Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2016

МАТЕМАТИКА

Задачи
Санкт-Петербургской
олимпиады школьников
по математике

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51-8
ББК 22.10
З15

Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года
Составители К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, Ф. В. Петров, А. А. Солынин, А. И. Храбров
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
152 с.
ISBN 978-5-4439-3138-8

Книга предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. Читатель найдет в ней задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года, а также открытой олимпиады ФМЛ № 239, которая, не будучи туром Санкт-Петербургской олимпиады, по характеру задач, составу участников и месту проведения является прекрасным дополнением к ней.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В качестве дополнительного материала приводится отчет об олимпиаде «Туймаада–2015», большая подборка задач об угадывании цвета своей шляпы, поучительнейшая сказка, в которой Бусенька, спекулируя понятием «площадь», помогает Ушасе обыграть самого́ Уккха, а также не менее поучительный комментарий к этой сказке.

Подготовлено на основе книги: Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года / Сост. К. П. Кохась, Н. Ю. Власова, А. И. Храбров и др. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1138-0.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3138-8

В 2015/16 учебном году в Санкт-Петербурге проводилась 82-я городская олимпиада школьников по математике. Первый тур проходил 12 декабря 2015 г., в нем приняли участие около 10 тысяч школьников Санкт-Петербурга. Победители первого тура, а также победители городской олимпиады 2015 года были приглашены на второй тур. Для 6–8 классов второй тур олимпиады проходил 7 февраля 2016 г. на математическом факультете Российского государственного педагогического университета, для 9–11 классов — 28 февраля 2016 г. на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Продолжительность первого тура — 3 часа, второго тура (во всех классах, кроме 6-го) — 3 часа плюс еще час для участников, которые решили не менее трех задач из первых четырех задач варианта. В 6 классе — 2,5 и 3,5 часа соответственно.

В составлении вариантов олимпиады участвовали:

6 класс — Н. Ю. Власова, К. П. Кохась;
7 класс — А. А. Солынин, К. А. Сухов;
8 класс — Д. В. Карпов, А. В. Пастор;
9 класс — С. Л. Берлов, Д. А. Ростовский, А. И. Храбров;
10 класс — Ф. В. Петров, А. В. Смирнов;
11 класс — А. С. Голованов, А. С. Чухнов.

Много сил в организацию олимпиады вложили Л. А. Жигулёв, М. Н. Воронина. Проведение олимпиады было бы невозможно без помощи многочисленных энтузиастов — студентов, учителей и преподавателей вузов. Составители благодарны Ю. Ахметшину за тщательное прочтение рукописи. Задачи олимпиады и текущую информацию можно найти на нашей интернет-страничке www.pdmi.ras.ru/~olymp

В городском туре олимпиады по приглашению жюри принимали участие гости — школьники из Витебска, Вологды, Каунаса, Кирова, Минска, Москвы, Рыбинска, Ярославля и других городов.

Победители олимпиады 2016 года

6 класс

Диплом первой степени

Аверков Даниил	239	Поляничко Григорий	239
Бахарев Иван (5)	239	Пяткова Анна	366
Березовой Михаил	366	Солнышкин Григорий	610
Леонтьев Лев	239	Туревский Максим (5)	239

Диплом второй степени

Ананьев Дмитрий (4)	144	Лавров Всеволод	239
Бойцова Екатерина (4)	366	Мисюра Илья	г. Лондон
Гринченко Даниил	239	Михайлов Роман	366
Коротченко Таисия (5)	239	Ожегова Марина	г. Киров

Диплом третьей степени

Абрамова Амалия (5)	239	Королёва Таисия	366
Аккая Тимур (4)	207	Куликов Арсений (5)	239
Белаш Александр	30	Овсянников Марк	366
Бушмаков Максим	г. Киров	Онищенко Сергей	30
Варнин Арсений	239	Петрова Марьяна	232
Гайдук Олеся	2-я гимн.	Сироткина Вероника	150
Иванов Кирилл	30	Сорвин Лев	610
Ильин Никита (5)	239	Шостак Татьяна	239
Коноченков Иван	239	Шрамко Тимур	56

7 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Лялинов Иван	239
Огнёв Александр	239

Диплом первой степени (6 задач)

Савельев Артём	г. Киров

Диплом второй степени

Броварник Илья	239	Налимов Леонид	4
Головастенко Александр	148	Оксаниченко Фёдор	«Горчаков»
Караваев Пётр	239	Слепанчук Артем	277
Ким Владимир	239	Туревский Максим (5)	239

Диплом третьей степени

Аверков Даниил (6)	239	Плаксин Михаил	328
Березовой Михаил (6)	366	Полозова Ольга	г. Киров
Вагин Дмитрий	433	Поляничко Григорий (6)	239
Васильев Иван	239	Сысоев Сергей	597
Волков Иван	419	Федотов Даниил	533
Жаворонков Дмитрий	239	Чайка Максим	101
Колесников Артём	239	Шувалов Арвинд	239
Мастинен Никита	239		

8 класс

Диплом первой степени

Мовсин Марат	533
Петров Владимир	239

Диплом второй степени

Иванов Всеволод	533
Можаев Андрей	239
Титов Тимофей	239

Диплом третьей степени (5 задач)

Казаков Сергей	533	Никитин Сергей	239
Кравченко Егор	239	Сукнёв Дмитрий	239

Диплом третьей степени (4 задачи)

Колпащков Александр	г. Киров	Мартынов Павел	533
Коротченко Денис	239	Морозов Александр	239
Кутявин Денис	г. Киров	Павлов Илья	533
Макоян Артём	г. Самара	Шушпанов Стефан	г. Киров
Малиновский Владимир	ФТШ		

9 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Крымский Станислав	ФТШ

Диплом первой степени (6 задач)

Ретинский Вадим	г. Ливны

Диплом второй степени

Беляков Артем	533
Герасименко Артур	г. Москва
Лучинин Сергей	г. Киров
Рябов Егор	г. Москва
Толокно Изабелла	239

Диплом третьей степени

Ашихмин Анатолий	г. Киров
Бородулина Дарья	239
Горбачёв Егор	239
Конева Елизавета	239
Кравченко Егор (8)	239
Leviniskaite Neringa	г. Каунас
Лялинов Иван (7)	239
Можаев Андрей (8)	239
Петров Владимир (8)	239
Фёдоров Даниил	533
Яковлев Захар	ФТШ

10 класс

Диплом первой степени

Тыщук Кирилл	239

Диплом второй степени (5 задач)

Долгих Сергей	г. Рыбинск
Жуков Матвей	239

Диплом второй степени (4 задачи)

Мигрин Виктор	239
Токмачёв Александр	г. Ярославль

Диплом третьей степени

Вирачев Арсений	239	Пучинин Сергей	г. Ярославль
Епифанов Владислав	533	Ракицкий Михаил	ФТШ
Захарков Александр	239	Фафурин Олег	239
Лисоветин Никита	239	Федорец Никита	г. Москва
Мариев Артём	г. Киров	Чарковский Георгий	239

11 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Салимов Руслан	г. Москва

Диплом первой степени (6 задач)

Губкин Павел	239
Каламбет Анатолий	г. Москва
Соколов Игнат	г. Курган
Юргин Григорий	г. Москва

Диплом первой степени (5 задач)

Лучкин Вадим	г. Москва
Новиков Святослав	239

Диплом второй степени

Алексеев Ярослав	30	Мосеева Татьяна	г. Ярославль
Кароль Николай	239	Петров Семён	г. Ярославль
Коненков Степан	239	Ульянов Петр	г. Витебск
Лупуляк Ольга	239	Шашков Тимофей	239

Диплом третьей степени

Байтенов Егор	г. Рыбинск	Семёнов Никита	г. Минск
Богомолов Михаил	ФТШ	Серенков Борис	г. Минск
Гурьев Василий	30	Сонина Александра	г. Ярославль
Зайнуллин Егор	239	Ходачук Денис	30
Кукель Евгений	г. Минск	Шувалова Мира	239
Свирин Евгений	239		

Статистические данные олимпиады 2016 года

Критерий пропуска на второй тур олимпиады

Класс	6	7	8	9	10	11
Количество задач	2+	2+	2	2+	2	3

Второй тур

В левой таблице по каждой задаче приведено количество решивших ее участников; также указаны общее количество приглашенных на олимпиаду и количество прошедших в выводную аудиторию*. В правой таблице указано количество участников, решивших данное количество задач.

Класс	Номер задачи							Всего	Вывод
	1	2	3	4	5	6	7		
6	96	84	34	69	25	12	–	120	65
7	79	90	41	14	18	12	3	101	44
8	55	46	28	18	10	15	3	89	29
9	64	67	35	19	5	2	7	110	35
10	19	68	35	3	10	3	0	126	36**
11	52	52	22	12	9	15	2	115	45**

Количество задач						
1	2	3	4	5	6	7
17	25	31	18	8	8	–
13	35	18	15	8	1	2
17	18	11	9	3	4	2
16	25	17	11	5	1	1
42	21	10	2	2	1	0
22	19	11	8	2	4	1

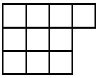
* В начале олимпиады все участники получают карточку с условиями четырех задач. Во время олимпиады участников, решивших три задачи, переводят в отдельную (выводную) аудиторию, где они получают условия еще трех (в шестом классе — двух) задач.

** Проход в вывод по двум задачам.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первый тур

6 класс



1. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 5 до 14 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка — это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне). (*А. Чухнов*)

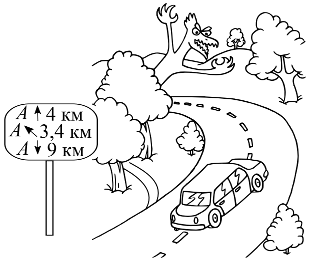
2. Приходя в школу, Вася здоровается со всеми одноклассниками (кроме, разумеется, самого себя). К началу уроков Вася не успел поздороваться ровно с одной четвертью от общего числа учеников своего класса, в том числе с Колей. А Коля к этому времени поздоровался ровно с одной седьмой из тех одноклассников, с которыми поздоровался Вася. Какое наименьшее число учеников может быть в классе? Не забудьте обосновать ответ. (*С. Берлов*)

3. Надя задумала число n, делящееся на 500, и выписала на доску все его натуральные делители, кроме самого числа n. Докажите, что сумма нечетных чисел на доске меньше, чем сумма четных. (*А. Голованов*)

4. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем, кто выше его, а каждая девочка — всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что Саша, Женя и Валя получили поровну конфет, а все остальные — меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих — девочка. (*О. Иванова*)

7 класс

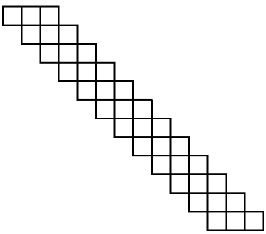
5. На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населенных пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 3 км, от B до C — 6 км, от C до D — 4 км, от D до E — 5 км, а от E до A — 6 км? (*В. Франк*)



6. В клетках квадрата 7×7 стоит 100 крестиков. Нашлось три горизонтали, в клетках которых в сумме содержится не менее 70 крестиков, и три аналогичные вертикали. Докажите, что либо в какой-то клетке нет ни одного крестика, либо найдется клетка, в которой стоит не меньше семи крестиков (либо и то и другое). (*А. Солынин*)

7. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычеркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятерку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятерок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятерок. (*А. Голованов*)

8. Дана «лесенка» из 12 строчек (см. рисунок). Костя расставляет в ее клетках числа от 1 до 36 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз). Сколькими способами он сможет это сделать? (*К. Кохась*)

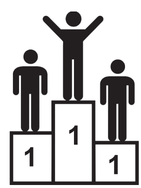


8 класс

9. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, ..., 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом *интересным*, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Оказалось, что среди этих домов ровно 10 интересных. Докажите, что суммарная высота интересных домов не может быть равна 64 этажам. (*В. Самойлов*)

10. См. задачу 7.

11. Районную олимпиаду писало 9000 школьников. Каждый из них получил *оценку* от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников уменьшился на 0,1 балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b, что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее чем на 150. (*А. Кузнецов*)



12. Точки P и Q лежат в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наибольшие стороны противоположны и равны. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза. (*С. Берлов*)

13. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик — хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: *Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — двоечники*, а каждый мальчик сказал: *Среди знакомых мне девочек не менее половины — троечницы.* Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков — двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами? (*А. Солынин*)

9 класс

14. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 301 на пары, что если числа в парах сложить и эти суммы перемножить, то полученное произведение окажется 15-й степенью натурального числа? (*А. Храбров*)

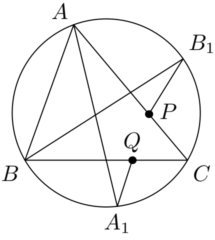
15. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа a и b ($0 \leqslant a, b \leqslant 8$), что количество школьников, у которых до махинаций был результат a баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат b баллов, отличаются не меньше чем на 100. (*А. Кузнецов*)

16. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду? (*С. Берлов*)

17. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \qquad y = bx + c, \qquad y = ax + c,$$
$$y = bx + a, \qquad y = cx + b, \qquad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина $\frac{c}{a}$? (*А. Солынин*)

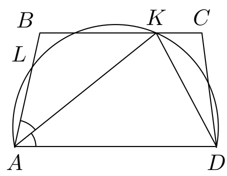


18. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$. (*А. Кузнецов*)

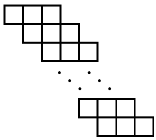
10 класс

19. По кругу выписано 29 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 29 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом? (*А. Кузнецов*)

20. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$. (*С. Берлов*)



21. Дана «лесенка» 100×3 (в каждой строчке 3 клетки, каждая следующая строчка сдвинута по сравнению с предыдущей на одну клетку вправо). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 300 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз)? (*К. Кохась*)



22. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$f(x) = f(6x - 1), \qquad f(t) = f(3 - 15t)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение? (*Ф. Петров*)

23. Положительные числа $a \leqslant b \leqslant c$ и натуральное число n удовлетворяют условию $a^n + b^n = c^n$. Докажите неравенство $c - b \leqslant (\sqrt[n]{2} - 1)a$. (*А. Храбров*)

11 класс

24. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$. (*А. Голованов*)

25. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется *хорошим*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими? (*С. Берлов*)

26. См. задачу 20.

27. Функция f при всех x, $y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству
$$f(x^2 + 2y) \geqslant f(x^2 + 3y).$$
Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$. (*А. Голованов*)

28. На доске написаны два числа: 10^6 и 10^9. Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и еще не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать? (*А. Солынин*)

Второй тур

6 класс

29. На экране кривого калькулятора написано число 20. Время от времени калькулятор умножает число на экране на 2 и тут же вычитает из результата какое-нибудь число от 1 до 10. Может ли на экране получиться число 2016? (*К. Сухов*)

30. Числа 1, 2, 3, …, 200 расставлены вдоль окружности в некотором порядке. Для каждого числа n среди 99 чисел, стоящих после него по часовой стрелке, и среди 99 чисел, стоящих до него, имеется поровну чисел, меньших n. Найдите, какое число стоит напротив числа 111. (*А. Голованов*)

31. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (необязательно различных) и как сумму 19 его делителей (необязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (необязательно различных). (*В. Франк*)

32. На полке в камере хранения стоят 10 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 10. Чемоданы имеют разную ширину и стоят необязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик снимает с полки чемодан № 1, а затем ставит его обратно на полку в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан № 2 и ставит его в самое левое возможное положение, и т. д. После перестановки чемодана № 10 кладовщик снова переходит к чемодану № 1, и т. д. Докажите, что после 100 операций кладовщик будет ставить каждый чемодан на то место, откуда его только что взял. (Если очередной чемодан пришлось поставить на место, откуда его взяли, это всё равно засчитывается как выполненная операция.) (*А. Храбров*)

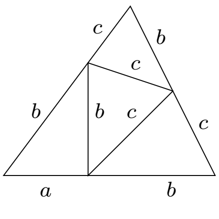
33. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины — наоборот. В среду каждый из них сказал: *У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин*, а в четверг — *Среди незнакомых мне жителей острова мужчин на 1 больше, чем женщин.* Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

34. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5. Докажите, что можно задать такое разбиение квадрата на прямоугольники 1×3, что каждая плиточка 2×5 будет содержать целиком хотя бы один прямоугольник. (*О. Иванова*)

7 класс

35. На экране своенравного калькулятора написано двузначное число. Калькулятор может умножить число на экране на 2 и вычесть из результата какое-нибудь натуральное число от 1 до 10 (при следующей операции он может вычесть другое число от 1 до 10). Известно, что такими операциями калькулятор может из исходного числа получить 2015. Докажите, что он может получить и 2016. (*К. Сухов*)

36. На сторонах треугольника отметили по точке и соединили их так, как показано на рисунке. При этом образовались равные отрезки. Докажите, что $a = c$. (*К. Кохась*)



37. См. задачу 33.

38. Доска 8×8 красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок. (*Фольклор*)

39. На доске написано несколько степеней четверки (не обязательно различных). Андрей задумал еще одну степень четверки, которая больше каждого числа, написанного на доске, но не превосходит их суммы. Докажите, что Андрей может подчеркнуть несколько чисел на доске так, чтобы их сумма равнялась задуманному числу. (*А. Храбров, в обработке К. Сухова*)

40. В остроугольном треугольнике провели три высоты. Докажите, что из шести отрезков — трех сторон и трех высот — можно составить два треугольника. (*С. Берлов*)

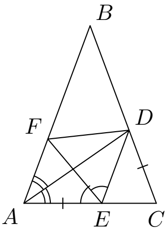
41. На плацу нарисован квадрат 9×9, в каждой клетке стоит по солдату. Демократичный старшина за один ход указывает на двух солдат, стоящих в соседних по стороне клетках, и один из них (на выбор солдат) уходит чистить картошку. Как только оказывается, что у кого-то из стоящих солдат ушли два соседа по стороне, процесс прекращается. Какое наибольшее количество солдат старшина может отправить на чистку картошки, независимо от действий солдат? (*А. Солынин, А. Кузнецов*)

8 класс

42. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины – наоборот. В среду каждый из них сказал: *У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин*, а в четверг — *У меня знакомых женщин на 1 больше, чем мужчин.* Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей? (*А. Солынин*)

43. Даны числа $x, y \geqslant 0$. Докажите, что
$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$ (*А. Храбров*)

44. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. На основании AC отмечена такая точка E, что $AE = DC$. Биссектриса угла AED пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что $\angle AFE = \angle DFE$. (*А. Кузнецов, А. Пастор*)



45. См. задачу 34.

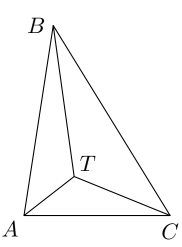
46. Вася выписал в строку 100 последовательных чисел. Во второй строке под каждым числом он написал его собственный делитель. В третьей строке он под каждым числом из второй строки написал его собственный делитель и т. д., пока не получилось 1000 строк. Могло ли так быть, что в каждой строке написаны последовательные числа? (*В. Франк*)

47. На полке в камере хранения стоят 13 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 13. Чемоданы имеют разную ширину и стоят не обязательно вплотную друг к другу и к краям полки. Кладовщик вынимает с полки чемодан №1 и ставит его в самое левое из возможных положений, не сдвигая другие чемоданы. Затем он берет чемодан №2 и ставит его в самое левое возможное положение, не сдвигая другие, и т. д. После перестановки чемодана №13 кладовщик снова переходит к чемодану №1, и т. д. Найдите наименьшее натуральное n, такое что для любой начальной расстановки чемоданов после n операций каждый чемодан кладовщик заведомо будет ставить на то место, откуда его взял. (Если чемодан ставят на место, откуда его взяли, это всё равно засчитывается как выполненная операция.) (*А. Храбров*)

48. Внутри треугольника ABC отмечена точка T, из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что

$$2AB + 2BC + 2CA \geqslant 4AT + 3BT + 2CT.$$

(*А. Кузнецов*)



9 класс

49. Даны три квадратных трехчлена f, g, h, не имеющие корней. Их старшие коэффициенты одинаковы, а все их коэффициенты при x различны. Докажите, что существует такое число c, что уравнения

$$f(x) + cg(x) = 0 \qquad \text{и} \qquad f(x) + ch(x) = 0$$

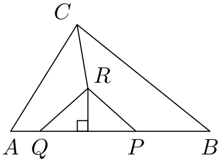
имеют общий корень. (*А. Храбров*)

50. На доске 300×300 расставлены ладьи, они бьют всю доску. При этом каждая ладья бьет не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k можно заведомо утверждать, что в каждом квадрате $k \times k$ стоит хотя бы одна ладья? (*С. Берлов*)

51. На стороне AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AC = AP$ и $BC = BQ$. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает биссектрису угла C в точке R (внутри треугольника). Докажите, что

$$\angle ACB + \angle PRQ = 180^\circ.$$

(*А. Кузнецов*)

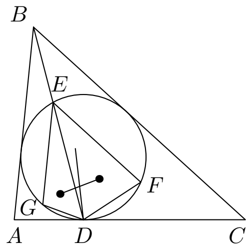


52. Два различных простых числа p и q отличаются менее чем в два раза. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у другого — q. (*А. Голованов*)

53. На белой полоске длины 2016 Костя и Сергей играют в игру. Костя (он ходит первым) за один ход должен закрасить черным две соседних белых клетки. Сергей своим ходом должен закрасить либо одну белую клетку, либо три соседних белых клетки. Запрещается делать ход, после которого образуется белая клетка, не имеющая белых соседей. Проигрывает не имеющий хода. Однако если все клетки закрашены, то выигрывает Костя. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Тыщук*)

54. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, делится пополам биссектрисой угла GDF.

(*Ф. Бахарев*)



55. Блок из N подряд идущих натуральных чисел называется хорошим, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Для каких N существует бесконечно много хороших блоков? (*С. Берлов*)

10 класс

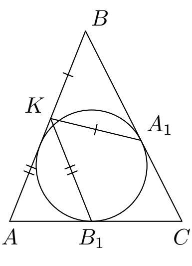
56. Саша перемножил все делители натурального числа n. Федя увеличил каждый делитель на 1, а потом перемножил результаты. Федино произведение нацело делится на Сашино. Чему может быть равно n? (*Ф. Петров*)

57. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие что $x_i \leqslant 2x_j$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Докажите, что найдутся такие положительные числа $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, что $x_k \leqslant y_k \leqslant 2x_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

(*П. Затицкий, Ф. Петров*)

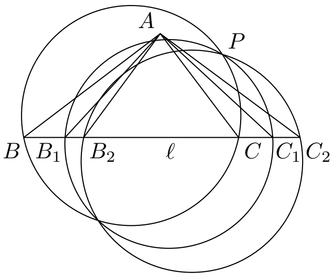
58. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке B_1, а стороны BC в точке A_1. На стороне AB нашлась такая точка K, что $AK = KB_1$, $BK = KA_1$. Докажите, что $\angle ACB \geqslant 60°$.

(*А. Кузнецов, Ф. Петров*)



59. Раскраска клеток таблицы 100×100 в черный и белый цвета называется *допустимой*, если в каждой строке и каждом столбце от 50 до 60 черных клеток. Разрешается изменить цвет одной из клеток допустимой раскраски, если она остается допустимой. Докажите, что такими операциями можно получить из любой допустимой раскраски любую другую. (*О. Иванова*)

60. Точки A и P лежат вне прямой ℓ. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PBC, имеют общую точку, отличную от P. (*Ф. Бахарев*)



61. В окружность вписана замкнутая 100-звенная ломаная, никакие три звена которой не проходят через одну точку. Все ее углы тупые, и их сумма в градусах делится на 720. Докажите, что у этой ломаной нечетное число точек самопересечения. (*С. Иванов*)

62. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число $a > 1$ таковы, что для любого целого x найдется целое z, для которого

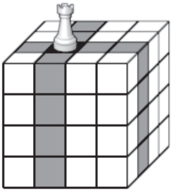
$$aP(x) = P(z).$$

Найдите все такие пары $(P(x), a)$. (*А. Голованов*)

11 класс

63. В последовательности целых чисел (a_n) сумма $a_m + a_n$ делится на $m + n$ при любых различных m и n. Докажите, что a_n кратно n при любом n. (*О. Иванова*)

64. Ладья, стоящая на поверхности клетчатого куба, бьет клетки, находящиеся с той клеткой, где она стоит, в одном ряду, а также на продолжениях этого ряда через одно или даже несколько ребер. (На картинке показан пример для куба 4×4×4; видимые клетки, которые

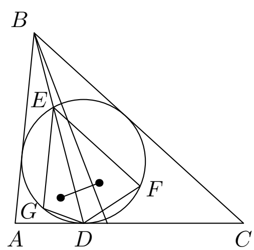


бьет ладья, закрашены серым.) Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на поверхности куба $50 \times 50 \times 50$? (*А. Чухнов*)

65. В тетраэдре середины всех ребер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.
(*Д. Максимов*)

66. По окружности движутся $n > 4$ точек, каждая — с постоянной скоростью. Для любых четырех из них есть момент времени, когда они все встречаются. Докажите, что есть момент, когда все точки встречаются. (*С. Иванов*)

67. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B.
(*Ф. Бахарев*)



68. В стране 50 городов, каждые два города соединены (двусторонними) авиалиниями, цены всех перелетов попарно различны (для любой пары городов цена перелета «туда» равна цене «обратно»). В каждом городе находится турист. Каждый вечер все туристы переезжают: богатые туристы — по самой дорогой, бедные — по самой дешевой линии, ведущей из соответствующего города. Через k дней оказалось, что в каждом городе снова по одному туристу. За это время ни один турист не посетил никакой город дважды. При каком наибольшем k такое возможно? (*К. Кохась*)

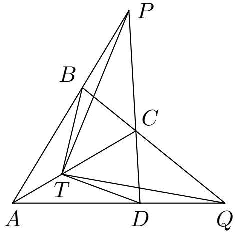
69. Для многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно указать такое вещественное число $a > 1$, что при каждом целом x существует целое z, для которого $aP(x) = P(z)$. Найдите все такие многочлены $P(x)$. (*А. Голованов*)

Олимпиада 239 школы

8, 9 классы

70. Дано натуральное число $k > 1$. Сумма некоторого делителя числа k и некоторого делителя числа $k-1$ равна a, причем $a > k+1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a-1$ или $a+1$ составное. (*С. Берлов, А. Голованов*)

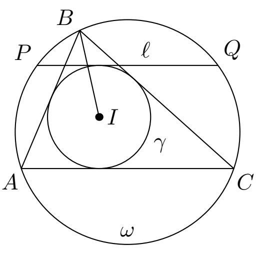
71. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. На диагонали AC нашлась такая точка T, что треугольники BTP и DTQ соответственно подобны. Докажите, что $BD \parallel PQ$. (*С. Берлов*)



72. Правильный шестиугольник со стороной 50 разбили на треугольнички со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам. Разрешается удалять любые три узла полученной решетки, задающие отрезок длины 2. В результате нескольких таких операций остался ровно один узел. Сколькими способами можно выбрать узел, который остался? (*Д. Ширяев*)

73. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство

$$a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant 4.$$ (*А. Храбров*)



74. Треугольник ABC, в котором $AB < BC$, вписан в окружность ω и описан около окружности γ с центром I. Прямая ℓ, параллельная AC, касается окружности γ и пересекает дуги BAC и BCA в точках P и Q соответственно. Известно, что $PQ = 2BI$. Докажите, что $AP + 2PB = CP$. (*А. Кузнецов*)

75. Будем называть *7-чипом* граф, полученный удалением из полного графа с семью вершинами не более чем трех ребер, не имеющих общих концов. Рассмотрим полный граф G с v вершинами. При каком наименьшем v можно заведомо утверждать, что если каждое ребро графа G окрасить в синий или красный цвет, то найдется или синий простой путь из 100 ребер, или красный 7-чип (или и то и другое)? (*A. Kashif, I. Tomescu, I. Javaid*)

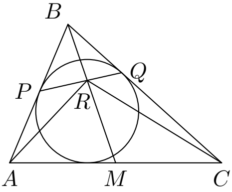
76. Шестерка различных взаимно простых в совокупности целых чисел называется *квадратной*, если при любом разбиении ее на две тройки сумма чисел в одной из троек — точный квадрат. Докажите, что существует бесконечно много квадратных шестерок. (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

77. В окружность вписано n треугольников, все $3n$ их вершин различны. Докажите, что можно в каждом треугольнике в одну из вершин поставить мальчика, а в другую — девочку так, чтобы мальчики и девочки на окружности чередовались. (*Ф. Петров*)

10, 11 классы

78. В олимпиаде участвуют 2016 детей (их список известен членам жюри), причем однофамильцев среди них нет. Жюри пропускает на вывод ровно 10 детей, которые первыми ответят 3 задачи. Они по очереди приходят на вывод, и фамилию пришедшего можно записать в любую свободную строчку протокола. Сколько строчек необходимо иметь в протоколе, чтобы гарантированно получилось записать детей, прошедших на вывод, в алфавитном порядке? (*Д. Ширяев*)

79. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Медиана треугольника ABC из вершины B пересекает отрезок PQ в точке R. Докажите, что угол ARC тупой. (*С. Берлов*)



80. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство

$$2(a+b+c)+\frac{9}{(ab+bc+ca)^2}\geqslant 7.$$ (*А. Храбров*)

81. Последовательности натуральных чисел p_n и q_n заданы соотношениями

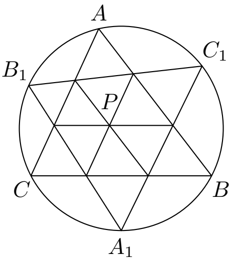
$$p_1 = 1, \qquad q_1 = 1, \qquad p_{n+1} = 2q_n^2 - p_n^2, \qquad q_{n+1} = 2q_n^2 + p_n^2.$$

Докажите, что при любых m, n числа p_n и q_m взаимно просты.

(*М. Антипов*)

82. Через точку P внутри треугольника ABC провели прямые, параллельные сторонам, до пересечения со сторонами. В трех образовавшихся параллелограммах провели диагонали, не содержащие точку P. Точки A_1, B_1 и C_1 — это соответствующие точки пересечения прямых, содержащих эти диагонали. Докажите, что если шестиугольник $AC_1BA_1CB_1$ вписанный и выпуклый, то точка P является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$.

(*Д. Ширяев*)



83. Дано конечное семейство конечных множеств F, удовлетворяющее двум условиям:

(i) если $A, B \in F$, то $A \cup B \in F$;

(ii) если $A \in F$, то количество элементов $|A|$ не кратно 3.

Докажите, что можно указать не более двух элементов так, что каждое множество семейства F содержит хотя бы один из них.

(*Ф. Петров*)

84. Найдите все функции $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворяющие равенству

$$f(xy + x + y) = (f(x) - f(y))f(y - x - 1)$$

при всех $x > 0$, $y > x + 1$.

(*Ф. Петров*)

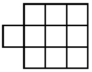
85. Дано натуральное число $k > 1$. Найдите наименьшее число α, удовлетворяющее следующему условию.

Предположим, что таблица $(2k+1) \times (2k+1)$ заполнена вещественными числами, не превосходящими по модулю единицы, причем суммы чисел во всех строках равны нулю. Тогда можно переставить числа так, что каждое число останется в своей строке, а все суммы по столбцам будут по модулю не больше α.

(*Г. Челноков*)

Вторые варианты задач

1. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 3 до 12 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка — это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне).



2. Приходя на кружок, Лёша здоровается со всеми кружковцами (кроме, разумеется, самого себя). К началу занятия Лёша не успел поздороваться ровно с одной шестой от общего числа кружковцев, в том числе с Димой. А Дима к этому времени поздоровался ровно с одной третьей из тех кружковцев, с которыми поздоровался Лёша. Какое наименьшее число учеников может заниматься в кружке? Не забудьте обосновать ответ.

3. Костя задумал число n, делящееся на 740, и выписал на доску все его натуральные делители, кроме самого числа n. Докажите, что сумма нечетных чисел на доске меньше, чем сумма четных.

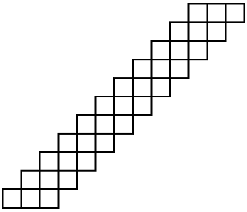
4. В комнате находятся несколько мальчиков и несколько попугаев, причем все присутствующие — разного возраста. Каждый мальчик дал орех всем, кто младше его, а каждый попугай дал по ореху всем, кто старше. Гоша, Кеша и Тиша получили поровну орехов, а все остальные — меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих — попугай.

5. На круговом шоссе длиной 15 км находятся пять различных населенных пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 4 км, от B до C — 6 км, от C до D — 5 км, от D до E — 4 км, а от E до A — 7 км?

6. В клетках квадрата 9×9 стоит 140 ноликов. Нашлось три горизонтали, в клетках которых в сумме содержится не менее 75 ноликов, и три аналогичные вертикали. Докажите, что либо в какой-то клетке нет ни одного нолика, либо найдется клетка, в которой стоит не меньше шести ноликов (либо и то и другое).

7. На доске написано 12 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычеркивания которого сумма оставшихся одиннадцати чисел на доске является квадратом целого числа, Анна Петровна ставит пятерку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятерок могли получить ученики Анны Петровны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятерок.

8. Дана «лесенка» из 11 строчек (см. рисунок). Надя расставляет в ее клетках числа от 1 до 33 так, чтобы в каждой горизонтали числа возрастали слева направо, а в каждой вертикали возрастали снизу вверх. Сколькими способами она сможет это сделать?



9. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, ..., 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом *удачным*, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Известно, что среди этих домов ровно 10 удачных. Докажите, что суммарная высота удачных домов не может быть равна 246 этажам.

10. См. задачу 7.

11. Районную олимпиаду писало 6000 школьников. Каждый из них получил *оценку* от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b, что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличаются хотя бы на 100.

12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наименьшие стороны противоположны и равны, лежат точки P и Q. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза.

13. В школе учится 200 мальчиков и 200 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик — хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: *Среди знакомых мне мальчиков не менее половины —*

троечники, а каждый мальчик сказал: *Среди знакомых мне девочек не менее двух третей — двоечницы.* Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 20 девочек-двоечниц. Какое наименьшее число мальчиков может быть троечниками?

14. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 201 на пары, что если числа в парах сложить и эти суммы перемножить, то полученное произведение окажется 10-й степенью натурального числа?

15. В деревне Гадюкино жило 8000 пенсионеров. Каждый из них получал пенсию в размере от 1000 до 8000 рублей (целое число тысяч). После пенсионной реформы гадюкинцы, получавшие пенсию 4000 руб. или менее, стали получать 2000 руб., а те, кто получал 5000 руб. или более, стали получать 7000 руб. В результате средний размер пенсии уменьшился на 100 руб. Докажите, что существуют такие натуральные числа a и b ($1 \leqslant a,\ b \leqslant 8$), что количество пенсионеров, получавших до реформы пенсию a тысяч рублей, хотя бы на 200 больше количества пенсионеров, получавших до реформы пенсию b тысяч рублей.

16. В ряд выстроилось несколько мальчиков и девочек. Среди любых 300 детей подряд мальчиков и девочек поровну, а среди любых 302 детей подряд — не поровну. Какое наибольшее количество детей может стоять в этом ряду?

17. Квадратный трехчлен $3ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \qquad y = bx + c, \qquad y = ax + c,$$
$$y = bx + a, \qquad y = cx + b, \qquad y = cx + a$$

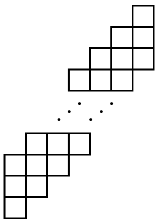
пересекает его график не более чем в одной точке. Какое минимальное значение может принимать величина a/c?

18. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин B и C пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне AB — точка Q так, что $CP = 2PA$, $BQ = 2QA$. Докажите, что $\angle AQC_1 = \angle APB_1$.

19. Вдоль окружности выписано 23 ненулевые цифры. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 23 двузначных числа, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом?

20. На основании DC равнобочной трапеции $ABCD$ отмечена точка M, а на боковой стороне BC — точка N так, что $DM = CN$ и точки A, M, N, B лежат на одной окружности. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC.

21. Дана «лесенка» 50×3 (в каждом столбце 3 клетки, каждый следующий столбец сдвинут по сравнению с предыдущим на одну клетку вверх). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 150 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и снизу вверх)?



22. Существует ли такой квадратный трехчлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$g(y) = g(2 - 23y), \qquad g(x) = g(5 + 10x)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

23. Положительные числа $x \leqslant y \leqslant z$ и натуральное число d удовлетворяют условию $2x^d + y^d = z^d$. Докажите неравенство $z - y \leqslant (\sqrt[d]{3} - 1)x$.

24. Уравнение $ax - \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax - \frac{c}{x} = b - 2$ и $ax - \frac{c}{x} = b + 2$.

25. По кругу расставили числа от 1 до 30. Число называется *хорошим*, если оно делится на число, стоящее слева от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими?

26. См. задачу 20.

27. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $f(x^2 - 2y) \leqslant f(x^2 - y)$. Известно, что $f(1000) = 1000$. Найдите $f(2015)$.

