1}{y}\log_2|x|\leq 1\,, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\lg|y|\geq 0\,, \\ \dfrac{\log_2|x|-y}{y}\leq 0\,. \end{cases}$$

Построим множества решений каждого неравенства системы, а затем найдем их пересечение.

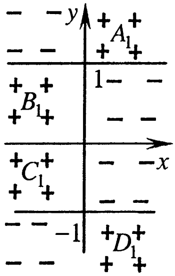


Рис.17.1

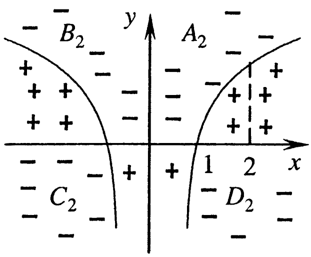


Рис.17.2

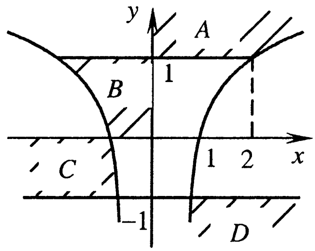


Рис.17.3

Преобразуем первое неравенство $x\lg|y|\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(\lg|y|-\lg 1)\geq 0$ $\Leftrightarrow\; x(|y|-1)\geq 0$. Построим на координатной плоскости две прямые $y=\pm 1$. Эти прямые и координатные оси (см. ОДЗ) разбивают плоскость на 8 областей (рис.17.1). В каждой области выбираем “пробную” точку, координаты которой подставляем в выражение $x(|y|-1)$ и определяем его знак. Например, в области A_1 берем точку $(1;2)$ и для нее получаем $x(|y|-1)=1\cdot(2-1)=1>0$. Следовательно, в области A_1 выражение $x(|y|-1)$ положительно. Отмечаем этот факт, заполняя область A_1 “плюсами”. Последовательно проверяем другие области, заполняя их "плюсами" или "минусами" в соответствии со значениями выражения $x(|y|-1)$. Координаты точек, принадлежащих четырем областям A_1, B_1, C_1 и D_1, удовлетворяют первому неравенству системы.

Рассмотрим второе неравенство системы $\dfrac{\log_2|x|-y}{y}\leq 0$. Построим на координатной плоскости график функции $y=\log_2|x|$. Эти две кривые вместе с координатными осями (см. ОДЗ) разбивают плоскость на 6 областей (рис.17.2). Используя “пробные” точки, заполняем области “плюсами” и “минусами” в соответствии со значениями выражения $\dfrac{\log_2|x|-y}{y}$. Второму неравенству системы удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих областям A_2, B_2, C_2 и D_2 (заполненных “минусами”).

Теперь находим пересечение множества $A_1\cup B_1\cup C_1\cup D_1$ решений первого неравенства с множеством $A_2\cup B_2\cup C_2\cup D_2$ решений второго неравенства системы. Получим 4 области A, B, C и D, заштрихованные на рис.17.3. Причем точки, принадлежащие границам $y=\log_2|x|$ и $y=\pm1$, включаются, а точки, лежащие на осях координат, исключаются.

Ответ: заштрихованное множество на рис. 17.3, включая границы: $x=\pm1$, $y=\log_2|x|$, но исключая координатные оси.

Пример 17.2. Найти длину замкнутой линии, заданной уравнением:

$$\left(1+\sqrt{x+1}\sqrt{|x|-\big||y|-1\big|}\right)\cdot\left(\left(x\cdot|x|-x\right)^2+|x|\cdot xy^2-a^2\left(|x|+x\right)^2\right)=0\,.$$

Решение. Изобразим на координатной плоскости Oxy решения данного уравнения. Сначала найдем область допустимых значений неизвестных:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} |x|\ge\big||y|-1\big|, \\ x\ge-1\,. \end{cases}$$

Первый множитель в левой части уравнения всегда больше нуля. Следовательно, на ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению

$$\left(x\cdot|x|-x\right)^2+|x|\cdot xy^2-a^2\left(|x|+x\right)^2=0\,. \tag{17.1}$$

Рассмотрим три случая.

1. При $x=0$ уравнение (17.1) превращается в тождество, а из ОДЗ получаем, что $y=\pm1$. Следовательно, координаты только двух точек $B(0;1)$ и $C(0;-1)$ удовлетворяют исходному уравнению при $x=0$.

2. При $-1\le x<0$ в уравнении (17.1) раскрываем модуль ($|x|=-x$):

$$\left(x^2+x\right)^2-x^2y^2=0 \quad\Rightarrow$$

$$(x+1)^2-y^2=0 \quad\Rightarrow\quad y=\pm(x+1)\,.$$

Следовательно, исходному уравнению удовлетворяют координаты точек, лежащих при $-1\le x<0$ на прямых $y=\pm(x+1)$, т.е. точки отрезков AB и AC (рис. 17.4), включая точку $A(-1;0)$ и исключая точки B и C.

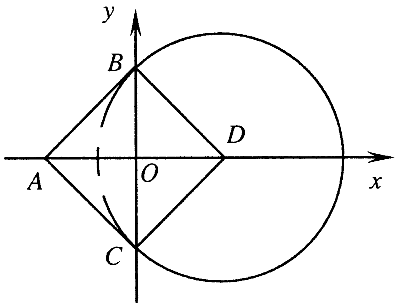


Рис.17.4

3. При $x>0$ (в этом случае $|x|=x$) уравнение (17.1) принимает вид:

$$(x-1)^2+y^2=4a^2\,. \tag{17.2}$$

Это уравнение семейства окружностей радиуса $2|a|$ с центром в точке $D(1;0)$. Причем исходному уравнению удовлетворяют не все точки каждой окружности семейства, а только расположенные в полуплоскости $x > 0$.

Объединяя три случая, заключаем, что решениями данного уравнения являются два отрезка AB и AC, а также дуги окружностей из семейства (17.2). Так как по условию задачи решения уравнения образуют на координатной плоскости замкнутую линию, то окружность из семейства (17.2) должна проходить через точки B и C. Следовательно, радиус окружности равен $\sqrt{2}$, т.е. $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. При этом вся дуга BC в полуплоскости $x \geq 0$ входит в ОДЗ. Осталось вычислить длину замкнутой линии. Дуга BC составляет $\frac{3}{4}$ всей окружности и имеет длину $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$. Вся линия состоит из отрезков AB, AC и дуги BC, сумма длин которых равна $2\sqrt{2}+\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}(4+3\pi)}{2}$.

Пример 17.3. На координатной плоскости изобразить множество точек $M(a;b)$, для которых уравнение $\cos^2 x - a\cos x + b = 0$ имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно 3 различных решения.

Решение. Промежутку $x \in \left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ на тригонометрическом круге (рис.17.5,*а*) соответствует вся дуга единичной окружности, за исключением четвертой четверти. Каждому положительному значению косинуса из промежутка $0 < \cos x \leq 1$, а также наименьшему значению $\cos x = -1$ соответствует одна точка на указанной дуге единичной окружности, т.е. единственное значение аргумента x из промежутка $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. Каждому отрицательному значению косинуса из промежутка $-1 < \cos x \leq 0$ отвечают две точки указанной дуги, а следовательно, два значения x из промежутка $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Обозначим $t = \cos x$, тогда уравнение $\cos^2 x - a\cos x + b = 0$ примет вид $t^2 - at + b = 0$. Пусть t_1 и t_2 – корни этого квадратного трехчлена

$y(t)=t^2-at+b$. Тогда исходное уравнение имеет ровно три различных решения только в следующих трех случаях:

а) если $t_1=-1$ и $-1<t_2\le 0$ (рис.17.5,*а*);

б) если $-1<t_1<0$ и $0<t_2\le 1$ (рис.17.5,*б*);

в) если $t_1=0$ и $0<t_2\le 1$ (рис.17.5,*в*).

Итак, нужно решить три задачи на расположение корней квадратного трехчлена (три задачи на "плавающую" параболу (см. §5)).

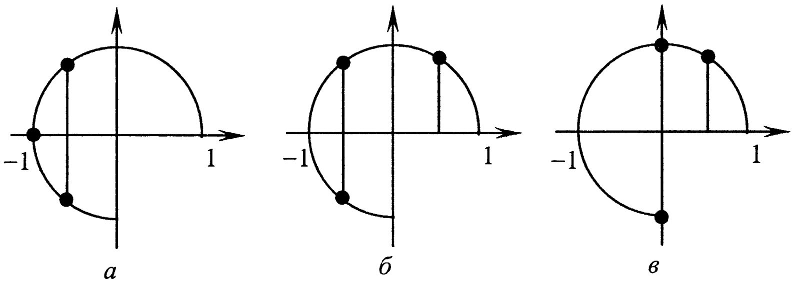


Рис.17.5

Рассмотрим первый случай (**а**). Для того чтобы корни квадратного трехчлена $y(t)=t^2-at+b$ удовлетворяли условиям $t_1=-1$ и $-1<t_2\le 0$ (рис. 17.6,*а*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{cases} y(-1)=0, \\ D>0, \\ y(0)\ge 0, \\ -1<\dfrac{a}{2}<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0, \\ a^2-4b>0, \\ b\ge 0, \\ -2<a<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-1, \\ b<\dfrac{1}{4}a^2, \\ b\ge 0, \\ -2<a<0. \end{cases}$$

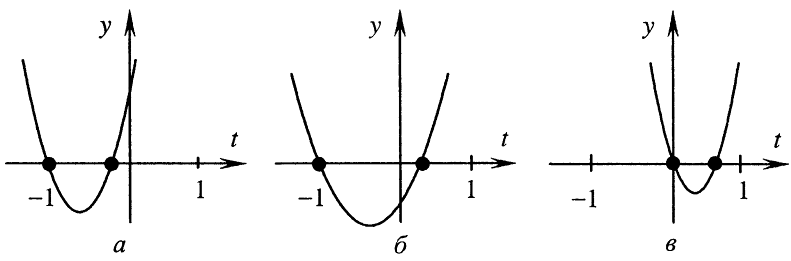


Рис.17.6

Этим условиям удовлетворяют координаты $(a;b)$ всех точек отрезка AD ($A(-1;0)$, $D(-2;1)$) за исключением точки D (рис.17.7).

Рассмотрим второй случай (**б**). Чтобы корни квадратного трехчлена $y(t)=t^2-at+b$ удовлетворяли условиям $-1<t_1<0$ и $0<t_2\le 1$ (рис. 17.6,*б*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} y(-1)>0 \\ y(0)<0 \\ y(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b>0 \\ b<0 \\ 1-a+b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>-a-1, \\ b<0, \\ b\ge a-1. \end{cases}$$

Этим условиям удовлетворяют координаты $(a;b)$ всех точек внутри треугольника ABC ($B(1;0)$, $C(0;-1)$), включая его сторону BC без вершины C (рис.17.7).

Рассмотрим третий случай (**в**). Чтобы корни квадратного трехчлена $y(t)=t^2-at+b$ удовлетворяли условиям $t_1=0$ и $0<t_2\le 1$ (рис.17.6,*в*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)\ge 0 \\ 0<\dfrac{a}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 1-a+b\ge 0 \\ 0<a<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0, \\ 0<a\le 1. \end{cases}$$

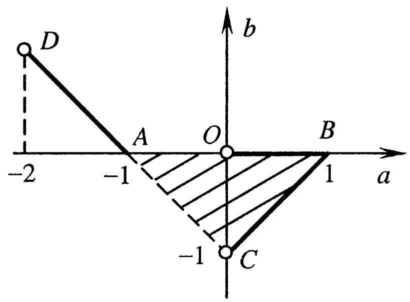


Рис.17.7

Этим условиям удовлетворяют координаты $(a;b)$ всех точек отрезка OB оси абсцисс за исключением начала координат $O(0;0)$ (рис.17.7).

Объединяя найденные в трех случаях множества точек координатной плоскости Oab, получаем ответ.

Ответ: все точки внутри треугольника ABC (рис.17.7), а также отрезки AD, OB, BC, за исключением точек $O(0;0)$, $C(0;-1)$, $D(-2;1)$.

Пример 17.4. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек $M(x;y)$, для каждой из которых найдутся действительные числа α и β такие, что

$$\begin{cases} x\cos^2\alpha + y\sin^2\alpha = 1, \\ x\cos\beta + y\sin\beta = 2. \end{cases}$$

Решение. Параметры α и β входят раздельно в уравнения системы. Для каждого значения α (β) множество решений первого (второго) уравнения представляет собой прямую на плоскости Oxy. Надо найти объединение всех прямых, порождаемых первым уравнением, затем найти объединение всех прямых, порождаемых вторым уравнением, и наконец, построить пересечение этих объединений.

Рассмотрим сначала второе уравнение системы. Вводя вспомогательный угол, приведем уравнение к виду $\sqrt{x^2+y^2}\sin(\beta+\varphi)=2$. Так как синус – ограниченная функция, полученное равенство возможно только при условии $\sqrt{x^2+y^2}\geq 2 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2\geq 4$. Это неравенство задает на координатной плоскости множество точек, лежащих на окружности (радиуса 2 с центром в начале координат) и вне этой окружности.

Рассмотрим первое уравнение. Используя основное тригонометрическое тождество, приведем уравнение к виду

$$x - x\sin^2\alpha + y\sin^2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2\alpha(y-x) = 1-x.$$

Из последнего равенства вытекают два случая:

если $x \neq y$, то $\sin^2\alpha = \dfrac{1-x}{y-x}$,

если $x = y$, то $x = y = 1$.

В первом случае, в силу ограниченности функции $\sin^2\alpha$, должно выполняться двойное неравенство $0 \leq \dfrac{1-x}{y-x} \leq 1$. Построим на координатной плоскости множество решений этого двойного неравенства. Для этого изображаем прямые $x=1$ и $y=1$, которые являются решениями уравнений $\dfrac{1-x}{y-x}=0$, $\dfrac{1-x}{y-x}=1$, а также прямую $y=x$, точки которой не входят в ОДЗ (рис.17.8). Три указанные прямые разбивают координатную плоскость на 6 углов с общей вершиной. Выбирая пробные точки и подставляя их в двойное неравенство, определяем подходящие области (заштрихованы на рис.17.8). Итак, построено объединение множеств решений первого уравнения при всех возможных значениях α.

Осталось найти пересечение. Для этого достаточно из множества, заштрихованного на рис.17.8, удалить точки, лежащие внутри окружности $x^2+y^2=4$.

Ответ: две области, заштрихованные на рис.17.9, включая границы.

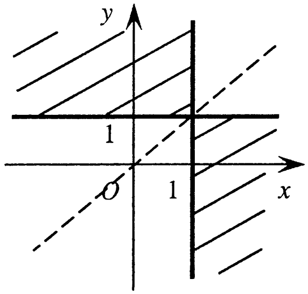


Рис.17.8

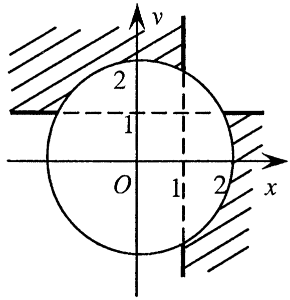
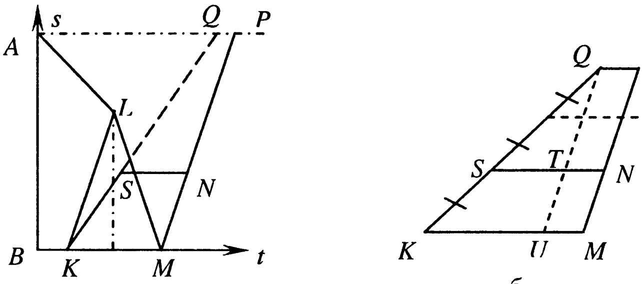


Рис.17.9

В заключение рассмотрим пример, в решении которого применяются алгебраические, геометрические и физические соображения.

Пример 17.5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через некоторое время из пункта B в пункт A выехали одновременно мотоциклист и велосипедист. Через час после начала движения мотоциклист встретил пешехода, затем развернулся и подвез пешехода до пункта B, а потом снова поехал в A. Проехав треть расстояния до A, мотоциклист увидел велосипедиста, который чинил сломавшийся велосипед. Посадив велосипедиста, мотоциклист доставил его в пункт A. Оказалось, что если бы велосипед не сломался, то велосипедист приехал бы в пункт A на полчаса раньше. Сколько времени велосипедист чинил свой велосипед?

Решение. Построим графики движения пешехода, велосипедиста и мо-



а

б

Рис.17.10

тоциклиста на координатной плоскости Bts. За начало координат примем пункт B, на оси абсцисс будем откладывать время (t), а на оси ординат – расстояние (s) от пункта B по дороге к пункту A. Получим картину передвижений, изображенную на рис.17.10,*а*. Здесь $KLMNP$ – путь мотоциклиста (L – место встречи с пешеходом, N – место, где мотоциклист посадил велосипедиста), SN – отрезок времени, в течение которого велосипедист чинил свой велосипед, отрезок KSQ – виртуальный путь велосипедиста, если бы его велосипед не сломался в пункте S. По условию задачи $KM = 2$ часа, $QP = 0{,}5$ часа и $MN = \frac{1}{3}MP$. Таким образом, задача сводится к нахождению отрезка SN (рис.17.10,*б*), параллельного основаниям трапеции $KMPQ$, который делит боковые стороны трапеции в заданном отношении ($1:2$). Проводим прямую QU параллельно PM и, используя подобие треугольников QST и QKU, получаем $ST = \frac{2}{3}KU = \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1$ час. Тогда $SN = ST + TN = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ часа. Таким образом, велосипедист чинил свой велосипед полтора часа.

Ответ: 1,5 часа.

Задачи для самостоятельного решения

17.1. Среди всех точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих уравнению $(y-1)(x-y)^2 = (1-2y)(1-x) + y - 2y^2$, найти наиболее удаленную от оси абсцисс. *Ответ:* (3,5;1,5).

17.2. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x\left(x^2 - 6\cdot|x| + y^2 + 9\right) \le 25x, \\ \left(|y| - 2x - 4\right)\left(3\cdot|y| - 4x - 12\right) \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0;4)$, $(0;-4)$.

17.3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 2\sin z + 4 = 0, \\ y - 2x + 2\cos(\pi - z) + 2 = 0, \\ \log_{z+1}(2x+1) + \log_{z+1}(y+3) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; -2; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in N$.

17.4. На координатной плоскости изобразить множество точек $A(a;b)$, для каждой из которых уравнение $\sin\left(b+\frac{\pi}{6}\sin\left(x^2\right)\right)=a$ имеет действительные решения.

Ответ: "синусоидальная" полоса на плоскости Oba, получающаяся сдвигом графика $a=\sin b$ на $\frac{\pi}{6}$ вдоль оси Ob или в противоположном направлении.

17.5. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют уравнению:

$$(\cos y-\sin y)\cdot\sqrt[3]{3\sin x+\sin 3x}=2.$$

Ответ: на плоскости Oxy решения уравнения образуют периодически повторяющийся (при сдвигах на 2π по горизонтали и вертикали) набор точек $A\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$; $B\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$; $D\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, где $k,n\in Z$.

17.6. На координатной плоскости изобразить множество всех точек $M(a;b)$, для которых уравнение $a^2x^2+\left(a^2+b^2-1\right)x+b^2=0$ имеет действительные решения.

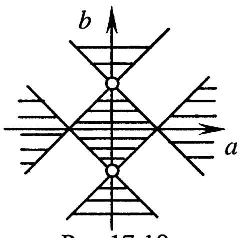


Рис.17.10

Ответ: множество точек, заштрихованное на рис. 17.10, включая прямые: $b=a\pm1$, $b=-a\pm1$, за исключением точек $(0;-1)$ и $(0;1)$.

17.7. При каких значениях параметра a на координатной плоскости существует единственная точка $A(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$2^{\sqrt{x^2+y^2-1}}+x^2+a^2y^2+3=4ay+4x-2axy?$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

17.8. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют при всех $a \in [-1;2]$ неравенству

$$y(y+2a)+a^2(x^2+1) \le 4+2ax(y+a).$$

Ответ: параллелограмм с вершинами $A(1;2)$, $B\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$, $C(1;-2)$, $D\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$, включая его внутренние точки.

17.9. Найти числа a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(a^2(x-1)^2-y+2a\right)\left(y^2-2a(y-1)-ax+a^2\right)=0, \\ xy=b \end{cases}$$

имеет единственное решение. *Ответ*: $a=0{,}25$; $b=2{,}25$.

17.10. Найти положительное значение a, при котором площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy неравенством

$$\left(1+\sqrt{1-a^3x}\right)\left(2y^2+x^2-x|x|-2a^2\right)\le 0,$$

будет наименьшей. *Ответ*: $\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}$.

17.11. На координатной плоскости Oxy изобразить множество всех точек $A(x;y)$, для каждой из которых найдутся два неравных острых угла величиной α и β таких, что

$$\begin{cases} \cos^2\alpha+y=x\sin\alpha, \\ 1+y=\sin\beta(x+\sin\beta). \end{cases}$$

Ответ: криволинейный треугольник BCD с вершинами $B(-2;-2)$, $C(-1;-1)$, $D(0;-1)$, стороны BC и CD которого – есть отрезки, а сторона BD – дуга параболы $y=-1-x^2$.

17.12. При каких значениях x найдутся такие значения y, что наименьшее из трех чисел x, y, $x+y$ не меньше наибольшего из трех чисел $x-2$, $y-1$, $x+y-3$? *Ответ*: $[-1;2]$.

17.13. На координатной плоскости Oxy изобразить множество таких точек $(x; y)$, для каждой из которых выполняется условие: оба корня z_1 и z_2 уравнения

$$z^2 - 2yz + x^2 = 0$$

принадлежат промежутку $[-1;1]$.

Ответ: криволинейный треугольник AOB с вершинами $A(-1;1)$, $O(0;0)$, $B(1;1)$, ограниченный дугой AB параболы $y = 0{,}5(x^2 + 1)$ и отрезками OA и OB (внутренние и граничные точки треугольника включаются, кроме отрезков AO и BO), а также криволинейный треугольник, симметричный треугольнику AOB относительно оси абсцисс.

17.14. На координатной плоскости Oab изобразить множество всех таких пар (a, b), для которых система

$$\begin{cases} a = \sin x \cdot \cos y, \\ b = \cos 2y - \cos 2x, \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: криволинейный треугольник с вершинами $A(-1; 2)$, $B(0; -2)$, $C(1; 2)$ и сторонами: AB и BC – отрезки прямых, AC – дуга параболы $b = 2a^2$.

17.15. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек $A(x; y)$, для каждой из которых существует хотя бы одна пара таких действительных чисел a, b, что $x = \sin a + b$ и $y = b \cdot \sin a$.

Ответ: полоса, симметричная относительно оси ординат, включая ее границы: ломаную $y = -1 - |x|$ и два луча $y = -1 \pm x$ при $|x| \geq 2$, соединенные дугой параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ при $|x| \leq 2$.

17.16. На координатной плоскости Oxy изобразить множество таких точек $(x; y)$, для каждой из которых неравенство

$$\cos 2a \geq 2x \cos a + y$$

выполняется для всех действительных значений a.

Ответ: Область, ограниченная параболой $y = -0{,}5x^2 - 1$ и ломаной $y = 1 - 2 \cdot |x|$.

§18. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Рассмотрим построения на координатной плоскости, использующие планиметрию и метод координат. Решение таких задач, как правило, включает этапы, характерные для геометрических задач на построения, а именно: исследование, построение, доказательство и анализ. При исследовании часто помогают знания о типовых геометрических местах точек таких, например, как окружность, биссектриса, серединный перпендикуляр, парабола и др. При доказательстве и анализе существенную роль играют умение использовать метод двух (или более) геометрических мест точек, понимание преобразований плоскости (гомотетии, подобия, симметрии, поворота, параллельного переноса), а также навыки применения метода координат.

Геометрическим местом точек (*г.м.т.*), обладающих некоторым свойством, называется множество, которое содержит все точки, удовлетворяющие указанному свойству, и не содержит ни одной точки, не обладающей этим свойством.

Перечислим наиболее важные *г.м.т.*

Г.м.т., равноудаленных от данной точки – ***окружность*** с центром в заданной точке.

Г.м.т., равноудаленных от сторон угла – ***биссектриса угла***.

Г.м.т., равноудаленных от концов данного отрезка – ***серединный перпендикуляр*** к данному отрезку.

Г.м.т., из которых данный отрезок виден под заданным углом – ***дуги двух окружностей***, стягиваемые заданным отрезком.

Г.м.т., равноудаленных от данной точки и данной прямой – ***парабола***.

Г.м.т., отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек есть заданное число (отличное от 1) – ***окружность Аполлония***.

Проиллюстрируем примерами последние два г.м.т.

Пример 18.1. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек $M(x, y)$,

а) равноудаленных от точки $A(0; 0{,}25)$ и прямой $y = -0{,}25$;

б) для каждой из которых выполняется равенство $BM : MC = 2$, где $B(4; 0)$, $C(1; 0)$ – заданные точки.

Решение. **а**) Пусть D – проекция точки M на прямую $y = -0{,}25$ (рис.18.1). Запишем равенство $MA = MD$ расстояний в координатной форме:

$$\sqrt{x^2 + (y - 0{,}25)^2} = |y + 0{,}25| \Leftrightarrow x^2 + (y - 0{,}25)^2 = (y + 0{,}25)^2 .$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение $y = x^2$. Следовательно, искомое г.м.т. – парабола.

б) По условию задачи $BM = 2 \cdot MC$ (рис.18.2). Запишем это равенство в координатной форме:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \iff (x-4)^2 + y^2 = 4 \cdot (x-1)^2 + 4y^2 .$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $x^2 + y^2 = 4$, т.е. искомое г.м.т. – это окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

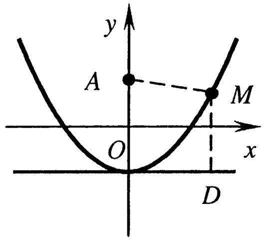


Рис.18.1

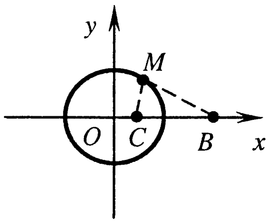


Рис.18.2

При решении геометрических задач на построение часто пользуются ***методом двух геометрических мест***, идея которого состоит в следующем. Для нахождения положения искомой точки выясняют сначала, каким условиям эта точка удовлетворяет. Обычно выделяют два таких условия. Затем строят два г.м.т. для каждого условия в отдельности. Точки, удовлетворяющие обоим условиям, являются точками пересечения этих двух множеств.

Пример 18.2. На координатной плоскости Oxy отмечены точки $A(2;0)$, $B(8;0)$, $D(4;0)$. Изобразить множество точек пересечения биссектрисы CD треугольника ABC с его медианами AM и BN.

Решение. Найдем сначала геометрическое место вершин $C(x;y)$ таких треугольников ABC, в которых отрезок CD является биссектрисой. По свойству биссектрисы $CA : CB = AD : DB = 1 : 2$. Следовательно, координаты точки C должны удовлетворять равенству

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} .$$

Возводя обе части уравнения в квадрат и раскрывая скобки, получаем уравнение окружности $x^2 + y^2 = 16$. Таким образом, точки C принадлежат окружности (Аполлония) радиуса 4 с центром в начале координат, за исключением точек пересечения этой окружности с осью абсцисс (рис.18.3).

Найдем теперь возможные положения точки P пересечения биссектрисы CD и медианы AM (рис.18.4). Проведем прямую DE параллельно

AM. По теореме Фалеса получаем: $DP:DC = \frac{1}{3}BM : \left(CM + \frac{1}{3}BM\right) = 1:4$. Отсюда $DP = \frac{1}{4}DC$. Следовательно, геометрическое место точек P получается в результате гомотетии (с коэффициентом $\frac{1}{4}$ и центром в точке D) геометрического места точек C. Так как при гомотетии окружность преобразуется в окружность, заключаем, что множеством точек пересечения биссектрисы CD и медианы AM является окружность $(x-3)^2 + y^2 = 1$, за исключением точек пересечения этой окружности с осью абсцисс.

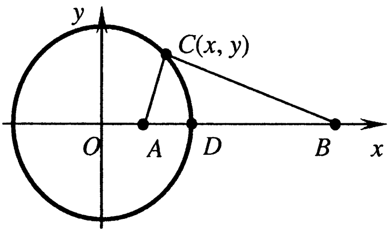


Рис.18.3

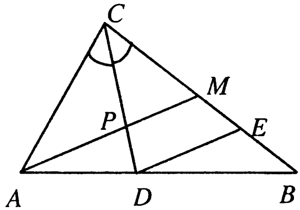


Рис.18.4

Для точек пересечения биссектрисы CD и медианы BN аналогичным образом получаем окружность $(x-2{,}4)^2 + y^2 = 2{,}56$.

Ответ: две окружности $(x-3)^2 + y^2 = 1$ и $(x-2{,}4)^2 + y^2 = 2{,}56$ (за исключением точек пересечения этих окружностей с осью абсцисс).

Пример 18.3. На координатной плоскости Oxy взяты точки $A(-1;0)$, $B(1;0)$ и $C(1;1)$. Найти множество всех таких точек координатной плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от нее до точек A и B в два раза больше суммы квадратов расстояний до точек B и C.

Решение. Пусть $P(x;y)$ – произвольная точка искомого множества. По условию задачи

$$PA^2 + PB^2 = 2\left(PB^2 + PC^2\right).$$

Запишем это условие в координатной форме:

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 2\left[(x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2\right].$$

Упрощая это соотношение, приходим к равенству $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$. Следовательно, искомое множество – это окружность с центром в точке $Q(2;1)$ радиуса $\sqrt{3}$.
Ответ: окружность $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

18.1. На координатной плоскости Oxy отмечены точки $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C(3;0)$. Изобразить на координатной плоскости множество таких точек D, для которых величина угла ADC меньше 30^o, а разность величин углов BDC и ADC больше 60^o.

Ответ: криволинейный четырехугольник $AMBN$, симметричный относительно оси абсцисс, с вершинами $M\left(0;\sqrt{3}\right)$ и $N\left(0;-\sqrt{3}\right)$: сторона AM – меньшая дуга окружности с центром в точке $\left(2;\sqrt{3}\right)$; MB – меньшая дуга окружности с центром в точке $\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

18.2. На координатной плоскости Oxy взяты точки $A(4;0)$ и $B(9;0)$. Найти координаты точки C, принадлежащей прямой $y = x$, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. *Ответ*: $C(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

18.3. Три окружности с центрами в точках A, B, C, попарно касаются (внешним образом) друг друга в точках $S(1;2)$, $P(3;6)$, $Q(7;2)$. Найти координаты точек A, B, C. *Ответ*: $A(0;5)$, $B(9;8)$, $C(4;-7)$.

18.4. На координатной плоскости Oxy две окружности пересекаются в точках A и B. Одна из них проходит через точки $C(0;1)$ и $D(3;0)$, другая – через точки E и F. Известно, что точка A лежит на отрезке DF, а точка B – на отрезке CE. Прямая EF пересекает ось Ox в точке $(-5;0)$. Найти уравнение этой прямой. *Ответ*: $y = \dfrac{-x-5}{3}$.

18.5. На координатной плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют условию: треугольник со сторонами 2, $x - y$, $x + y$ является тупоугольным.

Ответ: сегмент круга $x^2 + y^2 < 2$ при $1 < x < \sqrt{2}$, а также "полоса": $2 - x < |y| < \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$.

18.6. На координатной плоскости Oxy прямые $y = x$ и $y = 1 - 2x$ касаются графика функции $y = x^2 + px + q$ в точках A и B соответственно. Найти значения коэффициентов p, q и абсциссу точки пересечения медиан треугольника BCD, все вершины которого лежат на указанной параболе, а сторона CD параллельна прямой $y = x$.

Ответ: $p = -\dfrac{7}{6}$; $q = \dfrac{169}{144}$.

18.7. На координатной плоскости Oxy расположен треугольник, высота которого принадлежит оси абсцисс, биссектриса лежит на прямой $y = 2x$, а медиана принадлежит прямой $y = kx$. Найти величину углового коэффициента k, если известно, что $k < 0$.

Ответ: $k = -3$.

18.8. На координатной плоскости Oxy взяты точки $A(1;0)$ и $D(-2;0)$. Известно, что AD – биссектриса треугольника ABC, а треугольник DAC подобен треугольнику ABC. Найти все возможные положения вершины B при данных условиях.

Ответ: дуга окружности $(x+2)^2 + y^2 = 9$ при $-5 < x < -0{,}5$.

18.9. На координатной плоскости Oxy взяты точки $A(-1;0)$, $B(0;1)$ и $C(1;-2)$. Изобразить множество всех точек $M(x;y)$, каждая из которых симметрична точке A относительно какой-либо прямой, пересекающей отрезок BC.

Ответ: объединение двух кругов с центрами в точках B и C (с радиусами AB и AC соответственно) без их пересечения.

18.10. На координатной плоскости отмечены точки $A(0;1)$ и $B(0;7)$. Изобразить на плоскости множество таких точек C, для каждой из которых неравенства

$$\angle BAC \geq \angle ABC \geq \angle ACB \geq \angle ADB$$

выполняются для любой точки D на прямой $y = 9$.

Ответ: два симметричных относительно оси ординат криволинейных треугольника, вместе с внутренностью, точки которых лежат внутри объединения двух кругов $(x \pm 4)^2 + (y-4)^2 \leq 25$, но вне круга $x^2 + (y-1)^2 < 36$ и под прямой $y = 4$.

18.11. На координатной плоскости Oxy заданы точки $A(1;0)$, $B(2;0)$, $C(4;0)$. Изобразить множество таких точек D, для которых треугольник ADC является остроугольным, и биссектриса угла A треугольника ADC пересекает среднюю линию треугольника BDC, параллельную стороне BC.

Ответ: точки внутри полосы $1 < x < 4$, но вне круга с диаметром AC и одновременно внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями с центром в точке A и радиусами AB и AC.

18.12. На координатной плоскости Oxy заданы две точки $O(0;0)$ и $A(12;0)$, а также прямоугольник $0 \le x \le 12$, $1 \le y \le 9$. Изобразить множество таких точек B, для каждой из которых точка пересечения медиан и точка пересечения высот треугольника AOB принадлежат заданному прямоугольнику.

Ответ: часть замкнутой области между параболами $y = x(12 - x)$ и $y = \dfrac{x(12 - x)}{9}$, лежащая в полосе $3 \le y \le 27$.

ГЛАВА 7. ПЛАНИМЕТРИЯ

В этой главе рассматриваются экзаменационные задачи повышенной сложности по планиметрии. К ним относятся задачи, в которых приходится проводить довольно длинные вычисления (решая последовательно несколько треугольников или многоугольников), применяя тригонометрию и системы уравнений. Мы обсудим такие задачи, где надо провести строгое доказательство некоторого утверждения или разумное обоснование выбранного способа решения. Известные затруднения на экзаменах вызывают геометрические задачи, в которых фигура или комбинация фигур не является по условию задачи полностью заданной и при решении необходимо рассмотреть несколько вариантов расположения фигур.

В отличие от типовых алгебраических геометрические задачи, как правило, не имеют готового алгоритма решения. Его приходится разрабатывать самим. Важно удачно придумать дополнительное построение, вспомнить геометрические свойства, доказать вспомогательное утверждение и т.п. В этом смысле большинство геометрических задач являются нестандартными.

Надеемся, что общие рекомендации, приводимые в подразделе **"порядок решения геометрических задач"**, помогут при составлении плана решения. В подразделах **"дополнительные построения"** и **"опорные рисунки"** собраны фрагменты, часто встречающиеся в геометрических конфигурациях. Набор нескольких геометрических фигур мы называем ***конфигурацией***. Эти фрагменты наглядно выражают простые свойства и следствия теорем планиметрии. Они помогают при решении задачи. Конечно, главный и совет – больше решать задач. Умение находить правильный и эффективный алгоритм решения приходит с накоплением опыта.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Построение чертежа

Следует начать с построения хорошего чертежа. Постарайтесь учесть все условия задачи. Укажите все заданные величины, равные углы, равные или пропорциональные отрезки. Желательно, чтобы размеры и углы соответствовали данным, а фигуры были похожи на заданные. При этом нужно избегать дополнительных соотношений, которых нет в условии задачи. Например, нельзя рисовать равнобедренный треугольник или квадрат, если речь идет о произвольном треугольнике или параллелограмме. По ходу решения чертеж можно уточнять и менять, делать дополнительные рисунки, изображая отдельно фрагменты основной конфигурации.

Первоначальный анализ данных

Цель следующего этапа – установить, какие фигуры по условию задачи фиксированы (полностью заданы), а какие заданы частично. Геометрическая фигура полностью задана, если по данным условиям ее можно построить единственным образом или одним из некоторого числа способов. Например, треугольник полностью задается тремя сторонами, двумя сторонами и углом между ними, стороной и двумя прилежащими к ней углами. Правда, решение может оказаться не единственным. Например, по заданным двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, можно построить два треугольника. Но для каждого из них можно вычислить все его элементы. В этом случае также будем считать, что треугольник задан (его можно решить, но этих решений может быть несколько). Анализируя, таким образом, все указанные в задаче фигуры, делаем вывод о достаточности данных. Если все геометрические фигуры можно построить, то говорим, что данных достаточно и конфигурация, описанная в задаче, фиксирована (задана). Если данных не хватает для построения хотя бы одной фигуры – говорим, что фигура не фиксирована, т.е. данных недостаточно. Сразу же заметим, что недостаточность данных вовсе не означает, что задачу нельзя решить. Данных не хватает для построения фигур, но для ответа на поставленный в задаче вопрос их вполне достаточно. Например, треугольник нельзя построить (единственным образом) и решить (найти все его элементы), если заданы только его основание и высота. Данных не хватает. Однако площадь треугольника определяется однозначно и находится в одно действие.

Планирование решения

От результатов проведенного анализа зависит дальнейший путь решения. Если данных достаточно для построения (конфигурация фиксирована), то остается только продумать план вычислений – в какой последовательности решать треугольники, чтобы добраться до искомой величины. При решении применяются метрические соотношения (см. [1] приложение 1: §§34, 36, 37, 39, 40): теорема Пифагора, теоремы синусов и косинусов, свойства окружности, серединного перпендикуляра к отрезку или биссектрисы угла, формулы площадей фигур и т.п. Такие задачи рассматриваются в §19.

Если данных недостаточно для построения, то рассчитать все элементы на чертеже, вообще говоря, нельзя. Поэтому надо смотреть, что именно требуется найти по условию задачи. Для вычисления величин углов, отношений длин отрезков или отношений площадей фигур, размеры, как правило, не нужны. Полезны аффинные соотношения: теоремы Фалеса, свойства средней линии, медианы и биссектрисы треугольника, признаки и свойства подобия или гомотетии фигур (см. [1] приложение 1: §§28, 24, 25, 27, 30, 32, 33, 35). При этом в качестве неизвестных удобно выбирать не длины отрезков, а коэффициенты пропорциональности или подобия. Техника решения таких задач рассматривается в §20.

В §21 собраны задачи на комбинации окружностей с другими фигурами. Здесь для решения используются свойства окружности: вписанные и центральные углы, углы между хордами или секущими, свойства касательных, пересекающихся хорд, теорема о касательной и секущей (см. [1] приложение 1: §§15, 16, 17, 18, 19, 20, 31, 32, 36, 37, 38, 40). Здесь приходится привлекать разные методы. Кроме свойств окружности применяются также метрические и аффинные соотношения.

Напомним, что полное решение задачи должно содержать доказательства (обоснования) всех используемых фактов.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Часто для эффективного решения геометрической задачи необходимо сделать на чертеже дополнительные построения. Не легко определить, какие построения нужны. Приходится пробовать разные варианты. Заметим, что, проводя любые дополнительные линии, вы усложняете чертеж. Поэтому беспорядочные дополнительные построения только затрудняют решение. После каждого дополнительного построения нужно критически оценить полученный чертеж. Если решения не видно, то лучше стереть все дополнительные линии, вернуться к исходной конфигурации и попробовать другие варианты.

Цель дополнительных построений – получить на рисунке геометрическую фигуру, либо обладающую известным геометрическим свойством, либо наоборот, зная свойство фигуры, провести линии, демонстрирующие это свойство.

Перечислим некоторые типовые дополнительные построения. Разумеется, их следует делать лишь при наличии определенных предпосылок. В приводимых ниже формулировках предпосылки кратко указаны – это данные точки, линии, фигуры. Каждый из пунктов надо понимать так: *если на чертеже к решаемой задаче имеется данная фигура, то следует сделать соответствующее дополнительное построение.* В некоторых случаях полную формулировку мы опускаем. (Нумерация рисунков в этом подразделе отличается от других, наличием буквы "П" (планиметрия). Дополнительное построение на рисунках выполнено жирными линиями.)

Построения, проявляющие свойства основных *геометрических мест точек* (*г.м.т.*)

Перечислим наиболее важные *г.м.т.*

Г.м.т., равноудаленных от данной точки – **окружность** с центром в заданной точке.

Г.м.т., равноудаленных от сторон угла – **биссектриса угла**.

Г.м.т., равноудаленных от концов данного отрезка – **серединный перпендикуляр** к этому отрезку.

1. *К данным точкам заданной окружности провести радиусы* (рис.П.1). Если на рисунке к решаемой задаче имеется окружность, на которой отмечены какие-либо характерные точки, то полезно провести в эти точки радиусы и отметить их равенство (по определению окружности).
2. *Данную точку серединного перпендикуляра соединить с концами отрезка* (рис.П.2). Если на рисунке к решаемой задаче имеются серединный перпендикуляр к данному отрезку и характерная (для задачи) точка, принадлежащая этому перпендикуляру, то ее надо соединить с концами данного отрезка и отметить равенство расстояний (по свойству серединного перпендикуляра).
3. *Из данной точки на биссектрисе угла, опустить перпендикуляры на его стороны* (рис.П.3).

$OA = OB$

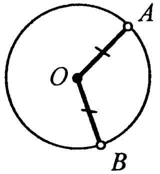


Рис.П.1

$OA = OB$

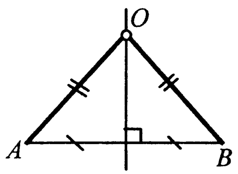


Рис.П.2

$OA = OB$

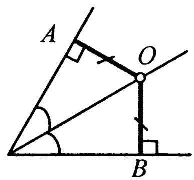


Рис.П.3

4. *Провести диаметр данной окружности, перпендикулярный данной хорде* (рис.П.4).
5. *В данном равнобедренном треугольнике провести высоту* (рис.П.5).
6. *Провести диагонали данного ромба* (рис.П.6). Если на рисунке к решаемой задаче имеется ромб, то нужно провести диагонали, разбивая ромб на 4 равных прямоугольных треугольника.

$AH = BH$

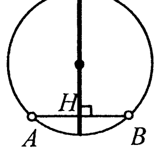


Рис.П.4

$\Delta 1 = \Delta 2$

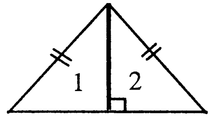


Рис.П.5

$\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = \Delta 4$

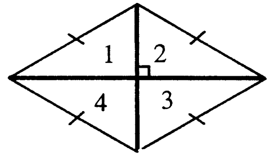


Рис.П.6

Построения, позволяющие использовать свойства касательных

7. *Провести радиус в точку касания* (рис.П.7). Если на рисунке к решаемой задаче имеется окружность и касательная к ней, то следует провести радиус в точку касания и отметить его перпендикулярность к касательной.

8. *Из данной точки вне окружности провести к окружности две касательных* (рис.П.8).

9. *Центр окружности, касающейся сторон данного угла, соединить с его вершиной* (рис.П.9). Получим биссектрису угла.

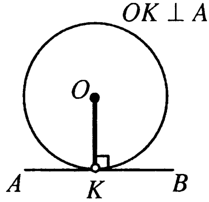


Рис.П.7

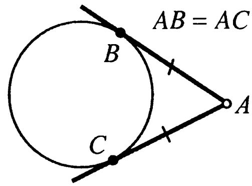


Рис.П.8

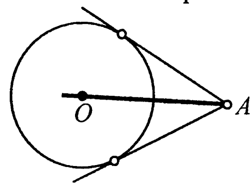


Рис.П.9

10. *Провести общую хорду и линию центров двух данных пересекающихся окружностей* (рис.П.10). Линия центров перпендикулярна общей хорде и делит ее пополам.

11. *Провести линию центров двух данных касающихся окружностей* (рис.П.11). Линия центров проходит через точку касания.

12. *Если прямая касается двух окружностей, то через центр одной окружности надо провести прямую, параллельную общей касательной* (рис.П.12). Параллельные прямые вместе с радиусами (или их продолжениями), проведенными в точку касания, образуют прямоугольник.

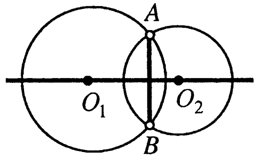


Рис.П.10

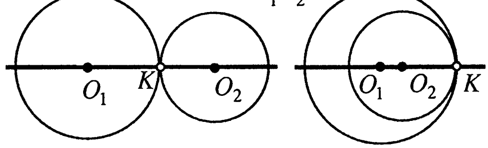


Рис.П.11

Построения дополнительных параллелограммов

13. *Удваивая данную медиану заданного треугольника, достроить его до параллелограмма* (рис.П.13). Если на рисунке к решаемой задаче имеется треугольник, у которого задана медиана, то, продолжая медиану на равное ей расстояние (удваивая медиану), найдем точку, соединяя которую с вершинами треугольника, получаем параллелограмм.

14. *Через вершину данной трапеции провести прямую, параллельную боковой стороне* (рис.П.14). Если на рисунке к решаемой задаче имеется трапеция, у которой известны боковые стороны, то через вершину трапеции надо провести прямую, параллельную боковой стороне и пере-

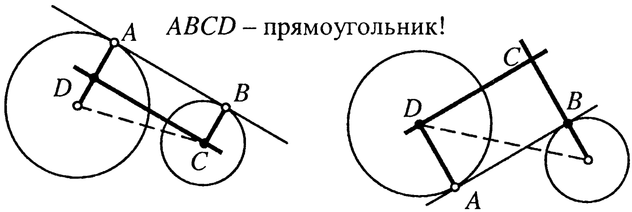


Рис.П.12

секающую основание. Эта прямая разбивает трапецию на параллелограмм и треугольник с двумя известными сторонами.

15. *Через вершину данной трапеции провести прямую, параллельную диагонали* (рис.П.15). Если на рисунке к решаемой задаче имеется трапеция, у которой известны диагонали, то через вершину трапеции надо провести прямую, параллельную диагонали и пересекающую продолжение основания. При этом образуется параллелограмм и треугольник с двумя известными сторонами.

