К.В. Балдин
В.Н. Башлыков
А.В. Рукосуев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

ФЛИНТА

МПСИ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
НОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ПСИХОЛОГО-СОЦИАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ»

К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

Под общей редакцией доктора экономических наук,
профессора К.В. Балдина

Рекомендовано Редакционно-издательским Советом Российской академии образования к использованию в качестве учебника

Москва
Издательство «Флинта»
НОУ ВПО «МПСИ»
2010

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.1я73
Б20

Балдин К.В.

Б20 Высшая математика : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. — М. : Флинта : НОУ ВПО «МПСИ», 2010. — 360 с.

ISBN 978-5-9765-0299-4 (Флинта)
ISBN 978-5-9770-0376-6 (НОУ ВПО «МПСИ»)

Учебник содержит систематизированное изложение методологических основ математики. В нем рассмотрены практически все аспекты дисциплины «Математика». Учебник соответствует государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования и учебной программы по специальностям: «Психология», «Лингвистика и межкультурные коммуникации», «Юриспруденция», «Философия» и «Менеджмент». В учебник включены прикладные наработки авторов по математике, примеры использования классических методов и заданий для самостоятельной работы обучаемых.

Для студентов гуманитарных специальностей, аспирантов и преподавателей, а также для научных сотрудников, предпринимателей, менеджеров и руководителей фирм.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9765-0299-4 (Флинта)
ISBN 978-5-9770-0376-6 (НОУ ВПО «МПСИ»)

Оглавление

Введение ... 5
1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ... 8
1.1. Основы теории множеств ... 8
1.2. Элементы комбинаторики ... 21
1.3. Основы теории графов ... 25
1.4. Некоторые сведения из математической логики ... 60
Вопросы для самопроверки ... 68

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ... 69
2.1. Матрицы, определители и их свойства ... 69
2.2. Системы линейных алгебраических уравнений ... 86
2.3. Собственные числа и собственные векторы матриц, квадратичные формы ... 95
2.4. Некоторые сведения о векторах ... 105
Вопросы для самопроверки ... 119

3. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ ... 121
3.1. Некоторые сведения о функциях ... 121
3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов ... 125
3.3. Комплексные числа ... 140
Вопросы для самопроверки ... 145

4. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ... 146
4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производные высших порядков ... 146
4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной ... 157
4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления ... 168
4.3.1. Формула Тейлора ... 168
4.3.2. Правило Лопиталя ... 171
4.3.3. Асимптоты ... 176
4.3.4. Исследование функций с помощью производных первого и второго порядков и построение их графиков ... 180
4.3.5. Экстремумы функций двух аргументов ... 192
4.3.6. Понятие о методе наименьших квадратов (МНК) ... 197
Вопросы для самопроверки ... 204

5. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 205
5.1. Первообразная и неопределенный интеграл 205
5.2. Определенный интеграл 231
5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах 241
5.4. Приложения интегрального исчисления 252
5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур 252
5.4.2. Вычисление длины дуги кривой 260
5.4.3. Вычисление объемов фигур вращения 263
5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов 267
5.6. Понятие о двойном интеграле 274
5.7. Некоторые сведения о тройном интеграле 283
Вопросы для самопроверки 294

6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ 296
6.1. Основные понятия и определения 296
6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка 297
6.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 298
6.2.2. Однородные дифференциальные уравнения 303
6.2.3. Линейные дифференциальные уравнения 306
6.2.4. Уравнение Бернулли 310
6.2.5. Уравнение в полных дифференциалах 312
6.3. Дифференциальные уравнения второго порядка 316
6.3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 319
6.3.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью 323
6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений 330
Вопросы для самопроверки 339

7. РЯДЫ 341
7.1. Числовые ряды 341
7.2. Функциональные ряды 346
7.3. Степенные ряды 348
7.4. Понятие о рядах Фурье 352
Вопросы для самопроверки 357
Литература 358

Введение

Математика проникла практически во все сферы человеческой деятельности. Это объясняется, во-первых, тем, что она способна создавать модели изучаемых явлений (математической моделью изучаемого явления называется логическая конструкция, которая отражает геометрические формы этого явления и количественные соотношения между его числовыми параметрами), а во-вторых, математика используется для обработки цифровых данных (как средство расчета).

В настоящее время различные численные и аналитические методы используются не только в естественных, но и в гуманитарных науках, например в социологии, лингвистике, юриспруденции, экономике.

С помощью математических методов можно более глубоко анализировать сложные экономические явления и процессы, а с другой стороны, проблемы экономики стимулируют разработку новых математических теорий. Например, необходимость решения задач экономического планирования привела к разработке теории линейного программирования в 30-х годах XX века [18]. Можно сделать вывод о том, что глубокое изучение экономических процессов и управление этими процессами невозможны без знания современного математического аппарата. Математическая подготовка современного специалиста в области экономики имеет свои специфические особенности, связанные со сложностью проведения финансово-экономических операций и принятия рациональных управленческих решений по ним.

Как наука математика имеет определенное математическое мировоззрение, однако для специалистов в области экономики, менеджмента, психологии и юриспруденции математика является прежде всего мощным инструментарием при проведении необходимых расчетов и исследований, а также фундаментом, на котором строится современное здание высшего профессионального образования.

Материал учебника представлен в виде семи глав и предназначен для студентов 1-го и 2-го курсов гуманитарных специальностей вузов.

В первой главе «Основы дискретной математики» представлены основы теории множеств, введены элементы комбинаторики и основы теории графов, даны некоторые сведения о математической логике. Вторая глава «Элементы линейной и векторной алгебры» посвящена матрицам, векторам, определителям и их свойствам, а также действиям над ними. Приведены методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В третьей главе «Функции и пределы» дано определение функции, способы ее задания и основные свойства, а также числовой последовательности и предела. Рассмотрены признаки существования предела, первый и второй замечательный предел, дано понятие о комплексных числах. В четвертой главе «Основы дифференциального исчисления» кратко рассмотрены такие фундаментальные понятия, как производная, дифференциал, их геометрический смысл, дано понятие о функции многих переменных и о частных производных, а также приведены некоторые сведения о приложениях дифференциального исчисления (формула Тейлора, правило Лопиталя, исследование функции с помощью производной). В пятой главе «Элементы интегрального исчисления» раскрыто содержание интегрального исчисления, приведены определения и свойства неопределенного, определенного, несобственного и кратного интегралов, а также способы их вычисления. Рассматриваются приложения интегрального исчисления. Шестая глава «Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях» написана на основе знаний, изложенных в предыдущих главах. В ней представлены обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, а также методы их решения. Особое место занимает решение линейных однородных и неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Дано также понятие о решении систем дифференциальных уравнений. Седьмая глава «Ряды» посвящена исследованию числовых, функциональных и степенных рядов. Приведены также сведения по рядам Фурье.

Представленный курс математики охватывает большинство разделов, изучаемых студентами гуманитарных специальностей вузов. При написании книги авторы придерживались современных точек зрения на понятия, о которых идет речь, и не отступали от общепринятых взглядов. Авторы стремились изложить материал в доступной для студентов форме. При этом материал по дискретной математике, в частности по теории графов, будет полезен студентам, изучающим психологию, менеджмент и юриспруденцию. Однако авторы издания не претендуют на исчерпывающую широту охвата учебного материала из-за ограниченного объема книги.

Вклад авторов в данное издание распределился следующим образом: К.В. Балдин – введение, гл. 1, 2, В.Н. Башлыков – гл. 6, 7, А.В. Рукосуев – гл. 3, 4, 5.

1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Основы теории множеств

Понятие множества не определяется через другие понятия математики, т.е. оно является первичным. Появилось оно в конце XIX века в работах Г. Кантора (о сравнении мощностей множеств) [7, 10]. Г. Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью». Разумеется, это определение не может рассматриваться как строгое математическое, которого, впрочем, не существует, так как понятие множества является исходным, на его основе строятся остальные понятия математики.

Множество состоит из каких-то объектов. Например, существует множество натуральных чисел (N), множество всех звезд нашей Галактики, множество всех жителей РФ и т.д. Объекты, входящие в данное конкретное множество, являются его элементами. Различают конечные (состоящего из конечного числа элементов) и бесконечные множества.

Множества будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, а их элементы – малыми буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Тот факт, что элемент x принадлежит множеству X, обозначают так: $x \in X$, а не принадлежит – $x \notin X$.

Если все элементы множества X являются также элементами множества Y, то множество X есть подмножество множества Y. Это записывается следующим образом $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множество всех подмножеств множества Y называется степенью этого множества и обозначается 2^Y или $P(Y)$.

Множества X и Y являются равными (состоят из одних и тех же элементов) $X = Y$, если $X \subset Y$ и $Y \subset X$. Чтобы подчеркнуть тот факт, что рассматриваемое множество X может совпадать с множеством Y (отношение быть подмножеством), записывают $X \subseteq Y$ или $Y \supseteq X$.

Вводится понятие пустого множества ($\varnothing$), которое не содержит ни одного элемента. Например, множество решений уравнения $x^2 + 4 = 0$ есть пустое множество.

Способы задания множеств [7, 10]

а) Словесное описание.

Например, множество X есть множество всех прямых, проходящих через точку A плоскости α.

б) Перечисление элементов, входящих в множество.

Например, $X = \{-7, 0, 12, 123, 700\}$. Элементы в приведенном списке могут располагаться в любом порядке и должны быть различны, т.е. множества $X = \{5, 5, 7\}$ и $Y = \{5, 7\}$ равны между собой. Если во множестве есть совпадающие элементы, то его называют семейством $Z = (5, 9, 9, 12, 12, 23)$ и заключают в круглые скобки.

в) Описание свойств элементов, входящих в множество.

$X = \{x | (x-3)(x-5) > 0\}$, т.е. элементами множества X будут только те числа, которые удовлетворяют неравенству $(x-3)(x-5) > 0$.

Если обозначить через $Q(x)$ свойства элементов, входящих во множество X, то для задания этого множества в общем случае можно использовать следующую запись $X = \{x | Q(x)\}$, т.е. множество X состоит из тех элементов x, которые удовлетворяют свойству $Q(x)$. Множество, которое содержит все рассматриваемые в некоторой задаче множества, называется универсальным и обозначается U.

Например, в качестве U можно взять множество N (заметим, что в некоторых монографиях оно начинается не с единицы, а с нуля).

$$Z = \{z \in N \mid x < 6\}, \text{ т.е. } Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Для сокращения записи в математике используют кванторы всеобщности, существования, существования и единственности [25]:

$\forall$ – квантор всеобщности (перевернутая первая буква английского слова *All*);

$\exists$ – квантор существования (перевернутая первая буква английского слова *Exists*);

$\exists!$ – квантор существования и единственности.

Например, запись $(\forall\, x \in X)\ P(x)$ означает: для всех x из множества X справедливо $P(x)$; запись $(\exists y \in Y)\ R(y)$ – существует y из множества Y такое, что справедливо $R(y)$; запись $(\exists! z \in Z)\ M(z)$ – существует единственное z из множества Z такое, что справедливо $M(z)$.

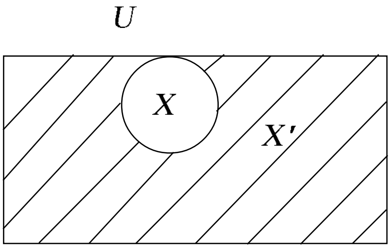
Операции над множествами [7, 38]

Пусть задано универсальное множество U. Множество всех его подмножеств есть 2^U. Заданы также множества X и Y, причем $X \in 2^U$ и $Y \in 2^U$.