28. На доске написаны два числа: 10^7 и 10^{10}. Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и еще не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Возможный пример показан на картинке.

5	6	8	11
7	9	12	
10	13	14	

2. О т в е т: наименьшее возможное количество учеников в классе — 20 человек.

Вася не успел поздороваться с одной четвертью всех учеников класса, а собирался поздороваться со всеми, кроме себя. Таким образом, сам Вася в эту четверть класса не входит, и значит, Вася поздоровался с 3/4 от общего количества учеников в классе минус 1 (этот один — сам Вася). А Коля поздоровался с одной седьмой от этого количества учеников. Значит, если количество тех, с кем поздоровался Коля, умножить на 7 и прибавить 1, должно получиться три четверти класса, т. е. число, делящееся на 3.

Попробуем подобрать такие числа. Если Коля поздоровался с одним человеком, то, умножив 1 на 7 и прибавив 1, получаем, что три четверти класса — это 8 человек. Но 8 на 3 не делится, значит, этот вариант невозможен. Если Коля поздоровался с двумя одноклассниками, то аналогично находим, что три четверти класса — это 15 человек. В этом случае в классе учится 20 человек. Если же Коля поздоровался с тремя или более одноклассниками, то три четверти класса — это 22 или более человек, и тогда число учеников класса больше 20.

Таким образом, подобранный нами пример дает наименьшее возможное число учеников класса.

К сожалению, почти философский вопрос «собирался ли Вася поздороваться с самим собой?» сбил с толку многих участников олимпиады. Многие школьники автоматически решили, что сам Вася относится к той группе школьников, с которыми он не успел поздороваться до уроков. При таком прочтении условия задача становится проще: получается, что Коля поздоровался с 1/7 от 3/4 класса, поэтому число учеников в классе делится на 28 и, значит, не меньше 28. В качестве курьеза отметим, что чуть ли не треть школьников, понявших условие таким образом, закончила решение словами: «Значит, всего в классе 28 человек, а с учетом Васи — 29 человек».

3. Число n четное, поскольку делится на 500, и, более того, по этой же причине число n делится на 4. Если d — нечетный делитель числа n, то число $2d$ тоже является делителем числа n, причем $2d \neq n$, так как $2d$ не делится на 4. Получается, что вместе с каждым нечетным делителем d на доске также написан ровно в два раза больший делитель $2d$. Поэтому сумма нечетных чисел на доске не просто меньше, чем сумма четных, а по крайней мере в два раза меньше.

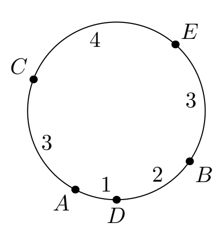
4. Допустим, что это не так. Пусть мальчик Саша — наименьший по росту из трех упомянутых детей. Пусть X — следующий по росту ребенок.

Заметим, что Саша и X получили поровну конфет от всех остальных детей. Действительно, каждый из остальных детей либо ниже и Саши, и X, либо выше их обоих. Тогда и Саша, и X получили конфеты только от мальчиков, которые меньше их ростом, либо от более высоких девочек.

Кроме того, мальчик Саша дал конфету ребенку X, так как ребенок X выше. Поскольку Саша — один из тех, кто получил наибольшее число конфет, не может быть так, что X получил больше конфет, чем Саша. Значит, X должен был дать конфету Саше. Получается, что X — девочка и у нее столько же конфет, сколько у Саши, т. е. X — это Женя или Валя.

Сколько же все-таки мальчиков и сколько девочек может быть среди этих трех детей?

5. Ответ: да, это возможно. Пример приведен на рисунке.

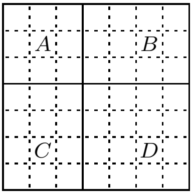


Поясним, как можно подобрать пример. Пройдем по циклическому маршруту A–B–C–D–E–A. Пусть первый переход A–B совершается против часовой стрелки. Чтобы следить за тем, насколько мы удалились от точки A, перемещения против часовой стрелки будем зачитывать со знаком «плюс», а перемещения по часовой стрелке — со знаком «минус». Длина маршрута равна 24 км. Поэтому мы сделали не более одного оборота по окружности, и в результате наших подсчетов должно получиться число 0 (если мы по часовой стрелке сместились на столько же, на сколько сместились против часовой) или ± 13 (если мы совершили полный оборот). При этом результат наших подсчетов равен

$$\pm 3 \pm 6 \pm 4 \pm 5 \pm 6,$$

где знаки были выбраны по описанному выше правилу. Заметим, что при любом выборе знаков написанная сумма четна и поэтому не может быть равна ± 13. Тогда подберем знаки так, чтобы сумма оказалась равна нулю, это сделать совсем несложно: $3 - 6 + 4 + 5 - 6 = 0$. Осталось лишь расставить населенные пункты вдоль шоссе, пользуясь этой «дорожной картой», и проверить, что расстановка удовлетворяет условию задачи.

6. Можно считать, что три горизонтали, упомянутые в условии, расположены вверху таблицы, а три вертикали — слева. Разобьем таблицу на части: часть A — это 9 клеток на пересечении трех вертикалей и трех горизонталей, часть B — остальные 12 клеток этих трех горизонталей, C — остальные 12 клеток этих трех вертикалей, D — остальные 16 клеток таблицы.



Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что если в каждой клетке таблицы стоит не более 6 крестиков, то в какой-то клетке не окажется ни одного крестика. Допустим, что в каждой клетке стоит не более 6 крестиков. Тогда в части A находится не более 54 крестиков. Поскольку в частях A и B вместе находится не менее 70 крестиков, часть B должна содержать не менее 16 крестиков. Части A и C вместе содержат не менее 70 крестиков, а часть B — не менее 16, значит, в сумме в частях A, B, C содержится не менее 86 крестиков. Всего в таблице 100 крестиков, следовательно, на часть D приходится не более 14 крестиков. Но часть D состоит из 16 клеток, значит, хотя бы одна из клеток пуста.

7. Ответ: 4 пятерки.

Если исходный набор — это числа от -4 до 5, то указанным в условии способом можно получить квадраты 0, 1, 4, 9: для этого достаточно вычеркнуть соответственно 5, 4, 1, -4.

Пусть на доске написаны числа a, $a+1, \ldots, a+9$, и пусть S — их сумма. Вычеркнув одно число и подсчитав сумму оставшихся чисел, мы получим в качестве результата одно из чисел $S-a$, $S-a-1, \ldots, S-a-9$. Заметим, что эти суммы представляют собой 10 последовательных целых чисел и именно среди них школьники отыскивают квадраты целых чисел.

Посмотрим, какое наибольшее количество квадратов целых чисел может быть среди последовательных 10 чисел. Ясно, что достаточно изучить этот вопрос, когда все числа неотрицательны. Если взять числа от 0 до 9, то среди них оказывается четыре квадрата: 0, 1, 4, 9. Для чисел от 1 до 10 количество квадратов равно трем, для чисел от 2 до 11, или от 3 до 12, или от 4 до 13 количество квадратов равно двум. Среди чисел от 5 до 15 имеется всего один квадрат, а среди чисел от 6 до 16 — снова два квадрата.

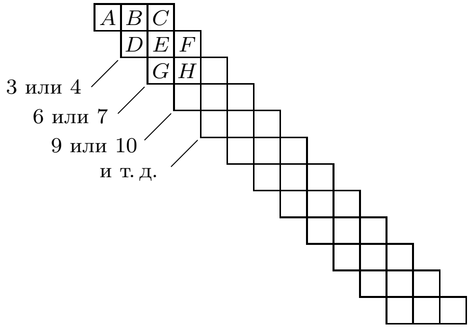
Заметим, что чем крупнее рассматриваемые числа, тем реже встречаются квадраты. Действительно, формула $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ показывает, что чем крупнее x, тем больше разность между $(x+1)^2$ и x^2. Значит при $x \geqslant 3$ разность между соседними квадратами $(x+1)^2$ и x^2 не меньше чем $4^2-3^2=7$. Поэтому в случае, когда наименьшее из десяти последовательных чисел больше 4, среди таких чисел не может оказаться даже трех квадратов. Действительно, наименьший из квадратов не меньше $3^2=9$, значит, разность между первым и вторым квадратами не меньше 7, и тогда разность между вторым и следующим тоже не меньше 7; таким образом, разность между третьим и первым не меньше 14, и они не могут оба принадлежать множеству из 10 последовательных целых чисел.

Какой ответ будет в задаче, если вначале на доске написано 11 последовательных чисел?

8. Ответ: это можно сделать 2^{11} способами.

Представим себе, что лесенка уже заполнена числами. Тогда, спускаясь по лесенке, т. е. двигаясь по клеткам вправо или вниз, мы в очередной клетке каждый раз будем обнаруживать число, которое больше всех чисел в уже пройденных клетках. В частности, если из какой-либо клетки, делая шаги вправо или вниз, мы дошли до другой клетки, то число в первой клетке меньше числа во второй.

Поскольку из клетки A (см. рисунок) мы можем дойти, двигаясь вправо и вниз, до любой другой клетки таблицы, в клетке A должно стоять наименьшее число в таблице, т. е. 1. Из клетки B мы тоже можем дойти до всех клеток (кроме A), значит, в клетке B стоит второе по величине число, т. е. 2.



Далее, из клеток C и D мы за один шаг можем дойти до клетки E, а из клетки E — до всех остальных чисел таблицы (кроме тех, которые мы уже изучили). Значит, в клетках C и D должны стоять числа 3 и 4, а в клетке E — число 5. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что в клетках F и G должны стоять числа 6 и 7, а в клетке H — число 8 и т. д.

Таким образом, в любой расстановке положение чисел 1, 2, 5, 8, 11 и т. д. определено однозначно, а положение остальных чисел — с небольшими вариациями: числа 3 и 4, стоящие в клетках C и D, можно поставить двумя способами (в клетку C — число 3, а в клетку D — число 4, либо наоборот), аналогично числа 6 и 7 можно поставить двумя способами, числа 9 и 10 тоже двумя способами и т. д. — всего имеется 11 пар таких чисел. Выбор каждого из этих 11 вариантов осуществляется независимо от остальных, потому при подсчете общего количества способов указанные числа вариантов нужно перемножать и мы получим ответ: 2^{11} способов.

9. Очевидно, одноэтажный дом не является интересным. Тогда наименьшее возможное суммарное число этажей в 10 интересных домах не меньше чем сумма десяти наименьших натуральных чисел, превосходящих 1, т. е. $2+3+\ldots+11=65$.

11. Для каждого числа k от 0 до 15 обозначим через x_k количество школьников, которые получили оценку k баллов. Тогда средний балл всех школьников был равен

$$\frac{0\cdot x_0+1\cdot x_1+2\cdot x_2+3x_3+\ldots+14x_{14}+15x_{15}}{9000},$$

а после занесения в компьютер он стал равен

$$\frac{0\cdot(x_0+x_1+x_2+x_3)+4x_4+\ldots+11x_{11}+15(x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})}{9000}.$$

Разность этих дробей равна

$$\frac{x_1-x_{14}+2(x_2-x_{13})+3(x_3-x_{12})}{9000}=0,1.$$

Таким образом,

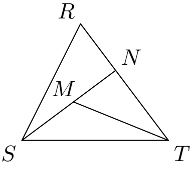
$$(x_1-x_{14})+(x_2-x_{13})+(x_2-x_{13})+(x_3-x_{12})+(x_3-x_{12})+(x_3-x_{12})=900.$$

В этом выражении в скобках стоят целые числа, сумма шести этих скобок равна 900, значит, хотя бы одна из скобок не меньше 150, чтд.

12. Нам понадобится следующее интуитивно очевидное утверждение.

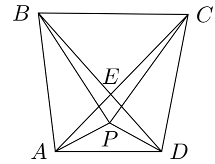
Лемма. Пусть в треугольнике RST отмечена точка $M\neq R$. Тогда $MS+MT<RS+RT$.

Доказательство. Продолжим отрезок SM до пересечения со стороной RT в точке N. Тогда по неравенствам треугольника



$$MS+MT\leqslant MS+MN+NT=$$
$$=SN+NT<SR+RN+NT=RS+RT. \square$$

Обратимся к решению задачи. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника. Точка P лежит в одном



из этих треугольников, для определенности в треугольнике AED. Тогда по лемме

$$AP + PC < AD + DC,$$
$$BP + PD < AB + AD.$$

Таким образом, мы получаем неравенство для суммы расстояний от точки P до вершин четырехугольника:

$$PA + PB + PC + PD < AB + CD + 2AD < 4a,$$

где a — длина наибольшей стороны четырехугольника. Отметим, что в проведенном рассуждении мы не использовали условие, что в четырехугольнике две противоположные стороны имеют наибольшую длину.

С другой стороны, пусть наибольшие и равные друг другу стороны — это AB и CD. Тогда $QA+QB > AB$, $QC+QD > CD$, следовательно,

$$2(QA + QB + QC + QD) > 2(AB + CD) = 4a.$$

Сравнивая это неравенство с предыдущим, получаем, что

$$PA + PB + PC + PD < 2(QA + QB + QC + QD), \quad \text{чтд.}$$

13. Ответ: 18 троечниц.

Мальчиков, не являющихся двоечниками, будем называть для краткости *отличниками*.

Оценка. Каждый отличник, судя по его заявлению, знаком хотя бы с одной троечницей. При этом всего имеется 90 отличников. Каждая троечница знакома не более чем с пятью отличниками (поскольку не менее $2/3$ всех ее знакомых — двоечники, а она знакома не более чем с 10 двоечниками). Значит, троечниц не менее 18.

Пример. Пусть имеется 18 троечниц. Разобьем отличников на группы по 5 человек, получится 18 групп, а всех нетроечниц разобьем на 10 групп, в каждой из которых от 0 до 18 девочек. Каждую троечницу познакомим со всеми двоечниками, а также с пятью отличниками из одной группы (для разных троечниц будем выбирать разные группы). Будем считать, что отличники с нетроечницами незнакомы. А каждого двоечника познакомим с одной из групп троечниц (для разных двоечников будем брать разные группы). В результате условие задачи окажется выполненным:

— каждая троечница знакома с десятью двоечниками и пятью отличниками, т. е. количество двоечников среди ее знакомых — ровно $2/3$;

— остальные девочки знакомы только с двоечниками, поэтому их заявления тоже верны;

— каждый двоечник знаком с 18 троечницами и группой из не более 18 других девочек, значит, среди знакомых ему девочек не менее половины — троечницы;

— наконец, каждый отличник знаком только с одной троечницей, так что среди знакомых ему девочек — троечниц уж никак не меньше половины.

14. Ответ: да, можно.

Приведем один из возможных примеров разбиения. Пусть первая пара состоит из чисел 0 и 1, а каждому числу n, $2 \leqslant n \leqslant 151$, поставим в пару число $303 - n$. Таким образом получится 150 пар с суммой 303 и одна пара с суммой 1. Произведение этих сумм равно $303^{150} = \left(303^{10}\right)^{15}$.

15. Для каждого числа k от 0 до 8 обозначим через x_k количество школьников, которые получили оценку k баллов. Тогда средний балл всех школьников был равен

$$\frac{0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8}{6000},$$

а после махинаций он стал равен

$$\frac{0 \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 4x_4 + 8(x_5 + x_6 + x_7 + x_8)}{6000}.$$

Разность этих дробей равна

$$\frac{x_1 - x_7 + 2(x_2 - x_6) + 3(x_3 - x_5)}{6000} = -0{,}1.$$

Таким образом,

$$(x_7 - x_1) + (x_6 - x_2) + (x_6 - x_2) + (x_5 - x_3) + (x_5 - x_3) + (x_5 - x_3) = 600.$$

В этом выражении в скобках стоят целые числа, сумма шести этих скобок равна 600, значит, хотя бы одна из скобок не меньше 100, чтд.

16. Ответ: 300 цифр.

Оценка. Пусть в ряду стоят цифры a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Рассмотрим наборы a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_{k+199} и a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_{k+201} при всех k, для которых эти наборы определены, т. е. при $1 \leqslant k \leqslant n-201$. Так как в первом наборе нулей и единиц поровну, а во втором — не поровну, получаем, что $a_{k+200}=a_{k+201}$. Это равенство выполнено при всех рассматриваемых k, поэтому $a_{201} = a_{202} = \ldots = a_n$. Если $n > 300$, то в наборе из двухсот цифр a_{n-199}, a_{n-198}, $\ldots$, a_n более половины цифр равны a_n, что противоречит условию задачи.

Пример расстановки 300 цифр легко получается из внимательного анализа оценки. Поставим в ряд сначала 100 единиц, затем 100 нулей, а затем снова 100 единиц. Тогда среди любых 200 или 202 подряд идущих цифр будет ровно 100 нулей, т. е. условие выполнено.

17. Ответ: наибольшее возможное значение дроби $\frac{c}{a}$ равно 9, оно достигается в случае $a = b$, $c = 9a$.

По условию графики функций $y = 2ax^2 + bx + c$ и $y = ax + c$ пересекаются не более чем в одной точке. Чтобы найти эту возможную точку пересечения, мы должны решить уравнение

$$2ax^2 + bx + c = ax + c.$$

Но это уравнение имеет корни $x = 0$ и $x = \frac{a-b}{2a}$. Значит, указанные графики всегда пересекаются, причем обычно не в одной, а в двух точках. Лишь при $b = a$ точка пересечения графиков единственна. Таким образом, условие задачи выполнено лишь при $b = a$.

Изучим возможность пересечения графиков $y = 2ax^2+bx+c$ и $y = ax + b$. Решая уравнение

$$2ax^2 + bx + c = ax + b$$

при $b = a$, преобразуем его к виду $2x^2 = 1-\frac{c}{a}$. Так как уравнение должно иметь не более одного корня, заключаем, что $\frac{c}{a} \geqslant 1$.

Наконец, рассмотрим графики $y = 2ax^2+ax+c$ и $y = cx+a$. Точка их пересечения описывается уравнением

$$2ax^2 + ax + c = cx + a \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2 - \left(\frac{c}{a} - 1\right)x + \left(\frac{c}{a} - 1\right) = 0.$$

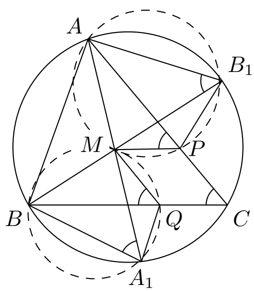
Это уравнение должно иметь не более одного корня, значит, его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\frac{c}{a}-1\right)^2-8\left(\frac{c}{a}-1\right)=\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{c}{a}-9\right)\leqslant 0.$$

В последнем выражении первая скобка, как мы знаем, неотрицательна, значит, вторая неположительна, т. е. $\frac{c}{a}\leqslant 9$.

При $a=b$ и $c=9a$ три рассмотренных уравнения имеют ровно по одному корню. Три остальных уравнения сводятся к рассмотренным благодаря соотношению $a=b$.

18. Пусть M — точка пересечения медиан. Как мы знаем, медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины. Точки P и Q делят соответствующие стороны треугольника тоже в отношении $2:1$. Поэтому $MP\parallel BC$, $MQ\parallel AC$. Тогда



$$\angle BQM=\angle BCA=\angle MPA$$

в силу этих параллельностей.

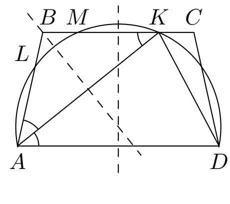
Кроме того, $\angle BA_1M=\angle BCA=\angle BB_1A$, так как это вписанные углы, опирающиеся на дугу AB. Таким образом, в четырехугольнике $BMQA_1$ два равных угла опираются на сторону BM. Значит, этот четырехугольник вписанный. Аналогично четырехугольник AB_1PM вписанный. Снова пользуясь равенством вписанных углов, заключаем, что

$$\angle BQA_1=\angle BMA_1=\angle AMB_1=\angle APB_1,\ \text{чтд.}$$

19. О т в е т: да, это возможно.

Пример нетрудно придумать, если «разрешить себе» рассматривать числа, в которых многократно повторяется одна и та же цифра: 11117511111... или 222236492222... Но бывают и более сложные примеры: 4812496 4812496 4812496 4812 8814.

20. Серединный перпендикуляр к стороне AD является осью симметрии описанной окружности треугольника AKD, а также всей трапеции. Пусть M — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AKD с прямой BC. Тогда



$KC = BM$ в силу симметрии. Далее, в силу параллельности $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$, поэтому треугольник ABK равнобедренный. Значит, он симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку AK. Окружность тоже симметрична относительно этого перпендикуляра, поэтому $BM = BL$.

21. Ответ: это можно сделать 2^{99} способами.

Решение задачи совершенно аналогично решению задачи 8.

22. Ответ: не существует.

Решение 1 (симметрия). Допустим, что такой квадратный трехчлен нашелся. Рассмотрим параболу — график этого квадратного трехчлена. Поскольку $x \neq 6x - 1$ при целых x, эти два корня расположены симметрично по отношению к оси симметрии параболы. Аналогично точки t и $3-15t$ расположены симметрично. Отсюда получаем, что $x + (6x-1) = t + (3-15t)$, или, что эквивалентно, $7x+14t = 4$. Последнее невозможно, так как левая часть делится на 7, а правая нет.

Решение 2 (подбираем коэффициенты). Допустим, что квадратный трехчлен $f(t) = at^2 + bt + c$ удовлетворяет условию задачи. Запишем уравнение $f(x) = f(6x-1)$:

$$ax^2 + bx + c = a(6x-1)^2 + b(6x-1) + c.$$

Вычитая из обеих частей c, сокращая на a и обозначив $\frac{b}{a} = d$, получаем, что x удовлетворяет уравнению

$$x^2 + dx = (6x-1)^2 + d(6x-1).$$

С помощью этого уравнения мы можем выразить d через x:

$$d = \frac{(6x-1)^2 - x^2}{x - (6x-1)} = 1 - 7x.$$

Проведя аналогичные рассуждения со вторым уравнением, находим, что d можно выразить через t: $d = 14t - 3$.

Таким образом, $1 - 7x = 14t - 3$, что невозможно, поскольку левая и правая части дают разные остатки при делении на 7.

23. Решение 1 (созерцательное раскрытие скобок). Поскольку функция $f(c) = c^n$ возрастает при положительных c, достаточно проверить неравенство

$$\bigl(b + (\sqrt[n]{2} - 1)a\bigr)^n \geqslant a^n + b^n.$$

Рассмотрим одновременно с этим неравенством соотношение

$$\bigl(a + (\sqrt[n]{2} - 1)a\bigr)^n = \bigl(\sqrt[n]{2}a\bigr)^n = 2a^n.$$

Таким образом, при $a = b$ доказываемое нестрогое неравенство обращается в равенство. Пусть $a < b$. Раскроем скобки в левой части неравенства, пользуясь каким-угодно алгоритмом раскрытия скобок (и не заботясь о приведении подобных членов). Тем же способом раскроем скобки в левой части второго выражения. Мы получим две весьма громоздкие суммы, причем вторая совсем просто получается из первой: каждому слагаемому вида $\mathrm{const} \cdot b^k a^\ell$ в первой сумме соответствует слагаемое $\mathrm{const} \cdot a^k a^\ell$ во второй, причем все коэффициенты у таких слагаемых положительны.

Тогда заменим все слагаемые $\mathrm{const} \cdot b^k a^\ell$ из первой суммы, кроме b^n, на соответствующие им слагаемые второй суммы. В результате этих замен значение первой суммы *уменьшится* и станет равно b^n плюс сумма всех слагаемых из второй суммы, кроме a^n, т.е. это значение равно $b^n + (2a^n - a^n) = b^n + a^n$.

Решение 2 (циничная оценка). Воспользуемся формулой

$$c^n - b^n = (c - b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + \ldots + cb^{n-2} + b^{n-1}).$$

Кроме того, примем во внимание, что $c^n - b^n = a^n$, $b \geqslant a$, $c = \sqrt[n]{b^n + a^n} \geqslant \sqrt[n]{2}a$. Тогда

$$\begin{aligned} c - b &= \frac{c^n - b^n}{c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + \ldots + cb^{n-2} + b^{n-1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{a^n}{(\sqrt[n]{2}a)^{n-1} + (\sqrt[n]{2}a)^{n-2}a + \ldots + (\sqrt[n]{2}a)a^{n-2} + a^{n-1}} = \\ &= \frac{a}{(\sqrt[n]{2})^{n-1} + (\sqrt[n]{2})^{n-2} + \ldots + \sqrt[n]{2} + 1} = a \cdot \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{(\sqrt[n]{2})^n - 1}. \end{aligned}$$

Решение 3 (производная). Докажем, что

$$f(t) = \bigl(\sqrt[n]{2}a + t\bigr)^n - a^n - (a + t)^n \geqslant 0$$

при всех положительных t. Для этого заметим, что

$$f'(t) = n(\sqrt[n]{2}a + t)^{n-1} - n(a + t)^{n-1} \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает. Стало быть, $f(t) \geqslant f(0) = 0$ при любом неотрицательном t.

Перейдем к решению задачи. Положим $t = b - a \geqslant 0$. Тогда

$$c^n = a^n + b^n \leqslant \big(\sqrt[n]{2}a + (b-a)\big)^n = \big((\sqrt[n]{2} - 1)a + b\big)^n.$$

Осталось лишь извлечь корень n-й степени.

24. Р е ш е н и е 1 (графики). Сначала рассмотрим случай $a > 0$, $c > 0$. График функции $y = ax + \frac{c}{x}$ показан ниже на рисунке слева. При $b > 0$ уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$ имеет корень, если прямая $y = b$ пересекает верхнюю ветвь графика. В этом случае прямая $y = b + 1$ тоже пересекает верхнюю ветвь графика.

При $b < 0$ уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$ имеет корень, если прямая $y = b$ пересекает нижнюю ветвь графика. В этом случае прямая $y = b - 1$ тоже пересекает нижнюю ветвь графика.

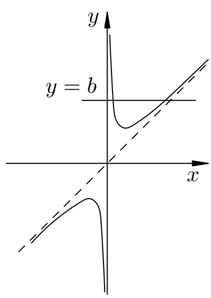


График функции $y = ax + \frac{c}{x}$ при $a > 0$, $c > 0$

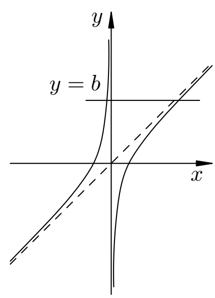


График функции $y = ax + \frac{c}{x}$ при $a > 0$, $c < 0$

В случае $a > 0$, $c < 0$ график функции $y = ax + \frac{c}{x}$ показан на рисунке справа. В этом случае уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$ при всех b имеет решение, так же как и уравнения $ax + \frac{c}{x} = b \pm 1$.

Оставшиеся случаи аналогичны разобранным.

Р е ш е н и е 2 (дискриминанты). Заметим, что корни уравнения $ax + \frac{c}{x} = b$ совпадают с корнями уравнения $ax^2 + c = bx$, в силу того что последнее не может иметь корней, равных нулю ($c \neq 0$). Допустим, что ни одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$ не имеет решений. Тогда не имеют решений и уравнения $ax^2 + c = (b+1)x$, $ax^2 + c = (b-1)x$.

Вычислив дискриминанты квадратных уравнений, получим систему неравенств

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ (b+1)^2 - 4ac < 0, \\ (b-1)^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

Сложим последние два неравенства:

$$(b+1)^2 - 4ac + (b-1)^2 - 4ac = 2b^2 + 2 - 8ac < 0.$$

С другой стороны, из первого неравенства следует, что

$$0 \leqslant 2(b^2 - 4ac) < 2(b^2 - 4ac) + 2 = 2b^2 + 2 - 8ac.$$

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение было неверным.

25. Ответ: 20.

Оценка. Нетрудно заметить, что при $n \geqslant 21$ число, стоящее слева от n, не может быть хорошим. Поэтому получить более 20 хороших чисел нам точно не удастся.

Пример. Расстановку, содержащую 20 хороших чисел, построим с помощью следующего алгоритма.

1. Ставим число 40.

2. Смотрим на последнее поставленное число. Если оно четное и равно $2k$, ставим справа число k, если же оно нечетное, ставим наибольшее из еще не задействованных чисел.

3. Если расстановка не закончена, повторяем шаг 2.

Алгоритм корректен, так как число k не могло появиться в круге раньше, чем $2k$. Следовательно, такая расстановка возможна, и все четные числа в ней являются хорошими.

27. Ответ: $f(200) = 100$.

Весь фокус в том, что не надо думать, что число y положительное.

При $x = \sqrt{20}$, $y = 40$ получаем, что $f(100) \geqslant f(140)$, а при $x = \sqrt{220}$, $y = -40$ получаем $f(140) \geqslant f(100)$. Таким образом, $f(100) = f(140)$.

Далее, для $x = \sqrt{20}$, $y = 60$ получаем, что $f(140) \geqslant f(200)$, а при $x = \sqrt{320}$, $y = -60$ получаем $f(200) \geqslant f(140)$. Таким образом, $f(140) = f(200)$.

Итак, $f(100) = f(140) = f(200)$.

На самом деле $f(x)$ — постоянная функция при положительных x. Действительно, если $0<a<b$, то возьмем $y=a-b<0$ и $x=\sqrt{3b-2a}$. Тогда $a=x^2+3y$ и $b=x^2+2y$. Следовательно, $f(a)\leqslant f(b)$, и функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x>0$. Пусть теперь $0<u<v$. Тогда можно подобрать такое натуральное n, что $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\leqslant\frac{v}{u}<\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$. Поскольку $f(2y)\geqslant f(3y)$, имеем цепочку неравенств

$$f(u)\geqslant f\left(\frac{3}{2}u\right)\geqslant f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2u\right)\geqslant\ldots\geqslant f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^nu\right)\geqslant f(v)\geqslant f(u),$$

и, значит, $f(u)=f(v)$.

28. Ответ: 65 чисел.

Решение 1 (динамика). Если даны два целых числа a и b и мы выписываем новые числа, как это описано в условии задачи, будем называть эти действия «процесс $\mathcal{P}(a,b)$».

Сделаем пару полезнейших наблюдений.

1. Если оба числа a и b сдвинуть на произвольное целое число k (т. е. попросту рассмотреть числа $a+k$ и $b+k$), то среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ тоже сдвинется на k. Поэтому числа, выписанные в процессе $\mathcal{P}(a+k,b+k)$, суть в точности сдвиги на k чисел, полученных в процессе $\mathcal{P}(a,b)$.

2. Если оба числа a и b делятся на нечетное натуральное число d, то среднее арифметическое чисел $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ есть целое число, равное среднему арифметическому чисел a и b, деленному на d. Поэтому числа, выписанные в процессе $\mathcal{P}(\frac{a}{d},\frac{b}{d})$, суть в точности деленные на d числа, полученные в процессе $\mathcal{P}(a,b)$.

Очевидно, что тогда количество чисел, которые можно получить в процессе $\mathcal{P}(a,b)$, не будет меняться, если применять к исходной паре чисел операции сдвига или сокращения, описанные в наблюдениях.

Заметим, что исходные числа $a=10^6$, $b=10^9$ делятся на число 5^6, — сократим на него. Получим числа $a_1=2^6$ и $b_1=2^6\cdot1000$. Сдвинем эти числа на -2^6: $a_2=0$ и $b_2=2^6\cdot999$. Теперь эти числа кратны 999, можем сократить. Получаем числа $a_3=0$ и $b_3=2^6=64$. Для этой пары чисел ясно, что в процессе $\mathcal{P}(a_3,b_3)$ окажутся выписанными все промежуточные натуральные числа. Таким образом, всего будет написано 65 чисел.

Р е ш е н и е 2 (полный анализ). Решим эту задачу в более общем виде. Пусть изначально на доске написаны числа a и b. За один шаг мы будем брать все возможные пары написанных на доске чисел и дописывать на доску их средние арифметические. Например, после первого шага на доске будет записано три числа — a, $\frac{a+b}{2}$ и b.

Забудем на время, что все результаты должны быть целыми. Докажем по индукции, что через n шагов на доске будут написаны числа вида

$$\frac{p}{2^n} \cdot a + \frac{2^n - p}{2^n} \cdot b, \qquad \text{где} \quad 0 \leqslant p \leqslant 2^n,$$

и никакие другие числа записаны через n шагов не будут. База ($n = 0$) очевидна. Пусть за k шагов у нас оказались написаны все числа вида $\frac{p}{2^k} \cdot a + \frac{2^k - p}{2^k} \cdot b$ (и только они). Возьмем среднее арифметическое двух таких чисел:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^k} \cdot a + \frac{2^k - p}{2^k} \cdot b + \frac{q}{2^k} \cdot a + \frac{2^k - q}{2^k} \cdot b\right) = \\ = \frac{p+q}{2^{k+1}} \cdot a + \frac{2^{k+1} - (p+q)}{2^{k+1}} \cdot b.$$

Заметим, что если взять здесь числа p и q одинаковыми, это будет означать, что полученное число уже было написано на доске ранее. Таким образом, $p + q$ может принимать любые значения от 0 до 2^{k+1}.

Вспомним теперь, что все выписываемые числа должны быть целыми. Поскольку $a = 10^6$ и $b = 10^9$ делятся на 2^6, в течение первых 6 шагов все выписываемые числа будут целыми. После 6 шагов на доске будут написаны числа $\frac{p}{2^6} \cdot 10^6 + \frac{2^6 - p}{2^6} \cdot 10^9$, где $0 \leqslant p \leqslant 2^6$, — всего $2^6 + 1 = 65$ чисел. На седьмом шаге мы не сможем выписать ни одного нового числа. Действительно, числа, выписываемые на седьмом шаге, имеют вид

$$\frac{p}{2^7} \cdot 10^6 + \frac{2^7 - p}{2^7} \cdot 10^9 = \frac{p}{2} \cdot 5^6 + (2^7 - p) \cdot 2^2 5^9.$$

Если p четное, то такое число уже было написано на шестом шаге (сократите на 2 в левой части равенства), если же p нечетное, то видно, что число в правой части нецелое.

29. Ответ: может, например, так:

$$20 \to 39 \to 70 \to 135 \to 260 \to 510 \to 1010 \to 2016.$$

Есть много других способов.

Верно ли, что на экране калькулятора может получиться любое достаточно большое натуральное число? Например, любое натуральное число, большее чем 10^{1000}?

30. Ответ: 112.

Заметим, что если число n четно, то количество чисел, меньших n, нечетно. Эти числа могут поровну распределиться по двум группам из 99 чисел, описанных в условии, только в том случае, когда одно из них стоит напротив числа n. Итак, напротив каждого четного числа должно стоять меньшее число.

Теперь ясно, что тогда напротив числа 2 обязательно стоит 1, потому что это единственное число, которое меньше 2. Далее, напротив 4 может стоять только 3 (ведь мы уже знаем, что числа 1 и 2 стоят напротив друг друга). Аналогично напротив 6 стоит 5 и т. д. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что напротив числа 112 обязательно стоит 111.

31. Заметим, что рассматриваемое натуральное число должно быть четным. В самом деле, в противном случае все его делители нечетны, а само число равно сумме 18 нечетных делителей, т. е. все-таки четное.

Далее заметим, что хотя бы один из 19 делителей, дающих в сумме наше число, должен быть четным (потому что сумма 19 нечетных чисел нечетна и, значит, не может быть равна нашему числу). Пусть этот четный делитель равен $2x$. Чтобы представить наше число в виде суммы 20 делителей, возьмем предыдущую сумму 19 делителей и заменим в ней $2x$ на $x + x$.

32. В течение первых 10 операций заведомо исчезнет зазор между левой стенкой и ближайшим к ней левым чемоданом. Действительно, либо этот «левый чемодан» будет в свой ход придвинут к стенке, либо, если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером, самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к стенке. В результате один из чемоданов — назовем его А — окажется стоящим вплотную к стенке и при последующих действиях кладовщика больше не будет двигаться.

В течение следующих 10 операций заведомо исчезнет зазор между чемоданом А и чемоданом, ближайшим к нему справа. Действительно, либо этот «ближайший справа чемодан» будет в свой ход придвинут к чемодану А, либо, если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером (кроме чемодана А), самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к чемодану А. В результате чемодан А стоит вплотную к стенке, а вплотную к нему расположен еще один чемодан — назовем его Б, — причем при последующих действиях кладовщика оба чемодана больше не будут двигаться.

Продолжая эти рассуждения, мы получим, что после 30 операций у левого края стенки будут вплотную стоять уже три чемодана, после 40 операций — 4 чемодана и т. д. Наконец, после 100 операций все 10 чемоданов будут стоять слева на полке без зазоров. Перемещение чемоданов на этом завершится.

33. Для решения задачи полезно знать следующий факт, который мы для удобства сформулируем в терминах знакомства.

Лемма. Не существует компании, состоящей из нечетного числа людей, в которой каждый человек имеет нечетное количество знакомых (среди людей из этой компании).