ABDC – параллелограмм!

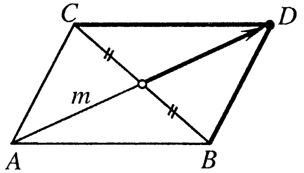


Рис.П.13

ABCD – параллелограмм!

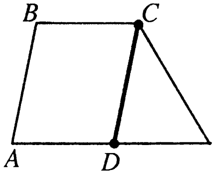


Рис.П.14

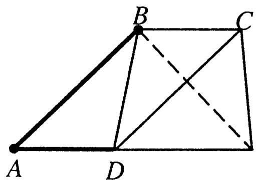


Рис.П.15

16. *Через середину стороны данного треугольника провести прямые, параллельные двум противолежащим сторонам* (рис.П.16).

17. *Соединить середины сторон данного четырехугольника* (рис.П.17). При этом образуется параллелограмм, стороны которого соответственно параллельны диагоналям данного четырехугольника.

$ABCD$ – параллелограмм!

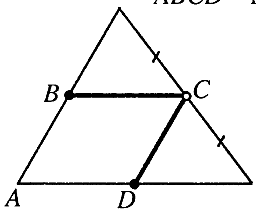


Рис.П.16

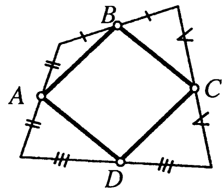


Рис.П.17

Построение дополнительных треугольников

18. *Продлить боковые стороны трапеции до пересечения* (рис.П.18).

19. *Через вершину трапеции и середину боковой стороны провести прямую, пересекающую продолжение основания* (рис.П.19). При этом средняя линия трапеции окажется средней линией построенного треугольника.

20. *Из вершин одного основания трапеции опустить перпендикуляры на другое основание или его продолжение* (рис.П.20).

21. *Параллельно основанию данного треугольника провести прямую, пересекающую его стороны* (рис.П.21). Получим треугольник подобный данному.

22. *Через вершину данного треугольника провести прямую, параллельную его биссектрисе* (рис.П.22). Получим равнобедренный треугольник.

23. *Через каждую вершину треугольника провести прямую, параллельную противоположной стороне* (рис.П.23). Получим треугольник, подобный данному (коэффициент подобия равен 2).

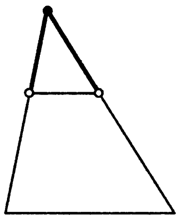


Рис.П.18

$\Delta 1 = \Delta 2$!

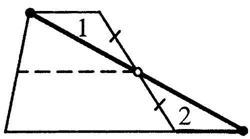


Рис.П.19

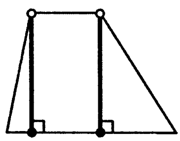


Рис.П.20

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ ΔACD – равнобедренный! $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

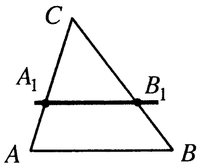


Рис.П.21

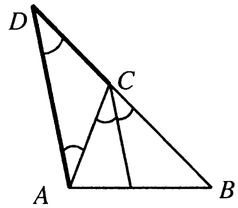


Рис.П.22

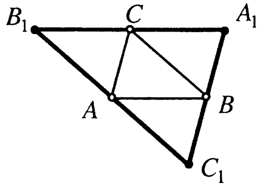


Рис.П.23

Построение дополнительных окружностей

24. *Вокруг данного прямоугольного треугольника описать окружность* (рис.П.24). Гипотенуза является диаметром построенной окружности.

25. *Если данный отрезок виден из двух точек под равными углами, то через эти точки и концы отрезка провести окружность* (рис.П.25).

26. *Если сумма углов, под которыми данный отрезок виден из двух данных точек, равна* 180^o*, то через эти точки и концы отрезка провести окружность* (рис.П.26). В частности, если на рисунке имеются два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, то на этой гипотенузе как на диаметре следует построить окружность. Она пройдет также и через не совпадающие вершины треугольников (рис.П.25 и рис.П.26 при условии $\angle 1 = \angle 2 = 90^o$.

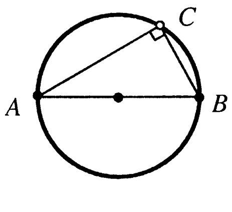


Рис.П.24

$\angle 1 = \angle 2$

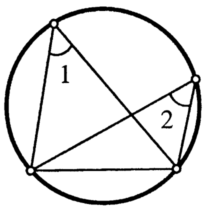


Рис.П.25

$\angle 1 + \angle 2 = 180^o$

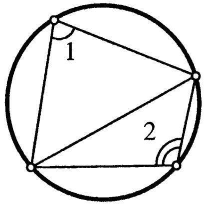


Рис.П.26

ОПОРНЫЕ РИСУНКИ

Сложные геометрические конфигурации надо разбивать на простые фрагменты, обладающие известными свойствами. Например, следует выделять равные или подобные треугольники, прямоугольные и равнобедренные треугольники с двумя известными элементами и т.п. Если полностью заданных фигур нет, то следует обратить внимание на такие их фрагменты, как биссектрисы, медианы, пары перпендикулярных или параллельных прямых. Возможно, осталось найти незамеченное ранее свойство, и задача решиться. Полезно запомнить и использовать для решения задач следующие (см. рис.П.27-П.38) фрагменты (опорные рисунки). По мере накопления опыта этот набор следует расширять самостоятельно.

Простые свойства биссектрис

1. *Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны* (рис.П.27).

2. *Биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых, взаимно перпендикулярны* (рис.П.28).

3. *Биссектриса внутреннего угла параллелограмма или трапеции отсекает равнобедренный треугольник* (рис.П.29).

4. *Если данная окружность касается боковой стороны и оснований трапеции (трех сторон параллелограмма), то боковая сторона является гипотенузой прямоугольного треугольника с вершиной в центре данной окружности* (рис.П.30).

$\angle AOB = 90^o$

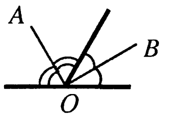


Рис.П.27

$\angle AOB = 90^o$

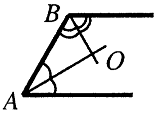


Рис.П.28

$AB = BC$

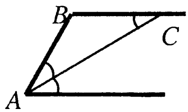


Рис.П.29

$\angle AOB = 90^o$

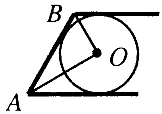


Рис.П.30

Треугольник с одним заданным углом

Пусть в треугольнике ABC задана величина угла A, высоты пересекаются в точке H, биссектрисы пересекаются в точке Q, точка O – центр описанной окружности. Тогда сторона BC видна:

5. *из точки H пересечения высот под углом* $\angle BHC = 180^o - A$ (рис.П.31);

6. *из точки Q пересечения биссектрис (т.е. из центра вписанной в треугольник окружности) под углом* $\angle BQC = 90^o + \dfrac{A}{2}$ (рис.П.32);

7. *из точки O центра описанной окружности (т.е. точки пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника) под углом* $\angle BOC = 2 \cdot A$ (рис.П.33).

$\angle BHC = 180^o - A$

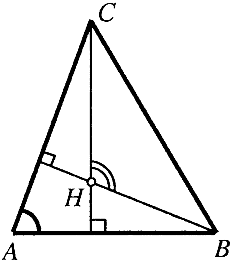


Рис.П.31

$\angle BQC = 90^o + \dfrac{A}{2}$

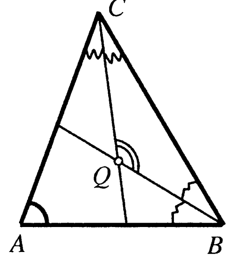


Рис.П.32

$\angle BOC = 2 \cdot A$

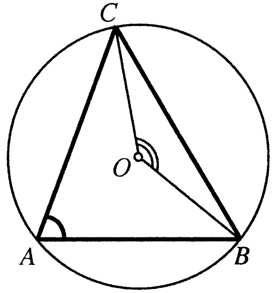


Рис.П.33

Свойства хорд и дуг, заключенных между секущими

8. *Параллельные секущие высекают на окружности пару равных дуг* (рис.П.34).

9. *Хорды, заключенные между параллельными секущими, равны* (рис.П.35).

10. *Две секущие образуют с хордами, заключенными между ними, равные углы* (рис.П.36).

$\cup AB = \cup CD$

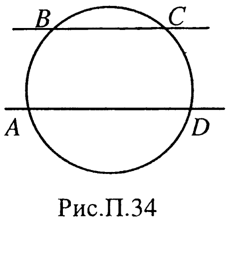


Рис.П.34

$AB = CD$

$AC = BD$

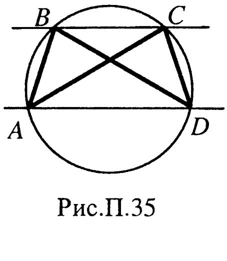


Рис.П.35

$\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$

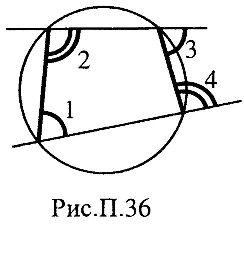
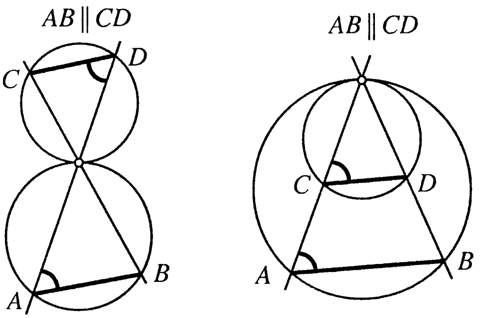


Рис.П.36

11. *Если две секущие проходят через точку касания двух окружностей, то хорды, заключенные между секущими, параллельны.* При этом касание окружностей может быть внешним (рис.П.37,*а*) или внутренним (рис.П.37,*б*).

12. *Если две секущие соответственно проходят через общие точки двух пересекающихся окружностей, то не совпадающие хорды, заключенные между секущими, параллельны* (рис.П.38).



а *б*

Рис.П.37

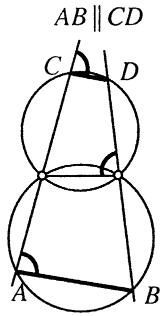


Рис.П.38

Доказательство указанных свойств опорных рисунков рекомендуем в качестве полезного упражнения.

Основные понятия, теоремы и формулы планиметрии приведены в приложении 1 в [1]. В §19 и §20 рассматривается применение метрических и аффинных соотношений. Использование свойств окружностей, вписанных и описанных фигур, изучается в §21. Геометрические задачи на максимум и минимум собраны в главе 9. Применение векторов и метода координат рассматривается в главе 10.

§19. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Здесь собраны задачи, в которых данных хватает для построения фигур. В такой конфигурации можно, в принципе, найти все ее измеряемые элементы, сводя задачу к решению нескольких треугольников. Под ***решением треугольника*** (***многоугольника***) обычно понимается нахождение всех его измеряемых элементов – длин сторон, величин углов. Конечно, надо искать не все элементы, а только те, что требуется.

Обычно решение треугольников сводится к следующему. Приняв искомые величины за неизвестные, составить систему уравнений, используя стандартные метрические соотношения. Решить эту систему и выполнить проверку. Может оказаться, что не каждое полученное алгебраическое решение системы имеет геометрический смысл. Например, длины сторон треугольника должны быть положительными величинами и удовлетворять неравенству треугольника. Решения, не имеющие геометрического смысла, надо отбросить.

ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Свойства углов треугольника и многоугольника.

Сумма углов треугольника равна 180^o.

Сумма углов четырехугольника равна 360^o.

Сумма углов выпуклого n *-угольника равна* $180^o(n-2)$.

Неравенство треугольника. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

Теорема Пифагора. *В любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:* $a^2+b^2=c^2$.

Справедливо и обратное утверждение: *если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный.*

Метрическое свойство параллелограмма. *Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон:*

$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2 \text{ (рис.19.1).}$$

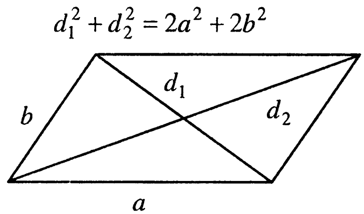


Рис.19.1

Теорема синусов. *В любом треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема косинусов. *В любом треугольнике справедливо равенство*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

Любой треугольник можно задать однозначно, указав три его элемента, например, три стороны, или две стороны и угол между ними, или сторону и два прилежащих угла и т.п. Нахождение остальных элементов треугольника по трем заданным называется ***решением треугольника***. Теоремы синусов и косинусов – основной инструмент для решения треугольников.

Формулы площади треугольника. В формулах используются стандартные обозначения элементов треугольника (§2 приложения 1 в [1]). *Площадь треугольника равна*

$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ *– половине произведения основания на высоту;*

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ *– половине произведения двух его сторон на синус угла между ними;*

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, *где* $p = \frac{a+b+c}{2}$ *– полупериметр (**формула Герона**);*

$S = pr$ *– произведению полупериметра на радиус вписанной окружности;*

$S = \frac{abc}{4R}$, *где* R *– радиус описанной окружности;*

$S = \frac{b+c-a}{2}r_a$, *где* r_a *– радиус вневписанной окружности, касающейся стороны* a *и продолжений двух других сторон треугольника.*

Формулы площадей четырехугольников. В формулах используются обозначения, указанные на рис.19.2.

*Площадь **квадрата** равна квадрату его стороны:* $S = a^2$.

*Площадь **прямоугольника** равна произведению двух его смежных сторон:* $S = ab$.

*Площадь **ромба** равна половине произведения его диагоналей:* $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$.

*Площадь **параллелограмма** равна:*

– *произведению основания на высоту:* $S = ah$;

– *произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними:*

$$S = ab\sin\alpha .$$

*Площадь **трапеции** равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту:*

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

*Площадь произвольного **четырехугольника** равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:* $S = \dfrac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi$.

Площадь S *произвольного **четырехугольника** со сторонами* a, b, c, d *находится по формуле*

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}, \qquad (19.1)$$

где A *и* C *– величины противоположных углов четырехугольника, а* $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ *– его полупериметр.*

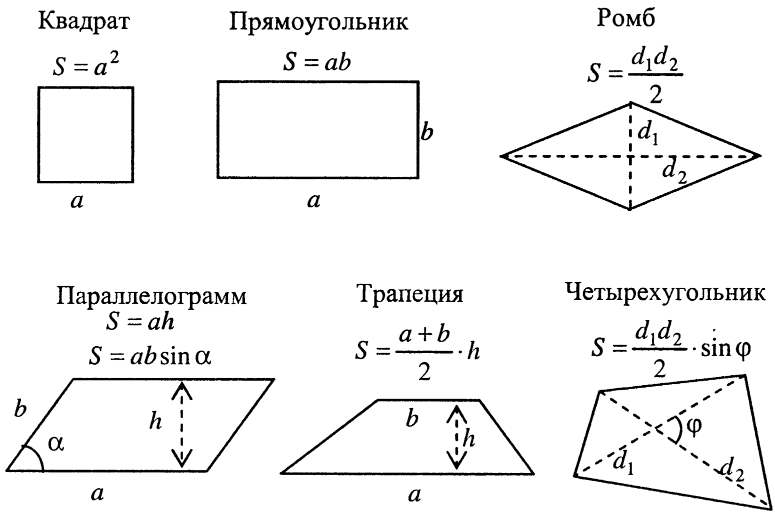


Рис.19.2

Заметим, что на экзамене абитуриенты могут использовать любые формулы и теоремы (не входящие в школьную программу) при условии, что они могут их доказать. Поэтому приведем вывод формулы (19.1). Он может служить примером алгебраического метода решения геометрической задачи.

Пусть стороны четырехугольника $ABCD$ обозначены как на рис.19.3. Тогда площадь S четырехугольника можно вычислить как сумму площадей двух треугольников: $S=\dfrac{ab}{2}\sin A+\dfrac{cd}{2}\sin C$. По теореме косинусов имеем

$$a^2+b^2-2ab\cos A=BD^2=c^2+d^2-2cd\cos C.$$

Преобразуем полученные соотношения к виду

$$4S=2ab\sin A+2cd\sin C,$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos A-2cd\cos C.$$

Сложим эти равенства, предварительно возведя каждое в квадрат:

$$16S^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(A+C).$$

Выделим в правой части полный квадрат

$$16S^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=4(ab+cd)^2-8abcd(1+\cos(A+C)).$$

Учитывая тождества

$$1+\cos(A+C)=2\cos^2\frac{A+C}{2};$$

$$4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ – полупериметр четырехугольника, получаем

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

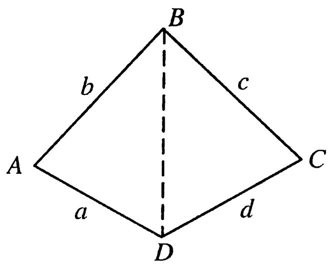


Рис.19.3

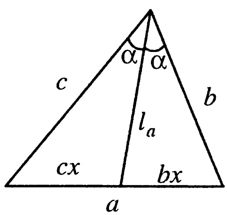


Рис.19.4

Пример 19.1. Даны стороны треугольника. Найти его медианы, биссектрисы и высоты.

Решение. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Найдем длины медианы m_a и биссектрисы l_a, а также высоту h_a (все отрезки проведены к стороне a).

Достроим треугольник до параллелограмма (рис.П.13) и воспользуемся его метрическим свойством: $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$. Отсюда получаем

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Медиана найдена.

Высоту треугольника будем искать по его площади. По формуле Герона имеем $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. С дугой стороны, та же площадь вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}ah_a$. Приравнивая эти выражения, получаем равенство $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}ah_a$. Отсюда

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Найдем биссектрису. Отрезки, на которые биссектриса разбивает сторону a, обозначим cx и bx, учитывая свойство биссектрисы, а величину угла, противолежащего стороне a, обозначим через 2α (рис.19.4). Таким образом, имеется 3 неизвестные: α, x и l_a. Составим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} a = bx + cx, \\ b^2x^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a\cos\alpha, \\ c^2x^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a\cos\alpha. \end{cases}$$

Два последних уравнения записаны по теореме косинусов для двух треугольников, на которые биссектриса разбивает данный треугольник. Из этих уравнений исключим $\cos\alpha$: второе уравнение умножим на c и вычтем из него третье уравнение, умноженное на b:

$$b^2cx^2 - bc^2x^2 = b^2c + l_a^2c - bc^2 - l_a^2b.$$

Подставим сюда из первого уравнения $x = \frac{a}{b+c}$ и упростим полученное равенство (считая, что $b \neq c$):

$$\frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2} = bc(b-c) - l_a^2(b-c) \Rightarrow l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow l_a^2 = \frac{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2}.$$

Раскладывая в числителе дроби разность квадратов и выражая множители через полупериметр ($a+b+c=2p$, $b+c-a=2p-2a$), получаем

$$l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

Заметим, что эта формула остается справедливой и в случае $b=c$. Если треугольник равнобедренный, все три формулы для m_a , h_a и l_a дают, разумеется, один и тот же результат.

Ответ: $m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$; $\quad l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$;

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

19.1. Найти площадь равнобедренного треугольника ABC , если известно, что биссектриса BL имеет длину 1 см, а треугольник BLC – равнобедренный. *Ответ*: 1 см^2; $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}$ см^2; $\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{7}$ см^2.

19.2. Найти площадь треугольника ABC , если известно, что медиана BM равна 1 см, $\angle CBM=30^o$, и треугольник BMC – равнобедренный.

Ответ: 0,5 см^2; $0{,}5\sqrt{3}$ см^2; $\frac{\sqrt{3}}{6}$ см^2.

19.3. Высота BH и серединный перпендикуляр к стороне BC делят сторону AC треугольника ABC на отрезки 4 см, 3 см, 5 см, считая от вершины A . Найти площадь треугольника. *Ответ*: 24 см^2; $6\sqrt{55}$ см^2.

19.4. Точка пересечения высот треугольника ABC лежит на его средней линии, параллельной стороне AB . Найти величину угла C треугольника, если известно, что угол B на 30° больше угла A . *Ответ*: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

19.5. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $\angle ADC=30^o$, $AD=2$ см, а прямая, проходящая через вершину C и середину стороны AB , отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник. *Ответ*: 4 см^2; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^2; $4\sqrt{3}$ см^2.

19.6. Стороны параллелограмма равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей равна 4 см. Биссектрисы острых углов параллелограмма разбивают его на три фигуры. Найти площади этих фигур.

Ответ: 3,6 см^2; 3,6 см^2, 4,8 см^2.

19.7. Точка пересечения диагоналей трапеции удалена от ее оснований на 1 см и 4 см, а от боковых сторон – на 2 см и на 3 см. Найти периметр трапеции, если ее площадь равна 50 см^2. *Ответ*: $\frac{100}{3}$ см.

19.8. Каждое из расстояний от точки пересечения диагоналей трапеции до четырех ее сторон равно либо 1 см, либо 2 см. Найти возможные значения площади трапеции. *Ответ*: $1{,}8\sqrt{15}$ см^2; $9\sqrt{3}$ см^2.

19.9. Точка M пересечения медиан треугольника ABC удалена от сторон угла ABC на 1 см и 2 см. Найти возможные значения площади треугольника, если $AM = 4$ см. *Ответ*: $2{,}4\sqrt{15}$ см^2; $6\sqrt{3}$ см^2.

19.10. Каждая из диагоналей трапеции является биссектрисой одного из ее углов. Высота трапеции равна 10 см, а угол между ее диагоналями равен 80^o. Найти площадь трапеции.

Ответ: $100\cdot\text{ctg}\,40^o$ см^2; $100\cdot\text{ctg}\,50^o$ см^2.

19.11. Точка пересечения диагоналей трапеции равноудалена от трех ее сторон. Площадь трапеции равна 100 см^2, а угол между диагоналями равен 82^o. Найти высоту трапеции.

Ответ: $10\sqrt{\text{tg}\,41^o}$ см; $10\sqrt{\text{tg}\,49^o}$ см.

19.12. В прямоугольной трапеции $ABCD$ на основании AB взята точка E так, что отрезок CE и диагональ AC делят тупой угол C трапеции на три равные части. Найти площадь трапеции $ABCD$, если ее высота равна 1 см, а треугольник ABC – равнобедренный.

Ответ: 1,5 см^2; $0{,}5\cdot\text{ctg}\,18°$ см^2.

19.13. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной $2\sqrt{3}$ см. Фигура Φ образована точками шестиугольника, сумма расстояний от каждой из которых до прямых AD и BE не больше 3 см, а модуль разности этих расстояний не меньше 1 см. Найти площадь фигуры Φ.

Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2.

§20. АФФИННЫЕ СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Аффинные преобразования отображают прямые в прямые, сохраняя при этом отношения длин отрезков на прямых. Частными случаями аффинных преобразований являются гомотетия, растяжение, подобие, а также все движения. В аффинной геометрии изучаются такие свойства фигур, которые сохраняются при аффинных преобразованиях. Задачи, в которых используются аффинные свойства фигур, вызывают определенные затруднения у школьников. Вычислять длины отрезков и величины углов при решении аффинных задач, как правило, не нужно. Полезно искать отношения длин отрезков, площадей фигур и т. п. в условиях неопределенной конфигурации, когда данных не хватает для построения рассматриваемых фигур. Техника решения таких задач опирается главным образом на теорему Фалеса, ее следствия, а также на свойства подобных фигур. Основные аффинные соотношения приводятся ниже.

ОСНОВНЫЕ АФФИННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Теорема Фалеса. *Если на одной стороне угла отложить равные между собой отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые разделят другую сторону угла на равные между собой отрезки* (рис.20.1).

$$\begin{cases} A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \\ AA_1 = A_1A = A_2A_3 \end{cases} \Downarrow \quad AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$$

$$\begin{cases} AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 \\ AA_1 = A_1A = A_2A_3 \end{cases} \Downarrow \quad A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$$

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \quad \Downarrow \quad \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}$$

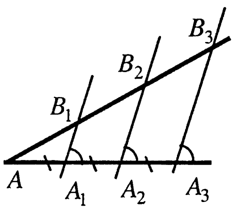


Рис.20.1

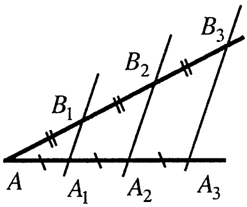


Рис.20.2

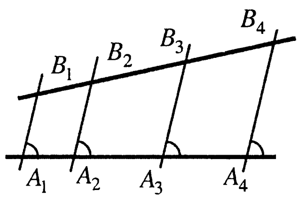


Рис.20.3

Обратная теорема. *Если на каждой стороне угла отложить от его вершины равные отрезки, то прямые, проходящие через концы соответствующих отрезков, будут параллельны* (рис.20.2).

Теорема Фалеса (обобщенная). *Любые две прямые делятся параллельными прямыми на пропорциональные отрезки* (рис.20.3).

Свойства средней линии треугольника. *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине* (рис.20.4).

Свойства медиан треугольника. *Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении* $2:1$, *считая от вершины* (рис.20.5).

Свойство биссектрисы треугольника. *Биссектриса треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам* (рис.20.6).

$$MN \parallel AB, \quad MN = \frac{1}{2}AB$$

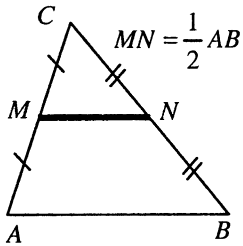


Рис.20.4

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$$

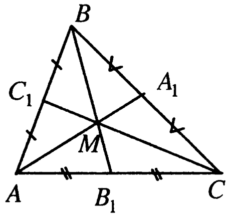


Рис.20.5

$$\angle ACL = \angle BCL \Rightarrow \frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$$

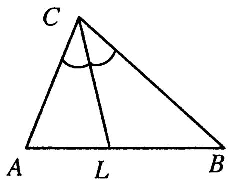


Рис.20.6

Свойство средней линии трапеции. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме* (рис.20.7). Заметим, что *любой отрезок, соединяющий основания трапеции, средняя линия делит пополам.*

Теорема о четырех точках. *Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой* (рис.20.8).

Признак параллельности двух сторон четырехугольника. *Если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то стороны четырехугольника, не соединенные отрезком, параллельны.*

$AB \parallel MN \parallel CD$

$MN = \dfrac{AB + CD}{2}$ – средняя линия трапеции

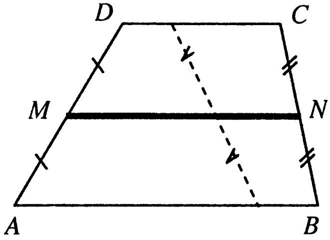


Рис.20.7

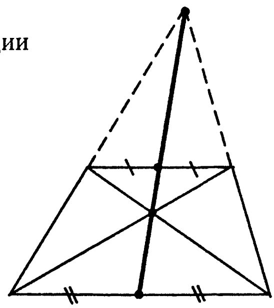
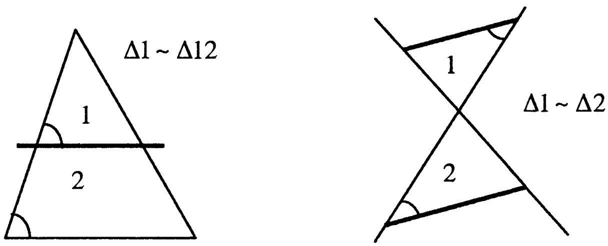


Рис.20.8

Три опорных случая подобия треугольников

1. *Прямая, параллельная основанию данного треугольника, отсекает от него подобный треугольник* (рис.20.9,*а*). Справедливо и более общее утверждение: *треугольники, образованные двумя пересекающимися прямыми и заключенными между ними параллельными отрезками, подобны* (рис.20.9,*б*).



а *б*

Рис.20.9

2. *Прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный треугольник* (рис.20.10,*а*). *Коэффициент подобия равен косинусу общего угла*. Аналогичный вывод справедлив и для тупоугольного треугольника (рис.20.10,*б*).

3. *Высоты параллелограмма, проведенные из одной вершины, служат сторонами треугольника, который подобен соответствующей половине параллелограмма* (рис.20.11,*а,б*). *Коэффициент подобия равен синусу угла параллелограмма.*

$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$

$k = |\cos B|$

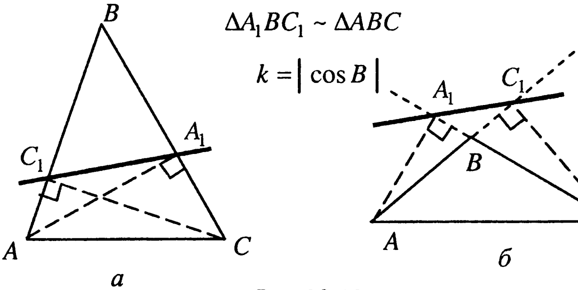


Рис.20.10

$\Delta BMN \sim \Delta ABD$ $\qquad k = \sin A \qquad$ $\Delta AMN \sim \Delta BAC$

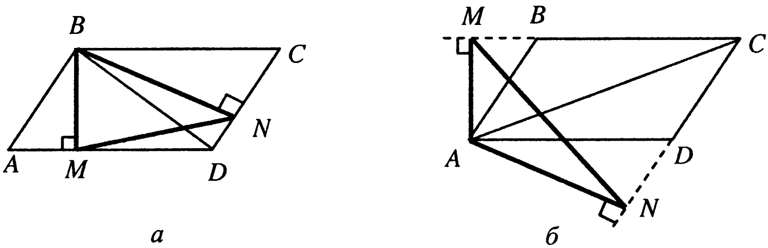


Рис.20.11

Сравнение площадей фигур

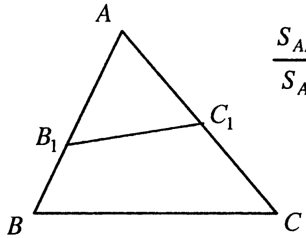
Для сравнения площадей обычно находят их отношение, используя следующие свойства:

1) *площади треугольников, имеющих равные высоты (основания), относятся как основания (высоты);*

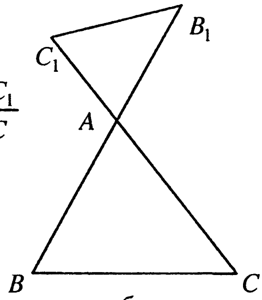
2) *площади треугольников, имеющих равные углы, относятся как произведения сторон, заключающих равные углы* (рис.20.12,*а*,*б*);

3) *площадь треугольника не изменится, если его вершину передвигать параллельно основанию;*

4) *отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*



$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$$

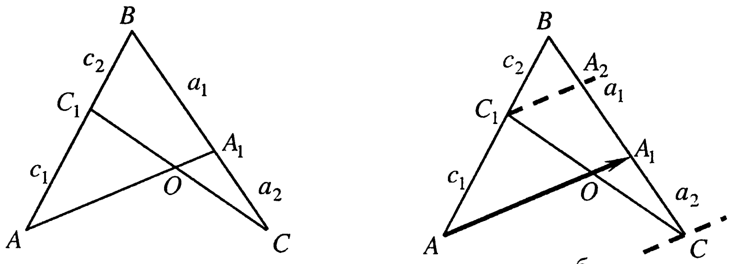


а *б*

Рис.20.12

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ФАЛЕСА

Расчет отношений длин отрезков по теореме Фалеса покажем на следующем примере. Пусть на сторонах угла ABC отложены отрезки $AC_1 = c_1$, $C_1B = c_2$, $BA_1 = a_1$, $A_1C = a_2$ (рис. 20.13,*а*). Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Требуется найти отношение $CO : OC_1$.



а *б*

Рис.20.13

Для решения задачи сделаем дополнительное построение.

1) *Определяем на чертеже* ***секущую***. Так (условно) называем прямую, которая делит отрезок на искомые части. В рассматриваемом случае прямая AA_1 является секущей: она делит отрезок CC_1 на два отрезка, отношение длин которых требуется найти. Выделим на рис.20.13,*б* секущую полужирной стрелкой.

2) *Проводим прямые, параллельные секущей.* Прямые проводятся через все характерные точки. На рис.20.13,*б* эти прямые изображены штриховыми

линиями. Заметим, что достаточно было провести одну прямую C_1A_2, параллельную AA_1. Теперь по теореме Фалеса для угла ABA_1 имеем $\frac{A_1A_2}{a_1}=\frac{c_1}{c_1+c_2}$. Следовательно, $A_1A_2=\frac{a_1c_1}{c_1+c_2}$. Применяя теорему Фалеса для угла A_2CC_1, находим искомое отношение

$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{a_2}{A_1A_2}=\frac{a_2(c_1+c_2)}{a_1c_1}.$$

Следует заметить, что решение задачи не меняется, если на сторонах угла ABC заданы не длины отрезков, а только их отношения: $AC_1:C_1B=c_1:c_2$ и $BA_1:A_1C=a_1:a_2$. В этом случае на чертеже нужно обозначить длины отрезков $AC_1=c_1t$, $C_1B=c_2t$, $BA_1=a_1s$, $A_1C=a_2s$, где t и s – неизвестные коэффициенты пропорциональности. Эти коэффициенты участвуют в промежуточных выкладках, а в ответе исчезают (сокращаются).

Применим этот метод для доказательства теорем Менелая и Чевы.

Теорема Чевы. *Если на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что три прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доказательство. Пусть O – точка пересечения трех прямых (рис.20.14,*а*). Выразим отношение отрезков $CO:OC_1$ двумя способами. Найдем, в каком отношении делится отрезок CC_1 прямой AA_1, а затем – прямой BB_1. Полученные результаты приравняем.

Взяв в качестве секущей AA_1, проведем параллельную прямую C_1A_2 (рис.20.14,*б*). Применяя терему Фалеса, имеем

для угла C_1CA_2: $\frac{C_1O}{OC}=\frac{A_1A_2}{A_1C}$;

для угла A_1AB: $\frac{A_1A_2}{BA_1}=\frac{AC_1}{AB}$, т.е. $A_1A_2=\frac{AC_1\cdot BA_1}{AB}$.

Подставляя A_1A_2 в первую пропорцию, получаем $\frac{C_1O}{OC}=\frac{AC_1\cdot BA_1}{A_1C\cdot AB}$.

Теперь выберем секущую BB_1. Проведем прямую C_1B_2, параллельную секущей (рис.20.14,*в*). Применяя теорему Фалеса, имеем для угла C_1CB_2: $\dfrac{C_1O}{OC}=\dfrac{B_1B_2}{CB_1}$;

для угла B_1AB: $\dfrac{B_1B_2}{B_1A}=\dfrac{C_1B}{AB}$, т.е. $B_1B_2=\dfrac{B_1A\cdot C_1B}{AB}$.

Подставляя B_1B_2 в пропорцию $\dfrac{C_1O}{OC}=\dfrac{B_1B_2}{CB_1}$, получаем $\dfrac{C_1O}{OC}=\dfrac{B_1A\cdot C_1B}{CB_1\cdot AB}$.

Наконец, приравнивая полученные отношения, имеем

$$\frac{C_1O}{OC}=\frac{AC_1\cdot BA_1}{A_1C\cdot AB}=\frac{B_1A\cdot C_1B}{CB_1\cdot AB}.$$

Умножая обе части последнего равенства на AB, получаем

$$\frac{AC_1\cdot BA_1}{A_1C}=\frac{B_1A\cdot C_1B}{CB_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{C_1B\cdot A_1C\cdot B_1A}=1,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что обратная теорема тоже верна.

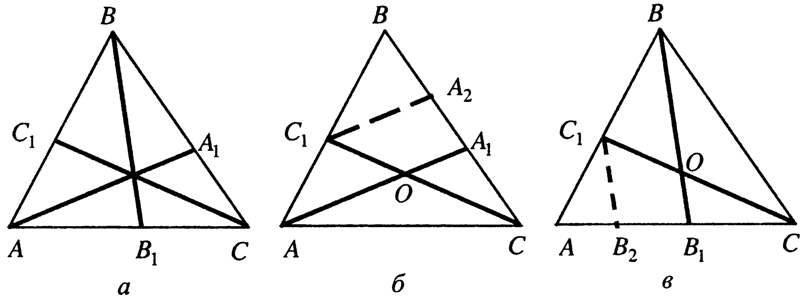


Рис.20.14

Теорема Менелая. *Если прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC, а также продолжение стороны AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно, то*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доказательство. Данная прямая является *секущей* (полужирная линия на рис.20.15,*а*). Через вершину C проведем прямую CC_2, параллельную секущей (штриховая линия на рис.20.15,*б*). Запишем теорему Фалеса:

для угла CBC_2: $\dfrac{C_1C_2}{A_1C}=\dfrac{C_1B}{BA_1}$, т.е. $C_1C_2=\dfrac{A_1C\cdot C_1B}{BA_1}$;

для угла C_1AB_1 : $\dfrac{B_1A}{CB_1} = \dfrac{AC_1}{C_1C_2}$.

Подставляя в последнее равенство выражение для C_1C_2, получаем

$$\frac{B_1A}{CB_1} = \frac{AC_1 \cdot BA_1}{A_1C \cdot C_1B} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{A_1C \cdot C_1B \cdot B_1A} = 1.$$

Теорема доказана. Заметим, что справедливо и обратное утверждение.

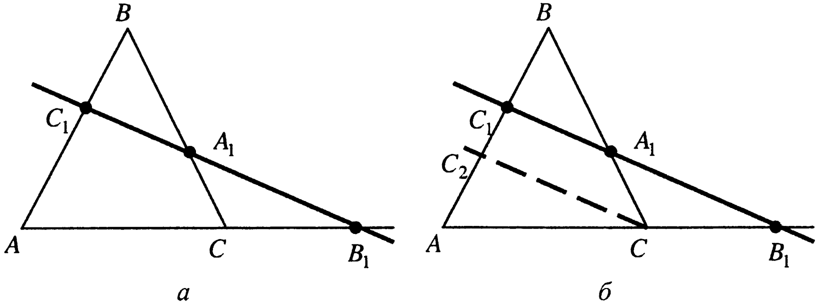


Рис.20.15

СРАВНЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР

Рассмотрим типовой пример расчета отношений площадей фигур.

Пример 20.1. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:MB = 3:2$, $AN:NC = 5:4$. Отрезки BN и CM разбивают треугольник на 4 фигуры. Найти отношение площади каждой из четырех фигур к площади треугольника ABC.

Решение. Пусть отрезки BN и CM пересекаются в точке O (рис.20.16,*а*). В соответствии с заданными отношениями обозначим длины отрезков: $AM = 3c$, $MB = 2c$, $AN = 5b$, $NC = 4b$, где b и c – неизвестные коэффициенты.

Прежде чем искать отношения площадей фигур, вычислим в каком отношении делит прямая BN отрезок CM. Для этого, взяв в качестве секущей прямую BN (полужирная линия на рис.20.16,*а*), проведем прямую MK параллельно BN. По теореме Фалеса (для сторон угла BAN) имеем $AK:KN = 3:2$. Следовательно, $AK = \dfrac{3}{5} \cdot 5b = 3b$, $KN = \dfrac{2}{5} \cdot 5b = 2b$. Еще раз применяя теорему Фалеса (для сторон угла MCK), получаем искомое отношение

$$\frac{CO}{OM}=\frac{CN}{NK}=\frac{4b}{2b}=2.$$

Теперь будем искать отношения площадей. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Отметим на рис.20.16,*б* полученное выше отношение $CO:OM=2:1$, обозначив длины отрезков $CO=2t$, $OM=t$, где t – неизвестный коэффициент пропорциональности. Треугольники ABC, ACM, BCM имеют общую высоту, поэтому $S_{ACM}=\frac{3}{5}S$, $S_{BCM}=\frac{2}{5}S$. Сравнивая площади треугольников BCM, BCO, BOM (имеющих общую высоту), заключаем, что

$$S_{BCO}=\frac{2}{3}S_{BCM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{4}{15}S,\quad S_{BOM}=\frac{1}{3}S_{BCM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{2}{15}S.$$

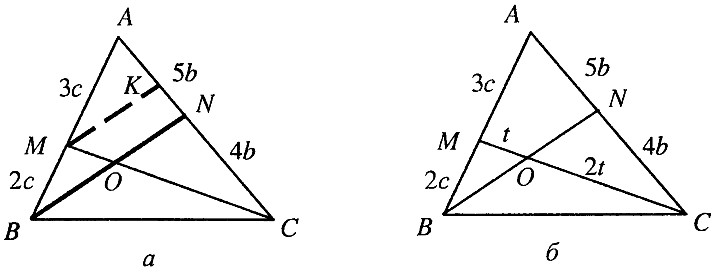


Рис.20.16

Найдем теперь отношение площадей треугольников ACM и NCO, имеющих общий угол

$$\frac{S_{NCO}}{S_{ACM}}=\frac{4b\cdot 2t}{9b\cdot 3t}=\frac{8}{27}\quad\Rightarrow\quad S_{NCO}=\frac{8}{27}S_{ACM}=\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{5}S=\frac{8}{45}S.$$

Наконец, вычисляем площадь четырехугольника $AMON$:

$$S_{AMON}=S_{ACM}-S_{NCO}=\frac{3}{5}S-\frac{8}{45}S=\frac{19}{45}S.$$

Ответ: $\frac{2}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{45}$; $\frac{19}{45}$.

Задачи для самостоятельного решения

Свойства биссектрисы и средней линии

20.1. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит медиану на отрезки 2 см и 5 см. Найти все возможные значения периметра этого треугольника. *Ответ*: $16{,}8+5{,}6\sqrt{6}$ см; $\dfrac{84}{\sqrt{13}}$ см.

20.2. Биссектриса одного из углов прямоугольного треугольника делит треугольник на части, площади которых относятся как $3:4$. Найти площадь треугольника, если его периметр равен 12 см.

Ответ: 6 см^2 или $\dfrac{12\left(4\sqrt{7}-7\right)}{7}\text{ см}^2$.

20.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. Найти площадь четырехугольника $ABHM$, если известно, что $AH = BM = 1$ см. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{ см}^2$.

20.4. В остроугольном треугольнике ABC высота BE равна медиане AM. Площадь четырехугольника $ABME$ равна 1 см^2. Найти длину медианы AM. *Ответ*: $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$ см.

20.5. Найти площадь четырехугольника, имеющего равные диагонали, если известно, что отрезки, соединяющие середины противоположных его сторон, равны 1 см. *Ответ*: 1 см^2.

20.6. Прямая, проходящая через вершину A параллелограмма $ABCD$, удалена от вершин B и D на 3 см и 5 см соответственно. Найти расстояние от вершины C до этой прямой. *Ответ*: 2 см; 8 см.

20.7. Прямая, проходящая через вершину A параллелограмма $ABCD$, удалена от вершин B и C на 3 см и на 8 см соответственно. Найти расстояние от вершины D до этой прямой. *Ответ*: 5 см; 11 см.

20.8. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на его медиане BD и делит ее на отрезки 5 см и 3 см. Найти кратчайшее расстояние от вершины A до этой окружности. *Ответ*: $3\sqrt{5}-3$ см.

20.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Величина угла ABC равна 120^o, а отношение длин сторон AB и AC равно k. Найти отношение длин отрезков CD и BD. *Ответ*: $\frac{1}{k}$.

Теорема Фалеса и подобие треугольников

20.10. Биссектриса острого угла равнобокой трапеции пересекает меньшее основание и делит трапецию на части, площади которых относятся как $5:1$. В каком отношении эта биссектриса делит периметр трапеции?

Ответ: 3:1.

20.11. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K, на BC – точка M, на AC – точка N. Отрезки KM и BN пересекаются в точке O. Известно, что $AK:KB=2:3$, $AN:NC=1:3$, $KO:OM=1:2$. Площадь треугольника ABC равна 100 см^2. Найти площадь треугольника KBM. *Ответ*: 24 см^2.

20.12. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты, соответственно, точки P и Q так, что $CQ=3\cdot PB$. На отрезке PQ взята точка M так, что $3\cdot MP=MQ$. Найти расстояние от точки M до основания AC, если известно, что высота BK треугольника ABC равна h. *Ответ*: $0{,}75h$.

20.13. В треугольнике центр вписанной окружности и точка пересечения медиан лежат на прямой, параллельной стороне треугольника, имеющей длину 2 см. Найти периметр треугольника. *Ответ*: 6 см.

20.14. В остроугольном треугольнике ABC площади 1 см^2 точки L, M, N – основания его высот. Периметр треугольника LMN равен 2,5 см, а сумма квадратов косинусов углов треугольника ABC равна 0,95. Найти расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до прямой MN. *Ответ*: 0,04 см.

20.15. Прямая делит треугольник на две подобные между собой фигуры, отношение площадей которых равно 2. Найти величины углов треугольника. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

20.16. В равнобокой трапеции $ABCD$ длина основания AB равна 20 см, $\angle BAD = 60^o$. Диагональ BD трапеции, биссектриса угла BAD и высота CK , опущенная из вершины C на основание AB , пересекаются в одной точке. Найти длину основания CD . *Ответ*: $40-20\sqrt{3}$ см.

20.17. Две противоположные стороны выпуклого четырехугольника разбиты на 7 равных частей каждая. Точки деления попарно соединены непересекающимися отрезками, разбивающими данный четырехугольник на 7 четырехугольников, которые последовательно занумерованы. Известно, что площадь первого четырехугольника равна 6 см^2, а площадь шестого – 12 см^2. Найти площадь исходного четырехугольника.

Ответ: 67,2 см^2 .

§21. ОКРУЖНОСТИ, ИХ КОМБИНАЦИИ С ДРУГИМИ ФИГУРАМИ

Ниже приводятся основные определения и свойства окружностей, а также некоторые важные теоремы о комбинациях окружностей с другими фигурами. Свойства касательных и хорд, вписанных и центральных углов, дополняются теоремами о вписанных и описанных четырехугольниках, подобием треугольников, образованных секущими и хордами, формулами площадей вписанных и описанных многоугольниках и другими более сложными теоремами. Перечислить же все свойства, полученные геометрами со времен Древнего Египта, не представляется возможным.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Окружностью *с центром в точке O радиуса R* называется множество точек плоскости, удаленных от центра на расстояние R (рис.21.1). ***Радиусом окружности*** называют отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (а также длину этого отрезка). Часть окружности, расположенная между двумя ее точками, называется ***дугой*** и обозначается символом $\cup$. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой***. Говорят, что дуга ***стягивается*** этой хордой, хорда ***стягивает*** дугу с теми же концами. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром*** окружности. Прямая, проходящая через две точки окружности, называется ***секущей***. Прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью, называется ***касательной***.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется ***кругом***. ***Сектором*** называется часть круга, заключенная между двумя радиусами (см. рис.21.1). Часть круга, отсекаемая хордой, называется ***сегментом*** (см. рис.21.1).