Дополнением множества X называется множество X' элементов множества U, которые не принадлежат X:

$$X' = \{x \in U \mid x \notin X\}.$$

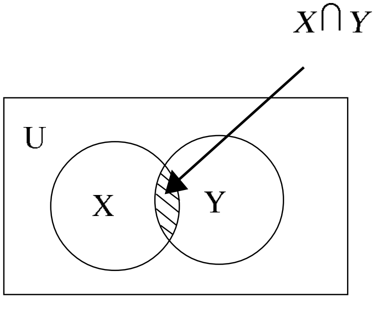
Графически операции над множествами можно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна):



U – изображается прямоугольником;
X – круг;
X' – заштрихованная область прямоугольника.

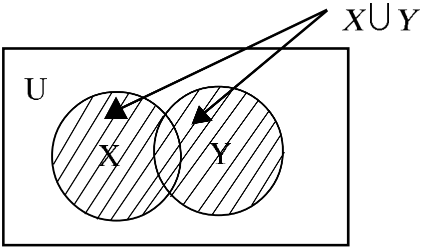
Пересечение ($X \cap Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих обоим этим множествам:

$$X \cap Y = \{x | x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$



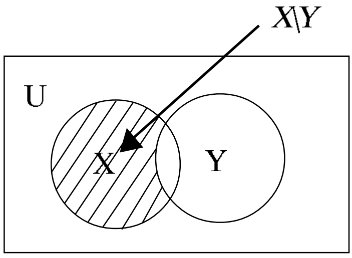
Объединение ($X \cup Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и Y:

$$X \cup Y = \{x | x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$



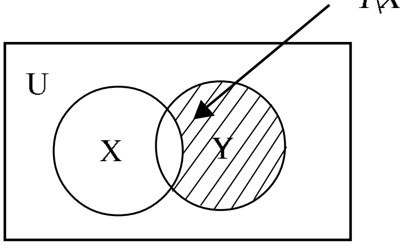
Разность ($X \backslash Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y:

$$X \backslash Y = \{x | x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$



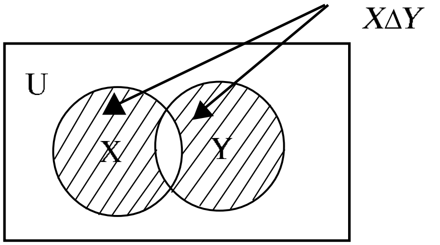
Аналогично определяется разность ($Y \backslash X$) множеств Y и X:

$$Y \backslash X = \{y | y \in Y \text{ и } y \notin X\}.$$



Симметрическая разность ($X \Delta Y$) множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств X и Y:

$$X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$



Теперь рассмотрим конкретный числовой **пример 1.1**.

Дано множество: $X = \{-5, 0, 3, 17, 28, 33, 100\}$.

$Y = \{-7, 0, 5, 17, 33, 108\}$.

$X \cap Y = \{0, 17, 33\}$.

$X \cup Y = \{-7, -5, 0, 3, 5, 17, 28, 33, 100, 108\}$.

$X \backslash Y = \{-5, 3, 28, 100\}$.

$Y \backslash X = \{-7, 5, 108\}$.

$X \Delta Y = \{-7, -5, 3, 5, 28, 100, 108\}$.

Мощность множеств

Число элементов в конечном множестве X называют его мощностью и обозначают $|X|$ или $\#X$.

Например, $X = \{5, 12, 23, 111\}$, $|X| = 4$.

Если известны мощности множеств X и Y, то можно найти мощность их объединения по формуле

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

В общем случае имеем [7]:

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_i |X_i| - \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + \sum_{i<j<k} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots$$

Для подсчета элементов в конечных множествах можно использовать комбинаторику.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Взаимная однозначность означает, что каждому элементу первого множества соответствует один элемент второго и наоборот.

Рассмотрим пример осуществления этого принципа.

Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 60 или мощности 40.

Используем понятие числа сочетаний из n элементов по k (они отличаются только составом элементов) (более подробно в п. 1.2). Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1\times2\times3\times \ldots \times n$ (читается: n факториал).

В нашем случае имеем

$$C_{100}^{60} = \frac{100!}{60!40!};\ C_{100}^{40} = \frac{100!}{40!60!}.$$

Поэтому у 100-элементного множества одинаковое количество подмножеств мощности 60 и 40 элементов.

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое количество элементов.

Но это определение годится и для бесконечных множеств. Например, отрезки [0, 1] и [0, 10] равномощны, так как отображение $x \to 10x$ дает нужное соответствие [7, 10].

Можно также доказать, что интервал (0, 1) и луч (0, + ∞) равномощны. Искомое взаимно однозначное соответствие имеет вид $x \to \frac{1}{x} - 1$ [7].

Также доказывается, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Тот факт, что множество X равномощно (эквивалентно) множеству Y, записывается так: $X \sim Y$ ($|X| = |Y|$).

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел (N).

Например, множество целых чисел (Z) равномощно N, т.е. $Z \sim N$.

Доказывается (см. [7]):

1) что подмножество счетного множества конечно или счетно;

2) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

3) объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Множество действительных чисел (R) или множество бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. Мощность множества R больше мощности любого счетного множества и называется мощностью континуума.

Приведем без доказательства теорему Кантора–Бернштейна.

Если множество X равномощно какому-то подмножеству множества Y, а множество Y равномощно какому-то подмножеству множества X, то множества X и Y равномощны.

Дадим также общую формулировку теоремы Кантора.

Никакое множество Z не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Наглядные представления о множествах могут приводить к противоречиям.

Приведем, например, парадокс Рассела [7].

Типичные множества не являются своими элементами. Например, множество целых чисел (Z) само не является целым числом и не будет своим элементом. Но в принципе можно представить себе множество, которое является своим элементом, например множество всех множеств (U). Такие множества назовем «необычными». Теперь рассмотрим множество всех обычных множеств. Если оно обычное, то является своим элементом и, следовательно, оно – необычное, и наоборот.

В принципе понятие множество не является непосредственно очевидным: разные люди (научные школы) могут понимать его по-разному.

Функции, прямые произведения, отношения

Сначала дадим традиционное определение функции [26].

Даны два множества X и Y. Функцией, которая определена на множестве X и принимает значения на множестве Y, называется закон (f), по которому каждому элементу x из множества X ($x \in X$) ставится в соответствие один элемент у из множества Y ($y \in Y$). Обычно это записывают в виде $y = f(x)$. Множество X есть область определения функции f, а множество $E = \{y \in Y \mid \exists x \in X\ y = f(x)\} \subseteq Y$ – множество значений функции f. Функцию f, определенную на множестве X и принимающую значения на множестве Y, обозначают так $f: X \to Y$.

Элемент $x \in X$ называется независимой переменной (аргументом), элемент $f(x)$ называется значением функции на элементе x.

Пусть задана однозначная функция f, т.е. различным значениям ее аргументов соответствуют различные значения функции, т.е. $(\forall x_1 \in X)\ (\forall x_2 \in X)\ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$. Знак «$\Leftrightarrow$» означает эквивалентность, например $A \Leftrightarrow B$ значит A эквивалентно B (A тогда и только тогда, когда B).

Тогда $\forall\ y \in E$ может быть поставлен в соответствие единственный элемент $x \in X$, такой что $y = f(x)$ и который обозначается $x = f^{-1}(y)$, это значит, что на множестве E определена функция f^{-1}, которая принимает значения на множестве X и называется обратной к функции f. Если задана функция f^{-1}: $E \to X$ и $Y = E$, т.е. когда множество значений функции f совпадает со всем множеством Y, функцию f называют взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y.

Теперь сформулируем определение прямого, или декартова, произведения.

<u>Прямым произведением</u> множеств $X_1, X_2, X_3 \ldots, X_n$, $n \geq 2$ называется множество различных упорядоченных наборов (n-мерных векторов) $(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3 \ldots$, $x_n \in X_n$, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1,$ $x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ \forall\ i = \overline{1,n}\}$.

Заметим, что $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \neq X_n \ldots \times X_2 \times X_1$.

В том случае, если $X_i = X \; \forall \; i = \overline{1,n}$ то $X \times X \times \ldots \times X \equiv X^n$ («≡» – тождественно равно) и называется n-й степенью множества X [21, 26].

В частном случае, если имеются два множества X и Y, их прямым произведением будет множество различных упорядоченных наборов (двумерных векторов) (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, обозначаемые $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Например, имеем два множества $X = \{5, 6\}$, $Y = \{\ln 3, \ln 7\}$.

$X \times Y = \{(5, \ln 3), (5, \ln 7), (6, \ln 3), (6, \ln 7)\}$,

$Y \times X = \{(\ln 3, 5), (\ln 7, 5), (\ln 3, 6), (\ln 7, 6)\}$,

т.е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Теперь дадим определение отношения. Даны множества X_1, X_2, ..., X_n, $n \geq 1$, n-местным отношением между элементами множеств X_1, X_2, ..., X_n называется любое подмножество ρ прямого произведения этих множеств, т.е $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times, \ldots, \times X_n$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$ говорят, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны отношением ρ.

Если $X_i = X \;\; \forall \, i = \overline{1, n} \;\; \rho \subseteq X^n$, говорят, что есть n-местное отношение на множестве X [21, 26].

Для одноместных, двухместных и трехместных отношений часто используют специальные названия: унарные, бинарные, тернарные соответственно, т.е.

$n = 1$ – унарное отношение $\rho \subseteq X_1$,

$n = 2$ – бинарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2$,

$n = 3$ – тернарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$.

Если отношение совпадает с прямым произведением, оно называется полным, т.е. $\rho = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Рассмотрим конкретные примеры отношений.

Пример 1.2

$X = \{1, 2, 7, 23, 35, 56\}$, $\rho = \{x \mid x \in X \text{ и } x < 23\}$, $\rho = \{1, 2, 7\}$,

т.е. при $n = 1$ отношение ρ есть подмножество множества X.

Пример 1.3

$X_1 = \{0, 1, 2\}$; $X_2 = \{5, 6, 7\}$;

$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_2 < 6\}$; $\rho = \{(0, 5), (1, 5), (2, 5)\}$.

Особый интерес представляют бинарные отношения, которые мы рассмотрим более подробно.

Если ρ есть отношение между элементами множеств X и Y, т.е. $\rho \subseteq X \times Y$ можно использовать запись $x\ \rho\ y$.

Обратным к отношению $\rho \subseteq X \times Y$ называется отношение $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\} \subseteq Y \times X$.

Геометрически понятие бинарного отношения показано на рис. 1.1.

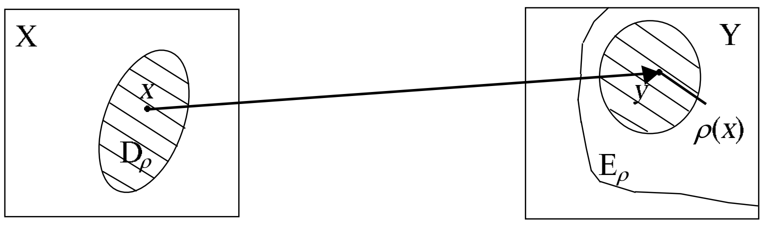


Рис. 1.1

$D_\rho = \{x \mid x \in X, (xy) \in \rho\}$ – множество определения отношения $\rho \subset X \times Y$.

$E_\rho = \{y \mid y \in Y, (xy) \in \rho\}$ – множество значений отношений $\rho \subset X \times Y$.

Заметим, что для $\rho^{-1} \subset Y \times X$ $D\rho$ и $E\rho$ поменяются местами, точка x – элемент множества $D\rho$, а множество $\rho(x)$ есть ρ-образ элемента x, а точка y является некоторым элементом из $\rho(x)$.

Отсюда видно, что бинарное отношение является многозначной функцией [18].

Заметим, что прямое произведение множества действительных чисел (R) само на себя $R \times R = R^2$ представляет собой систему координат на плоскости $x0y$.

Отношение $\rho \subseteq X \times Y \subseteq R^2$ является графиком отношения ρ.

Теперь рассмотрим конкретный пример бинарного отношения.

Пример 1.4 [2.1].