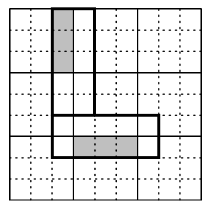
Доказательство. Пусть все знакомые пожмут друг другу руки. В каждом рукопожатии участвует две руки, значит, суммарное количество «протянутых рук» четно. С другой стороны, каждый человек протягивал руку нечетное число раз. Чтобы суммарное число «протянутых рук» в этой ситуации получилось четным, число людей должно быть четным. □

Приступим к решению задачи. Каждый мужчина в среду сказал правду, значит, у него нечетное число знакомых (поскольку среди них мужчин на 1 больше, чем женщин). А каждая женщина сказала правду в четверг, и по той же причине у нее нечетное число незнакомых.

Предположим, что на острове 2015 жителей. Тогда у каждого человека количество знакомых и количество незнакомых в сумме дают 2014 (четное число). Следовательно, у каждого человека количество знакомых имеет ту же четность, что и количество незнакомых.

Таким образом, у каждой женщины нечетное количество незнакомых и, следовательно, нечетное количество знакомых. В итоге получаем, что каждый из 2015 жителей имеет нечетное число знакомых, чего быть не может.

34. Сначала нарисуем разметку, разбивающую исходный квадрат 60×60 на квадратики 3×3. Заметим, что у каждой плиточки 2×5 сторона длины 5 разбита этой разметкой либо на две части (их длины 2 и 3), либо на три части (с длинами 1, 3, 1). Следовательно, на каждой плиточке имеется прямоугольник 1×3, не подразбитый на части линиями разметки (на рисунке показаны примеры таких прямоугольников), — закрасим на каждой плиточке один такой прямоугольник.

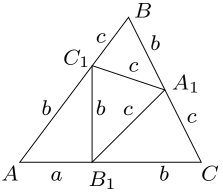


Очевидно, закрашенные прямоугольники не пересекаются, так как лежат в разных плиточках. Если в каком-то квадрате 3×3 закрашено больше одного прямоугольника 1×3, то они расположены одинаково (все горизонтально или все вертикально), поскольку не пересекаются. Следовательно, каждый квадрат разметки 3×3 можно так разбить на прямоугольники 1×3, что все закрашенные прямоугольники будут принадлежать этому разбиению, *чтд*.

35. Заметим, что число 2015 можно получить из чисел от 1008 до 1012. Если на предыдущем шаге было число, отличное от 1008, то из него можно было получить и 2016. Рассмотрим случай, когда на предыдущем шаге было число 1008. Это число мы могли получить из чисел от 505 до 509. Но из этих чисел мы могли получить также и число 1009 (если вычесть на единицу меньше), из которого можно получить и 2016.

На экране кривого калькулятора написано двузначное число. Калькулятор может умножить число на экране на 2 и вычесть из результата какое-нибудь натуральное число от 1 до 10 (при следующей операции он может вычесть другое число от 1 до 10). Известно, что такими операциями калькулятор может из исходного числа получить n, где $n > 100 \cdot 2^k$ и $n \not\equiv 1 \pmod{2^k}$. Докажите, что он может получить и $n+1$.

36. Заметим, что треугольники BC_1A_1 и CA_1B_1 равны по трем сторонам, а значит, в них равны соответственные углы: $\angle C_1BA_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда треугольник ABC равнобедренный, откуда $b+c=a+b$, т. е. $a=c$.

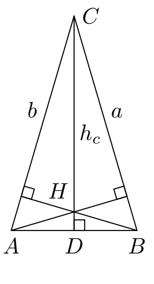


38. Сопоставим каждой раскраске некоторую другую (а может быть, и ту же самую) раскраску. Повернем доску на 90° и перекрасим каждую клетку в противоположный цвет. Тогда каждой ладейной раскраске будет сопоставлена обязательно неладейная (потому что в полученной раскраске можно по черным клеткам добраться с левой стороны доски до правой). Следовательно, ладейных раскрасок не более половины от общего числа раскрасок. Чтобы доказать, что ладейных раскрасок строго меньше, необходимо привести какую-нибудь неладейную раскраску, которая переходит в неладейную. В качестве такого примера подходит шахматная раскраска.

39. Решим более общую задачу. Пусть на доске написано несколько степеней двойки (степени четверки — частный случай), и пусть Андрюша задумал число A, которое делится на любое из чисел на доске, но меньше суммы этих чисел. Докажем, что можно подчеркнуть несколько чисел на доске так, чтобы их сумма равнялась A.

Это утверждение будем доказывать индукцией по сумме написанных чисел. Если A совпадает с одним из написанных на доске чисел, то доказывать нечего. В противном случае сотрем наибольшее число на доске и вычтем это число из A. Полученный набор попрежнему удовлетворяет условиям предыдущего абзаца, и мы можем применить предположение индукции.

40. Пусть ABC — остроугольный треугольник, a, b, c — длины его сторон BC, AC и AB соответственно, h_a, h_b, h_c — длины высот, проведенных к соответствующим сторонам. Если из высот можно составить треугольник, то задача решена. Пусть одна высота не короче суммы двух других, для определенности $h_c \geqslant h_a + h_b$.



Обозначим через H точку пересечения высот с длинами h_a и h_b (семиклассники могут еще не знать, что все три высоты пересекаются в одной точке, но нам это и не понадобится).

Первый треугольник составим из стороны c и высот h_a и h_b. Почему он составляется из этих отрезков? Во-первых, c — самый длинный из них (наклонная длиннее перпендикуляра). Кроме того, $c < AH+HB < h_a+h_b$, поэтому из этих отрезков можно составить треугольник.

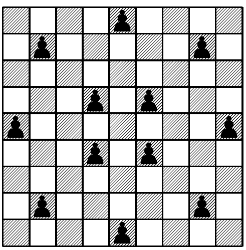
Докажем, что и из остальных трех отрезков мы сможем составить треугольник. Заметим, что h_c — наименьший из них. Пусть точка D — основание высоты h_c. Тогда $a < h_c + BD$. Но $BD < c < BH + HA < h_a + h_b \leqslant h_c < b$, и поэтому $a < h_c + b$. Аналогично $b < h_c + a$, и значит, из отрезков a, b и h_c тоже можно составить треугольник.

41. Ответ: 13 солдат.

Пример. Разместим в квадрате 12 доминошек, попарно не имеющих общих соседних клеток (см. левый рисунок). Старшина последовательно указывает на них, а в конце еще на одну произвольную доминошку.

Оценка. Окрасим клетки квадрата в шахматном порядке так, чтобы углы оказались черными. Пусть каждый раз уходит солдат с белой клетки. Несложно указать 12 черных клеток, соседних со всеми белыми (см. правый рисунок). Когда уйдут 13 белых солдат, у солдата, стоящего на одной из этих черных клеток, уйдут два соседа и процесс прекратится.

7			6	6			5	5
7								
		12			11	11		
		12						4
8								4
8						10		
		9	9			10		
								3
1	1			2	2			3



42. Ответ: нет.

В среду каждый мужчина сказал правду, значит, у него нечетное количество знакомых. А в четверг каждая женщина сказала правду, следовательно, у нее тоже нечетное количество знакомых. Таким образом, у каждого жителя острова нечетное количество знакомых. Поэтому количество жителей острова не может быть нечетным. (Доказательство последнего утверждения приведено в решении задачи 33.)

43. Решение 1 (разность квадратов). Заметим, что

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+y-\sqrt{xy})(x+y+\sqrt{xy}).$$

Так как $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant\sqrt{xy}$, достаточно проверить неравенство

$$x+y+\sqrt{xy}\leqslant 3(x+y-\sqrt{xy}).$$

После приведения подобных членов его можно записать в виде $2(x+y)\geqslant 4\sqrt{xy}$, в котором оно очевидно.

Решение 2. Раскроем скобки в правой части неравенства:

$$x^2+xy+y^2\leqslant 3x^2+3xy+3y^3-6x\sqrt{xy}-6y\sqrt{xy}+6xy.$$

Приведем подобные слагаемые, перенесем радикалы в левую часть и сократим на 2:

$$3x\sqrt{xy}+3y\sqrt{xy}\leqslant x^2+4xy+y^2.$$

Далее заметим, что выражения в обеих частях неравенства неотрицательны, поэтому мы можем возвести их в квадрат:

$$9x^3y+18x^2y^2+9xy^3\leqslant x^4+16x^2y^2+y^4+8x^3y+8xy^3+2x^2y^2.$$

Полученное неравенство, в свою очередь, приводится к виду $x^3y+xy^3\leqslant x^4+y^4$. А это неравенство, безусловно, верно, в силу того что

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3=x^3(x-y)-y^3(x-y)=(x^3-y^3)(x-y)\geqslant 0$$

(в последнем выражении разности в скобках имеют одинаковый знак).

Решение 3. Как и в предыдущем решении, с помощью раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых сведем задачу к проверке неравенства

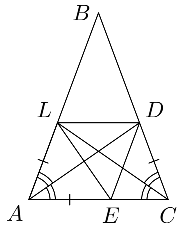
$$3(x+y)\sqrt{xy}\leqslant x^2+4xy+y^2=(x+y)^2+2(\sqrt{xy}\,)^2.$$

Это неравенство можно также записать в виде

$$(x+y)^2+2(\sqrt{xy}\,)^2-3(x+y)\sqrt{xy}=(x+y-\sqrt{xy}\,)(x+y-2\sqrt{xy}\,)\geqslant 0.$$

Последнее очевидно, поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant\sqrt{xy}$ и поэтому оба сомножителя неотрицательны.

44. Проведем биссектрису CL угла ACB. Так как треугольник ABC равнобедренный, $AL = DC = AE$, из чего получаем, что треугольник ALE тоже является равнобедренным. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, тогда $\angle ALE = \angle AEL = 90^\circ - \alpha$. Кроме того,



$$BL = BA - LA = BC - DC = BD,$$

откуда $LD \parallel AC$. В силу данной параллельности $\angle LDA = \angle DAE = \alpha = \angle LAD$, и треугольник ALD равнобедренный.

Таким образом, в четырехугольнике $ALDE$ стороны LD и AE равны и параллельны, следовательно, $ALDE$ — параллелограмм, но $AL = AE$, следовательно, $ALDE$ — ромб. По свойству ромба EL является биссектрисой угла AED, т. е. точки L и F совпадают. Как мы уже знаем, $\angle ALE = \angle DLE$, чтд.

46. Ответ: да, такое возможно.

Докажем по индукции, что такая ситуация возможна для любого числа строк, причем в каждой строке числа будут расположены в порядке возрастания.

База для одной строки тривиальна. Докажем индукционный переход. Пусть уже выписано n строк и в самой верхней стоят числа a, $a + 1$, $\ldots$, $a + 99$. Пусть $N > a + 99$. Тогда при $i = 0, 1, \ldots, 99$ число $N! + a + i$ делится на $a + i$. Значит, если мы поверх первой строки запишем числа $N! + a$, $N! + a + 1$, $\ldots$, $N! + a + 99$, получится пример для $n + 1$ строки. Индукционный переход доказан.

Конечно, вместо $N!$ можно прибавлять произведение $a(a + 1)(a + 2) \ldots (a + 99)$.

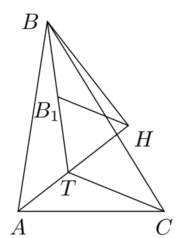
47. Ответ: $n = 157$. Такое значение n получается, если чемоданы одинаковой ширины стоят вплотную друг к другу в порядке 13, 12, 11, $\ldots$, 2, 1 (слева направо), причем между 13-м чемоданом и краем полки слева есть небольшой зазор.

Динамика движения чемоданов (для случая 10 чемоданов) подробно описана в решении задачи 32. В нашем случае через каждые 13 операций группа чемоданов, стоящих подряд у левого края полки, будет увеличиваться на один чемодан.

Для удобства разобьем все операции на группы по 13 последовательных операций и каждую такую группу операций будем называть этапом. В приведенном примере после выполнения $156 = 12 \cdot 13$ операций (12 этапов) чемоданы с номерами от 13 до 2 будут стоять у левого края полки вплотную, а чемодан номер 1 будет отделен зазором от чемодана 2. После 157-й операции первый чемодан будет придвинут ко второму и движение чемоданов закончится.

В общем случае после выполнения 156 ходов «сплошная» группа чемоданов, стоящих вплотную к левому краю полки, будет состоять не менее чем из 12 чемоданов. Если в этой группе 13 чемоданов (т. е. все), то движение чемоданов уже закончилось. Если же в группе 12 чемоданов, то последний чемодан, отделенный от этой группы зазором, должен иметь номер 1. Действительно, если бы это был не первый чемодан, то первый чемодан уже придвинут к «сплошной» группе во время выполнения операций какого-то этапа, и осталось заметить, что в течение того же самого этапа к сплошной группе должен был быть придвинут еще один чемодан. Но тогда после 12-го этапа все чемоданы уже окажутся в сплошной группе.

48. Решение 1 (геометрическое). Пусть B_1 — середина отрезка BT. На продолжении отрезка AT за точку* T отметим такую точку H, что $TH = TB_1$. Тогда



$$\angle THB_1 = \angle TB_1H = \frac{\angle ATB_1}{2} = 60^\circ.$$

Следовательно, $HB_1 = TB_1 = B_1B$. Тогда

$$\angle BHB_1 = \angle B_1BH = \frac{\angle TB_1H}{2} = 30^\circ.$$

Стало быть, $\angle BHA = \angle BHB_1 + \angle B_1HT = 90^\circ$. Поскольку перпендикуляр короче наклонной,

$$AB > AH = AT + TH = AT + B_1T = AT + \frac{BT}{2}.$$

Аналогично установим неравенства

$$AC > AT + \frac{CT}{2} \quad \text{и} \quad BC > BT + \frac{CT}{2}.$$

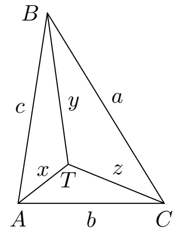
---

* Эванджелиста Торричелли (1608–1647) — итальянский математик и физик. Точка T из этой задачи называется его именем

Осталось сложить полученные неравенства и умножить на 2:

$$2AB+2BC+2CA>$$
$$>2\Big(AT+\frac{BT}{2}\Big)+2\Big(BT+\frac{CT}{2}\Big)+2\Big(AT+\frac{CT}{2}\Big)=$$
$$=4AT+3BT+2CT.$$

Решение 2 (теорема косинусов). Положим для краткости $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AT=x$, $BT=y$ и $CT=z$. По теореме косинусов



$$a^2=y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=y^2+z^2+yz=$$
$$=\Big(y+\frac{z}{2}\Big)^2+\frac{3z^2}{4}\geqslant\Big(y+\frac{z}{2}\Big)^2.$$

Следовательно, $a\geqslant y+\frac{z}{2}$. Аналогично установим неравенства

$$b\geqslant x+\frac{z}{2}\quad\text{и}\quad c\geqslant x+\frac{y}{2}.$$

Осталось сложить полученные неравенства и умножить на 2:

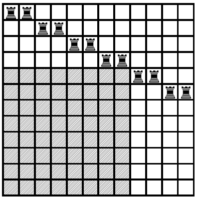
$$2a+2b+2c\geqslant 2\Big(y+\frac{z}{2}\Big)+2\Big(x+\frac{z}{2}\Big)+2\Big(x+\frac{y}{2}\Big)=4x+3y+2z.$$

49. Пусть

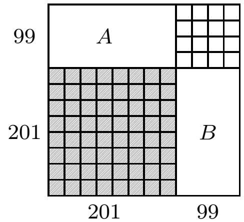
$$f(x)=\alpha x^2+\beta_1x+\gamma_1,\;\; g(x)=\alpha x^2+\beta_2x+\gamma_2,\;\; h(x)=\alpha x^2+\beta_3x+\gamma_3.$$

Заметим, что если $\beta_2x_0+\gamma_2=\beta_3x_0+\gamma_3$, то $g(x_0)=h(x_0)$. Поэтому при $x_0=\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\beta_2-\beta_3}$ равенство $g(x_0)=h(x_0)$ будет выполнено. Но тогда $g(x_0)\neq 0$, поскольку по условию трехчлен $g(x)$ не имел корней. Следовательно, при $c=-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ имеем $f(x_0)+cg(x_0)=0$. Но тогда и $f(x_0)+ch(x_0)=0$.

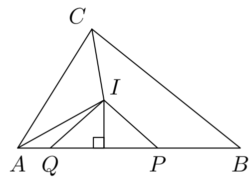
50. Ответ: при $k=201$.



Пример. Поставим ладей в клетки с координатами $(i,2i-1)$ и $(i,2i)$ при $1\leqslant i\leqslant 150$. Расстановка для доски 12×12 показана на рисунке. Тогда в квадрате 200×200, примыкающем к левому нижнему углу, не найдется ни одной ладьи.



О ц е н к а. Предположим, что для некоторой расстановки ладей нашелся квадрат 201×201, в котором нет ни одной ладьи. Переставим строки и столбцы доски таким образом, чтобы это был левый нижний квадрат. Рассмотрим часть A сверху от этого квадрата. В этой части 99 строк, в каждой из которых не более двух ладей. Значит, всего в части A не более 198 ладей, а поскольку эта часть занимает 201 столбец, существует столбец, пересекающий часть A, в котором не стоит ни одной ладьи. Аналогично существует строка, пересекающая часть B, в которой нет ни одной ладьи. Тогда клетка на пересечении этого столбца и этой строки не бьется ладьями, что противоречит условию.



51. Отметим на биссектрисе угла C точку I — точку пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $AC = AP$ и $\angle CAI = \angle PAI$, поэтому треугольники ACI и API равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $IP = IC$, и $\angle API = \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$. Аналогично доказывается, что $IQ = IC$. Стало быть, $IP = IQ$, и точка I лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ. Но тогда она совпадает с точкой R, поскольку является точкой пересечения тех же прямых. Следовательно,

$$\angle PRQ = \angle PIQ = 180^\circ - 2\angle API = 180^\circ - \angle ACB.$$

52. Р е ш е н и е 1 (полная система вычетов). Пусть p — меньшее из простых чисел. Тогда $p < q < 2p$. Рассмотрим целые числа от $-\frac{p-1}{2}$ до $\frac{p-1}{2}$. Это p последовательных чисел, поэтому все они дают различные остатки при делении на p. Умножим теперь эти p чисел на q. Покажем, что числа в новом наборе также будут давать различные остатки при делении на p. Если qa и qb (при $a < b$) дают одинаковые остатки при делении на p, то натуральное число $qb - qa = q(b - a)$ делится на p, а значит, и $b - a$ делится на p, что невозможно, ибо $b - a$ положительно и меньше p. Итак, числа в новом наборе дают различные остатки при делении на p. Но поскольку их всего p, среди них найдется число, дающее остаток $p-1$. Следовательно, мы доказали, что существует такое число k, что $qk+1$ делится на p и $|k| \leqslant \frac{p-1}{2}$. Тогда

$$|qk+1| \leqslant q|k|+1 < 2p \cdot \frac{p-1}{2} + 1 = p(p-1)+1 < p^2.$$

Поэтому число $qk+1$ не может иметь простых делителей, бóльших p, ибо произведение такого делителя с p уже больше, чем p^2, и тем более больше, чем $qk+1$.

Если $k \geqslant 0$, то нам подойдут числа qk и $qk+1$. В противном случае нам подойдут числа $-qk$ и $-qk-1$.

Решение 2 (китайская теорема об остатках). Пусть p — меньшее из простых чисел. По китайской теореме об остатках найдется число a, которое делится на q и дает при делении на p остаток 1. Заметим, что любое число вида $a-kpq$ при целом k также удовлетворяет этому условию. Подберем k так, что $0 < a-kpq < pq$. Тогда число $b = a-kpq$ делится на q и результат деления меньше p, поэтому наибольший простой делитель числа b равен p. Кроме того, $b-1$ делится на p, поэтому если $b-1 \leqslant p^2$, то наибольший простой делитель числа $b-1$ равен p и мы нашли требуемые числа. Пусть $b-1 > p^2$. Тогда рассмотрим натуральное число $c = pq-b$. Оно делится на q, и результат деления меньше p, поэтому наибольший простой делитель числа c равен q. Кроме того, $c+1 = pq-(b-1) < pq-p^2$, число $c+1$ делится на p, и частное не превосходит $q-p < p$. Поэтому наибольший простой делитель числа $c+1$ равен p и мы нашли требуемые числа.

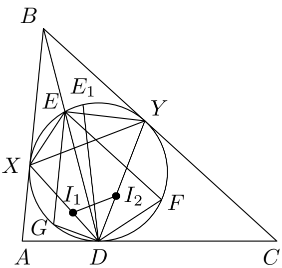
Решение 3 (линейное представление наибольшего общего делителя). Пусть p — меньшее из простых чисел. Поскольку p и q взаимно просты, существуют такие числа a и b, что $ap+bq = 1$. Но тогда $(a-kq)p+(b+kp)q = 1$ при любом целом k. Подберем k так, что $0 < a-kq < q$. Тогда число $(a-kq)p-1$ делится на q и меньше pq. Поэтому у него нет простых делителей, бóльших q. Если $a-kq$ не имеет простых делителей, бóльших p, то мы нашли требуемую пару чисел: $(a-kq)p-1$ и $(a-kq)p$. В противном случае заметим, что $0 < kq+q-a < q$ и $(kq+q-a)p+(-kp-p-b)q = -1$. Тогда число $(kq+q-a)p+1$ делится на q и не превосходит pq. Поэтому у него нет простых делителей, бо́льших q. Если $kq+q-a$ не имеет простых делителей, бо́льших p, то мы нашли требуемую пару чисел: $(kq+q-a)p$ и $(kq+q-a)p+1$. Если же требуемая пара чисел еще не найдена, то числа $a-kq$ и $kq+q-a$ имеют простые делители, большие p, а значит, $q=(a-kq)+(kq+q-a)>2p>q$. Противоречие.

53. Ответ: Выигрывает Костя.

Назовем *полоской* идущие подряд белые клетки, окруженные черными клетками или краями полоски, а *доминошкой* назовем полоску из двух клеток. Опишем стратегию Кости. Он каждым своим ходом (пока такое возможно) будет закрашивать две соседние белые клетки так, чтобы образовалась одна доминошка. Покажем, что после каждого ответного хода Сергея количество доминошек будет не меньше, чем количество полосок нечетной длины. Действительно, после хода Кости количество полосок нечетной длины не меняется, поскольку он от какой-то полоски «отрезает» четыре клетки: две клетки он закрашивает и еще создает одну доминошку. Сергей же своим ходом не может «испортить» ни одной доминошки, а количество полосок нечетной длины он может увеличить не более чем на 1. Действительно, он может лишь сделать две новые полоски из одной старой, причем если они обе имеют нечетную длину, то старая полоска также имела нечетную длину, ведь Сергей закрасил на ней одну или три клетки.

Рассмотрим теперь момент, начиная с которого Костя не может действовать по изначальному плану. Из любой полоски длины 6 и более Костя может сделать новую доминошку, также он может сделать доминошку и из полоски длины 4. Тогда в рассматриваемый момент помимо доминошек остались лишь полоски длины 3 и 5 (полоски длины 1 запрещены по условию), причем этих полосок не больше, чем доминошек. Дальнейшая стратегия Кости такова: он закрашивает одну из доминошек. Сергей ответным ходом должен либо закрасить одну полоску длины 3, либо из полоски длины 5 сделать одну или две доминошки (закрасив в ней одну или три клетки). После такой пары ходов количество доминошек по-прежнему будет не меньше, чем количество полосок нечетной длины. Поэтому игра может закончиться, лишь когда не осталось полосок нечетной длины. Это может случиться лишь после хода Сергея. Если при этом остались доминошки, то Костя еще сможет сделать ход, а Сергей уже нет. Если же доминошек также не осталось, то Костя выиграл, поскольку все клетки закрашены.

54. Пусть X и Y — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и BC соответственно, а точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников EGD и EFD. Несложно показать, что касательная, параллельная хорде, проходит через середину дуги, которую стягивает хорда. Из этого следует, что точка X лежит на прямой DI_1, а точка Y — на прямой DI_2. По свойству касательной $\angle BXE = \angle XDB$, поэтому треугольники BXE и BDX подобны и имеет место равенство $EX : XD = BX : BD$. По аналогичным соображениям $BY : BD = EY : YD$. Но $BX = BY$, а значит,



$$EX : XD = EY : YD. \qquad (*)$$

Далее заметим, что по лемме Мансиона $XE = XI_1$ и $EY = YI_2$. Подставляя эти равенства в формулу $(*)$, получаем, что

$$XI_1 : XD = YI_2 : YD,$$

откуда $XY \parallel I_1I_2$.

Лемма Мансиона. Середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей вершину C, равноудалена от вершин A и B и центра I вписанной окружности.

Теперь мы можем доказать, что биссектриса угла GDF делит пополам отрезок XY, и это будет равносильно утверждению задачи.

Пусть еще $\angle GDX = \angle XDE = \alpha$, $\angle EDY = \angle YDF = \beta$, и биссектриса угла GDF вторично пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точке E_1. Тогда

$$\angle GDE_1 = \angle E_1DF = \alpha + \beta \qquad \text{и} \qquad \angle YDE_1 = \alpha.$$

В силу последнего равенства дуги, а значит, и хорды EX и E_1Y равны и $E_1X = EY$. Подставляя эти равенства в формулу (∗), получаем $E_1Y : XD = E_1X : YD$, т. е. $E_1Y \cdot YD = E_1X \cdot XD$. Домножая последнее равенство на $\sin\angle E_1YD = \sin\angle E_1XD$, получаем равенство площадей $S_{E_1YD} = S_{E_1XD}$, что, очевидно, возможно только в том случае, когда DE_1 делит XY пополам.

55. Ответ: для всех четных $N \geqslant 4$.

Решение 1 (делимость). Пусть блок $k+1, k+2, k+3, \ldots, k+N$ оказался хорошим. Сумма всех чисел этого блока равна $kN + \frac{N(N+1)}{2}$. Предположим, что произведение $(k+a)(k+b)$ (где $1 \leqslant a \neq b \leqslant N$) делится на сумму остальных чисел блока, т. е. на $s = k(N-2) + \frac{N(N+1)}{2} - a - b$. Рассмотрим наибольший общий делитель чисел $k+a$ и s:

$$\text{НОД}(k+a, s) = \text{НОД}\big(k+a, s-a-b-(N-2)(k+a)\big) = \\ = \text{НОД}\Big(k+a, \frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\Big).$$

Если $(N-1)a + b \neq \frac{N(N+1)}{2}$, то

$$\text{НОД}(k+a, s) = \text{НОД}\Big(k+a, \frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\Big) \leqslant \\ \leqslant \left|\frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{N(N+1)}{2} + (N-1)a + b \leqslant 2N^2.$$

Аналогично если $(N-1)b + a \neq \frac{N(N+1)}{2}$, то $\text{НОД}(k+b, s) \leqslant 2N^2$. Но тогда

$$kN + \frac{N(N+1)}{2} - a - b = s = \text{НОД}\big((k+a)(k+b), s\big) \leqslant \\ \leqslant (2N^2)^2 = 4N^4,$$

что невозможно при больших k, например при $k > 4N^4$. Следовательно, при больших k либо $(N-1)a + b = \frac{N(N+1)}{2}$, либо $(N-1)b + a = \frac{N(N+1)}{2}$. Рассмотрим первый случай. Поскольку $2(N-1)a + 2b = N(N+1)$, число $2(b-a)$ делится на N. По условию $0 < |b-a| < N$, и значит, $b-a$ не делится на N. Тогда $2|b-a| = N$ и число N четно.

Пусть $N = 2n$ и $a < b$. Тогда $1 \leqslant a < b \leqslant 2n$ и $b = a + n$. Возьмем $a = n$. Тогда $(k+n)(k+2n)$ должно делиться на

$$s = k(2n-2) + n(2n+1) - a - b = (k+n)(2n-2),$$

т. е. $k+2n$ делится на $2n-2$. Это бывает, когда $k = 2n+(2n-2)m$. Стало быть, все четные N подходят.

Решение 2. Пусть $N = 2n$. Рассмотрим блок, состоящий из чисел $k-n$, $k-n+1$, $\ldots$, $k+n-1$. Их сумма равна $2nk-n$, а сумма всех этих чисел, кроме k и $k-n$, равна $2(n-1)k$. Тогда число $k(k-n)$ делится на $2(n-1)k$, если $k-n$ делится на $2(n-1)$. Это выполнено для $k = 2m(n-1)+n$ для любого натурального m. Таким образом, для четного N мы построили бесконечно много хороших блоков.

Покажем теперь, что для $N = 2n+1$ существует лишь конечное число хороших блоков из N чисел. Пусть блок $k-n$, $k-n+1$, $k-n+2$, $\ldots$, $k+n$ оказался хорошим. Мы убедимся, что при достаточно больших k это невозможно. Сумма всех чисел этого блока равна $(2n+1)k$. Предположим, что произведение чисел $k+r_1$ и $k+r_2$ ($|r_1|, |r_2| \leqslant n$ и $r_1 \neq r_2$) делится на сумму оставшихся чисел блока. Тогда число

$$A = \frac{(k+r_1)(k+r_2)}{(2n+1)k-(k+r_1)-(k+r_2)} = \frac{k^2+(r_1+r_2)k+r_1r_2}{(2n-1)k-(r_1+r_2)} = \\ = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{k+r_1+r_2+\frac{r_1r_2}{k}}{1-\frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}}$$

является натуральным. Значит, число

$$B = (2n-1)A = \frac{k+r_1+r_2+\frac{r_1r_2}{k}}{1-\frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}}$$

тоже натуральное. Разберем несколько случаев.

1. Если $r_1+r_2 = 0$ (при этом $r_1r_2 \neq 0$, так как $r_1 \neq r_2$), то уже при $k > n^2$ число $B = k + \frac{r_1r_2}{k}$ нецелое.

2. Пусть $r_1+r_2 = 2n-1$. При наших ограничениях на r_1, r_2 это возможно лишь при $\{r_1, r_2\} = \{n-1, n\}$, тогда $r_1r_2 = n^2-n$ и

$$B = \frac{k^2+(2n-1)k+n^2-n}{k-1}.$$

По модулю $k-1$ числитель дроби равен $1+(2n-1)+n^2-n = n^2+n$. При больших k это ненулевой остаток по модулю $k-1$, и значит, число B нецелое.

3. Пусть $r_1+r_2 = -(2n-1)$. Тогда аналогично $\{r_1, r_2\} = \{-n+1, -n\}$, $r_1r_2 = n^2-n$ и

$$B = \frac{k^2-(2n-1)k+n^2-n}{k+1}.$$

По модулю $k+1$ числитель дроби равен $1+(2n-1)+n^2-n = n^2+n$. При больших k это ненулевой остаток по модулю $k+1$, и значит, число B опять нецелое.

4. Пусть $r_1+r_2 \neq 0$, $r_1+r_2 \neq \pm(2n-1)$. В следующих рассуждениях мы воспользуемся тем, что при больших k знаменатель дроби, задающей число B, очень близок к 1. Заметим, что при $|x| < \frac{1}{2}$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x} \leqslant 2x^2.$$

Взяв $x = \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}$, получаем

$$0 \leqslant \frac{1}{1-\frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}} - 1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} \leqslant \frac{2(r_1+r_2)^2}{(2n-1)^2k^2} \leqslant \frac{2}{k^2}.$$

Следовательно, для некоторого $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$

$$\frac{1}{1-\frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}} = 1 + \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k^2}.$$

Подставим это равенство в выражение для B:

$$B = \left(k + r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{k}\right)\left(1 + \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k^2}\right) =$$
$$= k + r_1 + r_2 + \frac{r_1+r_2}{2n-1} + \frac{r_1r_2}{k} + \frac{(r_1+r_2)^2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k} +$$
$$+ \frac{2\varepsilon(r_1+r_2)}{k^2} + \frac{(r_1+r_2)r_1r_2}{(2n-1)k^2} + \frac{2\varepsilon(r_1+r_2)r_1r_2}{k^3}.$$

Рассмотрим слагаемые начиная с пятого. Все их числители ограничены по модулю, например, числом $10n^3$, а знаменатели не меньше чем k. Поэтому при $k > 60n^5$ их сумма меньше $\frac{1}{n^2}$. Это означает, что число $k + r_1 + r_2 + \frac{r_1+r_2}{2n-1}$ отличается от целого числа B менее чем на $\frac{1}{n^2}$. Но это невозможно, поскольку оно нецелое со знаменателем, не превосходящим $2n - 1$ и, значит, отличается от целого числа не менее чем на $\frac{1}{2n-1}$.

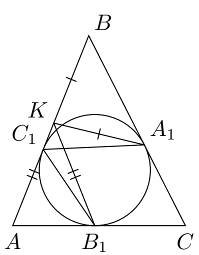
Докажите, что при $N = 2n$ и больших k лишь произведение чисел $k+1$ и $k+n+1$ или произведение чисел $k+n$ и $k + 2n$ может делиться на сумму оставшихся.

56. Ответ: $n = 1$ или $n = 2$.

Пусть Сашино число имеет делители $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_k = n$. Заметим, что число $n + 1$ взаимно просто со всеми этими делителями, поэтому число $(d_0 + 1)(d_2 + 1) \ldots (d_{k-1} + 1)$ должно делиться на $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$. При этом $d_1 \geqslant d_0+1$, $d_2 \geqslant d_1+1$, $\ldots$, $d_k \geqslant d_{k-1} + 1$. Перемножив эти неравенства, получим, что делимое не превосходит своего делителя, а это возможно только в том случае, когда все неравенства обращаются в равенства. Но тогда $n = d_k = d_{k-1} + 1$, т. е. n делится на $d_{k-1} = n - 1$. Значит, либо $n = 2$, либо числа d_{k-1} не существует и $n = 1$.

57. Докажем, что нам подойдет последовательность, заданная формулой $y_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Монотонность этой последовательности очевидна. Далее, $y_k \geqslant x_k$, так как x_k содержится в множестве, по которому берется максимум, и при этом $y_k = x_j$ для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, значит, по условию, $y_k \leqslant 2x_k$.

58. Обозначим через C_1 точку касания вписанной окружности со стороной AB, пусть $\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle ABC = 2\beta$. Тогда



$$\angle AB_1C_1 = \angle AC_1B_1 = 90^\circ - \alpha$$

и

$$\angle C_1A_1B = \angle A_1C_1B = 90^\circ - \beta,$$

в силу того что $B_1A = AC_1$ и $A_1B = BC_1$ как отрезки касательных. Отсюда находим, что $\angle A_1C_1B_1 = \alpha + \beta$. Также нетрудно подсчитать, что $\angle AKB_1 = 180^\circ - 4\alpha$ и $\angle BKA_1 = 180^\circ - 4\beta$. Наконец, заметим, что точка K лежит либо вне описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, либо на этой окружности, поэтому

$\angle B_1C_1A_1 \geqslant \angle B_1KA_1$. Подведем итог:

$$\alpha + \beta = \angle B_1C_1A_1 \geqslant \angle B_1KA_1 = 4\alpha + 4\beta - 180^\circ,$$

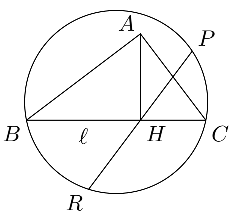
т. е. $60 \geqslant \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta \geqslant 60^\circ$.

59. Пусть θ — одна из допустимых раскрасок квадрата, а именно та, в которой левый верхний и правый нижний квадраты 50×50 (назовем их ЛВ, ПН) полностью черные, а два других, ЛН и ПВ, — белые. Поскольку операции обратимы, достаточно научиться из любой допустимой раскраски получать раскраску θ. А для этого, в свою очередь, достаточно научиться в любой допустимой раскраске $\tau \neq \theta$ увеличивать число квадратов, раскрашенных так же, как в θ.

Предположим, что это невозможно. Если в раскраске τ все клетки в ЛВ и ПН черные, мы могли бы перекрасить все прочие черные клетки в белый цвет и получить раскраску θ. Значит, τ содержит белые клетки в ЛВ, ни одну из которых нельзя перекрасить. Тогда каждая из этих белых клеток лежит либо в предельно черной строке (т. е. в строке, содержащей 60 черных клеток), либо в предельно черном столбце.

Пусть в ЛВ имеется k предельно черных строк, содержащих a белых клеток. Всего в этих строках $60k$ черных клеток, из них $50k-a$ клеток находятся в ЛВ, значит, остальные $10k+a$ черных клеток расположены в ПВ. В силу предположения ни одну из них тоже нельзя перекрасить — это может быть лишь потому, что каждая стоит в столбце, содержащем 50 черных и 50 белых клеток. Так как в этих столбцах есть не менее $10k + a$ черных клеток в ПВ, они содержат хотя бы $10k + a$ белых клеток в ПН. Получается, что в ПН больше белых клеток, чем в ЛВ.

Аналогично доказывается, что в ЛВ больше белых клеток, чем в ПН. Противоречие.