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют только одну общую точку. Касание окружностей может быть внешним или внутренним (рис.21.2). Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется ***линией центров***. Заметим, что точка касания двух окружностей лежит на линии центров.

Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно, расположенные одна вне другой, имеют ***общие касательные***: общая ***внутренняя*** касательная пересекает отрезок O_1O_2, а общая ***внешняя*** касательная не пересекает этого отрезка (рис.21.3). Пересекающиеся окружности имеют только общие внешние касательные.

Две окружности называются ***концентрическими***, если они имеют общий центр (рис.21.4).

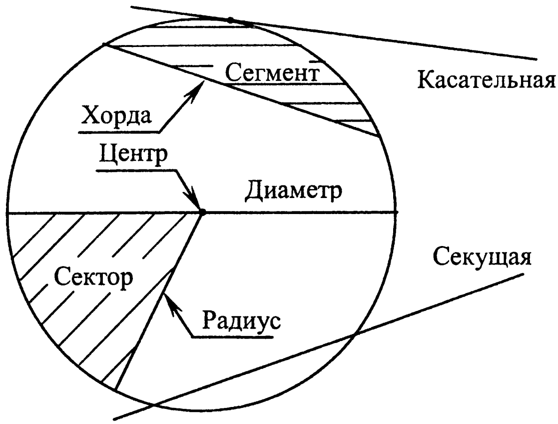


Рис.21.1

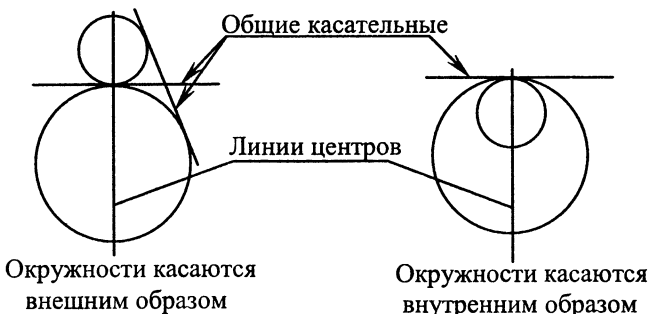


Рис.21.2

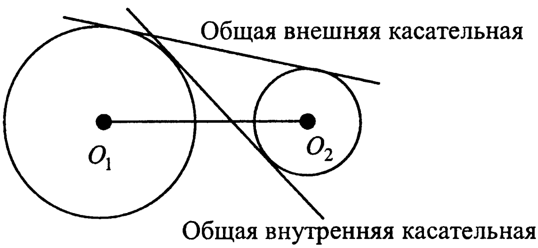


Рис.21.3

Рис.21.4

СВОЙСТВА КАСАТЕЛЬНЫХ К ОКРУЖНОСТИ И ХОРД

Свойство касательной. *Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания* (рис.21.5).

Признак касательной. *Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, является касательной.*

Свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки. *Если из данной точки, лежащей вне окружности, проведены к ней две касательных, то отрезки касательных (от данной точки до точек касания с окружностью) равны.*

Свойства хорд. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности* (рис.21.6).

Рис.21.5

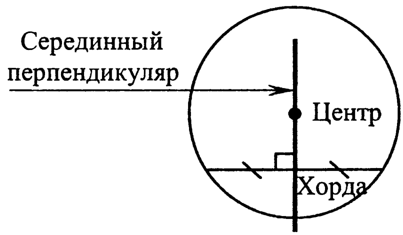


Рис.21.6

ВПИСАННЫЙ И ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГЛЫ

Центральным углом в окружности называют угол, образованный двумя радиусами (рис.21.7,*а*). Говорят, что центральный угол ***опирается на дугу*** окружности, заключенную между сторонами угла, или соответствует этой дуге. Для сравнения дуг одной окружности вводят градусную меру. Принято считать, что вся окружность составляет 360 градусов (дуговых), также как полный угол равен 360 градусам (угловых). При этом центральный угол и соответствующая ему дуга измеряются одним и тем же количеством градусов.

Свойство центрального угла. *Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.*

Вписанным углом называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности (рис.21.7,*б*). Говорят, что вписанный угол ***опирается на дугу***, заключенную между его сторонами.

Теорема о вписанном угле. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.* Эту теорему надо понимать так: величина вписанного угла (в угловых градусах) равна половине величины дуги (в дуговых градусах), на которую он опирается.

Из этой теоремы следует, что

– вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу;

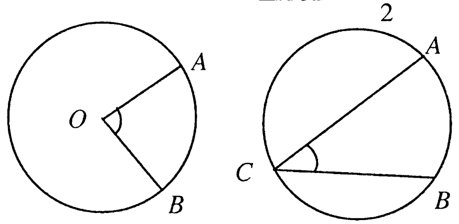
– вписанные углы, опирающиеся на одну дугу (или равные дуги), равны;

– сумма вписанных углов, опирающихся на дополнительные дуги (которые дополняют друг друга до полной окружности), равна 180^o *;*

– вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.

Центральный угол $\angle AOB = \cup AB$

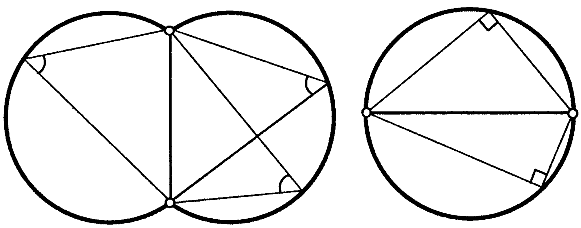
Вписанный угол $\angle ACB = \dfrac{\cup AB}{2}$



а *б*

Рис.21.7

Теорема о вписанном угле позволяет установить, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом, есть* ***дуги двух окружностей****, стягиваемые заданным отрезком* (рис.21.8,*а*). В частности, *г.м.т., из которых данный отрезок виден под прямым углом – это окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре* (рис.21.8,*б*). За исключением, разумеется, концов данного отрезка.



а *б*

Рис.21.8

УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ, СЕКУЩИМИ

Теорема об угле между касательной и хордой. *Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него* (рис.21.9).

Теоремы об углах между секущими или хордами окружности.

1. *Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами* (рис.21.10).

2. *Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися внутри окружности, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая – между продолжениями сторон* (рис.21.11).

$$\angle AKB = \frac{\cup KB}{2}$$

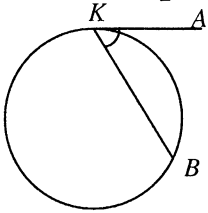


Рис.21.9

$$\angle A = \frac{\cup DE - \cup BC}{2}$$

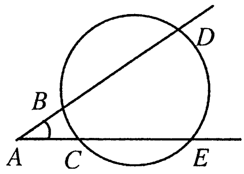


Рис.21.10

$$\angle BAC = \frac{\cup BC + \cup DE}{2}$$

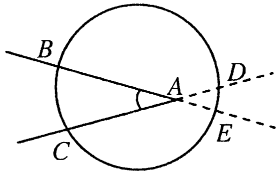
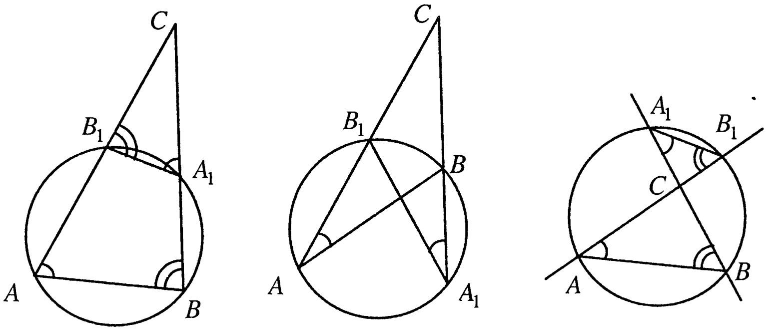


Рис.21.11

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ОБРАЗОВАННЫХ СЕКУЩИМИ И ХОРДАМИ

1. *Треугольники, образованные двумя секущими и заключенными между ними хордами данной окружности, подобны* (рис.21.12,*а,б,в*). Если вместо одной секущей взять касательную, то подобие треугольников сохраняется.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$



а *б* *в*

Рис.21.12

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$

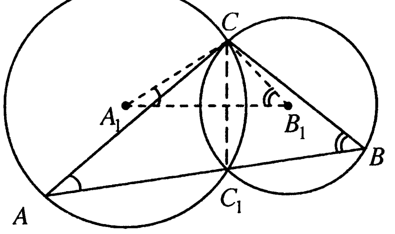


Рис.21.13

2. *Даны две пересекающиеся окружности с центрами A_1 и B_1 (общая хорда CC_1). Секущая, проходящая через точку C_1, пересекает окружности в точках A и B (отличных от C_1). Треугольник ABC подобен треугольнику A_1CB_1* (рис.21.13). *Коэффициент подобия равен удвоенному синусу угла CC_1B.*

КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ С ТРЕУГОЛЬНИКАМИ

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется *описанной* около этого треугольника. Окружность, касающаяся всех сторон треугольника, называется *вписанной* в этот треугольник. Если окружность касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, то ее называют *вневписанной* окружностью этого треугольника (рис.21.14).

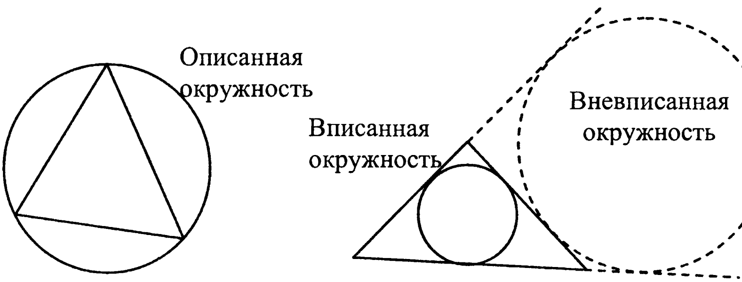


Рис.21.14

Теорема существования и единственности описанной окружности. *Около каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*

Теорема существования и единственности вписанной окружности. *В каждый треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника.*

Теорема существования вневписанных окружностей. *У каждого треугольника существуют три вневписанных окружности. Центр каждой вневписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника и на биссектрисе одного внутреннего угла* (рис.21.14).

Взаимное расположение медиан, биссектрис и высот треугольника. Описанная окружность позволяет уточнить взаимное положение медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Не трудно показать, что *продолжение биссектрисы треугольника пересекает серединный перпендикуляр, проведенный к той же стороне, что и биссектриса, на описанной около треугольника окружности.*

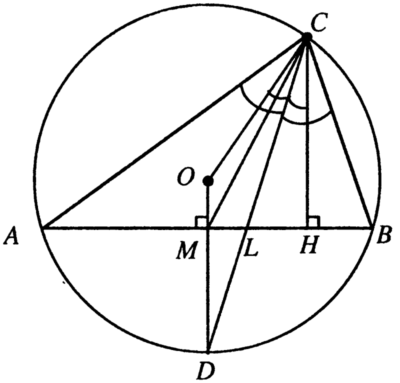


Рис.21.15

В самом деле, пусть ABC – произвольный треугольник, CM – медиана, CL – биссектриса, CH – высота, O – центр описанной окружности, OD – серединный перпендикуляр к стороне AB (рис.21.15). Из равенства вписанных углов и свойства диаметра, перпендикулярного к хорде, следует, что продолжение биссектрисы CL пересекает серединный перпендикуляр OD в точке D, лежащей на описанной окружности.

Из этого построения следуют свойства.

1. *Если из одной вершины треугольника проведены медиана (m), биссектриса (l) и высота (h), то биссектриса лежит между медианой и высотой, а длины этих отрезков удовлетворяют неравенству $m \le l \le h$, причем отрезки совпадают ($m = l = h$) только в равнобедренном треугольнике.*

2. *Если из одной вершины треугольника проведены биссектриса, высота и радиус описанной окружности, то биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом.*

3. *Если к гипотенузе прямоугольного треугольника проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой.* Обратное утверждение верно и служит признаком прямоугольного треугольника.

Свойства ортоцентра треугольника. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.* Эта точка называется ***ортоцентром*** треугольника.

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC (рис.21.16). Продолжение высоты, опущенной на сторону AB, пересекает описанную окружность в точке H_1. Из равенства углов $\angle ABH_1 = \angle ACH_1 = \angle ABH$ следует, что треугольник H_1BH – равнобедренный, так как его высота является биссектрисой. Отсюда следует свойства:

1) *точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, лежат на описанной около треугольника окружности;*

2) *окружность, проходящая через две вершины остроугольного треугольника и точку пересечения его высот (ортоцентр), равна окружности, описанной около треугольника.*

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC (рис.21.17), в котором проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Из подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1 \sim \Delta A_1B_1C$ (см. три опорных случая подобия треугольников в §20) следует равенство углов $\angle BAC = \angle BA_1C_1 = \angle B_1A_1C$. Значит, высота AA_1 является биссектрисой угла $B_1A_1C_1$. Отсюда вытекает свойство:

3) *ортоцентр данного остроугольного треугольника совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.*

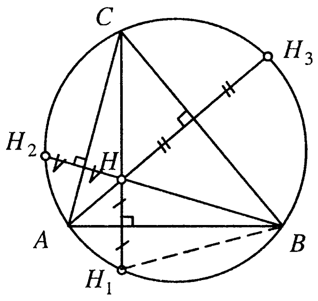


Рис.21.16

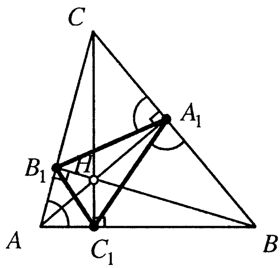


Рис.21.17

Рассмотрим еще одно построение. Пусть ABC – произвольный треугольник. Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противоположной стороне треугольника. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис.21.18), подобный ABC, причем коэффициент подобия равен 2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ содержат высоты треугольника ABC. Отсюда вытекают следующие свойства:

4) *ортоцентр H треугольника ABC совпадает с центром O_1 окружности, описанной около треугольника* $A_1B_1C_1$, т.е. $H \equiv O_1$ (рис.21.18);

5) ***в произвольном треугольнике расстояние от данной его вершины до точки пересечения высот (до ортоцентра) в два раза больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противоположной данной вершин;***

6) *в любом треугольнике точка пересечения медиан (центр тяжести M), точка пересечения высот (ортоцентр H) и центр описанной окружности (точка O) лежат на одной прямой, причем* $HM = 2 \cdot MO$ (рис.21.19). На рис.21.19 проведены две медианы из вершин A и C (сплошные линии, пересекающиеся в точке M), две высоты из вершин B и C (пунктирные линии, пересекающиеся в точке H) и два серединных перпендикуляра к сторонам AB и BC (штрихпунктирные линии, пересекающиеся в точке O).

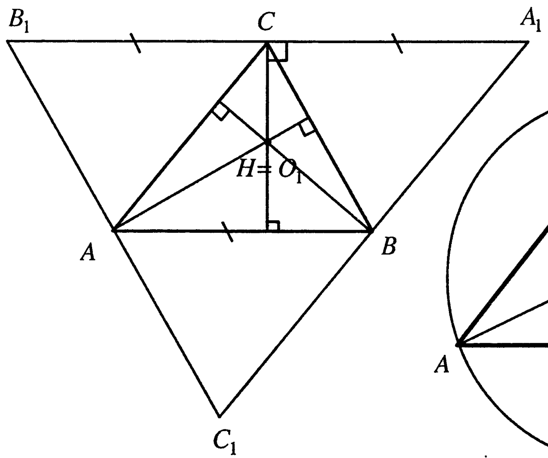


Рис.21.18

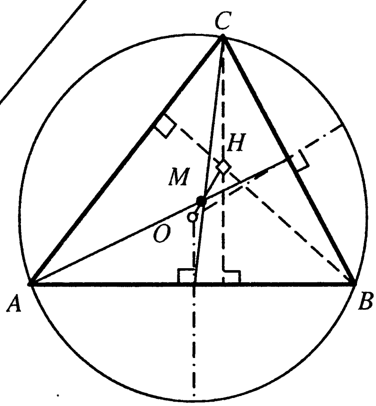


Рис.21.19

КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ С МНОГОУГОЛЬНИКАМИ

Выпуклый четырехугольник называется ***вписанным*** (рис.21.20), если все его вершины лежат на одной окружности (в этом случае говорят также, что вокруг четырехугольника ***описана*** окружность). Четырехугольник называется ***описанным*** (рис.21.20), если все его стороны касаются одной окружности (эту окружность называют ***вписанной*** в четырехугольник).

Свойства и признаки вписанного четырехугольника. *Если четырехугольник вписан в окружность, то*

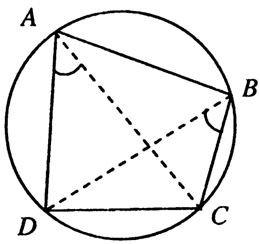
– сумма двух противоположных углов равна 180^o *; (или)*

– из двух смежных вершин противоположная сторона видна под равными углами;

и наоборот, *если в выпуклом четырехугольнике выполнено одно из указанных условий, то вокруг него можно описать окружность.*

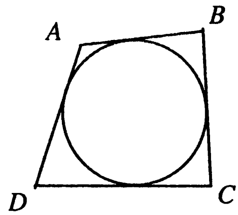
Свойство и признак описанного четырехугольника. *Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны,* и наоборот, *если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.*

Вписанный четырехугольник



$$\angle A + \angle C = 180^o$$
$$\angle CAD = \angle CBD$$

Описанный четырехугольник



$$AB + CD = AD + BC$$

Рис.21.20

Теорема Птолемея. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон* (рис.21.21).

Действительно, проведем через вершину A секущую AA_1, параллельную диагонали BD (рис.21.22). Пусть E – точка пересечения диагонали BD и хорды CA_1. Отметим равенство вписанных углов, опирающихся на одну или равные дуги. Из подобия $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ имеем $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{CD}$, т.е. $AB \cdot CD = AC \cdot DE$. Из подобия $\Delta ACD \sim \Delta BCE$ имеем $\dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$, т.е. $AD \cdot BC = AC \cdot BE$. Сложив полученные равенства, получаем

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DE + AC \cdot BE = AC \cdot (BE + DE) = AC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

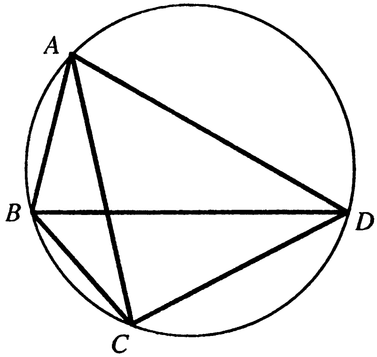


Рис.21.21

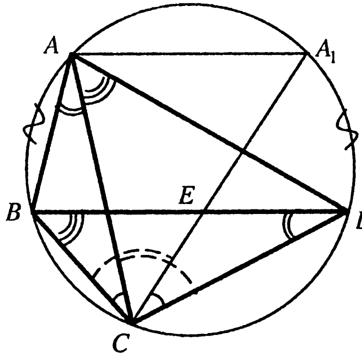


Рис.21.22

Площади вписанного и описанного четырехугольников. *Площадь вписанного в окружность четырехугольника со сторонами a, b, c, d вычисляется по формуле:*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \tag{21.1}$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ *– полупериметр* (рис.21.23).

Площадь описанного около окружности четырехугольника со сторонами a, b, c, d вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{A+C}{2}, \tag{21.2}$$

где A и C – величины противоположных углов четырехугольника (рис.21.24).

Вписанный четырехугольник

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

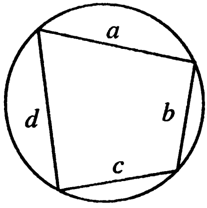


Рис.21.23

Описанный четырехугольник

$$S = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{A+C}{2}$$

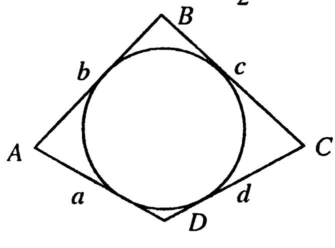


Рис.21.24

Если четырехугольник вписан и описан одновременно, то его площадь вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{abcd}\ . \qquad (21.3)$$

Формулы (21.1)-(21.3) следуют из формулы (19.1) площади произвольного четырехугольника. В самом деле, для вписанного четырехугольника имеем $A + C = 180^o$, т.е. $\cos\frac{A+C}{2} = 0$. Поэтому

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Для описанного четырехугольника $p = a + c = b + d$, т.е. $p - a = c$, $p - b = d$, $p - c = a$, $p - d = b$. Подставляя в (19.1), получаем

$$S^2 = abcd - abcd\cos^2\frac{A+C}{2} = abcd\sin^2\frac{A+C}{2}.$$

Отсюда следует формула (21.2).

Подставляя $A + C = 180^o$ в последнее равенство, получаем

$$S^2 = abcd\ .$$

Формула (21.3) доказана.

Площадь описанного многоугольника *равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:* $S = pr$ (рис.21.25).

Рис.21.25

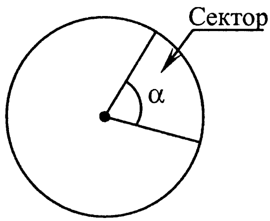


Рис.21.26

Формулы длины окружности и ее частей.

Длина окружности радиуса R *вычисляется по формуле* $C = 2\pi R$.

Длина дуги в α^o (α *радиан) окружности радиуса* R *находится по формуле* (рис.21.26):

$$C_{\alpha^o} = \frac{\pi R\alpha^o}{180^o} \qquad \text{(соответственно: } C_\alpha = \alpha R\text{)}.$$

Пример 21.1. В трапеции $ABCD$ сумма двух меньших углов в три раза меньше суммы двух других углов. Окружность радиуса 2,5 см проходит через вершины B, C и середину основания AB. Найти площадь трапеции, если известно, что $AB = 6$ см, $CD = 3$ см.

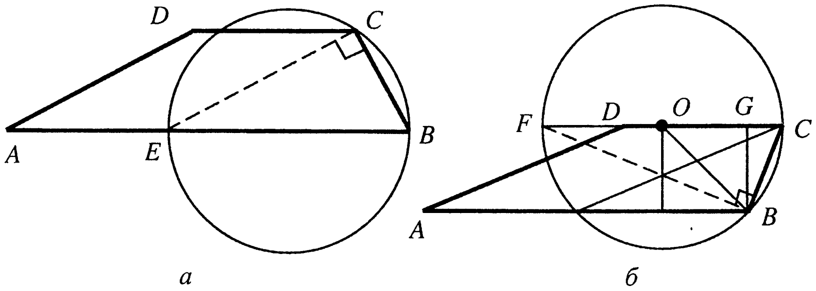


Рис.21.27

Решение. Из двух меньших углов трапеции один является прилежащим к большему основанию AB. Поэтому нужно рассмотреть три случая, когда меньшие углы – это A и B, или A и C, или B и D.

1. Если A и B – два меньших угла (рис.21.27,*а*), то по условию задачи: $3(A+B) = C+D \Rightarrow 3(A+B) = 180^0 - A + 180^0 - B \Rightarrow A+B = 90^0$.

Соединим середину E основания AB с точкой C. Так как $AE = CD = 3$ см, то $AECD$ – параллелограмм. Следовательно, $\angle BEC = \angle BAD$, кроме того, из равенства $A+B = 90^0$ получаем, что $\angle BCE = 90^0$, т.е. треугольник BCE – прямоугольный. Радиус, описанной около треугольника BCE окружности, равен половине гипотенузы BE (1,5 см), что противоречит условию задачи.

2. Пусть A и C – два меньших угла трапеции (рис.21.27,*б*). Тогда

$$3(A+C) = B+D \Rightarrow 3(A+180^0 - B) = B + 180^0 - A \Rightarrow B - A = 90^0.$$

Пусть E – середина AB, F – точка пересечения прямой CD с окружностью, описанной около треугольника BCE, O – центр окружности. Так как $\angle FBE = \angle CEB = \angle A$, то $\angle CBF$ – прямой. Следовательно, $CF = 5$ см – диаметр окружности. Высота BG трапеции находится из прямоугольного треугольника OBG: $OG = \dfrac{BE}{2} = 1{,}5$ см $\Rightarrow BG = \sqrt{OB^2 - OG^2} = 2$ см. Подсчитываем теперь площадь трапеции: $\dfrac{AB+CD}{2} BG = 9$ см^2.

В третьем случае, когда B и D – два меньших угла, получаем тот же результат, так как трапеция оказывается симметричной трапеции, рассмотренной в пункте 2. *Ответ*: 9 см^2.

Пример 21.2. На плоскости заданы две фигуры: выпуклый многоугольник площади S с периметром p и круг радиуса r. Найти площадь третьей фигуры, образованной всеми точками плоскости, симметричными точкам данного многоугольника, относительно точек данного круга.

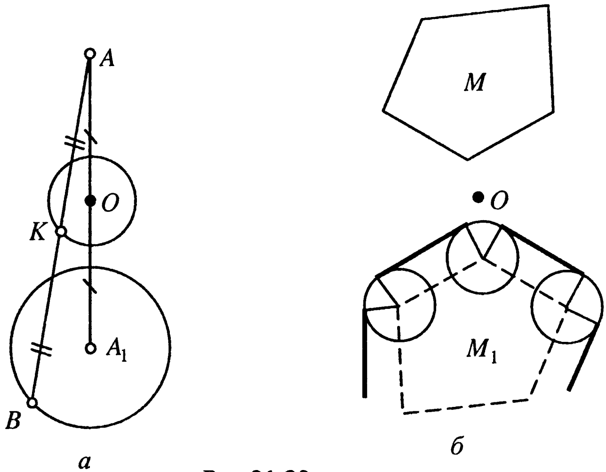


Рис.21.28

Решение. Пусть A – некоторая точка данного многоугольника, а O – центр данного круга. Множество точек, симметричных данной точке A относительно всех точек K круга радиуса r, представляет собой круг радиуса $2r$ (рис.21.28,*а*). Центр этого круга – это точка A_1, симметричная точке A относительно центра O данного круга. Рассмотрим теперь аналогичное преобразование данного многоугольника M (рис.21.28,*б*). Сначала получаем многоугольник M_1 (пунктирная линия на рис.21.28,*б*), симметричный данному относительно точки O. Затем, дополняем каждую точку многоугольника M_1 кругом радиуса $2r$ с центром в этой точке. Получаем фигуру, которая образована добавлением к многоугольнику M_1 "пояса" шириной $2r$. Площадь многоугольника M_1 равна площади S данного многоугольника. Чтобы вычислить площадь "пояса", надо заметить, что он состоит из прямоугольников и секторов. Сумма площадей прямоугольников равна $2pr$, так как сумма их оснований равна периметру p, а высота – $2r$. Площадь всех секторов равна $4\pi r^2$, так как из них можно составить круг радиуса $2r$. Таким образом, искомая площадь равна $S+2pr+4\pi r^2$.

Ответ: $S+2pr+4\pi r^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Вписанные углы и подобие треугольников

21.1. Углы треугольника являются последовательными членами арифметической прогрессии, а его периметр составляет 70% от длины описанной около треугольника окружности. Найти величину большего угла треугольника. *Ответ*: $\frac{\pi}{3}+\arccos\frac{1{,}4\pi-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

21.2. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Известно, что $BC=5$ см, $AD=12$ см. Найти величину угла BAC. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

21.3. Найти величины углов треугольника, если известно, что центры вписанной в него и описанной около него окружностей симметричны относительно стороны треугольника. *Ответ*: 36^o, 36^o, 108^o.

21.4. Найти величины углов треугольника, если известно, что центр описанной около него окружности симметричен точке пересечения медиан относительно стороны треугольника.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}6}$; $\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}6}$; $\pi-2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}6}$.

21.5. В треугольнике ABC проведена высота CD. Отрезок, соединяющий точку D с центром O описанной окружности, пересекает биссектрису угла C в точке N, причем $ON:ND=3:2$. Найти отношение высоты CD к диаметру описанной окружности. *Ответ*: $1:3$.

21.6. В остроугольном треугольнике ABC величина меньшего угла ABC равна 40^o, точка O центр описанной окружности, точка Q центр вписанной окружности, угол OBQ равен 15^o. Найти отношения длин сторон треугольника. *Ответ*: $\sin 85^o:\sin 55^o:\sin 40^o$.

21.7. В треугольнике ABC перпендикуляр, опущенный из центра описанной окружности на биссектрису угла B, проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC. Найти величину угла B. *Ответ*: 60^o.

21.8. Вокруг треугольника ABC описана окружность, которая пересекает продолжение медианы AM в точке N. Известно, что $AM = 10$ см, $MN = 2$ см, $\angle ACB = \angle BAM$. Найти радиус описанной окружности.

Ответ: 10 см.

21.9. В равнобедренном треугольнике ABC на основание AC опущена высота BH. Окружность, проходящая через вершины B, C и середину стороны AB, пересекает высоту BH в точке K, причем $BK = 1$ см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$ см.

21.10. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AD = 2$ см, углы ABD и ACD – прямые, $\angle BDA = 3 \cdot \angle CAD$. Расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$ см. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $2 + \sqrt{3} + 2\sin\dfrac{\pi}{8} + 2\sin\dfrac{\pi}{24}$ см.

21.11. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CK. Радиус окружности, описанной около треугольника DEK равен 1 см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 2 см .

21.12. В окружность радиуса 13 см вписан четырехугольник, диагонали которого пересекаются под углом 60^o и имеют длины 10 см и 24 см. Найти длину наибольшей стороны четырехугольника.

Ответ: $\dfrac{13}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ см.

21.13. Две равные окружности радиуса R касаются друг друга в точке M. Прямая пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую в точках C и D, отличных от M, причем $AC = BD$. При каждом возможном положении прямой найти длину окружности, проходящей через точки A, M, C.

Ответ: $2\pi R$.

21.14. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки B выходит луч, пересекающий первую окружность в точке T, а вторую – в точке P. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ATP, составляет половину радиуса окружности, описанной около треугольника O_1O_2A. Найти величину угла TBA. *Ответ*: $\arcsin 0{,}25$.

21.15. Окружность с центром в точке O касается сторон BA, BC, CD параллелограмма $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки C на сторону AB, делит отрезок BO на отрезки 5 см и 4 см, считая от вершины B. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 2 \cdot BC$.

Ответ: 216 см^2.

21.16. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке P, а медиану BD в точках E и O так, что $BP = 4$ см, $BE = EO = OD = 6$ см. Найти площадь четырехугольника $APEO$, если известно, что высота треугольника ABC, опущенная из вершины C, равна 30 см. *Ответ*: 80 см^2.

21.17. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$ см и $BC = 12$ см описана окружность. Точки E и G – середины меньших дуг AC и BC соответственно, а точка F – середина дуги AB, не содержащей точку C. Найти площадь четырехугольника $AEGF$.

Ответ: 58,5 см^2.

21.18. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность. Часть периметра треугольника, находящаяся вне окружности, равна ее радиусу. Какая часть окружности находится вне треугольника? *Ответ*: $\dfrac{9}{10}$.

21.19. Две прямые, пересекающиеся вне окружности, делят ее на 4 дуги. Длины последовательных дуг относятся как $1:2:3:6$. Какая часть площади круга находится между секущими?

Ответ: $\dfrac{9+8\pi}{12\pi}$; $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{12\pi}$.

Свойства касательных и секущих

21.20. Найти отношение сторон треугольника ABC, если известно, что окружность, вписанная в треугольник, делит медиану BM на три равные части. *Ответ*: $5:10:13$.

21.21. Две концентрические окружности образуют кольцо площади S. В большую окружность вписан равнобедренный треугольник, боковые стороны которого касаются меньшей окружности, а основание делится меньшей окружностью на три равные части. Найти площадь треугольника. *Ответ*: $\frac{3\sqrt{23}}{8\pi}S$.

21.22. Основания равнобокой трапеции относятся как $3:2$. На большем основании, как на диаметре, построена окружность, пересекающая меньшее основание в точках, расстояние между которыми равно половине этого основания. В каком отношении окружность делит боковые стороны трапеции? *Ответ*: $1:2$.

21.23. Окружность проходит через вершины B и C параллелограмма $ABCD$, касается стороны AD и пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Найти периметр параллелограмма, если известно, что $BC = 84$ см, $AM : MB = 1:3$, $CN : ND = 15:1$.

Ответ: 392 см.

21.24. Периметр правильного треугольника ABC равен 3 см. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, середину стороны AB и касающейся прямой BC. *Ответ*: $\frac{3\pm\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ см.

21.25. Окружность проходит через вершины C и D прямоугольной трапеции $ABCD$, касается большего основания AB и прямой AD, а также делит меньшую боковую сторону BC на отрезки 1 см и 3 см. Найти площадь трапеции. *Ответ*: 22 см^2; $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ см^2.

21.26. На диагонали BD прямоугольной трапеции $ABCD$ как на диаметре построена окружность, которая касается прямой AD и делит большее основание AB трапеции на отрезки 2 см и 6 см. Найти площадь трапеции. *Ответ*: $14\sqrt{3}$ см^2; $10\sqrt{3}$ см^2.

21.27. Дан треугольник ABC. Окружность радиуса 10 см в точках A и C касается прямых, содержащих стороны AB и BC, и пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь данного треугольника, если известно, что $9 \cdot BL = 5 \cdot BD$. *Ответ*: 27 см^2.

21.28. Радиус, вписанной в треугольник ABC окружности, равен $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ см. Окружность радиуса $\dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ см касается лучей AB и AC, а также касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти тангенс угла ABC, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$ см^2, а наибольшей из его сторон является сторона AC. *Ответ*: $-\sqrt{15}$.

Вписанные и описанные четырехугольники

21.29. Окружность радиуса 1 см, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его средней линии. Найти площадь треугольника.

Ответ: $4\sqrt{2}$ см^2.

21.30. В равнобедренный треугольник ABC с периметром 16 см вписана окружность. К этой окружности параллельно стороне AB проведена касательная. Отрезок касательной, заключенный между сторонами треугольника, равен 2 см. Найти длину стороны AB. *Ответ*: 4 см.

21.31. Высоты AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $OC = \sqrt{3}$ см, $\angle AOE = 30^0$. Найти длину стороны AB.

Ответ: 1 см.

21.32. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и $\angle BAC = \angle BDC$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AB = 7$ см, $CD = 19$ см.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{410}}{2}$ см.

21.33. Биссектриса острого угла параллелограмма отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Отрезок этой биссектрисы, заключенный между сторонами параллелограмма, равен его диагонали. Найти величину тупого угла параллелограмма.

Ответ: $\pi - 2 \cdot \arccos\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$.

21.34. Стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ имеют длины $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$. Найти площадь четырехугольника, если известно, что существуют такие точки M и N (M лежит на AD, N – на BC), что вокруг четырехугольников $ABNM$ и $CDMN$ можно описать окружности.

Ответ: $\dfrac{a+c}{2}\sqrt{b^2-\left[\dfrac{(a-c)^2+b^2-d^2}{2(a-c)}\right]^2}$.

21.35. На окружности, описанной около трапеции $ABCD$, взята точка M. Отрезок CM пересекает диагональ BD в точке K, а основание AB – в точке L. Известно, что $CK=6$ см, $KL=8$ см, $LM=10$ см. Найти BD. *Ответ*: 21 см.

21.36. Величины углов вписанного в окружность четырехугольника, взятые в некотором порядке, являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Найти возможные значения суммы первых двух членов этой прогрессии. *Ответ*: $\left(\dfrac{\pi}{3};\pi\right)$.

21.37. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекающая катет AC в точке K, делит площадь треугольника в отношении $25:39$, причем точки B, C, M, K лежат на одной окружности. В каком отношении эта прямая делит периметр треугольника? *Ответ*: $17:15$.

21.38. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $AC=12$ см. Площадь четырехугольника равна 36 см^2. Найти величины углов четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения медиан четырех треугольников AOB, BOC, COD и AOD, если известно, что в него можно вписать окружность.

Ответ: 30^o; 150^o; 30^o; 150^o.

21.39. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота CH. Окружность, длина которой равна периметру треугольника, проходит через точки A, H, M, C. Найти величины углов треугольника.

Ответ: $\angle A=2\arcsin\dfrac{\pi-2}{2}$, $\angle B=\angle C=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{\pi-2}{2}$.

21.40. В треугольнике ABC: точка M – точка пересечения биссектрис, H – точка пересечения высот. Известно, что через точки A, M, H, B можно провести окружность. Найти величину угла B треугольника, если угол A равен 80^o. *Ответ*: 40^o.

21.41. Из вершин B и C треугольника ABC к его сторонам AB и AC соответственно восставлены перпендикуляры, пересекающиеся в точке D. Найти длину стороны AC, если известно, что угол ABC острый, угол BAD равен α, а расстояние от точки A до прямой BC равно a.

Ответ: $\dfrac{a}{\cos\alpha}$.

21.42. Из вершин A и C прямоугольного треугольника ABC проведены два луча, пересекающие соответственно катет BC в точке K и гипотенузу AB в точке E. Угол между высотой AL треугольника ACE и катетом AC равен α. Найти длину отрезка AK, если $KE \perp AB$ и $KE = 1$ см. *Ответ*: $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ см.

21.43. На окружности, описанной около треугольника BFD, в котором $\angle BFD = 60^o$, взята точка C так, что отрезки FD и BC пересекаются в точке K. Через точку C проведена прямая параллельно FD, пересекающая прямую BD в точке A, причем $\angle DCA = 60^o$. Найти расстояние от точки A до прямой BC, если $KF = 20$ см, $BD = 10\sqrt{7}$ см.

Ответ: $7{,}5\sqrt{3}$ см.

ГЛАВА 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ

В этой главе рассматриваются основные типы стереометрических задач. Школьный курс стереометрии содержит много теоретических сведений, слабо подкрепленных решениями задач. Например, задачи с неправильными пирамидами и призмами, с расчетом сечений многогранников, с комбинациями многогранников, тел вращения, а также стереометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений вызывают большие затруднения на экзаменах.

В §22 изложены методы решения многогранников. Построению и расчету сечений многогранников посвящен §23. Задачи на комбинации круглых тел и многогранников собраны в §24. В последних двух параграфах этой главы рассматриваются задачи, в которых геометрические фигуры полностью не заданы: либо размеры фигуры зависят от параметра, либо сама фигура подлежит распознаванию. Параметрический анализ фигур описан в §25. Задачи, в которых для распознавания фигуры применяется логический анализ, рассматриваются в §26. Решение стереометрических и планиметрических задач на экстремум описано в глава 9. Применение векторной алгебры и метода координат изучается в главе 10.

§22. МНОГОГРАННИКИ

Порядок решения стереометрических задач такой же, как в планиметрии. Основные этапы – построение чертежа, первоначальный анализ данных, планирование решения и реализация выработанного плана. Рассмотрим характерные для стереометрических задач особенности этих этапов.

Построение чертежа. В стереометрии принято изображать пространственные фигуры на плоском чертеже. При этом используется ***параллельное проектирование***.

Пусть задана плоскость α и пересекающая ее прямая a. Через любую точку M пространства можно провести единственную прямую m, параллельную a (рис.22.1,*а*). Эта прямая будет пересекать плоскость α в некоторой точке M_1. Точка M_1 называется ***проекцией точки M на плоскость α при параллельном проектировании с заданным направлением a***. Плоскость α называется ***плоскостью проекций***.

Проекцией фигуры на заданную плоскость называется совокупность проекций всех ее точек. Например, проекция $A_1B_1C_1$ треугольника ABC на рис.22.2,*б*.

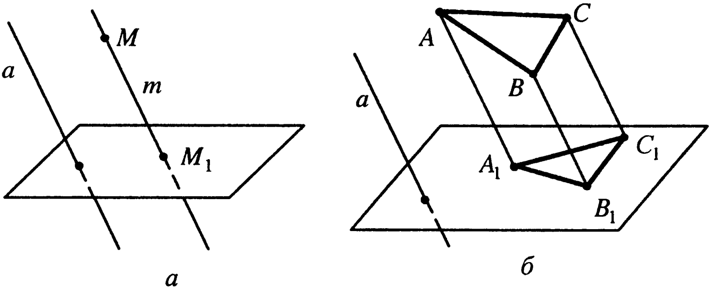


Рис.22.1

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

1. *Проекция прямой, луча, отрезка (не параллельных прямой a) есть прямая, луч, отрезок соответственно.*

2. *Проекции параллельных (пересекающихся) прямых, не параллельных прямой a, параллельны (пересекаются).*

3. *Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, сохраняется при параллельном проектировании.*

Из свойств параллельного проектирования следует, что проекцией правильного треугольника может служить произвольный треугольник (или даже отрезок), проекцией квадрата является параллелограмм, проекцией окружности – эллипс и т.п. Изобразим, например, на рисунке правильную шестиугольную пирамиду $SABCDEF$. Ее основанием служит правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис.22.2,*а*). Диагонали шестиугольника парал-

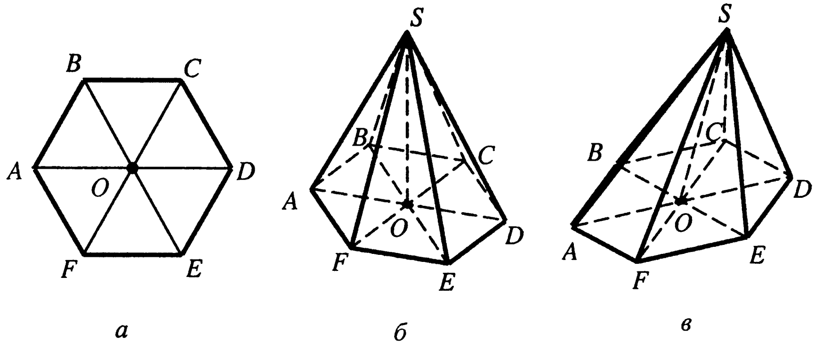


Рис.22.2

лельны соответствующим его сторонам и в два раза длиннее их (например, $AD \parallel BC \parallel EF$ и $AD = 2 \cdot BC$). Все диагонали пересекаются в одной точке

O, которая делит каждую диагональ пополам. Перечисленные условия должны выполнятся и для проекции этого шестиугольника, т.е. на рисунке пирамиды (рис.22.2,*б*,*в*). Заметим, что вид проекции треугольника AOB и положение вершины S на рисунке могут быть произвольными.

Изображение пространственной конфигурации, как правило, необходимо для получения общего представления о взаимном расположении фигур. Для проведения расчетов или доказательств обычно пользуются дополнительными рисунками плоских фигур, получающихся в сечениях. Плоские фигуры изображаются на чертеже без искажений (с точностью до подобия). Сложные для изображения круглые тела, особенно шар, обычно вообще не рисуют, ограничиваясь указанием их характерных точек и размеров. Сечения же круглых тел лучше нарисовать.

Первоначальный анализ данных. Основная цель этого этапа – установить, какие фигуры по условию задачи фиксированы (полностью заданы), а какие заданы частично (см. главу 7). Для пространственных фигур такой анализ сделать сложнее, чем для плоских. Рассмотрим типовые пространственные фигуры и условия, достаточные для их построения. Куб, сфера, шар полностью задаются одним размером (например, радиусом или ребром соответственно). Прямоугольный параллелепипед определяется указанием трех его измерений – длины, ширины и высоты. Любая правильная n-угольная призма или правильная n-угольная пирамида может быть задана двумя параметрами, например, стороной основания и высотой. Для задания произвольных призм и пирамид требуется указать гораздо больше элементов. Например, самый простой многогранник – треугольная пирамида (тетраэдр) задается шестью элементами. В самом деле, чтобы построить основание тетраэдра необходимо задать три элемента (например, три стороны треугольника). Указав длины двух боковых ребра, полностью задаем одну боковую грань. Пространственное положение этой боковой грани все же не фиксировано. Она может быть по-разному наклонена к плоскости основания. Поэтому необходимо задать еще одну измеряемую величину: третье боковое ребро или угол наклона заданной боковой грани к основанию, или что-то еще. Анализ данных для более сложных многогранников проводится аналогично.

План решения. Нужно придумать, каким образом по данным условиям можно вычислить искомую величину. План решения зависит от проведенного анализа данных. Если все фигуры полностью заданы, то, используя метрические соотношения, можно последовательно решить все многогранники. Поэтому нужно попытаться свести решение задачи к цепочке планиметрических задач (как правило, к решению треугольников). Если фигуры не заданы полностью, то при планировании решения надо ориентироваться на аффинные соотношения. При этом случай, когда все фигуры заданы с точностью до подобия, сводится к фиксированной конфигурации. Для этого достаточно принять длину любого характерного отрезка, либо площадь фигуры, либо объем тела за единицу (лучше обозначить длину, либо площадь, либо объем какой-нибудь буквой), тогда конфигурация становиться фиксированной. Затем надо составить план решения и реализовать его. (Заметим, что буква, обозначающая характерную длину, площадь или объем, не должна входить в ответ.)

Проведение доказательств и расчетов. Реализовать план решения стереометрической задачи тоже не просто. Как и в планиметрических задачах, решение должно быть логически обоснованным. Поэтому кроме расчетов и алгебраических выкладок необходимо приводить доказательства всех использованных фактов. Если решение стереометрической задачи сводится к решению цепочки планиметрических задач, то полезно сделать дополнительные чертежи плоских фигур.

ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

При пересечении двух прямых образуются четыре угла. Если измерен один из них, то величины остальных трех углов легко найти, используя свойства смежных и вертикальных углов. Обычно за ***величину угла между пересекающимися прямыми*** принимают величину φ меньшего угла (которая не превосходит величины каждого из трех остальных углов). В этом случае угол φ между прямыми удовлетворяет неравенству $0^o < \varphi \le 90^0$.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым (рис.22.3). Наконец, величину угла между параллельными прямыми, по определению, полагают равной нулю. Таким образом, определена величина φ угла между любыми двумя прямыми в пространстве, причем $0^o \le \varphi \le 90^0$.

Две прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) называются ***перпендикулярными***, если угол между ними равен 90^o.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Если прямая пересекает данную плоскость и не перпендикулярна к ней, то ***углом между этой прямой и данной плоскостью*** называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис.22.4).

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол считается равным 90^o. Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то угол полагается равным нулю. Таким образом, для любой прямой и любой плоскости определена величина φ угла между ними, причем $0^o \le \varphi \le 90^o$.