Дано множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Найдем отношение ρ, если оно задано так:

$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X, x_2 \in X, x_1$ – делитель $x_2, x_1 \le 5\}$.

Отношение имеет вид

$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (5, 10)\}$.

Теперь найдем множество определения и множество значений отношения

$D\,\rho = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E\,\rho = X$.

Представим полученное отношение ρ в графическом виде. Для этого зададим систему координат. Осью абсцисс будет $D\,\rho$, а осью ординат $E\,\rho$. По этим осям отложим элементы исходного множества X, затем соответствующие пары $(x_1 x_2)$ отметим точками и получим графическое изображение нашего отношения (рис. 1.2).

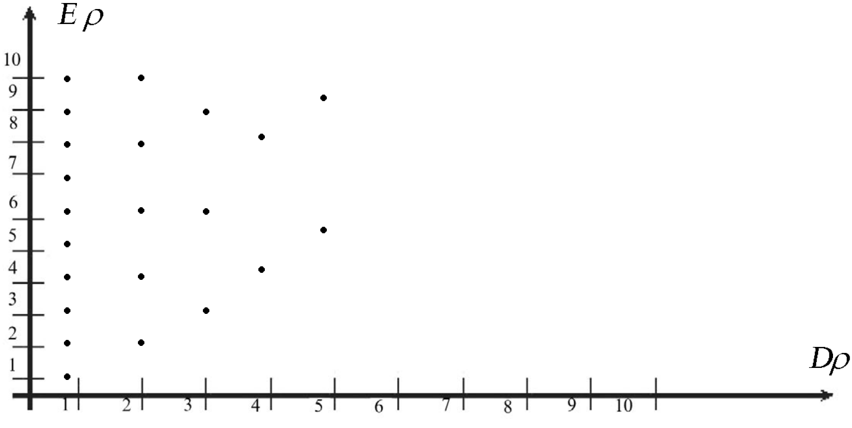


Рис. 1.2

Бинарные отношения можно представить в виде графа (множества вершин и множества ребер, см. раздел «Элементы теории графов»).

Вершинами будут элементы исходного множества X, а ребрами пары (x_1x_2). В данном случае важен порядок следования элементов, поэтому ребра будут ориентированными (обозначим их стрелками). В результате получим (рис.1.3)...

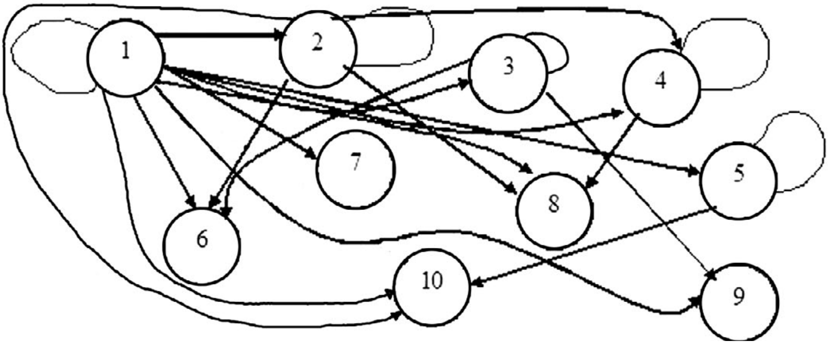


Рис. 1.3

В случае $x_1 = x_2$ получим петлю.

Наконец бинарное отношение можно представить в виде матрицы, т.е. прямоугольной таблицы размера $n \times m$, где n – количество строк, а m – количество столбцов. Например, если имеем два множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и бинарное отношение на элементах этих множеств $\rho \subseteq X \times Y = \{(xy) \mid x \in X, y \in Y\}$, то этому отношению соответствует матрица размера $n \times m$, состоящая из нулей и единиц. Единицами обозначаются пары (xy), входящие в отношение ρ (более подробно о матрицах см. в разделе «Элементы линейной алгебры»).

В данном примере имеем отношение $\rho \subseteq X^2$, т.е. ему соответствует матрица размера 10×10, число строк и столбцов которой равно числу элементов в множестве X.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В заключение рассмотрим функцию как отношение.

Отношение f между элементами множеств X и Y называется функцией, определенной на множестве X и принимающей значение на множестве Y, если

$$\forall\, x \in X \,\exists!\, y \in Y \mid (x, y) \in f. \tag{1.1}$$

В этом случае пишут $f: X \to У$, а вместо $(x, y) \in f$ обычно пишется $y = f(x)$; y называют значением функции f на элементе x, так как для функциональных отношений в силу (1.1) f-образом одноэлементного множества $\{x\}$ будет одноэлементное множество $\{f(x)\}$.

Заметим, что (1.1) эквивалентно выполнению двух условий:

$$f^{-1}(У) = X; \tag{1.2}$$

$$y_1 = f(x) \text{ и } y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2. \tag{1.3}$$

Иногда отношения называют функцией, если выполнено только условие (1.3), а если выполнено и условие (1.2), то отображением.

Часто слова «функция» и «отображение» используют как синонимы [26].

1.2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами, т.е. комбинаторика решает задачи выбора элементов из конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке [9, 10, 40].

Приведем правила сложения и умножения, которые применяются в комбинаторике [9].

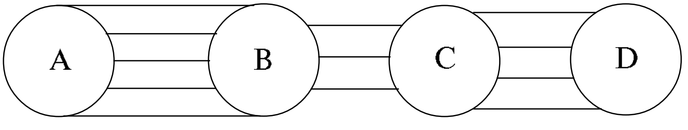
Правило сложения: если выбор каждого из объектов $A_i (i=\overline{1,k})$ можно сделать n_i способами, то выбор или A_1, или A_2, ..., или A_k можно произвести $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Правило умножения: если выбор каждого из k объектов B_i $(i=\overline{1,k})$ можно сделать m_i способами, то выбор и B_1, и B_2, ..., и B_k можно осуществить $N=\prod_{i=1}^{k} m_i$ способами.

Приведем конкретные примеры применения этих правил.

Пример 1.5. Из Москвы в Санкт-Петербург можно добраться самолетом, поездом, автобусом. Есть пять автобусных маршрутов, два авиамаршрута, один железнодорожный. Поэтому общее число маршрутов между Москвой и Санкт-Петербургом равно $n = 5 + 2 + 1 = 8$.

Пример 1.6. Из пункта A в пункт B можно доехать по пяти дорогам, из B в C можно доехать по трем дорогам, а из C в D можно доехать по четырем дорогам. Сколькими способами можно проехать из A в D через B и C?



По правилу произведения получаем $N = 5\ 3\ 4 = 60$.

Размещения

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов исходного множества. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения [9, 10, 40].

Обозначим размещения из n элементов по m

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3... \times n$: (читается: n факториал).

Принимается, что $0! = 1$ и $A_0^0 = 1$.

Пример 1.7. В футбольной премьер-лиге РФ участвует 16 команд. Сколькими способами можно распределить три первых призовых места?

Так как в данном случае порядок команд имеет значение, то имеем дело с размещениями, т.е.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 16}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 13} = 14 \times 15 \times 16 = 3360.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т.е.

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m.$$

Пример 1.8. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8?

$(A_4^3)_{\text{повт}} = 4^3 = 64$ трехзначных числа.

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов [9, 10]. Так как каждая перестановка содержит все n элементов исходного множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов, т.е.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример 1.9. Расставить четыре книги на полки можно $P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ способами.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 – элементов другого вида, ..., n_i – элементов i-го вида, то число перестановок с повторениями находится по формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_i) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_i!}.$$

Пример 1.10. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр: 2, 2, 3, 3, 4, 4. В данном случае $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, т.е.

$$P_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2} = 90.$$

Сочетания

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов исходного множества. Различными подмножествами считаются только те, которые отличаются по составу элементов [10, 40].

Обозначив число сочетаний через C_n^m получим

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.11

В бригаде 25 человек. Надо найти четырех человек для работы в ночную смену. Сколькими способами это можно сделать.

Так как порядок выбранных четырех рабочих не имеет значения, то имеем

$$C_{25}^{4} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25\times 24\times 23\times 22}{1\times 2\times 3\times 4} = 12650\,.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m находятся по формуле

$$\left(C_n^m\right)_{\text{повт}} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 1.12. Число различных бросаний трех одинаковых кубиков равно

$$\left(C_6^3\right)_{\text{повт}} = C_{6+3-1}^{3} = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56\,.$$

С числами C_n^m связано функциональное тождество, которое называется формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

При а = 1 имеем

$$(1+b)^n = C_n^0 + C_n^1 b + \ldots + C_n^m b^m + \ldots + C_n^n b^n.$$

Пример 1.13. Используя бином Ньютона, найти $(1+b)^7$.

$$(1+b)^7 = 1 + C_7^1 b + C_7^2 b^2 + C_7^3 b^3 + C_7^4 b^4 + C_7^5 b^5 + C_7^6 b^6 + C_7^7 b^7 =$$

$$= 1 + 7b + 21b^2 + 35b^3 + 35b^4 + 21b^5 + 7b^6 + b^7.$$

1.3. Основы теории графов

Впервые термин «граф» был употреблен венгерским математиком Д. Кенигом в 1936 году. Но начало теории графов было положено Л. Эйлером в 1736 году, когда он решил задачу о кенигсбергских мостах и нашел критерий существования в графе специального маршрута (эйлерова цикла). Но как математическая дисциплина теория графов сформировалась именно в первой трети XX века. Эта теория располагает аппаратом решения различных прикладных задач из разных областей науки и техники, например сетевое планирование и управление [15, 31]. В настоящее время теория графов один из наиболее быстро развивающихся разделов математики.

Предположим, что V – это не пустое конечное множество, а $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств. Множество E является произвольным подмножеством множества $V^{(2)}$, т.е. $E \subseteq V^{(2)}$.

Тогда графом (G) называется пара множеств (V, E), т.е. $G = (V, E)$, где VG – множество вершин графа, а EG – множество его ребер [15, 31, 37]. Любое ребро графа определяется парой его вершин. Если все пары вершин упорядоченные, то граф называется ориентированным (его ребра обозначают стрелками), в противном случае он – неориентированный. В том случае, если в графе есть ориентированные и неориентированные ребра, он называется смешанным. Ориентированный граф G можно задать как отношение, т.е. как подмножество прямого произведения множества его вершин V само на себя.

$$G \subseteq V \times V.$$

В этом случае множество всех двухэлементных подмножеств $V^{(2)}$ заменяется декартовым произведением $V \times V = V^2$ [15].

Графы обычно изображаются в виде рисунков, на которых вершины изображаются кружками (точками), а ребра отрезками (рис. 1.4, 1.5, 1.6).

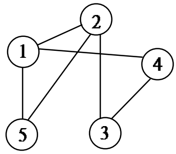


Рис. 1.4 (неориентированный граф)

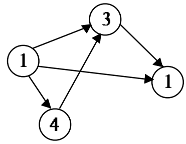


Рис. 1.5 (ориентированный граф)

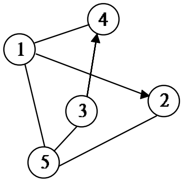


Рис. 1.6 (смешанный граф)

Приведем конкретный **пример 1.14**.

Пусть задано множество $V = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$$V^{(2)} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}.$$

Предположив, что порядок вершин имеет значение, получаем следующий ориентированный граф (рис. 1.7).

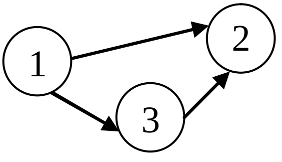


Рис. 1.7

Далее вершины графа будем обозначать буквами $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, а ребра $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Вообще говоря, две вершины V_i и V_j определяют ребро e_k, т.е. (рис. 1.8).

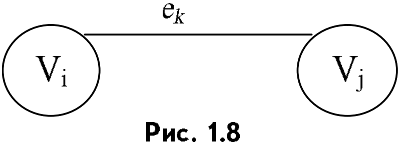


Рис. 1.8

И в этом случае они будут концевыми вершинами ребра e_k. Но концевые вершины ребра не обязательно различны, т.е. начальная и конечная вершины могут совпадать. В этом случае ребро становится петлей (рис. 1.9).