60. Опустим из точки A перпендикуляр на прямую ℓ. Пусть H — основание этого перпендикуляра. Зафиксируем какой-нибудь треугольник ABC и обозначим через R вторую точку пересечения прямой PH с описанной окружностью треугольника PBC. Тогда степень точки H

относительно этой окружности равна $BH \cdot HC = PH \cdot HR$. Кроме того, по свойству высоты в прямоугольном треугольнике $AH^2 = BH \cdot HC$. Следовательно, длина отрезка HR не зависит от выбора треугольника. Заметим к тому же, что точка H всегда лежит на отрезке BC, т. е. внутри описанной окружности PBC, а значит, точки R и P всегда будут лежать в разных полуплоскостях относительно прямой ℓ. Таким образом, описанная окружность любого треугольника PBC должна пересекать прямую PH в точке, удаленной от H на AH^2/PH и лежащей на заданном луче этой прямой. Очевидно, что такая точка определяется однозначно, поэтому все описанные окружности проходят через нее.

61. Решение 1 (локатор). Пусть O — центр окружности. Обозначим вершины ломаной через A_1, A_2, ..., A_{100} в порядке обхода по часовой стрелке. Пусть сумма углов этой ломаной равна $k \cdot 720°$. Поскольку все углы ломаной тупые, все треугольники A_iOA_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, 100$; $A_{101} = A_1$) ориентированы по часовой стрелке. Заметим, что

$$\angle A_iOA_{i+1} = 180° - \angle OA_iA_{i+1} - \angle OA_{i+1}A_i.$$

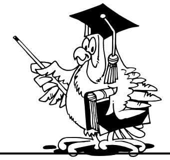
Сложив все такие равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{100} \angle A_iOA_{i+1} = 100 \cdot 180° - k \cdot 720° = 720°(25 - k).$$

Следовательно, любой луч, выходящий из центра окружности, пересекает чётное число звеньев ломаной, обозначим это число через $2t$.

Возьмем луч OA_1 и начнем поворачивать его, следя в каждый момент за тем, в каком порядке звенья ломаной пересекают этот луч, если обходить ломаную по часовой стрелке, начиная с вершины A_1. Расставим в точках пересечения луча с ломаной числа от 1 до $2t$ — в первой точке пересечения поставим 1, во второй — 2 и т. д. Если прочесть эти числа, двигаясь от центра окружности по лучу, мы получим некоторую перестановку чисел от 1 до $2t$. В каждый момент, когда при вращении луч проходит через точку пересечения звеньев ломаной (можно считать, что ни в какой момент луч не проходит сразу через две точки пересечения), какие-то два числа на луче меняются местами, и четность перестановки меняется. Когда луч снова подойдет к точке A_1, сделав поворот почти на $360°$, расположение чисел на луче будет отличаться от исходного расположения чисел лишь циклическим сдвигом нумерации (звено, выходившее из A_1, в начале вращения пересекало луч первым, а в конце вращения — последним, порядок остальных пересечений не изменился). Это означает, что четность количества инверсий в этой перестановке изменилось, поскольку $2t$ — четное число. Значит, четность менялась нечётное число раз, а тогда и число самопересечений было нечетным.

Решение 2 (комбинаторно-геометрический набросок). Определим для ориентированной замкнутой ломаной на плоскости *число поворота* следующим образом: пустим по ней лягушку, в каждой вершине она повернет на некоторый угол от $-180°$ до $180°$ (положительным считаем поворот против часовой стрелки). Сумма углов поворота кратна $360°$ (поскольку по модулю 360 каждый угол поворота есть разность углов направлений звеньев в соответствующей вершине, а такая сумма разностей телескопически сокращается). Частное назовем *числом поворота*, это целое число.



Сумма направленных внешних углов многоугольника равна $360°$.

Так, у несамопересекающейся ломаной число поворота равно ± 1. Это интуитивно понятное утверждение можно доказать индукцией, подразбивая ломаную и следя за изменением чисел поворота.

Пусть на плоскости нарисовано n замкнутых ломаных общего положения: никакие три прямые, содержащие их звенья, не пересекаются в одной точке, никакие две вершины не совпадают, и никакие три не лежат на одной прямой. Обозначим через $r_1, \ldots, r_n$ числа поворотов этих ломаных, а через x — общее число точек пересечения звеньев этих ломаных, включая самопересечения.

Утверждение. Число $y = r_1 + \ldots + r_n + n + x$ четно.

Из этого утверждения при $n = 1$ получаем решение задачи: в самом деле, если все углы вписанной ломаной тупые, то она всегда поворачивает в одном направлении, а тогда сумма углов поворота равна $100 \cdot 180^\circ$ минус сумма углов «звездочки», и значит, кратна 720°. Поэтому число поворота четно, а x нечетно.

Доказательство утверждения может быть проведено индукцией по числу точек пересечения. Если звенья AB и CD пересекаются в точке P, отметим на соответствующих отрезках PA, PB, PC, PD точки A_1, B_1, C_1, D_1 достаточно близко к P и заменим отрезки A_1B_1, C_1D_1 на A_1C_1, B_1D_1. Величина x уменьшится на 1, число ломаных изменится на 1, а сумма поворотов не изменится. Таким образом, четность величины y не изменится. Так мы сведем утверждение к случаю, когда ломаные не имеют точек пересечения, т. е. $x = 0$, $r_i = \pm 1$. □

62. Ответ: все возможные пары $(P(x), a)$ выглядят следующим образом:

1) $P(x) \equiv 0$ и a любое;

2) $P(x) = c(px + q)^k$, где k, p — натуральные числа, c, q — целые, $c \neq 0$ и p и q взаимно просты; для этого случая число a должно быть больше 1 и иметь вид $a = r^k$, где $r \equiv 1 \pmod p$ при нечетных k и $r \equiv \pm 1 \pmod p$ при четных k.

Мы приводим здесь решение задач 62 и 69. Нам понадобится следующая стандартная лемма.

Лемма. Предположим, что A, B — вещественные числа, причем $A \neq \pm 1$, и многочлен $P(x)$ степени $k > 0$ удовлетворяет равенству $P(Ax + B) = A^k P(x)$. Тогда $P(x) = \alpha(x - x_0)^k$, где $x_0 = -\frac{B}{A-1}$.

Доказательство. Положим $Q(x) = P(x + x_0)$. Тогда

$$Q(Ax) = P(Ax+x_0) = P(A(x+x_0)+B) = A^k P(x+x_0) = A^k Q(x).$$

Приравнивая в полученном уравнении $Q(Ax) = A^k Q(x)$ коэффициенты при степенях x, видим, что все они, кроме коэффициента при x^k, равны 0. □

Ясно, что многочлен $P(x) \equiv 0$ удовлетворяет условию при любом $a > 1$, а многочлен, равный ненулевой константе, не удовлетворяет условию ни при каком a. Пусть теперь степень многочлена P равна $k > 0$ и

$$P(x) = \alpha x^k + \beta x^{k-1} + \ldots$$

Сделаем несколько наблюдений, не пользуясь соображениями целочисленности из условия задачи. Будем считать, что $\alpha > 0$ (для $\alpha < 0$ рассуждения аналогичны). Рассмотрим равенство

$$aP(x) = P(z) \tag{$*$}$$

как уравнение относительно $z = z(x)$. Многочлен $P(x)$ монотонен и непрерывен на некотором луче вида $[M, +\infty)$. Поэтому при больших положительных x это уравнение всегда имеет решение $z(x) > M$, (непрерывно) зависящее от x. Очевидно, что $z(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. При четном k для больших x существует также решение $z(x) < 0$; в этом случае $z(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим случай $z(x) > M$. Пусть $a = \rho^k$ при некотором вещественном $\rho > 1$. При фиксированном x и $z = z(x)$, найденном из уравнения $(*)$, рассмотрим переменный вещественный параметр θ, для которого

$$\begin{aligned} P(\rho x + \theta) - P(z) &= P(\rho x + \theta) - aP(x) = \\ &= (\beta\rho^{k-1} + k\alpha\rho^{k-1}\theta - \beta a)x^{k-1} + \ldots \end{aligned} \tag{$**$}$$

Положим $\theta_0 = \frac{\beta(a-\rho^{k-1})}{k\alpha\rho^{k-1}}$ (для этого значения θ коэффициент при x^{k-1} равен 0).

Мы утверждаем, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}(z(x) - \rho x) = \theta_0$.

Доказательство. Рассуждая по определению, выберем числа $\theta_- < \theta_0 < \theta_+$. Тогда при $\theta = \theta_-$ и $\theta = \theta_+$ правая часть формулы $(**)$ при достаточно больших x принимает большие по модулю значения разных знаков, в то время как при $\theta = \theta_0$ правая часть формулы $(**)$ относительно мала по сравнению с этими значениями. В силу монотонности многочлена получаем, что $z(x)$ лежит между $\rho x + \theta_-$ и $\rho x + \theta_+$. $\square$

Для больших x, для которых $z(x) < 0$, аналогично получаем, что $z(x) + \rho x$ имеет некоторый конечный предел $\widetilde{\theta}_0$.

Рассмотрим теперь большое натуральное x. Среди чисел $z(x)$, $z(x+1)$, $z(x+2)$ два имеют одинаковый знак. Если, например, $z(x)$ и $z(x+1)$ отрицательны, то

$$\rho = \big(z(x+1) + \rho(x+1)\big) - \big(z(x) + \rho x\big) + z(x) - z(x+1)$$

есть сумма целого числа $z(x) - z(x+1)$ и функции от x, стремящейся к 0 при возрастании x. Отсюда получаем, что число ρ целое. Аналогичное рассуждение верно и для других вариантов, и во всех случаях получаем, что 2ρ — целое число. Тогда целочисленные выражения $2z(x) \pm 2\rho x$, имеющие предел, должны быть постоянными при больших x. Таким образом, хотя бы одно из равенств $z(x) = \rho x + \theta_0$, $z(x) = -\rho x + \widetilde{\theta}_0$ имеет место при бесконечно многих x (отметим, что из этого следует целочисленность θ_0 или соответственно $\widetilde{\theta}_0$). Значит, либо многочлен $P(\rho x + \theta_0) - aP(x)$, либо многочлен $P(-\rho x + \widetilde{\theta}_0) - aP(x)$ имеет бесконечно много корней, следовательно, он тождественно равен 0. Применяя лемму, получаем, что $P(x) = \alpha(x - x_0)^k$, где x_0 — рациональное число.

Для решения задачи 69 теперь достаточно заметить, что все такие многочлены подходят: $\rho^k P(x) = P(x_0 + \rho(x - x_0))$, так что подойдет $a = \rho^k$, где ρ — целое число, для которого $x_0(1-\rho)$ — целое.

Для решения задачи 62 заметим, что с точностью до множителя (не влияющего на существование целого z, такого что $P(z) = aP(x)$), можно считать, что $P(x) = (px+q)^k$, где $p > 0$ и q — взаимно простые целые числа. Тогда равенство $(*)$ означает, что $pz + q = \pm a^{1/k}(px+q)$, знак минус возможен при четном k. Сразу ясно, что $a^{1/k}$ — рациональное число, т. е. a — точная k-я степень. Пусть $a = r^k$. Получаем $pz = \pm r(px+q) - q$, $z = \pm rx + (\pm r - 1)q/p$. Итак, при $q = 0$ годится любое целое $r > 1$, в противном случае при нечетных k нужно, чтобы $r - 1$ было кратно p, а при четных k — чтобы $r \pm 1$ было кратно p.

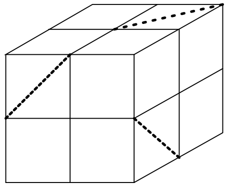
63. Рассмотрим выражение

$$(a_{3n} + a_n) + (a_{5n} + a_n) - (a_{5n} + a_{3n}) = 2a_n.$$

Каждое выражение в скобках в левой части делится на $2n$, поэтому и правая часть делится, т. е. a_n кратно n.

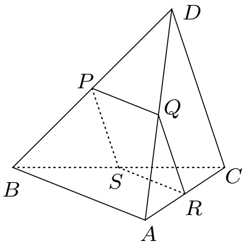
64. Ответ: 75 ладей.

Оценка. Назовем *ободком* множество клеток, находящихся в одном ряду, а также на продолжении этого ряда за одно или несколько ребер. Каждая ладья держит под боем клетки двух ободков. Всего на поверхности куба имеется 150 ободков (есть три возможных направления, по 50 ободков в каждом). На каждом ободке стоит не более одной ладьи, и любая ладья стоит на двух ободках. Поэтому ладей не может быть больше 75.



Пример. Рассмотрим три соседние грани и поделим каждую на 4 квадрата 25×25. Далее в трех квадратах, указанных на рисунке, поставим ладьи на одной из главных диагоналей.

65. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, а P, Q, R, S — середины ребер BD, AD, AC и BC соответственно. Тогда прямые RS и PQ параллельны AB как средние линии треугольников ABC и ABD, а прямые PS и QR параллельны DC как средние линии треугольников BDC и ADC. Отсюда немедленно следует, что $PQRS$ — параллелограмм. Но все его вершины лежат на сфере, поэтому он вписанный, т. е. $PQRS$ — прямоугольник. В силу параллельности сторонам прямоугольника прямые AB и CD перпендикулярны. Аналогично $BD \perp AC$ и $BC \perp AD$.



Докажем, что перпендикулярность противоположных сторон тетраэдра является достаточным условием того, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Построим плоскость, проходящую через ребро DC перпендикулярно AB. Высоты тетраэдра, опущенные из точек D и C, лежат в этой плоскости и, значит, пересекаются. Обозначим точку их пересечения через H. Высоты, опущенные из вершин A и B, также должны пересекать высоты, опущенные из вершин D и C, но, так как они не лежат в плоскости DHC, пересекать их они могут только в точке H.

66. Лемма. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n — арифметические прогрессии с натуральными разностями d_1, d_2, $\ldots$, d_n, причем любые две из них пересекаются. Тогда найдется число, принадлежащее множеству значений всех этих прогрессий.

Доказательство. Индукция по n. База для $n = 2$ прогрессий очевидна. Докажем индукционный переход от n к $n+1$.

По предположению индукции существует число, принадлежащее прогрессиям A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Сдвинув все прогрессии на это число и отбросив, если нужно, несколько первых членов каждой прогрессии, мы можем считать, что прогрессии A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$ начинаются с нуля. Пусть $d = \text{НОК}(d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$. Поскольку прогрессии A_{n+1}, A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} тоже имеют общую точку, мы можем считать, что первый член прогрессии A_{n+1} равен ad (где a — некоторое натуральное число). А поскольку прогрессии A_n и A_{n+1} тоже пересекаются, прогрессия A_{n+1} должна содержать число вида bd_n. Если $ad = bd_n$, то мы нашли общую точку всех прогрессий. В противном случае прогрессия A_{n+1} содержит все числа вида

$$ad + k(bd_n - ad) = kbd_n - (k-1)ad.$$

По китайской теореме об остатках существует число k, которое делится на $d/\text{НОД}(d, d_n)$ и имеет остаток 1 при делении на $d_n/\text{НОД}(d, d_n)$. При таком k соответствующий член прогрессии A_{n+1} делится и на d, и на d_n, т. е. принадлежит множеству значений всех прогрессий. □

Покажем, как из леммы следует утверждение задачи. Заметим, что если какие-то три точки встретились вместе только один раз, то и все остальные точки также должны были в этот момент времени с ними встретиться. Если же одни и те же три точки встретились хотя бы два раза, то они будут встречаться бесконечно много раз, причем времена их встреч образуют арифметическую прогрессию. Зафиксируем пару точек A и B и запустим отсчет времени с момента какой-нибудь их встречи. Пусть в следующий раз они встретились через t секунд, тогда далее все их встречи будут происходить в моменты времени kt, где $k \in \mathbb{N}$. Для каждой точки C моменты ее встреч с парой A, B образуют арифметическую прогрессию $t(R_C + nQ_C)$ (здесь tR_C — момент их первой совместной встречи, tQ_C — интервал между двумя последовательными встречами, $Q_C \in \mathbb{N}$). По условию точки A, B, C и D встретятся вместе, поэтому прогрессии $R_C + nQ_C$ и $R_D + nQ_D$ пересекаются для любой пары точек C и D. Тогда согласно лемме у всех таких прогрессий есть общая точка P. Значит, в момент времени tP все точки встретятся вместе.

67. Решение этой задачи написано в первом абзаце решения задачи 54. Следует лишь добавить очевидное соображение, что биссектриса угла B перпендикулярна отрезку XY.

68. Ответ: при $k = 25$.

Ясно, что во время путешествий никакие два богатых туриста (или два бедных) не могли оказаться в одном городе, так как после такой встречи они всегда путешествовали бы совместно. С другой стороны, условие задачи не запрещает находиться в одном городе одновременно бедному и богатому туристу, важно лишь, чтобы в начальный и в конечный момент в каждом городе было по одному туристу.

Допустим, что среди туристов имеется 25 (или более) «богачей». Нарисуем граф: вершины — это города, из каждого города проведем самый дорогой выходящий путь. Тогда этот граф представляет собой лес, в каждом дереве которого все ребра направлены к корню, за исключением единственного ребра, выходящего из корня, — это ребро в дереве как бы двустороннее. Возьмем богача, который расположен ближе всего к корню своего дерева. Этот богач будет в течение 25 ходов самым близким к корню. Значит, он проедет по городам, в которых еще не было других богачей. При этом в течение этих 25 ходов никакие два богача не могли оказаться в одном городе и никто из них ни разу не посетил город, где уже был. Такое может быть, только если граф — это путь из 50 вершин, богачи занимают первые 25 вершин этого пути (т. е. половину) и гуськом движутся по этому пути в сторону второй половины. Отсюда следует, что богачей не может быть больше 25, а также что количество переездов тоже не превосходит 25.

Тогда бедных туристов тоже 25 и они двигаются по аналогичному «бедному» пути, причем в начальный момент они занимают всю вторую половину «богатого» пути. Эти пути не имеют общих звеньев, и при этом движение бедняков таково, что с каждым ходом они должны освобождать от своего присутствия очередную вершину второй половины богатого пути, смещаясь гуськом в первую половину. Тогда движение туристов может происходить, например, следующим образом.

Обозначим города A_1, A_2, …, A_{50}. Допустим, что путь

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots \to A_{49} \to A_{50}$$

составлен из самых дорогих авиалиний, для определенности пусть цена перелета $A_i \to A_{i+1}$ равна $10^6 - i$ рублей. А «бедный путь» пусть сначала проходит по городам с большими четными номерами, потом — по городам с большими нечетными, а далее — с малыми, сначала с четными, потом с нечетными:

$$A_{26} \to A_{28} \to \cdots \to A_{50} \to A_{27} \to A_{29} \to \cdots \to A_{49} \to$$
$$\to A_2 \to A_4 \to \cdots \to A_{24} \to A_1 \to A_3 \to \cdots \to A_{25}.$$

Цены этих авиалинии пусть убывают от 49 до 1 рубля при движении вдоль этого пути. Цены остальных авиалиний назначим произвольно в диапазоне от 100 до 100 000 рублей.

69. Ответ: $P(x) = \alpha(x - x_0)^k$, где x_0 — рациональное число, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$; либо $P(x) \equiv 0$. См. решение задачи 62.

70. Заметим, что каждый делитель натурального числа либо равен этому числу, либо не превосходит его половины. Тогда если сумма делителей чисел k и $k - 1$ больше k, то один из этих делителей совпадает с самим числом. Разберем два случая. Если взяли делитель числа k, равный k, и делитель d числа $k-1$, то $d > 1$ и число $a - 1 = k - 1 + d$ делится на d и больше него, поэтому $a - 1$ — составное число.

Если взяли делитель числа $k-1$, равный $k-1$, и делитель d числа k, то $d > 1$ и число $a + 1 = k + d$ делится на d и больше него, поэтому $a + 1$ — составное число.

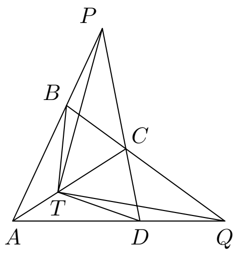
Дано натуральное число $k > 1$. Сумма какого-то делителя числа k и какого-то делителя числа $k - 1$ равна числу $a \geqslant \frac{5k}{6}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a - 1$ или $a + 1$ составное. Верно ли утверждение задачи, если $a \geqslant \frac{5k}{6} - 1$?

71. Лемма. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы A и A_1, $BC/B_1C_1 = k$ и высоты, опущенные из вершин A и A_1, относятся с коэффициентом k. Тогда треугольники подобны.

Доказательство. Сделаем гомотетию с коэффициентом k и сдвинем образ треугольника $A_1B_1C_1$ после этой гомотетии так, чтобы образ стороны B_1C_1 наложился на ставшую равной ей сторону BC и треугольники оказались в одной полуплоскости. Тогда их высоты также будут равны, а третьи вершины либо совпадут (и тогда треугольники были подобны), либо окажутся на одной окружности с вершинами B и C. Но тогда вершины A, B, C и образ вершины A_1 образуют равнобедренную трапецию и треугольники тоже были подобны. □

Перейдем к решению задачи.

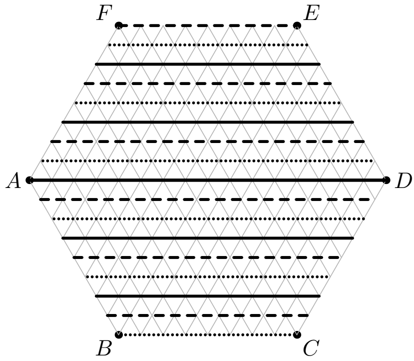
Пусть $QD = kBP$. Заметим, что тогда отношение расстояний от точки T до прямых AQ и AP равно k. Но тогда и отношение расстояний от C до прямых AQ и AP равно k, а значит, для треугольников CPB и CQD имеем $QD/BP = k$, и высоты, опущенные к этим сторонам, тоже относятся с коэффициентом k. Тогда в силу леммы треугольники подобны. Значит, либо $\angle CQD = \angle CPB$, либо $\angle CQD = \angle CBP$. Последний случай невозможен, так как внешний угол треугольника ABQ больше внутреннего. Следовательно, $CQ = kCP$ и $\angle CPT = \angle CQT$ (как разности равных углов), поэтому треугольники CPT и CQT соответственно подобны, а так как CT — их общая сторона, они равны и $k = 1$. Но тогда $BPQD$ — равнобедренная трапеция, чтд.



72. Ответ: имеется 817 способов выбрать узел.

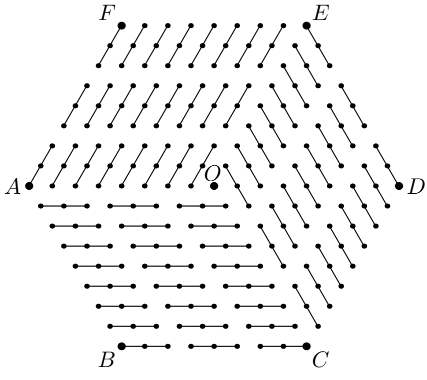
Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, O — его центр. Узел, оставшийся после выполнения всех операций, обозначим через X.

Покрасим узлы шестиугольника в три цвета периодической матрасной раскраской так, чтобы все точки на диагонали AD были покрашены в цвет 3 и на каждой прямой, параллельной AD, все точки были одного цвета. Такая раскраска содержит одинаковое количество узлов цвета 1 и узлов цвета 2, поскольку рисунок симметричен относительно диагонали AD. При этом любой отрезок длины 2 содержит либо три одноцветные, либо три разноцветные точки, поэтому при последовательном удалении отрезков разность между количествами точек цвета 1 и цвета 2 сохраняется. Значит, точка X может быть покрашена только в цвет 3.



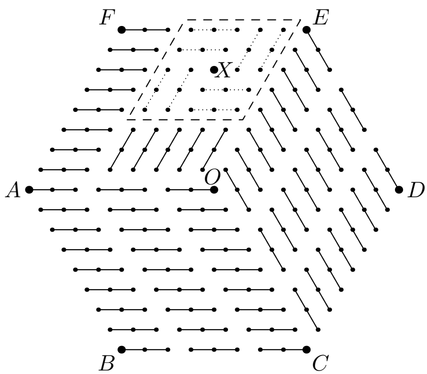
Теперь рассмотрим аналогичную раскраску в цвета 4, 5 и 6, симметричную относительно диагонали BE (пусть сама эта диагональ окрашена в цвет 6). Нетрудно догадаться, что точка X должна быть окрашена в цвет 6.

Докажем, что в роли точки X может оказаться любая точка*, которая в первом эксперименте была покрашена в цвет 3, а во втором — в цвет 6. Прежде всего заметим, что возможен случай $X = O$ (см. рисунок; такое разбиение возможно, так как на каждой стороне шестиугольника лежит кратное трем число узлов).



* Эти точки расположены в узлах шестиугольной сетки со стороной $[\frac{50}{3}]$. По индукции легко проверить, что шестиугольник со стороной k содержит $1+3k(k+1)$ узлов (для стороны 0 это так, а потом на каждом шаге прибавляется рамочка из $6(k+1)$ узлов). Поэтому ответ в нашей задаче — число $1 + 3 \cdot 16 \cdot 17 = 817$.

Пусть теперь точка X лежит не в центре, а, скажем, внутри ромба $AFEO$. В предыдущем примере мы уже научились разбивать все точки ромбов $EDCO$ и $ABCO$, добавим к ним еще ряд отрезков на AO. Осталось разбить на отрезки все узлы ромба $AFEO$ кроме X. Заметим, что мы всегда можем уменьшить сторону ромба на 3, отрезав от него подходящий «уголок», разбитый на отрезки и не содержащий точку X. Будем выполнять эту операцию до тех пор, пока сторона ромба не станет равна 4 (напомним, что сторона исходного ромба была равна 50). Поскольку мы всегда уменьшали обе стороны ромба на 3, точка X, в силу ограничений на ее цвет, могла оказаться только в центре оставшегося ромба. Но в этом случае мы легко можем провести в нем нужные отрезки.



73. Решение 1 (метод Штурма с фиксированной суммой). Будем доказывать данное неравенство при условии, что $abc \geqslant 1$. Пусть $a+b+c=S$ и при этом $a > \frac{S}{3} > b$. Проследим, как изменится левая часть неравенства при замене a на $\frac{S}{3}$ и b на $a+b-\frac{S}{3}$ (произведение трех чисел при этом только увеличится). Сумма, очевидно, не изменится, а сумма попарных произведений увеличится, так как

$$\frac{S}{3}\left(a+b-\frac{S}{3}\right)+\frac{S}{3}c+\left(a+b-\frac{S}{3}\right)c = \\ = \frac{S}{3}\left(a+b-\frac{S}{3}\right)+bc+ac \geqslant ab+bc+ac.$$

Последний переход верен в силу того, что при сближении чисел с фиксированной суммой их произведение увеличивается.

Таким образом, при нашей замене правая часть неравенства уменьшается, а следовательно, она достигает своего минимума, когда все три числа равны $\frac{S}{3}$. Поэтому достаточно проверить неравенство

$$S + \frac{3}{\frac{S^2}{9} + \frac{S^2}{9} + \frac{S^2}{9}} = S + \frac{9}{S^2} \geqslant 4.$$

Домножим обе части неравенства на S^2 и перенесем все слагаемые в левую часть:

$$S^3 - 4S^2 + 9 = S^2(S-3) - (S^2 - 9) = (S-3)(S^2 - S - 3) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу того, что $S = a + b + c \geqslant \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \geqslant 3$, а оба корня квадратного трехчлена меньше 3.

Р е ш е н и е 2 (очень хитрая замена). Раскрывая скобки, нетрудно проверить, что

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geqslant ab + bc + ac,$$

поэтому можно усилить наше неравенство:

$$(a+b+c) + \frac{3}{ab+bc+ac} \geqslant (a+b+c) + \frac{9}{(a+b+c)^2},$$

а выражение в правой части, как мы уже поняли в предыдущем решении, больше или равно 4.

Р е ш е н и е 3 (неравенство о средних). Применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{3}{ab+bc+ac} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{3(a+b+c)^3}{3^3(ab+bc+ac)}}.$$

Теперь достаточно показать, что подкоренное выражение в правой части не меньше 1, что сразу следует из двух общеизвестных неравенств:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geqslant ab + bc + ac \quad \text{и} \quad a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Решение 4 (метод Штурма с фиксированным произведением). Пусть не все числа равны 1, тогда можно считать, что $a > 1 > b$. Докажем, что при замене a и b на 1 и ab правая часть уменьшится:

$$(a+b+c) + \frac{3}{ab+bc+ac} - (1+ab+c) - \frac{3}{ab+c+abc} =$$
$$= (a-1)(1-b) + 3\frac{(c+abc-ac-bc)}{(ab+c+abc)(ab+bc+ac)} =$$
$$= (a-1)(1-b) - 3\frac{c(a-1)(1-b)}{(ab+c+1)(ab+bc+ac)}\,.$$

Так как произведение $(a-1)(1-b)$ положительно, на него можно сократить и число сохранит знак, поэтому нам необходимо установить, что

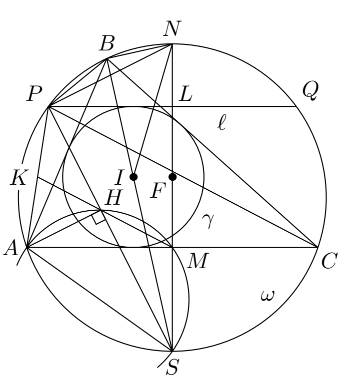
$$1 \geqslant \frac{3c}{(ab+c+1)(ab+bc+ac)}\,.$$

Это неравенство можно получить, перемножив два неравенства:

$$1 \geqslant \frac{c}{ab+c+1} \quad \text{и} \quad 1 \geqslant \frac{3}{ab+bc+ac}\,,$$

где первое очевидно, а второе легко следует из неравенства о средних: $ab+bc+ac \geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ba} = 3$.

Действуя указанными заменами, мы добьемся того, что все три переменные станут равны 1.



74. Неподготовленному читателю приводимое ниже решение может показаться наброском. Искушенный же читатель при чтении этого решения получит истинное удовольствие.

Пусть N и S — середины дуг ABC и AC, M — середина AC, K — середина AP. Тогда $MK = \frac{1}{2}CP$. Обозначим через H проекцию A на PS. Заметим, что $\angle AKH = 2\angle APH = \angle APC = \angle AKM$. Тогда H лежит на MK и $HK = \frac{1}{2}AP$. Теперь достаточно доказать, что $MH = BP$.

Пусть L — середина PQ, а F — середина ML. Тогда $IF \perp NS$ и, следовательно,

$$IN^2 - IS^2 = FN^2 - FS^2 = NL \cdot NS - SM \cdot SN.$$

По свойству прямоугольного треугольника $PL^2 = NL \cdot NS$, $AM^2 = NM \cdot MS$, и тогда

$$IN^2 = NL \cdot NS - SM \cdot SN + IS^2 = NP^2 - AS^2 + IS^2 = NP^2$$

(в последнем равенстве мы ненавязчиво воспользовались леммой Мансиона). Тогда треугольники NLP и NBI равны по катету и гипотенузе. Поэтому треугольники PBN и SIN подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{PB}{PN} = \frac{SI}{SN} = \frac{AS}{SN} = \frac{MH}{\sin\angle HSM \cdot SN} = \frac{MH}{PN}.$$

Следовательно, $PB = MH$, чтд.

75. Ответ: при $v = 298$.

Приведем пример графа G на 297 вершинах, который не содержит ни синего пути, ни красного 7-чипа. Назовем *слоем* полный граф на 99 вершинах, все ребра которого покрашены в синий цвет. Пусть G состоит из трех слоев, причем ребра, соединяющие вершины из разных слоев, окрашены в нем в красный цвет. Очевидно, что любой простой пусть синего цвета может содержать вершины только одного слоя, поэтому его длина не превосходит 99. Также в нем нет и красных 7-чипов, потому что любой 7-чип должен пересекать один из слоев хотя бы по трем вершинам. А все ребра между этими вершинами синие, что противоречит определению 7-чипа.

Остается доказать, что если раскраска полного графа G на 298 вершинах не содержит простого синего пути длины 100, то она обязана содержать красный 7-чип. Предположим, что такого синего пути нет. Выберем самый длинный простой синий путь AB в этом графе, тогда он содержит не более 99 вершин. Удалим этот путь из графа (все его вершины вместе с исходящими из них ребрами) и в оставшейся части найдем самый длинный простой синий путь CD. Удалим его и снова найдем самый длинный простой синий путь EF. Суммарно в этих трех путях содержится не более 297 вершин, поэтому существует вершина H, не входящая ни в один из них. Тогда вершины A, B, C, D, E, F, H образуют красный 7-чип, так как в силу максимальности выбираемых путей синими могут оказаться только ребра AB, CD и EF.

76. Выберем тройку чисел α_1, α_2, α_3, бóльших 10^{10} по модулю, имеющих разные остатки при делении на 3 и таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$. Положим

$$p_i=2+\alpha_{i+1}\alpha_{i-1},\quad q_i=2\alpha_i+\alpha_{i+1}\alpha_{i-1},\quad r_i=-2\alpha_i+\alpha_{i+1}\alpha_{i-1}$$

(индексы рассматриваются по модулю 3). Тогда

$$p_i^2-q_i^2=4(1-\alpha_i)(1-\alpha_{i+1})(1-\alpha_{i-1}),$$

т. е. эта величина не зависит от i; аналогично

$$p_i^2-r_i^2=4(1+\alpha_i)(1+\alpha_{i+1})(1+\alpha_{i-1})$$

и $q_i^2-r_i^2=(p_i^2-r_i^2)-(p_i^2-q_i^2)$ тоже не зависят от i. Кроме того, ни одно из чисел p_i, q_i, r_i не делится на 3, поэтому квадраты всех чисел p_i, q_i и r_i дают остаток 1 при делении на 3.

Определим теперь целые числа

$$a_i=\frac{p_i^2+q_i^2+r_i^2-18}{3},\qquad b_1=\frac{q_i^2+r_i^2-2p_i^2+9}{3},$$
$$b_2=\frac{p_i^2+r_i^2-2q_i^2+9}{3},\qquad b_3=\frac{p_i^2+q_i^2-2r_i^2+9}{3}$$

(заметим, что значения b_j не зависят от i). Тогда $a_i+b_1+b_2=r_i^2$, $a_i+b_1+b_3=q_i^2$, $a_i+b_2+b_3=p_i^2$ и $b_1+b_2+b_3=9$, так что при любом разбиении наших шести чисел на две тройки сумма чисел в одной из них — квадрат.

Поскольку $a_i-a_j=p_i^2-p_j^2$, все a_i различны; из равенства $b_1-b_2=q_i^2-p_i^2$ и аналогичных равенств следует, что все b_j различны. Наконец, из равенства $a_i-b_1=p_i^2-9$ и аналогичных равенств получаем, что $a_i\neq b_j$. Из соотношения $b_1+b_2+b_3=9$ следует, что числа b_i могут иметь лишь общий делитель, равный степени тройки, а поскольку $a_i+b_2+b_3=p_i^2$, тройка не может быть общим множителем всех шести чисел a_i, b_i. Значит, эти шесть чисел взаимно просты в совокупности.

77. Попробуем выбрать в каждом треугольнике сторону так, чтобы каждый выбранный отрезок пересекал четное число других выбранных. Тогда если, обходя окружность, красить их концы попеременно в два цвета, то концы каждого из этих отрезков окажутся разноцветными, что и требуется.

Докажем, что количество таких способов выбрать стороны нечетно. Тогда хотя бы один способ заведомо существует. Назовем *набором* множество $\tau = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — сторона i-го треугольника, а *оснащением* набора — выбор для каждой стороны x_i такой стороны $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, что x_i и y_i либо совпадают, либо пересекаются. Отметим, что если сторона x_i пересекает m_i других, то количество оснащений набора τ равно $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_n + 1)$. В частности, оно будет нечетным, только если каждая сторона x_i пересекает четное число других. Таким образом, надо доказать, что количество оснащенных наборов нечетно.

Набору τ сопоставим граф G_τ на n вершинах, вершины которого соответствуют сторонам x_1, x_2, …, x_n; две вершины соединены ребром, если соответствующие стороны пересекаются. Каждому оснащенному набору сопоставим ориентацию некоторых ребер графа G_τ: стрелка из i в $j \neq i$ идет, если $y_i = x_j$ (некоторые ребра могут оказаться направленными в обе стороны). Тогда исходящая степень любой вершины равна нулю или единице. Отметим, что такой частично ориентированный граф однозначно определяет оснащенный набор.

Сначала подсчитаем, сколько частично ориентированных графов вообще не содержат ребер. Такие графы однозначно определяются своим набором вершин, т. е. выбором по одной стороне в каждом треугольнике. Значит, таких графов 3^n. Теперь рассмотрим частично ориентированные графы G_τ, в которых есть невырожденные простые ориентированные циклы, т. е. циклы, не являющиеся двусторонне направленными ребрами. Обратим цикл, содержащий сторону треугольника с наименьшим номером. Исходящие степени вершин для новой частичной ориентации графа G_τ по-прежнему равны нулю или единице, поэтому ей соответствует другое оснащение набора τ. Заметим также, что новых циклов не образовалось, поэтому наша операция, повторенная дважды, приведет к исходной частичной ориентации. Таким образом, мы разбили все такие оснащения набора τ на пары. Следовательно, их четное количество.