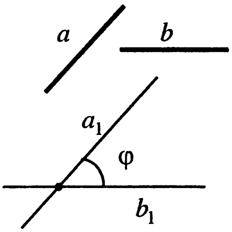


Рис.22.3

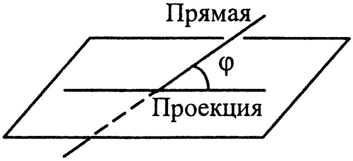


Рис.22.4

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую (рис.22.5). Полуплоскости называются ***гранями***, а ограничивающая их прямая – ***ребром двугранного угла***. Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым, перпендикулярным ребру. Угол, образованный этими полупрямыми, называется ***линейным углом*** двугранного угла. Его величина φ, принимается за меру двугранного угла. Двугранные углы называются ***равными***, если равны их линейные углы.

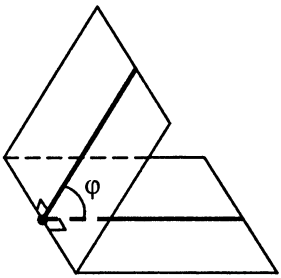


Рис.22.5

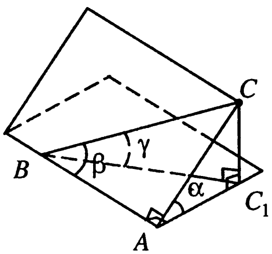


Рис.22.6

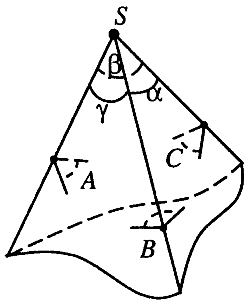


Рис.22.7

Теорема о трех синусах. *Пусть наклонная* BC*, лежащая в одной грани двугранного угла величиной* α*, образует с плоскостью другой грани угол* γ*, а с его ребром – угол* β (рис.22.6). *Тогда*

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ

Трехгранным углом $SABC$ называется фигура, образованная тремя лучами SA, SB, SC, исходящими из одной вершины S, и тремя плоскими углами ASB, BSC, CSA (рис.22.7). Эти углы называются ***гранями*** трехгранного угла, лучи – ***ребрами***, а их общая точка S – ***вершиной*** трехгранного угла. Трехгранный угол имеет шесть *измеряемых* элементов – три плоских угла и три двугранных. Стандартные обозначения этих углов указаны на рис.22.7: величины плоских углов BSC, ASC, ASB – α, β, γ, а величины двугранных углов SA, SB, SC – A, B, C. Заметим, что *сумма плоских углов трехгранного угла меньше* 360^o, *а сумма его двугранных углов больше* 180^o, *но меньше* 540^o.

Теорема синусов для трехгранного угла. *В трехгранном угле* $SABC$ (см. рис.22.7):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Теоремы косинусов для трехгранного угла. *В трехгранном угле* $SABC$ (см. рис.22.7):

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos C,$$

$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos\gamma.$$

Теоремы синусов и косинусов позволяют по трем любым углам трехгранного угла находить остальные.

МЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Сумма квадратов длин диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов длин его ребер (рис.22.8,*а*).

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (рис.22.8,*б*).

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=4a^2+4b^2+4c^2 \qquad d^2=a^2+b^2+c^2$$

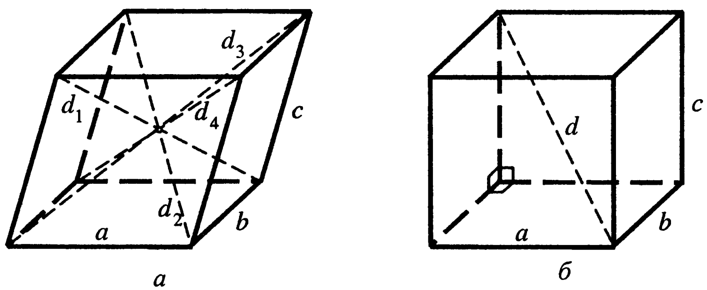


Рис.22.8

Эти утверждения являются обобщениями свойства параллелограмма и теоремы Пифагора соответственно.

ПЛОЩАДЬ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции. На рис.22.9 изображены: многоугольник площади S (жирными линиями), его проекция площади $S_{пр}$ (жирными линиями), плоскость многоугольника и плоскость проекции, угол между которыми равен φ. В этих обозначениях теорема принимает вид

$$S_{пр} = S \cdot \cos\varphi .$$

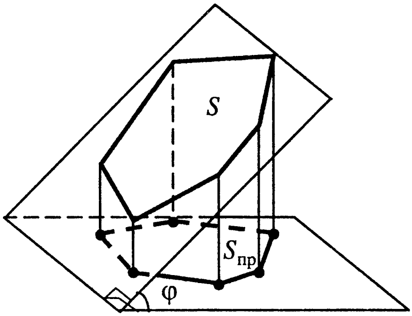


Рис.22.9

Заметим еще, что эта формула остается справедливой для проекций не только многоугольников, но и других плоских фигур, например круга и его частей.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКА

1. *Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей его граней.*

2. *Площадь S полной поверхности пирамиды равна сумме площади основания (S_o) и площади боковой поверхности ($S_{бок}$):*

$$S = S_o + S_{бок} .$$

Если боковые грани образуют равные двугранные углы (величиной φ) с основанием пирамиды, то

$$S_o = S_{бок} \cdot \cos\varphi ,$$

в частности, *эта формула справедлива для любой правильной пирамиды.*

3. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению апофемы на полупериметр основания.*

4. *Площадь боковой поверхности призмы равна произведению длины бокового ребра на периметр ее сечения плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.*

ФОРМУЛЫ ОБЪЕМОВ МНОГОГРАННИКОВ

Объем пирамиды. *Объем* V *пирамиды вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h,$$

где S_o *– площадь основания пирамиды, а* h *– ее высота.*

Объем тетраэдра. *Объем тетраэдра вычисляется по формулам:*

1) $V = \frac{1}{3} S_o \cdot h$, *где* S_o *– площадь основания тетраэдра, а* h *– его высота;*

2) $V = \frac{d}{6} ab \sin\varphi$, *где* a *и* b *– длины ребер тетраэдра, принадлежащие скрещивающимся прямым,* d *– расстояние между этими прямыми, а* φ *– угол между ними;*

3) $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, *где* S *– площадь полной поверхности тетраэдра, а* r *– радиус вписанной сферы.*

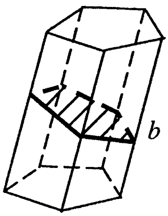


Рис.22.10

Объем призмы. *Объем призмы вычисляется по формулам:*

1) $V = S_o \cdot h$, *где* S_o *– площадь основания призмы, а* h *– ее высота;*

2) $V = S^{\perp} \cdot b$, *где* b *– длина бокового ребра,* $S^{\perp}$ *– площадь сечения призмы плоскостью* (рис.22.10), *перпендикулярной боковому ребру* (*и пересекающей все боковые ребра*).

ОСНОВНЫЕ АФФИННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении стереометрических задач в основном применяются аффинные свойства плоских фигур (см. §20). Приведем несколько дополнительных теорем, обобщающих известные планиметрические теоремы.

Теорема Фалеса (стереометрический аналог). *Любые две прямые делятся параллельными плоскостями на пропорциональные отрезки* (рис.22.11).

Опорный случай подобия пирамид. *Плоскость, параллельная основанию данной пирамиды, отсекает от нее пирамиду, подобную данной* (рис.22.12).

$$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

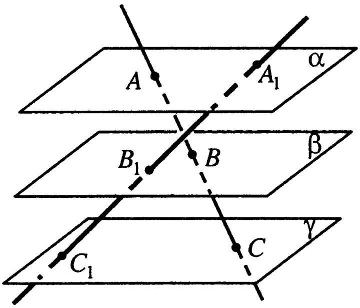


Рис.22.11

Плоскость $\alpha \parallel$ основанию

$$\Rightarrow SA_1B_1C_1D_1E_1 \sim SABCDE$$

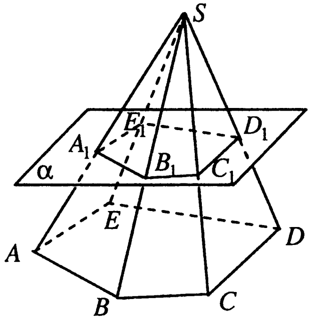


Рис.22.12

Сравнение объемов тел. Для сравнения объемов обычно находят их отношение, используя следующие свойства:

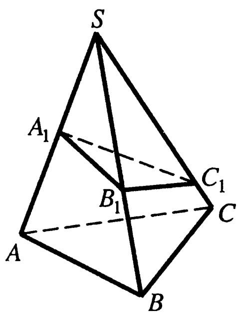
1) *отношение объемов пирамид, имеющих равные высоты, равно отношению площадей их оснований;*

2) *отношение объемов пирамид, имеющих равные основания, равно отношению их высот;*

3) *объемы треугольных пирамид, имеющих общий (или равные) трехгранный угол, относятся как произведения длин ребер, заключающих общий угол* (рис.20.13,*а,б*)*;*

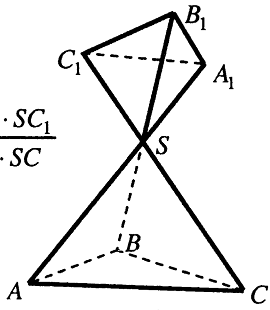
4) *объем пирамиды не изменится, если ее вершину передвигать параллельно основанию;*

5) *отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.*



а

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}{SA \cdot SB \cdot SC}$$



б

Рис.20.13

Пример 22.1. Через точку M пересечения медиан грани SAB треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость параллельно ребрам AC и BC. Найти отношение площади получившегося сечения к площади проекции грани SBC на плоскость основания параллельно прямой CM.

Решение. Плоскость сечения параллельна плоскости основания, так как она параллельна двум пересекающимся прямым AC и BC в плоскости основания (рис.22.14). Поэтому пирамида $SA_1B_1C_1$ подобна пирамиде $SABC$. Коэффициент подобия находим из отношения сходственных отрезков $k=\dfrac{SM}{SD}=\dfrac{2}{3}$ (по свойству медиан треугольника). Следовательно, площадь $S_{A_1B_1C_1}$ сечения в k^2 раз меньше площади S основания, т.е. $S_{A_1B_1C_1}=\dfrac{4}{9}S$.

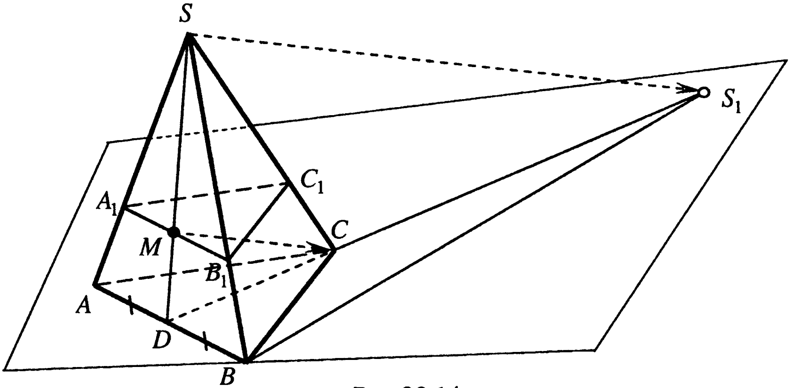


Рис.20.14

Построим теперь проекцию S_1BC грани SBC на плоскость основания. Для этого достаточно провести через вершину S прямую SS_1, параллельную CM, а также продлить медиану CD основания. При этом по свойству медиан $\dfrac{S_1C}{CD}=\dfrac{SM}{MD}=2$. Площадь треугольника BCD равна половине площади основания (так как медиана делит площадь треугольника пополам), а площадь треугольника S_1CB в 2 раза больше, чем площадь треугольника BCD (так как эти треугольники имеют общую высоту и $S_1C=2\cdot CD$). Таким образом, $S_{S_1CD}=S$. Тогда искомое отношение площадей равно $4:9$.

Ответ: $4:9$.

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВ И РАССТОЯНИЙ

ВЕЛИЧИНА УГЛА МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Для вычисления величины угла между данными прямыми нужно из одной точки отложить два отрезка, соответственно параллельных данным прямым. Достроить эти отрезки до треугольника. Расположение треугольника следует выбрать так, чтобы по исходным данным можно было легко вычислить длины сторон построенного треугольника. Затем по теореме косинусов вычислить величину искомого угла.

ВЕЛИЧИНА ДВУГРАННОГО УГЛА

Есть несколько приемов вычисления величины двугранного угла (или угла между плоскостями).

1. Первый способ – построение линейного угла. Линейный угол двугранного угла обычно строят, используя теорему о трех перпендикулярах (рис.22.15). Из точки A, принадлежащей одной грани двугранного угла, опускаем два перпендикуляра: один на ребро двугранного угла (AB), второй (AC) на другую грань. Соединяя основания перпендикуляров, получаем линейный угол ABC данного двугранного угла. Действительно, наклонная AB перпендикулярна ребру двугранного угла, следовательно, ее проекция BC также перпендикулярна ребру. После построения находим две стороны прямоугольного треугольника ABC, а затем и величину φ двугранного угла.

2. Второй способ – построение проекции данной конфигурации на плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла. При этом проекцией двугранного угла будет служить угол, равный его линейному углу (рис.22.16).

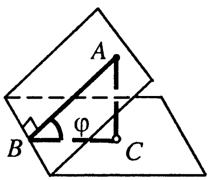


Рис.22.15

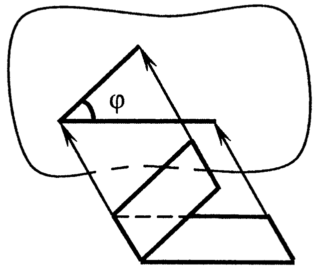


Рис.22.16

3. Величину φ двугранного угла можно найти, используя формулу

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi .$$

4. Двугранный угол равен одному из углов, образованных перпендикулярами к его граням.

ВЕЛИЧИНА УГЛА МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Как правило, угол между прямой и плоскостью находится по определению. Заметим только, что вместо данной прямой можно взять любую другую прямую, параллельную данной. Удобно брать такую прямую, для которой в данной конфигурации проще построить проекцию.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

***Расстояние** h **от точки** M **до прямой** l* – это длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Это расстояние можно вычислить разными способами.

1. Построить искомый перпендикуляр и вычислить его длину.

2. Построить плоскость, проходящую через точку M и перпендикулярную прямой l. Если L – точка пересечения этой плоскости с прямой l, то искомое расстояние – длина отрезка LM.

3. Взять на данной прямой две точки A и B. Расстояние h искать как высоту треугольника ABM, опущенную на основание AB. Здесь, как правило, используются разные формулы для площади треугольника.

4. Если через точку M провести прямую m, параллельную данной прямой l, то расстояние h равно расстоянию между прямыми m и l. Другими словами, точку M можно перенести параллельно прямой l в более удобное (для построения перпендикуляра) место.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

***Расстояние** h **от точки** M **до плоскости** π* – это длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость π. Это расстояние можно искать разными способами.

1) Построить искомый перпендикуляр и вычислить его длину.

2) Взять на данной плоскости π три точки A, B и C. Расстояние h искать как высоту треугольной пирамиды треугольника $MABC$, опущенную на основание ABC. Здесь, как правило, используются разные формулы для объема тетраэдра.

3) Через точку M провести плоскость m, параллельную π. Затем искать расстояние между параллельными плоскостями. Другими словами, точку M можно перенести параллельно плоскости π в любое более удобное (для построения перпендикуляра) место.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Расстояние** h **между скрещивающимися прямыми – это длина отрезка их общего перпендикуляра. Это расстояние можно искать разными способами.

1. Построить искомый перпендикуляр и вычислить его длину.

2. Построить параллельные плоскости, в которых лежат данные скрещивающиеся прямые. Затем искать расстояние между параллельными плоскостями.

3. Построить проекцию данной конфигурации на плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых. Тогда проекцией этой прямой будет одна точка M, а проекцией другой прямой – некоторая прямая l. Искомое расстояние равно расстоянию от полученной точки M до прямой l.

Для вычисления углов и расстояний можно применять **векторы и метод координат** (см. §29, §30).

Пример 22.2. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют длину a. Найти:

а) величину φ угла между диагональю AC основания и медианой SP грани SAB;

б) величину δ двугранного угла при боковом ребре пирамиды;

в) расстояние d от точки D до плоскости грани SAB;

г) расстояние ρ между скрещивающими прямыми AS и BC.

Решение. Пусть O – центр основания, Q – середина CD, M – середина BC, N – середина SC (рис.22.17,*а*). Так как все ребра имеют длину a, то диагональ основания $AC = a\sqrt{2}$ (рис.22.17,*б*), апофема $\hbar = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, высота пирамиды $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

а) Через точку P проведем прямую PM, параллельную AC. Величина φ искомого угла равна углу SPM. Так как треугольник SPM равнобедренный, то

$$\cos\varphi = \cos\angle SPM = \frac{PM}{2\cdot SP} = \frac{AC}{4\cdot SP} = \frac{a\sqrt{2}}{4\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

б) Опустим из вершин B и D перпендикуляры BN и DN на ребро SC. Эти перпендикуляры имеют одно основание N, так как грани правильной пирамиды равны. Таким образом, построен линейный угол BND искомого двугранного угла. Найдем его величину δ. Треугольник BND – равнобедренный, следовательно $\sin\dfrac{\delta}{2} = \sin\angle BNO = \dfrac{BO}{BN} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Таким образом, $\delta = 2\cdot\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

в) Искомое расстояние d от точки D до плоскости грани SAB равно расстоянию от точки Q до той же плоскости. Так как плоскость треугольника SPQ перпендикулярна грани SAB, то искомое расстояние равно высоте треугольника SPQ, опущенной из вершины Q. Выразим дважды площадь S_Δ этого треугольника

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot SO \quad \text{и} \quad S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot SP\cdot d.$$

Отсюда $d = \dfrac{PQ\cdot SO}{SP} = \dfrac{a\cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

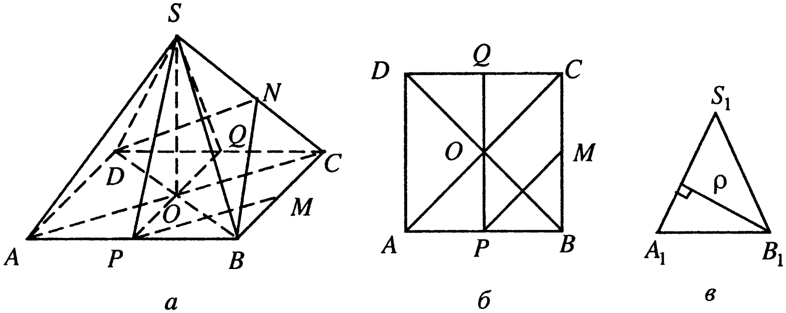


Рис.22.17

г) Построим проекцию пирамиды на плоскость, перпендикулярную прямой BC (рис.22.17,*в*). Пусть B_1 – проекция прямой BC, S_1A_1 – проекция ребра SA (рис.22.17,*в*). Требуется найти расстояние ρ от точки B_1 до прямой S_1A_1. Заметим, что S_1A_1 – это проекция грани SAD, S_1B_1 – проекция грани SBC, A_1B_1 – проекция основания $ABCD$. Следовательно, $S_1A_1 = S_1B_1 = \hbar$, $A_1B_1 = a$. Таким образом, треугольник $S_1A_1B_1$ равен треугольнику SPQ, т.е. $\rho = d = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\delta = 2\cdot\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\rho = d = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Пример 22.3. Одна из сторон правильного треугольника образует с плоскостью α угол 30^o, другая – 45^o. Найти величину двугранного угла между плоскостью этого треугольника и плоскостью α.

Решение. Пусть ABC данный правильный треугольник, A_1, B_1 – проекции вершин A, B соответственно (рис.22.18). Примем длину стороны данного треугольника за 2 (условных единицы длины). Тогда из прямоугольных треугольников BB_1C, AA_1C находим: $BB_1 = 1$; $CB_1 = \sqrt{3}$, $AA_1 = CA_1 = \sqrt{2}$. В прямоугольной трапеции ABB_1A_1 проведем высоту BD. Тогда $AD = \sqrt{2} - 1$, $BD = A_1B_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$. Рассмотрим теперь треугольник A_1B_1C – проекцию треугольника ABC. Зная длины его сторон, по теореме косинусов находим величину γ угла A_1CB_1: $\cos\gamma = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$. Затем определяем синус этого угла: $\sin\gamma = \sqrt[4]{\dfrac{8}{9}}$. Теперь находим площадь S_1 этого треугольника $S_1 = \sqrt[4]{2}$. Косинус искомого угла φ вычисляем как отношение площади S_1 проекции к площади $S = \sqrt{3}$ треугольника ABC: $\cos\varphi = \sqrt[4]{\dfrac{2}{9}}$.

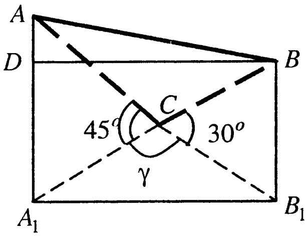


Рис.22.18

Ответ: $\arccos\sqrt[4]{\dfrac{2}{9}}$.

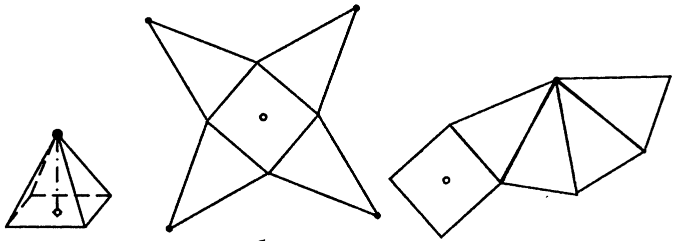
РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ДОСТРАИВАНИЕ ТЕТРАЭДРА

РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ

Если поверхность тела можно разрезать на конечное число частей и выложить на плоскость эти части без искажений (деформаций) и без наложений друг на друга, то получим плоскую фигуру, которая называется ***разверткой***. Разумеется, не всякую поверхность можно развернуть. Например, части сферы невозможно разместить в плоскости без искажения.

Развертка поверхности многогранника представляет собой набор многоугольников – граней многогранника. Смежные грани многогранника на развертке изображают так, чтобы у них оказалась одна общая сторона, равная общему ребру этих граней.

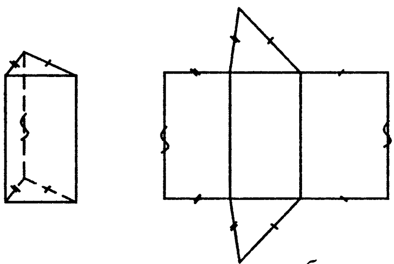
Развертка пирамиды. Разрежем поверхность пирамиды по всем боковым ребрам и развернем каждую боковую грань в плоскость основания. Получим развертку пирамиды (если она была выпуклым многогранником). Другую развертку можно получить, разрезав поверхность пирамиды по одному боковому ребру и по всем сторонам основания, за исключением одной. После этого развернуть все грани в плоскость основания. На рис.22.19,*а* изображена правильная четырехугольная пирамида, а на рис.22.19,*б*,*в* – две ее развертки.



а *б* *в*

Рис.22.19

Развертка призмы. Разрежем поверхность призмы по одному боковому ребру и по всем сторонам оснований, за исключением двух, принадлежащих одной (выбранной) боковой грани. Развернем все грани призмы в плоскость выбранной грани. Получим развертку призмы (если она была выпуклым многогранником). На рис.22.20,*а* изображена прямая призма, а на рис.22.20,*б* – ее развертка. Отмеченные одинаковыми засечками стороны граней на развертке соответствуют одному ребру призмы.



а *б*

Рис.22.20

ДОСТРАИВАНИЕ ТЕТРАЭДРА

В некоторых задачах треугольную пирамиду (тетраэдр) удобно достроить до другого многогранника. Обычно, это треугольная призма или параллелепипед, реже – другой тетраэдр.

Достраивание тетраэдра до призмы. Пусть дан тетраэдр $SABC$ (рис.22.21). Выберем в плоскости основания точку O (рис.22.21,*а*). Отложим от вершин основания отрезки AA_1, BB_1, CC_1, равные и параллельные отрезку SO. Получим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Аналогичное построение можно выполнить, взяв вместо точки O вершину основания (рис.22.21,б). Заметим, что объем построенной призмы в 3 раза больше объема данного тетраэдра.

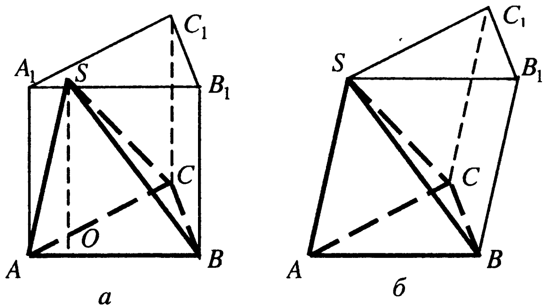


Рис.22.21

Достраивание тетраэдра до параллелепипеда. Рассмотрим два построения.

1. Каждую из трех граней данного тетраэдра $ABCD$ с общей вершиной A достроим до параллелограмма (рис.22.22). Получим параллелепипед $ABMCDB_1M_1C_1$. Заметим, что объем этого параллелепипеда в 6 раз больше объема данного тетраэдра.

2. Через каждое ребро данного тетраэдра $ABCD$ проведем плоскость, параллельную противоположному ребру. При этом для каждой пары скрещивающихся ребер будем иметь пару параллельных плоскостей, в которых лежат эти ребра. Построенные три пары параллельных плоскостей ограничивают в пространстве параллелепипед (рис.22.23). Заметим, что объем этого параллелепипеда в 3 раза больше объема данного тетраэдра. Если противоположные ребра тетраэдра равны, то построенный параллелепипед оказывается прямоугольным.

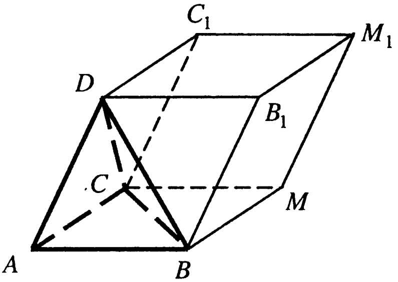


Рис.22.22

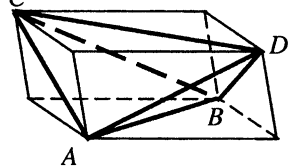


Рис.22.23

РЕШЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ПИРАМИД

В планиметрии вычислительные задачи опираются на умение решать треугольники (на треугольники можно разбить любой многоугольник). В стереометрии аналогичным объектом является треугольная пирамида (тетраэдр). Важно уметь "решать треугольные пирамиды", т.е. находить величины плоских и двугранных углов, длины отрезков, расстояния от точки до прямой или между двумя непересекающимися прямыми, вычислять площади граней и объем пирамиды.

Сначала рассмотрим правильные пирамиды.

Правильная n-угольная пирамида задается двумя величинами, например (рис.22.24):

– стороной основания a и высотой h;

– стороной основания a и апофемой $\hbar$;

– стороной основания a и углом α наклона боковой грани (или, что то же самое, величиной двугранного угла, образованного боковой гранью и основанием пирамиды);

– стороной основания a и углом β наклона бокового ребра к плоскости основания;

– стороной основания a и плоским углом γ при вершине пирамиды;

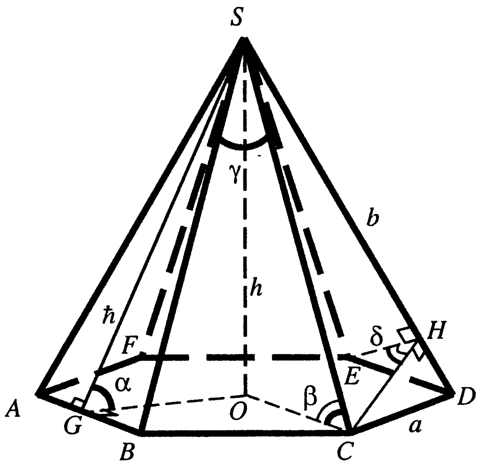


Рис.22.24

– стороной основания a и двугранным углом δ при боковом ребре (или, что то же самое, двугранным углом, образованным смежными боковыми гранями).

Во всех перечисленных случаях вместо стороны основания можно взять длину b бокового ребра, а также любые другие измерения, однозначно задающие правильный n-угольник: периметр, площадь, радиус вписанной (или описанной) окружности и т.п.

Заметим, что с точностью до подобия правильная n-угольная пирамида задается всего одним параметром, например, одним углом α (β, γ, δ), либо еще каким-нибудь аналогичным углом. Так как подобные фигуры имеют соответственно равные углы, заключаем, что задание одного угла в правильной пирамиде позволяет найти все остальные ее углы.

Получим, например, формулы пересчета углов для правильной шестиугольной пирамиды (рис.22.24). Пусть сторона основания пирамиды равна a. Выражая высоту SO пирамиды из прямоугольных треугольников SGO и SCO, получаем равенство

$$SO = OG \cdot \operatorname{tg}\alpha = OC \cdot \operatorname{tg}\beta .$$

Подставляя $OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $OC = a$, находим соотношение, связывающее углы наклона боковой грани и бокового ребра:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}\beta .$$

Найдем связь между углами γ и δ. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник SCD с углом γ при вершине. Высота

$$CH = a \cdot \sin\left(90^o - \frac{\gamma}{2}\right) = a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

является боковой стороной равнобедренного треугольника CHE. Выражаем основание

$$CE = 2 \cdot CH \cdot \sin\frac{\delta}{2} = 2 \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2} .$$

С другой стороны $CE = a\sqrt{3}$ – это диагональ правильного шестиугольника. Поэтому

$$2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{3} .$$

Найдем еще формулу, связывающую углы β и γ. Из прямоугольного треугольника SOC имеем $SC = \frac{a}{\cos\beta}$, а из равнобедренного треугольника BSC – $a = 2 \cdot SC \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$. Следовательно, $\cos\beta = 2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$.

Таким образом, для углов правильной шестиугольной пирамиды имеются формулы:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}\beta ; \quad 2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{3} ; \quad \cos\beta = 2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} .$$

Выведенные формулы позволяют вычислить все характерные углы правильной шестиугольной пирамиды, зная всего лишь один угол. Разумеется, эти формулы получены не для запоминания, а для иллюстрации методики решения правильных пирамид. Как видим, решение правильной пирамиды сводится к решению прямоугольных и равнобедренных треугольников.

Как отмечалось выше, треугольная пирамида (тетраэдр) полностью задается 6 измеряемыми элементами. Это могут быть длины шести ее ребер или другой характерный набор длин отрезков и величин углов. Остальные элементы (ребра и углы) находятся с помощью основных метрических соотношений. Предположим, например, что пирамида задана 6-ю своими ребрами. Тогда плоские углы вычисляем, применяя теорему косинусов для каждой грани пирамиды. Величины двугранных углов, образованных гранями пирамиды, находим, применяя теорему косинусов для трехгранного угла.

Пример 22.4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 4$ м, $AB = 5$ м. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 3 м. Найти величины двугранных углов с ребрами SB, AB, BC.

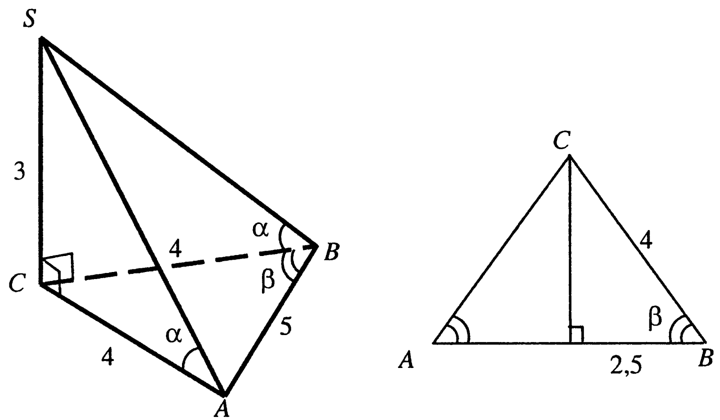


Рис.22.25

Решение. По теореме Пифагора находим гипотенузы прямоугольных треугольников (рис.22.25): $SA = SB = 5$ м. Следовательно, треугольник SAB – равносторонний. Все его углы равны 60^o. Обозначим через α и β величины соответственно равных углов $\alpha = \angle SAC = \angle SBC$, $\beta = \angle ABC = \angle BAC$. Синусы и косинусы этих углов находим из прямоугольного треугольника SAC и равнобедренного треугольника ABC:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}; \qquad \cos\beta = \frac{5}{8}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Итак, все плоские углы трехгранного угла $BACS$ получены. Теперь будем искать величины двугранных углов. (Их величины будем обозначать символом угла с указанием ребра двугранного угла. Например, $\angle AB$ – двугранный угол при ребре AB.) Заметим, что из-за перпендикулярности ребра SC плоскости основания имеем, $\angle AC = \angle BC = \dfrac{\pi}{2}$. Найдем величины двугранных углов при ребрах AB и SB. По теореме косинусов для трехгранного угла $BACS$:

$$\cos\alpha = \cos 60^o \cdot \cos\beta + \sin 60^o \cdot \sin\beta \cdot \cos\angle AB .$$

Подставляя значения плоских углов, получаем:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{39}}{8}\cdot\cos\angle AB .$$

Отсюда $\angle AB = \arccos\dfrac{\sqrt{13}}{5}$.

Еще раз записываем теорему косинусов для трехгранного угла $BACS$:

$$\cos\beta = \cos\alpha \cdot \cos 60^o + \sin\alpha \cdot \sin 60^o \cdot \cos\angle SB .$$

Отсюда $\dfrac{5}{8} = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\angle SB$. Следовательно, $\angle SB = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $\arccos\dfrac{\sqrt{13}}{5}$; $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 22.5. Из некоторой точки пространства все ребра правильной треугольной пирамиды видны под одним и тем же углом. Найти величину этого угла.

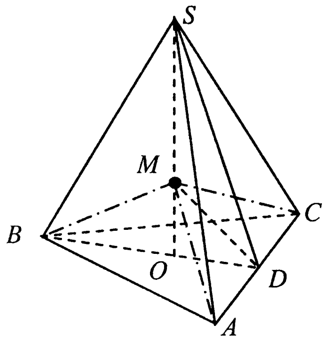


Рис.22.26

Решение. Пусть $SABC$ – правильная треугольная пирамида, SO – ее высота, SD - апофема грани SAC, M – точка, из которой все ребра пирамиды видны под равными углами (рис.22.26). Покажем сначала, что точка M лежит на высоте SO. Действительно, так как углы SMA и SMC равны между собой, то проекция точки M на грань SAC принадлежит биссектрисе угла ASC, т.е. прямой SD. Следовательно, точка M принадлежит плоскости, перпендикулярной грани SAC и проходящей через вершину пирамиды S, но эта плоскость – есть плоскость треугольника SBO. Аналогично из равенства углов SMB и SMC заключаем, что точка M лежит в плоскости треугольника SAO. Значит, точка M принадлежит линии пересечения плоскостей SBO и SAO, т.е. прямой SO.

Обозначим через a сторону основания пирамиды, а через α – искомую величину равных углов ($\alpha = \angle SMB = \angle AMC$). Из равнобедренного треугольника AMC найдем MD: $MD = AD \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника MOB выразим катет OM:

$$OM = OB \cdot \mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -OB \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Учитывая выражения $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника MOD: $MD^2 = OD^2 + MO^2 \Rightarrow$ $\frac{a^2}{4}\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3}\mathrm{ctg}^2\alpha$. Сокращая на a^2 и умножая на 12, получаем тригонометрическое уравнение для искомой величины α: $3 \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = 1 + 4 \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha$. Выразим котангенсы через синусы и косинусы угла α, применяя формулы: $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{3(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 \quad \Rightarrow \quad 3(1+\cos\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

Раскрывая скобки и применяя основное тригонометрическое тождество, получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Следовательно, $\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right)$. *Ответ:* $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right)$.

Пример 22.6. Боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны 5 см, а сторона AC основания – 6 см. Двугранный угол при ребре AB равен 90^o, а сумма двугранных углов при боковых ребрах SC и SB равна 180^o. Найти объем пирамиды.

Решение. Обозначим через $\angle 1$ и $\angle 2$ величины двугранных углов пирамиды $SABC$ при ребрах SB и SC соответственно (рис.22.27,*а*). По условию задачи $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$. На продолжении ребра BS возьмем точку D так, чтобы $SD = SB$. Рассмотрим пирамиду $SACD$. Величину двугранного угла при ребре SC этой пирамиды обозначим через $\angle 3$. Заметим, что этот угол смежный с $\angle 2$: $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$. Отсюда заключаем, что $\angle 1 = \angle 3$, т.е. двугранные углы при ребрах SC и SD пирамиды $SACD$ равны.

Докажем, что у этой пирамиды $AD = AC$. Действительно, пусть AK – высота пирамиды $SACD$, опущенная из вершины A (рис.22.27,*б*), а углы AFK и AGK – линейные углы равных двугранных углов. Так как треугольники AFK и AGK равны (по общему катету и равным противолежащим углам), то точка K равноудалена от сторон угла CSD. Следовательно, она лежит на биссектрисе SE равнобедренного треугольника CSD. Поскольку биссектриса SE является также серединным перпендикуляром к стороне CD, то точка K равноудалена от вершин C и D. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников AKC и AKD (по двум катетам: $CK = DK$, AK – общий катет), что, в свою очередь, означает равенство гипотенуз: $AD = AC = 6$ см.

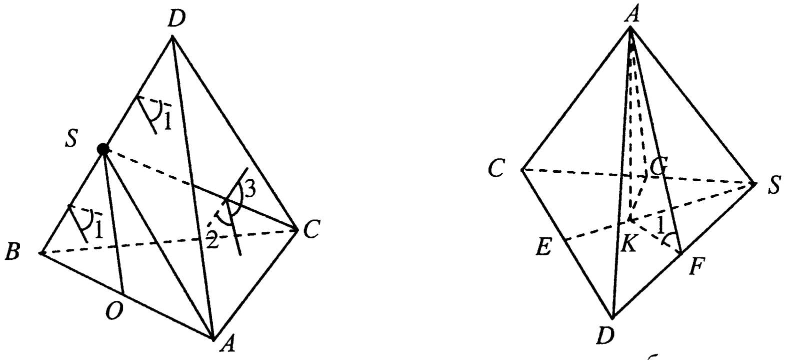


Рис.22.27

Займемся теперь вычислением объема пирамиды $SABC$ (рис.22.27,*а*). Пусть SO – высота равнобедренного треугольника SAB. По условию задачи грань SAB перпендикулярна плоскости основания (ABC). Следовательно, SO – высота пирамиды $SABC$. Заметим, что треугольник ABD – прямоугольный, так как его медиана AS в два раза меньше стороны BD. Следовательно, по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 8$ см. Кроме того, отрезок SO является средней линией треугольника ABD, т.е. $SO = \dfrac{1}{2} AD = 3$ см. Осталось найти площадь S_{ABC} основания пирамиды. Так как пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра, то ее вершина S проецируется в центр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, сторона AB является диаметром описанной окружности и угол ACB – прямой. По гипотенузе AB и катету AC находим другой катет:

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=2\sqrt{7}$ см, а затем и площадь треугольника ABC: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=6\sqrt{7}$ см^2. Теперь объем пирамиды легко вычисляется:

$V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SO=6\sqrt{7}$ см^3. *Ответ*: $6\sqrt{7}$ см^3.

Задачи для самостоятельного решения

Метрические свойства правильных пирамид и призм

22.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямой, проходящей через точки A и D_1, и прямой, проходящей через точку C и середину ребра C_1D_1. *Ответ*: $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

22.2. Все ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны. Найти величину угла между прямыми SM и AN, если M – середина BC, а N – середина SC. *Ответ*: $\arccos\dfrac{1}{6}$.

22.3. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен 45°. Найти величину угла между скрещивающимися диагоналями боковых граней этой призмы.

Ответ: 90^o.

22.4. Все ребра четырехугольной пирамиды имеют одинаковую длину. Найти величину угла между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. *Ответ:* $\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

22.5. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны 2 м. Найти расстояние между прямой, содержащей диагональ основания, и прямой, содержащей апофему пирамиды. *Ответ*: $\sqrt{0{,}4}$ м.

22.6. Дан куб с ребром 2 м. Найти расстояние между скрещивающимися диагональю куба и его ребром. *Ответ*: $\sqrt{2}$ м.

22.7. Дан куб с ребром 1 м. Найти расстояние между скрещивающимися диагональю куба и диагональю его грани. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{6}}$ м.

22.8. Численное значение площади (в квадратных метрах) боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равно косинусу угла наклона боковой грани к плоскости основания, а численное значение площади (в квадратных метрах) основания равно синусу этого же угла. Найти объем пирамиды. *Ответ*: $\frac{3-\sqrt{5}}{6\sqrt{3\sqrt{3}}}$ м^3.

Метрические свойства пирамид и призм

22.9. Все грани пирамиды являются равными треугольниками со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Найти объем пирамиды. *Ответ*: $42\sqrt{55}$ см^3.

22.10. В треугольной пирамиде углы между боковыми ребрами равны 45^o, 45^o и 60^o. Найти величины углов между боковыми гранями.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

22.11. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC со сторонами $AB = 12$ см, $BC = 9$ см, $AC = 15$ см. На стороне BC взята точка M так, что $BM = 4$ см. В плоскости треугольника AA_1M взята точка N так, что прямая BN пересекает ребро A_1C_1 в некоторой точке Q. Известно, что $BN = 3 \cdot NQ$. Найти длину отрезка B_1Q. *Ответ*: $\sqrt{83{,}2}$ см.

22.12. Найти величину угла между двумя диагоналями разных боковых граней правильной треугольной призмы, если сторона основания призмы равна a, а объем призмы равен V. *Ответ*: $\arccos\frac{32V^2 \pm 3a^6}{32V^2 + 6a^6}$.

22.13. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB = 8$ м, $BC = 3$ м. Боковые ребра SA, SB и грань SCD образуют с плоскостью основания углы в 45^o. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\frac{100}{3}$ м^3.

22.14. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC: $AB = BC = 10$ м, $AC = 16$ м. Точки M и N – середины ребер AB и AC соответственно. Прямые SM, SN и грань SAC образуют с плоскостью основания углы в 45^o. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{200}{3}$ м^3.

22.15. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 1$ м. Двугранные углы при ребрах SA, CD, SB равны 120^o, 90^o, 120^o соответственно. Найти объем пирамиды, если известно, что $\angle CSD = 90^o$. *Ответ*: $\dfrac{1}{12}$ м^3.

22.16. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 13$ см, $AD = 14$ см и диагональю $AC = 15$ см. Ребра SA, SB, SC наклонены к плоскости основания под равными углами величиной 45^o. Найти объем пирамиды. *Ответ*: 455 см^3.

22.17. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ м, $AD = 13$ м и диагональю $AC = 15$ м. Грани SAB, SBC и плоскость диагонального сечения SAC образуют с основанием пирамиды равные углы величиной 45^o. Найти объем пирамиды. *Ответ*: 24 м^3.

22.18. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ служит треугольник со сторонами $AB = AC = 2$ м, $BC = 2\sqrt{2}$ м. Величины двугранных углов при ребрах AD, BD и CD равны соответственно 120^o, 60^o и 60^o. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C на плоскости противоположных боковых граней пирамиды. *Ответ*: $0{,}5\sqrt{3}$ м^2.

22.19. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ м и $BC = 4$ м. Отрезок BD_1 перпендикулярен плоскости основания призмы. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найти величины двугранных углов между каждой боковой гранью и плоскостью основания этой призмы.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

22.20. В пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC, $SA = 3$ м, $BC = 6$ м. Двугранные углы при ребрах SB и SC равны 60^o. Найти объем пирамиды. *Ответ*: 9 м^3.

22.21. В треугольной пирамиде отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, взаимно перпендикулярны. Длины указанных отрезков равны 1 м, 2 м, 3 м. Найти объем пирамиды. *Ответ*: 2 м^3.

Аффинные свойства пирамид и призм

22.22. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет объем 1 м^3. Точки P и Q являются точками пересечения медиан треугольников AA_1D_1 и $A_1B_1C_1$ соответственно, а точка S – середина ребра AB. Найти объем пирамиды $SCPQ$. *Ответ*: $\frac{1}{9}$ м^3.

22.23. На ребре A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E. Найти отношение объемов пирамид EMC_1B_1 и $ABME$, если M – точка пересечения медиан треугольника ABC. *Ответ*: $3:1$.

22.24. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$, в которой $AB \| CD$. Найти объем пирамиды, если известно, что площадь грани SAD равна 3 м^2, а точка пересечения медиан треугольника SBC удалена на 1 м от плоскости грани SAD.

Ответ: 3 м^3.

22.25. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом 60^o. Известно, что все отрезки, соединяющие вершины пирамиды с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке. Найти отношение длин боковых ребер пирамиды. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{2}:1$.

22.26. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC. Все боковые грани имеют равные площади. Величины двугранных углов при ребрах SA и SB равны $\arccos\frac{5}{7}$. Найти отношение $SA:SC$. *Ответ*: $\sqrt{2}:2$.

§23. СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Плоскость, проходящая через внутреннюю точку геометрического тела, называется ***секущей***. Точки тела лежат по обе стороны от секущей плоскости. Точки, принадлежащие и телу и секущей плоскости, образуют фигуру, которая называется ***сечением*** (плоским сечением). Чтобы построить сечение данного тела плоскостью, нужно изобразить на чертеже линию пересечения, т.е. множество точек, принадлежащих поверхности тела и секущей плоскости.

Линия пересечения многогранника плоскостью является замкнутой ломаной (быть может, не одной). Каждая вершина ломаной совпадает либо с вершиной многогранника, если она лежит в секущей плоскости, либо с точкой пересечения секущей плоскости с ребром многогранника. Каждое звено ломаной либо совпадает с ребром многогранника, если оно лежит в секущей плоскости, либо является отрезком, по которому секущая плоскость пересекает грань. *Сечением выпуклого многогранника является выпуклый многоугольник, число сторон которого не превосходит числа граней многогранника.*

Для построения сечения многогранника достаточно найти точки, в которых ребра многогранника или их продолжения пересекают секущую плоскость. Проще всего строятся *диагональные сечения* призмы, когда секущая плоскость проходит через два боковых ребра призмы, не принадлежащих одной грани (рис.23.1). В этом случае сечение является параллелограммом.

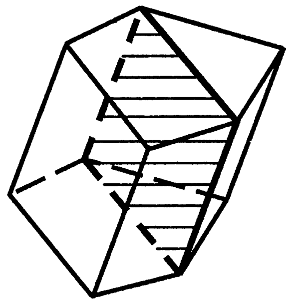


Рис.23.1

Чаще секущая плоскость задается тремя точками, принадлежащими поверхности многогранника, или точкой на поверхности многогранника и ***следом*** – прямой, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани многогранника.