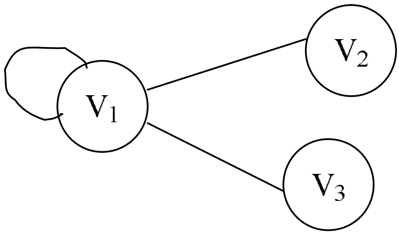


Рис. 1.9

Граф, имеющий петли, иногда называют псевдографом (рис. 1.10).

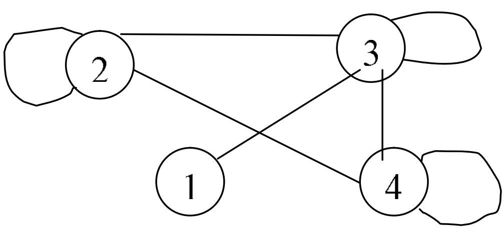


Рис. 1.10

Между двумя вершинами может проходить и несколько ребер (ориентированных и неориентированных), их называют параллельными. А граф, имеющий такие ребра, называют мультиграфом (рис. 1.11). Мультиграф – это пара (V, E), где V – множество вершин, а E – семейство подмножеств множества $V^{(2)}$. Употребление термина «семейство» говорит о том, что элементы множества $V^{(2)}$ могут повторяться (возможны параллельные ребра) [15].

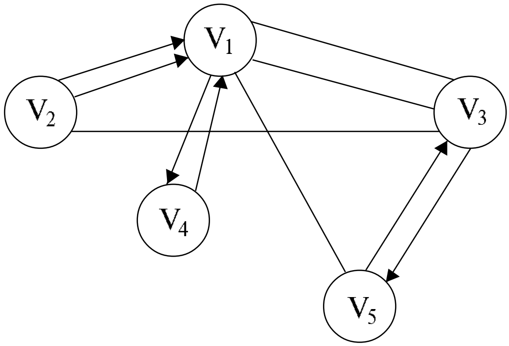


Рис. 1.11

Если граф не имеет петель и параллельных ребер, его называют простым (рис. 1.7). Граф G называется графом порядка n, если он содержит n вершин (на рис. 1.12 имеем граф восьмого порядка) [31].

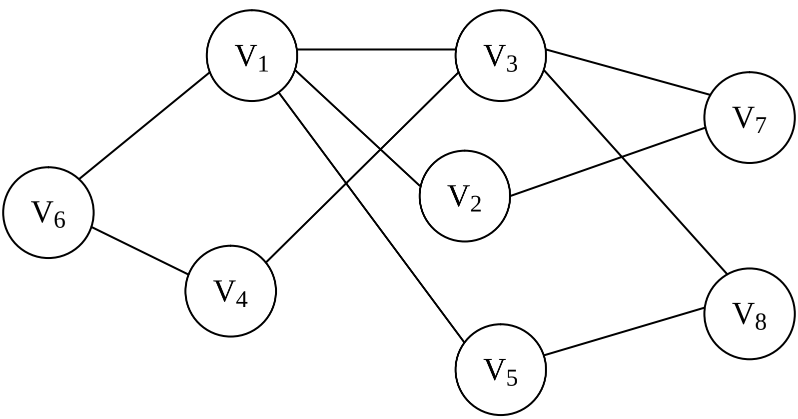


Рис. 1.12

Граф, который не имеет ребер (состоит только из вершин), называется пустым (рис. 1.12).

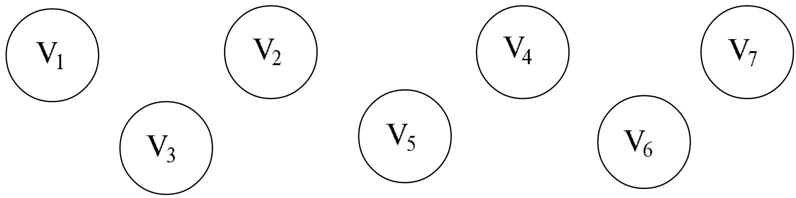


Рис. 1.13

Граф, не имеющий вершин, называется ноль-графом (∅). Две вершины называются смежными, если они являются концевыми вершинами какого-то ребра (например, вершины V_1 и V_3; V_2 и V_7 на рис. 1.12).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, то они являются смежными (например, ребра e_1 и e_2; e_2 и e_4 на рис. 1.14).

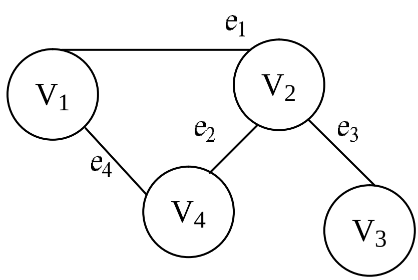


Рис. 1.14

Если имеют в виду разные элементы графа (вершины и ребра), то используют понятие инцидентности, т.е. ребро инцидентно своим концевым вершинам (например, ребро e_3 инцидентно вершинам V_2 и V_3, – рис. 1.14).

Число инцидентных вершине ребер называется степенью (валентностью) этой вершины и обозначается $d(V_i)$. Например, степень вершины V_2 на рис. 1.14 равна 3 ($d(V_2) = 3$) [15, 31, 40].

Вершина степени 1 называется висячей, вершина степени ноль – изолированной, а петля при вершине добавляет в степень этой вершины двойку.

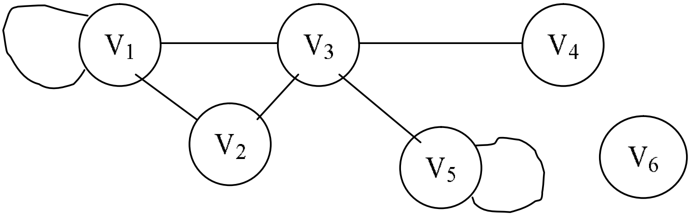


Рис. 1.15

Например, вершина V_4 на рис. 1.15 является висячей, вершина V_6 – изолированной, а степень вершины V_1 равна 4 ($dV_1 = 4$ – два ребра и петля).

Граф называют полным, если две любые его вершины смежные (рис. 1.7).

Приведем без доказательства две теоремы [15].

ТЕОРЕМА 1.1. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер. У графа на рис. 1.15 имеется 7 ребер, а сумма степени его вершин равна 14.

ТЕОРЕМА 1.2. Число вершин нечетной степени в любом графе четно. Например, у графа, изображенного на рис. 1.15, таких вершин две (V_4 и V_5).

Может оказаться, что один и тот же граф изображается разными рисунками. Говорят, что два графа G_1 и G_2 изоморфны, если существует такое взаимнооднозначное соответствие между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов инуидентны соответствующим вершинам этих графов [37]. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

На рис. 1.16 приведен пример изоморфных графов [15].

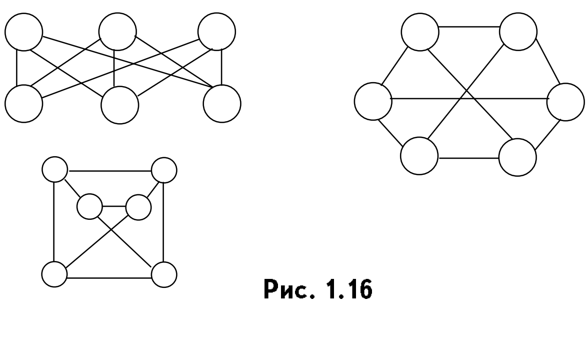


Рис. 1.16

В тех случаях, когда необходимо различать изоморфные графы, помечают их вершины и (или) ребра (рис. 1.17).

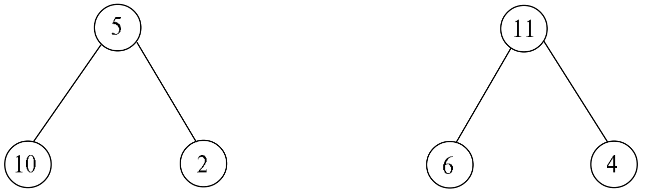


Рис. 1.17

Маршруты, цепи, пути, циклы [15, 31, 37].

Маршрут в графе – это конечная чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и оканчивающаяся на вершине, причем одинаковые вершины и ребра в маршруте могут повторяться. Например, маршрут $V_1e_1\ V_2e_5\ V_4e_6\ V_1e_8\ V_6e_7\ V_4$ на рис. 1.18.

Маршрут называют открытым, если его конечные вершины различны, в противном случае он является замкнутым, например маршрут $V_1e_1\ V_2e_5\ V_4e_6\ V_1e_8\ V_6e_7\ V_4e_6V_1$ на рис. 1.18.

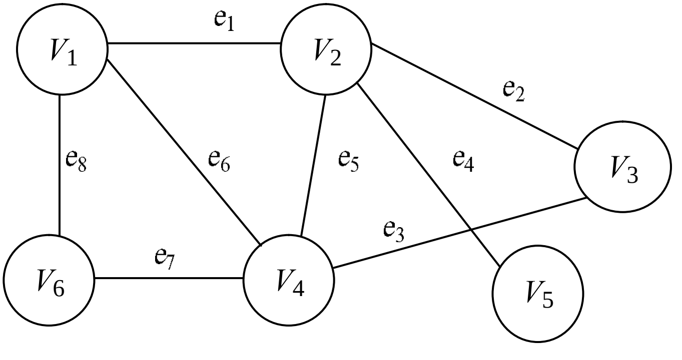


Рис. 1.18

Маршрут называют цепью, если все его ребра различны. Цепь является открытой, если ее конечные вершины различны, в противном случае она – замкнутая.

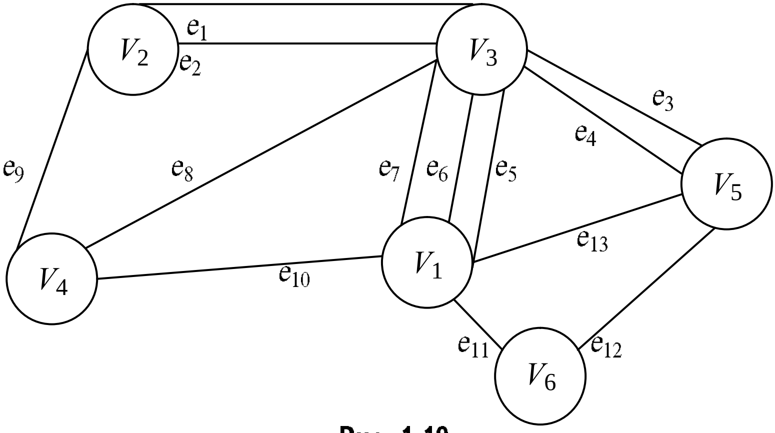


Рис. 1.19

На рис. 1.19 V_2e_1 V_3e_3 V_5e_{13} V_1 e_5V_3 e_8V_4 – открытая цепь, а V_1e_{13} V_5 e_3V_3 e_2V_2 e_1V_3 e_7V_1 – замкнутая цепь.

Открытую цепь называют путем, если все ее вершины различны. Например, V_4e_8 V_3e_6 V_1e_{11} V_6 на рис. 1.19.

Замкнутую цепь называют циклом, если все ее вершины за исключением концевых различны, например V_3e_3 V_5e_{13} V_1e_7 V_3 на рис.1.19.

Две несовпадающие вершины V_i и V_j в графе G называется связными, если существует маршрут $V_i - V_j$.

Граф G называют связным, если две его любые несовпадающие вершины могут быть соединены маршрутом. Например, связными являются графы на рис. 1.18 и рис. 1.19, а несвязным – граф, изображенный на рис. 1.20.