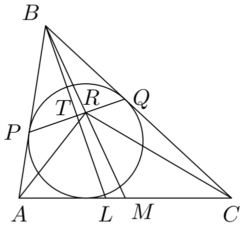
Теперь рассмотрим частично ориентированный граф, в котором есть хотя бы одно ребро, но нет невырожденных циклов. Временно оставим в нем только те ребра, на которых есть стрелочки, и забудем про ориентацию. Получится лес, поскольку любой неориентированный цикл обязательно был бы и ориентированным по циклу. Рассмотрим висячую вершину. Пусть это вершина x_1, и она соединена с x_2 одним или двумя ребрами ориентированного графа. Если зафиксировать оставшийся подграф с вершинами $x_2, x_3, \ldots, x_n$, то выбрать x_1 можно четным количеством способов, так как хорда x_2 пересекает четное число сторон первого треугольника. Поэтому такие частично ориентированные графы также разбиваются на пары.

Стало быть, суммарное количество частично ориентированных графов нечетно.

78. Ответ: 1023 строчки.

Пример. Докажем индукцией по n, что если на вывод проходят n участников, то хватит 2^n-1 строк протокола. База $n=1$ очевидна. Докажем индукционный переход от n к $n+1$. Первого выведшегося участника запишем в 2^n-ю строчку протокола. Далее выведется не более n участников, предшествующих первому в алфавитном списке, поэтому их можно разместить в первых 2^n-1 строках протокола. Участников, следующих в алфавитном списке после первого, также будет не более n, значит, их гарантировано можно записать в строки с номерами от 2^n+1 до $2^{n+1}-1$.

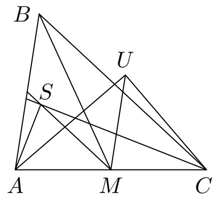
Оценка. Теперь покажем, что если в олимпиаде принимает участие хотя бы 2^n-1 человек, то меньшего числа строк не хватит. Опять применим индукцию по n. Если на вывод проходит один человек, то хотя бы одна строчка в протоколе должна быть, поэтому база верна. Пусть теперь на олимпиаду пришло $2^{n+1}-1$ человек и первым вывелся участник, расположенный на 2^n-м месте в алфавитном списке. Как бы организаторы олимпиады ни располагали его имя в протоколе, всё равно либо выше, либо ниже него окажется не более 2^n-2 строк. Не умаляя общности, будем считать, что реализовался первый вариант. Тогда по индукционному предположению участники, предшествующие ему в алфавитном списке, могут выводиться в таком порядке, что организаторам не удастся записать их в протокол требуемым образом. Переход доказан.



79. Р е ш е н и е 1 (А. Вирачев). Не умаляя общности, можно считать, что $AB \leqslant BC$. Тогда медиана BM лежит между биссектрисой BL (пересекающей отрезок PQ в его середине T) и стороной BC. Следовательно, $\angle MRT \geqslant 90^\circ$, поскольку $\angle BRT$ — острый угол прямоугольного треугольника BTR. Так как средняя линия четырехугольника не превосходит полусуммы заключающих ее сторон (равенство имеет место только в случае, когда эти стороны параллельны), получаем, что

$$MR \leqslant MT < \frac{AP+CQ}{2} = \frac{AB+AC-BC+BC+AC-AB}{4} = \frac{AC}{2},$$

откуда следует, что угол ARC тупой.

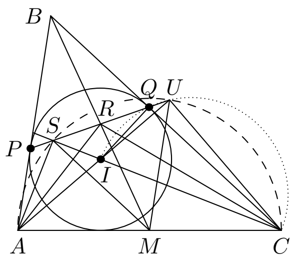


Р е ш е н и е 2. Пусть M — середина стороны AC, S и U — проекции вершин A и C на биссектрисы углов $\angle BCA$ и $\angle BAC$ соответственно. Заметим, что

$$\angle UMC = 2\angle UAC = \angle BAC,$$

поскольку UA — медиана прямоугольного треугольника AUC. Следовательно, $UM \parallel AB$, и аналогично $MS \parallel BC$. Тогда луч MB лежит внутри угла UMS.

Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC. Будем считать, что точка U лежит вне треугольника ABC (другой случай аналогичен). Заметим, что четырехугольник $IQUC$ вписан в окружность с диаметром CI, поэтому



$$\angle UQC = \angle UIC = \\ = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \angle BQP,$$

следовательно, прямая PQ проходит

через точку U. Аналогично она проходит и через точку S. Тогда U и S — точки пересечения окружности с диаметром AC с прямой PQ. Поскольку луч MR идет внутрь угла UMS, он пересекает хорду US этой окружности. Следовательно, $\angle ARC > 90°$.

80. Решение 1 (метод Штурма с фиксированной суммой). Будем доказывать данное неравенство при условии, что $abc \geqslant 1$. Пусть $a+b+c = S$ и при этом $a > \frac{S}{3} > b$. Проследим, как изменится левая часть неравенства при замене a на $\frac{S}{3}$ и b на $a+b-\frac{S}{3}$ (произведение трех чисел при этом только увеличится). Удвоенная сумма, очевидно, не изменится, а сумма попарных произведений увеличится, так как

$$\frac{S}{3}\left(a+b-\frac{S}{3}\right)+\frac{S}{3}c+\left(a+b-\frac{S}{3}\right)c = \\ = \frac{S}{3}\left(a+b-\frac{S}{3}\right)+bc+ac \geqslant ab+bc+ac.$$

Последний переход верен в силу того, что при сближении чисел с фиксированной суммой их произведение увеличивается.

Таким образом, при нашей замене правая часть неравенства уменьшается, а следовательно, она достигает своего минимума, когда все три числа равны $\frac{S}{3}$. Значит, достаточно проверить неравенство

$$2S+\frac{9}{\left(\frac{S^2}{9}+\frac{S^2}{9}+\frac{S^2}{9}\right)^2} = 2S+\frac{81}{S^4} \geqslant 7.$$

Домножим обе части неравенства на S^4 и перенесем все слагаемые в левую часть: $2S^5 - 7S^4 + 81 \geqslant 0$. Заметим, что при $S = 3$ неравенство верно, а из условия $abc \geqslant 1$ следует, что $S = a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \geqslant 3$. Поэтому достаточно проверить, что при увеличении S левая часть возрастает. Производная этого многочлена $10S^4 - 28S^3$ положительна при $S \geqslant 3$, значит, неравенство верно для всех S.

Решение 2 (очень хитрая замена). Раскрывая скобки, нетрудно проверить, что

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geqslant ab+bc+ac.$$

Поэтому можно усилить наше неравенство:

$$2(a+b+c)+\frac{9}{(ab+bc+ac)^2} \geqslant 2(a+b+c)+\frac{81}{(a+b+c)^4}\,,$$

а выражение в правой части, как мы уже поняли в предыдущем решении, больше или равно 7.

Решение 3 (неравенство о средних). Применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\underbrace{\frac{a+b+c}{3}+\ldots+\frac{a+b+c}{3}}_{\text{6 слагаемых}}+\frac{9}{(ab+bc+ac)^2} \geqslant 7\sqrt[7]{\frac{9(a+b+c)^6}{3^6(ab+bc+ac)^2}}.$$

Теперь достаточно показать, что подкоренное выражение в правой части не меньше 1, что очевидно следует из двух общеизвестных неравенств:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geqslant ab+bc+ac \qquad \text{и} \qquad a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}=1.$$

Решение 4 (метод Штурма с фиксированным произведением). Пусть не все числа равны 1, тогда можно считать, что $a>1>b$. Докажем, что при замене a и b на 1 и ab правая часть уменьшится:

$$2(a+b+c)+\frac{9}{(ab+bc+ac)^2}-2(1+ab+c)-\frac{9}{(ab+c+abc)^2}=$$

$$=2(a+b-1-ab)+9\frac{(ab+c+abc)^2-(ab+bc+ac)^2}{(ab+c+abc)^2(ab+bc+ac)^2}=$$

$$=2(a-1)(1-b)+9\frac{(c+abc-ac-bc)(2ab+bc+ac+c+abc)}{(ab+c+abc)^2(ab+bc+ac)^2}=$$

$$=2(a-1)(1-b)-9\frac{c(a-1)(1-b)(2ab+bc+ac+c+1)}{(ab+c+1)^2(ab+bc+ac)^2}\,.$$

Так как произведение $(a-1)(1-b)$ положительно, на него можно сократить и число сохранит знак, поэтому нам необходимо установить, что

$$2 \geqslant 9\frac{c(2ab+bc+ac+c+1)}{(ab+c+1)^2(ab+bc+ac)^2}\,.$$

Это неравенство можно получить, перемножив три неравенства

$$2 \geqslant \frac{2ab+bc+ac+c+1}{ab+bc+ac}, \quad 1 \geqslant \frac{c}{ab+c+1} \quad \text{и}$$
$$1 \geqslant \frac{9}{(ab+c+1)(ab+bc+ac)},$$

где первое неравенство верно, так как

$$ab+bc+ac \geqslant ab+c+1$$

(действительно, из неравенства $(a-1)(1-b)>0$ получаем, что $a+b>1+ab$, откуда $ac+bc>c+abc=c+1$), второе очевидно, а третье легко следует из неравенства о средних:

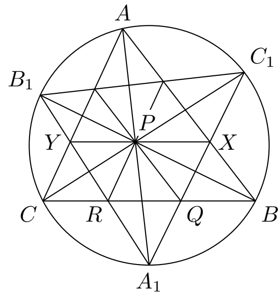
$$ab+bc+ac \geqslant ab+c+1 \geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3.$$

81. Рассмотрим последовательность $\left\{r_n=\frac{p_n}{q_n}\right\}$. Заметим, что

$$r_{n+1}=\frac{2-r_n^2}{2+r_n^2}.$$

Все члены этой последовательности — рациональные числа. Докажем, что никакой простой множитель не может встретиться один раз в числителе, а другой раз — в знаменателе, т. е. что в последовательности остатков по модулю p не могут встретиться одновременно и 0, и «∞». Действительно, если сначала встретился 0, то после него идет 1, а после него — то же, что после r_1. Получили цикл, нулей в знаменателе в нем нет. Если же сначала встретился нуль в знаменателе, «перевернем» все дроби, точнее говоря, рассмотрим рекуррентное соотношение для чисел $s_n=\frac{1}{r_n}$: $s_{n+1}=\frac{2s_n^2-1}{2s_n^2+1}$. Теперь вместо нуля в знаменателе мы будем иметь нуль в числителе, после него идет -1, а после нее — то же, что после s_1. Аналогично получили цикл, в котором нет нулей в знаменателе. Следовательно, делиться на p в исходных последовательностях могут либо только числители p_i, либо только знаменатели q_i.

82. Решение 1. Обозначим через Q и R точки пересечения прямых, параллельных AB и AC и проходящих через P, со стороной BC соответственно, а через X и Y обозначим



точки пересечения прямой, проходящей через P и параллельной стороне BC, со сторонами AB и AC соответственно. Тогда треугольники AXY и PQR имеют соответственно параллельные стороны, поэтому они гомотетичны и точка A_1 является их центром гомотетии. Следовательно, отрезок AA_1 проходит через точку P. Аналогично отрезки BB_1 и CC_1 также проходят через точку P.

Применим теорему Паскаля к ломаной $AA_1C_1C_1CB$ (да-да, ломаная содержит вырожденное звено C_1C_1). Получаем, что касательная к описанной окружности шестиугольника в точке C_1 параллельна стороне AB. Следовательно, CC_1 — биссектриса угла ACB. Аналогично BB_1 и AA_1 тоже биссектрисы соответствующих углов. Тогда точка P является центром вписанной окружности треугольника ABC. Но эта точка совпадает с ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение 2 (П. Губкин). Пусть $PRCY$, $BQPX$ — два из трех параллелограммов из условия. Имеем

$$\frac{YC}{YA} = \frac{PR}{YA} = \frac{QR}{XY} = \frac{RA_1}{YA_1}$$

(второе равенство следует из подобия треугольников PQR, AXY, третье — из подобия треугольников A_1QR, A_1XY). По теореме о степени точки имеем $YC \cdot YA = YB_1 \cdot YA_1$. Перемножая эти равенства, получаем $YC^2 = YB_1 \cdot RA_1$. Но аналогично $RC^2 = YB_1 \cdot RA_1$. Значит, $YC = RC$, $PRCY$ — ромб, P лежит на биссектрисе угла C. Аналогично получаем, что P лежит на остальных биссектрисах треугольника ABC. Закончить решение можно многими способами — например, доказав, как и в начале первого решения, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых AP, BP, CP соответственно, т. е. являются серединами дуг BC, CA, AB.

83. Пусть семейство F состоит из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Рассмотрим для каждой упорядоченной пары элементов (u, v)

характеристическую функцию $f_{(u,v)}(A)$, равную 1, если u и v лежат в A, и 0 иначе. Рассмотрим следующую сумму:

$$S(u,v)=\sum_{i=1}^{n} f_{(u,v)}(A_i)\ -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f_{(u,v)}(A_i\cup A_j)\ +$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} f_{(u,v)}(A_i\cup A_j\cup A_k)\ -\ldots$$

Допустим, что нельзя выбрать две точки так, чтобы каждое из множеств A_i содержало хотя бы одну из них. Тогда для любой пары точек (u,v) найдется множество $C\in F$, не содержащее ни одну из них. Тогда всевозможные объединения множеств из F разбиваются на пары вида (A,B), где A — это объединение нескольких множеств A_i, среди которых нет C, а $B=A\cup C$. В силу того что u и v не содержатся в C, выполнено равенство $f_{(u,v)}(A)=f_{(u,v)}(B)$. Поскольку в сумме $S(u,v)$ эти значения берутся с разными знаками, $S(u,v)=0$.

С другой стороны, давайте просуммируем выражение $S(u,v)$ по всем упорядоченным парам (u,v) и вычислим остаток суммы $S=\sum\limits_{(u,v)} S(u,v)$ по модулю 3. Для этого для каждого k и каждого набора множеств $A=\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}$ вычислим сумму $\sum\limits_{(u,v)} f_{(u,v)}(A)$. Она равна количеству упорядоченных пар элементов, содержащихся в A, т. е. квадрату числа элементов множества A, что дает остаток 1 по модулю 3 (так как множество A лежит в F и, значит, его мощность не делится на 3). Всего имеется C_n^k способов выбрать k множеств из n, поэтому сумма S по модулю 3 равна $C_n^1-C_n^2+\ldots=1$. Противоречие.

84. Ответ: $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

Решение 1. Пусть $f(x)=\frac{1}{h(x+1)}$, где $h\colon(1,+\infty)\mapsto(0,+\infty)$. Обозначим $x+1=a$, $y+1=b=a+c$, где a, $c>1$. Тогда функциональное уравнение из условия задачи записывается в виде

$$h(a^2+ac)=\frac{h(a+c)h(a)h(c)}{h(a+c)-h(a)}.\qquad(*)$$

Будем решать это уравнение.

Л е м м а. Функция h строго возрастает.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p > q > 1$. Если $p > q + 1$, то полагая $a = q$, $c = p - q$ и учитывая положительность функции, получаем, что $h(p) > h(q)$, Теперь предположим, что $p^2 > q^2 + 1$. Тогда по уже доказанному $h(p^2 + pq) > h(q^2 + pq)$, что по формуле для обеих частей равносильно неравенству $h(p) > h(q)$. Далее, если $p^4 > q^4 + 1$, то $(p^2 + pq)^2 > (q^2 + pq)^2 + 1$, так что опять имеем $h(p) > h(q)$ и т. д. Найдя то n, для которого $p^{2^n} > q^{2^n} + 1$, получим, что $h(p) > h(q)$. □

Итак, функция h строго возрастает. Далее неоднократно будем пользоваться тем фактом, что монотонные функции имеют односторонние пределы в любой точке, в том числе и в бесконечности. При наличии ограниченности эти пределы оказываются еще и конечными*. Мы для краткости будем обозначать предел функции h в точке x_0 справа через $h(x_0 + 0)$.

Если функция h ограничена, то она имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, что невозможно, поскольку тогда при $a \to +\infty$ знаменатель правой части формулы $(*)$ стремится к нулю, а числитель отделен от нуля и, значит, вся дробь не будет ограниченной. Следовательно, функция h возрастает к бесконечности.

Зафиксируем c и перейдем в уравнении $(*)$ пределу при $a \to \to 1 + 0$. После несложных преобразований получим

$$h(c) = \frac{h(c+1+0)}{h(1+0)} - 1.$$

Отсюда $\lambda = h(1 + 0) \neq 0$. Так как функция $c \mapsto \frac{1}{\lambda}h(c + 1 + 0)$ заведомо непрерывна справа, функция $h(c)$ тоже непрерывна справа, так что $h(x + 0) = h(x)$ при $x > 1$. Стало быть,

$$h(c+1) = \lambda(h(c)+1). \tag{$**$}$$

Докажем далее, что $\lambda = 1$. Предположим противное. Если $\lambda < 1$, то функция не может возрастать к бесконечности. Предположим, что $\lambda > 1$. Зафиксируем a и перейдем в уравнении $(*)$ к пределу при $c \to 1 + 0$, получим

$$h(a^2+a) = \frac{\lambda^2 h(a)(h(a)+1)}{(\lambda-1)h(a)+\lambda} < \frac{\lambda^2}{\lambda-1}\cdot h(a) \leqslant \lambda^n h(a) \leqslant h(a+n)$$

* См., например, *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. М.: Физматлит, 2003. Глава II, пункт 57.

для некоторой натуральной константы n (последнее неравенство следует из соотношения $(**)$). Получившийся результат при $a > n$ противоречит монотонности функции h.

Итак, $\lambda = 1$ и $h(c+1) = h(c)+1$. Тогда, переходя к пределу при $c \to 1+0$, получаем, что $h(2) = 2$ и далее по индукции $h(n) = n$. В силу монотонности заключаем, что $[h(x)] = [x]$ при всех $x > 1$. Заметим далее, что при натуральных c формула $(*)$ сильно упрощается:

$$h(a^2 + ca) = h(a+c)h(a) = h^2(a) + ch(a).$$

Следовательно, $[a^2 + ca] = [h(a^2 + ca)] = [h^2(a) + ch(a)]$ при всех натуральных c, откуда $|c(h(a) - a)| < |h^2(a) - a^2| + 1$ и, значит, $h(a) = a$. Таким образом, $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Как нетрудно видеть, эта функция удовлетворяет решаемому уравнению.

Р е ш е н и е 2 (аналитическая окрошка). Положим $f(x) = g(x+1)$, где $g\colon (1, +\infty) \to (0, +\infty)$. Обозначим $x + 1 = a$, $y+1 = b = a+c$, где a, $c > 1$. Тогда функциональное уравнение из условия задачи записывается в виде

$$g\bigl(a(a+c)\bigr) = g(c)\bigl(g(a) - g(a+c)\bigr). \tag{$*$}$$

Если поменять a и c местами и вычесть новое уравнение из уравнения $(*)$, то получится уравнение

$$g\bigl(a(a+c)\bigr) - g\bigl(c(a+c)\bigr) = g(a+c)\bigl(g(a) - g(c)\bigr).$$

Подставив в него $a = u(u+v)^{2^n-1}$ и $c = v(u+v)^{2^n-1}$, получим соотношение

$$g\bigl(u(u+v)^{2^{n+1}-1}\bigr) - g\bigl(v(u+v)^{2^{n+1}-1}\bigr) = \\ = g\bigl((u+v)^{2^n}\bigr)\Bigl(g\bigl(u(u+v)^{2^n-1}\bigr) - g\bigl(v(u+v)^{2^n-1}\bigr)\Bigr).$$

Отксюда по индукции сразу следует, что

$$g\bigl(u(u+v)^{2^n-1}\bigr) - g\bigl(v(u+v)^{2^n-1}\bigr) = \\ = g\bigl((u+v)^{2^{n-1}}\bigr)g\bigl((u+v)^{2^{n-2}}\bigr)\ldots g(u+v)\bigl(g(u) - g(v)\bigr). \tag{$**$}$$

Из соотношения $(*)$ сразу видно, что $g(x) < g(y)$, если $x > y+1$. Тогда если $x > y > 1$, то $x(x+y)^{2^n-1} > y(x+y)^{2^n-1}$ для некоторого достаточно большого n, и из равенства $(**)$ заключаем, что $g(x) < g(y)$. Таким образом, $g(x)$ — строго монотонно убывающая функция.

Докажем, что $g(x)$ — непрерывная функция. Предположим противное. Поскольку монотонная функция имеет не более чем счетное множество точек разрыва, которые являются скачками, возьмем в качестве c точку разрыва, а в качестве a — любую точку, для которой $a+c$ будет точкой непрерывности. Не устраивающих нас точек a не более чем счетное множество, и значит, множество подходящих точек a континуально. Тогда из формулы $(*)$ видно, что в точке $a(a+c)$ также будет скачок, поскольку множитель $g(a) - g(a + c)$ положителен. Но это невозможно, поскольку мы построили континуальное множество точек разрыва.

Вспомним, что у монотонных функций существуют односторонние пределы (возможно бесконечные), поэтому существует и предел $\lambda = \lim\limits_{x\to 1+0} g(x)$. Перейдем в уравнении $(*)$ к пределу при $a \to 1 + 0$, получим

$$g(c+1) = g(c)\big(\lambda - g(c+1)\big). \qquad (***)$$

Отсюда сразу видно, что λ не может быть бесконечностью. Доопределим функцию $g(x)$ в точке $x = 1$, положив $g(1) = \lambda$. Получившаяся функция непрерывна на $[1, +\infty)$, поэтому соотношение $(*)$ справедливо уже при a, $c \geqslant 1$.

Формулу $(***)$ можно переписать в виде

$$\frac{\lambda}{g(c+1)} = \frac{1}{g(c)} + 1.$$

Далее нам удобнее будет рассматривать функцию $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, которая непрерывна, монотонно возрастает и удовлетворяет соотношениям

$$\lambda h(c+1) = h(c) + 1 \quad \text{и} \quad \lambda h(1) = 1.$$

Очевидно, что $\lambda \leqslant 1$, поскольку иначе нет монотонного возрастания функции $h(x)$. От противного покажем, что $\lambda = 1$. При $\lambda \neq 1$ это рекуррентное соотношение несложно решить, если переписать его в виде

$$\lambda\Big(h(n+1) + \frac{1}{1-\lambda}\Big) = \Big(h(n) + \frac{1}{1-\lambda}\Big).$$

Тогда $h(n) = \frac{\lambda^{-n}-1}{1-\lambda}$ и, значит, $g(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \lambda^n(1-\lambda)$, что противоречит формуле $(*)$ при $a = c = n$ и $n \to \infty$:

$$\lambda^{2n^2}(1-\lambda) \sim g(2n^2) = g(n)\bigl(g(n) - g(2n)\bigr) \sim \\ \sim \lambda^n(1-\lambda)^2(\lambda^n - \lambda^{2n}) \sim \lambda^{2n}(1-\lambda)^2.$$

Итак, $h(c+1) = h(c) + 1$, и, в частности, $h(n) = n$. Тогда из формулы $(*)$ заключаем, что

$$h(a(a+n)) = h(a)(h(a)+n).$$

Если $a(a+n) = m$, то $h(a(a+n)) = m$ и $h(a)(h(a)+n) = m = a(a+n)$. Следовательно, $h(a) = a$, поскольку оба этих числа являются единственными положительными корнями квадратного уравнения $t^2 + nt - m = 0$. Но множество таких a всюду плотно* поэтому по непрерывности h получаем, что $h(x) = x$ при всех $x \geqslant 1$.

85. Ответ: $\alpha = \frac{2k}{k+1}$.

1. Покажем, что условие не выполняется для $\alpha < \frac{2k}{k+1}$. Рассмотрим таблицу, в которой в первых двух строках $k+1$ раз записано число $a = -\frac{k}{k+1}$ и k раз — единица, а все остальные строки заполнены нулями. Эта таблица, очевидно, удовлетворяет условию, и при любой перестановке чисел в первых двух строках найдется столбец, содержащий два раза число a. Тогда модуль суммы чисел в этом столбце будет равен $\frac{2k}{k+1}$.

2. Остается доказать, что для $\alpha = \frac{2k}{k+1}$ утверждение задачи выполнено. Для упрощения вычислений умножим числа в таблице на $k+1$ и в дальнейшем будем полагать, что все они по модулю не больше $k+1$. Тогда нам требуется доказать следующее утверждение: *существует перестановка чисел внутри строк, при которой сумма чисел в каждом столбце по абсолютной величине не превосходит* $2k$.

* Действительно, мы можем сколь угодно приблизиться к любому рациональному числу r, взяв $m = nr$ при больших подходящих n. Тогда положительный корень уравнения $t^2 + nt - m = 0$ есть

$$\frac{\sqrt{n^2+4m}-n}{2} = \frac{2m}{\sqrt{n^2+4m}+n} = \frac{2nr}{\sqrt{n^2+4nr}+n},$$

а это выражение стремится к r при $n \to \infty$.

Положим для краткости $n = 2k+1$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — набор из n чисел. Набор $\mathbf{x}$ будем называть *n-хорошим*, если для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ сумма любых m чисел из $\mathbf{x}$ по модулю не превосходит $m(n-m)$, в частности, сумма всех чисел равна 0. Заметим, что набор чисел в каждом ряду n-хороший. Действительно, если $m \leqslant k$, то модуль суммы m чисел не превосходит $m(k+1) \leqslant m(n-m)$. Если же $m \geqslant k+1$, то модуль суммы выбранных m чисел равен модулю суммы оставшихся $n-m$ чисел, который опять же не больше $m(n-m)$.

Л е м м а. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — два n-хороших набора. Тогда существует такая перестановка σ чисел $1, 2, \ldots, n$, что набор $(x_1+y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n+y_{\sigma(n)})$ тоже n-хороший.

Наше утверждение легко выводится из этой леммы. В самом деле, если лемма верна, то индукцией по $s = 1, 2, \ldots, n$ мы докажем, что существует перестановка чисел в первых s строках, при которой суммы чисел в столбцах прямоугольника $s \times n$, состоящего из данных строк, будут образовывать n-хороший набор. База индукции очевидна, а справедливость индукционного перехода как раз обеспечивается леммой. В результате при $s = n$ мы получим таблицу, в которой сумма чисел в каждом столбце по модулю не превосходит $1 \cdot 2k$, чтд.

Осталось всего лишь доказать лемму. Этому доказательству посвящаются следующие 50 страниц диссертации.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Не умаляя общности, будем считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Проверим, что в этом случае достаточно переставить числа в наборе $\mathbf{y}$ так, чтобы выполнялись неравенства $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$.

Выведем лемму из следующего факта.

Ф а к т. Пусть $\mathbf{x}$ — n-хороший набор и $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant$ $\leqslant n$ — некоторый набор индексов. Обозначим $s = t_{i_1}+t_{i_2}+\ldots+t_{i_n}$. Тогда верно неравенство $\sum\limits_{j=1}^{m} x_{i_j} \leqslant \frac{m(2n-m+1)}{2} - s$, или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{m}(x_{i_j} + i_j) \leqslant \frac{m(2n-m+1)}{2}. \qquad (1)$$

Предположим, что этот факт доказан. Применяя его к наборам $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_n, \ldots, y_1)$, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{m}(x_{i_j} + y_{i_j}) = \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} + \sum_{j=1}^{m} y_{i_j} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{m(2n-m+1)}{2} - s\right) + \left(\frac{m(2n-m+1)}{2} - m(n+1) + s\right) =$$
$$= m(2n - m + 1) - m(n + 1) = m(n - m),$$

как и требовалось в лемме. Нижняя граница для сумм также верна из симметрии. Доказательство леммы будет завершено, если мы установим неравенство (1).

Будем доказывать неравенство (1) индукцией по n (заметим, что в данном случае n может быть как нечетным, так и четным числом). База для $n = 1$ при $m = 0$ и $m = 1$ очевидна. Докажем индукционный переход.

Для каждого индекса $t = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через m_t количество таких индексов j, что $i_j \leqslant t$. Выберем индекс t, для которого значение $\frac{m_t}{t}$ наибольшее среди всех возможных, тогда $t = i_q$ для некоторого q. Сейчас мы начнем менять набор $\mathbf{x}$ так, чтобы он оставался n-хорошим и невозрастающим и сумма в левой части (1) не уменьшилась. Наша цель — получить новый набор, в котором $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = n - t$.

Предположим, что $x_i > x_{i+1}$ для некоторого $i < t$. Положим $\varepsilon = \frac{x_i - x_{i+1}}{t}$ и определим набор $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ как

$$x_j' = \begin{cases} x_j - (t-i)\varepsilon, & j \leqslant i; \\ x_j + i\varepsilon, & i < j \leqslant t; \\ x_j, & j > t. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что числа в наборе $\mathbf{x}'$ не возрастают, и $x_i' = x_{i+1}'$. Для доказательства того, что этот набор n-хороший, заметим, что максимальная по модулю сумма поднабора из k чисел набора $\mathbf{x}'$ (а это сумма либо первых k, либо последних k чисел) не превосходит соответствующей суммы набора $\mathbf{x}$. С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{m} x'_{i_j} = \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} - m_i \cdot (t-i)\varepsilon + (m_t - m_i)\cdot i\varepsilon = \\ = \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} + im_t - tm_i \geqslant \sum_{j=1}^{m} x_{i_j},$$

т. е. сумма в левой части неравенства (1) действительно не уменьшилась. Значит, мы можем заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}'$. Проводя такие замены для всех индексов $i < t$, мы добьемся того, что первые t элементов набора будут равны, положим $x = x_1 = x_2 = \dots = x_t$.

Предположим теперь, что $x < n-t$ (случай $x > n-t$ невозможен, иначе выполнялось бы неравенство $\sum\limits_{j=1}^{t} x_j > t(n-t)$). Для всех $r \geqslant t$ определим

$$\Delta_r = r(n-r) - \sum_{j=1}^{r} x_j \geqslant 0.$$

Если $\Delta_r > 0$ для всех $r > t$, то мы можем заменить все числа $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_t$ на $x + \frac{1}{t}\min\limits_{r>t}\Delta_r$, и набор $\mathbf{x}$ останется при этом n-хорошим. Поэтому будем считать, что $\Delta_r = 0$ для некоторого $r > t$; причем выберем минимальное такое r. Заметим тогда, что если $r < n$, то

$$x_r = r(n-r) - (r-1)(n-r+1) + \Delta_{r-1} \geqslant n - 2r + 1,$$
$$x_{r+1} = (r+1)(n-r-1) - \Delta_{r+1} - r(n-r) \leqslant n - 2r - 1,$$

и, следовательно, $x_{r+1} \leqslant x_r - 2$.

Теперь выберем достаточно маленькое $\varepsilon > 0$ и определим $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ как

$$x'_j = \begin{cases} x_j + (r-t)\varepsilon, & j \leqslant t; \\ x_j - t\varepsilon, & t < j \leqslant r; \\ x_j, & j > r. \end{cases}$$

Зададим для ε наибольшее возможное значение, при котором $\sum\limits_{i=1}^{p} x'_i \leqslant p(n-p)$ для всех $t \leqslant p < r$ и $x'_r \geqslant x'_{r+1}$. Аналогично полученным выше оценкам легко показать, что набор $\mathbf{x}'$ является n-хорошим, невозрастающим и $\sum\limits_{j=1}^{m} x'_{i_j} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} x_{i_j}$.

Продолжая делать такие замены, мы на каждом шаге будем либо уменьшать значение r, либо увеличивать x хотя бы на $\frac{2}{t}$ (так как x_r возрастает хотя бы на 2). Таким образом, за конечное число шагов мы придем к равенству $x = n - t$.

Теперь мы можем закончить индукционный переход. Напомним, что индекс t равен i_q при некотором q. Рассмотрим набор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-t})$, в котором $z_i = x_{i+t} + t$. Для каждого $r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - t$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} z_j = \sum_{j=1}^{r+t} x_j - t(n-t) - rt \leqslant$$
$$\leqslant (r+t)(n-r-t) - t(n-r-t) = r(n-t-r).$$

Это значит, что набор $\mathbf{z}$ является $(n-t)$-хорошим. Тогда по индукционному предположению

$$\sum_{j=q+1}^{m} \bigl(z_{i_j-t} + (i_j - t)\bigr) \leqslant \frac{(m-q)\bigl(2(n-t) - (m-q) + 1\bigr)}{2}.$$

Заметим, что $i_j \leqslant t + j - q$ для $j \leqslant q$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m}(x_{i_j} + i_j) = \sum_{j=1}^{q}(x_{i_j} + i_j) + \sum_{j=q+1}^{m}(x_{i_j} + i_j) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q}\bigl((n-t) + (t+j-q)\bigr) + \sum_{j=q+1}^{m}\bigl(z_{i_j-t} + (i_j-t)\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{q(2n-q+1)}{2} + \frac{(m-q)\bigl(2(n-t) - (m-q) + 1\bigr)}{2} =$$
$$= \frac{m(2n-m+1)}{2} + (m-q)(q-t) \leqslant \frac{m(2n-m+1)}{2},$$

где последнее неравенство выполнено в силу того, что $m \geqslant q$ и $t \geqslant q$. Неравенство (1) доказано.

УГОЛОК ОЛИМПИАДОФИЛА

Какого цвета моя шляпа?

К. Кохась, К. Куюмжиян, Г. Челноков

В этом разделе мы приводим подборку задач, предлагавшуюся на 27-й Летней конференции Турнира городов (Даховская, 2015 г.). Конференции Турнира городов — это фактически олимпиады по исследовательским задачам. В отличие от традиционных олимпиадных задач, *эти* задачи не решаются одним рывком и требуют некоторого времени для раздумий. В конференции принимают участие школьники — победители весеннего и осеннего туров Турнира городов.

На конференции предлагается несколько исследовательских проектов. Цель — как можно дальше продвинуться в каком-то из проектов. Задачи можно решать коллективно, объединившись в любые команды (члены команды могут быть из разных городов). Участники могут решать задачи сразу из нескольких проектов, причем по разным проектам можно участвовать в разных командах.

* * *

Задачи первой серии выдавались участникам по дороге на конференцию. В качестве рекламы ко всей подборке задач прилагался следующий вопрос.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ ВЫЗОВ:
число 4 против миллиардов нейронов вашего мозга!

Вам и мне надевают на голову шляпу. Каждая из шляп может быть черной или белой. Вы видите мою шляпу, я — вашу, но никто из нас не видит при этом своей шляпы. Каждый из нас (не подглядывая, не общаясь и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый из нас должен назвать цвет — «черный» или «белый». Если хоть один из нас угадал — мы выиграли. Перед тем как все это произойдет, нам дали возможность посовещаться. Как нам следует действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

1. Несколько задач о мудрецах

Есть несколько мудрецов и большой запас шляп k различных цветов. С мудрецами проводят следующий ТЕСТ. Ведущий надевает мудрецам шляпы так, что в результате каждый видит шляпы всех остальных мудрецов, но не видит своей шляпы и не знает ее цвета. Мудрецы не общаются. По команде ведущего мудрецы одновременно называют цвет. Считается, что мудрецы успешно прошли тест = «выиграли», если хотя бы один из них угадал.

Перед тестом мудрецам сообщили правила теста и дали возможность устроить СОВЕЩАНИЕ, чтобы они могли договориться о том, как действовать во время теста. Стратегия мудрецов должна быть детерминированной — каждый мудрец должен назвать цвет исходя только из того, какие цвета он видит у остальных.

1.1. Есть n мудрецов и шляпы n цветов. Докажите, что в этой ситуации мудрецы выигрывают.

1.2. Пусть имеются шляпы трех цветов и n мудрецов стоят в шеренгу так, что каждый видит лишь соседей (а крайние — одного соседа). Докажите, что в этой ситуации мудрецы проигрывают, если

a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) n — произвольное.

1.3. Есть $10k$ мудрецов и шляпы k цветов (опять все видят всех). Докажите, что 10 мудрецов заведомо смогут угадать свой цвет, а вот 11, вообще говоря, нет.

1.4. Есть $4k-1$ мудрецов, $2k$ черных и $2k$ белых шляп. Ведущий незаметно прячет одну шляпу, а остальные надевает на мудрецов. Какое наибольшее число мудрецов смогут угадать цвет своей шляпы?

1.5. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба, у них шляпы трех цветов. Каждый мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Как им действовать, чтобы выиграть?

1.6. У трех мудрецов шляпы двух цветов. Пусть теперь мудрецам разрешается пасовать, т. е. сказать «пас», что означает отказ от угадывания. Пусть мудрецы выигрывают только при условии, что хотя бы один из них угадал правильно и при этом никто не угадал неправильно. Будем считать, что все расклады шляп равновероятны и что стратегия мудрецов, как и в предыдущих задачах, детерминированная. Теперь уже мудрецы заведомо не могут обеспечить себе стопроцентный выигрыш. Например стратегия «Мудрец A всегда говорит “черный”, остальные всегда говорят “пас”» выигрывает лишь в половине случаев. Оптимальная стратегия — это стратегия, которая для всевозможных раскладов шляп дает наибольшее число выигрышей.

a) Предложите стратегию мудрецов, для которой они выигрывают больше чем в 50 % случаев.

b) Найдите оптимальную стратегию и докажите, что она оптимальна.