Для построения сечений полезны следующие простые приемы.

Пусть даны две плоскости α и β, которые пересечены плоскостью γ (секущей). Плоскость γ задана прямой (следом) a пересечения с плоскостью α и точкой B, лежащей в плоскости β. Требуется построить прямую b пересечения плоскостей γ и β.

Рассмотрим сначала случай, когда плоскости α и β параллельны (рис.23.2). В этом случае построение очевидно: через точку B проводим прямую b, параллельную прямой a.

Пусть теперь плоскости α и β пересекаются по прямой c. Здесь возможны два случая: прямые a и c параллельны (рис.23.3) или пересекаются (рис.23.4). В первом случае прямая c оказывается параллельной плоскости γ. Поэтому прямая b будет параллельна прямой a. Следовательно, через точку B проводим прямую, параллельную a. Это будет искомая прямая b. Во втором случае, когда прямые a и c пересекаются, например, в точке C, прямая b также будет проходить через точку C. Следовательно, искомая прямая b совпадает с прямой BC.

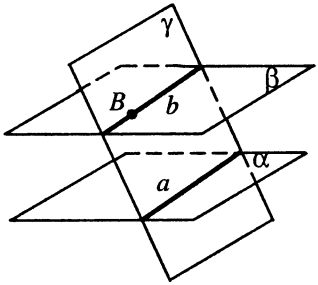


Рис.23.2

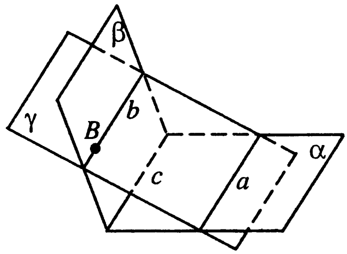


Рис.23.3

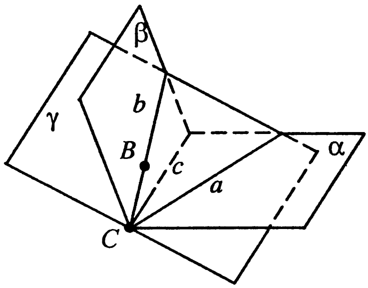


Рис.23.4

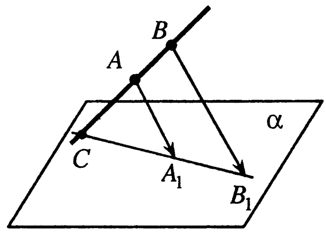


Рис.23.5

Последнее построение можно представить по-другому. Пусть дана плоскость α, наклонная AB и ее проекция A_1B_1 (не обязательно ортогональная) на данную плоскость (рис.23.5). Очевидно, что *наклонная пересекает плоскость в той же точке, в которой она пересекает свою проекцию.*

Используя эти соображения, построим, например, сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через три заданные точки на трех гранях тетраэдра. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр, а K, L, M заданные точки, принадлежащие граням ABD, BCD и ACD соответственно (рис.23.6). Требуется построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Сначала построим след, по которому плоскость сечения пересекает плоскость треугольника ABC (основание тетраэдра). Для этого надо найти точки, в которых прямые KL и ML пересекают основание. Построим проекции K_1 и L_1 точек K и L на плоскость основания, проводя через них прямые, параллельные ребру BD (на рис.23.6,*а* они обозначены стрелками). Продлив наклонную KL и ее проекцию K_1L_1, получаем точку P. Эта точка принадлежит секущей плоскости и плоскости основания. Аналогичным об-

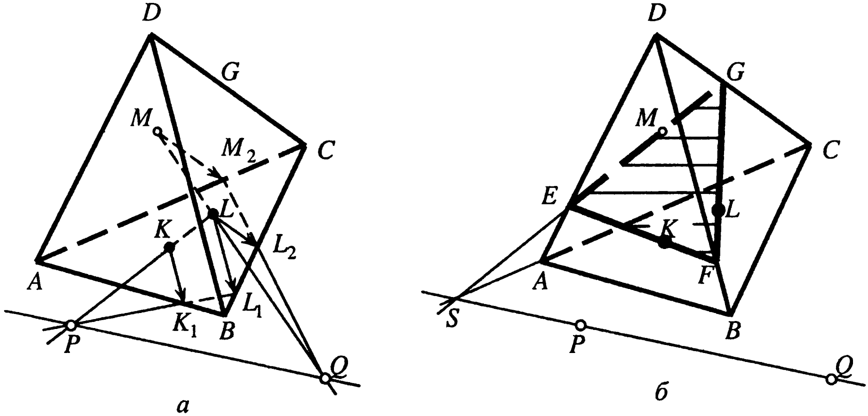


Рис.23.6

разом строим точку Q, в которой наклонная ML пересекает свою проекцию M_2L_2. Прямая PQ – искомый след.

Теперь построение легко завершить (рис.23.6,*б*). Найдем точку S, в которой след пересекает ребро AC, а следовательно, и плоскость грани ACD. Через точки S и M проводим прямую, которая принадлежит секущей плоскости и плоскости грани ACD. Находим точки E и G. Затем проводим прямые EK и GL, которые пересекаются на ребре BD в точке F. Сечение – треугольник EFG – построено.

Пример 23.1. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, делящее пирамиду на верхнюю и нижнюю части, объемы которых относятся как 3:5. Площадь сечения равна площади основания пирамиды. Найти величину угла между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

Решение. Пусть трапеция $AMND$ – заданное сечение (рис.23.7,*а*). Примем длину бокового ребра пирамиды за единицу, а длину отрезка SN за x. Обозначим через V объем пирамиды. Проведем плоскость SBD, разбивающую пирамиду на две равные части. Объем пирамиды $DMNS$ относится к объему пирамиды $DBCS$ как $x^2:1$ (поскольку высота, проведенная из точки D, у них общая, а площади оснований SMN и SBC относятся как $x^2:1$). Аналогично $V_{DAMS}:V_{DABS}=x:1$. Итак,

$$V_{SAMND} = V_{DMNS} + V_{DAMS} = x^2\frac{V}{2} + x\frac{V}{2}.$$

По условию задачи этот объем равен $\frac{3}{8}V$, т.е. $\frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{3}{8}$. Отсюда $x = \frac{1}{2}$, т.е. точки M и N – середины боковых ребер.

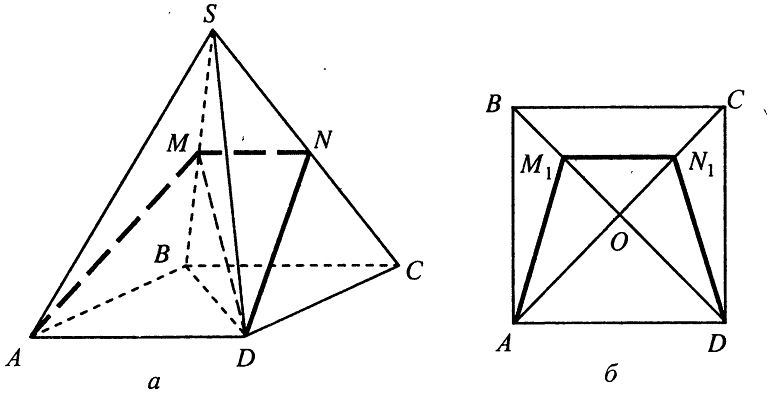


Рис.23.7

Найдем площадь S_1 проекции AM_1N_1D сечения $AMND$ на плоскость основания (рис.23.7,*б*). Пусть a – сторона квадрата $ABCD$. Так как M_1 и N_1 – середины отрезков BO и CO, находим, что площадь S_1 трапеции AM_1N_1D равна $\frac{a+\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{3}{4}a$, т.е. $S_1 = \frac{9a^2}{16}$. Следовательно, проекция составляет $\frac{9}{16}$ площади $S_0 = a^2$ основания или площади сечения. Тогда искомый угол α находится по формуле $S_1 = S_0 \cdot \cos\alpha$. *Ответ*: $\arccos\frac{9}{16}$.

Пример 23.2. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$. Найти, в каком отношении сечение, проведенное через точку A и середины ребер SB и SD, делит ребро SC.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$; M, N – середины ребер SB и SD соответственно (рис.23.8). Отрезки MN и SO пересекаются в точке K, которая делит каждый из них пополам (по свойствам средней линии и медианы треугольника SBD). Прямая AK пересекает ребро SC в точке E. Тогда $AMEN$ – заданное сечение, а величина $SE:EC$ – искомое отношение. Рассмотрим диагональное сечение SAC пирамиды. Проведем через точку O прямую OF, параллельную AE. Тогда по теореме Фалеса получаем: $SK : KO = SE : EF$, $AO : OC = EF : FC$. Отсюда $SE = EF = FC$, т.е. $SE : EC = 1:2$. *Ответ*: $1:2$.

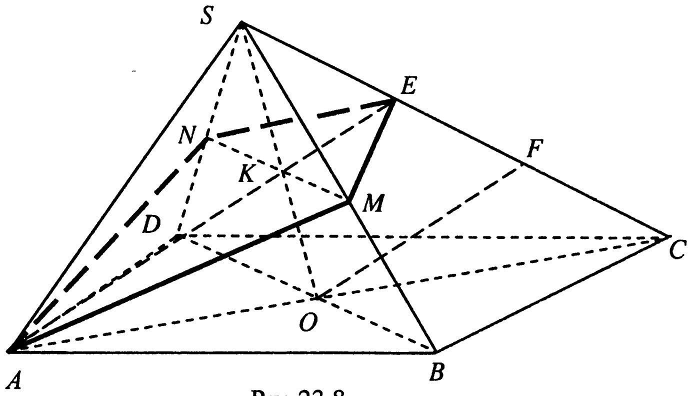


Рис.23.8

Задачи для самостоятельного решения

Аффинные свойства сечений

23.1. В треугольной пирамиде $ABCD$ через медиану CM грани ABC проведена плоскость, параллельная медиане AN грани ACD. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды? *Ответ*: $1:5$.

23.2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребрах SB и SC взяты соответственно точки M и N так, что $SM : MB = CN : NS = 1:3$. Плоскость проходит через точки A, M и N. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды? *Ответ*: $121:167$.

23.3. Через вершину A параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, точку пересечения отрезков $B'C$ и BC', а также точку K, делящую ребро $A'B'$ в отношении $A'K : KB' = 1:5$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок $B'D$? *Ответ*: $11:5$.

23.4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB и углом при вершине A, косинус которого равен $0{,}8$. Точка O пересечения биссектрис основания соединена с вершиной S, а на ребрах SA и SB взяты соответственно их середины M и N. В каком отношении плоскость CMN делит отрезок SO? *Ответ*: $12:7$.

23.5. Высота правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ в 6 раз больше стороны основания. Через вершину A перпендикулярно граням SEF и SCD проходит плоскость. В каком отношении эта плоскость делит площадь грани SDE ? *Ответ*: $529:96$.

23.6. Через сторону AB основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ и через прямую, параллельную боковым граням SBC и SAF, проведена плоскость. В каком отношении делит эта плоскость площадь грани SDE ? *Ответ*: $1:8$.

23.7. Точка M – середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$, а точка N – середина ребра SB. Плоскость CMN пересекает в точке O отрезок, соединяющий вершину S с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Найти отношение площадей треугольников OMN, OMC и ONC.
Ответ: $1:2:2$.

23.8. Плоскость, содержащая ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, разбивает эту пирамиду на два многогранника равного объема. В каком отношении эта плоскость делит площадь боковой поверхности пирамиды? *Ответ*: пополам.

23.9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка K делит боковое ребро SB в отношении $SK:KB=2:1$, точка L – середина бокового ребра SC. Через точки A,K,L проведено сечение, пересекающее ребро SD в точке M. Известно, что объем пирамиды $AKMD$ равен 1 м^3. Найти объем пирамиды $SAKLM$. *Ответ*: 3 м^3.

23.10. В треугольной пирамиде $SABC$ точка M делит ребро SA в отношении $SM:MA=2:1$, точка N делит ребро SB в отношении $SN:NB=1:2$, а точка P – середина ребра AC. В каком отношении плоскость BCM делит отрезок NP ? *Ответ*: $3:8$.

23.11. Вершина S треугольной пирамиды $SABC$ проектируется в середину O медианы AM основания. Через точку A и середины боковых ребер SB и SC проходит плоскость. Найти величину угла наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если площадь сечения равна площади основания. *Ответ*: $\arccos\frac{3}{8}$.

23.12. Сумма периметров боковых граней правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше периметра ее основания. Сечение пирамиды некоторой плоскостью представляет собой квадрат. В каком отношении делит объем пирамиды эта плоскость? *Ответ*: $20:7$.

23.13. Основанием пирамиды $SABCD$ служит выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, причем

$BO = OD$. Через боковое ребро SA пирамиды проходят две плоскости, которые делят ее объем на три равные части. Какая часть боковой поверхности пирамиды заключена между этими плоскостями, если известно, что плоскость, проходящая через ребра SB и SD, делит площадь боковой поверхности в отношении $2:1$? *Ответ*: $\frac{1}{9}$ или $\frac{2}{9}$.

23.14. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит параллелограмм $ABCD$, площадь которого втрое больше, чем площадь боковой грани DD_1C_1C. Точкой пересечения диагоналей параллелограмма AA_1B_1B является точка M. В каком отношении разделится отрезок CM плоскостью, содержащей прямую AB и образующей равные двугранные углы с плоскостями AA_1B_1B и $ABCD$? *Ответ*: $1:6$.

23.15. Плоскость проходит через вершину A правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, точки M и N, которые соответственно делят ребра CC_1 и EE_1 в отношениях $CM:MC_1 = 1:5$ и $EN:NE_1 = 1:2$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы? *Ответ*: $1:5$.

23.16. Плоскость, пересекающая все боковые ребра правильной шестиугольной призмы под углом 60^o, разбивает призму на два тела, объемы которых относятся как $5:27$. Найти отношение площадей полных поверхностей этих тел, если боковое ребро призмы в 8 раз больше стороны ее основания. *Ответ*: $\frac{12+\sqrt{3}}{56+\sqrt{3}}$.

Метрические свойства сечений

23.17. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 м найти расстояние от вершины A_1 до плоскости, проходящей через точки A, B_1 и середину ребра CC_1.

Ответ: $\frac{2}{3}$ м.

23.18. В треугольной пирамиде $SABC$ площадь боковой грани SAB равна 6 м^2, площадь боковой грани SBC – 8 м^2, а площадь сечения, проходящего через точки S, B и середину ребра AC, равна 5 м^2. Найти величину двугранного угла при ребре SB. *Ответ*: 90^o.

23.19. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра имеют одинаковую длину. Найти угол между прямой, проходящей через точки B и C_1, и плоскостью, в которой лежат точки A_1, B и C.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.

23.20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 м найти расстояние от точки D_1 до плоскости, проходящей через точки D, C_1 и M, где M – середина ребра BC. *Ответ*: $\frac{2}{\sqrt{6}}$ м.

23.21. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ расстояние между диагоналями AB' и BC' боковых граней равно 4 м. Точка M является серединой ребра AB. Найти расстояние от вершины A' верхнего основания призмы до плоскости, проходящей через точки M, C и B'. *Ответ*: 8 м.

23.22. Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, делящее пирамиду на верхнюю и нижнюю части, объемы которых относятся как 3:5. Площадь сечения равна площади основания пирамиды. Найти величину угла между боковой гранью и основанием пирамиды. *Ответ*: $\arccos\frac{3}{2\sqrt{46}}$.

23.23. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ на боковом ребре SA взята точка K так, что $SK = 3$ м, $AK = 1$ м, а плоскость треугольника BKC перпендикулярна ребру SA. Найти объем пирамиды $SABC$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ м^3.

23.24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: AB =36 м, AD =27 м, AA_1 =36 м. На ребре B_1C_1 взята точка P, а на ребре C_1D_1 – точка Q так, что C_1P =15 м, C_1Q =20 м. Через точки A, P и Q проведено сечение. Найти площадь этого сечения. *Ответ*: $\frac{822\sqrt{394}}{13}$ м^2.

23.25. В правильной пирамиде $SABC$ точки K и L – середины сторон AB и AC основания. Через точки K и L проведено сечение, перпендикулярное грани SBC и разбивающее грань SBC на треугольник SMN площадью 4 м^2 и четырехугольник $BCMN$ площадью 5 м^2. Найти площадь сечения. *Ответ*: $\frac{7\sqrt{14}}{4}$ м^2.

23.26. Площадь основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна $9\sqrt{3}$ м^2, а длина бокового ребра равна $\sqrt{15}$ м. Точки E, F и G являются серединами ребер AB, BC и SB соответственно. Найти объем многогранника, отсеченного от пирамиды плоскостями ASF, SCE и ACG, и содержащего вершину B. *Ответ*: 2,25 м^3.

23.27. Куб с ребром 1 м разбит на шесть равных треугольных пирамид. Найти площадь полной поверхности одной из них. *Ответ*: $1+\sqrt{2}$ м^2.

§24. КРУГЛЫЕ ТЕЛА, ИХ КОМБИНАЦИИ С МНОГОГРАННИКАМИ

Круглые тела – цилиндр, конус, шар обычно на пространственном чертеже изображаются приблизительно. Для шара (или сферы) надо указывать его центр и радиус; для цилиндра – ось, центры и радиус оснований; для конуса – ось, вершину, центр и радиус основания. При выполнении расчетов или доказательств желательно сделать дополнительные плоские чертежи сечений рассматриваемых круглых тел.

Ниже приводятся основные свойства круглых тел, а также комбинации круглых тел с другими фигурами.

ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

Круговым цилиндром называется тело, которое состоит из двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и всех параллельных между собой отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис.24.1). Круги называются ***основаниями*** цилиндра, а ограничивающие их окружности – ***окружностями оснований цилиндра***. Прямая, проходящая через центры оснований, называется ***осью цилиндра***. Отрезок, параллельный оси цилиндра и соединяющий окружности оснований, называется ***образующей*** цилиндра.

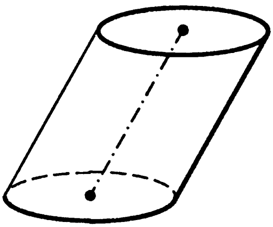


Рис.24.1

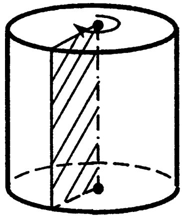


Рис.24.2

Цилиндр называется ***прямым***, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований (рис.24.2). Прямой круговой цилиндр – тело, которое описывает прямоугольник когда вращается вокруг своей стороны (рис.24.2). В школьном курсе стереометрии обычно рассматривают только <u>прямые круговые цилиндры</u>, которые для краткости называют просто ***цилиндрами. Радиусом цилиндра*** называется радиус его основания, ***высотой*** – расстояние между плоскостями оснований. Поверхность (***полная поверхность***) цилиндра состоит из оснований и ***боковой поверхности*** – совокупности всех образующих.

Круговым конусом называется тело, которое состоит из круга – ***основания конуса***, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – ***вершины конуса*** и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис.24.3). ***Окружностью основания конуса*** называют окружность, ограничивающую его основание. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания конуса, называются ***образующими***. Поверхность (***полная поверхность***) конуса состоит из основания и ***боковой поверхности*** – совокупности всех образующих.

Конус называется ***прямым***, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром его основания (***ось конуса***), перпендикулярна плоскости основания (рис.24.4). Прямой конус есть тело, которое описывает прямоугольный треугольник при вращении вокруг катета (рис.24.4). В школьном курсе стереометрии рассматриваются только *прямые круговые конусы*, которые для краткости называют просто ***конусом***.

Радиусом конуса называется радиус основания конуса, ***высотой*** – перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания.

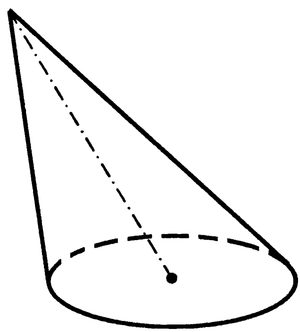


Рис.24.3

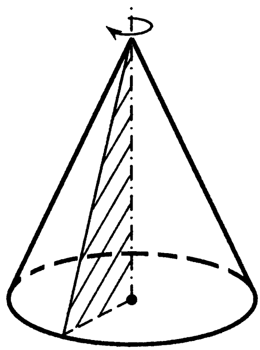


Рис.24.4

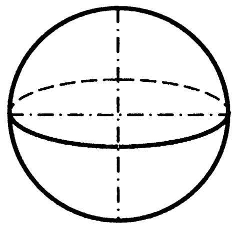


Рис.24.5

Шаром радиуса R ***с центром в точке*** O называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся от точки O на расстоянии не большем R (рис.24.5). Шар можно получить при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Поверхность шара (***шаровая поверхность***) – множество точек, удаленных от центра на расстояние, равное радиусу, – называется ***сферой***. Любой отрезок, соединяющий центр шара (сферы) с точкой шаровой поверхности (с точкой сферы), называется ***радиусом шара*** (***сферы***). Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр шара (сферы), называется ***диаметром***. Концы любого диаметра называются ***диаметрально противоположными*** точками сферы. Прямая, проходящая через две точки сферы, называется ***секущей***. Говорят, что ***плос-***

кость касается сферы, если они имеют единственную общую точку (***точку касания***). Прямая, имеющая со сферой единственную общую точку, называется ***касательной***. Эта точка называется ***точкой касания***.

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЦИЛИНДРА И КОНУСА

Площадь поверхности цилиндра. Разрежем поверхность цилиндра по образующей и окружностям оснований. Развернув его боковую поверхность, получим прямоугольник, две стороны которого равны длине окружности основания, а две других – образующей. На рис.24.6 изображен цилиндр, а на рис.24.7 – его развертка. Отсюда следует формула для нахождения площади боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{бок} = 2\pi rh,$$

где r – радиус цилиндра, h – его высота.

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей оснований и его боковой поверхности

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

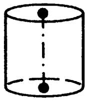


Рис.24.6

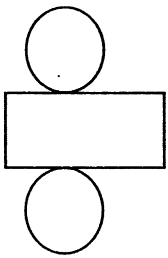


Рис.24.7

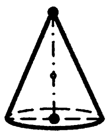


Рис.24.8

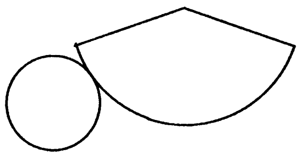


Рис.24.9

Площадь поверхности конуса. Разрежем поверхность конуса по образующей и окружности основания. Развернув его боковую поверхность, получим круговой сектор, радиус которого равен образующей, а длина дуги равна длине окружности основания. На рис.24.8 изображен конус, а на рис.24.9 – его развертка. Отсюда следует формула для нахождения площади боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{бок} = \pi rl,$$

где r – радиус основания конуса, l – его образующая.

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его основания и его боковой поверхности

$$S = \pi r^2 + \pi rl.$$

Для площади основания конуса S_o и площади $S_{бок}$ его боковой поверхности справедлива формула

$$S_o = S_{бок} \cdot \cos\varphi ,$$

где φ – угол наклона образующей к плоскости основания.

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

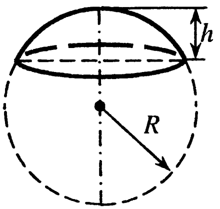


Рис.24.10

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2 .$$

Площадь $S_{сег}$ сферического сегмента ("шапочка" на рис.24.10) *высоты h вычисляется по формуле*

$$S_{сег} = 2\pi Rh ,$$

где R – радиус сферы.

ОБЪЕМЫ ЦИЛИНДРА, КОНУСА, ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi r^2 h ,$$

где r – радиус основания цилиндра, h – его высота..

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h ,$$

где r – радиус основания цилиндра, h – его высота.

Объем шара вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 ,$$

где R – радиус шара.

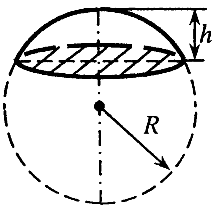


Рис.24.11

Объем шарового сегмента (рис.24.11) *высоты h вычисляется по формуле*

$$V_{сег} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right),$$

где R – радиус шара.

СВОЙСТВА ХОРД, КАСАТЕЛЬНЫХ И СЕКУЩИХ

1. *Касательная к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания,* и наоборот, *прямая, проходящая через данную точку сферы и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной к сфере.*

2. *Касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания*, и наоборот, *плоскость, проходящая через данную точку сферы и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной к сфере.*

3. *Если через данную точку (вне сферы), проведены касательные к сфере, то отрезки касательных (от данной точки до точки касания) равны.*

4. *Плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная данной хорде, делит хорду пополам,* и наоборот, *плоскость, перпендикулярная данной хорде и проходящая через ее середину, содержит центр сферы.*

5. *Центр сферы, касающейся граней двугранного угла, лежит в его бисектральной полуплоскости.*

6. *Если через данную точку внутри сферы проходят несколько хорд, то произведение длин отрезков, на которые данная точка делит каждую хорду, есть постоянное для всех хорд число* (рис.24.12).

7. *Если через точку (вне сферы) проведены к сфере касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть* (рис.24.13).

$$AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1$$

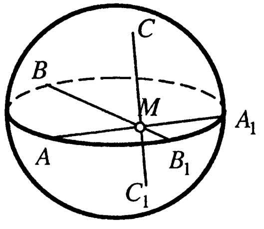


Рис.24.12

$$AK^2 = AC \cdot AB$$

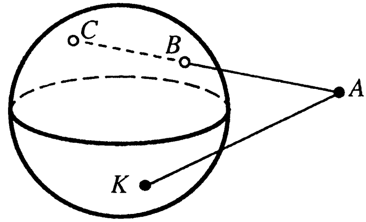


Рис.24.13

СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА

1. *Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания, является кругом, равным основанию* (рис.24.14).

2. *Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является прямоугольником* (рис.24.15). Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым*.

3. *Плоскость, непараллельная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по эллипсу* (рис.24.16).

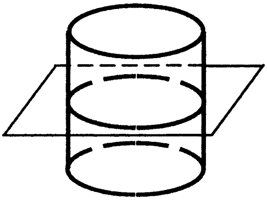


Рис.24.14

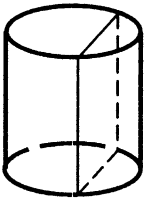


Рис.24.15

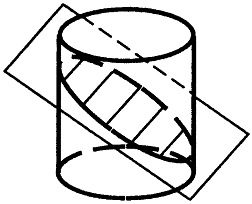


Рис.24.16

СЕЧЕНИЯ КОНУСА

1. *Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, является равнобедренным треугольником* (рис.24.17). Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение называется ***осевым***.

2. *Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, является кругом* (рис.24.18).

3. *Сечение боковой поверхности конуса плоскостью, пересекающей все его образующие, является эллипсом* (рис.24.19).

4. *Сечение боковой поверхности конуса плоскостью, параллельной одной его образующей, является параболой* (рис.24.20).

5. *Сечение боковой поверхности конуса плоскостью, параллельной двум его образующим, является гиперболой* (рис.24.21).

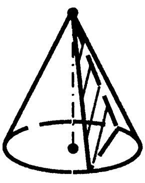


Рис.24.17

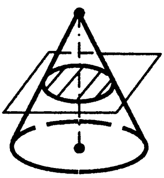


Рис.24.18

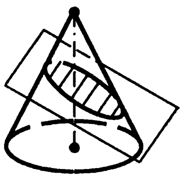


Рис.24.19

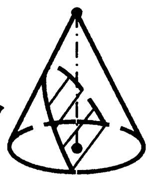


Рис.24.20

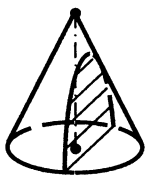


Рис.24.21

СЕЧЕНИЯ ШАРА

Сечение шара плоскостью является кругом (рис.24.22). *Центр сечения совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость*. Если секущая плоскость проходит через центр шара, то сечение называется ***большим кругом***. Любая плоскость пересекает сферу по окружности. Если плоскость проходит через центр сферы, то эта окружность называется ***большой***.

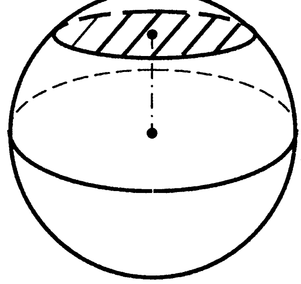


Рис.24.22

КОМБИНАЦИИ ЦИЛИНДРА С ПРИЗМОЙ

Призма называется ***вписанной в цилиндр***, если плоскости ее оснований являются плоскостями оснований цилиндра, а боковые ребра – образующими цилиндра (рис.24.23). При этом говорят, что цилиндр описан около призмы.

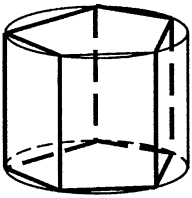


Рис.24.23

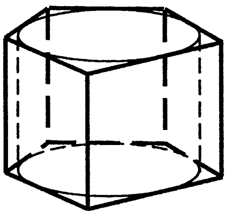


Рис.24.24

Свойства призмы, вписанной в цилиндр. *Если призма вписана в цилиндр, то*:

1) *эта призма прямая;*

2) *в основании призмы лежит многоугольник, вокруг которого можно описать окружность;*

и наоборот, *если для призмы выполняются оба условия, то вокруг нее можно описать цилиндр.*

Около любой правильной призмы можно описать цилиндр.

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с цилиндром других общих точек, кроме этой образующей. Нетрудно доказать, что *через каждую точку боковой поверхности цилиндра проходит единственная касательная плоскость. Причем эта плоскость содержит образующую цилиндра, прохо-*

дящую через данную точку, и перпендикулярна осевому сечению цилиндра, проходящему через эту точку.

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскости оснований являются плоскостями оснований цилиндра, а все боковые грани касаются цилиндра (рис.24.24). В этом случае также говорят, что ***цилиндр вписан*** в призму.

Свойства призмы, описанной около цилиндра. *Если в призму вписан цилиндр, то*:

1) *эта призма прямая;*

2) *в основании призмы лежит многоугольник, в который можно вписать окружность*;

и наоборот, *если для призмы выполняются оба условия, то в нее можно вписать цилиндр.*

В любую правильную призму можно вписать цилиндр.

КОМБИНАЦИИ КОНУСА С ПИРАМИДОЙ

Пирамида называется ***вписанной в конус***, если плоскость ее основания совпадает с плоскостью основания конуса, а боковые ребра – с образующими конуса (рис.24.25). При этом говорят, что конус ***описан*** около пирамиды.

Свойства пирамиды, вписанной в конус. *Если пирамида вписана в конус, то*:

1) *ее боковые ребра равны;*

2) *основанием пирамиды служит многоугольник, около которого можно описать окружность;*

и наоборот, *если для пирамиды выполняются оба условия, то вокруг нее можно описать конус.*

Около любой правильной пирамиды можно описать конус.

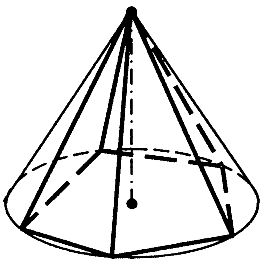


Рис.24.25

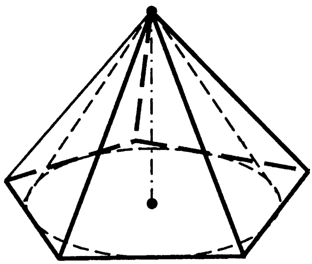


Рис.24.26

Говорят, что плоскость ***касается конуса***, если она проходит через образующую и не содержит других точек конуса, кроме этой образующей. *Через каждую точку боковой поверхности конуса, отличную от вершины, проходит единственная касательная плоскость. Она содержит образующую конуса, проходящую через данную точку, и перпендикулярна осевому сечению конуса, проходящему через эту точку.*

Пирамида называется ***описанной около конуса***, если плоскость ее основания совпадает с плоскостью основания конуса, а все боковые грани касаются конуса (рис.24.26). При этом также говорят, что конус ***вписан в пирамиду***.

Свойства пирамиды, описанной около конуса. *Если в пирамиду вписан в конус, то*:

1) *ее боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы;*

2) *основанием пирамиды служит многоугольник, в который можно вписать окружность;*

и наоборот, *если для пирамиды выполняются оба условия, то в нее можно вписать конус.*

В любую правильную пирамиду можно вписать конус.

КОМБИНАЦИИ СФЕРЫ С МНОГОГРАННИКАМИ

Многогранник называется ***вписанным в сферу***, если все его вершины лежат на сфере. При этом говорят также, что около многогранника ***описана сфера***.

Свойства вписанных многогранников.

1. *Около любого тетраэдра можно описать сферу и притом только одну.*

2. *Если пирамида вписана в сферу, то около ее основания можно описать окружность*, и наоборот, *если в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник, то около пирамиды можно описать сферу.*

3. *Если призма вписана в сферу, то она прямая, и около ее основания можно описать окружность*, и наоборот, *если в основании прямой призмы лежит вписанный многоугольник, то около призмы можно описать сферу.*

Многогранник называется ***описанным около сферы (шара)***, если все его грани касаются сферы (поверхности шара). При этом говорят также, что ***сфера (шар) вписана в многогранник***.

Объем описанного многогранника вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r,$$

где S – площадь полной поверхности многогранника, а r – радиус вписанной в многогранник сферы.

Свойства и признаки описанных многогранников.

1. *В любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.*

2. *Если пирамида описана около сферы, то все ее грани образуют с основанием равные двугранные углы*, и наоборот, *если все грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, то в пирамиду можно вписать сферу.*

3. *Если в призму вписана сфера, то высота призмы равна диаметру сферы.*

4. *У каждого правильного многогранника существуют вписанная и описанная сферы.*

КОМБИНАЦИИ СФЕРЫ С ЦИЛИНДРОМ И КОНУСОМ

Взаимное расположение двух сфер (шаров). ***Линией центров*** двух сфер (шаров) называется прямая, проходящая через их центры.

1. *Две сферы пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна линии центров этих сфер.*

2. *Если две сферы имеют одну общую точку (касаются друг друга), то эта точка (касания) лежит на линии центров.*

Взаимное расположение сферы и цилиндра. Сфера называется ***вписанной в цилиндр***, если она касается плоскостей его оснований и каждой образующей. *В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его осевое сечение – квадрат* (рис.24.27).

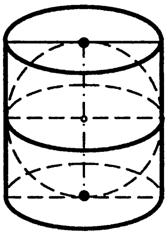


Рис.24.27

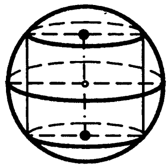


Рис.24.28

Сфера называется ***описанной около цилиндра***, если она проходит через окружности его оснований. *Вокруг любого цилиндра можно описать сферу* (рис.24.28).

Взаимное расположение сферы и конуса. Сфера называется ***вписанной в конус***, если она касается плоскости его основания и каждой образующей. *В любой конус можно вписать сферу и притом только одну* (рис.24.29).

Сфера называется ***описанной около конуса***, если она проходит через окружность его основания и через его вершину. *Вокруг любого конуса можно описать окружность и притом только одну* (рис.24.30).

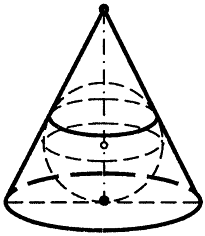


Рис.24.29

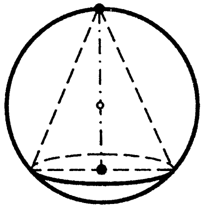
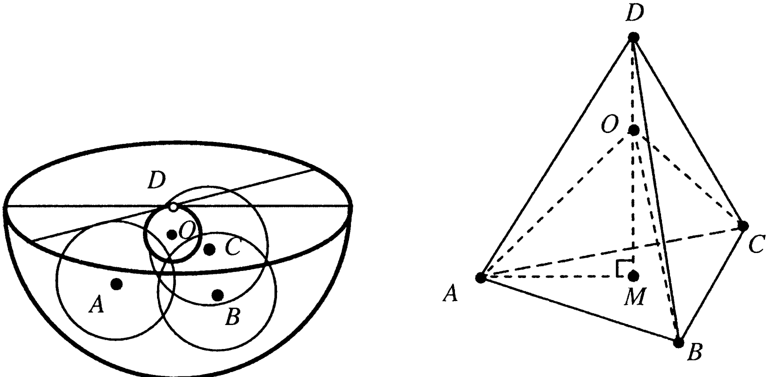


Рис.24.30

Пример 24.1. В полусферический котелок радиуса R положили три одинаковые сферические картошки радиуса r, которые касаются друг друга, стенок котелка и находятся на одинаковой глубине (рис.24.31,*а*). Какого радиуса сферическую луковицу надо взять, чтобы она, касаясь всех картошек, касалась также и плоской крышки?

Решение. Такая сложная, с виду, картина сильно упрощается, если изобразить только центры сфер (рис.24.31,*б*).



а *б*

Рис.24.31

Пусть x – радиус луковицы (ее центр – точка O). Из условия касания картошек и котелка имеем равенство

$$AD = BD = CD = R - r.$$

Условие касания картошек между собой дает:

$$AB = BC = AC = 2r.$$

Следовательно, $DABC$ – правильная пирамида. Из условия касания луковицы и картошек имеем равенство

$$AO = BO = CO = r + x.$$

Значит, центр O луковицы лежит на высоте DM пирамиды. Касание луковицы с крышкой (горизонтальной плоскостью), проходящей через центр D полусферы (котелка), дает условие $OD = x$.

Осталось провести вычисления в правильной пирамиде $DABC$. Из правильного треугольника ABC находим $AM = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Из прямоугольного треугольника ADM по теореме Пифагора получаем:

$$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

С другой стороны, высота пирамиды $DM = DO + OM$, где $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, т.е. $DM = x + \sqrt{(r+x)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2}$. Следовательно, имеем уравнение

$$\sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} = x + \sqrt{(r+x)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

Перенесем x из правой части в левую и возведем обе части уравнения в квадрат

$$(R-r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2x \cdot \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} + x^2 = (r+x)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Это уравнение после приведения подобных членов, оказывается линейным относительно x:

$$(R-r)^2 - 2x \cdot \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2rx + r^2.$$

Выражая x, приходим к ответу. *Ответ*: $\dfrac{R\cdot(R-2r)}{2\cdot\left(r+\sqrt{R^2-2Rr-\dfrac{r^2}{3}}\right)}$.

Пример 24.2. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, а боковые ребра имеют одинаковую длину. Высоты неравных боковых граней пирамиды равны 3 м и 4 м. Найти расстояние от вершины пирамиды до центра шара, касающегося продолжений всех ее граней.

Решение. Пусть $SABCD$ – данная пирамида (рис.24.32), SO – ее высота, SE, SF, SG – высоты боковых граней, причем $SE=3$ м, $SF=3$ м. В первую очередь надо показать, что шар, о котором идет речь в условии, существует. Понятно, что центр такого шара не может лежать на продолжении высоты SO пирамиды, так как любая точка луча SO удалена от смежных боковых граней пирамиды на разные расстояния. Следовательно, искомый шар может быть расположен так, как это показано на рис.24.32.

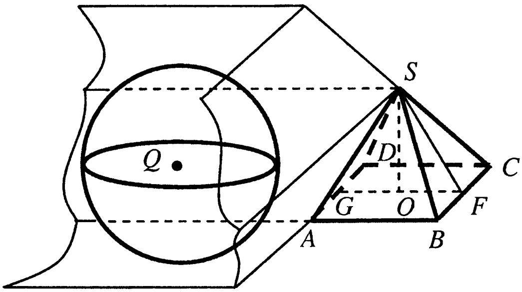


Рис.24.32

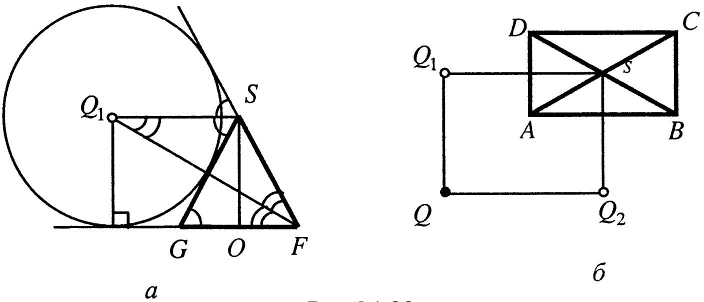


Рис.24.33

Действительно, рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоты SG и SF противоположных граней (рис.24.33,*а*). Пусть Q_1 – центр вневписанной окружности, касающейся боковой стороны SG равнобедренного треугольника SGF и продолжений других его сторон. Тогда SQ_1 – биссектриса внешнего угла треугольника, а FQ_1 – биссектриса внутреннего угла треугольника SFG. По теореме о внешнем угле треугольника следует, что $\angle Q_1SG = \angle SGF$. Следовательно, $SQ_1 \parallel GF$. Значит, радиус окружности равен высоте SO пирамиды. Кроме того, из равенства $\angle SQ_1F = \angle GFQ_1 = \angle SFQ_1$ следует, что треугольник Q_1SF – равнобедренный, т.е. $SQ_1 = SF = 4$ м. Итак, точка Q_1 равноудалена от сторон (или их продолжений) треугольника SGF. Тогда эта точка будет равноудаленной от плоскости основания и плоскостей боковых граней SBC и SAD пирамиды. Если через точку Q_1 провести прямую QQ_1, параллельную AD, то каждая точка такой прямой будет равноудалена от указанных плоскостей.

Аналогично рассматривается сечение пирамиды, проходящее через высоты боковых граней SAB и SCD. Получаем точку Q_2, которая удалена на равные расстояния от плоскости основания и от плоскостей боковых граней SAB и SCD. Причем это расстояние равно высоте SO пирамиды. Если провести через точку Q_2 прямую, параллельную AB, то все точки этой прямой равноудалены от указанных трех плоскостей. Заметим, что эта прямая пересекает прямую QQ_1, так как они лежат в одной плоскости, проходящей через вершину S пирамиды и параллельной основанию. Пусть Q – точка пересечения двух прямых. Тогда эта точка равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды, т.е. Q – центр искомого шара (его радиус равен высоте пирамиды). Осталось найти расстояние SQ. Заметим, что SQ_1QQ_2 – прямоугольник со сторонами 3 м и 4 м (рис.24.33,б). Следовательно, его диагональ SQ равна 5 м. *Ответ*: 5 м.

Задачи для самостоятельного решения

Сферы и шары

24.1. Точки A, B, C лежат на сфере радиуса 10 м. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника ABC, если известно, что $AB = 5$ м, а угол C треугольника ABC равен полусумме двух других его углов. *Ответ*: $\dfrac{5\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ м.

24.2. Вершины треугольника ABC принадлежат поверхности сферы радиуса 20 см. Известно, что $\angle ABC = 45^o$, $\angle ACB = 60^o$. Три прямые, проходящие через точки A, B, C и не имеющие более общих точек со сферой, пересекаются в точке H. Найти стороны треугольника ABC, если $AH = 15$ см. *Ответ*: $12\sqrt{3}$ см, $12\sqrt{2}$ см, $24\sin 75^o$ см.

24.3. В сфере S радиуса R расположены восемь одинаковых сфер, каждая из которых касается двух соседних, и все они касаются сферы S в точках окружности большого круга. Найти радиус еще одной сферы, касающейся всех восьми сфер и сферы S. *Ответ*: $\dfrac{R}{1+2\sin\frac{\pi}{8}}$.

24.4. Четыре сферы радиуса 1 м попарно касаются друг друга. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех сфер. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pm 1$ м.

24.5. Две взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Первый шар радиуса 1 м касается плоскости α в точке A. Второй шар радиуса 8 м касается плоскости β в точке B и первого шара. Найти расстояние от середины отрезка AB до точки касания этих двух шаров. *Ответ*: 2 м.

Сферы, вписанные в правильные пирамиды и призмы
или описанные около них

24.6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна радиусу описанной сферы. Найти величину угла между смежными боковыми гранями пирамиды. *Ответ*: $\pi-\arccos\dfrac{1}{3}$.

24.7. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями прямой. Радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 1 м. Найти объем пирамиды. *Ответ*: $\dfrac{8}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ м^3.

24.8. Через центр шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, проведена плоскость, параллельная основанию и рассекающая данную пирамиду на два многогранника, объемы которых относятся как $8:19$. Найти величину двугранного угла между боковыми гранями данной пирамиды. *Ответ*: $2\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

24.9. Плоскость, параллельная основанию правильной треугольной пирамиды объема 1 м^3, проходит через центр шара, вписанного в эту пирамиду, и отсекает от нее меньшую пирамиду объема $\frac{27}{64}$ м^3. Под каким углом боковое ребро пирамиды наклонено к основанию?

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

24.10. В правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 м вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер AB и AC. *Ответ*: $\frac{\pi}{33}$ м^2.

Сферы, вписанные в пирамиды и призмы или описанные около них

24.11. В четырехугольную призму вписана сфера радиуса R. Площадь основания призмы равна S, а боковые грани имеют различные площади. Найти сумму площадей самой большой и самой маленькой боковых граней. *Ответ*: $2S$.

24.12. В прямую семиугольную призму вписан шар. Площадь боковой поверхности призмы равна S. Найти площадь сечения призмы плоскостью, содержащей сторону одного из оснований призмы, и неравную ей сторону другого основания. *Ответ*: $\frac{S\sqrt{2}}{4}$.

24.13. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Найти объем призмы, если известно, что плоскость, проходящая через ребро CD и центр сферы, вписанной в треугольную пирамиду $ACDC_1$, делит диагональ AC_1 в отношении $1:2$, считая от вершины A. *Ответ*: $2a^3$.

24.14. Найти угол между ребром AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отрезком, соединяющим точку A с центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду B_1BCD. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\sqrt{6\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}$.

24.15. Две правильные четырехугольные пирамиды $SABCD$ и $EABCD$ имеют общее основание $ABCD$, а вершины S и E расположены по разные стороны от плоскости основания. Сфера, вписанная в пирамиду $SABCD$, касается грани SBC в точке K и пересекает отрезок DK в точке P так, что $KP = 2$ м, $DP = 4$ м. Сфера, вписанная в пирамиду $EABCD$, касается грани ABE в точке M и пересекает отрезок DM в его середине. Найти длину отрезка DM. *Ответ*: $4\sqrt{3}$ м.

24.16. Вершина S четырехугольной пирамиды $SABCD$ проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Известно, что $\angle ABC = 75^o$, $\angle CDA = 105^o$, $\angle ASC = 90^o$, $\angle SDB = 15^o$. Найти величину угла SBD, а также отношение длины AC к радиусу сферы, описанной около пирамиды $SABCD$. *Ответ*: 75^o; $2\sin 75^o$.