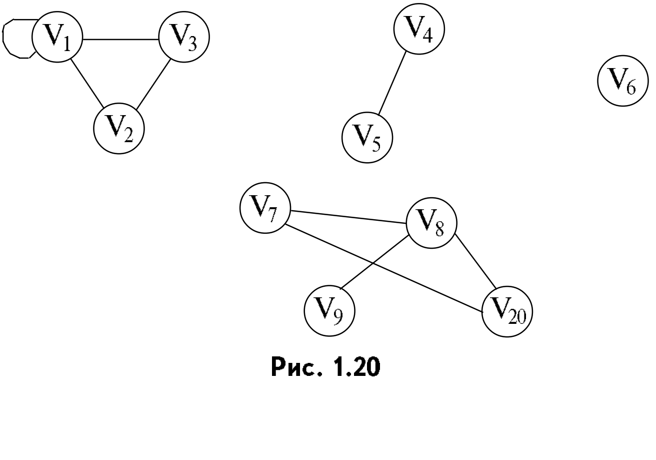


Рис. 1.20

Деревья и лес

Большую роль в различных отраслях науки имеют связные ациклические (не имеющие циклов) графы, число ребер которых на единицу меньше количества вершин, т.е. если $|VG| = m$ $|EG| = m - 1$.

Эти графы носят название деревьев [15, 31]. Заметим, что $(m-1)$ – это минимальное количество ребер для того, чтобы граф был связным.

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф, схема вертикали управления любой организации, совокупность всех файлов, размещенных на диске ПЭВМ. Пример дерева приведен на рис. 1.21.

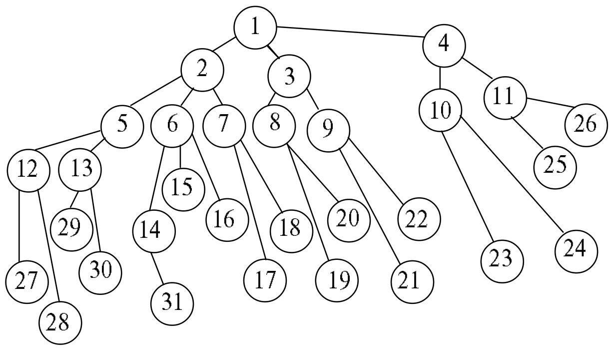


Рис. 1.21

Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется лесом (рис. 1.22).

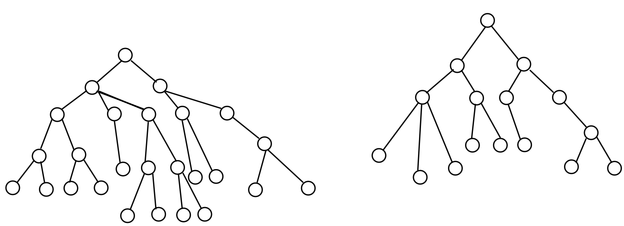


Рис. 1.22

Матрицы графов

1) *Матрица инцидентности.*

Рассмотрим простой граф G (без петель и параллельных ребер), имеющий n вершин и m ребер. Ему соответствует матрица инцидентности размера $n \times m$, т.е.

$$A_\text{I} = [a_{ij}], \text{ где } i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}.$$

Каждый элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом [15, 31]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и} \\ \qquad \text{исходит из нее;} \\ -1, \text{ если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i \text{ и} \\ \qquad \text{входит в нее;} \\ 0, \text{ если ребро } j \text{ не инцидентно вершине } i. \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } j \text{ инцидентно вершине } i; \\ 0, \text{ если ребро } j \text{ не инцидентно вершине } i. \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный пример. Имеем ориентированный граф, имеющий 5 вершин и 7 ребер (рис. 1.23).

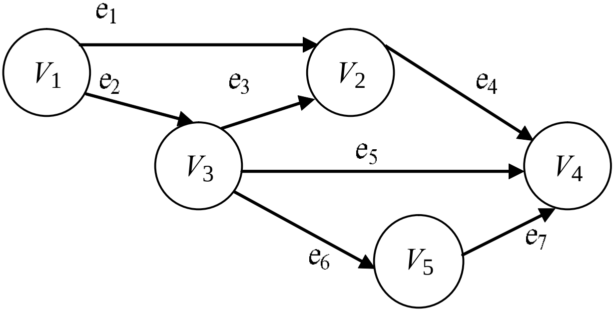


Рис. 1.23

Ему соответствует матрица инцидентности размера 5×7 следующего вида:

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае задания мультиграфа (имеет параллельные ребра) матрица инцидентности определяется по приведенным выше правилам. Например, найдем матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис. 1.24.

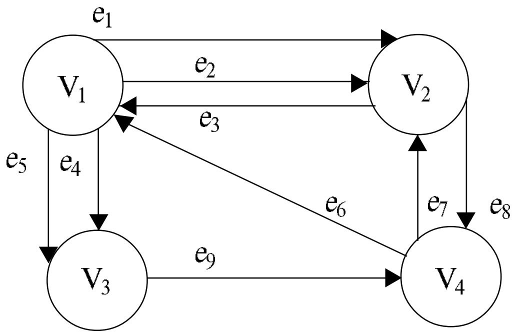


Рис. 1.24

Искомая матрица имеет размер (4×9) и выглядит следующим образом:

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) *Матрица смежности.*

Пусть задан псевдограф (имеет петли), содержащий n вершин и m ребер.

Матрицей смежности этого графа A_s называется матрица размера $n \times n$, т.е.

$$A_s = (a_{ij})\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n}.$$

Любой элемент этой матрицы a_{ij} в случае ориентированного графа определяется следующим образом [15].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершины } (V_i V_j) \in e_k \text{ и ребро исходит из} \\ \qquad \text{вершины } V_i; \\ 0, \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае, если граф G неориентированный, то любой элемент его матрицы смежности определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершины } V_i \text{ и } V_j \text{ принадлежат ребру } e_k; \\ 0, \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

Матрица A_s в этом случае будет симметричной относительно главной диагонали. Рассмотрим конкретный пример. Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 1.25.

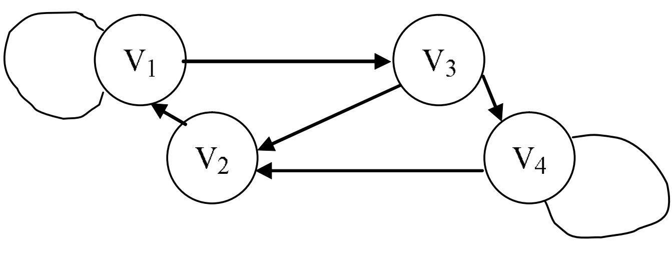


Рис. 1.25

Искомая матрица смежности имеет размер 4×4 и выглядит так:

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если граф кроме петель имеет параллельные ребра, матрица A_s находится по следующим правилам [9].

Если задан ориентированный граф, то каждый элемент его матрицы смежности находится так:

$$a_{ij} = \begin{cases} \Sigma \text{ числа ребер, выходящих из вершины } V_i \text{ и} \\ \quad \text{входящих в вершину } V_j; \\ 0, \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа имеем:

$$a_{ij} = \begin{cases} \Sigma \text{ числа ребер между смежными вершинами } V_i \text{ и } V_j; \\ 0, \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

Найдем матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 1.26.

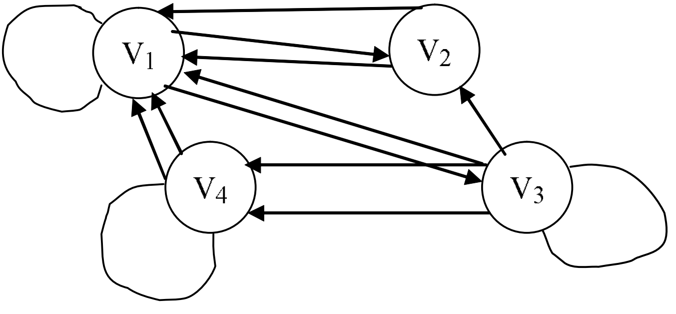


Рис. 1.26

Данному графу соответствует матрица смежности размера 4×4, имеющая вид

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Раскраски

Задачи раскраски вершин или ребер графа занимают важное место в теории графов. Особенностью этих задач является существование объектов, которые по каким-то причинам могут быть объединены в одну группу.

Пусть $G = (V, E)$ – граф, $k \in N$. Произвольная функция вида $f\colon VG \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ называется вершиной k-раскраской, или просто k-раскраской. Раскраска называется правильной, если для любых смежных вершин V_i и V_j выполняется неравенство $f(V_i) \neq f(V_j)$. Граф, для которого существует правильная k-раскраска называется k-раскрашиваемым. В определении раскраски вместо множества $\{1, 2, 3, ..., k\}$ можно взять произвольное k-элементное множество. Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины должны быть окрашены в разные цвета. При k-раскраске может быть использовано и менее k цветов. Правильную k-раскраску графа G можно рассматривать как разбиение

$$V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_t = VG, \; t \leq k$$

множества вершин VG на не более чем k непустых классов, каждый из которых является независимым множеством. Классы этого разбиения называются цветными классами. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = k$, то граф G называется k-хроматическим. Правильная k-раскраска G при $k = \chi(G)$ называется минимальной [15, 40].

На рис. 1.27 приведена одна из правильных 4-раскрасок, причем меньшим числом цветов этот граф раскрасить нельзя [15]. Номерами на рис. 1.27 обозначены цвета.

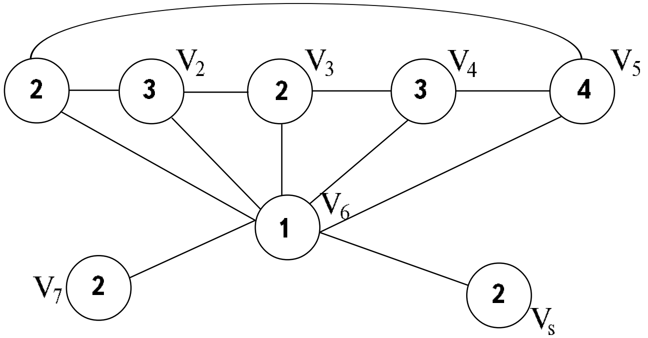


Рис. 1.27

Плоские и планарные графы

В некоторых случаях необходимо знать, можно ли изобразить граф на плоскости так, чтобы его изображение удовлетворяло некоторым условиям, например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем проводники электрического тока не должны пересекаться. Такая же задача возникает при проектировании железнодорожных трасс, когда нежелательны переезды. Поэтому вводится понятие плоского графа.

Плоским называют граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины [15].

Примеры плоских графов показаны на рис. 1.28.

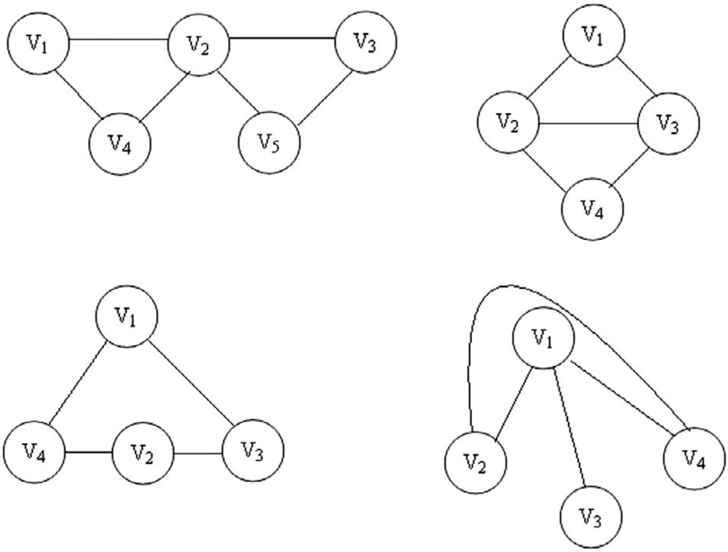


Рис. 1.28

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным [15]. На рис. 1.29а приведен плоский граф, а на рис 1.29б планарный граф, изоморфный графу на рис. 1.29а.