2. Мудрецы на неориентированном графе

Будем рассматривать более общую задачу. Пусть дан неориентированный граф G, в каждой вершине которого находится один мудрец. Мудрецы знакомы друг с другом, и расположение мудрецов по вершинам известно всем. В частности, каждый мудрец понимает, в какой вершине находится каждый из его соседей. Мы будем отождествлять вершину графа и мудреца, который в ней находится. Во время теста каждый мудрец видит только шляпы мудрецов, находящихся в соседних вершинах графа. Остальные правила те же самые — мудрецы должны на совещании выработать стратегию, позволяющую хотя бы одному из них угадать цвет своей шляпы.

При необходимости можно пользоваться следующим формализмом. Пусть цвета шляп пронумерованы числами от 1 до k, пусть $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, k\}$ и пусть у каждой вершины v графа G соседние вершины (пусть d — их количество) упорядочены по возрастанию номеров u_{n_1}, u_{n_2}, $\ldots u_{n_d}$. Стратегия мудреца v — это функция

$$f_v\colon \underbrace{\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}}_{d \text{ раз}} \to \mathcal{C}.$$

Эти функции выбираются мудрецами на совещании. Действия мудрецов по угадыванию состоят в том, что каждый мудрец v вычисляет $f_v(c_1, c_2, \ldots, c_d)$, где $c_i \in \mathcal{C}$ — цвет шляпы мудреца в вершине v_{n_i}.

Задача 1.1 показывает, что если мудрецы находятся в вершинах графа и могут видеть только соседних мудрецов, то в случае, когда граф имеет k-клику, хотя бы один мудрец сможет угадать свою шляпу. Вопрос становится нетривиальным, если граф не имеет k-клик.

2.1. Докажите, что на четырехвершинном графе «куриная лапа» мудрецы проигрывают ($k \geqslant 3$).

2.2. Докажите, что на любом дереве мудрецы проигрывают ($k \geqslant 3$).

Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть V — множество из трех элементов (цветов шляп). Пусть $V_i = V$ — множество цветов шляп, которые можно дать i-му мудрецу. Допустим, что мудрецы уже определились со стратегией. Это значит, что i-й мудрец выбрал себе функцию $f_i\colon V_{i-1} \times V_{i+1} \to V_i$ (всюду нумерация циклическая). Будем говорить, что последовательность цветов abc, где $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$, $c \in V_{i+1}$, является *короткой опровергающей цепочкой*, если $b \neq f_i(a, c)$. Более длинная цепочка цветов $S = s_1 s_2 \ldots s_m$, где $s_1 \in V_\ell$, $s_2 \in V_{\ell+1}, \ldots, s_m \in V_{\ell+m-1}$, называется *опровергающей цепочкой*, если каждый ее трехэлементный фрагмент является короткой опровергающей цепочкой. Если выбрана опровергающая цепочка S, обозначим через $\ell_+(S)$ число способов продолжить S на один шаг вправо, т. е. число способов выбрать цвет $s_{m+1} \in V_{\ell+m}$ так, чтобы получилась более длинная опровергающая цепочка. Аналогично обозначим через $\ell_-(S)$ число способов продолжить S на один шаг влево.

2.3. Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Докажите, что если нашлась опровергающая цепочка $S = s_1 s_2 \ldots s_m$, где $2 \leqslant m \leqslant n - 1$, для которой $\ell_-(s_1 s_2) + \ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 5$, то стратегия мудрецов не выигрышная.

2.4. Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию. Докажите, что для любого мудреца i и любой пары цветов $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$ выполнено равенство $\ell_-(ab) + \ell_+(ab) = 4$.

2.5. Докажите, что при $k = 3$ на графе «цикл из $3n$ звеньев» мудрецы выигрывают.

2.6. Докажите, что при $k = 3$ на графе «цикл из n звеньев» мудрецы проигрывают, если n не делится на 3 и $n \neq 4$.

Следующие задачи показывают, что для выигрыша мудрецов наличие больших клик в графе не является необходимым.

2.7. Докажите, что для любого числа цветов k существует двудольный граф, на котором мудрецы выигрывают.

2.8. Пусть G — граф, на котором мудрецы выигрывают, имея шляпы q цветов. Пусть K_r — полный граф на r вершинах (на нем, как мы знаем, мудрецы выигрывают, имея шляпы r цветов). Построим на основе G новый «большой» граф $\widetilde{G}$. Для этого каждую вершину графа G заменим на копию графа K_r. Если две вершины графа G были соединены ребром, проведем ребра между всеми парами вершин соответствующих копий. Полученный граф и есть граф $\widetilde{G}$.

Докажите, что на графе $\widetilde{G}$ мудрецы выигрывают при $k=qr$.

2.9. При $k = 3m$ существует граф с $4m$ вершинами и максимальной кликой не более $2m$, на котором мудрецы выигрывают.

3. Мудрецы на ориентированном графе

Теперь будем считать, что мудрецы находятся в вершинах ориентированного графа и мудрец А видит мудреца Б, только если в графе есть ориентированное ребро АБ.

3.1. Докажите, что на графе «ориентированный цикл из n звеньев» мудрецы выигрывают ($k = 2$).

3.2. Мудрецы сидят в вершинах ориентированного графа, каждый видит только соседних, шляпы двух цветов. Пусть c — наибольшее количество вершинно независимых циклов в графе. Докажите, что существуют графы, для которых больше чем c мудрецов смогут угадать свой цвет ($k = 2$).

3.3. Пусть a — наименьшее число вершин, которое следует удалить из графа, чтобы он стал ациклическим. Докажите, что, вообще говоря, не более a мудрецов смогут угадать цвет ($k = 2$).

3.4. Назовем ориентированный граф G *полудвудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части L и R так, что между вершинами части L нет ребер, между вершинами части R могут быть ребра, но соответствующий граф ациклический, а между частями L и R могут быть произвольные ребра.

Пусть k по-прежнему число шляп, s — произвольное натуральное число. Докажите, что если на полудвудольном графе $|L| = k - 2$, $|R| = s$, то мудрецы проигрывают.

Вариации предыдущих сюжетов

2.10. Три мудреца A, B, C все видят друг друга, за исключением того, что мудрец A не видит мудреца B; $k = 3$. Докажите, что мудрецы проигрывают.

2.11. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба, у них шляпы трех цветов. Каждый мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов, за исключением одного мудреца, который видит лишь одного соседа. Смогут ли мудрецы выиграть?

Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию. Будем называть пару цветов ab, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, *левой*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 1$, *правой*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 3$, и *инертной*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 2$.

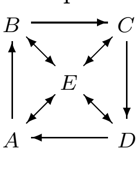
2.12. Докажите, что среди пар ab, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, поровну левых и правых.

2.13. Пусть $n \geqslant 4$. Докажите, что если ab — правая пара цветов, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, то среди пар цветов c_1a, c_2a, c_3a, где $\{c_1, c_2, c_3\} = V_{i-1}$, ровно одна левая пара цветов, ровно одна правая и ровно одна инертная.

2.14. То же, что в задаче 1.4, но есть $mk-1$ мудрецов и шляпы k цветов — по m шляп каждого цвета, причем m четно или k нечетно (или и то и другое одновременно). Одну шляпу незаметно прячут. Докажите, что наибольшее число мудрецов, которые смогут заведомо угадать свой цвет, равно $\frac{1}{2}(mk + m - 2)$.

2.15. Мудрецы стоят в две шеренги: в первой шеренге n мудрецов, а во второй — n^n мудрецов, у них шляпы $(n + 1)$ цветов. Мудрецы видят только тех, кто стоит в другой шеренге. Докажите, что мудрецы могут действовать так, чтобы хотя бы один угадал.

3.5. Какое наибольшее число мудрецов сумеют угадать цвет на следующем графе ($k = 2$)?



4. Гиперкуб

Под n-мерным гиперкубом мы понимаем граф, вершины которого занумерованы наборами из n нулей и единиц. Ребрами соединены вершины, номера которых отличаются ровно в одном разряде.

4.1. Докажите алгебраически, что 32 мудреца, стоящие в вершинах пятимерного гиперкуба, выигрывают ($k = 3$).

Пусть количество мудрецов равно n, а $k = 2$, причем цвета шляп мы будем обозначать нулями или единицами. Пусть фиксирована какая-либо стратегия мудрецов. Рассмотрим n-мерный гиперкуб и с его помощью «закодируем» эту стратегию. Это делается следующим образом. Вершины гиперкуба соответствуют наборам из n нулей и единиц. Свяжем с i-м мудрецом i-й элемент этого набора. Пусть i-й мудрец (для примера возьмем $n = 5$, $i = 2$) видит цвета шляп других мудрецов, скажем, 1, *, 0, 1, 1 (в качестве второго элемента мы поставили звездочку, которая символизирует, что в нашем примере i-й, т. е. второй мудрец не видит своей шляпы). В гиперкубе есть две вершины с таким набором координат: $(1, 0, 0, 1, 1)$ и $(1, 1, 0, 1, 1)$, причем эти вершины соединены ребром. Стратегия i-го мудреца, собственно, и состоит в том, что он должен «выбрать» одну из этих вершин. Поставим на ребре стрелку, ведущую от невыбранной вершины к выбранной. Расставив подобным образом стрелки на всех ребрах, мы получим наглядную модель стратегии.

Например, стратегия мудрецов из задачи «Интеллектуальный вызов» описывается следующей ориентацией двумерного гиперкуба:

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r] & (1,1) \arrow[d] \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

4.2. Пусть имеется n мудрецов и шляпы красного и синего цвета. Все всех видят. Как мы знаем из задачи 1.3, $[n/2]$ мудрецов смогут угадать свой цвет правильно. Докажите, что существует «сбалансированная по цветам» стратегия угадывания, а именно стратегия, обладающая следующим свойством: для любой раздачи шляп верно, что если роздано r красных и b синих шляп, то по крайней мере $[r/2]$ мудрецов с красными шляпами угадают цвет и $[b/2]$ мудрецов с синими шляпами угадают цвет.

4.3. Пусть $2n$ мудрецов пользуются оптимальной стратегией, т. е. стратегией, которая дает не менее n правильных догадок. Докажите, что эта стратегия «несмещенная» (в сторону одного из цветов), а именно: для каждого мудреца верно, что если рассмотреть все возможные расклады шляп, то ровно в половине случаев мудрец, угадывая, называет первый цвет и ровно в половине случаев — второй.

Решения

1.1. Пусть цвета — это остатки по модулю n. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Пусть k-й мудрец проверит гипотезу «сумма всех шляп равна k по модулю n». Тогда ровно один мудрец угадает.

1.2. Утверждение этой задачи — частный случай задачи 2.2.

1.3. Это теорема 2 из [1].

Для начала приведем стратегию, для которой 10 мудрецов выигрывают. Разделим всех мудрецов на 10 равных групп и воспользуемся задачей 1.1.

Предположим, что существует стратегия, гарантирующая при любой расстановке цветов 11 правильных угадываний. Рассмотрим все k^{10k} возможных расстановок. Рассмотрим какие-то k расстановок, отличающиеся только цветом первой шляпы. Поскольку стратегия детерминированная, во всех этих расстановках первый мудрец должен называть один и тот же цвет, значит, в этих k случаях он правильно угадает цвет в сумме только один раз. Разбив все начальные ситуации на такие группы по k, заключим, что всего первый мудрец правильно угадывает цвета k^{10k-1} раз. Поскольку для остальных мудрецов верно то же рассуждение, все мудрецы во всех ситуациях в сумме правильно угадают цвет $10k \cdot k^{10k-1}$ раз, что меньше чем $11 \cdot k^{10k}$.

1.4. [3, пункт 4.2] Для начала докажем, что никакая стратегия не может гарантировать строго больше $3k - 1$ угадавших в любой ситуации.

Рассмотрим произвольного мудреца. Если на нем шляпа того же цвета, что и спрятанная, то он видит $2k$ шляп одного цвета и $2k-2$ другого, и, таким образом, знает, что его цвет — тот которого меньше.

Если его шляпа не того же цвета, что спрятанная, то назовем такого мудреца *сомневающимся.* Рассуждая аналогично задаче 1.3, докажем, что при любой стратегии любой мудрец угадывает цвет шляпы ровно в половине тех ситуаций, в которых является сомневающимся мудрецом. В самом деле, пусть мудрец номер i является сомневающимся в ситуации A. Построим по ней ситуацию $h_i(A)$: поменяем местами шляпу i-го мудреца и спрятанную. Мудрец i остался сомневающимся, и цвета всех шляп, которые он видит, не поменялись, так что он должен назвать тот же цвет. Таким образом можно все ситуации, в которых i является сомневающимся, разбить на пары вида $(A, h_i(A))$, и в каждой паре мудрец угадывает ровно один раз. Таким образом, никакая стратегия не гарантирует больше $2k-1+\frac{2k}{2}=3k-1$ угадываний.

Построим стратегию, где угадываний будет ровно столько. Выпишем все возможные $\binom{4k}{2k}$ ситуаций, предпишем любому не сомневающемуся угадать свой цвет и далее будем по очереди каждому сомневающемуся в какой-то паре ситуаций $(A, h_i(A))$ сообщать, что он должен в этом случае сказать. Возьмем любую ситуацию A_1 и сомневающегося в ней мудреца i. Предпишем ему назвать цвет его шляпы в A_1, и, таким образом, в A_1 появится один правильно угадавший сомневающийся, а в $h_i(A)$ появится ошибшийся. Обозначим $A_2 = h_i(A)$ и повторим процесс: для A_2 найдем другого сомневающегося j, научим его правильно угадывать в ситуации A_2 и ошибаться в $h_j(A_2)$, и т. д., пока не окажется, что $A_k = A_1$. В этот момент во всех рассмотренных ситуациях есть поровну сомневающихся, угадавших цвет правильно и неправильно. Если еще не все сомневающиеся во всех ситуациях определились, продолжим процесс.

1.5. Утверждение этой задачи мы взяли в [7]. Задача предлагалась на олимпиаде Туймаада–2015. См. решение на с. 125.

1.6. Приведем пример стратегии, выигрывающей в 6 случаях из 8 (см. [2, с. 160]). Пусть мудрец, если видит на двух других шляпы одного цвета, называет другой цвет, а если видит шляпы разных цветов, молчит. Тогда если все три шляпы одного цвета, то в обоих таких случаях все три мудреца ошиблись, если же шляпы не одного цвета, то имеется две шляпы одного и одна другого. Тогда каждый из двоих владельцев шляп цвета большинства промолчит, а тот, на ком шляпа другого цвета, правильно назовет ее цвет, итого шесть выигрышных ситуаций.

Докажем, что стратегии лучше быть не может. Пусть стратегия предписывает какому-то мудрецу, видя некоторую пару цветов на двух остальных, назвать цвет. Это соответствует некоторым двум расстановкам шляп (на самóм мудреце шляпа может быть первого или второго цвета), так что мудрец сделает одно человекоугадывание и одно человеконеугадывание. Суммируя по всем ситуациям и по всем мудрецам, заключаем, что человекоугадываний и человеконеугадываний поровну.

В каждой выигрышной ситуации есть хотя бы одно человекоугадывание и ни одного человеконеугадывания, а в каждой проигрышной не больше трех человеконеугадываний (потому что мудрецов всего трое). Значит, соотношение количества выигрышных ситуаций к проигрышным не больше $3:1$.

Это рассуждение легко обобщается на случай произвольного числа мудрецов — обозначим его через n. Выше доказано, что число выигрышных ситуаций не больше чем $2^n\frac{n}{n+1}$. Оценка достигается для n вида $n = 2^k - 1$ при натуральном k. Для удобства будем кодировать каждую из 2^n ситуаций словом длины n из нулей и единиц. Нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение. Для $n = 2^k - 1$ из всех слов из нулей и единиц длины n можно выбрать $2^n\frac{n}{n+1}$ *кодовых слов* так, что любое слово или выбрано, или отличается в одном разряде от выбранного (такая выборка называется *совершенным кодом Хэмминга с кодовым расстоянием* 3 или *кодом Хэмминга, исправляющим одну ошибку*). Приведем стратегию, при которой мудрецы выигрывают на всех невыбранных последовательностях и проигрывают на выбранных.

Стратегия: то, что видит мудрец, есть слово без одного разряда. Если оно является куском кодового слова, то мудрец называет не тот символ, который в этом слове стоит в его разряде. Иначе он молчит. Тогда если слово не является кодовым, то оно отличается в одном разряде от кодового и только мудрец, соответствующий этому разряду, видит кусок правильного слова, и значит, назвав неправильный цвет, угадывает. Если исходное слово кодовое, то все мудрецы одновременно ошибаются.

2.1. Допустим, что у мудрецов есть выигрышная стратегия. Пусть v — центр лапы, u_1, u_2, u_3 — висячие вершины. Назначим вершине v первый цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета h_1, h_2, h_3.

Теперь проведем второй эксперимент: назначим вершине v второй цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета e_1, e_2, e_3.

Теперь проведем финальный эксперимент. Для каждого $i = 1$, 2, 3 обозначим через d_i цвет, который не был назван мудрецом u_i в первых двух экспериментах (если есть выбор, берем любой цвет из двух возможных). Для каждого i назначим висячей вершине u_i цвет d_i. Цвета шляп у соседей мудреца v уже заданы, значит, известен его ответ по стратегии. Назначим вершине v тот из цветов — первый или второй, — который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли.

2.2. Это лемма 8 из [1].

Докажем индукцией по числу вершин следующее утверждение. Пусть T — произвольное дерево, v — его произвольная вершина, c_1, c_2 — два произвольных цвета. Пусть мудрецы уже выбрали себе стратегию Г. Тогда существует распределение шляп по вершинам, проигрышное для мудрецов, при котором вершина v покрашена в цвет c_1 или c_2.

База индукции — одна вершина — тривиальна.

Докажем индукционный переход. При удалении вершины v дерево распадается на части T_1, T_2, … Обозначим через u_1, u_2, … вершины в этих поддеревьях, соседние с v. Аналогично предыдущей задаче проведем два эксперимента: в первом зададим шляпе в вершине v цвет c_1 и переберем всевозможные распределения шляп в деревьях T_i, неудачные для мудрецов, когда они используют в T_i стратегию Г. Пусть H_i — множество цветов, которые может принимать в этих неудачных раскрасках шляпа u_i. Во втором эксперименте зададим шляпе в вершине v цвет c_2 и построим множество цветов E_i, которые может иметь шляпа u_i во всевозможных неудачных раскрасках.

Заметим, что в обоих экспериментах стратегии мудрецов на каждом дереве T_i отличаются разве лишь функцией, которую использует мудрец u_i. Это значит, что если бы еще и цвет шляпы в вершине u_i был фиксирован, то для каждого расклада шляп на дереве T_i остальные мудрецы в обоих экспериментах давали бы одинаковые ответы.

По индукционному предположению множества H_i и E_i состоят не менее чем из двух элементов каждое и поэтому пересекаются. Пусть d_i — какой-нибудь цвет из $H_i \cap E_i$. При каждом i назначим вершине u_i цвет d_i, а для остальных вершин дерева T_i возьмем подходящую неудачную для мудрецов раскраску. Теперь у вершины v заданы цвета всех соседей, следовательно, ответ мудреца v задан однозначно. Назначим шляпе v тот из цветов c_1, c_2, который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли. Индукционный переход доказан.

2.3. Это лемма 2с из [7]. Можно считать, что $\ell_-(s_1 s_2) = 3$, $\ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 2$.

Проверим, что если $\ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 2$, то путь можно продолжить вправо, добавив к нему вершину s_{m+1} так, что цепочка $s_1 s_2 \ldots s_{m+1}$ опровергающая, а на ее краю снова выполнено неравенство $\ell_+(s_m s_{m+1}) \geqslant 2$.

Действительно, потенциально имеется два таких продолжения, скажем $s_m v_1$ и $s_m v_2$. Рассмотрим короткие цепочки $s_m v_1 w$ и $s_m v_2 w$ и назовем *перспективной* ту из них (любую из них, если годятся обе), для которой $v_i \neq f_{m+1}(s_m, w)$. Аналогично выберем перспективную цепочку для каждого из двух остальных значений w. Мы наметили три перспективные цепочки, по крайней мере у двух из них совпадают цвета v_i. В качестве s_{m+1} и следует взять цвет v_i.

Итак, мы можем продолжать нашу цепочку сколь угодно далеко вправо. Осталось позаботиться о том, чтобы эта цепочка «зациклилась». Перед зацикливанием у нас имеется длинная цепочка $x s_1 s_2 \ldots s_{n-1} y$, где для вершины x имеется три варианта выбора, а для вершины y — хотя бы два варианта. Мы без труда выберем $x = y$, для которых $x \neq f_n(s_{n-1} s_1)$.

В результате получилась циклическая опровергающая цепочка. Мудрецы проиграли.

2.4. Это лемма 2d из [7].

Если имеется двухэлементная цепочка s_1s_2, для которой $\ell_-(s_1s_2)+\ell_+(s_1s_2)>4$, то по утверждению предыдущей задачи мудрецы проиграли.

С другой стороны, заметим, что для заданного s

$$\ell_+(ss_1)+\ell_+(ss_2)+\ell_+(ss_3)=6 \tag{1}$$

(где s_1, s_2, s_3 — три различных цвета). Действительно, для каждого цвета w существует ровно два цвета s_i, для которых $s_i\neq f(s,w)$, а так как w можно выбрать тремя способами, получаем 6 вариантов продолжений.

В силу сделанного наблюдения

$$\sum_{s_1,s_2}\ell_+(s_1s_2)=18. \tag{2}$$

Таким образом, среднее значение величины $\ell_+(s_1s_2)$ равно 2. Аналогично среднее значение величины $\ell_-(s_1s_2)$ равно 2.

Возвращаясь к нашей задаче, заметим, что если для какой-то двухэлементной цепочки s_1s_2 выполнено неравенство

$$\ell_-(s_1s_2)+\ell_+(s_1s_2)<4,$$

то обязательно найдется цепочка $s_1's_2'$, для которой $\ell_-(s_1's_2')+$ $+\ell_+(s_1's_2')>4$, и мудрецы опять проиграют.

Таким образом, выигрышная стратегия может существовать лишь при условии $\ell_-(s_1s_2)+\ell_+(s_1s_2)=4$ для всех s_1, s_2.

2.5. Покажем, следуя [7], как может выглядеть стратегия мудрецов на цикле из $N=3n$ вершин, чтобы для нее не нашлось ни одной опровергающей цепочки.

Из утверждений задач 2.12, 2.13 следует, что для выигрышной стратегии количество правых пар цветов вида ab, где $a\in V_i$, $b\in V_{i+1}$, одинаково при всех i. (Аналогично одинаково количество левых пар и инертных пар.) Из этих же утверждений вытекает, что любая цепочка, опровергающая выигрышную стратегию, должна состоять из звеньев одинакового типа (т. е. в ней все пары цветов соседних шляп правые, либо все левые, либо все инертные). В этом случае всю цепочку будем называть левой, правой или инертной. Действительно, как мы можем видеть в решении задачи 2.13, любая левая пара цветов

ab_1 имеет единственное продолжение влево до более длинной цепочки c_1ab_1, и при этом пара c_1b опять левая. Аналогично однозначно задано продолжение правой цепочки вправо так, что на краю окажется опять правая цепочка. Таким образом, циклическая цепочка, опровергающая всех мудрецов, должна состоять из звеньев одного типа.

Мы подберем такую стратегию, для которой при всех i имеется три правые пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, три левые пары и три инертные. В этом случае элементы множеств V_i можно пронумеровать таким способом $V_i = \{v_1^i, v_2^i, v_3^i\}$, что цепочки $v_1^1v_1^2v_1^3\ldots$, $v_2^1v_2^2v_2^3\ldots$, $v_3^1v_3^2v_3^3\ldots$ правые. Мы, однако, выписали лишь начала этих цепочек, но при попытке построить циклическую цепочку может случиться, что цепочка не зацикливается с периодом N и при продолжении $v_1^1v_1^2v_1^3\ldots v_1^Nv_1^{N+1}$ оказывается, что $v_1^{N+1} = v_2^1$ или $v_1^{N+1} = v_3^1$. Обозначим

$$v_1^{N+1} = v_{\sigma(1)}^1, \qquad v_2^{N+1} = v_{\sigma(2)}^1, \qquad v_3^{N+1} = v_{\sigma(3)}^1.$$

Очевидно, σ — это перестановка трехэлементного множества. Именно этого и должны добиваться мудрецы: им нужно придумать такую стратегию, чтобы локальные опровергающие цепочки не могли зациклиться в N-элементную цепочку, из-за того что перестановка σ не имеет неподвижных точек. То же должно быть выполнено для левых и для инертных цепочек. Рассмотрим подробнее, как они могут быть устроены в терминах введенной нумерации цветов.

У нас имеется три левые пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, и можно считать, что это пары $v_1^iv_3^{i+1}$, $v_2^iv_1^{i+1}$, $v_3^iv_2^{i+1}$. Среди пар ab, $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$ тоже три левые. Заметим, что пара $v_3^{i-1}v_3^i$ правая, поэтому цепочка $v_3^{i-1}v_3^iv_1^{i+1}$ не является короткой опровергающей цепочкой, а тогда $v_3^{i-1}v_2^iv_1^{i+1}$ является опровергающей цепочкой, и это значит, что пара $v_3^{i-1}v_2^i$ есть «опровергающее продолжение» влево для пары $v_2^iv_1^{i+1}$, что означает, что пара $v_3^{i-1}v_2^i$ тоже левая. Рассуждая так же для других наборов индексов, получаем, что при всех i ($i = 1, 2, \ldots, N$) множество левых пар ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, состоит из пар

$$v_1^iv_3^{i+1}, \qquad v_2^iv_1^{i+1}, \qquad v_3^iv_2^{i+1}.$$

Но тогда левая цепочка, начинающаяся с цвета v_1^1, имеет вид $v_1^1v_3^2v_2^3v_1^4\ldots$ и, таким образом, $(N+1)$-й элемент этой цепочки (напомним, что N делится на 3) имеет вид $v^{N+1}_{\sigma(1)}$. Значит, левая цепочка тоже не зациклится, если у перестановки σ нет неподвижных точек. Так же обстоят дела и с инертными цепочками.

Осталось описать стратегию, которая создаст нам эту прекрасную картину. Пусть все мудрецы пользуются одной и той же стратегией

$$f_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где элемент в p-й строке и в q-м столбце — это $f_i(p,q)$ и мы пользуемся соглашением $v^{N+1}_i = v^1_{\sigma(i)}$, где $\sigma\colon 1 \to 2 \to 3 \to 1$ — циклическая перестановка трехэлементного множества. Иными словами, если $v^i_1 = 1$, $v^i_2 = 2$, $v^i_3 = 3$ при $1 \leqslant i \leqslant N$, то $v^{N+1}_1 = 2$, $v^{N+1}_2 = 3$, $v^{N+1}_3 = 1$. Это соглашение обеспечивается свойством $f_i(\sigma(p), \sigma(q)) = \sigma(f_i(p,q))$, которое нетрудно проверить.

Проверку того, что эта стратегия обеспечивает поровну правых, левых и инертных пар цветов, оставляем читателю.

2.6. В решении предыдущей задачи показана роль того, что длина цикла N делится на 3. Оказывается, что опровергающие цепочки имеют 3-периодическую структуру и благодаря этому мудрецы могут не позволить опровергающим цепочкам зациклиться.

В случае, когда N не делится на 3, цепочки обязательно зацикливаются. Для случая, когда при всех i имеется три правые пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, три левые и три инертные пары, это нетрудно понять из предыдущего решения.

Но возможны и другие количества правых, левых и инертных пар. Для полного решения требуется внимательно изучить структуру цепочек в этих случаях. Читатель, который до сих пор не утратил любопытства в этом вопросе, может обратиться за подробностями к статье [7].

2.7. Это теорема 1 из [1].

Формулировка задачи 3.4 подсказывает нам, что хотя бы в одной из долей должно быть не меньше $k-1$ вершины. Оказывается, эта оценка реализуется.

Пусть левая доля L нашего графа состоит из $n = k - 1$ вершины, а правая доля R — из $m = k^{k^n}$ вершин. Пусть C — множество всевозможных раскрасок доли L в k цветов. Ясно, что $|C| = k^n$. Тогда $m = k^{|C|}$ и, значит, число m равно количеству отображений из множества C во множество цветов $\{1, 2, \ldots, k\}$. Зафиксируем какую-нибудь биекцию между вершинами правой доли и множеством отображений из C во множество цветов $\{1, 2, \ldots, k\}$. Пусть мудрецы в правой доле в качестве стратегии используют эту биекцию: у каждого мудреца имеется «свое личное» отображение из C во множество цветов, и, когда мудрец видит раскраску левой доли (это элемент из C), он называет в качестве цвета значение этого отображения на этой раскраске.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть c_R — фиксированная раскраска правой доли. Рассмотрим множество C' всех таких раскрасок c_L левой доли, для которых в том случае, когда весь граф покрашен с помощью объединенной раскраски (c_L, c_R), никто из мудрецов правой части не угадал цвет. Тогда $|C'| < k$.

Доказательство леммы приведено ниже, а сейчас мы определим стратегию для мудрецов из левой доли L. Когда задана раскраска правой доли (и уже задана стратегия мудрецов в правой доле), мы можем построить множество C' из леммы. Оно будет содержать не более чем $n = k - 1$ элементов. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — список раскрасок левой доли, содержащий все раскраски из C'. Пусть тогда i-й мудрец в левой доле называет цвет $c_i(i)$.

Это выигрышная стратегия для мудрецов. Действительно, если никто из мудрецов правой доли не угадал, то левая доля раскрашена с помощью одной из раскрасок множества C'. Если эта раскраска присутствует в нашем списке как c_j, то j-й мудрец левой доли угадал цвет: он назвал цвет $c_j(j)$!

Доказательство леммы. Предположим на секунду, что множество C' содержит k различных элементов $c_1, \ldots, c_k$. Возьмем любое отображение f из C в $\{1, 2, \ldots, k\}$, которое принимает на этих k элементах k различных значений. Пусть $v \in R$ — вершина, соответствующая этому отображению f. Тогда множество цветов $\{f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k)\}$ содержит все k цветов и, следовательно, один из этих цветов $f(c_i)$ совпадает с цветом вершины v. Получается, что при использовании в левой части раскраски c_i кто-то из мудрецов правой части все же угадал цвет правильно, что противоречит определению множества C'. Лемма доказана. □

2.8. Мы изложим рассуждение леммы 1 из [4] человеческим языком. На графе G мудрецы выигрывают, имея шляпы q цветов, — будем называть эти цвета теплыми. На графе K_r мудрецы выигрывают, имея шляпы r цветов, — будем называть эти цвета холодными. Покраску вершин графа $\widetilde{G}$ в qr цветов можно представлять себе как указание для каждой вершины двух цветов — одного теплого цвета и одного холодного. И тогда при угадывании мудрецы тоже называют два цвета: один теплый и один холодный.

Пусть мудрецы называют холодный цвет, глядя только на своих соседей по копии K_r (и на холодные компоненты цветов их шляп). Тогда ровно один мудрец в каждой копии угадает свой холодный цвет правильно. Таких мудрецов назовем удачливыми. Каждый мудрец может с легкостью определить, кто из мудрецов в соседней копии K_r является удачливым. Для определения теплого цвета мудрец должен использовать стратегию на графе G, полагая, что его соседями в смысле графа G являются лишь удачливые мудрецы из соседних копий, и принимая во внимание лишь теплую компоненту цвета шляп этих мудрецов. Тогда по крайней мере один удачливый мудрец правильно угадает свой теплый цвет.

2.9. Это сразу следует из утверждений задач 1.5 и 2.8.

2.10. Подсчетом в стиле решения задачи 1.3 нетрудно убедиться, что в сумме по всем раскладам шляп имеется 3^3 верных угадываний — столько же, сколько и самих раскладов. Таким образом, при применении выигрышной стратегии для каждого расклада шляп ровно один мудрец должен угадать верно.

Осталось показать, что в нашем случае для любой стратегии существует расклад шляп, на котором угадывают два мудреца. Дадим мудрецу С произвольную шляпу. Потом дадим мудрецу А шляпу того цвета, который он назовет согласно стратегии, увидев, что надето на С. Наконец, дадим мудрецу Б шляпу того цвета, который он назовет согласно стратегии, увидев, какие шляпы надеты на А и С.

2.11. Обозначим мудрецов A, B, C, D, и пусть A не видит B. Сначала покажем, что найдутся две трехэлементные цепочки $a_1d_1c_1$ и $a_1d_1c_2$, в которых A и D не угадывают. Для этого аналогично решению задачи 2.4 рассмотрим все 6 способов раздать цвета мудрецам A и D так, чтобы A не угадал (его стратегия зависит только от цвета D), и 18 вариантов продолжить эти цепочки в сторону C. Так как D угадывает только в девяти случаях, есть цвет d_1, который он называет максимум 3 раза. Тогда среди шести цепочек с началом a_1d_1 или a_2d_1 хотя бы три — проигрышные для D. По принципу Дирихле найдутся две трехэлементных цепочки $a_1d_1c_1$ и $a_1d_1c_2$, в которых A и D не угадывают. Выдадим мудрецу A цвет a_1, а мудрецу D — цвет d_1.

Теперь изучим стратегию мудреца B. Пусть $f_B(a_1, c_1) = b_1$, $f_B(a_1, c_2) = b_2$. Выдадим ему третий цвет b_3 (любой, если $b_1 = b_2$).

Заметим, что теперь мы знаем всё про соседей мудреца C: у B шляпа цвета b_1, а у D — цвета d_1. Но тогда $f_C(b_1, d_1)$ не совпадает с одним из c_1, c_2. Выдав мудрецу C неподходящий цвет, мы заставим всех мудрецов ошибиться.

2.12. Это лемма 3а из [7]. Воспользуемся формулой (2) и аналогичной формулой для ℓ_-:

$$\sum_{a,b} \ell_+(ab) = \sum_{a,b} \ell_-(ab) = 18.$$

Поскольку мы рассматриваем выигрышную стратегию, для любых a, b выполнено равенство $\ell_+(ab) + \ell_-(ab) = 4$. Следовательно, каждому слагаемому 1, 2, 3 в первой сумме соответствует слагаемое 3, 2, 1 во второй сумме. Значит, слагаемых 1 и 3 в обеих суммах поровну, чтд.

2.13. Это лемма 3d из [7]. Пусть $V_{i+1} = \{b, b_1, b_2\}$. Тогда аналогично формуле (1) с учетом равенства $\ell_-(s_1s_2) + \ell_+(s_1s_2) = 4$ имеем

$$\ell_-(ab) + \ell_-(ab_1) + \ell_-(ab_3) = 6.$$

Так как $\ell_-(ab) = 3$, остальные два слагаемых — это 1 и 2. Можно считать, что $\ell_-(ab_1) = 1$, и значит, существует короткая опровергающая цепочка, скажем c_1ab_1. Тогда $\ell_-(c_1a) = 1$, поскольку в противном случае $\ell_-(c_1a)+\ell_+(ab_1) \geqslant 5$ и по задаче 2.3 стратегия мудрецов не выигрышная. Применяя аналогичную формулу

$$\ell_-(c_1a) + \ell_-(c_2a) + \ell_-(c_3a) = 6,$$

мы видим, что здесь $\ell_-(c_1a) = 1$, значит, остальные два слагаемых — это 2 и 3, что и требовалось.

2.14. См. [1, теорема 16.iii].

2.15. Решение этой задачи требует более сложной конструкции, чем задача 2.7. Подробности см. в [4]

3.1. Все мудрецы, кроме одного, называют цвет, противоположный тому, который видят, а последний мудрец называет тот цвет, который видит.

3.2. Это пример 6 из [1]. То, что не менее c мудрецов могут угадать цвет, следует из утверждения предыдущей задачи. Пример графа, для которого число угадывающих мудрецов больше числа независимых циклов, приведен в задаче 3.5.

3.3. Это лемма 4 из [1]. Пусть при удалении вершин v_1, v_2, ..., v_a граф становится ациклическим. Остальные вершины v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_n пронумеруем так, чтобы ребра из этих вершин шли только в сторону убывания номеров. Теперь выдадим шляпы первым a мудрецам произвольно. Для каждого следующего мудреца уже заданы цвета шляп у всех, кого он видит, следовательно, ответ, который он должен дать по стратегии, уже известен. Дадим этому мудрецу шляпу так, чтобы он не угадал.

При таком распределении шляп только первые a мудрецов смогут что-нибудь угадать.

3.4. Это теорема 5 из [4]. Возьмем произвольную стратегию мудрецов f и докажем, что она проигрышная.