24.17. В треугольной пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах SB, BC и SC равны 60^o. Ребро SB образует угол 30^o с равным ему по длине ребром BC. Объем пирамиды равен 1 м^3. Найти радиус вписанной в пирамиду сферы. *Ответ*: $\sqrt[3]{3\cdot \mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}+6\cdot \mathrm{tg}\frac{7\pi}{12}}$ м.

24.18. В четырехугольную призму вписана сфера радиуса 7,2 м. Сечение призмы плоскостью, проходящей через все точки касания сферы с боковыми гранями призмы, представляет собой равнобокую трапецию с боковой стороной 15 м. Найти объем призмы, если проекция бокового ребра призмы на плоскость основания имеет длину 0,8 м.

Ответ: $864\sqrt{13}$ м^3.

24.19. Площади боковых граней треугольной пирамиды равны 5 м^2, 9 м^2 и 6 м^2. Двугранные углы при боковых ребрах пирамиды прямые. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду. *Ответ*: $\frac{6\sqrt{15}}{20+\sqrt{127}}$ м.

24.20. Площадь сечения треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки A, B и центр вписанной в пирамиду сферы, равна площади грани ABD и составляет $\frac{3}{4}$ площади грани ABC. Известно, что $\angle ABC = \angle ABD = 90^o$. Какая часть площади грани ABC принадлежит проекции грани ABD на плоскость грани ABC?

Ответ: $\frac{51}{128}$.

24.21. Площадь полной поверхности конуса в 3 раза больше площади его основания. Найти отношение объема конуса к объему описанного около него шара. *Ответ*: $9:32$.

24.22. В параллелограмме $ABCD$ известно отношение сторон $AB:AD=3:1$. Найти отношение объемов тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг сторон AB и AD. *Ответ:* $3:1$.

24.23. Четыре равных шара помещены в конус так, что каждый из них касается всех других и боковой поверхности конуса. Найти величину угла при вершине в осевом сечении конуса. *Ответ*: $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

24.24. В правильном тетраэдре $SABC$ на ребрах AC и BC взяты точки M и N так, что отрезки AN и BM равны и взаимно перпендикулярны. Найти отношение радиусов сфер, описанных около пирамид $SABC$ и $SMND$ (D – точка пересечения отрезков AN и BM).

Ответ: $\sqrt{\frac{166-92\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$.

24.25. Объем куба $ABCDA'B'C'D'$ равен 8 м^3. Найти объем конуса, вершина которого принадлежит плоскости, проходящей через точки D, C', B', а окружность основания вписана в треугольник $AA'C$.

Ответ: $\frac{17-12\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)^3\pi$ м^3.

24.26. Цилиндр радиуса 1 м вписан в призму. Сечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра призмы, представляет собой ромб. Сторона ромба равна 2,5 м, а одна из диагоналей длиной 3 м перпендикулярна оси цилиндра. Найти величину угла между осью цилиндра и секущей плоскостью. *Ответ*: $\arccos\frac{3\sqrt{5}}{100}$.

24.27. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1 м. Цилиндр расположен так, что центры его оснований находятся в точках A_1 и B. Известно, что боковая поверхность цилиндра имеет всего одну общую точку с прямой, проходящей через точку D и середину ребра B_1C_1. Найти объем цилиндра. *Ответ*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ м^3.

24.28. В цилиндр вписана четырехугольная призма, а в эту призму вписан шар. Объем призмы равен V, а площадь боковой поверхности S. Найти периметр сечения призмы плоскостью, содержащей сторону одного из оснований призмы и неравную ей сторону другого основания.

Ответ: $\frac{S^2}{8V}+2\sqrt{\frac{S^4}{256V^2}+\frac{16V^2}{S^2}}$.

24.29. Правильная треугольная пирамида $SABC$ и два цилиндра расположены следующим образом: середины ребер AB и SC лежат на боковой поверхности первого цилиндра, образующей которого служит AC, а боковая поверхность второго цилиндра с образующей AB проходит через центр основания ABC пирамиды и точку M на ребре SA так, что $AM:MS=1:2$. Найти отношение объемов цилиндров.

Ответ: $9:4$.

24.30. Вершины правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежат на боковой поверхности цилиндра радиуса r, ось которого параллельна AB. Сфера радиуса R проходит через вершину C, центр O основания ABC пирамиды и такую точку M на ребре SC, что $SM:SC=1:3$. Найти длину отрезка оси цилиндра, находящегося внутри сферы.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{9R^2-r^2}$.

Комбинации сфер с многогранниками

24.31. Сфера касается всех ребер правильной треугольной призмы и правильного тетраэдра. Найти отношение объемов указанных призмы и тетраэдра. *Ответ*: $27:32$.

24.32. Каждое ребро треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину 1 м. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, C и середины ребер SB и SC. *Ответ*: $\frac{\sqrt{22}}{8}$ м.

24.33. В треугольной пирамиде $SABC$ середины всех ребер лежат на сфере радиуса 2 м. Известно, что ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB = 3$ м, $AC = 4$ м. Найти объем пирамиды.

Ответ: $2\sqrt{29}$ м^3.

24.34. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $\angle BSC = 90^o$, $\angle ASC = \angle BSA = 60^o$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB и AC лежат на сфере радиуса 3 м. Найти объем пирамиды.

Ответ: $18\sqrt{2}$ м^3.

24.35. Сфера, касающаяся всех ребер правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды пополам. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. *Ответ*: $\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$.

24.36. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1 м^3. Найти объем шара, лежащего внутри куба и касающегося граней AA_1B_1B, $ABCD$, AA_1D_1D, а также плоскости сечения, проходящего через середины ребер A_1B_1, DD_1, BC. *Ответ*: $\dfrac{\pi(3-\sqrt{3})^3}{48}$ м^3.

24.37. Сферу радиуса 1 м пересекли четырьмя плоскостями так, что получившиеся в сечениях четыре окружности имеют радиусы 0,5 м, 0,5 м, 0,5 м и r м. Найти r, если известно, что каждые две из этих окружностей касаются друг друга. *Ответ*: $\sin\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ м.

24.38. Первая сфера радиуса r касается всех граней правильной треугольной пирамиды; вторая сфера радиуса R касается плоскости основания и продолжений апофем боковых граней этой пирамиды. Найти радиус третьей сферы, проходящей через центры первых двух сфер и середины сторон основания пирамиды. *Ответ*: $\dfrac{r+R}{2}$.

24.39. Шар радиуса r касается всех граней правильной треугольной пирамиды; шар радиуса R касается плоскости основания и плоскостей боковых граней этой пирамиды. Найти радиус шара, касающегося сторон основания и плоскостей боковых граней пирамиды. *Ответ*: $\dfrac{r+R}{2}$.

24.40. Сфера проходит через вершину S четырехугольной пирамиды и касается ее основания в точке P, причем SP – диаметр сферы. Последовательные боковые ребра данной пирамиды пересечены сферой в точках A, B, C, D. Высоты SK и SM треугольников ASC и DSB соответственно лежат на прямой SP. Известно, что $AS = 9$ м, $SK = 5{,}4$ м, $SM = 7{,}5$ м, а расстояние от точки A до плоскости DSB равно 3,6 м. Найти объем данной пирамиды. *Ответ*: 1500 $м^3$.

24.41. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 5 м, 6 м и 7 м. Сфера радиуса 2 м касается боковых граней пирамиды в точках, принадлежащих сторонам основания. Найти объем пирамиды.

Ответ: $8\sqrt{2}$ $м^3$.

24.42. Апофема правильной треугольной пирамиды является диаметром сферы радиуса R. Найти длину линии пересечения поверхности пирамиды со сферой, если известно, что углы между боковыми ребрами пирамиды равны 90^o. *Ответ*: $\pi R\left(1+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

24.43. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра равны 5 м, а сторона основания 6 м. Найти радиус сферы, касающейся прямых AB, AC, AS, центр которой лежит в плоскости SBC.

Ответ: $\frac{12\sqrt{39}}{29}$ м.

24.44. Первая сфера радиуса R касается всех ребер правильной треугольной призмы. Вторая сфера проходит через центр первой и вершины одного из оснований. Найти радиус второй сферы. *Ответ*: $\frac{7R}{4\sqrt{3}}$.

24.45. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 2 м. На высоте SO пирамиды как на диаметре построена сфера. Найти площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит внутри сферы.

Ответ: $\frac{8}{27}\left(3\sqrt{3}+2\pi\right)$ $м^2$.

24.46. Длина каждого ребра треугольной пирамиды равна 2 м. На одном ребре как на диаметре построена сфера. Найти площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит внутри сферы.

Ответ: $\frac{5\pi+12\sqrt{3}}{9}$ $м^2$.

24.47. Все ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны. Радиус сферы, касающейся всех граней, равен 1 м. Найти радиус сферы, касающейся сторон основания ABC пирамиды и плоскостей всех ее боковых граней. *Ответ*: 1,5 м.

24.48. Сфера проходит через середины ребер AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делит каждый из отрезков AC_1, BC_1, AC и BC на три равные части. Найти отношение площади этой сферы к площади поверхности призмы. *Ответ*: $5\pi : \left(6\sqrt{14}+8\right)$.

24.49. Сфера вписана в наклонную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой служит трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). На ребрах AB и CD взяты точки M и N соответственно так, что проходящие через них прямые, параллельные боковым ребрам призмы, касаются сферы. Известно, что $AM : MB = 2:1$ и $CD = 1$ м. Найти длины отрезков CN и DN.

Ответ: $CN = \frac{1}{3}$ м; $DN = \frac{2}{3}$ м.

24.50. Сфера касается всех ребер треугольной пирамиды $SABC$ и разбивает каждую из медиан AM и BM боковых граней SAC и SBC на три равных отрезка. Найти величину угла ACB. *Ответ*: $2\arcsin\frac{4}{5}$.

24.51. Сфера с центром на боковом ребре SB треугольной пирамиды $SABC$ проходит через все вершины основания ABC и пересекает продолжения боковых ребер SA, SB, SC за вершину S в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Объем пирамиды $SA_1B_1C_1$ в 9 раз меньше объема пирамиды $SABC$. Объем пирамиды $SABC_1$ составляет $\frac{9}{4}$ объема пирамиды SA_1B_1C, а объем пирамиды SAB_1C составляет $\frac{4}{9}$ объема пирамиды SBA_1C_1. Найти величину угла ABS. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.

24.52. Сфера радиуса 1 м касается всех боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды, а ее центр принадлежит плоскости основания этой пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 3 м.

Ответ: 2,25 $м^3$.

24.53. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2 см. На ребре AB взята точка M, а на ребре A_1D_1 – точка N так, что прямая MN касается сферы радиуса 1 см с центром в середине ребра AA_1. Через точку касания и точки A, A_1 проведена плоскость. Какой угол она образует с плоскостью BB_1D_1D? *Ответ*: 90^o.

24.54. Сфера радиуса $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды с площадью основания, равной 4 м^2. Найти все возможные значения длины бокового ребра этой пирамиды.

Ответ: 4 м; 1,6 м.

24.55. Основанием прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ служит ромб $ABCD$ с острым углом A величиной 60^o. Две равные сферы с центрами в точках A и C соответственно касаются друг друга и плоскости основания $A'B'C'D'$. Найти отношение объема призмы к объему той ее части, которая находится вне сфер. *Ответ*: $\frac{18}{18-2\pi\sqrt{3}}$.

24.56. Найти длину линии пересечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ объема 1 м^3 со сферой, проходящей через середины ребер BC, DD_1, A_1B_1 и касающейся прямой A_1D. *Ответ*: $\frac{3\pi}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)-\frac{3\sqrt{10}}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ м.

§25. ФИГУРЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Рассмотрим задачи, в которых конфигурация не является полностью заданной, а зависит от параметра. Параметр может характеризовать размеры фигуры или взаимное расположение фигур. Например, семейство концентрических сфер, характеризуемое одним параметром – радиусом, или пучок плоскостей, проходящих через заданную прямую (здесь параметром может служить угол, который образует каждая плоскость из пучка с некоторой заданной плоскостью).

Как и в случае алгебраических задач (см. главу 5), можно применять либо (прямой) метод анализа, либо (обратный) метод синтеза конфигурации. Анализ проводится так. "Перебирая" непрерывным образом все допустимые значения параметра, следим за качественными изменениями конфигурации: появление или исчезновение точек касания, изменение количества сторон многоугольника и т.п. Отмечаем эти характерные значения параметра, разбивая множество допустимых значений на промежутки. Затем решаем задачу для каждого промежутка и для всех характерных значений параметра.

Советуем сначала попробовать прямой метод. Если полный анализ провести нельзя, то ключ к решению надо искать в особенностях данной конфигурации, в частных случаях взаимного расположения фигур, в наличии симметрии и т.п. При этом, следуя методу синтеза (см. §14), найдем такие значения параметра, при которых конфигурация отвечает указанным в условии признакам (количественным или качественным).

Пример 25.1. Головка сыра имеет форму конуса высотой 10 см и образующей 20 см. Прожорливые мыши, начиная с вершины конуса, грызут головку по всем направлениям так, что за t с оказывается съеденным весь сыр на расстоянии t см от вершины. При каждом положительном t указать объем оставшегося сыра.

Решение. Пусть SAB – осевое сечение конуса, $SO = 10$ см – высота, $SA = 20$ см – образующая (рис.25.1). Заметим, что острые углы A и B равнобедренного треугольника SAB равны 30^o. Объем такого конуса равен

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi(AO)^2 \cdot SO = 1000\pi \text{ см}^3.$$

За время t с мыши выгрызают весь сыр в шаровой окрестности вершины S конуса радиуса t см. За время $t \le 10$ с будет съеден весь сыр в шаровом секторе радиуса t см, объем которого равен (рис.25.1,*а*)

$$V_{сект} = \frac{2}{3}\pi t^2 \cdot \frac{t}{2} = \frac{\pi t^3}{3}.$$

Следовательно, искомый объем $V(t)$ оставшегося сыра находится по формуле

$$V(t)=1000\pi-\frac{\pi t^3}{3}=\frac{\pi}{3}\left(3000-t^3\right)\ \text{см}^3 \quad \text{при } t\le 10 \text{ с}.$$

За время $10<t\le 20$ будет съеден весь сыр в шаровом секторе радиуса t см без шарового сегмента высотой $h=t-10$. Объем оставшейся части вычисляется по формуле

$$V(t)=1000\pi-\frac{2}{3}t^2\frac{t}{2}+\pi(t-10)^2\left(t-\frac{t-10}{3}\right).$$

После упрощений получаем $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left(t^3-30t^2+4000\right)$.

Спустя 20 с (при $t>20$), вся головка сыра будет съедена, т.е. $V(t)=0$.

Ответ: $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left(3000-t^3\right)$ см^3 при $t\le 10$ с;

$V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left(t^3-30t^2+4000\right)$ см^3 при $10\le t\le 20$ с;

$V(t)=0$ см^3 при $t\ge 20$ с.

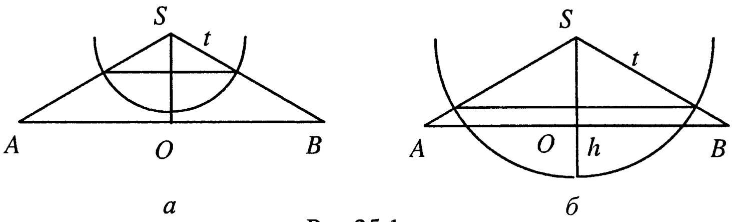


Рис.25.1

Задачи для самостоятельного решения

25.1. Все ребра правильной треугольной призмы имеют равные длины. Найти отношение площади боковой поверхности призмы к площади сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и образующей с боковым ребром призмы угол β.

Ответ: $3\sqrt{3}\cos\beta:\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\beta\right)$ при $0<\beta\le \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$4\sqrt{3}\sin\beta:1$ при $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

25.2. Через точку на диагонали куба, удаленную на расстояние x от центра симметрии куба, проведена плоскость, перпендикулярная к этой диагонали. Построить график зависимости площади полученного сечения от x, если известно, что ребро куба равно 1 м.

Ответ: график состоит из двух дуг парабол:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(1-4x^2\right) \text{ при } 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2 \text{ при } \frac{\sqrt{3}}{6} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

25.3. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4 см, апофема 5 см. Центр шара радиуса x расположен в середине высоты пирамиды. При каждом значении x указать количество частей, на которые рассекается шар гранями пирамиды.

Ответ: при $0 < x \le \frac{6}{5}$ пересечений нет;

при $\frac{6}{5} < x \le \frac{6}{\sqrt{13}}$ – 4 части;

при $\frac{6}{\sqrt{13}} < x \le 2$ – 2 части; $2 < x \le \sqrt{13}$ – 3 части;

при $\sqrt{13} < x < +\infty$ – 2 части.

25.4. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 1 м и 2 м, а высота равна 4 м. Сфера пересекает все боковые ребра параллелепипеда, и ее центр лежит в плоскости основания параллелепипеда. Найти все возможные значения радиуса такой сферы. *Ответ*: $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{293}}{2}\right]$ м.

25.5. Два шара радиуса R касаются друг друга. Прямая, проходящая через центры этих шаров, пересекает данную плоскость под углом α. Найти площадь проекции объединения этих шаров на данную плоскость для любых значений α. *Ответ*: $R^2(2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha)$ см^2.

25.6. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6 м и 8 м. Вокруг пирамиды описана сфера радиуса 5 м. Объем пирамиды равен 48 м^3. Найти все возможные значения величин углов наклона боковых граней пирамиды к плоскости основания.

Ответ: $\left[\operatorname{arctg}\frac{3}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

25.7. Бак имеет форму куба без верхней грани. Ребро куба равно 1 м. Бак расположен так, что одна из диагоналей нижнего основания параллельна горизонтальной плоскости, а другая диагональ образует с горизонтальной плоскостью острый угол x. Найти зависимость от x максимально возможного объема $V(x)$ жидкости, содержащейся в баке. (Толщиной стенок и дна бака пренебречь.)

Ответ: $V(x)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg}x$ при $0<x\le\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$V(x)=1+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}x-1\right)\left(\sqrt{2}-\operatorname{ctg}x\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg}x$

при $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\operatorname{arctg}\sqrt{2}$;

$V(x)=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{ctg}^2x$ при $\operatorname{arctg}\sqrt{2}\le x<\frac{\pi}{2}$.

25.8. Найти множество центров сечений шара радиуса R плоскостями, проходящими через точку A, находящуюся на расстоянии $3R$ от центра шара. Найти также площадь этого множества. *Ответ*: πR^2.

25.9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на стороне треугольника AB_1D_1 взята точка M. При каких значениях длины ребра этого куба не существует треугольника BMC_1 площадью меньше 1 см^2? *Ответ*: $\left[\sqrt[4]{5};+\infty\right)$.

25.10. Длины неравных сторон оснований прямоугольного параллелепипеда относятся как $1:4$, высота параллелепипеда равна полупериметру основания. Через середину большей стороны основания под углом α к плоскости основания проводится плоскость, пересекающая параллелепипед. Найти все значения α, при которых сечение параллелепипеда этой плоскостью может быть шестиугольником.

Ответ: $\left[\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{5}};\operatorname{arcctg}\frac{2}{5\sqrt{17}}\right]$.

§26. ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Рассмотрим задачи, в которых фигуры или их взаимное положение не заданы полностью. Причем, как правило, неизвестны сами фигуры. Например, в задаче говорится о пирамиде, но не указывается количество сторон основания, либо речь идет о многограннике, не уточняя какой это многогранник, либо говориться о сечении данной фигуры некоторой плоскостью, без указания конкретного положения этой плоскости относительно фигуры и т.п.

Разумеется, что общих методов решения таких задач нет. Их решение начинается с логического анализа множества возможных конфигураций, не противоречащих условию. Надо рассмотреть и нарисовать разные допустимые конфигурации. Иногда формулировку задачи следует разбить на отдельные условия. Затем рассмотреть фигуры, удовлетворяющие каждому условию в отдельности. И, наконец, установить, какие фигуры удовлетворяют всем условиям одновременно. В некоторых случаях при исследовании конфигураций помогает формула Эйлера и знание правильных многогранников.

Формула Эйлера. Многогранник называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону от каждой плоскости, содержащей его грань. Для выпуклого многогранника справедлива *формула Эйлера*:

$$B+\Gamma-P=2,$$

где B – количество вершин многогранника, Γ – количество граней, а P – количество ребер. Формула справедлива и для многих невыпуклых многогранников, но не для всех.

Правильные многогранники. Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его грани являются равными правильными многоугольниками, и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число его ребер.

Свойства правильных многогранников. *У правильного многогранника:*

– все плоские углы равны;

– все двугранные углы равны;

– существует единственная точка (центр), равноудаленная от всех его вершин (ребер, граней);

– центры граней служат вершинами правильного многогранника.

Существует только *пять* правильных многогранников (см. таблицу и рис.26.1).

Правильные многогранники

Название правильного многогранника	Число граней **Г**	Число вершин ***В***	Число ребер **Р**
Правильный тетраэдр	4	4	6
Правильный гексаэдр или куб	6	8	12
Правильный октаэдр	8	6	12
Правильный додекаэдр	12	20	30
Правильный икосаэдр	20	12	30

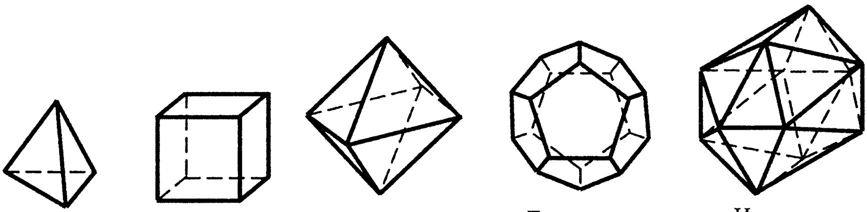


Рис.26.1

Пример 26.1. Ровно одиннадцать ребер призмы имеют длину по 10 см каждое, а длины остальных ребер равны 1 см. Найти сумму длин всех ребер призмы.

Решение. По определению, призмой называется многогранник, у которого две грани (основания) – равные многоугольники, а все остальные грани (боковые) – параллелограммы. Исходя из определения, заключаем, что все боковые ребра призмы равны. Кроме того, сторонами обоих оснований призмы служат пары равных ребер. Таким образом, если в основаниях призмы имеются равные ребра, то их должно быть четное число.

По условию задачи в рассматриваемой призме имеются 11 длинных ребер по 10 см и некоторое количество коротких ребер по 1 см. Из 11 длинных ребер только четное число ребер может лежать в основаниях. Следовательно, хотя бы одно длинное ребро является боковым. Так как все боковые ребра равны, делаем вывод о том, что все боковые ребра имеют длину 10 см.

Рассмотрим теперь все возможные призмы, с одиннадцатью длинными и несколькими короткими ребрами. Все случаи можно перебрать, задавая количество длинных ребер, служащих сторонами оснований.

1) Пусть из 11 длинных ребер ни одно не лежит в основаниях, т.е. все являются боковыми ребрами. Тогда это будет одиннадцатиугольная призма с 11 боковыми ребрами по 10 см и двадцатью двумя короткими ребрами (в основаниях призмы). Сумма длин всех ребер равна

$$11 \cdot 10 + 22 \cdot 1 = 132 \text{ см.}$$

2) Пусть из 11 длинных ребер два ребра лежат в основаниях, т.е. речь идет о девятиугольной призме. Однако у девятиугольника, служащего основанием призмы, одна сторона – 10 см, а другие 8 сторон по 1 см. Такого девятиугольника не существует (одна сторона больше суммы длин других сторон). Следовательно, этот случай не годится.

3) Пусть из 11 длинных ребер четыре ребра служат сторонами оснований. Тогда мы имеем семиугольную призму с 7 боковыми ребрами по 10 см. В основании призмы лежит семиугольник, у которого две стороны по 10 см и 5 сторон по 1 см. Сумма длин всех ребер такой призмы равна

$$7\cdot 10+2(2\cdot 10+5\cdot 1)=120 \text{ см.}$$

4) Пусть из 11 длинных ребер шесть ребер находятся в основаниях. В этом случае получается пятиугольная призма с пятью боковыми ребрами по 10 см. В основании призмы лежит пятиугольник с тремя сторонами по 10 см и двумя сторонами по 1 см. Сумма длин всех ребер такой призмы равна

$$5\cdot 10+2(3\cdot 10+2\cdot 1)=114 \text{ см.}$$

Других вариантов нет. Действительно, если 8 длинных ребер лежат в основаниях, то каждое из оснований имеет не менее четырех вершин, а боковых ребер остается только 3. Если же 10 длинных ребер принадлежат основаниям, то у призмы остается только одно боковое ребро. В обоих случаях призмы, очевидно, не существует. Таким образом, в ответе следует указать суммы ребер в трех найденных случаях.

Ответ: 132 см; 120 см; 114 см.

Пример 26.2. Сфера радиуса r касается всех двенадцати ребер многогранника, другая сфера проходит через все его вершины, а третья сфера касается всех граней многогранника. Все три сферы имеют общий центр. Найти все возможные значения объема многогранника.

Решение. Определим сначала вид многогранника, удовлетворяющего условиям задачи. Для этого вспомним простое свойство хорд окружности: хорды, равноудаленные от центра окружности, равны между собой. В самом деле, если хорды AB и CD удалены от центра окружности на одно и то же расстояние h (рис.26.2), то из равенства треугольников ABO и CDO следует равенство хорд $AB = CD$. Разумеется, что это свойство справедливо и для сферы: хорды сферы (т.е. отрезки, соединяющие две разные точки сферы), равноудаленные от ее центра, равны между собой. Отсюда следует еще одно простое свойство: плоскости, равноудаленные от центра сферы, пересекают ее по равным окружностям. Воспользуемся этими свойствами для определения вида многогранника.

Все ребра многогранника являются хордами сферы, проходящей через его вершины, причем эти хорды удалены от ее центра на одно и то же расстояние r, так как все они касаются сферы радиуса r. Следовательно, все ребра многогранника равные. Обозначим длину ребра через a. Каждая грань многогранника является многоугольником с равными сторонами, около которого можно описать окружность (так как все вершины этого многоугольника лежат на сфере). Следовательно, каждая грань многогранника является правильным многоугольником со стороной a.

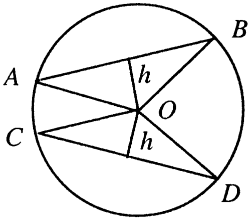


Рис.26.2

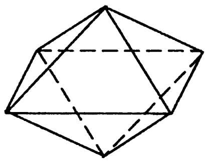


Рис.26.3

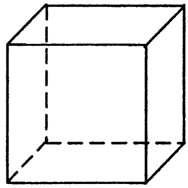


Рис.26.4

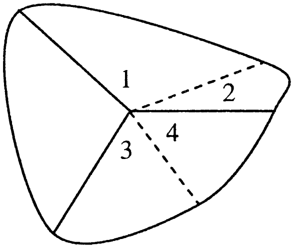
Покажем, что все грани многогранника – равные правильные многоугольники. В самом деле, так как все грани касаются одной сферы, то они равноудалены от центра сферы, проходящей через все вершины. Следовательно, плоскости всех граней высекают на сфере равные окружности. Таким образом, все грани являются правильными многоугольниками со стороной a, вписанными в равные окружности. Следовательно, это равные многоугольники.

Осталось определить количество граней многогранника. Пусть каждая грань является правильным n-угольником. Так как каждое ребро многогранника служит стороной двух граней, то количество граней (Γ) вычисляется так: $\Gamma = 24/n$. При $n = 3$ получаем $\Gamma = 8$, т.е. многогранник имеет 8 треугольных граней (это октаэдр (рис.26.3)). При $n = 4$ получаем $\Gamma = 6$, т.е. шестью гранями многогранника служат квадраты (это куб (рис.26.4)). Остальные значения $n \geq 5$ не подходят, так как число граней оказывается либо слишком малым для существования многогранника, либо не является целым. Таким образом, имеется два многогранника, удовлетворяющие условиям задачи, – это куб или октаэдр.

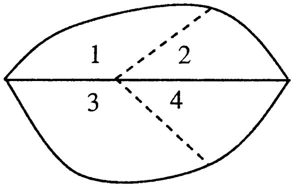
Вычислим теперь объем октаэдра и куба. Так как центр окружности, касающейся всех ребер, совпадает с центром октаэдра, то ребро многогранника равно диаметру этой сферы, т.е. $a = 2r$. Зная ребро октаэдра, несложно вычислить его объем: $\dfrac{8r^3\sqrt{2}}{3}$. Диаметр сферы, касающейся всех ребер куба, равен диагонали грани куба, т.е. $2r = a\sqrt{2}$. Отсюда $a = r\sqrt{2}$, тогда объем куба $a^3 = 2r^3\sqrt{2}$. *Ответ*: $2r^3\sqrt{2}$; $\dfrac{8}{3}r^3\sqrt{2}$.

Пример 26.3. Плоскость разрезает пятиугольную призму на два многогранника. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения суммы всех плоских углов при вершинах получившихся многогранников.

Решение. При разрезании многогранника плоскостью образуются два многогранника, в которых остаются старые плоские углы исходного многогранника, а также образуются новые плоские углы. Разберемся с образованием новых углов. Во-первых, это углы многоугольника, получающегося в сечении, причем таких многоугольников будет два (у каждого из получившихся многогранников). Кроме того, новые плоские углы получаются при пересечении граней исходного многогранника. При этом, если секущая плоскость проходит через вершину исходного многогранника, то получаем 4 угла с этой вершиной (рис.26.5,*а*: сплошными линиями изображены ребра исходного многогранника, пунктирными – линия пересечения граней секущей плоскостью). Заметим, что эти 4 угла ($\angle 1 - \angle 4$) образованы делением на части двух углов исходного многогранника, т.е. их сумма равна сумме двух плоских углов исходного многогранника. Если же секущая плоскость пересекает ребро исходного многогранника, то получаются 4 новых плоских угла (рис.26.5,*б*), сумма которых равна 2π.



а



б

Рис.26.5

Обозначим через M – сумму плоских углов исходного многогранника; S_n - сумму углов n-угольника, получающегося в сечении; P_k – сумму новых углов, получающихся в гранях исходного многоугольника, когда секущая плоскость пересекает k ребер исходного многогранника. Заметим, что $S_n = \pi n - 2\pi$ и $P_k = 2\pi k$. Тогда сумма S всех плоских углов может быть вычислена по формуле

$$S = M + 2 \cdot S_n + P, S = M + 2 \cdot S_n + P_k = M + 2\pi(n + k - 2),$$

где n – число вершин многоугольника, получающегося в сечении; k - количество пересекаемых ребер исходного многогранника (точнее, число вершин многоугольника, получающегося в сечении, не совпадающих с вершинами исходного многогранника).

Вычислим теперь по этой формуле наибольшее и наименьшее значения суммы углов многогранников, образующихся при пересечении пятиугольной призмы. Так как гранями пятиугольной призмы служат два пятиугольника и пять четырехугольников, то $M = 2(5\pi - 2\pi) + 5(2\pi) = 16\pi$, т.е.

$$S = 16\pi + 2\pi(n + k - 2).$$

В сечении пятиугольной призмы могут получаться многоугольники с разным количеством вершин: от треугольника ($n = 3$) до семиугольника ($n = 7$). Учитывая, что $k \le n$, находим, что:

наименьшее значение $S = 18\pi$ будет при $n = 3$, $k = 0$ (сечение – треугольник, вершины которого совпадают с вершинами призмы);

наибольшее значение $S = 40\pi$ будет при $n = 7$, $k = 7$ (сечение – семиугольник с вершинами на ребрах призмы). *Ответ*: 40π; 18π.

Задачи для самостоятельного решения

26.1. Из точки пространства выходят четыре луча так, что величина угла между любыми двумя из них одна и та же. Найти эту величину.

Ответ: $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

26.2. Найти количество ребер правильной призмы, если известно, что отношение меньшей диагонали призмы к радиусу вписанной в призму сферы равно $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. *Ответ*: 30.

26.3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ м, $AD = 13$ м и диагональю $AC = 15$ м. Грани SAB, SBC и плоскость диагонального сечения SAC образуют с основанием пирамиды равные углы величиной 45^o. Найти объем пирамиды. *Ответ*: 24 $м^3$; 384 $м^3$.

26.4. Треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу с диаметром $AB = 2$ м. Каждый из треугольников ABC и ABD имеет угол, равный 30^o. Найти величину двугранного угла при ребре CD, если двугранный угол при ребре AB равен 60^o. *Ответ*: $\pi - \operatorname{arctg} 8$, $2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{21}}$.

26.5. Вокруг правильного тетраэдра описана сфера радиуса R. Найти количество и площади всех частей сферы, на которые она разрезается плоскостями всех граней тетраэдра.

Ответ: 4 части площадью $\frac{2\pi R^2}{3}$ каждая и 6 частей площадью $\frac{2\pi R^2}{9}$ каждая.

26.6. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 12 м, 10 м и 10 м. Найти объем пирамиды, если каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости ее основания под углом 45^o.

Ответ: 48 $м^3$; 192 $м^3$; 128 $м^3$.

26.7. В основании неправильной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Все боковые грани пирамиды – равнобедренные треугольники. Найти все возможные значения суммы плоских углов при вершине пирамиды. *Ответ*: $(60^o;180^o)\cup(180^o;300^o)$.

26.8. Длины ребер всех граней многогранника, имеющих общую вершину A, различны и выражаются последовательными натуральными числами, начиная с 1 см. Найти наименьшую возможную сумму периметров этих граней. *Ответ*: 38 см.

26.9. В пространстве взяты пять точек S, A, B, C, D. Из четырех треугольников SAB, SBC, SCD, SDA один треугольник – равносторонний, а остальные – неравные прямоугольные треугольники с острым углом 30^o. Наименьшая из сторон этих треугольников имеет длину 1 м. Найти все возможные значения длины замкнутой ломаной $ABCDA$. *Ответ*: $(8+\sqrt{3})$ м; 10 м; $(8+2\sqrt{3})$ м.

26.10. Каждая грань призмы либо ромб с острым углом 60^o, либо квадрат. Ребро призмы имеет длину 1 м. Найти все возможные значения объема такой призмы. *Ответ*: 1 $м^3$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $м^3$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $м^3$.

26.11. Основанием призмы служит выпуклый многоугольник с равными сторонами. По крайней мере, одна боковая грань наклонной призмы является квадратом площади 1 $м^2$. Площадь каждой боковой грани призмы, не являющейся квадратом, равна $0{,}5\sqrt{2}$ $м^2$. Найти все возможные значения площади боковой поверхности призмы.

Ответ: $1+\sqrt{2}$ $м^2$; $2+\sqrt{2}$ $м^2$; $2+2\sqrt{2}$ $м^2$.

26.12. Основанием наклонной призмы служит выпуклый многоугольник с равными сторонами. Длина одного из ребер равна 1 м. Каждая боковая грань призмы либо квадрат, либо ромб с острым углом 45^o. Найти все возможные значения площади боковой поверхности призмы.

Ответ: $1+\sqrt{2}$ м^2; $2+\sqrt{2}$ м^2; $2+2\sqrt{2}$ м^2; $2\sqrt{2}$ м^2.

26.13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 м. Точки E, F, G, H, K – середины ребер AB, AA_1, BB_1, DD_1, AD соответственно. В данном кубе расположена треугольная пирамида так, что ее проекция на грань AA_1B_1B – есть четырехугольник EFB_1G, проекция на грань AA_1D_1D есть треугольник AA_1H, проекция на грань $ABCD$ – есть четырехугольник $BCKE$. Найти объем указанной треугольной пирамиды.

Ответ: $\frac{7}{48}$ м^3.

26.14. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и правильный тетраэдр $AKLM$ расположены так, что ребро AK тетраэдра лежит на прямой AD, а вершина L на отрезке CB_1. Найти отношение объемов указанных куба и тетраэдра.

Ответ: $6\sqrt{2}:\left(\sqrt{5}-1\right)^3$.

26.15. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB которого равна 2 м. Боковая грань SAB наклонена к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{3}$, и ее площадь равна 4 м^2. Найти длины ребер SA и SB, если известно, что расстояние от проекции вершины S на плоскость основания до точки C равно 1 м.

Ответ: $SA = SB = \sqrt{17}$ м.

26.16. На ребре двугранного угла взята точка A, точки B и C лежат в одной из граней так, что ABC – правильный треугольник со стороной 1 см. Из точки B опущен перпендикуляр на плоскость другой грани. Расстояние от основания этого перпендикуляра до точки C равно $0{,}5(\sqrt{3}+1)$ см. Найти величину двугранного угла. *Ответ*: 90^o.

26.17. Основанием призмы служит выпуклый n-угольник, имеющий центр симметрии. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60^o. Сфера радиуса 1 м касается всех боковых ребер и нижнего основания призмы в точке F. Найти сумму расстояний от точки F до вершин нижнего основания призмы. *Ответ*: $\frac{2n}{\sqrt{3}}$ м.

26.18. Два правильных тетраэдра, имеющих общее ребро, расположены так, что одно ребро первого тетраэдра перпендикулярно одной из граней второго тетраэдра. Какая часть объема первого тетраэдра заключена внутри второго? *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

26.19. Боковые ребра треугольной пирамиды относятся как 4 : 5 : 6. Известно, что любая биссектриса любой грани пирамиды имеет общую точку с какой-нибудь биссектрисой любой другой грани. Найти величины углов треугольника, лежащего в основании этой пирамиды.

Ответ: $\arccos\dfrac{19}{240}$; $\arccos\dfrac{269}{360}$; $\arccos\dfrac{181}{300}$.

26.20. Проекцией правильного тетраэдра на некоторую плоскость служит трапеция с основаниями 1 м и $\sqrt{3}$ м. Найти объем тетраэдра.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ м^3.

26.21. Плоскость пересекает правильную пятиугольную призму, разделяя ее на два многогранника. Найти наибольшее и наименьшее значения общей суммы всех двугранных углов получившихся многогранников.

Ответ: $18{,}8\pi$; 10π.

26.22. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания 2 м и высотой $\sqrt{3}$ м. Из двух разных вершин призмы одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две точки, меняя направление движения только в вершинах призмы. Одна точка, начинающая движение из вершины A, двигается только по ребрам призмы, другая – только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время точки встречаются. В каких вершинах призмы может произойти встреча? *Ответ*: A; C; E.

ГЛАВА 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Рассмотрим геометрические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. Конфигурации, описываемые в условиях задачи, не являются полностью заданными. Размеры фигур или их взаимное расположение могут изменяться. Среди множества допустимых (по условию задачи) конфигураций требуется найти такие, при которых указанная характеристика (измеряемая величина) принимает наибольшее или наименьшее значение.

Подходы, применяемые для решения таких задач, можно разделить на две группы. К первой группе относятся алгебраические методы и применение производной. Эти методы разбираются в §27. Вторую группу образуют "геометрические" методы, в которых для сравнения величин используются геометрические неравенства. Применение таких методов рассматривается в §28.

§27. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Сначала надо выбрать такой параметр (реже – несколько параметров), каждому значению которого соответствует фиксированная конфигурация. Обозначив параметр, например, через x, выражаем искомую характеристику как функцию $f(x)$. Затем определяем область допустимых значений параметра. Как правило, это промежуток: интервал $(a;b)$ или отрезок $[a;b]$. Таким образом, геометрическая задача сводится к нахождению наибольшего (или наименьшего) значения функции $f(x)$ на промежутке. Эта задача решается стандартными методами с применением производной или при помощи алгебраических неравенств.

Пример 27.1. В ромб, диагонали которого 6 см и 8 см, вписан прямоугольник, вершины которого принадлежат сторонам ромба, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям ромба. Найти периметр прямоугольника наибольшей возможной площади.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный ромб (рис.27.1), причем $AC = 8$ см и $BD = 6$ см. Тогда $AO = 4$, $BO = 3$. По теореме Пифагора найдем гипотенузу треугольника AOB: $AB = 5$ см. Обозначим теперь стороны прямоугольника $KL = 2x$ и $GK = 2y$. Из подобия треугольников AOB и AFG получаем $\dfrac{AO}{AF} = \dfrac{BO}{FG}$. Следовательно, $\dfrac{4}{4-y} = \dfrac{3}{x}$, т.е. $y = \dfrac{4(3-x)}{3}$. Выразим через x периметр и площадь прямоугольника

$$P(x) = 2(2x + 2y) = 4x + \frac{16(3-x)}{3} = \frac{4(12-x)}{3},$$

$$S(x) = 2x \cdot 2y = \frac{16x(3-x)}{3}.$$

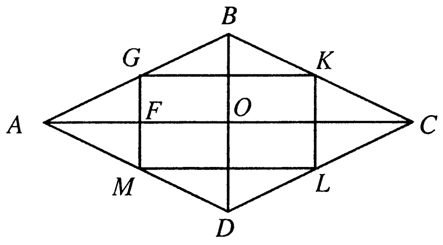


Рис.27.1

Эти функции определены при $x \in (0;3)$. Функция $S(x)$ является квадратным трехчленом, наибольшее значение которого достигается при $x = 1{,}5$ см. Следовательно, наибольшая площадь равна $S(1{,}5) = 12$ см^2. Периметр этого прямоугольника равен $P(1{,}5) = 14$ см.

Ответ: 14 см.

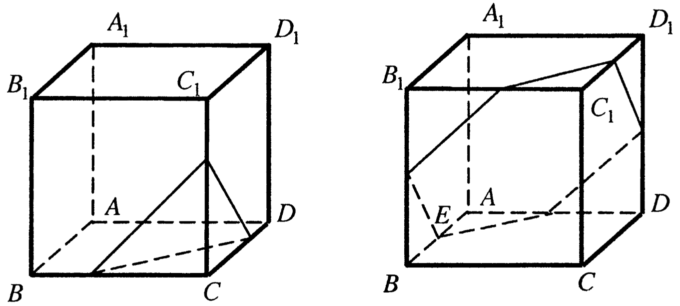
Пример 27.2. Куб с ребром 1 м рассекается плоскостью, перпендикулярной его диагонали, на два многогранника. Найти все возможные значения суммы площадей полных поверхностей этих многогранников, если известно, что общая сумма длин ребер обоих многогранников наибольшая.

Решение. Пусть сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ производится плоскостью Π, перпендикулярной диагонали A_1C. Заметим, что возможны два случая (рис.27.2). В первом случае, когда плоскость Π пересекает ребра CC_1, CB и CD, в сечении получается треугольник (рис.27.2,*а*). Во втором случае, когда плоскость Π пересекает ребра AB, AD, BB_1, DD_1, B_1C_1, D_1C_1, в сечении образуется шестиугольник (рис.27.2,*б*). Другие случаи пересечения рассматривать не будем, так как они аналогичны указанным из-за симметрии.

В обоих случаях сумма длин ребер многогранников равна сумме длин ребер куба (12 м) и удвоенному периметру сечения. Эта сумма будет наибольшей, если и периметр сечения будет наибольший. Среди треугольников, получающихся в первом случае, наибольший периметр ($3\sqrt{2}$ м) имеет треугольник C_1BD. Вычислим периметры шестиугольников, получающихся во втором случае. Пусть плоскость Π пересекает ребро AB в точке E так, что длина отрезка AE равна x. Тогда периметр шестиугольника равен $3x\sqrt{2} + 3(1-x)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ м. Следовательно, периметры всех шестиугольников равны периметру треугольника C_1BD (и эта величина периметра сечения наибольшая).

Найдем теперь сумму площадей полных поверхностей многогранников. Она равна сумме площади полной поверхности куба (6 м^2) и удвоенной площади сечения. Вычислим площадь сечения в первом и втором случаях.

Заметим, что плоскость Π в любом случае наклонена к плоскости основания $ABCD$ под одним и тем же углом α: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому можно искать площадь проекции сечения на плоскость основания, а затем умножить ее на $\sqrt{3}$.



а *б*

Рис.27.2

В первом случае для треугольника C_1BD получаем $S_{C_1BD} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ м^2.

Во втором случае площадь S шестиугольника зависит от x:

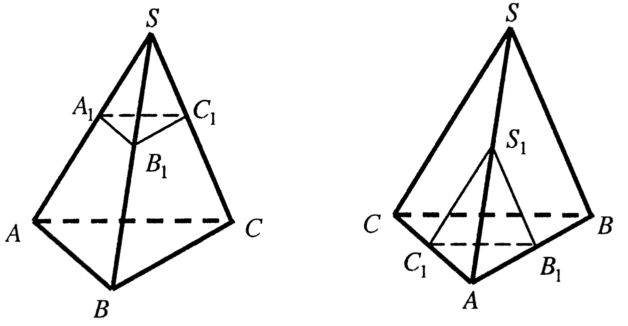
$$S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}\right)\sqrt{3},$$

где $x \in (0;1)$. Наибольшее значение функции $S(x)$ достигается при $x = 0{,}5$, т.е. $\max S(x) = 0{,}75\sqrt{3}$ м^2. Следовательно, сумма площадей полных поверхностей двух многогранников может принимать любые значения от $\left(6+\sqrt{3}\right)$ м^2 до $\left(6+1{,}5\sqrt{3}\right)$ м^2.

Ответ: от $\left(6+\sqrt{3}\right)$ м^2 до $\left(6+1{,}5\sqrt{3}\right)$ м^2.

Пример 27.3. Плоскость, параллельная одной из граней правильной треугольной пирамиды, рассекает пирамиду на два многогранника так, что общая сумма квадратов длин ребер этих многогранников наименьшая. Найти площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 3 см, а длина бокового ребра равна 2 см.

Решение. Рассмотрим два случая: когда секущая плоскость параллельна основанию (случай А, рис.27.3,*а*) и когда она параллельна боковой грани (случай Б, рис.27.3,*б*).