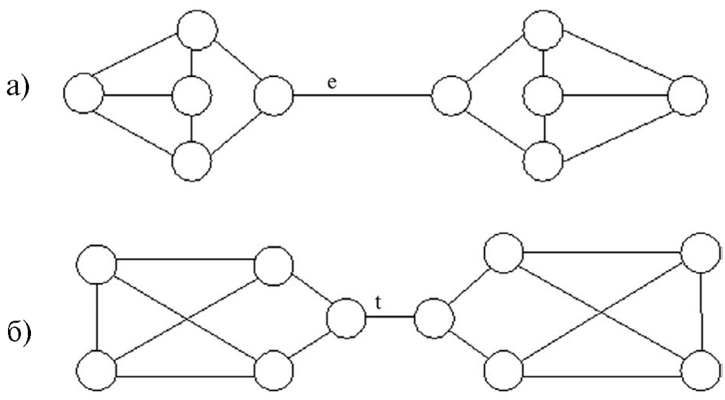


Рис. 1.29

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых в этой теории. Первоначально вопрос формулировался так: достаточно ли четырех красок для такой раскраски произвольной географической карты, при которой любые две соседние страны окрашены в разные цвета? Рассматриваются только те карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины.

Позднее понятие карты сформулировали так: карта – это связный плоский мультиграф без мостов (ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент графа, мостами являются ребра *e* и *t* в графах на рис. 1.29а и 1.29б).

В 1879 году английский математик А. Кэли сформулировал гипотезу 4-х красок так: всякая карта 4-раскрашиваема.

Часто пользуются другой формулировкой: всякий планарный граф 4-раскрашиваем.

В 1890 году Р. Хивуд показал, что если 4 заменить на 5, то гипотеза легко доказывается, т.е. верна теорема: всякий планарный граф 5-раскрашиваем.

Эйлеровы цепи

Как уже упоминалось, с задачи о кенингсбергских мостах началась теория графов. На рис. 1.30 показан план расположения семи мостов на реке Преголь в городе Кенингсберге (ныне Калининград). Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернутся в исходную точку [15, 31, 37].

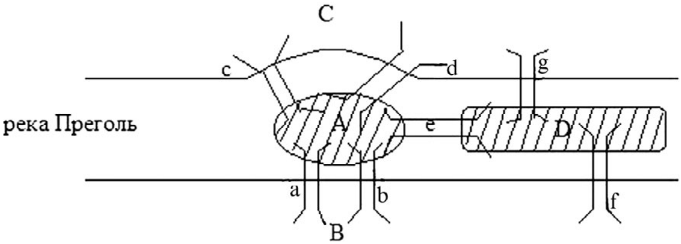


Рис. 1.30

Так как существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – различным разделенным мостами участкам города (рис. 1.31).

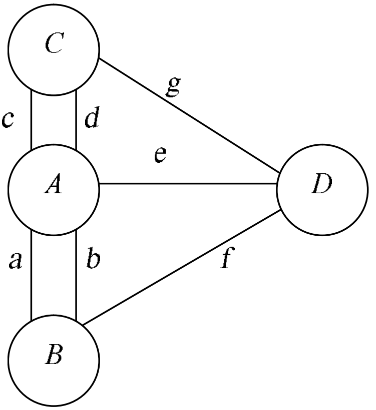


Рис. 1.31

Л. Эйлер обратился к общей задаче, касающейся теории графов: в каких случаях в конечном графе можно найти такой цикл, в котором каждое ребро графа участвовало бы один раз?

Если такой цикл (замкнутая цепь) есть, он называется эйлеровым, а граф, содержащий его, – эйлеровым графом.

Л. Эйлер сформулировал и доказал теорему: конечный граф G является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда: а) граф является связным; б) степени всех его вершин четные.

Из теоремы Эйлера следует, что задача о кенингсбергских мостах не имеет решения (граф на рис. 1.31 не эйлеров, так как степени всех его четырех вершин являются нечетными $d(A) = 5$; $d(B) = 3$; $d(C) = 3$; $d(D) = 3$).

Если обобщить задачу Эйлера, то надо искать наименьшее число непересекающихся по ребрам цепей $\underline{N_i}$, которые необходимы для того, чтобы покрыть конечный связный граф $\underline{G}$, т.е. включающий все его ребра в цепи N_i. Решение этой задачи сводится к задаче Эйлера.

Гамильтоновы графы

Гамильтоновым называется граф, если в нем есть цикл, который содержит каждую вершину этого графа. Сам этот цикл тоже называется гамильтоновым. Гамильтоновым называют и путь, содержащий каждую вершину графа [15, 31]. Название «гамильтонов» в приведенном определении связано с именем ирландского математика У. Гамильтона, которым в 1859 году была предложена игра «Кругосветное путешествие». Игра состоит в следующем: каждой из вершин додекаэдра приписывается название города, необходимо, переезжая из одного города в другой по ребрам додекаэдра, посетить каждый город один раз и вернуться в исходный пункт маршрута. Эта задача сводится к нахождению в исходном графе (рис. 1.32) цикла, проходящего через каждую вершину этого графа.

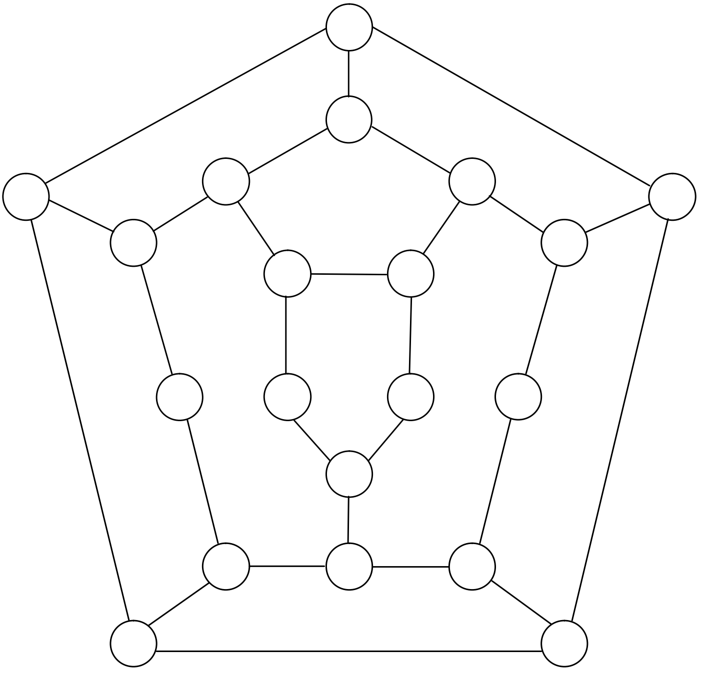


Рис. 1.32

В применении графов к играм вершины графа соответствуют различным позициям. Поэтому наличие гамильтонова цикла равносильно существованию цикличной последовательности ходов, которая содержит каждую позицию по одному разу. Примером является задача о шахматном коне: можно ли, начиная с любого поля на доске, двигать коня в такой последовательности, чтобы пройти через каждое из шестидесяти четырех полей и вернуться в исходное?

Одно из возможных решений показано на рис. 1.33 [31].

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

Рис. 1.33

В ориентированных графах можно искать ориентированные циклы, которые проходят через каждую вершину по одному разу.

Несмотря на сходство с эйлеровыми циклами, теория гамильтоновых циклов имеет с ней мало общего. Критерий существования эйлеровых циклов был установлен достаточно просто. А для гамильтоновых циклов общее правило неизвестно. Иногда даже для конкретных графов бывает трудно определить, имеется ли такой цикл. Для изучения вопроса о существовании гамильтоновых циклов в связном графе предположение об отсутствии кратных ребер или петель не является ограничением.

Более подробно о гамильтоновых графах см. [15, 31]. Приведем конкретный пример использования гамильтоновых графов.

Пример 1.15 [3, 11].

Собираясь в отпуск, служащий одной из компаний решил посетить Токио, Дели, Осло, Сидней и Рим. Он позвонил в различные авиакомпании и узнал стоимость перелета между любыми двумя городами и предоставляемые льготы. У него получилась следующая таблица (матрица) стоимостей (табл. 1.1):

Матрица стоимостей

Таблица 1.1

№	Город	Исх. пункт	Токио	Дели	Осло	Сидней	Рим
1	Москва	***	270	430	160	300	260
2	Токио	70	***	160	10	300	300
3	Дели	200	130	***	350	50	0
4	Осло	210	160	250	***	180	180
5	Сидней	120	460	270	480	***	50
6	Рим	230	50	50	90	50	***

В каком порядке надо объехать эти города и вернуться назад, чтобы стоимость проезда была минимальной?

Решение. Для удобства вычислений уменьшим все величины в 10 раз и пронумеруем пункты. Если бы не было льгот, предоставляемых авиакомпаниями, матрица стоимостей получилась бы симметричной относительно главной диагонали. Симметричные матрицы получаются, если рассматривать расстояния между городами или время в пути. Обозначим через C_{ij} стоимость проезда из i-го пункта в j-й. Следовательно, i и j могут принимать значения от 1 до n (и нашем случае $n = 6$). Пусть T – некоторый маршрут. Если в маршруте предусмотрен переезд из i-го пункта в j-й, то будем говорить, что в маршруте T есть дуга или звено (i, j). Следовательно, весь маршрут — совокупность n звеньев:

$$T = \{(p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_{n-1}, p_n), (p_n, p_1)\}.$$

Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — номера городов. Величину C_{ij} называют еще *длиной звена* (i, j) . Будем считать $C_{i,j=}\infty$. Обозначим через z(T) стоимость маршрута T. Ясно, что она складывается из стоимостей проезда по отдельным звеньям и должна быть сделана как можно меньше или, как говорят, *минимизирована*. Этот факт принято записывать с помощью формулы

$$z(T) = \sum_{(i,j)\in T} c_{ij} \to \min .$$

Величина z(T) определена для любого маршрута и не может быть меньше величины стоимости оптимального маршрута, т.е. значение z(T) какого-либо маршрута является верхней границей стоимости оптимального маршрута. Пусть

$$T = \{(1,4),(4,5),(5,3),(3,6),(6,2),(2,1)\},$$

тогда

$$z(T) = 16 + 18 + 27 + 0 + 5 + 7 = 73 .$$

Обозначим минимальную стоимость z*(T), ее верхнюю границу — $\overline{z(T)}$, нижнюю границу — $\underline{z(T)}$. Тогда

$$\underline{z(T)} \le z^*(T) \le \overline{z(T)} = z(T) = 73 .$$

Остается открытым вопрос: как вычислять нижнюю границу $\underline{z(T)}$? Для вычисления $\underline{z(T)}$ применяют редукцию строк и столбцов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Редукция строки (столбца)* — процедура вычитания из каждого элемента строки (столбца) наименьшего элемента этой же строки (столбца).