Пусть A — множество цветов шляп, в котором один цвет пропущен, $|A| = k - 1$. Если a — какой-нибудь цвет, обозначим через w_a набор из $k-2$ цветов $(a, a, \ldots, a)$. Мудрецам из части L мы дадим набор одинаковых шляп вида w_a, где $a \in A$.

Пусть r_1, r_2, $\ldots r_s$ — вершины из части R, пронумерованные так, чтобы ребра шли в сторону убывания номеров. Для удобства мы можем считать, что каждый мудрец в R видит всех мудрецов с меньшими номерами. Построим набор цветов $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ для мудрецов из части R. Для этого последовательно выберем

$$\begin{aligned}
&y_1 \notin \{f_{r_1}(w_a),\ a \in A\};\\
&y_2 \notin \{f_{r_2}(w_a, y_1),\ a \in A\};\\
&\quad \dots\\
&y_s \notin \{f_{r_s}(w_a, y_1, y_2 \dots, y_{s-1}),\ a \in A\}.
\end{aligned}$$

Поясним возможность выбора чуть подробнее на примере y_s. Мудрец в вершине r_s видит всех мудрецов части L (цвета их шляп заданы набором w_a), кроме того, он видит мудрецов части R с меньшими номерами. Значит, по стратегии определен его ответ

$$f_{r_s}(w_a, y_1, y_2 \dots, y_{s-1}).$$

Поскольку цвет a пробегает $(k-1)$-элементное множество A, множество, написанное в правой части для выбора y_s, содержит не более $k-1$ элементов, поэтому цвет y_s действительно можно выбрать.

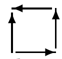
Итак, мы построили набор цветов Y. Пусть ℓ_1, ℓ_2, $\dots \ell_{k-2}$ — вершины из части L. Выберем цвет $b \in A$, не совпадающий ни с одним из цветов $f_{\ell_1}(Y)$, $\dots$, $f_{\ell_{k-2}}(Y)$. Тогда для раскраски шляп (w_b, Y) ни один мудрец не угадает цвет правильно.

3.5. Это пример 4 из [1]. Ответ: два мудреца могут угадать свой цвет правильно.

4.1. Выпишем тождество, аналогичное тождеству $(*)$ на с. 125 и с его помощью назначим линейные функции, задающие ответы мудрецов. Чтобы не выписывать тождество детально (оно очень громоздкое), нам понадобится предварительная работа.

Под N-мерным гиперкубом Q_N мы понимаем граф, содержащий 2^N вершин, которые пронумерованы двоичными N-значными числами, а ребрами соединены вершины, номера которых отличаются лишь в одном двоичном разряде. Приводимые ниже конструкции можно выполнить для любого гиперкуба, но к задаче о мудрецах они применимы лишь при $N \equiv 2 \pmod 3$.

Лемма. На ребрах гиперкуба Q_N можно так ввести ориентацию, что каждый 4-цикл в Q_N будет содержать 3 ребра, указывающие на одно из направлений обхода цикла, и 1 ребро, указывающее в другом направлении.

Доказательство. Индукция по N. База $N = 2$. 

Индукционный переход. Пусть ориентация на графе Q_N уже задана. Мы можем считать, что граф Q_{n+1} состоит из двух копий графа Q_N — «левой» и «правой» — и из каждой вершины левой копии ведет ребро в соответствующую вершину правой копии. Пусть в левой копии все ребра ориентированы в соответствии с индукционным предположением, а в правой копии введем противоположную ориентацию. Наконец, на ребрах, ведущих из левой копии в правую, зададим направление слева направо. Нетрудно видеть, что эта ориентация удовлетворяет требованиям. □

Каждую вершину графа отождествим с какой-нибудь независимой переменной.

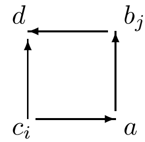
Напомним, что в графе Q_N все вершины имеют степень N. Пусть a — произвольная вершина графа; b_1, b_2, $\ldots$ — вершины, в которые из a выходит ребро; c_1, c_2, $\ldots$ — вершины, из которых в a ведет ребро. Для каждой вершины a графа Q_N рассмотрим выражение f_a, равное квадрату линейной комбинации

$$f_a = (a + b_1 + b_2 + \ldots - c_1 - c_2 - \ldots)^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим сумму $\sum f_a$ этих квадратов по всем вершинам графа. Раскроем все скобки. Для каждой вершины a слагаемые вида a^2 будут присутствовать в этой сумме с кратностью $N+1$, поскольку каждое такое слагаемое появляется при раскрытии скобок f_a, f_{b_1}, f_{b_2}, $\ldots$, f_{c_1}, f_{c_2}, $\ldots$ и только в них. Далее, каждому ребру ab соответствует слагаемое $+2ab$, появляющееся при раскрытии скобок в выражении f_a, а также слагаемое $-2ab$, появляющееся при раскрытии скобок в выражении f_b. При раскрытии других скобок такие слагаемые появиться не могут, поэтому все они сокращаются.

Кроме таких слагаемых, при раскрытии скобок f_a появляются слагаемые вида $-2b_jc_i$. Разберемся с ними подробнее. Пусть a имеет номер 00, b_j — номер 01, c_i — номер 10.

Рассмотрим также вершину d с номером 11 (ограничимся выписыванием битов, где у номеров есть различия). Очевидно, $f_d = (d - b_j - c_i + \ldots)^2$, поэтому при раскрытии скобок в выражении f_d слагаемое $2b_jc_i$ присутствует со знаком «+». В результате оно сократится. Аналогично рассматриваются другие соответствующие лемме возможные ориентации ребер в цикле.



Итак, $\sum_a f_a = (N+1) \cdot \sum_a a^2$.

Вернемся к задаче о мудрецах. Пусть $N \equiv 2 \pmod 3$. В этом случае сумма $\sum_a f_a$ делится на 3. При этом она состоит из 2^N слагаемых. Очевидно, $f_a \equiv 0$ или $1 \pmod 3$. Поэтому хотя бы одно из слагаемых f_a должно быть нулевым по модулю 3 (а при нечетных N — даже два слагаемых). Для каждой вершины a в обозначениях формулы (3) потребуем, чтобы мудрец в вершине a в качестве своей гипотезы назвал значение выражения $c_1 + c_2 + \ldots - b_1 - b_2 - \ldots$ Тогда мудрец, находящийся в вершине a, для которой $f_a \equiv 0 \pmod 3$, угадает цвет своей шляпы.

4.2. Это лемма 11 из [1]. Будем пользоваться гиперкубом для описания стратегий (см. текст перед условием задачи).

Разобьем гиперкуб на слои: к i-му слою отнесем все вершины, у которых сумма координат равна i. Количество (неориентированных) ребер, выходящих из некоторой вершины v к вершинам следующего слоя, будем называть *верхней степенью* этой вершины $\operatorname{udeg} v$, а число ребер, выходящих к вершинам предыдущего слоя, — *нижней степенью* вершины $\operatorname{ddeg} v$.

Рассмотрим ребро между i-м и $(i+1)$-м слоями и соответствующего мудреца (=меняющуюся координату), у вершины в $(i+1)$-м слое эта координата равна 1, а в i-м слое — 0. Стратегия задает ориентацию на ребре. Если это ребро ориентировано от i-го слоя к $(i+1)$-му, то мудрец угадает, когда на нем шляпа цвета 1, и не угадает в противном случае. Если же ребро ориентировано от $(i+1)$-го слоя к i-му, то мудрец угадает, когда на нем шляпа цвета 0, и не угадает в противном случае. Ясно, что мы заведомо получим сбалансированную стратегию, если для каждой вершины v из i-го слоя число приходящих в нее ребер из $(i+1)$-го слоя будет равно $[\frac{1}{2}\operatorname{udeg} v]$, а число приходящих в нее ребер из $(i-1)$-го слоя будет равно $[\frac{1}{2}\operatorname{ddeg} v]$.

Построим сбалансированную стратегию, т. е. введем ориентации на ребрах так, чтобы были выполнены свойства верхних и нижних степеней, упомянутые выше. Идея проста: возьмем произвольное ребро между i-м и $(i+1)$-м слоями, ориентируем его как-нибудь и будем строить ориентированный путь, добавляя новые ребра так, чтобы путь всё время оставался между i-м и $(i+1)$-м слоями. Если путь невозможно продолжить (ни вперед, ни назад) и мы ориентировали еще не все ребра, начнем строить следующий путь, и т. д. Когда все ребра будут ориентированы, получится сбалансированная стратегия.

4.3. [1, предложение 13] Когда количество мудрецов четно, оптимальная стратегия характеризуется тем, что у каждой вершины гиперкуба одинаковы входящая и выходящая степени. В этом случае на гиперкубе можно построить ориентированный эйлеров путь. Стратегия i-го мудреца — это ориентация ребер, параллельных одному направлению (i-му орту). Половина вершин гиперкуба находится при этом в (левой) грани $x_i = 0$, а другая половина — в (правой) грани $x_i = 1$. При этом стрелки, направленные влево, соответствуют случаю, когда мудрец назвал 0, а стрелки, направленные вправо, — когда мудрец назвал 1. Эйлеров путь содержит поровну тех и других стрéлок.

Литература

[1] *Butler S., Hajiaghayi M., Kleinberg R., Leighton T.* Hat Guessing Games // SIAM J. Discrete Math. Vol. 22. No. 2. 2008. P. 592—605.

[2] *Do N.* Communicating with eyes, hats and light bulbs // Australian Math. Soc. Gazette. Vol. 33. N. 3. 2006. P. 157–164.

[3] *Fiege U.* You can leave your hat on (if you guess its color) // Technical report MCS04-03. Computer Science and Applied Mathematics. The Weizmann Institute of Science, 2004. P 10.

[4] *Gadouleau M., Georgiou N.* New constructions and bounds for Winkler's hat game. `http://arxiv.org/pdf/math/1311.2022v1.pdf`

[5] *Krzywkowski M.* Hat problem on a graph. Ph.D. dissertation, University of Exeter, 2012.

[6] *Paterson M., Stinson D.* Yet another hat game // The electronic journal of combinatorics. Vol. 17. 2010. # R86.

[7] *Szczechla W.* The three-colour hat guessing game on the cycle graphs // arXiv:1412.3435v2.

Международная олимпиада «Туймаада–2015»

А. Голованов, М. Иванов, К. Кохась

Международная олимпиада школьников «Туймаада» проводится в Якутии ежегодно начиная с 1994 г. С самого начала эта олимпиада была задумана не только как международная (кроме школьников из разных регионов России, в разные годы в ней участвовали представители Румынии, Болгарии, Монголии и других стран), но и как многопредметная — в состав олимпиады входят соревнования по математике, физике, химии и информатике. В последние 17 лет олимпиада по математике в значительной степени составляется членами жюри Петербургской олимпиады школьников по математике; опытный читатель без труда заметит, с одной стороны, некоторое стилистическое родство двух олимпиад, а с другой — присущий международным математическим соревнованиям технический уклон.

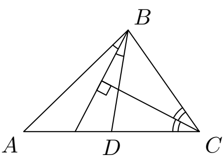
Младшая лига

Первый день

М1. Дано 100 различных вещественных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, разность не была равна 1. (*А. Голованов*)

М2. Назовем натуральное число *забавным*, если сумма его цифр, увеличенная на 1, является делителем этого числа. Какое наибольшее количество подряд идущих натуральных чисел могут оказаться забавными? (*О. Подлипский*)

М3. В треугольнике ABC проведена медиана BD. Биссектрисы углов ABD и ACB перпендикулярны. Найдите наибольшее возможное значение угла BAC. (*С. Берлов*)

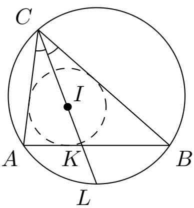


М4. Докажите, что существует такое натуральное n, что в десятичной записи каждого из чисел $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, …, $\sqrt[10]{n}$ сразу после запятой стоят цифры 2015… (*А. Голованов*)

Второй день

М5. К натуральному числу прибавляют его наибольший собственный делитель, к получившемуся числу прибавляют его наибольший собственный делитель и т. д. Докажите, что после выполнения нескольких операций получится число, кратное 3^{2000}. (*А. Голованов*)

М6. Существует ли такая возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n), что среди разностей $a_{n+1} - a_n$ встречаются все натуральные числа ровно по одному разу, а среди разностей $a_{n+2} - a_n$ встречаются только натуральные числа, бóльшие 2015, причем тоже ровно по одному разу? (*А. Голованов*)



М7. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника в точке L. Точка I — центр вписанной окружности. Оказалось, что $IK = KL$. Докажите, что $CI = IL$. (*Д. Ширяев*)

М8. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба. На каждом из мудрецов красная, синяя или зеленая шляпа. Мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Мудрецы одновременно должны высказать предположение о цвете своей шляпы. Если хотя бы один из мудрецов угадал, они выиграли. Мудрецы имели возможность обсудить ситуацию до начала игры. Как им действовать, чтобы выиграть? (*К. Кохась*)

Старшая лига

Первый день

С1. На футбольном поле тренировалось n футболистов — нападающих и вратарей. Всего на тренировке было забито k голов. Докажите, что после тренировки Фабио Капелло может так раздать номера от 1 до n игрокам, чтобы для любого гола разность между номерами нападающего и вратаря была не менее $n - k$. (*С. Берлов*)

C2. См. задачу М3.

C3. Многочлен $P(x, y)$ с вещественными коэффициентами таков, что $P(x + 2y, x + y) = P(x, y)$. Докажите, что для некоторого многочлена $Q(t)$ имеет место равенство

$$P(x, y) = Q\big((x^2 - 2y^2)^2\big).$$

(*А. Голованов*)

C4. Для каждого n представим число $n!$ в виде ab^2, где a свободно от квадратов. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$2^{(1-\varepsilon)n} < a < 2^{(1+\varepsilon)n}.$$

(*М. Иванов*)

Второй день

C5. См. задачу М5.

C6. Даны целые числа $0 \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant a$, причем $a > 14$. Докажите, что не всякое натуральное число n можно записать в виде

$$n = x(ax + b) + y(ay + c) + z(az + d),$$

где x, y, z — некоторые целые числа. (*К. Кохась*)

C7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, точка O — центр описанной окружности. Оказалось, что $R - r = OM$. Биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке D, а биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает прямую AB в точке E. Найдите все возможные значения угла CED. (*Д. Ширяев*)

C8. На плоскости отмечено $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ точек, некоторые из них соединены непересекающимися отрезками (ни одна из точек не лежит на отрезке, соединяющем другие точки). Оказалось, что плоскость разбилась на параллелограммы и бесконечную область. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено? (*А. Купавский, А. Полянский*)

Решения задач

М1. Решение 1 (интеллектуальное заполнение таблицы). Занумеруем клетки квадрата числами от 1 до 100 так, чтобы выполнялось условие задачи, т. е. чтобы соседние числа не стояли в соседних клетках. Например, в первых пяти строках таблицы выпишем по возрастанию все четные числа, а в последних пяти строках — по возрастанию все нечетные.

Разобьем данное множество чисел на максимально длинные *цепочки* вида a, $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $a+k$ таким образом, чтобы их нельзя было увеличить, т. е. чтобы $a-1$ и $a+k+1$ не лежали в исходном множестве (цепочка может состоять и из одного числа).

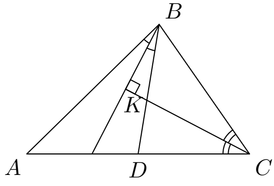
Теперь заполним таблицу. Для этого пронумеруем числа нашего множества номерами от 1 до 100 и расположим в таблице в соответствии с нумерацией клеток. Нумеровать числа будем следующим образом: пронумеруем числа первой цепочки по порядку, потом второй цепочки по порядку и т. д. Понятно, что у чисел, отличающихся на 1, номера тоже отличаются на 1, а значит, эти числа не будут находиться в соседних клетках.

Решение 2 (перестройка). Расставим числа в таблице как попало. При этом, возможно, кое-где в таблице найдутся соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются ровно на 1. Назовем такую сторону *плохой*, а числа, отличающиеся на 1, *конфликтующими.*

Докажем, что в любой расстановке, содержащей хотя бы одну плохую сторону, можно так поменять местами два числа, чтобы количество плохих сторон уменьшилось. Действительно, пусть к плохой стороне примыкает число a. Постараемся найти такое число b, при обмене которого с a уменьшится количество плохих сторон. У числа a не более четырех соседей, каждый из которых конфликтует не более чем с двумя числами. Это значит, что существует не более восьми чисел b, при перестановке которых в клетку, где сейчас стоит a, у этой клетки появится плохая сторона. Далее, a конфликтует не более чем с двумя числами, у каждого из которых не более четырех соседей. Значит, есть не более восьми клеток, у которых при постановке в них числа a появится плохая сторона. Поэтому всего имеется не менее $99-8-8=83$ чисел, которые можно поменять с a так, чтобы количество плохих сторон уменьшилось.

Повторяя такие обмены, мы получим расстановку чисел, в которой плохих сторон нет.

М2. Пусть существует три забавных числа подряд. Тогда одно из них дает остаток 2 при делении на 3. Но по условию оно должно делиться на свою сумму цифр, увеличенную на 1. Таким образом, оно делится на 3, а его сумма цифр не делится на 3. Это невозможно. Значит, подряд идущих забавных чисел не может быть более двух. Осталось привести пример двух подряд идущих забавных чисел: 39 и 40.



М3. Пусть K — точка пересечения перпендикулярных биссектрис из условия задачи. Тогда

$$\angle KCB + \angle KBD + \angle DBC = 90^\circ.$$

Рассмотрим углы треугольника ABC:

$$180^\circ = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = \\ = 2\angle KCB + 2\angle ABD + \angle DBC + \angle BAC.$$

Следовательно, $\angle DBC = \angle CAB$. Таким образом, треугольники ABC и BDC подобны по двум углам. Обозначим $BC = a$, $AD = DC = \frac{b}{2}$. Тогда из подобия $\frac{a}{b/2} = \frac{b}{a}$, откуда $b = a\sqrt{2}$. Теперь очевидно, что максимально возможное значение угла BAC в треугольнике ABC со сторонами a и $a\sqrt{2}$ реализуется в том случае, когда прямая AB касается окружности с центром C и радиусом a. В этом случае треугольник BAC равнобедренный прямоугольный и $\angle BAC = 45^\circ$. Отметим, что условие задачи для этого треугольника выполняется.

М4. В десятичной записи числа $\sqrt[k]{n}$ после запятой стоят нужные цифры, если число $\sqrt[k]{n}$ для некоторого натурального m лежит в промежутке $[m+0{,}2015; m+0{,}2016)$ длины $\varepsilon = 0{,}0001$ или, что то же самое, $n \in \big[(m+0{,}2015)^k; (m+0{,}2016)^k\big)$.

Поэтому для доказательства существования искомого n нам достаточно найти 10 промежутков

$$\Delta_k = \big[(m_k + 0{,}2015)^k; (m_k + 0{,}2016)^k\big),$$

содержащих одно и то же натуральное число. Мы добьемся этого, построив последовательность вложенных промежутков $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_{10}$, в которой промежуток Δ_1 имеет длину больше 1 и, следовательно, содержит натуральное число.

Отрезок Δ_{10} при всех достаточно больших m_{10} имеет длину больше 1 и, следовательно, содержит натуральное число.

Чтобы промежуток Δ_k содержался в Δ_{k+1}, достаточно, чтобы имело место включение

$$[m_k+0{,}2015; m_k+0{,}2016) \subset [(m_{k+1}+0{,}2015)^{\frac{k+1}{k}}; (m_{k+1}+0{,}2016)^{\frac{k+1}{k}}).$$

Найти натуральное m_k по заданному m_{k+1} заведомо удастся, если длина последнего промежутка будет больше 2.

Докажем, что при каждом натуральном k выполняется неравенство

$$(x+\varepsilon)^{\frac{k+1}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}} > 2$$

при всех достаточно больших x. Действительно,

$$(x+\varepsilon)^{\frac{k+1}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}} = x^{\frac{k+1}{k}} \left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{k+1}{k}} > \frac{k+1}{k}\cdot\frac{\varepsilon}{x}\cdot x^{\frac{k+1}{k}} = \frac{k+1}{k}\cdot x^{\frac{1}{k}}\cdot\varepsilon$$

(мы воспользовались неравенством Бернулли). При $x > 20\,000^k$ последнее выражение, разумеется, больше 2.

Поскольку $m_k \geqslant (m_{k+1}+0{,}2015)^{\frac{k+1}{k}} - 0{,}2015$, за счет выбора достаточно большого m_{10} мы можем сделать достаточно большими остальные m_k и, следовательно, построить требуемый набор отрезков.

М5. Во-первых, заметим, что из нечетного числа с помощью такой операции получается четное число. Далее, пусть нам дано число $2^k a$, $k \geqslant 1$ и a нечетное. Тогда с ним будет происходить следующее:

$$2^k a \longrightarrow 2^{k-1}3a \longrightarrow 2^{k-2}3^2a \longrightarrow \ldots \longrightarrow 3^k a.$$

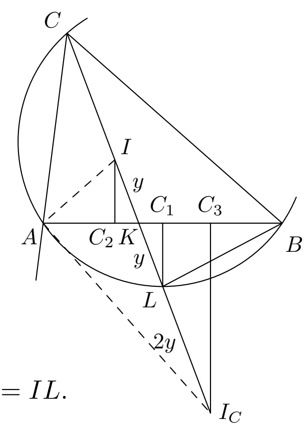
Теперь докажем по индукции, что мы получим нечетное число, делящееся на сколь угодно большую степень тройки. База проверена выше: мы получили нечетное число, делящееся на 3. Переход: если уже получено число $3^n a$, $n \geqslant 1$ и a нечетное, то, применяя операцию три раза подряд, получим

$$3^n a \longrightarrow 2^2\cdot 3^{n-1}a \longrightarrow 2\cdot 3^n a \longrightarrow 3^{n+1}a, \quad \text{чтд.}$$

М6. Рассмотрим все «двойные» разности $a_{n+2}-a_n$, не превосходящие $2015 \cdot 6$. Любая такая разность есть сумма двух «простых» разностей: $a_{n+2}-a_n = (a_{n+2}-a_{n+1}) + (a_{n+1}-a_n)$. У двойных разностей, не превосходящих $2015 \cdot 3$ (количество таких разностей равно $2015 \cdot 2$), обе простые разности не превосходят $2015 \cdot 3$.

Для двойных разностей от $2015\cdot3+1$ до $2015\cdot6$ (таких разностей $2015\cdot3$) хотя бы одна из простых разностей не превосходит $2015 \cdot 3$. При этом каждую простую разность мы посчитали не более двух раз, а всего простых разностей, не превосходящих $2015 \cdot 3$, мы насчитали $2015 \cdot (2 \cdot 2 + 3) = 2015 \cdot 7$. Противоречие.

М7. Решение 1. Пусть C_1 — середина AB, I_c — центр вневписанной окружности со стороны AB, C_2 и C_3 — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AB. Так как C_1 делит C_2C_3 пополам, $IL = LI_c$.



Осталось заметить, что внешняя и внутренняя биссектрисы делят отрезок CK в одинаковом отношении внутренним и внешним образом, т. е.

$$\frac{CI}{IK} = \frac{CI_c}{I_cK} \Leftrightarrow \frac{CI}{\frac{1}{2}IL} = \frac{CI+2IL}{\frac{3}{2}IL} \Leftrightarrow CI = IL.$$

Решение 2. Обозначим углы треугольника ABC через α, β, γ соответственно. Заметим, что $AL = LB$. В силу вписанности четырехугольника $ABCL$ получаем $\angle IBL = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, $\angle BLI = \alpha$, следовательно, $\angle BIL = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, т. е. треугольник BIL равнобедренный. Значит, $AL = BL = LI = \frac{1}{2}KL$.

Далее заметим, что $\angle ACK = \angle KBL$, следовательно, треугольники ACK и LBK подобны. Тогда

$$\frac{AC}{BL} = \frac{AK}{KL} \;\Rightarrow\; \frac{AC}{AK} = \frac{BL}{KL} = \frac{2BL}{IL} = 2.$$

Мы получили, что в треугольнике CAK биссектриса AI делит основание в отношении боковых сторон, т. е. в отношении $2:1$, что равносильно вопросу задачи.

М8. Пусть цвета — это остатки 0, 1, 2 по модулю 3. Тогда нам необходимо найти такие функции $f_A(D, B)$, $f_B(A, C)$, $F_C(B, D)$, $f_D(C, A)$, чтобы для любых значений A, B, C, D хотя бы одна из функций имела значение, совпадающее со значением соответствующей переменной по модулю 3.

Будем искать эти функции в классе линейных функций.

Сначала подберем выражения $A \pm B \pm C + \text{const}$, $A \pm C \pm$ $\pm D + \text{const}$, $A \pm B \pm D + \text{const}$, $B \pm C \pm D + \text{const}$ так, чтобы при любых A, B, C, D хотя бы одно из этих выражений было сравнимо с нулем по модулю 3. Это можно сделать с помощью следующего изящного наблюдения, которое к тому же позволяет обойтись без дополнительных констант. Заметим, что

$$(A+B+C)^2 + (A-C+D)^2 + (A-B-D)^2 + (B-C-D)^2 = \qquad (*)$$
$$= 3(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \equiv 0 \pmod 3.$$

Если бы при каких-то A, B, C, D каждое из выражений

$$A + B + C, \quad A - C + D, \quad A - B - D, \quad B - C - D \qquad (**)$$

оказалось не равным 0 по модулю 3, то квадраты выражений давали бы остатки 1 по модулю 3, и тогда сумма $(*)$ не могла бы делиться на 3. Значит, для любых целых A, B, C, D хотя бы одно из выражений $(**)$ обращается в 0 по модулю 3.

Положим тогда $f_B = -A - C$, $f_D = C - A$, $f_A = B + D$, $f_C = B - D$.

Если говорить на языке простых рецептов, мудрец A называет в качестве своей гипотезы сумму $B+D$, мудрец B называет $-A - C$, мудрец C называет $B - D$, мудрец D называет $C - A$.

Замечание. На самом деле формула $(*)$ — это просто разложение произведения $(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2)$ по формуле Эйлера:

$$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) =$$
$$= (Aa + Bb + Cc + Dd)^2 + (Ac - Ca + Db - Bd)^2 +$$
$$+ (Ab - Ba + Cd - Dc)^2 + (Ad - Da + Bc - Cb)^2.$$

С1. Решение 1 (индукция по числу голов). Будем давать вратарям, пропустившим гол, самые маленькие из имеющихся номеров: 1, 2, ..., а нападающим, забившим гол, — самые большие: n, $n-1$, …Для удобства рассуждений будем полагать, что игроки, недостаточно хорошо забивавшие или пропускавшие голы, остаются непронумерованными. Для каждого n проверим возможность такой нумерации индукцией по k.

База индукции $k=0$ проверки не требует.

Докажем индукционный переход. Допустим, что забито $k+1$ голов. Не обращая внимания на последний гол, пронумеруем футболистов по предположению индукции. Тогда каждый нападающий и каждый вратарь, осуществившие совместный гол, имеют разность номеров не меньше $n-k$, и это требование жестче того, что требуется для случая $k+1$ голов.

Рассмотрим $(k+1)$-й гол. Пусть вратарь, пропустивший этот гол, имеет номер ℓ (если вратарь еще не пронумерован, возьмем в качестве ℓ наименьший свободный номер). Теперь заменим номер этого вратаря на 1, а у всех вратарей с номерами от 1 до $\ell-1$ увеличим номер на 1. Если у нападающего, забившего $(k+1)$-й гол, уже есть номер, оставим его без изменения, а если еще нет номера, то присвоим ему наибольший свободный номер. Нетрудно видеть, что все пронумерованные игроки имеют различные номера и требования условия задачи выполнены.

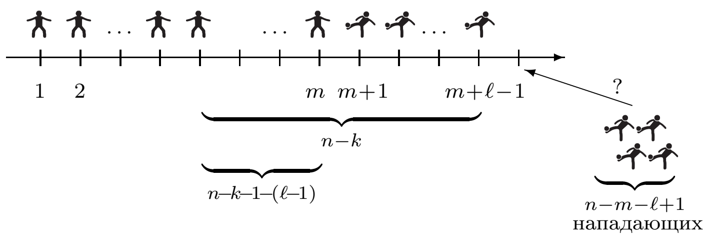
Решение 2 (последовательная нумерация). Расположим всех вратарей по убыванию числа пропущенных голов, дав им номера от 1, скажем, до m. Далее будем давать нападающим номера от $m+1$ до n по очереди, на каждом шаге находя такого еще не пронумерованного нападающего, которому можно дать очередной номер, чтобы выполнялось неравенство из условия задачи. Докажем, что это всегда удастся.

Пусть на ℓ-м шаге нам это не удалось, т. е. мы уже уже дали $\ell-1$ нападающим номера от $m+1$ до $m+\ell-1$ и никак не можем найти кандидата на номер $m+\ell$. Это значит, что среди оставшихся $n-m-\ell+1$ нападающих каждый забил гол хотя бы одному вратарю, находящемуся на расстоянии не более $n-k-1$ от него. В частности, это означает, что такие вратари есть, т. е. $\ell-1<n-k$.

Предположим, что $n-k \leqslant m+\ell-1$. Это означает, что последние $n-k-1-(\ell-1)$ вратарей в объединении пропустили хотя бы по голу от $n-m-\ell+1$ нападающих. Тогда каждый из остальных вратарей тоже пропустил хотя бы по одному голу (ведь вратари пронумерованы по убыванию числа голов). Итого все вратари пропустили не меньше

$$m - (n - k - 1 - (\ell - 1)) + n - m - \ell + 1 = k + 1$$

голов. Противоречие.



Пусть теперь $n-k > m+\ell-1$. Это означает, что все вратари в объединении пропустили хотя бы по голу от $n - m - \ell + 1$ нападающих. Но

$$n - m - \ell + 1 \leqslant k \;\Leftrightarrow\; n - k \leqslant m + \ell - 1.$$

Противоречие.

Решение 3 (сначала нумеруем, потом исправляем).

Очевидно, задачу достаточно решить для случая $k < n$.

Выпишем по порядку всех вратарей p_1, p_2, ..., p_m, которые пропускали голы. Пусть количества забитых ими голов равны a_1, a_2, ..., a_m соответственно. Выдадим нападающим, которые обидели первого вратаря, самые большие номера от n до $n-a_1+1$ включительно, а первому вратарю номер $k-a_1+1$ с таким расчетом, чтобы его номер отличался от наименьшего из номеров, выданных его обидчикам, ровно на $n-k$ (а от номеров остальных форвардов, которые ему забили, — еще больше). Теперь выдадим тем, кто забивал второму вратарю, следующие номера по убыванию: $n-a_1, \dots, n-a_1-a_2+1$, а самомý второму вратарю — последний из этих номеров, уменьшенный на $n-k$ (с тем, что какой-нибудь нападающий мог получить номер по второму разу, мы разберемся позже). Продолжая таким образом, мы раздадим номера всем нападающим, которые забивали, и всем вратарям, которые пропускали. При этом, очевидно, номера у вратарей будут различны и последний вратарь получит наименьший номер $(n-k+1)-(n-k)=1$.

Ясно, что для каждого забитого гола разность номера вратаря, который его пропустил, и одного из номеров нападающего, который его забил, не меньше $n-k$. Правда, некоторые нападающие могли получить больше одного номера, а некоторые номера могли достаться сразу и одному из нападающих, и одному из вратарей. Решим эту проблему. Пройдемся по присвоенным номерам начиная с n в сторону убывания. Если на нашем пути встретится номер, выданный уже пронумерованному нападающему, отберем у него этот номер, а все меньшие номера нападающих увеличим на 1. Когда эта процедура завершится, номера всех нападающих составят отрезок натурального ряда с самым большим числом n и у каждого нападающего останется только один номер, не меньший любого из номеров, которые присваивались ему ранее. Потом запишем по порядку номера, присвоенные вратарям, и заменим их просто последовательными натуральными числами начиная с 1. При этом, очевидно, номера вратарей не увеличатся и станут заполнять отрезок натурального ряда с наименьшим числом 1. Разумеется, заполненные номерами два отрезка не могут пересекаться, потому что всего на них не более n чисел. Для каждого гола номера участвовавших в нем нападающего и вратаря отличаются попрежнему не меньше чем на $n-k$. Осталось раздать свободные номера тем вратарям и нападающим, которые голами не отметились.

С2. См. задачу М3.

С3. Будем доказывать утверждение индукцией по степени многочлена P. База: $P(x,y)\equiv 0$. Рассматривая $P(x,y)$ как многочлен от x, разделим его на $x-\sqrt{2}y$

$$P(x,y)=(x-\sqrt{2}y)Q(x,y)+R(y).$$

Теперь подставим $x=\sqrt{2}$, $y=1$ и, воспользовавшись свойством нашего многочлена, получим:

$$P(\sqrt{2},1)=P(\sqrt{2}+2,\sqrt{2}+1)=P\big(\sqrt{2}(\sqrt{2}+1),\sqrt{2}+1\big)=$$
$$=P\big(\sqrt{2}(3+2\sqrt{2}),3+2\sqrt{2}\big)=\ldots$$

Заметим, что если $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$, то $\frac{x+2y}{x+y} = \sqrt{2}$. Таким образом, на прямой $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ имеется бесконечно много точек с одинаковым значением $P(x, y)$, а значит, и $R(y)$. Тогда $R(y)$ — константа, равная $P(0, 0)$. Проведя аналогичные рассуждения с прямой $x + \sqrt{2}y = 0$, получаем, что

$$P(x, y) = (x^2 - 2y^2)Q(x, y) + P(0, 0).$$

Подставляя это равенство в условие, получаем, что для многочлена Q выполняется равенство

$$Q(x + 2y, x + y) = -Q(x, y).$$

Очевидно, что для многочлена Q тоже можно найти на прямых $x \pm \sqrt{2}y = 0$ бесконечно много точек с равными значениями. Для этого проследим за чередованием знаков или воспользуемся тождеством

$$Q(x, y) = -Q(x + 2y, x + y) = Q(3x + 4y, 2x + 3y).$$

Заметив, что $Q(0, 0) = 0$, получаем, что

$$P(x, y) = (x^2 - 2y^2)^2 T(x, y) + P(0, 0),$$

причем для многочлена T выполняется исходное тождество

$$T(x + 2y, x + y) = T(x, y).$$

Применяя к T индукционное предположение, получаем требуемое представление.

C4. Пусть $n = 2k$. Тогда если $n! = ab^2$ — представление в нужном виде, то для числа $C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!k!}$ таким представлением будет ad^2, где $d = \frac{b}{k!}$. Таким образом, $a = \frac{C_{2k}^k}{d^2}$. Нам осталось оценить C_{2k}^k и d^2.

Так как C_{2k}^k — наибольшее число в соответствующей строчке треугольника Паскаля, имеем

$$\frac{1}{2k+1} \cdot 2^{2k} < C_{2k}^k < 2^{2k}.$$

Следовательно, $a < 2^n$.

Чтобы оценить a снизу, оценим d^2. Каждое простое число p входит в разложение $n!$ в степени

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots,$$

поэтому в C_{2k}^k оно входит в степени

$$\left[\frac{2k}{p}\right] - 2\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{2k}{p^2}\right] - 2\left[\frac{2k}{p^2}\right] + \ldots$$

При этом для любого m выполнено условие $0 \leqslant \left[\frac{2k}{m}\right] - 2\left[\frac{k}{m}\right] \leqslant 1$, поэтому простые множители, большие $\sqrt{2k}$, входят в C_{2k}^k в степени, не большей 1, а значит, не входят в разложение числа d^2. А простые множители p, меньшие $\sqrt{2k}$, входят в разложение числа d^2 степени не более $\log_p 2k \leqslant \log_2 2k$. Тогда для больших k имеем

$$1 \leqslant d^2 \leqslant \prod_{p<\sqrt{2k}} p^{\log_p 2k} \leqslant \left(\sqrt{2k}\right)^{\sqrt{2k}\log_2 2k} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2k}\log_2 2k \log_2 2k} < 2^{(2k)^{\frac{2}{3}}}.$$

Таким образом, $a > \frac{1}{2k+1} \cdot 2^{2k} 2^{-(2k)^{\frac{2}{3}}} > 2^{n(1-\frac{1}{2}\varepsilon)}$ для достаточно больших n.

Если же $n = 2k+1$, то, воспользовавшись уже доказанным утверждением для $n = 2k$, получим

$$2^{n(1-\varepsilon)} < 2^{2k(1-\frac{1}{2}\varepsilon)} \cdot \frac{1}{2k+1} < a < 2^{2k}(2k+1) < 2^{n(1+\varepsilon)}$$

для достаточно больших k.

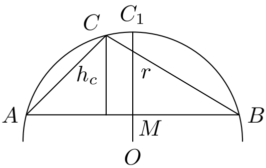
C5. См. задачу M5.