а *б*

Рис.27.3

А. Пусть плоскость, параллельная основанию пирамиды $SABC$, пересекает боковые ребра в точках A_1, B_1, C_1 (рис.27.3,*а*). Обозначим через x длину равных отрезков SA_1, SB_1, SC_1. Тогда из подобия пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ (коэффициент подобия $0{,}5x$) заключаем, что $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 1{,}5x$. Обозначим через $f(x)$ сумму квадратов длин ребер двух многогранников. Подсчитаем эту сумму

$$f(x) = 3\cdot AB^2 + 3\cdot AA_1^2 + 3\cdot SA_1^2 + 2\cdot 3\cdot A_1B_1^2 = 3\left(13 - 4x + 6{,}5x^2\right).$$

Найдем минимум этой функции. Приравнивая производную нулю $f'(x) = 3(-4 + 13x) = 0$, получаем точку минимума $x^* = \dfrac{4}{13}$. Следовательно, наименьшее значение функции $f(x)$ на промежутке $0 < x < 2$ равно

$$f\left(\frac{4}{13}\right) = \frac{483}{13} \approx 37{,}15\,.$$

Б. Пусть секущая плоскость параллельна грани SBC (рис.27.3,*б*) и пересекает ребра AB, AC, AS в точках B_1, C_1, S_1 соответственно. Обозначим через t длину равных отрезков AC_1 и AB_1. Тогда из подобия пирамид $SABC$ и $S_1AB_1C_1$ (коэффициент подобия $\frac{t}{3}$) заключаем, что

$S_1A = S_1C_1 = S_1B_1 = \dfrac{2t}{3}$. Пусть $g(t)$ – общая сумма квадратов длин ребер двух многогранников. Найдем эту сумму

$$g(t) = 2\left(AB_1^2 + BB_1^2 + SB^2\right) + AS_1^2 + SS_1^2 + 2\left(2 \cdot S_1B_1^2 + B_1C_1^2\right) + BC^2 =$$

$$= \frac{26t^2 - 44t + 117}{3}.$$

Точка минимума этого квадратного трехчлена $t^* = \dfrac{11}{13}$. Поэтому наименьшее значение функции $g(t)$ на промежутке $0 < t < 3$ равно

$$g\left(\frac{11}{13}\right) = \frac{1279}{39} \approx 32{,}79.$$

Сравнивая результаты в случаях А и Б, заключаем, что наименьшее значение достигается в случае Б.

Осталось вычислить площадь сечения. Так как сечение – это треугольник, подобный боковой грани SBC, то его площадь S_Δ находим, умножая площадь $0{,}75\sqrt{7}$ см ^{2} боковой грани на квадрат коэффициента подобия:

$$S_\Delta = \left(\frac{11}{39}\right)^2 \frac{3}{4}\sqrt{7} = \frac{121\sqrt{7}}{2028} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\dfrac{121\sqrt{7}}{2028}$ см ^{2}.

Задачи для самостоятельного решения

ПЛАНИМЕТРИЯ

27.1. Найти наибольшее значение площади параллелограмма с острым углом 30^o, если сумма длин трех его сторон равна 4 см. *Ответ*: 1 см ^{2}.

27.2. Найти наибольшую возможную площадь равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне треугольника, равна 3 см. *Ответ*: 6 см ^{2}.

27.3. В квадрат $ABCD$ вписана трапеция $EFGH$ ($FG \parallel EH$) так, что точки F и G делят стороны AD и AB квадрата в отношении $AF : AD = AG : AB$, а точки E и H принадлежат сторонам CD и CB квадрата соответственно. Найти высоту трапеции наибольшей площади, если длина стороны квадрата равна 1 см. *Ответ*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

27.4. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом, равным 60^o, вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на гипотенузе треугольника, а две вершины лежат на катетах. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Ответ: 8 см; $2\sqrt{3}$ см.

27.5. Найти острые углы прямоугольного треугольника, для которого отношение площади вписанного круга к площади треугольника принимает наибольшее значение. *Ответ*: 45^o; 45^o.

27.6. Найти радиус кругового сектора максимальной площади, если известно, что периметр сектора равен $2p$. *Ответ*: $\frac{p}{2}$.

27.7. Сторона треугольника имеет длину 9 см, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см. Найти наименьшее возможное значение площади такого треугольника. *Ответ*: 48,6 см^2.

27.8. В круговой сектор радиуса r с центральным углом α ($\alpha < \pi$) вписан прямоугольник так, что две стороны прямоугольника параллельны оси симметрии сектора, одна сторона касается дуги окружности, а две вершины прямоугольника лежат на радиусах, ограничивающих сектор. Какое наибольшее значение может принимать площадь такого прямоугольника? *Ответ*: $\frac{r^2}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

27.9. В треугольник, периметр которого равен 40 см, вписана окружность. К окружности проведена касательная, параллельная одной из сторон треугольника. Найти наибольшее возможное значение длины отрезка этой касательной, заключенного внутри треугольника. *Ответ*: 5 см.

27.10. Найти наименьшую возможную площадь боковой поверхности конуса, объем которого равен $\frac{\pi}{3}$ м^3. *Ответ*: $0{,}5\pi\cdot\sqrt[6]{432}$ м^2.

27.11. Найти наибольший возможный объем конуса, площадь боковой поверхности которого равна π м^2. *Ответ*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt[4]{27}}$ м^3.

27.12. Найти наибольшее значение объема правильной треугольной пирамиды с апофемой 6 м. *Ответ*: 144 м^3.

27.13. Сумма длин высоты и образующей прямого кругового конуса равна 6 м. Найти возможный наибольший объем этого конуса.

Ответ: 9π м^3.

27.14. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$ м и $AC = 9$ м. Вершина прямого кругового конуса находится в точке A, а его ось совпадает с прямой AC. Основание конуса имеет единственную общую точку с гранью BSC (не совпадающую с точкой C). Найти наибольший возможный объем такого конуса, если ребро AS перпендикулярно основанию пирамиды и равно 6 м. *Ответ*: $4{,}8\pi$ м^3.

27.15. Две плоскости Π и Λ образуют двугранный угол величиной $\operatorname{arctg} 2$. Точки A и B принадлежат плоскости Π и находятся соответственно на расстоянии 4 м и 1 м от линии пересечения плоскостей. Окружность проходит через точки A и B, имеет единственную общую точку с плоскостью Λ, а ее радиус, проведенный через середину AB, перпендикулярен плоскости Π. Найти наименьшую длину такой окружности.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}-4}{2}$ м.

27.16. Две взаимно перпендикулярные плоскости пересекают все образующие боковой поверхности цилиндра, радиус основания которого равен r. Известно, что линия пересечения плоскостей перпендикулярна оси цилиндра и удалена от нее на расстояние $2r$. Найти наименьший возможный объем той части цилиндра, которая заключена между плоскостями. *Ответ*: $4\pi r^3$.

27.17. В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами 10 м и 16 м и меньшей диагональю 10 м. Через точку, находящуюся вне призмы на расстоянии 1 м от боковой поверхности, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, каждая их которых пересекает все боковые ребра призмы. Найти наименьший возможный объем той части призмы, которая заключена между плоскостями, если известно, что линия их пересечения параллельна основанию призмы.

Ответ: 768 м^3.

27.18. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a. Найти ее объем, если наибольшая возможная площадь сечения, проходящего через центры оснований, равна S. *Ответ*: $\frac{aS}{2}$.

27.19. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $SA = 8$ м и $BC = 5$ м. Найти наибольшую возможную площадь сечения этой пирамиды плоскостью, параллельной ребрам SA и BC. *Ответ*: 10 м^2.

27.20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 8$ м, $BC = 7$ м, $AA_1 = 9$ м взята точка Q, удаленная от грани AA_1B_1B на 3 м и от грани AA_1D_1D на 4 м. Среди всех призм, отсекаемых от параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку Q и параллельной ребру AA_1, выбираются такие, у которых объем наименьший. Найти все возможные значения площади боковой поверхности таких призм.

Ответ: $[198; 216]$ м^2.

27.21. Пять сфер радиуса R, центр каждой из которых не лежит внутри других сфер, имеют всего две общие точки A и B. Найти наибольший возможный объем многогранника, вершинами которого служат точки A, B и центры всех пяти сфер. *Ответ*: $\frac{5R^3 \sin^2 72^o \sqrt{4\sin^2 36^o - 1}}{24\sin^2 36^0}$.

§28. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим планиметрические и стереометрические задачи на экстремум, в которых фигуры настолько "свободны", что для фиксирования конфигурации необходимо задание не одного, а многих параметров. Здесь удобнее использовать геометрические неравенства, выражающие простые свойства фигур. Затем непосредственно искать экстремальные значения искомой величины. Перечислим основные ("опорные") неравенства, которые наиболее часто применяются при сравнительном анализе.

ОПОРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

СРАВНЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

Неравенство треугольника

1) *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (и больше модуля их разности):* $|b-c|<a<b+c$.

Это свойство можно сформулировать по-другому.

2) *Для любых трех точек* A, B, C *(в пространстве или на плоскости) справедливо неравенство* $AC \le AB + BC$.

3) *Равенство* $AC = AB + BC$ *означает, что эти три точки лежат на одной прямой, причем точка* B *находится между точками* A *и* C.

Из неравенства треугольника следует, что

4) *отрезок короче любой ломаной (любой кривой), соединяющей его концы.*

Перпендикуляр как кратчайшее расстояние

Приведем несколько формулировок, отражающих фактически одно и то же свойство:

5) *гипотенуза прямоугольного треугольника больше любого катета;*

6) *проекция короче наклонной;*

7) *перпендикуляр, опущенный из данной точки на прямую, есть наименьший из отрезков, соединяющих данную точку с данной прямой;*

8) *перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, есть наименьший из отрезков, соединяющих данную точку с данной плоскостью.*

Общий перпендикуляр

Общим перпендикуляром к двум данным параллельным прямым называется отрезок, соединяющий данные прямые и перпендикулярный каждой из них. Аналогично определяется общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым, к двум параллельным плоскостям, к параллельным прямой и плоскости. Свойства общего перпендикуляра:

9) *общий перпендикуляр к двум параллельным прямым, есть наименьший из отрезков, соединяющих данные параллельные прямые;*

10) *общий перпендикуляр к двум параллельным плоскостям, есть наименьший из отрезков, соединяющих данные параллельные плоскости;*

11) *общий перпендикуляр к параллельным прямой и плоскости, есть наименьший из отрезков, соединяющих данные прямую и плоскость;*

12) *общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым, есть наименьший из отрезков, соединяющих точки данных скрещивающихся прямых.*

Периметры треугольников и многоугольников

13) *Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.*

14) *Из всех треугольников данной площади наименьший периметр имеет равносторонний треугольник.*

15) *Из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат.*

16) *Из всех* n *-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный* n *-угольник.*

Периметры сечений

17) *Для сравнения периметров сечений многогранников следует рассмотреть его развертку.*

СРАВНЕНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ

18) *Против большего угла треугольника лежит большая сторона.*

19) *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

20) *Угол между наклонной и ее проекцией на данную плоскость меньше угла между наклонной и любой прямой в данной плоскости.*

21) *Если из точки, лежащей в одной из двух пересекающихся плоскостей, провести к линии пересечения перпендикуляр и наклонную, то перпендикуляр образует со второй плоскостью угол, больший, чем наклонная.*

СРАВНЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Площади треугольников

22) *Из двух треугольников с равными основаниями большую площадь имеет тот, у которого больше высота.*

23) *Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.*

24) *Из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник (данные стороны служат его катетами).*

25) *Из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник.*

Площади многоугольников

26) *Из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.*

27) *Из всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.*

28) *Из всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.*

СРАВНЕНИЕ ОБЪЕМОВ ПИРАМИД И ПРИЗМ

29) *Из двух пирамид с равновеликими основаниями больший объем имеет та, у которой высота больше.*

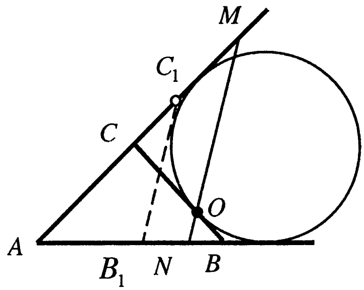
30) *Из двух пирамид с равными высотами больший объем имеет та, у которой площадь основания больше.*

31) *Из двух призм с равными боковыми ребрами больший объем имеет та, у которой больше площадь сечения, перпендикулярного боковым ребрам.*

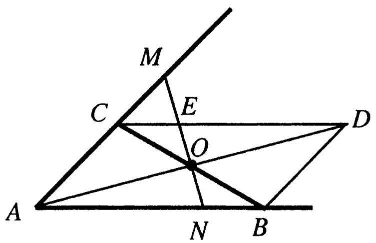
Пример 28.1. Через точку, взятую внутри плоского угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник,

а) наименьшего периметра; **б)** наименьшей площади.

Решение. Пусть A – вершина данного угла, O – данная внутри него точка (рис.28.1).



а



б

Рис.28.1

а) Построим окружность, проходящую через точку O и касающуюся сторон данного угла (рис.28.1,*а*). Через точку O проведем касательную к окружности. Пусть касательная пересекает стороны угла в точках B и C. Тогда треугольник ABC – искомый. Действительно, покажем, что периметр этого треугольника наименьший. Пусть MN – произвольная прямая, проходящая через точку O и отсекающая от данного угла треугольник AMN. Докажем, что периметр треугольника AMN больше периметра треугольника ABC. В самом деле, проведем касательную B_1C_1, параллельную MN. По свойствам касательных периметр треугольника AB_1C_1 равен периметру треугольника ABC. По свойствам гомотетии периметр треугольника AB_1C_1 меньше периметра треугольника AMN. Следовательно, треугольник ABC имеет наименьший возможный периметр.

б) На луче AO отметим точку D так, чтобы $AO = OD$ (рис.28.1,*б*). Через точку D проведем прямые, параллельные сторонам данного угла. Получим параллелограмм $ABDC$. Покажем, что треугольник ABC – искомый (т.е. имеет наименьшую площадь). В самом деле, проведем через точку O прямую, отсекающую произвольный треугольник AMN. Выразим площадь этого треугольника через площадь треугольника ABC:

$$S_{AMN} = S_{ABC} + S_{OCM} - S_{OBN} = S_{ABC} + S_{CME},$$

так как площади треугольников OCE и OBN равны (поскольку точка O – центр симметрии параллелограмма). Итак, $S_{AMN} > S_{ABC}$, что и требовалось доказать.

Пример 28.2. В сферу радиуса 5 м вписана пятиугольная пирамида $SABCDE$, диагональ AC основания $ABCDE$ которой равна 10 м. Найти наибольший возможный объем пирамиды.

Решение. Диагональ AC служит диаметром сферы, поэтому основание $ABCDE$ (рис.28.2) вписано в круг радиуса 5 м, а наибольшая высота пирамиды равна радиусу сферы. Найдем наибольшую площадь основания. Площадь треугольника ABC будет наибольшей, если точка B максимально удалена от диаметра AC (при этом высота треугольника ABC будет наибольшей).

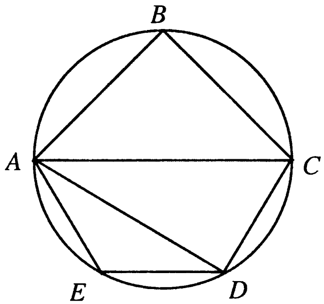


Рис.28.2

Рассмотрим теперь треугольник AED. Считая, что положение точки D зафиксировано, найдем такое положение точки E, чтобы площадь треугольника AED была наибольшей. Это будет тогда, когда $AE = ED$, при этом точка E максимально удалена от хорды AD. Следовательно, в четырехугольнике $ACDE$ максимальной площади должно выполняться равенство $AE = ED$. Аналогичным образом приходим к равенству $ED = DC$.

Следовательно, пятиугольник $ABCDE$ будет иметь наибольшую площадь, если $AB = BC$, $AE = ED = DC$. Осталось вычислить эту площадь:

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{AEDC} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{25(4+3\sqrt{3})}{4} \text{ м}^2,$$

а также наибольший объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{25(4+3\sqrt{3})}{4} = \frac{125(4+3\sqrt{3})}{12} \text{ м}^3.$$

Ответ: $\dfrac{125\left(4+3\sqrt{3}\right)}{12}$ м^3.

Задачи для самостоятельного решения

ПЛАНИМЕТРИЯ

28.1. Найти наименьшую длину боковой стороны равнобедренного треугольника, если его площадь равна S. *Ответ*: $\sqrt{2S}$.

28.2. Найти наибольшую площадь треугольника, две медианы которого равны 9 см и 12 см. *Ответ*: 72 см^2.

28.3. Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, если известно, что его вершина A удалена от середин сторон BC и CD на 6 см и 9 см соответственно. *Ответ*: 10 см; $2\sqrt{10}$ см.

28.4. В окружность радиуса 6 см вписан пятиугольник, одна из диагоналей которого равна 12 см. Найти наибольшую возможную площадь пятиугольника. *Ответ*: $9\left(3\sqrt{3}+4\right)$ см^2.

28.5. В равностороннем треугольнике ABC точка D – середина стороны BC и $AB = 1$ см. На сторонах AB и BC выбираются соответственно точки M и N так, что $AM = DN$. Точка K выбирается (в плоскости треугольника ABC) так, что $\angle AMK = \angle DNK$, $\angle MAK = \angle NDK$. Найти наименьшее возможное расстояние от середины отрезка MN до точки K . *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{8}$ см.

28.6. В окружность радиуса R вписан многоугольник, площадь которого больше $2R^2$, а длина любой стороны больше R . Найти все возможные значения площади такого многоугольника.

Ответ: $\left(1{,}25R^2\sqrt{3};\ 2{,}5R^2\sin 72^o\right]$.

28.7. Окружность радиуса 1 см касается сторон угла величиной 30^o . На окружности выбирается точка P , на одной стороне угла – точка Q , а на другой – точка S . Найти наименьшую возможную длину ломаной PQS . *Ответ*: $\sqrt{3}$ см.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Свойства скрещивающихся прямых

28.8. В правильном тетраэдре через апофему проведена плоскость так, что полученное сечение имеет наименьшую возможную площадь. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость разбивает тетраэдр.

Ответ: 3 : 19.

28.9. Все ребра треугольной пирамиды $SABC$ имеют длину 1 м. Точка M – середина ребра AB , а точка N – середина ребра SC . Найти наименьший возможный радиус сферы, имеющей общие точки с прямыми SM и AN . *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ м.

28.10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна $4\sqrt{3}$ м, а боковое ребро – 8 м. На ребре B_1C_1 взята точка M так, что площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 , B и M , является наименьшей. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы. *Ответ*: $\arccos\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}$.

28.11. Длина каждого ребра тетраэдра $SABC$ равна 1 м. Точки M и N – середины ребер AB и BC. Точка K принадлежит прямой SM. Найти наименьшее возможное значение площади треугольника AKN.

Ответ: $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{35}}$ м^2.

28.12. На ребре двугранного угла величиной 60^o взят отрезок AB длиной 1 м. Через точку A в плоскости одной из граней проведена прямая, образующая с отрезком AB угол 45^o, а через точку B в плоскости другой грани проведена прямая, образующая с отрезком BA угол 30^o. Найти наименьшее возможное расстояние от точек одной прямой до другой прямой. *Ответ*: $\sqrt{\frac{3}{19+4\sqrt{3}}}$ м.

28.13. В правильную треугольную призму вписан шар радиуса 1 м. Точки M и N лежат на двух не пересекающихся прямых, содержащих диагонали боковых граней этой призмы. Найти наименьшее возможное расстояние между точками M и N. *Ответ*: $2\sqrt{\frac{3}{7}}$ м.

Свойства вписанных пирамид

28.14. В шар радиуса R вписана n-угольная пирамида. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим? *Ответ*: $\frac{4R}{3}$.

28.15. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу радиуса 1 м. Найти наименьшее возможное значение суммы плоских углов SAB и SAC, если известно, что $SB=\sqrt{3}$ м, $SC=\sqrt{2}$ м. *Ответ*: 105^o.

28.16. В сферу радиуса R вписана треугольная пирамида. Одно из ребер пирамиды является диаметром сферы. Найти наибольший возможный объем такой пирамиды. *Ответ*: $\frac{R^3}{3}$.

28.17. Правильная треугольная призма имеет ровно 4 общие точки со сферой, а ее боковое ребро лежит на диаметре сферы. Наибольший возможный объем такой призмы равен 1 м^3. Найти радиус сферы.

Ответ: $\sqrt[3]{3}$ м.

28.18. В правильной треугольной пирамиде через две вершины основания проведено сечение наименьшей возможной площади. В каком отношении это сечение делит объем пирамиды, если известно, что площадь этого сечения относится к площади основания как 4 : 5 ?

Ответ: 23:27 .

28.19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра имеют длину 1 м, а угол между ними равен 30°. На боковых ребрах SB и SC взяты, соответственно, точки M и N (отличные от вершины S) так, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, M, N, имеет наименьший периметр. Найти площадь этого сечения.

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{12}}{4}\left(3\sqrt{3}-5\right)$ м.

28.20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 90 см^2. Через вершину A, середину бокового ребра SC и точку на ребре SB проведено сечение наименьшего периметра. В каком отношении секущая плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: $4:11$.

28.21. В данной правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведено сечение наименьшего периметра. Это сечение отсекает пирамиду, объем которой равен $\frac{4}{9}$ объема данной пирамиды. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{12}}$.

28.22. Образующая SA конуса равна 2 м, а диаметр AD основания конуса – $2r$. Точка B принадлежит отрезку SD, а точка C – середина SA. При каждом допустимом значении r найти наименьшую длину пути по боковой поверхности конуса из точки A в точку C, проходящего через точку B.

Ответ: $\sqrt{5-4\cos\pi r}$ м при $0<r<1$; 3 м при $1\le r<2$.

28.23. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра имеют одинаковую длину, равную a. На ребре SA взята точка M так, что $SM=0{,}25a$, на ребре SB взята точка N, а на плоскости основания ABC пирамиды взята точка P. Найти наименьшую величину суммы длин отрезков MN и NP.

Ответ: $\frac{a}{8}(1+7\sqrt{\frac{2}{3}})$.

28.24. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45^o. Для пирамиды, имеющей наибольший возможный объем, найти площадь ее боковой поверхности.

Ответ: $294\sqrt{2}$ см^2.

28.25. В пространстве расположен ромб с острым углом 60^o и площадью 1 м^2. Его проекция на плоскость α является прямоугольником. Какова наибольшая возможная площадь этого прямоугольника?

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ м^2.

28.26. Правильная треугольная пирамида с боковым ребром 3 см имеет наибольший возможный объем. Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды. *Ответ*: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ м.

28.27. Отрезок AB длиной 1 м виден из точки C под углом 60°, а из точки D – под прямым углом. Найти наибольший возможный объем пирамиды $ABCD$. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ м^3.

28.28. Найти наибольший объем пирамиды $ABCD$, если известно, что центр сферы, касающейся прямых AC, AD, BC, BD, находится в точке O на ребре AB, причем $AO = 1$ м, а $BO = 2$ м. *Ответ*: 2 м^3.

28.29. Даны три параллельные плоскости α, β, γ. Плоскость β находится между плоскостями α и γ. Расстояние между α и β равно 40 м, а между β и γ – 20 м. Найти наименьший возможный объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого вершина A лежит в плоскости α, вершина B_1 – в плоскости β, а вершина C – в плоскости γ.

Ответ: $\left(\dfrac{40\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^3$ м^3.

28.30. Площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 2 см^2, а площадь основания ABC равна $2\sqrt{3}$ см^2. Через середину бокового ребра проведена плоскость так, чтобы расстояние от точки, симметричной вершине S пирамиды относительно этой плоскости, до плоскости ABC было наибольшим. Чему равно это расстояние? *Ответ*: $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ см.

28.31. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD равны 6 см, а все остальные – 5 см. На ребре AB взята точка M. Через точку C проведена плоскость α, а через точку D – плоскость β. Точка N симметрична точке M относительно плоскости α, а точка K симметрична точке M относительно плоскости β. Найти наибольшее возможное расстояние между точками N и K. *Ответ*: 16 см.

28.32. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором сторона $AC = 12$ м, $\angle BCA = 60^o$. Ребро BC перпендикулярно плоскости, проходящей через боковые ребра BB_1 и AA_1. Известно, что $A_1B = 6$ м, а площадь треугольника ABC_1 имеет наибольшее возможное значение. Найти периметр треугольника ACC_1.

Ответ: $24+6\sqrt{14}$ м.

28.33. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены две высоты AM и BN. Основания высот (точки M и N) лежат, соответственно, на средних линиях треугольников BCD и ACD, параллельных стороне CD. Найти все возможные значения длины ребра AB, если известно, что $AM = BN = CD = 2$ м.

Ответ: $\left[\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right]$ м.

28.34. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояния от вершин A, C, D, D_1 до середины ребра AD равны 3 м. При какой величине двугранного угла, образованного плоскостями AC_1C и ABB_1A_1, объем параллелепипеда будет наибольшим? *Ответ*: $\arccos\frac{1}{3}$.

28.35. В основании пирамиды лежит правильный многоугольник с четным числом сторон. Найти наибольший объем пирамиды, если известно, что сторона основания равна 2 м, наименьшее боковое ребро – 1 м, наибольшее боковое ребро – 4 м. *Ответ*: $\frac{3\sqrt{21}}{4}$ м^3.

28.36. Стороны треугольника равны 10 м, 10 м и 12 м. Сфера радиуса 5 м касается всех сторон треугольника, а сфера радиуса 16,25 м проходит через все вершины треугольника. Найти наименьшее возможное расстояние между центрами этих сфер. *Ответ*: $\frac{\sqrt{1961}}{4}$ м.

28.37. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C принадлежит сфере радиуса 1 м, которая касается плоскости α в точке O. Известно, что прямая BC наклонена к плоскости α под углом 60^o и $AO = 2$ м. Найти наибольшую возможную длину ломаной ABC.

Ответ: $4+\sqrt{3}$ м.

28.38. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Высота SO пирамиды видна из каждой вершины основания под углом 45^o. На какой из сторон основания нужно взять точку M, чтобы значение $SM \cdot \sin(2 \cdot \angle SMO)$ оказалось наименьшим? Найти это наименьшее значение.

Ответ: точку M следует взять на наибольшей стороне основания; наименьшее значение равно $\frac{325\sqrt{194}}{776}$ м.

28.39. Основанием треугольной пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 1 м. Высота пирамиды равна 1 м, а площади проекций боковых граней на плоскость основания относятся как 1:1:2. Найти возможную наибольшую длину бокового ребра пирамиды.

Ответ: $0{,}5 \cdot \sqrt{11}$ м.

28.40. Пять вершин треугольной призмы лежат на поверхности сферы радиуса 2 м, а шестая – в центре этой сферы. Найти наибольший возможный объем призмы. *Ответ*: 3 м^3.

ГЛАВА 10. ВЕКТОРЫ И МЕТОД КООРДИНАТ

Обсудим применение элементов векторной алгебры и метода координат. Эти методы можно использовать и в задачах, в постановке которых векторы или система координат не упоминаются. Надо уметь производить линейные операции над векторами и над их координатами, делить отрезок в заданном отношении, находить длины векторов и угол между ними. Эти приемы разбираются в §29. Элементы аналитической геометрии рассматриваются в §30. Описание геометрических объектов при помощи уравнений и умелое использование этих уравнений, позволяет применять алгебраические методы для решения геометрических задач.

§29. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Векторы являются мощным средством решения многих геометрических задач, в первую очередь, аффинных. Условия параллельности прямых, плоскостей, отношения длин отрезков, площадей, объемов, удобно записывать в векторном виде и использовать для решения задач. Приведем основные определения и свойства векторов [4], а также методы применения векторной алгебры.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

ВЕКТОР, ЕГО НАПРАВЛЕНИЕ И ДЛИНА

Вектором называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется ***началом вектора***, вторая – ***концом вектора***. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной***. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***, его длина равна нулю. Если длина вектора положительна, то его называют ***ненулевым***. Ненулевой вектор можно определить также как ***направленный отрезок***, т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек считается первой (началом вектора), а другая – второй (концом вектора). Направление нулевого вектора, естественно, не определено.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ и изображается стрелкой, обращенной острием к концу вектора (рис.29.1,a). Начало вектора называют также его ***точкой приложения***. Говорят, что вектор $\overline{AB}$ ***приложен к точке*** A. Длина вектора $\overline{AB}$ или $\overline{a}$ равна длине отрезка AB или a и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$. Имея в виду это обозначение, длину вектора называют также ***модулем***, ***абсолютной величиной***. Нулевой вектор, например $\overline{CC}$, обозначается символом $\overline{o}$ и изображается одной точкой (точка C на рис.29.1,*а*). Вектор, длина которого равна единице или принята за единицу, называется ***единичным вектором***.

Ненулевой вектор $\overline{AB}$ кроме направленного отрезка определяет также ***содержащие его луч*** AB (с началом в точке A) и ***прямую*** AB (рис.29.1,*б*).

Рис.29.1

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они принадлежат либо одной прямой, либо – двум параллельным прямым, в противном случае они называются ***неколлинеарными***. Коллинеарность векторов обо-

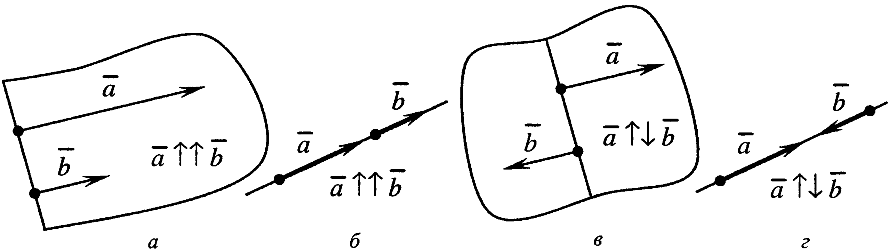


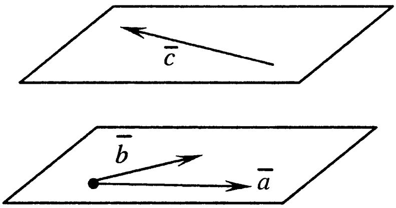
Рис.29.2

значается знаком $\|$. Поскольку направление нулевого вектора не определено, он считается коллинеарным любому вектору. Каждый вектор коллинеарен самому себе.

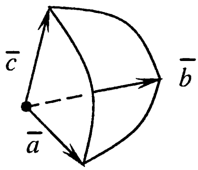
Два ненулевых коллинеарных вектора называются ***одинаково направленными*** (***сонаправленными***), если они принадлежат параллельным прямым и их концы лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через их начала (рис.29.2,*а*); либо, если векторы принадлежат одной прямой, и луч, определяемый одним вектором, целиком принадлежит лучу, определяемому другим вектором (рис.29.2,*б*). В противном случае коллинеарные векторы называются ***противоположно направленными*** (рис.29.2,*в*,*г*). Одинаково направленные и противоположно направленные векторы обозначаются парами стрелок $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ соответственно. Понятия коллинеарных, одинаково направленных векторов распространяются на любое число векторов.

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Три ненулевых вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рис.29.3,*а*), в противном случае они называются ***некомпланарными*** (рис.29.3,*б*). Так как направление нулевого вектора не определено, он считается компланарным с любыми двумя векторами. Понятие компланарных векторов распространяется на любое число векторов.



а



б

Рис.29.3

РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ

Два вектора называются ***равными***, если они:

а) коллинеарны, одинаково направлены;

б) имеют равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными друг другу. Из этого определения следует, что данный вектор можно переносить, не меняя его направления и длины, в любую точку пространства (откладывать от любой точки), при этом будем получать векторы, равные данному.

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Приложим вектор $\overline{CD}$ к точке B (концу вектора $\overline{AB}$) и получим вектор $\overline{BD_1} = \overline{CD}$ (рис.29.4,*а*; здесь и далее равные векторы отмечены одинаковыми засечками). Вектор $\overline{AD_1}$ называется ***суммой векторов*** $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и обозначается $\overline{AD_1} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Это нахождение суммы называется *правилом треугольника*.

Сумму двух неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно найти по *правилу параллелограмма*. Для этого откладываем от любой точки O векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$, а затем строим параллелограмм $OACB$ (рис.29.4,*б*). Диагональ OC параллелограмма определяет сумму: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$.

Для нахождения суммы нескольких векторов можно построить ломаную из равных им векторов. Тогда ***замыкающий*** вектор, соединяющий начало первого вектора ломаной с концом последнего ее вектора, равен сумме всех векторов ломаной. На рис.29.4,*в* изображена сумма $\overline{e}$ четырех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$. Таким способом (*правило ломаной*) можно сложить любое конечное число векторов. Заметим, что сумма векторов не зависит от точек приложения слагаемых и от порядка суммирования. Например, "выстраивая цепочку" векторов для суммы в виде $\overline{b}+\overline{d}+\overline{c}+\overline{a}$, получим вектор, равный вектору $\overline{e}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}$. Если ломаная получилась замкнутой, то сумма равна нулевому вектору.

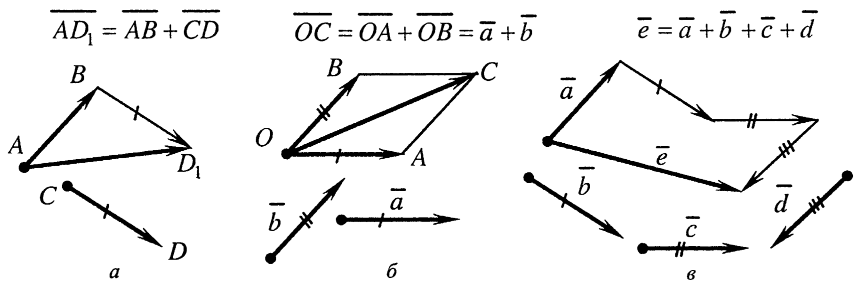


Рис.29.4

ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вектор $(-\overline{a})$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{a}$, если их сумма равна нулевому вектору: $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{o}$. Противоположный вектор $(-\overline{a})$ имеет длину $|\overline{a}|$, коллинеарен и противоположно направлен вектору $\overline{a}$ (рис.29.5,*а*,*б*). Нулевой вектор является противоположным самому себе.

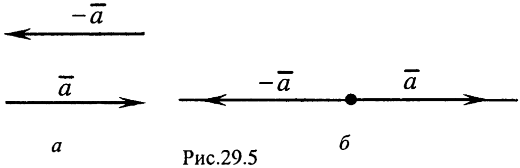


Рис.29.5

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется сумма вектора $\overline{a}$ с вектором $(-\overline{b})$, противоположным вектору $\overline{b}$:

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b}).$$

Для нахождения разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приложим к произвольной точке O векторы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, а также вектор $\overline{OB_1} = -\overline{OB} = -\overline{b}$, противоположный вектору $\overline{b}$ (рис.29.6,*а*). Искомую разность находим по правилу параллелограмма: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB_1} = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{a} - \overline{b}$.

Для нахождения разности проще использовать правило треугольника (рис.29.6,*б*). Для этого прикладываем к произвольной точке O векторы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{BA}$ при этом равен искомой разности $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{a} - \overline{b}$.

Вычитание векторов – действие, обратное сложению – можно определить также следующим образом: ***разностью*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{x}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$ (рис.29.6,*в*), т.е. разность $\overline{x} = \overline{a} - \overline{b}$ – это решение уравнения $\overline{x} + \overline{b} = \overline{a}$.

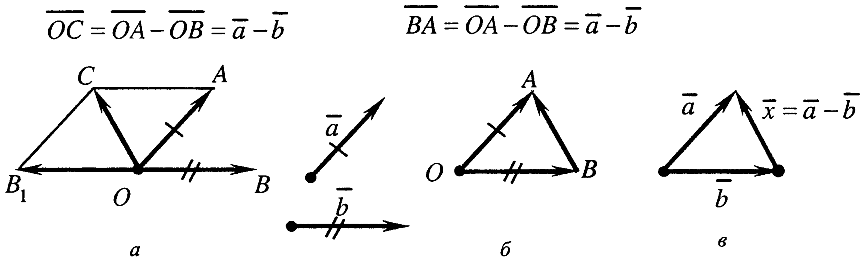


Рис.29.6

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на действительное число λ ($\lambda \neq 0$) называется вектор $\lambda \cdot \overline{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\lambda \cdot \overline{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, т.е. $|\lambda \overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) векторы $\lambda \cdot \overline{a}$ и $\overline{a}$ коллинеарные ($\lambda \cdot \overline{a} \parallel \overline{a}$);

3) векторы $\lambda \cdot \overline{a}$ и $\overline{a}$ одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

Произведение нулевого вектора на любое число λ считается (по определению) нулевым вектором: $\lambda \cdot \overline{o} = \overline{o}$; произведение любого вектора на число нуль также считается нулевым вектором: $0 \cdot \overline{a} = \overline{o}$.

Из определения произведения следует, что:

а) при умножении на единицу ($\lambda = 1$) вектор не изменяется: $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$;

б) при умножении вектора на -1 получается противоположный вектор: $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$;

в) *деление вектора на отличное от нуля число* μ сводится к его умножению на число $\lambda=\frac{1}{\mu}$, обратное μ: $\frac{\overline{a}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\cdot\overline{a}$;

г) при делении ненулевого вектора $\overline{a}$ на его длину, т.е. при умножении $\overline{a}$ на число $\frac{1}{|\overline{a}|}$, получаем единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\overline{a}$. Действительно, длина вектора $\overline{e}=\frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}$ равна единице:

$$|\overline{e}|=\frac{1}{|\overline{a}|}\cdot|\overline{a}|=1.$$

Вектор $\overline{e}$ коллинеарен и одинаково направлен с вектором $\overline{a}$, так как $\lambda=\frac{1}{|\overline{a}|}>0$;

д) при умножении единичного вектора на число λ получаем коллинеарный ему вектор, длина которого равна $|\lambda|$.

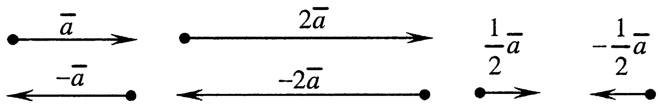


Рис.29.7

На рис.29.7 изображены векторы, получающиеся в результате умножения данного вектора $\overline{a}$ на $\lambda=\pm 2$ и $\lambda=\pm\frac{1}{2}$, а также противоположный вектор $-\overline{a}=(-1)\cdot\overline{a}$.

Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.

ЛИНЕЙНАЯ И АФФИННАЯ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_n$ называется выражение вида

$$\overline{b}=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n.$$

Числа λ_1, λ_2, …, λ_n называются ***коэффициентами*** линейной комбинации.

Говорят, что ***вектор*** $\overline{b}$ ***разложен по векторам*** $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,$ $\overline{a}_n$, если он представлен в виде линейной комбинации этих векторов

$$\overline{b}=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n.$$

Линейная комбинация $\overline{b}=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n$ называется ***аффинной комбинацией векторов*** $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,$ $\overline{a}_n$, если сумма коэффициентов равна 1:

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1.$$

При нахождении линейных или аффинных комбинаций используются только операции сложения (вычитания) векторов и умножения вектора на число. Эти операции называются ***линейными операциями*** над векторами. Правила выполнения линейных операций такие же, как в алгебре. Например, для любых чисел λ, μ и векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ справедливы равенства

$$\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}, \qquad (\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}.$$

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть дана прямоугольная система координат Oxy на плоскости с единичными векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$ на координатных осях. *Всякий вектор* $\overline{a}$ *на плоскости может быть разложен по векторам* $\overline{i}$, $\overline{j}$:

$$\overline{a}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}$$

и притом единственным образом, т.е. коэффициенты x, y разложения определяются однозначно. Эти коэффициенты называются ***координатами вектора*** $\overline{a}$. Наоборот, для любой пары чисел $(x;y)$ можно составить линейную комбинацию $\overline{a}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}$, т.е. найти вектор с координатами $(x;y)$. Заметим, что на плоскости существует много векторов с одинаковыми координатами $(x;y)$, но они все равные. Координаты вектора принято записывать в виде равенства $\overline{a}=(x;y)$.

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть дана прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве с единичными векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ на координатных осях. *Всякий вектор* $\overline{a}$ *в пространстве может быть разложен по векторам* $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

и притом *единственным образом*, т.е. коэффициенты x, y, z разложения определяются однозначно. Эти коэффициенты называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$. Наоборот, для любой тройки чисел $(x; y; z)$ можно составить линейную комбинацию $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, т.е. найти вектор с координатами $(x; y; z)$. Заметим, что в пространстве существует много векторов с одинаковыми координатами $(x; y; z)$, но они все равные. Координаты вектора принято записывать в виде равенства $\bar{a} = (x; y; z)$.

СВЯЗИ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК

Радиусом-вектором точки A называется вектор $\overline{OA}$, соединяющий начало координат с этой точкой A.

1. *Чтобы найти координаты вектора* $\overline{AB}$ *с началом в точке* $A(x_A; y_A; z_A)$ *и концом в точке* $B(x_B; y_B; z_B)$, *нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала*

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

2. *Координаты точки* $A(x_A; y_A; z_A)$ *совпадают с координатами радиуса-вектора* $\overline{OA} = (x_A; y_A; z_A)$.

На координатной плоскости эти правила остаются справедливыми. Нужно, конечно, исключить из записей координат третью компоненту (аппликату).

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть даны векторы $\bar{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\bar{b} = (x_b; y_b; z_b)$.

1. *При сложении векторов их соответствующие координаты складываются*:

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b).$$

2. *При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число*:

$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a).$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Под ***углом*** φ ***между векторами*** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается тот угол между равными им векторами $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$, имеющими общее начало (рис.29.8), который не превосходит 180^o (π радиан). Величина φ угла между любыми векторами заключена в пределах: $0^o \le \varphi \le 180^o$ ($0 \le \varphi \le \pi$). Векторы называются перпендикулярными (ортогональными), если угол между ними равен 90^o.

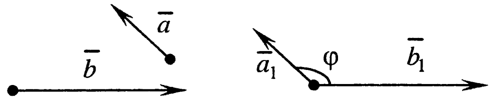


Рис.29.8

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла φ между ними:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\,\bar{a}\,|\cdot|\,\bar{b}\,|\cdot\cos\varphi\,.$$

Если хотя бы один из сомножителей – нулевой вектор, то скалярное произведение считается равным нулю (по определению).

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{b},\bar{a}\right)$ *для любых векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$.

2. $\left(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\bar{c}\right)=\lambda\left(\bar{a},\bar{c}\right)+\mu\left(\bar{b},\bar{c}\right)$ *для любых векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *и чисел* λ, μ.

3. *Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.*

4. *В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов* $\bar{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ *и* $\bar{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$ *вычисляется по формуле*

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b\,.$$

Скалярное произведение векторов имеет многочисленные приложения и часто применяется в задачах на вычисление геометрических величин (в метрических задачах).

1. *Модуль (длина) вектора* $\bar{a}=\left(x;y;z\right)$ *вычисляется по формуле*

$$|\,\bar{a}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

2. *Угол* φ *между векторами* $\bar{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$ *и* $\bar{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\varphi=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\,\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}\,.$$

Все формулы справедливы на координатной плоскости, если исключить третью координату (аппликату).

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ПОСТРОЕННОГО НА ВЕКТОРАХ

При помощи скалярного произведения можно получить полезные формулы для вычисления площади параллелограмма.

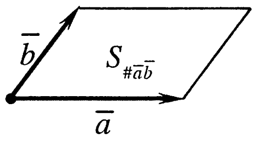


Рис.29.9

Площадь $S_{\#\overline{a}\overline{b}}$ *параллелограмма* (рис.29.9), *построенного на векторах* $\overline{a}=(x_a;y_a)$ *и* $\overline{b}=(x_b;y_b)$, *вычисляется по формуле*

$$S_{\#\overline{a}\overline{b}}=\left|\, x_a\cdot y_b - y_a\cdot x_b\right|.$$

Площадь $S_{\#\overline{a}\overline{b}}$ *параллелограмма* (рис.29.9), *построенного на векторах* $\overline{a}=(x_a;y_a;z_a)$ *и* $\overline{b}=(x_b;y_b;z_b)$, *вычисляется по формуле*

$$S_{\#\overline{a}\overline{b}}=\sqrt{|\overline{a}|^2\cdot|\overline{b}|^2-\left(\overline{a},\overline{b}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(x_a^2+y_a^2+z_a^2\right)\left(x_a^2+y_a^2+z_a^2\right)-\left(x_ax_b+y_ay_b+z_az_b\right)^2}\ .$$

АФФИННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Для применения векторов и метода координат нужно уметь записывать (в векторной форме) условия принадлежности точки прямой или плоскости. Рассмотрим основные типы условий.

1. Пусть даны две точки A и B. Требуется записать **условие принадлежности точки M прямой AB.**

Рассмотрим векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (с некоторым началом O). Точка M (или что то же самое конец вектора $\overline{OM}$) будет принадлежать прямой AB тогда и только тогда, когда вектор $\overline{OM}$ представляется в виде

$$\overline{OM}=x\cdot\overline{OA}+(1-x)\cdot\overline{OB}$$

для некоторого числа x.

В самом деле, равенство можно переписать так

$$\overline{OM}-\overline{OB}=x\cdot\left(\overline{OA}-\overline{OB}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\overline{BM}=x\cdot\overline{BA}\,.$$

Последнее равенство означает коллинеарность векторов $\overline{BM}$ и $\overline{BA}$, что является необходимым и достаточным условием принадлежности точки M прямой AB (рис.29.10).

Точка M принадлежит прямой AB

$\Updownarrow$

$\overline{OM} = x \cdot \overline{OA} + (1-x) \cdot \overline{OB}$, $x \in R$

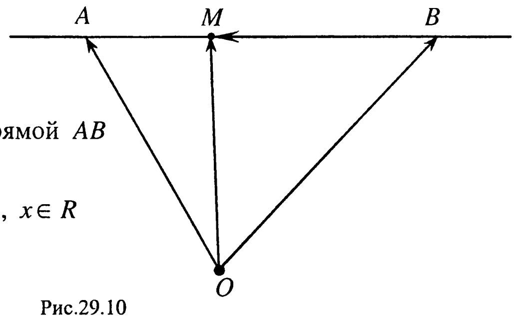


Рис.29.10

2. Деление отрезка в заданном отношении. Равенство $\overline{BM} = x \cdot \overline{BA}$ при $x \in [0; 1]$ означает, что точка M принадлежит отрезку AB. Следовательно, точка M делит отрезок в отношении $AM : MB = p : q$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{OM}$ представляется в виде

$$\overline{OM} = \frac{q}{p+q} \cdot \overline{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overline{OB}.$$

В самом деле, $\overline{OM} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$, где $\overline{OA_1} = \frac{q}{p+q} \cdot \overline{OA}$, $\overline{OB_1} = \frac{p}{p+q} \cdot \overline{OB}$ по теореме Фалеса (рис.29.11).