Проведем редукцию строк исходной матрицы, запоминая значение минимального элемента каждой строки в специальном столбце C_i, где $i = \overline{1,6}$ (табл. 1.2):

Таблица 1.2

Редукция строк

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	6	∞	15	0	29	29	1
3	20	13	∞	35	5	0	0
4	5	0	9	∞	2	2	16
5	7	41	22	43	∞	0	5
6	18	0	0	4	0	∞	5

Проведем редукцию столбцов полученной матрицы, запоминая значение минимального элемента каждого столбца в специальной строке q_i, где $i = \overline{1,6}$ (табл. 1.3):

Таблица 1.3

Редукция столбцов

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	1	∞	15	0	29	29	1
3	15	13	∞	35	5	0	0
4	0	0	9	∞	2	2	16
5	2	41	22	43	∞	0	5
6	13	0	0	4	0	∞	5
q_i	5	0	0	0	0	0	5 43

После редукции строк и столбцов в каждой строке и в каждом столбце будет, по крайней мере, один нулевой элемент. Такую матрицу будем называть *редуцированной*. Каждый пункт во время путешествия посещается один раз, поэтому в стоимость любого маршрута войдет одно число из каждой строки и одно число из каждого столбца. Если вычесть из каждого элемента некоторой строки или столбца матрицы стоимостей одну и ту же величину *C*, то стоимость любого маршрута, определяемого новой матрицей, меньше стоимости того же маршрута, определяемого старой матрицей, на величину *C*. При редукции матрицы все маршруты «дешевеют» на одну и ту же величину одновременно, поэтому отношения $<, >, \leq, \geq, =$ между стоимостями маршрутов останутся теми же. Эта величина – сумма всех констант, вынесенных в специальную строку и столбец при редукции. Обозначим ее *H*:

$$H = C_1 + C_2 + \ldots + C_6 + q_1 + q_2 + \ldots + q_6 + = \sum_{i=1}^{6} C_i + \sum_{i=1}^{6} q_i = 48.$$

Если $z(T)$ — стоимость некоторого маршрута до редукции, $z_1(T)$ — его же стоимость после редукции, то

$$z(T) = z_1(T) + H \; .$$

Редуцированная матрица содержит в каждой строке и в каждом столбце, по крайней мере, один нулевой элемент. Ясно, что если из этих элементов можно составить маршрут, то его стоимость $z_1(T) = 0$, т.е. минимальная. Если маршрут составить нельзя, то придется привлекать ненулевые элементы, повышая тем самым стоимость маршрута, Следовательно, величина *H* является нижней границей $\underline{z(T)}$ для данной матрицы стоимостей. Итак,

$$48 \leq z^*(T) \leq 73 \,.$$

Если бы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по одному нулевому элементу, то соответствующие пункты и образовывали бы оптимальный маршрут с оптимальной стоимостью *H*. Но в нашем случае это не так. С помощью МВГ будем строить оптимальный маршрут, постепенно выявляя по одному принадлежащему этому маршруту звену. Естественно, вначале выбрать звено с минимальной стоимостью, т.е. нулевой длины: $c_{ij} = 0$, а потом добавлять к нему новые звенья с нулевой длиной, а если это невозможно, то с минимальной. Если звено (i, j) включается в маршрут, то решение не должно содержать звеньев, начинающихся i-м и заканчивающихся в j-м пунктах. Поэтому i-ю строку и j-й столбец можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Итак, разделим множество всех маршрутов на две части: одна часть содержит звено (i, j), а другая не содержит (рис. 1.34). После этого решим вопрос: содержится рассматриваемое звено в оптимальном маршруте или нет? Таким образом мы решим вопрос о неперспективности ветви.

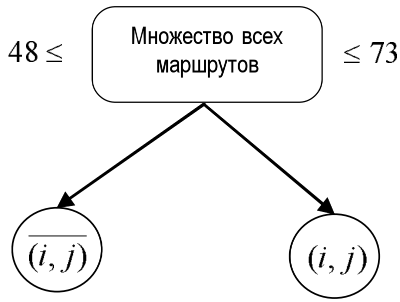


Рис. 1.34

Используем табл. 1.3. Видим, что в некоторых строках и столбцах имеется по 2 и более равных нулю элементов. Если мы не включаем звено (i, j) с $c_{ij} = 0$ в маршрут, то в любом случае из i-го пункта надо куда-то выезжать, а в j-й надо откуда-то прибывать. Следовательно, не включая звено (i, j) в маршрут, мы несем издержки, которые стремимся сделать как можно меньше. Поэтому каждый маршрут, не содержащий звено (i, j), должен содержать некоторое звено A, начинающееся в i-й строке и не совпадающее с (i, j), у которого стоимость минимальная. Обозначим стоимость таких звеньев в каждой строке A_i ($i = \overline{1,6}$) и поместим их значения в специальный столбец. Далее, маршрут, не содержащий звено (i, j), должен содержать некоторое звено B, заканчивающееся в j-м столбце и не совпадающее с (i, j), у которого стоимость минимальная. Обозначим стоимость таких звеньев в каждом столбце Bj ($j = \overline{1,6}$) и поместим их значения в специальную строку. Внесем в таблицу и значение H (табл. 1.4). Получим:

Таблица 1.4

Узлы	1	2	3	4	5	6	C_i	A_i
1	∞	11	27	0	14	10	16	10
2	1	∞	15	0	29	29	1	1
3	15	13	∞	35	5	0	0	5
4	0	0	9	∞	2	2	16	0
5	2	41	22	43	∞	0	5	2
6	13	0	0	4	0	∞	5	0
q_j	5	0	0	0	0	0	H = 48	
B_j	1	0	9	0	2	0		

При неиспользовании звена (*i*, *j*) издержки составят как минимум $A_i + B_j = \Phi_{ij}$. Величина Φ_{ij} называется *вторичным штрафом*. Это минимальный штраф (издержки), которому мы подвергаемся, если не включаем звено (*i*, *j*) в оптимальный маршрут. Вычислим Φ_{ij} для всех звеньев редуцированной матрицы стоимостей с $c_{ij} = 0$ и сравним их: $\Phi_{14} = 10$, $\Phi_{24} = 1$, $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{41} = 1$, $\Phi_{42} = 0$, $\Phi_{56} = 2$, $\Phi_{62} = 0$, $\Phi_{63} = 9$, $\Phi_{65} = 2$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{14} = 10$. Ясно, что в первую очередь надо решить, включать ли в оптимальный маршрут звено (1, 4), ведь при использовании его будут самые большие издержки. Именно поэтому (1, 4) выбираем в качестве *базового звена для ветвления*.

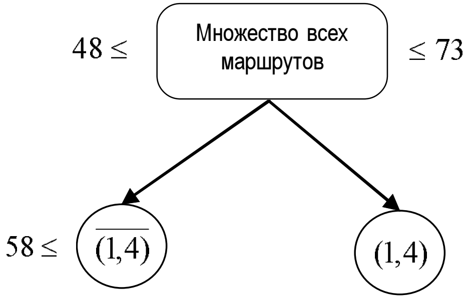


Рис. 1.35

Определим нижнюю границу стоимостей маршрутов, не содержащих звена (1, 4). Ясно, что их стоимость не меньше 48 — текущей нижней границы. Не используя звено (1, 4), мы вынуждены «раскошелиться» еще как минимум на 10, поэтому нижняя граница этого множества маршрутов будет 48 + 10 = 58 (рис. 1.35).

Чтобы определить новую нижнюю границу для маршрутов, включающих звено (1, 4), необходимо преобразовать матрицу стоимостей. Как уже говорилось, 1-ю строку и 4-й столбец можно исключить из рассмотрения. Кроме того, звено (4, 1) использовать уже нельзя, иначе возникает замкнутый подмаршрут (неполный маршрут) {(1, 4), (4, 1)}, что противоречит смыслу задачи. Исключить это звено из рассмотрения можно, положив $c_{41} = \infty$. Получим преобразованную матрицу стоимостей (табл.1.5):

Таблица 1.5

Узлы	1	2	3	5	6
2	1	∞	15	29	29
3	15	13	∞	5	0
4	∞	0	9	2	2
5	2	41	22	∞	0
6	13	0	0	0	∞

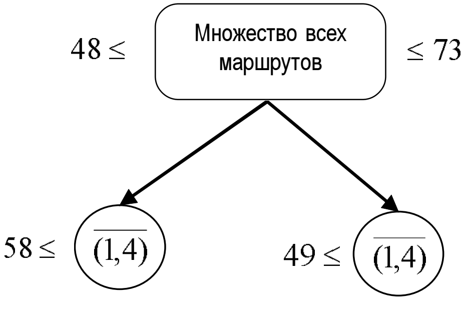


Рис. 1.36

Редуцируем ее и подготовим для вычисления вторичных штрафов (табл. 1.6). Проведя редукцию строк и столбцов, находим $H = 1$. Определим теперь для множества маршрутов, включающих звено (1, 4), новую нижнюю границу. Ясно, что она не меньше старой, так как 48 — нижняя граница всех маршрутов. Если из звеньев с нулевой стоимостью в последней матрице можно составить маршрут, то мы на самом деле заплатим за него H. Следовательно, любой маршрут, входящий в рассматриваемое множество, будет стоить не менее $H_1 = 48 + 1 = 49$. Поэтому 49 — новая нижняя граница данного множества (рис. 1.36).

Таблица 1.6

Узлы	1	2	3	5	6	c_i	A_i
2	0	∞	14	28	28	1	14
3	15	13	∞	5	0	0	5
4	∞	0	9	2	2	0	2
5	2	41	22	∞	0	0	2
6	13	0	0	0	∞	0	0
q_i	0	0	0	0	0	$H = 1$	
B_j	2	0	9	2	0		

Обе полученные ветви имеют право на существование. Продолжим обход по ветви, содержащей звено (1, 4), поскольку она обладает меньшей нижней границей и кажется более перспективной. Множество маршрутов, содержащих звено (1, 4), предстоит разбить на два подмножества по тому же самому принципу, что и исходное множество, поэтому необходимо выбрать базовое звено для ветвления. Для таблицы 1.6 получим значения вторичных штрафов: $\Phi_{21} = 16$, $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{42} = 2$, $\Phi_{56} = 2$, $\Phi_{62} = 0$, $\Phi_{63} = 9$, $\Phi_{65} = 2$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{21} = 16$. Итак, (2, 1) — базовое звено для ветвления. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (2, 1), равна 49 + 16 = 65. Для определения новой нижней границы маршрутов, содержащих звено (2, 1), вычеркнем из предыдущей таблицы 2-ю строку и 1-й столбец и определим запрещенные звенья: ясно, что запрещено звено (1, 2), образующее подмаршрут с рассматриваемым звеном, но его уже нет в таблице; из оставшихся запрещено звено (4, 2), так как оно входит в подмаршрут {(1, 4), (4, 2), (2, 1)}. Получим табл. 1.7.

Таблица 1.7

Узлы	2	3	5	6
3	13	∞	5	0
4	∞	9	2	2
5	41	22	∞	0
6	0	0	0	∞

Редуцируем ее и подготовим для вычисления вторичных штрафов (табл. 1.8):

Таблица 1.8

Узлы	2	3	5	6	C_i	A_i
3	13	∞	5	0	0	5
4	∞	7	0	0	2	0
5	41	22	∞	0	0	22
6	0	0	0	∞	0	0
q_j	0	0	0	0	$H = 2$	
B_j	13	7	0	0		

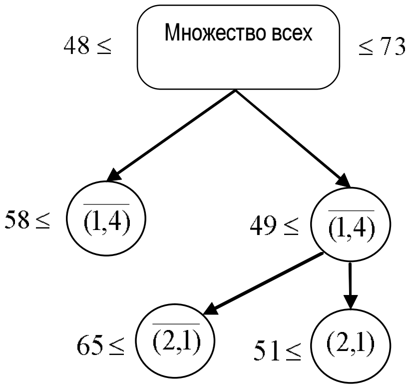


Рис. 1.37

Если из звеньев с нулевой длиной в табл. 1.8 можно составить маршрут, то его стоимость составит H, но пока такого маршрута составить не удается. Поскольку $H = 2$, то новая нижняя граница стоимостей маршрутов, содержащих звено (2, 1), равна 49 + 2 = 51 (рис. 1.37).

Продолжим обход дерева по ветви, содержащей звено (2, 1). Для выбора следующего звена для ветвления определим вторичные штрафы $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{45} = 0$, $\Phi_{46} = 0$, $\Phi_{56} = 22$, $\Phi_{62} = 13$, $\Phi_{63} = 7$, $\Phi_{65} = 0$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{56} = 22$. Итак, (5, 6) — базовое звено для ветвления. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (5, 6), равна 51 + 22 = 73. Для определения новой нижней границы маршрутов, содержащих звено (5, 6), вычеркнем из предыдущей таблицы 5-ю строку и 6-й столбец. Среди оставшихся запрещенным будет звено (6, 5), так как оно образует подмаршрут с рассматриваемым звеном (табл. 1.9).