C6. Для любого x выполнено неравенство $x(ax+b) \geqslant 0$, а при $|x| > 1$ имеем

$$x(ax+b) \geqslant |x|(a|x| - b) \geqslant 2(2a-b) \geqslant 2a \geqslant 30.$$

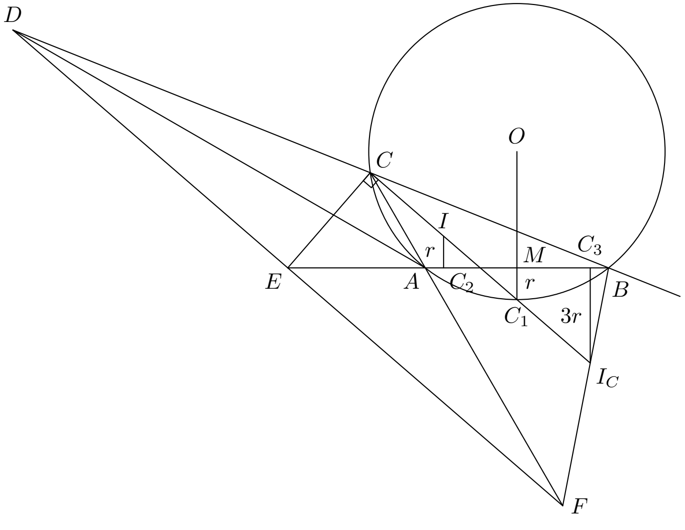
Остальные слагаемые оцениваются так же. Поэтому числа n от 1 до 29 могут быть представлены лишь с помощью x, y, $z \in \{0, 1, -1\}$, т. е. для этих чисел имеется не более 27 возможностей. Противоречие.

C7. Ответ: $\angle CED = 90^\circ$.



Решение 1. Пусть $\angle C \geqslant 90^\circ$. Продлив OM до пересечения с описанной окружностью, получим точку C_1. Из условия следует, что $MC_1 = r$. Но в этом случае $MC_1 \geqslant h_c$, противоречие. Значит, угол C острый.

Обозначим через I, I_c центры вписанной и вневписанной окружности со стороны AB, а через C_2 и C_3 — их точки касания со стороной AB. При этом CC_1 — биссектриса угла C. Так как IC_1 делит C_2M пополам, а M делит C_2C_3 пополам, имеем $r_c = 3r$, следовательно, $3(p-c) = p \Leftrightarrow a + b = 2c$. Проведем внешнюю биссектрису из вершины B, точку ее пересечения с AC обозначим через F.



Как известно, точки D, E и F лежат на одной прямой, поэтому будем искать угол между этой прямой и CE. Из условия $a + b = 2c$ следует, что c — средняя по длине сторона треугольника ABC. Не умаляя общности, будем предполагать, что $a > c > b$. Точка D делит отрезок CB внешним образом в отношении $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{b}{c}$, следовательно, $CD = CB\frac{b}{c-b} = \frac{ab}{c-b}$. Аналогично $CF = \frac{ab}{a-b}$. Тогда $CD = CF$, причем F лежит на луче CA, а D — на луче BC. Это означает, что треуголник DCF равнобедренный и основание DF ортогонально биссектрисе угла, т. е. внешней биссектрисе угла C, чтд.

Решение 2. В любом треугольнике прямая, проходящая через точки D, E, F, перпендикулярна IO, а как показано в задаче М7, при данном условии $IO \perp CC_1$.

С8. Ответ: было проведено максимум k^2 отрезков.

Для начала заметим, что если получившийся граф на плоскости не связен, то можно так провести дополнительные (не обязательно прямые) ребра, что он станет связным, но новых циклов не образуется. Условие на части, на которые разбита плоскость, при этом сохранится. Пусть V — число точек, E — число проведенных ребер, F — число частей, на которые разделилась плоскость. Также пусть E_0 — число ребер в периметре бесконечной части, назовем эти ребра *граничными*. Так как у всех внутренних частей по хотя бы 4 ребра, получаем

$$2E \geqslant 4(F-1) + E_0.$$

С другой стороны, по формуле Эйлера $V - E + F = 2$. Выразив F и подставив в предыдущее равенство, получаем

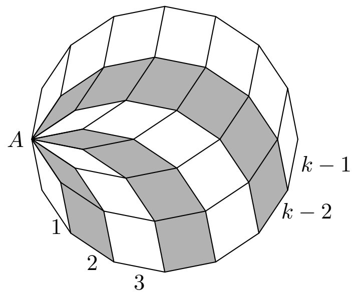
$$E \leqslant 2V - \frac{1}{2}E_0 - 2. \qquad (*)$$

Если $E_0 \geqslant 2k$, то мы получаем

$$E \leqslant 2 \cdot \left(\tfrac{k(k+1)}{2} + 1\right) - k - 2 = k^2.$$

Пусть $E_0 < 2k$. Рассмотрим некоторый параллелограмм разбиения и возьмем его ребро. Если оно не граничит с внешней частью, перейдем к соседнему параллелограмму через это ребро и возьмем его ребро, параллельное исходному. Повторяя процедуру несколько раз, мы получим граничное ребро, *соответствующее* исходному. Так можно сделать с каждым ребром параллелограмма. Тогда сами граничные ребра разбиваются на пары параллельных и каждой паре непараллельных граничных ребер соответствует не более одного параллелограмма разбиения. Тогда количество параллелограммов меньше чем $\frac{k(k-1)}{2}$ и по формуле $(*)$ получаем $E < 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} + k = k^2$.

Осталось построить пример разбиения, содержащего k^2 отрезков. Рассмотрим правильный $2k$-угольник. Разобьем его на параллелограммы, как показано на рисунке (для примера мы взяли $k = 8$). Здесь действительно $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ вершин, поскольку на ломаных, выходящих из вершины A и разделяющих темные и белые полосы, лежат кроме A соответственно 1, 2, 3, …, k вершин. При этом на картинке имеется $\frac{k(k-1)}{2}$ параллелограммов — это ясно, если подсчитывать параллелограммы, лежащие в полосах. Таким образом, число вершин и число параллелограммов совпадают с количествами, приведенными в сделанной оценке, а значит, число отрезков по формуле Эйлера должно быть равно k^2.



УГОЛОК ОЛИМПИАДОФОБА

Чья площадь больше?

К. Кохась

Бусенька и ее друзья — мышь Огрыза, уж Ушася и таракан Кузька — праздновали день рождения дятла Спятла. Занимательные конкурсы, прекрасное угощение и подаренный виновнику торжества торт со слониками сделали праздник интересным и запоминающимся. Как вдруг...

— Спасайся кто может! — закричал дятел Спятел и выпрыгнул в окно.

Гости бросились врассыпную. Огрыза нырнула в подвал, Кузька исчез за шкафом, а Бусенька, схватив Ушасю за что попалось (а попался, естественно, хвост), запрыгнула в сейф дятла Спятла, выкинув из него статуэтку Хрустального Питона. Комната начала заполняться блестящими кольцами питона Уккха.

— Где же именинникххх? — поинтересовался Уккх. — И куда пропали госсссти? — продолжал он, осматриваясь, постоянно высовывая длинный раздвоенный язык — принюхиваясь. — А, вот вы куда залезли, — сказал он, заметив сейф.

— Вылезайте, — строго сказал Уккх, и сквозь замочную скважину посмотрел на Ушасю так, что тому захотелось всё бросить и побежать, запрыгать, поползти, протиснуться, полететь и броситься прямо Уккху в пасть. К счастью, Бусенька крепко держала дверь.

— Не вылезем! — сказала она. — Дверь закрыта, а площадь сечения замочной скважины — 3 квадратных сантиметра — слишком мала, чтобы мы через нее пролезли.

Уккх проглотил огромный кусок торта («Мммм..., какие вкусные слоники!»), отправил в пасть миску витаминного салата из огурцов с остроухом и задумался. Взгляд его немного подобрел.

— У замочной скважины довольно сложная форма, — наконец сказал он. — Как же ты подсчитала ее площадь?

— Сначала съешь вон ту банку варенья, — сказала Бусенька, не отпуская дверцу, — а после этого поговорим!

Уккх схватил кончиком хвоста банку варенья и послушно проглотил ее содержимое. Поморщившись и поискав взглядом по сторонам, он кинул в пасть нераспечатанную упаковку печенья. Бусенька выждала 20 секунд и приоткрыла дверцу сейфа.

— Печеные яблоки явно удались! — посоветовала она, показав на блюдо с яблоками. Уккх тут же надкусил одно яблоко и одобрительно кивнул.

— Как я подсчитала площадь? Да как обычно. Что такое площадь фигуры? Это такое число. Во-первых, оно неотрицательно. Во-вторых, площадь совсем простой фигуры, например, прямоугольника равна произведению длин его сторон. В третьих, если маленькая фигура содержится в большой, то площадь маленькой фигуры не может быть больше площади большой фигуры. И наконец, в-четвертых, если фигуру разрезать по прямой на две части, — площадь фигуры будет равна сумме площадей частей.

— А если резать не по прямой? — с подозрением спросил Ушася.

— Всё зависит от того, как ты понимаешь слово «резать».

— Какое непростое определение, — сказал Уккх, — и как же найти площадь сложной фигуры, такой как сечение замочной скважины?

— И вообще, у любой ли фигуры существует площадь? — усомнился Ушася.

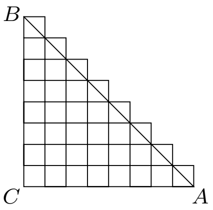
— У любой! — стала объяснять Бусенька. — Представим себе, что мы накрыли фигуру несколькими квадратами, причем будем использовать только квадраты с вертикальными или горизонтальными сторонами. Подсчитаем сумму их площадей. Потом покроем фигуру квадратиками помельче, чтобы они лучше прилегали к ее границам. Снова подсчитаем сумму площадей. Каждое такое вычисление дает нам слегка завышенное значение площади фигуры. Чем больше таких экспериментов мы проведем, тем точнее нам будет известна площадь фигуры.

— Неужели этот громоздкий рецепт действительно позволяет вычислить площадь хоть какой-нибудь фигуры? — спросил Уккх.

— Конечно, позволяет! Вот, например, найдите, чему равна площадь треугольника.

— Ну... если это не очень сложно...

— Не должно быть сложно, — воодушевился Ушася. — Возьмем прямоугольный треугольник ABC — половину единичного квадратика. Положим его на лист клетчатой бумаги. Пусть длина стороны клетки равна $\frac{1}{n}$. Тогда вдоль стороны помещается ряд из n клеток



(на рисунке оказалось $n = 8$). А весь треугольник покрывается ступенчатой фигурой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду — две, в третьем — три и т. д., вплоть до последнего ряда, где n клеток. Всего, значит, имеется

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

клеток. Площадь одной клеточки равна $\frac{1}{n^2}$, значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Чем больше мы возьмем число n, тем меньше будут сторона клеточки $\frac{1}{n}$ и слагаемое $\frac{1}{2n}$ в подсчитанной нами суммарной площади и тем ближе будет эта величина к $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}$.

— И для замочной скважины вычисления аналогичны, — подтвердила Бусенька. — Только там формулы похитрее. Но у меня геометрический сопроцессор, мне такие штуки легко даются.

— Всё ясно, — сказал Уккх. — А правильно ли я понял, что необязательно брать квадратики одинакового размера? И вообще, можно брать не квадратики, а прямоугольники. Некоторые могут быть совсем крупными, а некоторые совсем маленькими.

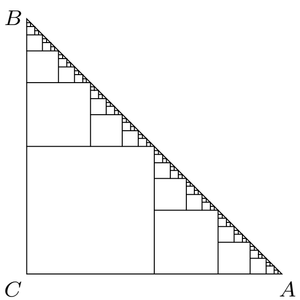
— Зачем так усложнять? — возразил Ушася. — Сначала берешь крупную сетку, потом помельче, потом — совсем миллиметровку... Главное — каждый раз учитывать только те квадратики, которые задевают фигуру. Очень хороший и практичный способ получается, мне он очень нравится.

— Нет-нет, — не согласилась Бусенька, — клеточки могут быть разными, не только квадратными, но и прямоугольными. Если вам нужно, они могут пересекаться, и вообще их может быть бесконечно много!

— Как это бесконечно много? Мы же считаем площадь ограниченной фигуры!

— Ну да, фигура ограниченная, скажем, помещается на одном листе бумаги, но, накрывая фигуру, мы можем брать квадратики всё меньшего и меньшего размера — так, что в результате их общее количество будет бесконечным!

— Я понял, — сказал Уккх. — Например в предыдущем вычислении можно было бы накрыть весь треугольник такими вот уменьшающимися клеточками. Тут вообще все клеточки умещаются внутри фигуры. Правда... если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны AB. Зато клеточек получается бесконечно много!



— Только не надо думать, что прямоугольники обязательно должны умещаться внутри фигуры, — предупредила Бусенька, — они запросто могут вылезать за ее пределы — так же, как это было в вычислении Ушаси.

— Мой подход к вычислению площади значительно проще и удобнее, чем у Уккха! — заявил Ушася.

— А мой — более гибкий! — возразил Уккх и облизнулся.

— Да что тут спорить, — вмешалась Бусенька, — давайте я попрошу вас вычислить площадь какой-нибудь хитрой фигуры, у кого лучше получится — тот и прав!

— Разве таким способом принято решать математические споры? — усомнился Ушася.

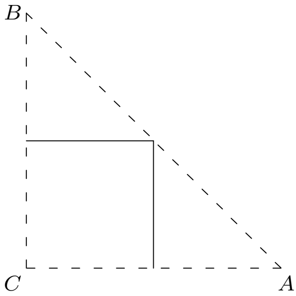
— Давай нам свою хитрую фигуру, — энергично потребовал Уккх.

— Хорошо. Но сначала скажите-ка мне для разминки, чему равна площадь одной точки, например точки A из нашего предыдущего треугольника?

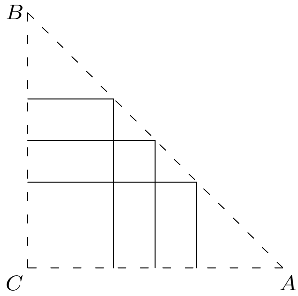
— Нулю, — тут же сказал Уккх, — мы можем накрыть точку квадратиком со стороной 1, значит, площадь точки меньше 1. Но мы можем накрыть ее и квадратиком со стороной $\frac{1}{10}$, тогда получится, что площадь точки меньше $\frac{1}{100}$. И точно так же окажется, что площадь точки меньше любого другого положительного числа. Значит, площадь равна нулю.

— Ладно, вот тогда вам хитрая фигура! Возьмем всё тот же треугольник ABC. И нарисуем внутри него линии первой сетки — той, где размер клеточек был равен $\frac{1}{2}$. Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки — со стороной $\frac{1}{3}$. Кстати, а чему равна площадь «лесенки», составленной из этих линий?

— Тоже нулю, — выпалил Ушася. — На листе из очень мелкой миллиметровки каждый нарисованный отрезок накрыт длинным прямоугольником, состоящим из одного ряда клеток. Ширина такого прямоугольника равна стороне одной клетки, поэтому его площадь очень мала. Всего у нас будет шес-с-с-ть таких прямоугольников, их суммарная площадь тоже очень мала. Какое положительное число ни возьми, эту лесенку можно накрыть прямоугольниками, у которых сумма площадей будет меньше этого числа. Значит, площадь лесенки равна нулю.

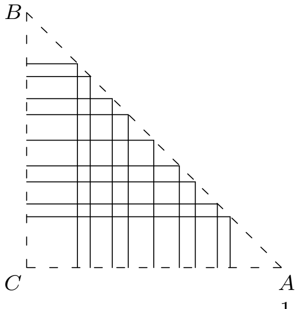


Нарисуем сетку со стороной $\frac{1}{2}$



Добавим сетку со стороной $\frac{1}{3}$. Получилась «лесенка»

— Правильно! — согласилась Бусенька. — Но я еще не дорисовала хитрую фигуру. Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{3}$. Теперь нарисуем линии следующей сетки — со стороной $\dfrac{1}{4}$, потом со стороной $\dfrac{1}{5}$, и так далее (до бесконечности). Моя хитрая фигура — это объединение всех-всех этих линий. Спрашивается, чему равна ее площадь?



Потом добавим сетки со стороной $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{5}$...

— Одной второй, — немного подумав, сказал Ушася.

— Нулю, — почти одновременно с ним произнес Уккх.

— А как вы посчитали?

— Возьмем совершенно любую квадратную сетку, — стал объяснять Ушася, — к примеру со стороной квадрата $\dfrac{1}{100}$. Посмотрим только на квадратики, накрывающие треугольник. Мы должны выбрать из них набор квадратиков, накрывающих хитрую фигуру. Но фигура действительно ужасно хитрая: она ведь содержит все линии более мелкой сетки со стороной $\frac{1}{200}$, а они рассекают каждый квадратик сетки со стороной $\frac{1}{100}$. Получается, что для того, чтобы накрыть фигуру, нам придется взять все квадратики, накрывающие треугольник ABC! Значит, любое измерение площади фигуры «по клеточкам» дает такой же результат, как для треугольника ABC. Поэтому площадь фигуры равна площади треугольника!

— Хм, вроде всё верно. А ты как посчитал? — спросила Бусенька Уккха.

— Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, — уверенно сказал Уккх. — Вот, например, как построить набор прямоугольников, чтобы их суммарная площадь была равна $\frac{1}{1000}$? Начнем рисовать первую сетку (со стороной $\frac{1}{2}$). Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2}$. Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{4}$. Потом нарисуем третий отрезок. Ой, нет, в первой сетке больше нет отрезков, значит, переходим к рисованию отрезков второй сетки. Рисуем отрезок второй сетки и накрываем его прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{8}$. И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямоугольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего прямоугольника. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $\frac{1}{1000}$, а мог бы вместо $\frac{1}{1000}$ взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

— Выглядит убедительно, — согласилась Бусенька.

— Моя площадь больше — значит, я выиграл! — закричал Ушася.

— А тогда я тебя съем! — злобно ответил Уккх.

Но Бусенька была начеку. Схватив Ушасю за что попало (да-да, опять за хвост, вы правильно догадались), она прыгнула в сейф. Уккх посмотрел на захлопнувшуюся дверцу и на Хрустального Питона, валявшегося на полу, и грустно облизнулся.

— Здорово я его обыграл? — спросил Ушася Бусеньку, когда увидел, что они надежно заперлись в сейфе.

— Здорово, — сказала Бусенька. — Но ты заметил, что площадь у тебя *странная*? Площадь хитрой фигуры равна $\frac{1}{2}$, и точно так же проверяется, что площадь остальной части треугольника тоже равна $\frac{1}{2}$. Получается, что мы разбили треугольник площади $\frac{1}{2}$ на две части, и у обеих частей площадь равна $\frac{1}{2}$!

— Действительно, странно... Но погоди, это же не противоречит твоему определению площади! Ты же говорила, что площадь фигуры равна сумме площадей кусочков в том случае, когда мы режем фигуру по прямой. А здесь нет ничего похожего на разрезание по прямой. Твою хитрую фигуру вообще невозможно вырезать из треугольника! А что, у Уккха площадь не странная?

— Тоже странная. Но в этом можно убедиться с помощью уж совсем хитрых фигур.

— Ну, значит, я действительно его победил!

Какая такая площадь?

В. Могунова

Нежелание становиться звеном пищевой цепи побуждает разумных созданий не спорить с питонами. А вообще, на этот счёт есть много разнообразных стратегий. Некоторые из них не лишены изящества. Например, можно попытаться заговорить питону зубы, и, хитро поглядывая на него из-за замочной скважины, неожиданно спросить: а что такое площадь? Впавший в недоумение питон надолго теряет аппетит.

Возьмем обычную плоскость, на ней можно рисовать разные фигуры. Всем известно, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон, площадь круга — πr^2, а у точки, наверное, площадь равна нулю. Но как посчитать площадь более странных и хитрых фигур, например, площадь сечения замочной скважины? Что это вообще такое — площадь?

Бусенька предложила весьма неплохое определение: *площадь* — это правило*, сопоставляющее каждой фигуре на плоскости неотрицательное число так, что выполняются следующие свойства.

П1. Если первая фигура содержится во второй, то площадь первой не больше площади второй. Это свойство называется *монотонностью.*

П2. Если провести на плоскости прямую, то площадь фигуры будет равна сумме площадей двух частей, на которые прямая разбила это фигуру (точки на линии раздела прямой принадлежат обеим частям фигуры). Зануды назовут такое свойство *ослабленной аддитивностью.*

П3. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон. Это свойство называется *нормировкой.*

Интуитивно мы так себе и представляем площадь, однако встаёт вопрос. Действительно ли можно задать такого рода

---

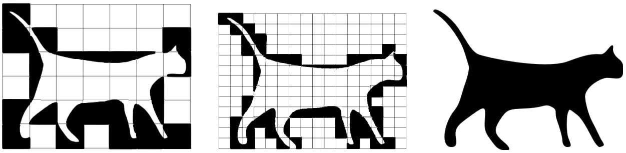
* На самом деле это функция, заданная на множестве всех ограниченных подмножеств плоскости (которые мы называем фигурами), а её значения — неотрицательные вещественные числа, что и означает «правило, сопоставляющее каждой фигуре число». Правда, Бусенька ещё требует, чтобы эта функция удовлетворяла свойствам П1–П3. Тогда-то она будет называться *площадью*.

правило для *всех* плоских фигур, чтобы выполнялись все три свойства?

Уж конечно, уж Ушася почувствовал этот подвох, и, дабы развеять его сомнения, Бусенька привела пример площади. Однако уж и питон поняли его по-разному.

Ушася понял её определение так: чтобы найти площадь фигуры, наложим на плоскость, где нарисована наша фигура, клетчатую бумагу и отметим все клеточки, задевающие фигуру. Затем найдем суммарную площадь этих клеточек (умножим их количество на площадь одной клетки, которую мы считать умеем: площадь клетки — это квадрат длины стороны). Это вычисление, между прочим, опирается на свойства П2 и П3 из определения площади. И кстати, раз наша фигура содержится в объединении отмеченных клеток, то по свойству П1 её площадь меньше площади объединения.

Затем возьмём бумагу с клеточками меньшего размера — «миллиметровку» — и сделаем всё то же самое (отметим клеточки, которые задели фигуру, и вычислим их суммарную площадь). Чем мельче становятся клеточки, тем «плотнее» они прилегают к фигуре, и картинка (из закрашенных клеточек) всё больше походит на изначальную фигуру. Любители кошек видят эти последовательные приближения так:



Проделав (мысленно) такие действия с клетчатыми листами для всех возможных размеров клеточек, возьмем инфимум получившегося множества подсчитанных суммарных площадей. Он и будет равен площади фигуры.

Во всяком случае, кажется, так это понял уж Ушася. Но все остальные могут не понять, ведь в определении есть новое слово — инфимум! Или не новое?

Дятел Спятел, Кузька и некоторые ещё не знают, так что давайте объясним. Инфимум мы берём от какого-то набора чисел, обозначим этот набор буквой A. Инфимум — это такая штука вроде минимума (т. е. минимального элемента), только минимум есть не у любого подмножества множества вещественных чисел, а инфимум — у любого.

Скажем яснее: инфимум — это число, которое меньше либо равно всех элементов из A. Но таких чисел, которые меньше либо равны каждого числа из A, много, так вот, инфимум должен быть самым большим среди них. Ужасно сложно.

Скажем ещё яснее: Вот нам дан набор чисел A. Что такое $\inf A$?

1. Для всевозможных чисел a из набора A должно выполняться неравенство $\inf A \leqslant a$.

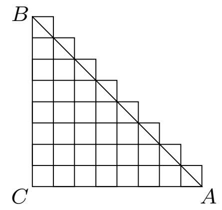
2. Любое другое число b, которое, как в свойстве 1, не превосходит всех чисел из набора A, должно быть меньше или равно самого инфимума: $b \leqslant \inf A$.

Например, в нашем случае A — это набор подсчитанных чисел (суммарные площади квадратиков, которые задевают фигуру, для всевозможных наборов сеток разного размера). Так вот, $\inf A$ должен удовлетворять тем двум свойствам.

Ура, объяснили! Чрезвычайно этим довольный Ушася показывает, как он считает площадь треугольника.

Возьмем прямоугольный треугольник ABC — половину единичного квадратика. Пусть длина стороны клетки равна $\frac{1}{n}$. Тогда вдоль стороны помещается ряд из n клеток (на рисунке оказалось $n = 8$). А весь треугольник покрывается ступенчатой фигурой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду – две, в третьем — три и т. д., вплоть до последнего ряда, где n клеток, — всего

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



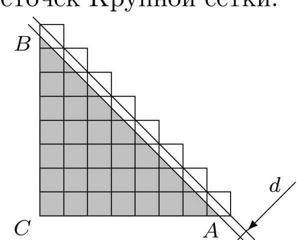
клеток. Площадь одной клеточки равна $\frac{1}{n^2}$, значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

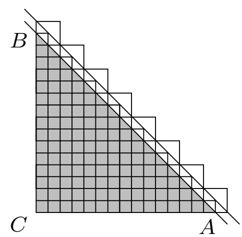
Чем больше мы возьмем число n, тем меньше будут сторона клеточки $\frac{1}{n}$ и слагаемое $\frac{1}{2n}$ в подсчитанной нами суммарной площади, и тем ближе будет эта величина к $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}$.

Следует заметить, что друзья (или кто они там) разобрали лишь случай, когда длина стороны клетки равна $\frac{1}{n}$ (вдоль стороны помещается ряд из n клеток), а должны были рассмотреть все возможные* клетчатые сетки (с началом координат** в точке C и осями, параллельными сторонам AC и CB). То есть они не рассмотрели те сетки, для которых вершина A находится не в узле (когда длину стороны нельзя выразить целым числом клеток), как на следующем рисунке. А что если при рассмотрении этих сеток суммарная площадь клеточек, задевающих фигуру, оказалась бы меньше одной второй? Тогда инфимум, т. е. площадь, была бы меньше, чем уверяет Ушася.

Давайте обсудим второй случай. На рисунке ниже показаны только те клеточки сетки, которые задевают треугольник, будем называть эту сетку Крупной сеткой. Раз вершина A не в узле сетки, то появляется число d — ширина *Полосы*, лежащей вне треугольника, но внутри нарисованных квадратиков. Среди сеток, рассмотренных Ушасей в первом случае, имеются сетки со сколь угодно маленькими клеточками, поэтому среди них есть такая сетка, у которой длина диагонали одной клеточки меньше d, — назовем ее Мелкой сеткой. Мысленно представим себе Мелкую сетку. В ней клеточки, задевающие фигуру, полностью содержатся в *Полосе*. Значит, они «не задевают» зубчики Крупной сетки, выступающие за пределы полосы. Тогда по свойству П1 сумма площадей всех клеточек Мелкой сетки, задевающих фигуру, меньше суммы площадей всех задевающих фигуру клеточек Крупной сетки.



Крупная сетка и Полоса



Мелкая сетка

Итого в первом случае (когда на одной стороне треугольника целое число квадратов) инфимум равен $\frac{1}{2}$. А для каждой

* Всевозможные — это самые разнообразные, какие только могут быть. Все возможные — это все всевозможные случаи.

** Думаете, начало координат, как в школе, всегда находится в точке O? Нет! В точке C оно тоже иногда бывает.

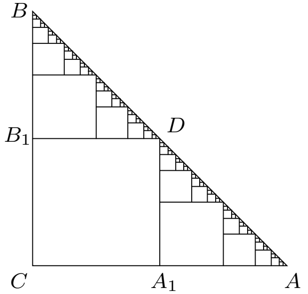
сетки, у которой вдоль стороны размещается нецелое число квадратиков, есть более мелкая сетка из уже рассмотренных, которая дает меньшую суммарную площадь. Таким образом, значения, которые получаются во втором случае, не влияют на инфимум.

Поэтому площадь этого треугольника все-таки равна $\frac{1}{2}$.

Но Бусенька объясняет, что она подразумевала более хитроумный вариант площади: пусть на плоскости нарисована фигура, у которой хотим считать площадь. Мы полностью накрываем её прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, и считаем суммарную площадь всех этих прямоугольников. Полученное число опять будет немного больше площади, и, чтобы её всё же посчитать, нужно взять инфимум всех таких чисел по всевозможным описанным покрытиям.

Существенное отличие от Ушасиного варианта заключается в том, что у Бусеньки прямоугольники могут быть разного размера, могут пересекаться друг с другом и их может быть бесконечно много!

Уккх осмыслил слова «бесконечно много» и наглядно продемонстрировал, как можно уместить такое немыслимое количество клеточек на одной картинке. Для этого он заново посчитал площадь того же треугольника, пользуясь уже более сложным и интересным вариантом Бусеньки. Он накрывает весь треугольник такими вот уменьшающимися клеточками.

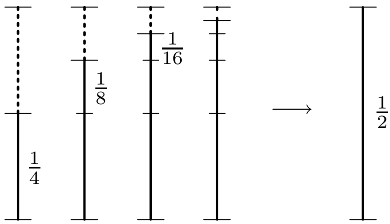


Тут вообще все клеточки умещаются внутри фигуры. Правда... если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны AB. Зато клеточек получается бесконечно много!

На этом рисунке сначала нарисовали квадрат B_1CA_1D, прилегающий к сторонам BC и CA, с вершиной D на гипотенузе AB. Его сторона равна $\frac{1}{2}$. Остались непокрытыми два треугольника: BB_1D и DA_1A. В каждом из них построим аналогичный квадрат. Итого в каждом треугольничке окажется квадрат (со стороной в два раза меньше стороны квадрата B_1CA_1D), который снова оставит непокрытыми в своём треугольнике два треугольника поменьше. В них снова строим квадраты и т. д. На каждом шаге стороны очередных квадратов уменьшаются в два раза, а их количество увеличивается в два раза. Таким образом, сумма площадей всех квадратов равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Это действительно одна вторая. Давайте посмотрим на картинку.



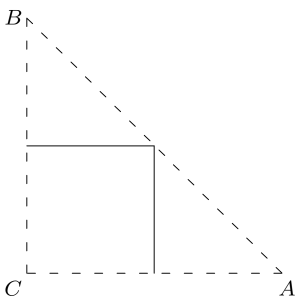
Здесь длины вертикальных отрезков равны $\frac{1}{2}$. Первое слагаемое суммы — $\frac{1}{4}$ — равно половине длины отрезка, оно отмечено на самом левом отрезке. Теперь нужно прибавить $\frac{1}{8}$, т. е. половину от незакрашенной части отрезка. Смотрим на второй отрезок — прибавили. Следующее слагаемое в сумме — $\frac{1}{16}$, что является половиной от оставшегося. Закрасим. И так далее... Таким образом, каждый раз мы будем закрашивать половину ещё нетронутой части отрезка. Если закрасить все отрезочки, соответствующие слагаемым суммы, то весь отрезок (за исключением самой верхней точки) окажется закрашенным.

Обратите внимание на то, что собеседники, вообще говоря, формально не доказали, что площадь треугольника равна $\frac{1}{2}$. Они предъявили его покрытие бесконечным числом квадратиков, которые пересекаются друг с другом только по сторонам и все лежат внутри треугольника. Казалось бы, куда меньше? Вот им тоже так показалось, и они продолжили свой разговор.

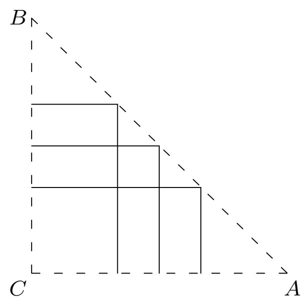
Случилось невероятное! Ukkx и Ушася вычисляли площадь, заданную похожими, но всё же совершенно разными правилами, и ответы у них совпали! У обоих площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, так что вы бы тоже так ее посчитали.

Правило, по которому задает площадь Ушаси, проще для понимания, а трактовка определения Бусеньки, авторство которой присвоил себе Ukkx, более витиеватая, поэтому наши герои хотят выяснить, для всех ли фигур их алгоритмы дадут одинаковые результаты. Бусенька умница, данное ею определение весьма устойчиво при вычислении площадей всех «востребованных в обычной жизни»* фигур, т. е. площади незатейливых фигур у Ушаси и Ukkxа всегда будут получаться одинаковыми. Различие обнаруживается лишь на очень странных фигурах, которые можно представить себе только «математически». Поэтому Бусенька изобрела весьма замысловатую фигуру и предложила змеям посчитать её площадь, а сама затаилась в предвкушении результата.

Возьмем всё тот же треугольник ABC. И нарисуем внутри него линии первой сетки — той, где размер клеточек был равен $\frac{1}{2}$. Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки — со стороной $\frac{1}{3}$.



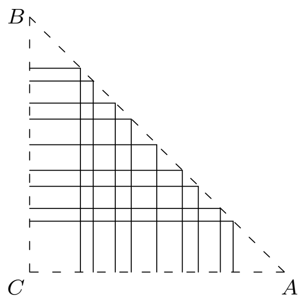
Нарисуем сетку со стороной $\frac{1}{2}$



Добавим сетку со стороной $\frac{1}{3}$. Получилась «лесенка»

* Например, многоугольников, кругов, всяких там овалов и вообще подграфиков непрерывных функций.

Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Теперь нарисуем линии следующей сетки — со стороной $\frac{1}{4}$, потом со стороной $\frac{1}{5}$ — и так далее (до бесконечности). В результате наша хитрая фигура (не наша, а Бусенькина, но, читая сказку, мы, конечно, отождествляем себя с Бусенькой, а как же иначе) — это объединение всех-всех этих линий. Чему равна ее площадь?



Потом добавим сетки со стороной 1/4 и 1/5 ...

Ушася сказал, что площадь равна одной второй, а Уккх прошипел, что площадь равна нулю. Тоже мне, спорщики.

Ушася объясняет, что для каждой из его клетчатых сеток каждая клеточка, задевающая треугольник, задевает также и Хитрую фигуру. Убедимся в этом. Возьмём произвольную сетку (например, со стороной одной клеточки, равной $\frac{1}{n}$). Каждая клеточка этой сетки внутри треугольника задевает Хитрую фигуру, потому что для каждого числа n фигура содержит линии сетки, отстоящие друг от друга на $\frac{1}{2n}$. (Мы уже видели такую картину, когда квадратики Крупной сетки были рассечены линиями Мелкой сетки.) Таким образом, для каждой сетки Ушаси мы получили, что клеточки, которые задевают Хитрую фигуру, — это в точности те клетки, которые задевали и треугольник, когда мы считали его площадь. Поэтому и инфимум сумм площадей этих клеточек будет таким же, т. е. он равен площади треугольника. Вот как любознательный Ушася доказал, что его площадь фигуры Бусеньки равна $\frac{1}{2}$.

Алгоритм же питона Уккха дал ноль. Вот как он объясняет, почему.

Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, — уверенно сказал Уккх. — Вот, например, как построить набор прямоугольников, чтобы их суммарная площадь была равна $\frac{1}{1000}$? Начнем рисовать первую сетку (со стороной $\frac{1}{2}$). Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2}$. Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{4}$. И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямоугольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $\frac{1}{1000}$, а мог бы вместо $\frac{1}{1000}$ взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

Эх, хоть Уккхова площадь треугольника и совпала с Ушасиной, но всё же мы отлично понимаем, что интерпретации площадей у зверюшек не совпадают. И то, что у них получаются разные значения площадей Хитрой фигуры, не является противоречием!

От имени и по поручению Бусеньки должна вам сказать, что в начале этой увлекательной дискуссии Бусенька помышляла дать ещё Четвёртое свойство для своего определения площади. Оно называется «инвариантность относительно движений» и формулируется так.

П4. Если фигуру двигать по плоскости, поворачивать или переворачивать, её площадь не меняется.

Конечно, все и так знают, что при перемещении фигуры её площадь не меняется, поэтому это очень ясное и ожидаемое свойство. Дело в том, что, увы, из свойств П1–П3 свойство П4 не следует, но Бусенька не решилась перебивать проснувшийся энтузиазм питона и не сформулировала это свойство. Возможно, к лучшему.

А может, и зря, потому что могло бы случиться, что питон и уж придумали бы такую интерпретацию площади, которая удовлетворяла бы свойствам П1–П3, но не удовлетворяла бы свойству П4. Правда, догадаться до этого они могли бы, лишь перестав спорить друг с другом и вручив победу Дружбе: они могли бы «объединить» свои площади, например, на правой половине плоскости завести площадь Ушаси, а на левой — Уккха. То есть «дружная» площадь фигуры считалась бы так: у куска фигуры в левой полуплоскости вычисляется площадь по алгоритму ужа (с уменьшающейся сеточкой) и к ней прибавляется к площадь правого куска фигуры, подсчитанная по методу Уккха.

Дружба может привести к удивительным результатам. Если взять Бусенькино Хитрое множество из треугольника ABC и поместить его на левую половину плоскости, то его площадь, как наши персонажи уже выяснили, будет равна нулю, а на правой, где питон Уккх всем заправляет, — одной второй. Получается, что площадь фигуры может измениться, если переместить её из одной полуплоскости в другую.

В жизни такое происходит с кошельком: прихóдите в магазин — и в нем исчезают деньги! Таким образом, «дружная площадь» действительно не удовлетворяет свойству П4 (как и кошелек), но при этом удовлетворяет свойствам П1–П3.

Содержание