Точка M делит отрезок AB
в отношении $AM : MB = p : q$

$\Updownarrow$

$$\overline{OM} = \frac{q}{p+q} \cdot \overline{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overline{OB}$$

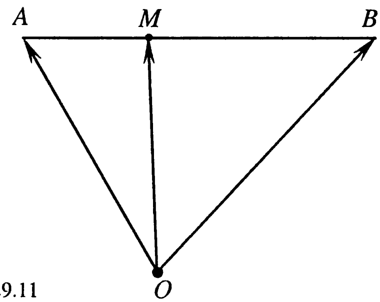


Рис.29.11

Пусть известны координаты точек $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ – концов отрезка. Требуется найти координаты точки M. Взяв точку O за начало координат, из равенства радиусов-векторов

$$\overline{OM} = \frac{q}{p+q} \cdot \overline{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overline{OB}$$

получаем

$$M\left(\frac{q}{p+q}x_A+\frac{p}{p+q}x_b;\frac{q}{p+q}y_A+\frac{p}{p+q}y_b;\frac{q}{p+q}z_A+\frac{p}{p+q}z_b\right).$$

В частности,

– координаты середины C отрезка AB вычисляются как среднее арифметическое соответствующих координат концов отрезка

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right);$$

– координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC вычисляются как среднее арифметическое соответствующих координат вершин треугольника

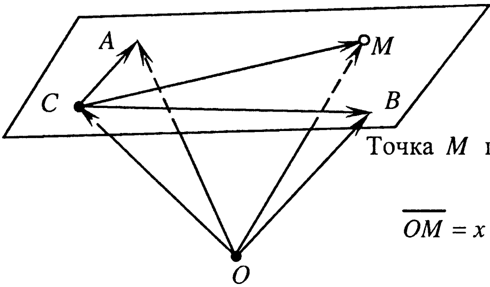
$$M\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right).$$

3. Пусть даны три точки A, B и C. Требуется записать **условие принадлежности точки** M **плоскости** ABC (плоскости, проходящей через точки A, B, C).

Рассмотрим векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ (с некоторым началом O). Точка M (или, что то же самое, конец вектора $\overline{OM}$) будет принадлежать плоскости ABC тогда и только тогда, когда вектор $\overline{OM}$ представляется в виде

$$\overline{OM}=x\cdot\overline{OA}+y\cdot\overline{OB}+(1-x-y)\cdot\overline{OC}$$

для некоторых чисел x и y (рис.29.12).



Точка M принадлежит плоскости ABC

$$\Updownarrow$$

$$\overline{OM}=x\cdot\overline{OA}+y\cdot\overline{OB}+(1-x-y)\cdot\overline{OC}$$

$x\in R$, $y\in R$.

Рис.29.12

В самом деле, равенство можно переписать так

$$\overline{OM}-\overline{OC}=x\cdot\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)+y\cdot\left(\overline{OB}-\overline{OC}\right)\Leftrightarrow\overline{CM}=x\cdot\overline{CA}+y\cdot\overline{CB}.$$

Последнее соотношение означает компланарность векторов $\overline{CM}$, $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$, что является необходимым и достаточным условием принадлежности точки M плоскости ABC.

ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО ПРИМЕНЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Основной метод применения векторов состоит в следующем:

1. Выбираем систему координат (начальную точку и три некомпланарных вектора – ***базис***) для рассматриваемой конфигурации (для планиметрических задач берем два неколлинеарных вектора). Каждую точку заданной конфигурации рассматриваем как конец вектора с началом в выбранной начальной точке.

2. Характерные точки для решаемой задачи рассматриваем как общие точки двух геометрических объектов – двух геометрических мест точек. Обычно это точки пересечения прямых, плоскостей или прямой и плоскости.

3. Взяв вектор с концом в характерной и началом в выбранной начальной точке, записываем в векторной форме два условия – принадлежности характерной точки двум г.м.т. Получаем два разложения одного и того же вектора по базису.

4. Приравниваем коэффициенты этих двух разложений при одинаковых базисных векторах. Получаем систему линейных уравнений.

5. Решая систему уравнений, находим искомые отношения длин отрезков.

Пример 29.1. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин $A(0;0;3)$, $B(-4;0;0)$ и точки $M(0;2;1)$ пересечения медиан треугольника BCD. Найти координаты вершины D и площадь параллелограмма.

Решение. Пусть искомая точка имеет координаты $D(x;y;z)$. Тогда векторы $\overline{b}=\overline{AB}$ и $\overline{d}=\overline{AD}$ имеют координаты:

$$\overline{b}=(-4;0;-3),\quad \overline{d}=(x;y;z-3).$$

По свойству медиан $CM=2\cdot MQ$, где Q – точка пересечения диагоналей (рис.29.13). Следовательно, $\overline{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overline{AC}$, т.е.

$$3\cdot\overline{AM}=2\cdot\overline{AC}.$$

Запишем координаты векторов в левой и правой частях этого равенства

$$3\cdot\overline{AM}=(0;6;-6),$$

$$2\cdot\overline{AC}=2\left(\overline{b}+\overline{d}\right)=(2x-8;2y;2z-12).$$

Так как равные векторы имеют равные координаты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}2x-8=0,\\ 2y=6,\\ 2z-12=-6,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=4,\\ y=3,\\ z=3.\end{cases}$$

Итак, точка D имеет координаты $D(4;\,3;\,3)$.

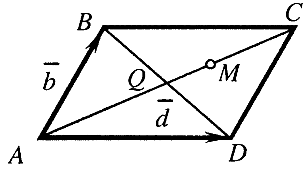


Рис.29.13

Найдем теперь площадь параллелограмма $ABCD$ по формуле

$$S_{\#\bar{b}\bar{d}}=\sqrt{|\bar{b}|^2\cdot|\bar{d}|^2-\left(\bar{b},\bar{d}\right)^2}\,.$$

По координатам векторов $\bar{b}=(-4;0;-3)$, $\bar{d}=(4;\,3;\,0)$ определяем их длины

$$|\bar{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5\,,\qquad |\bar{d}|=\sqrt{4^2+3^2}=5\,,$$

а также их скалярное произведение

$$\left(\bar{b},\bar{d}\right)=(-4)\cdot4+0\cdot3+(-3)\cdot0=-16\,.$$

Подставляя в формулу, вычисляем искомую площадь

$$S_{\#\bar{b}\bar{d}}=\sqrt{25\cdot25-16^2}=3\sqrt{41}\,.$$

Ответ: $D(4;\,3;\,3)$, $3\sqrt{41}$.

Пример 29.2. Плоскость сечения проходит через вершины A_1 и D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а также через середину K ребра BS. В каком отношении эта плоскость делит диагональ AC_1?

Решение. При векторном способе решения плоскость сечения (рис.29.14) можно было бы не рисовать. Возьмем три некомпланарных вектора (базис): $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{d}$ и $\overline{AA_1}=\bar{a}$. Все точки пространства будем представлять как концы векторов с началом в точке A (начальной точке) и раскладывать эти векторы по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$.

Плоскость сечения состоит из всех точек M, для которых

$$\overline{AM}=x\cdot\overline{AA_1}+y\cdot\overline{AK}+(1-x-y)\cdot\overline{AD}$$

при некоторых x и y. Заметим, что $\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BK}=\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{d}$. Тогда

$$\overline{AM}=x\cdot\bar{a}+y\cdot\left(\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{d}\right)+(1-x-y)\cdot\bar{d}\,.$$

Вектор $\overline{AC_1}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{d}$. Любая точка M прямой AC_1 задается вектором

$$\overline{AM}=t\cdot\overline{AC_1}=t\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{d}\right),$$

где t – некоторое число.

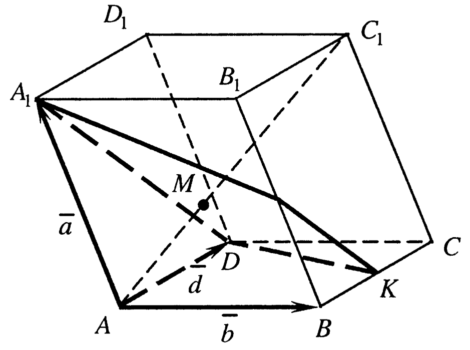


Рис.29.14

Для точки M пересечения прямой AC_1 с плоскостью сечения, т.е. для вектора $\overline{AM}$, имеем два разложения, приравнивая которые, получаем

$$t\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}\right)=x\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}+\left(1-x-\frac{1}{2}y\right)\cdot\overline{d}\,.$$

Отсюда

$$\begin{cases} t=x\,,\\ t=y\,,\\ t=1-x-\dfrac{1}{2}y\,. \end{cases}$$

Следовательно, $t=\dfrac{2}{5}$. Число t как раз и является отношением длин векторов $\overline{AM}$ и $\overline{AC_1}$, т.е. $AM:AC_1=2:5$. Отсюда $AM:MC_1=2:3$.

Ответ: $2:3$.

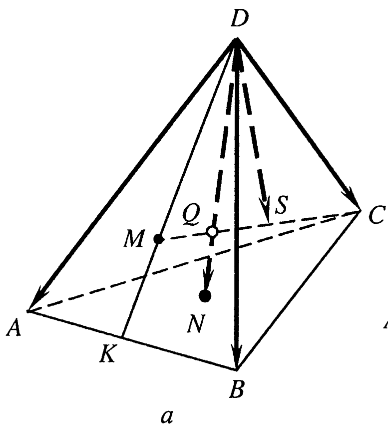
Пример 29.3. Доказать, что в треугольной пирамиде:

а) отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке, которая делит каждый из них в отношении $3:1$, считая от вершины;

б) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер пересекаются в одной точке, которая делит каждый из них пополам;

в) точки, о которых идет речь в пунктах **(а)** и **(б)**, совпадают.

Решение. Пусть $ABCD$ – треугольная пирамида. Примем вершину D за начальную точку и обозначим $\overline{a}=\overline{DA}$, $\overline{b}=\overline{DB}$, $\overline{c}=\overline{DC}$ – три некомпланарных вектора (базис).



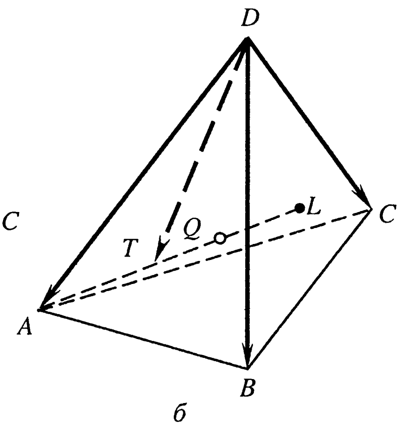


Рис.29.15

а) Пусть K – середина AB, M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а Q – точка пересечения, существование которой надо доказать (рис.29.15,*а*). Тогда $\overline{DK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{a} + \frac{1}{2} \cdot \overline{b}$. По свойству медиан $DM : MK = 2:1$, следовательно, $\overline{DM} = \frac{2}{3} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{3} \cdot \overline{a} + \frac{1}{3} \cdot \overline{b}$. Любая точка S, принадлежащая прямой CM, удовлетворяет условию

$$\overline{DS} = x \cdot \overline{DM} + (1-x) \cdot \overline{DC} = \frac{x}{3} \cdot \overline{a} + \frac{x}{3} \cdot \overline{b} + (1-x) \cdot \overline{c}.$$

Рассмотрим теперь грань DBC. Если L – точка пересечения медиан треугольника DBC (рис.29.15,*б*), то $\overline{DL} = \frac{1}{3} \cdot \overline{b} + \frac{1}{3} \cdot \overline{c}$. Любая точка T, принадлежащая прямой AL, удовлетворяет условию

$$\overline{DT} = y \cdot \overline{DM} + (1-y) \cdot \overline{DA} = (1-y) \cdot \overline{a} + \frac{y}{3} \cdot \overline{b} + \frac{y}{3} \cdot \overline{c}.$$

Если существует точка Q пересечения прямых CM и AL, то $\overline{DQ} = \overline{DS}$ при некотором x, а также $\overline{DQ} = \overline{DT}$ при некотором y. Следовательно, для существования точки Q необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{x}{3} \cdot \overline{a} + \frac{x}{3} \cdot \overline{b} + (1-x) \cdot \overline{c} = (1-y) \cdot \overline{a} + \frac{y}{3} \cdot \overline{b} + \frac{y}{3} \cdot \overline{c}$$

при некоторых x и y. Приравнивая коэффициенты разложений при базисных векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = 1 - y, \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{3}, \\ 1 - x = \dfrac{y}{3}, \end{cases}$$

трех уравнений с двумя неизвестными. Она имеет решение $x = y = \dfrac{3}{4}$.

Итак, точка Q – конец вектора

$$\overline{DQ} = \frac{x}{3} \cdot \overline{a} + \frac{x}{3} \cdot \overline{b} + (1 - x) \cdot \overline{c} = \frac{1}{4} \cdot \overline{a} + \frac{1}{4} \cdot \overline{b} + \frac{1}{4} \cdot \overline{c}$$

является точкой пересечения отрезков CM и AL. Учитывая, что в полученное выражение векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ входят симметрично, то отрезок, соединяющий вершину B с точкой пересечения медиан грани DAC, также через точку Q. Наконец, если N – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overline{DN} = \dfrac{1}{3} \cdot \overline{a} + \dfrac{1}{3} \cdot \overline{b} + \dfrac{1}{3} \cdot \overline{c}$. Следовательно, $\overline{DQ} = \dfrac{3}{4} \cdot \overline{DN}$, т.е. точка Q принадлежит отрезку, соединяющему вершину D с точкой пересечения медиан противоположной грани, причем делит этот отрезок в отношении $DQ : QN = 3 : 1$ (считая от вершины). Аналогичный вывод можно сделать и для других отрезков, что и требовалось доказать.

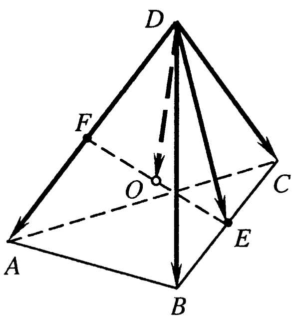


Рис.29.16

б) и **в)** Докажем, что точка Q, существование которой показано в пункте **(а)**, является серединой отрезка EF, где F – середина ребра AD, а E – середина ребра BC (рис.29.16). Действительно, $\overline{DF} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{a}$; $\overline{DE} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{b} + \dfrac{1}{2} \cdot \overline{c}$. Вектор $\overline{DP}$ с концом в середине P отрезка EF имеет вид

$$\overline{DP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DF} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{4} \cdot \overline{a} + \frac{1}{4} \cdot \overline{b} + \frac{1}{4} \cdot \overline{c}.$$

Как видим, $\overline{DP} = \overline{DQ}$, следовательно, точка Q – есть середина отрезка EF. Аналогично доказываем, что точка Q делит каждый отрезок, соединяющий середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пополам. Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. Точка Q является центром тяжести пирамиды (сплошной, вырезанной из однородного куска материала), а также центром тяжести системы четырех равных точечных грузов, находящихся в вершинах пирамиды.

Задачи для самостоятельного решения

Векторы на плоскости

29.1. Все стороны четырехугольника $ABCD$ различны по длине. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, а N – середина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD. Какие значения может принимать отношение $DM : DN$? *Ответ*: $\frac{4}{3}$.

29.2. В трапеции $ABCD$ боковые стороны BC, AD и меньшее основание AB равны половине большего основания CD. На прямой BC указать такую точку O, для которой длина суммы векторов $\overline{OA}+\overline{OD}+\overline{OC}$ является наименьшей. Найти эту длину, если $BC=3$ см.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см.

29.3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и P так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:3$. Известно, что $CM:BP:AN=3:4:5$. Найти углы треугольника ABC.

Ответ: $\arccos\frac{13}{\sqrt{365}}$; $\arccos\frac{17}{\sqrt{485}}$; $\arccos\frac{5}{\sqrt{7663}}$.

29.4. На координатной плоскости Oxy расположен треугольник ABC, точка K пересечения биссектрис которого имеет координаты $(2;-1)$. Периметр треугольника равен 2. Найти координаты вектора

$$\left|\overline{OB}-\overline{OC}\right|\cdot\overline{OA}+\left|\overline{OC}-\overline{OA}\right|\cdot\overline{OB}+\left|\overline{OA}-\overline{OB}\right|\cdot\overline{OC}.$$

Ответ: $(4;-2)$.

29.5. На координатной плоскости Oxy расположен треугольник ABC так, что $H(1;2)$ – точка пересечения его высот, $M(2;0)$ – точка пересечения его медиан. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника ABC. *Ответ*: $(2{,}5;-1)$.

29.6. На координатной плоскости Oxy отмечены точки $A(2;0)$, $B(4;6)$, $C(0;2)$, P и Q. Если вектор $\overline{PA}$ повернуть на 90^o вокруг точки P, а вектор $\overline{QB}$ повернуть на 270^o вокруг точки Q, то концы этих векторов совпадут. Если же вектор $\overline{QA}$ повернуть на 90^o вокруг точки Q, а вектор $\overline{PC}$ – на 270^o вокруг точки P, то концы этих векторов тоже совпадут. Найти координаты точек P и Q. (Все повороты делаются в положительном направлении – против часовой стрелки.)

Ответ: $P(3;1)$, $Q(1;3)$.

Векторы в пространстве

29.7. Дан прямоугольный параллелепипед с ребрами 3 м, 4 м и 5 м. Найти объем тела, состоящего из всех возможных точек, каждая из которых является концом вектора длины 1 м, начало которого принадлежит поверхности данного параллелепипеда. *Ответ*: $\left(148+\frac{40}{3}\pi\right)$ м^3.

29.8. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1 м точка M является серединой ребра AB основания $ABCD$. Найти наименьшую возможную длину вектора $\overline{OP}+\overline{OQ}$ при условии, что точки O, P и Q принадлежат соответственно прямой $A'M$, отрезку $A'C'$ и отрезку BD. *Ответ*: $\frac{1}{3}$ м.

29.9. В правильной усеченной треугольной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$:

$$\sqrt{2}\cdot\left|\overline{AA_1}+\frac{1}{3}\left(\overline{A_1C_1}+\overline{A_1B_1}-\overline{AC}-\overline{AB}\right)\right|=\left|\overline{AB_1}-\overline{AB}\right|.$$

Найти величину угла между боковым ребром и плоскостью основания.

Ответ: 45^o.

29.10. На боковых ребрах SA, SB, SC правильной треугольной пирамиды взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Площадь треугольника SA_1B_1 в 6 раз меньше площади треугольника SB_1C_1, а вектор

$$27\cdot\overline{SA_1}+8\cdot\overline{SB_1}+6\cdot\overline{SC_1}+\overline{CB}$$

перпендикулярен плоскости основания пирамиды. Найти отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$. *Ответ*: $1:54$.

29.11. В треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра SA, SB, SC имеют одинаковую длину. Высота пирамиды равна 3 м. Найти расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до точки пересечения высот этого треугольника, если известно, что вектор $\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}$ имеет длину 10 м. *Ответ*: $\sqrt{19}$ м.

§30. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассматриваются задачи, для решения которых применяется алгебраический подход. В аналитической геометрии для задания геометрических объектов (прямых, плоскостей, окружностей, сфер) используются уравнения. Точки пересечения линий и поверхностей определяются как решение систем уравнений. Для применения такого метода необходимо ввести систему координат, как правило, прямоугольную. Желательно, чтобы система координат была бы естественным образом включена в рассматриваемую геометрическую конфигурацию. Например, если дан прямоугольный параллелепипед (или куб), то за начало координат удобно взять вершину многогранника, а координатные оси направить по трем ребрам, исходящим из выбранной вершины, либо начало координат поместить в центр симметрии многогранника, а в качестве координатных осей взять оси симметрии параллелепипеда (или куба).

Напомним уравнения основных геометрических объектов.

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

На координатной плоскости Oxy любую прямую можно задать уравнением

$$ax+by+c=0. \qquad \text{(\textbf{\textit{общее уравнение прямой}})}$$

Ненулевой вектор $\overline{n}=(a;b)$ *перпендикулярен этой прямой* (рис.30.1). Он называется ***нормальным*** (или, просто, ***нормалью***).

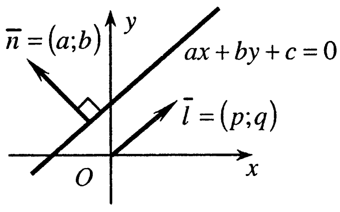


Рис.30.1

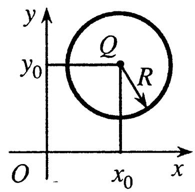


Рис.30.2

На координатной плоскости Oxy любую прямую можно задать уравнением

$$\begin{cases} x=x_0+pt, \\ y=y_0+qt, \end{cases} \qquad \text{(\textbf{\textit{параметрическое уравнение прямой}})}$$

где t – параметр, принимающий любые значения $t\in R$, а $(x_0;y_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой. Ненулевой вектор $\overline{l}=(p;q)$ паралле-

лен (или принадлежит) этой прямой (рис.30.1). Он называется ***направляющим вектором***.

Угол между прямыми. *Угол* φ *между прямыми*

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad и \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

находится как угол между их нормалями $\overline{n}_1=(a_1;b_1)$ *и* $\overline{n}_2=(a_2;b_2)$*:*

$$\cos\varphi=\frac{|(\overline{n}_1,\overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

где $0^o\le\varphi\le 90^o$.

Расстояние от точки до прямой. *Расстояние* ρ *от точки* $M(x_M;y_M)$ *до прямой* $ax+by+c=0$ *вычисляется по формуле*

$$\rho=\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

На координатной плоскости Oxy *любая окружность может быть задана уравнением*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \qquad (\textbf{\textit{уравнение окружности}})$$

где x_0, y_0 *– координаты центра* $Q(x_0;y_0)$ *окружности,* R *– ее радиус* (рис.30.2).

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ, СФЕРЫ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

В координатном пространстве $Oxyz$ *любую плоскость можно задать линейным уравнением*

$$ax+by+cz+d=0. \qquad (\textbf{\textit{общее уравнение плоскости}})$$

Ненулевой вектор $\overline{n}=(a;b;c)$ *перпендикулярен этой плоскости.* Он называется ***нормальным*** (или просто ***нормалью***).

Угол между плоскостями. Угол φ между двумя плоскостями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad и \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

вычисляется как угол между их нормалями $\overline{n}_1=(a_1;b_1;c_1)$ и $\overline{n}_2=(a_2;b_2;c_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{|(\overline{n}_1,\overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$

где $0^o\le\varphi\le 90^o$.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние ρ от точки $M(x_M; y_M; z_M)$ до плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

В координатном пространстве $Oxyz$ любая сфера может быть задана уравнением вида

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \qquad \text{(уравнение сферы)}$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты центра $Q(x_0; y_0; z_0)$ сферы, R – ее радиус.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

В координатном пространстве $Oxyz$ любая прямая может быть задана уравнением

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \end{cases} \qquad \text{(параметрическое уравнение прямой)}$$

где t – параметр, принимающий любые значения $t \in R$, а $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой. Ненулевой вектор $\bar{l} = (p; q; r)$ параллелен (или принадлежит) этой прямой. Он называется ***направляющим вектором***. Заметим, что параметрическое уравнение не единственный способ задания прямой. Например, любую прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей.

Угол между прямой и плоскостью. *Угол γ между*

$$\text{прямой} \begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases} \quad \text{и плоскостью} \quad ax + by + cz + d = 0$$

находится по формуле

$$\sin\gamma = \frac{|ap + bq + cr|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

где $0^o \le \gamma \le 90^o$.

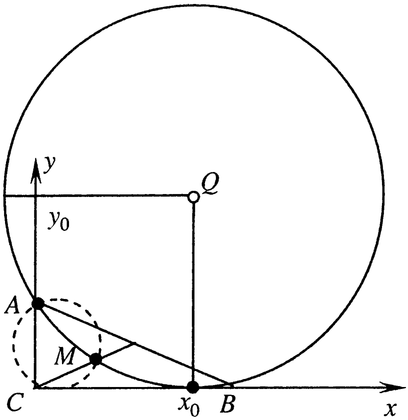


Рис.30.3

Пример 30.1. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 6 см и 18 см соответственно. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, точку пересечения медиан треугольника ABC и касающейся стороны BC.

Решение. Введем систему координат, связанную с прямоугольным треугольником ABC (рис. 30.3), взяв за начало вершину C и направив координатные оси вдоль катетов. Тогда вершины треугольника имеют координаты $A(0;6)$, $B(18;0)$, $C(0;0)$, а точка M пересечения медиан имеет координаты $M(6;2)$. Запишем уравнение окружности с центром в точке $Q(x_0;\, y_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Искомая окружность проходит через точки A и M, т.е. координаты каждой их этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} x_0^2+(6-y_0)^2=R^2\,, \\ (6-x_0)^2+(2-y_0)^2=R^2\,. \end{cases}$$

Так как искомая окружность касается оси абсцисс, то $y_0=R$. Исключая y_0 при помощи этого равенства, получаем систему

$$\begin{cases} x_0^2+(6-R)^2=R^2\,, \\ (6-x_0)^2+(2-R)^2=R^2\,. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения. Следовательно, существуют две окружности радиусов $R=13\pm1{,}5\sqrt{39}$, удовлетворяющие условию задачи. На рис.30.3 вторая окружность изображена пунктирной линией.

Ответ: $13\pm1{,}5\sqrt{39}$ см.

Пример 30.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки N – середина ребра DD_1, M – точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, Q – центр грани $ABCD$. Известны длины ребер

$AB = 12$ м, $AD = 18$ м, $AA_1 = 10$ м. Плоскость m проходит через точки A, B, M, а плоскость n – через точки A_1, B_1, N. Найти

а) величину угла φ между плоскостями m и n;

б) расстояние ρ от точки Q до плоскости n;

в) величину угла γ между прямой NQ и плоскостью m.

Решение. Введем систему координат. Вершину A примем за начало координат, луч AD – ось абсцисс, AB – ось ординат, AA_1 – ось аппликат (рис.30.4). Определим координаты точек $A(0;0;0)$, $A_1(0;0;10)$, $B(0;12;0)$, $B_1(0;12;10)$, $D(18;0;0)$, $C_1(18;12;10)$, $N(18;0;5)$, $Q(9;6;0)$.

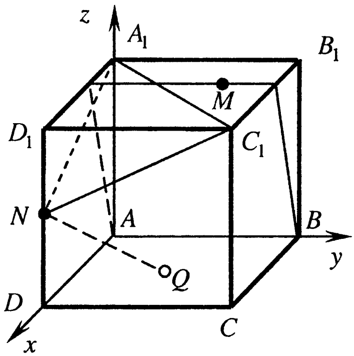


Рис.30.4

Координаты точки $M(6;8;10)$ находим как среднее арифметическое соответствующих координат вершин треугольника $A_1B_1C_1$.

Составим уравнения плоскостей m и n. Плоскость m имеет уравнение вида $ax + cz = 0$, так как она проходит через начало координат ($d = 0$) перпендикулярно координатной плоскости Axz. Подставив координаты точки M, получаем $6a + 10c = 0$. Можно взять любые (не равные нулю) коэффициенты a и b, удовлетворяющие этому уравнению, например, $a = 5$, $b = -3$. Следовательно, уравнение плоскости m имеет вид

$$5x - 3z = 0.$$

Составим теперь уравнение плоскости n: $ax + by + cz + d = 0$. Подставляя координаты точек A_1, C_1, N, получаем систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 10c + d = 0, \\ 18a + 12b + 10c + d = 0, \\ 18a + 5c + d = 0. \end{cases}$$

Взяв, например, $d = -360$, из первого уравнения получим $c = 36$. Тогда из третьего уравнения $a = 10$. Подставляя эти значения во второе уравнение, находим $b = -15$. Итак, уравнение плоскости n имеет вид

$$10x - 15y + 36z - 360 = 0.$$

а) Найдем угол φ между плоскостями m и n как угол между их нормальными векторами $\overline{m} = (5;0;-3)$ и $\overline{n} = (10;-15;36)$:

$$\cos\varphi=\frac{|5\cdot 10-3\cdot 36|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}\sqrt{10^2+(-15)^2+36^2}}=\frac{58}{\sqrt{34}\sqrt{1621}}=\frac{58}{\sqrt{55114}}.$$

б) Вычислим расстояние ρ от точки Q до плоскости n:

$$\rho=\frac{|10\cdot 9-15\cdot 6-360|}{\sqrt{1621}}=\frac{360}{\sqrt{1621}}.$$

в) Найдем величину угла γ между прямой NQ и плоскостью m. Для вектора $\overline{NQ}=(-9;6;-5)$ и плоскости $5x-3z=0$ получаем формуле

$$\sin\gamma=\frac{|-9\cdot 5-5\cdot(-3)|}{\sqrt{(-9)^2+6^2+(-5)^2}\sqrt{5^2+(-3)^2}}=\frac{30}{\sqrt{4828}}=\frac{15}{\sqrt{1207}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{58}{\sqrt{55114}}$; $\frac{360}{\sqrt{1621}}$ м; $\arcsin\frac{15}{\sqrt{1207}}$.

Задачи для самостоятельного решения

30.1. В четырехугольнике $ABCD$ точки $K(2;3)$, $P(-4;2)$ и $M(-4;-3)$ принадлежат соответственно сторонам CD, BC, AB, а точка $E(-2;-1)$ принадлежит диагонали AC. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что

$$AM:MB=CP:PB=DK:KC=2:3.$$

Ответ: $\frac{875}{18}$.

30.2. Длины оснований AB и CD трапеции равны соответственно 1 см и 3 см. Прямые BC и AD пересекаются в начале координат. Точка $K(6;9)$ лежит на прямой CD, а точка $M(-1;2)$ – на прямой AB. Найти площадь трапеции. *Ответ*: $2{,}8\sqrt{10}$.

30.3. На координатной плоскости заданы две вершины $A(3;1)$, $B(1;-3)$ треугольника ABC. Площадь треугольника равна 4. Найти координаты вершины C, если известно, что она лежит на прямой $2x+y-1=0$.

Ответ: $C(2{,}5;-4)$ или $C(0{,}5;0)$.

30.4. На координатной плоскости Oxy расположен правильный треугольник ABO. Точка A лежит на прямой $y=0$, точка B – на прямой $y=2-x$. Найти периметр треугольника ABO. *Ответ*: $6(\sqrt{3}\pm 1)$.

30.5. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC, отношение катетов AB и AC которого равно $\sqrt{3}$. Известно, что точка B лежит на прямой $x=2$, точка A – на прямой $x=0$, точка C – на прямой $x=1$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{6}$.

30.6. На координатной плоскости расположены окружность радиуса $2\sqrt{10}$ с центром в точке $O(13;1)$ и параллелограмм $ABCD$, имеющий вершины B и D в точках (4;10) и (6;0) соответственно. Прямая касается окружности и делит параллелограмм на две равновеликие фигуры. Найти угол между этой прямой и осью Ox. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\operatorname{arctg}3$.

30.7. На координатной плоскости расположен тупоугольный треугольник ABC. Известно, что $AC=\sqrt{20}$, вершина тупого угла A находится в начале координат, а точки пересечения двух окружностей, диаметрами которых служат стороны AB и BC, лежат на прямой $y=1-2x$. Найти координаты вершины C. *Ответ*: $(-4;-2)$.

30.8. На координатной плоскости Oxy заданы точки $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(4;0)$. Найти координаты точки M такой, что $\angle OMA = \angle CMB$ и $\angle MAO = \angle MBC$. *Ответ*: $\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$ или $\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$.

30.9. Точки $A(1;1)$, $B(5;-1)$ и точка C, принадлежащая окружности радиуса 2 с центром в точке $K(2;4)$, являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найти наименьшую возможную площадь треугольника ABD.

Ответ: $7-2\sqrt{5}$.

30.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1)$ и пересекающей параболу $y=18-x^2$ в двух точках, сумма квадратов абсцисс которых наименьшая. *Ответ*: $y=-2x+3$.

30.11. На координатной плоскости Oxy отмечены две вершины $A(-8;1)$ и $B(12;1)$ основания AB трапеции $ABCD$. Вершина D принадлежит прямой $y=-2x$ и $AB:CD=2:1$. Найти наибольшее возможное значение модуля разности длин боковых сторон такой трапеции.

Ответ: $2\sqrt{10}$.

30.12. На координатной плоскости Oxy отмечены две вершины $A(7;-3)$ и $B(1;5)$ основания AB трапеции $ABCD$. Вершина C принадлежит прямой $y=-2x-3$, и $AB:CD=2:1$. Найти наименьший возможный периметр такой трапеции. *Ответ*: 26.

30.13. На координатной плоскости Oxy отмечена вершина $A(-5;0)$ треугольника ABC. Найти радиус вписанной в треугольник окружности, если известно, что биссектрисы его углов B и C принадлежат прямым $y=-2x$ и $y=x$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

30.14. На координатной плоскости Oxy расположена окружность S_1 с центром в точке $(2;1)$ и радиусом 1. Через точки $A(0;3)$ и $B(2;2)$ проведены две окружности, пересекающие ось y помимо точки A в точках P_1 и P_2 соответственно, а окружность S_1 – в точках M_1 и M_2 (помимо точки B). Найти координаты точки пересечения прямых P_1M_1 и P_2M_2. *Ответ*: $\left(\frac{14}{5};\frac{2}{5}\right)$.

30.15. На продолжении ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за точку B_1 взята точка M так, что $MB_1=3\cdot BB_1$. Сколько существует прямых, каждая из которых пересекает четыре прямые AB, A_1D_1, CC_1, DM?

Ответ: одна прямая, проходящая через середину ребра A_1D_1 и пересекающая луч BA в точке X такой, что $BX=2\cdot BA$.

АВТОРЫ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Принята двойная нумерация примеров и задач: первое число – номер параграфа, второе – номер задачи; номер примера начинается с буквы "П".

Бортаковский А.С. – 4.13; 4.14; 5.53; 5.54; П6.9; П6.20; П6.21; 6.59; 6.60; 6.84; 6.101; 6.102; 6.114; 6.121; П7.1; П7.3; П7.5; 7.34; П8.1; П8.2; П8.6; 8.2; 8.3; 8.4; 8.6; 8.7; 8.13; 8.15; П9.1; П9.2; П9.3; П9.4; 9.11; 9.12; 9.13; 9.14; 9.15; 9.16; 9.23; 9.24; 9.25; 9.26; 9.27; 9.28; 9.34; П10.1; П11.1; П11.3; П11.5; П11.6; П11.7; 11.1; 11.2; 11.3; 11.4; 11.5; 11.6; 11.9; 11.11; 11.13; 12.1; 12.6; 12.24; 12.25; 13.10; П14.1; П14.2; 14.5; 14.6; 14.8; 14.40; П15.1; 15.2; 15.6; 15.23; П16.1; 16.7; 16.12; П17.4; П17.5; 17.8; П18.2; 18.1; 18.2; 18.3; 18.5; 18.6; 18.7; 18.8; 18.9; 18.10; 18.11; 18.12; 19.1; 19.2; 19.3; 19.5; 19.7; 19.8; 19.9; 19.10; 19.11; 19.12; П20.1; 20.1; 20.2; 20.3; 20.4; 20.6; 20.7; 20.8; П21.1; П21.2; 21.1; 21.2; 21.3; 21.4; 21.6; 21.10; 21.18; 21.19; 21.26; 21.29; 21.30; 21.31; 21.33; 21.36; 21.37; 21.39; П22.2; П22.4; П22.5; П22.6; 22.9; 22.12; 22.13; 22.14; 22.15; 22.16; 23.5; 23.6; 23.11; 23.12; 23.13; 23.15; 23.16; 23.17; 23.26; 23.27; П24.2; 24.5; 24.26; 24.29; 24.30; 24.32; 24.38; 24.39; 24.45; 24.46; 24.47; П25.1; 25.1; 25.3; 25.5; 25.6; 25.7; 25.10; П26.1; П26.2; П26.3; 26.2; 26.3; 26.4; 26.5; 26.7; 26.8; 26.9; 26.10; 26.11; 26.12; 26.13; 26.15; 26.17; 26.18; 26.20; 26.21; 26.22; П27.2; П27.3; 27.16; 27.17; 27.18; 27.20; 27.21; П28.2; 28.3; 28.4; 28.5; 28.7; 28.15; 28.17; 28.22; 28.24; 28.27; 28.28; 28.29; 28.33; 28.35; 28.37; 28.38; 28.40; 29.5; 29.6; 29.10; П30.1; П30.2; 30.1; 30.2; 30.3; 30.13.

Вербицкий Б.В. – 9.30; 9.31; 9.37; 10.3; 13.5; 15.3; 21.32.

Закалюкин В.М. – 6.123; 6.124; П7.4; 7.20; 7.23; П8.5; П8.10; 8.5; 8.16; 8.18; 8.19; 8.20; 8.21; 8.22; 8.23; 8.24; П9.5; 9.17; 9.18; 9.19; 9.20; 9.21; 9.33; 9.35; 9.36; 9.39; П10.7; П10.9; 10.4; 10.6; 10.15; 10.17; 10.18; 10.20; 10.21; П11.4; 11.10; 11.12; 12.5; 12.11; 12.12; 12.18; 12.22; 12.26; 13.1; 13.2; 13.4; 13.11; П14.3; П14.6; П14.7; 14.2; 14.3; 14.4; 14.7; 14.9; 14.12; 14.14; 14.15; 14.20; 14.26; 14.27; 14.28; 14.33; 14.34; 14.35; 14.36; 14.37; 14.38; 14.39; П15.3; П15.4; 15.2; 15.4; 15.15; 15.18; 15.28; 15.34; 15.35; 16.1; 16.2; 16.8; 16.9; 16.10; 16.13; 16.14; 16.15; П17.1; П17.3; 17.1; 17.2; 17.4; 17.5; 17.7; 17.12; 17.14; 17.15; 17.16; 18.4; 20.5; 20.13; 20.14; 20.15; 20.16; 21.13; 21.14; 21.21; 21.24; 21.34; 21.38; 21.40; П22.1; 22.18; 22.22; 22.23; 22.24; 22.25; 22.26; 23.1; 23.2; 23.3; 23.4; 23.7; 23.10; 23.18; П24.1; 24.1; 24.2; 24.3; 24.4; 24.13; 24.14; 24.15; 24.18; 24.20; 24.21; 24.25; 24.36; 24.37; 24.48; 24.49; 24.50; 24.51; 24.53; 24.55; 24.56; 25.2; 25.8; 25.9; 26.2; 26.4; 26.16; 26.19; 28.9; 28.11; 28.12; 28.13; 28.23; 28.25; 28.29; 28.30; 28.31; 28.36; П29.1; П29.2; 29.1; 29.2; 29.3; 29.4; 29.8; 29.11; 30.8; 30.11; 30.12; 30.14; 30.15.

Куртасов А.А. – П8.7; 8.1; 12.2; 14.10; 14.11; 15.19; 15.20; П18.3; 21.9; 21.17; 21.28; 23.25; 24.10; 24.35.

Осокин А.В. – 6.120; П8.3.

Пунтус А.А. – 6.105; 6.125; 12.23; 13.6.

Россовский Л.Е. – 14.9; 24.22; 24.34; 26.1; 29.7.

Садовников А.А. – 21.10.

Серегин В.Н. – 6.103; 6.104; 7.24; 7.42; 9.40; П10.8; 10.11; 10.14; 20.9; 20.16; 21.41; 22.21.

Скуридин А.М. – 5.38; 5.39; 6.119; П8.4; П8.8; П8.9; П8.11; 8.8; 8.10; 8.11; 8.15; 10.1; 10.2; 10.8; 10.12; 10.13; П11.2; 11.8; П12.1; П12.2; П12.3; 12.4; 12.7; 12.8; 12.9; 12.14; 12.16; 12.19; П13.2; П14.4; П14.5; П14.8; 14.18; 14.22; 14.24; 14.25; 14.29; 14.30; 14.31; П15.2; П15.5; П15.6; 15.1; 15.7; 15.8; 15.11; 15.16; 15.17; 15.24; 15.25; 15.29; 15.30; П16.2; 16.3; 16.5; 16.6; П17.24 17.10; 17.11; 19.4; 20.11; 21.5; 21.7; 21.35; П22.3; 22.1; 22.3; 22.8; П23.1; 23.19; 23.20; 23.21; 23.22; 24.8; 24.11; 24.12; 24.19; 24.23; 24.24; 24.27; 24.31; 24.41; 24.54; 25.5; 26.6; 26.14; 27.1; 27.12; 27.15; 27.19; 28.6; 28.8; 28.14; 28.16; 28.17; 28.19; 28.20; 28.21; 28.26; 29.9; 30.9.

Станченко С.В. – 9.22; 9.32; 14.16; 15.5; 15.10; 15.21; 21.12; 21.15; 21.16; 24.40.

Шапошников В.П. – 6.110; 6.118; 8.17; 13.3; 13.7; 13.10; 15.1; 16.7; 22.19; 23.24; 24.16; 30.6; 30.7.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бортаковский А.С., Закалюкин В.М., Шапошников В.П.* Экзаменационные задачи и варианты по математике: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2004.

2. *Бортаковский А.С., Закалюкин В.М., Скуридин А.М., Шапошников В.П.* Экзаменационные задачи по математике: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1999.

3. *Бортаковский А.С., Закалюкин В.М., Серегин В.Н., Скуридин А.М.* Сборник задач для поступающих в вузы / Под ред. Р.Н. Молодожниковой. – М.: Изд-во МАИ, 1995.

4. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах // Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005.

Учебное издание

Бортаковский Александр Сергеевич

Закалюкин Владимир Михайлович

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

Редактор Р.Н. Фурсова

Подписано в печать 23.01.06.
Формат 60 × 84 1/16. Бум. офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 21,39. Уч.-изд.л. 23,0.
Тираж 1150 экз. Зак. 3269/2044. С. 410.

Издательство МАИ
"МАИ", Волоколамское ш., д.4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Типография Издательства МАИ,
"МАИ", Волоколамское ш., д.4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

БЫВШИМ АБИТУРИЕНТАМ,
СТУДЕНТАМ – ПЕРВОКУРСНИКАМ

Если Вам

- ♦ *оказалось полезным данное пособие при поступлении в вуз,*
- ♦ *близок избранный авторами стиль изложения материала,*
- ♦ *хочется побыстрее адаптироваться к жизни в университете.*

Если Вы

- ■ *не любите читать учебники с одной теорией,*
- ■ *предпочитаете изучать предметы, решая практические примеры,*

то рекомендуем Вам приобрести следующие учебные пособия, обеспечивающие непрерывность образования в системе школа → вуз:

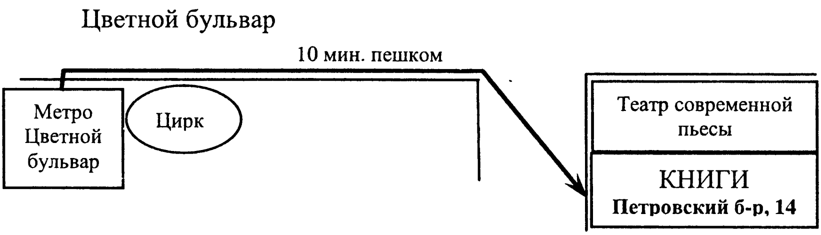
Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах // Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 592 с.

Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах // Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 496 с.

Эти книги пригодятся на первом курсе любого технического вуза (университета), в частности, на всех факультетах МАИ. В них изложены основные понятия, теоремы и методы решения задач по всем разделам курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Пособия написаны языком, понятным для вчерашних школьников, и доступны для широкой студенческой аудитории. Все теоретические положения подкрепляются подробным разбором типовых примеров. Особое внимание уделяется описанию методик решения рассматриваемых задач. Изложение построено по единой схеме, включая описание элементов постановок задач, алгоритмы решения и анализ типовых примеров. Учебные пособия предназначены для подготовки к контрольным работам, тестам и экзаменам.

Купить эти учебники по ценам издательства (самым низким!) можно в книжном магазине издательства "Высшая школа" по адресу: г. Москва, Петровский бульвар, д.14. Магазин работает: понедельник – пятница $10^{00}-18^{00}$ (суббота, воскресенье – выходной).

Схема расположения книжного магазина



Московский авиационный институт
Факультет довузовской подготовки

создан для подготовки учащихся к поступлению и учёбе в МАИ.

Центр «Школа-ВУЗ» осуществляет подготовку учащихся 9; 10; 11-х классов в школах Москвы и Московской области, заключивших договор с МАИ. В этих школах высококвалифицированные преподаватели МАИ проводят дополнительные занятия по математике, физике и русскому языку по специальным, согласованным со школьными, программам.

В группах, занимающихся на территории института, школьники 10-х и 11-х классов могут получить подготовку по математике, физике, русскому языку для успешного участия в олимпиадах и сдачи вступительных экзаменов. Для учащихся 10-х классов предлагается двухгодичное обучение; для учащихся 11-х классов одногодичное и краткосрочное (4 месяца или 1 месяц) обучение, направленное на систематизацию знаний по математике, физике и русскому языку. Занятия проводятся в вечернее время. Принимаются все желающие без экзаменов.

В процессе обучения школьники не реже чем один раз в полгода проходят рубежный контроль знаний. Эти испытания проводятся под руководством Приёмной комиссии МАИ.

Помимо общеобразовательной подготовки, школьники обучаются по ряду профессиональных программ, дающих ребятам практические знания, полезные для будущей жизни и карьеры.

Подробную информацию об условиях приёма, сроках обучения, начале занятий можно получить по телефонам: **158-02-85; 158-46-91**.

Подготовительное отделение ведёт подготовку для поступления в МАИ молодёжи, имеющей полное среднее образование.

Обучение на Подготовительном отделении направлено на систематизацию школьных знаний, устранение имеющихся пробелов, качественную подготовку к вступительным экзаменам, глубокое изучение математики, физики и русского языка.

Обучение осуществляется по дневной форме в течение семи месяцев (шесть дней в неделю). Начало занятий с 1 декабря. Приём документов с 1 октября по 25 ноября. Военнослужащим, уволенным в запас после 25 ноября, срок приёма документов продлевается по 31 января следующего года.

По окончании обучения слушатели Подготовительного отделения, обучавшиеся бесплатно, сдают выпускные экзамены, результаты которых учитываются при конкурсном зачислении на первый курс МАИ.

Справки по телефону: **158-43-54.**

Вечерняя физико-математическая школа принимает на конкурсной основе учащихся Москвы и Московской области, окончивших 9 и 10 классов и успешно сдавших вступительные экзамены. Вступительные экзамены проводятся 2 раза в год: в апреле-мае и в сентябре. Занятия по физике, математике, русскому языку проводятся по институтской системе (лекции, семинары, сессии) высококвалифицированными преподавателями и специально подготовленными студентами МАИ в вечернее время.

Справки по телефону: **158-45-96.**

Информацию о ФДП можно получить на сайте **http://www.mai.ru.**

Адрес: Москва, ул. Дубосековская, д.4, МАИ, Главный учебный корпус (ГУК); зона «А», 4 этаж, комн. 414 или 403.

Проезд: ст. метро «Сокол», троллейбус 12 или 70 до ост. «Авиационный и пищевой институты», далее по направлению к ДК МАИ.