Таблица 1.9

Узлы	2	3	5
3	13	∞	5
4	∞	7	0
6	0	0	∞

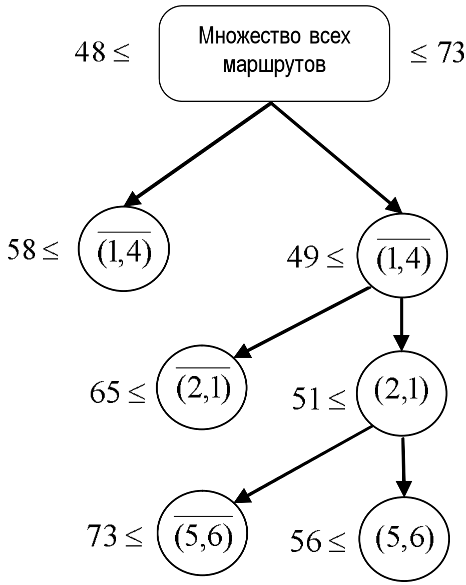


Рис. 1.38

Редуцируем ее, определим H, нижнюю границу стоимостей маршрутов, содержащих звено (5, 6) и вторичные штрафы. Новая нижняя граница стоимостей маршрутов, содержащих звено (5, 6), равна 51 + + 5 = 56 (рис. 1.38). $\Phi_{35} = 6$, $\Phi_{45} = 7$, $\Phi_{62} = 8$, $\Phi_{63} = 7$, $\max \Phi_{ij} = \Phi_{35} = \Phi_{62} = 8$. Итак, (3, 5) или (6, 2) — базовые звенья для ветвления. Можно ожидать, что они оба окажутся в предполагаемом оптимальном маршруте. Выберем (3, 5). Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (3, 5), равна 56 + 8 = 64. Для определения новой нижней границы для маршрутов, содержащих звено (3, 5), удалим из предыдущей таблицы 3-ю строку и 5-й столбец (табл. 1.10), редуцируем новую таблицу и подготовим ее к вычислению вторичных штрафов (табл. 1.11).

Таблица 1.10

Узлы	2	3
4	∞	7
6	0	∞

Таблица 1.11

Узлы	2	3	C_i	A_i
4	∞	0	7	∞
6	0	∞	0	∞
q_j	0	0	H = 7	
B_j	∞	∞		

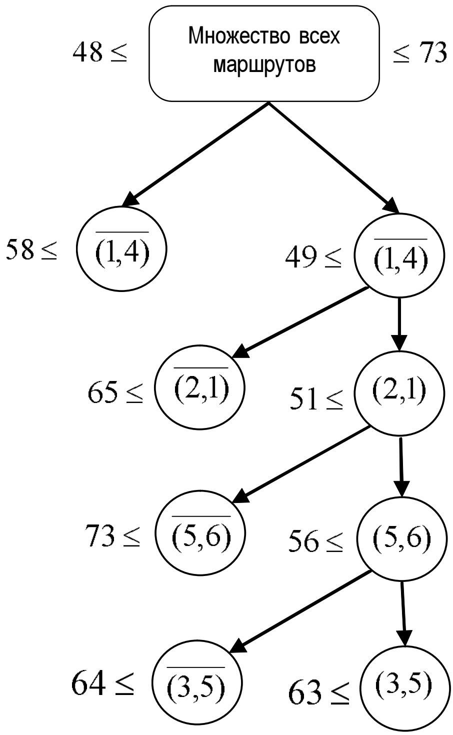


Рис. 1.39

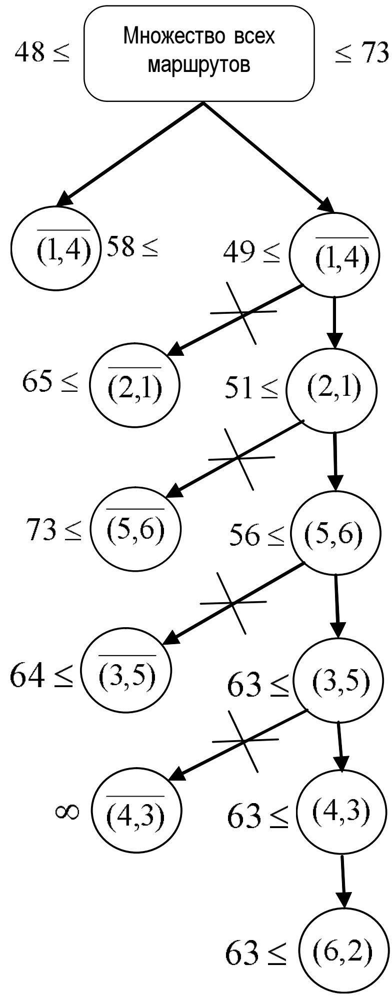


Рис. 1.40

Новая нижняя граница для маршрутов, содержащих звено (3, 5), равна 56 + 7 = 63 (рис. 1.39). Вторичные штрафы для звеньев (4, 3) и (6, 2) равны $\Phi_{43} = \infty$, $\Phi_{62} = \infty$, следовательно, не используя их, мы несем неограниченные издержки и поэтому должны включить их в предполагаемый оптимальный маршрут. Кроме того, в табл. 1.11 в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному нулевому элементу, соответствующему как раз звеньям (4, 3) и (6, 2). Значит, включая их в маршрут, мы не меняем нижнюю границу стоимости. Новая нижняя граница для маршрутов, не содержащих звено (4, 3), равна 56 + ∞ = ∞ (рис. 1.40). Теперь как неперспективные можно отсечь ветви с нижними границами, превосходящими стоимость полученного маршрута:

$$z(\{(1,4),(2,1)(5,6),(3,5),(4,3),(6,2)\}) =$$
$$= 16 + 7 + 5 + 5 + 25 + 5 = 63\,.$$

Получили значение больше 58 — нижней границы маршрутов, не использующих звено (1, 4). Надо проверить и эту ветвь на оптимальность. Таким образом, мы вынуждены вернуться в начало. Поскольку маршрут со звеном (1, 4) запрещен, то положим в исходной таблице $C_{14} = \infty$ (табл. 1.12).

Таблица 1.12

Узлы	1	2	3	4	5	6
1	∞	27	43	∞	30	26
2	7	∞	16	1	30	30
3	20	13	∞	35	5	0
4	21	16	25	∞	18	18
5	12	46	27	48	∞	5
6	23	5	5	9	5	∞

Полученная матрица называется матрицей стоимости возврата, а процедура анализа предыдущих точек ветвления, которые могли бы определить более дешевый маршрут, называется *возвратом*. Теперь для полученной матрицы определяем вторичные

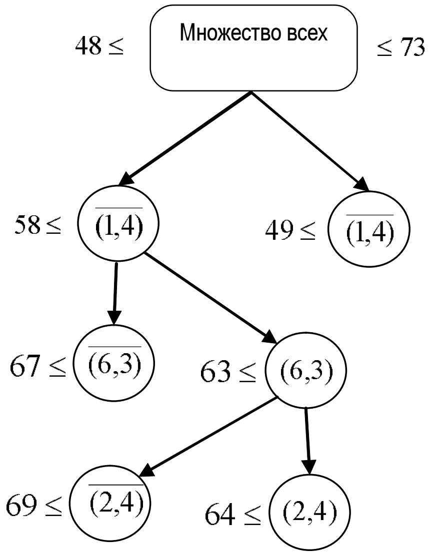


Рис. 1.41

штрафы и базовое звено для ветвления. Добавление новых звеньев и определение новых нижних границ получающихся ветвей ведется до получения нового полного маршрута или до того момента, когда нижние границы станут больше 63 и получающиеся множества окажутся неперспективными. Не будем приводить рассуждений и таблиц, покажем только момент остановки перебора (рис. 1.41).

Итак, оптимальным оказался маршрут со стоимостью $z(T) = 63$.

$$T = \{(1,4),(4,3)(3,5),(5,6),(6,2),(2,1)\}.$$

Отпускник должен посетить Осло, Дели, Сидней, Рим, Токио и вернуться домой. Стоимость билетов при этом составит 630 у.е.

Упражнения

Упражнение 1.1. Сельское почтовое отделение обслуживает семь населенных пунктов. Между любыми двумя из них есть дорога, по которой может проехать почтальон на велосипеде. Расстояния между пунктами в км указаны в таблице 1.13. Каким должен быть маршрут почтальона, чтобы расстояние, которое он преодолевает, развозя почту, было наименьшим?

Ответ:

$$T = \{(1,2),(2,7),(7,3),(3,4),(4,6),(6,5),(5,1)\},$$

$$z^*(T) = 18.$$

Таблица 1.13

П/п	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	9	6	3	5	9
2	5	0	8	8	5	9	2
3	9	8	0	1	6	7	3
4	6	8	1	0	4	2	9
5	3	5	6	4	0	2	8
6	5	9	7	2	2	0	3
7	9	2	3	9	8	3	0

Упражнение 1.2. Из всех имеющихся маршрутов выбрать самый дешевый, если известны стоимости билетов для проезда между различными населенными пунктами, в которых должен побывать путешественник (табл. 1.14).

Ответ:

$T = \{(1,6),(6,2),(2,4),(4,5),(5,3),(3,1)\}$,

$z^*(T) = 78$.

Таблица 1.14

П/п	1	2	3	4	5	6
1	∞	19	36	20	25	12
2	8	∞	16	8	30	36
3	11	17	∞	29	10	8
4	24	8	24	∞	13	15
5	20	38	20	45	∞	13
6	34	14	17	20	12	∞

1.4. Некоторые сведения из математической логики

По одному из наиболее распространенных определений логика – это анализ методов рассуждений. Изучая эти методы, логика интересуется формой, а не содержанием доводов о том или ином суждении [28]. Рассмотрим следующий вывод: Все кошки любят рыбу. Евгения – кошка. Следовательно, она любит рыбу.

Этот вывод имеет форму: все A суть B; C есть A, следовательно, C есть B. Логичность или истинность отдельных посылок или выводов логика не интересует. Он хочет знать, вытекает ли истинность вывода из истинности посылок. Систематическая формализация верных методов рассуждений – одна из главных задач логика. Если при этом он применяет математический аппарат и его исследования посвящены в основном изучению математических рассуждений, то предмет занятий логика можно назвать математической логикой. Можно сузить область математической логики, сказав, что ее основная цель – это дать точное и адекватное определение понятия «математическое доказательство».

Логика является началом любой научной теории. В конце XIX столетия интерес к ней оживился под влиянием открытия неевклидовых геометрий и стремления обеспечить строгое обоснование математического анализа. Тогда же были открыты парадоксы, т.е. рассуждения, которые приводят к противоречиям. Наиболее важными парадоксами являются следующие: логические парадоксы (Рассела (см. п. 1.1), Кантора, Бурали–Форти), семантические парадоксы (парадокс Лжеца, Ришара, Берри, Греллинга).

Например, парадокс Лжеца состоит в следующем. Предположим, что Женя – лжец. Женя говорит: «Я лгу». Если при этом он лжет, то сказанное им есть ложь, и поэтому он не лжет. Если при этом он говорит правду, то сказанное им истина, и поэтому он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и говорит правду одновременно.

Высказывания и операции над ними [29].

Понятие высказывания является исходным понятием математической логики.

Высказываниями называются повествовательные предложения, относительно которых известно или можно определить, истинны они или ложны.

Например, предложение «Конго впадает в Тихий океан» – ложное, а предложение «Альтаир – звезда в созвездии Орла» – истинное. Не всякое повествовательное предложение будет высказыванием. В частности, к высказываниям не относятся восклицательные и вопросительные предложения.

Например, не является высказыванием предложение «Который теперь час?» Не будет высказыванием и предложение, служащее определением. Например, не будет высказыванием предложение «Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю». Высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... Из всех свойств высказывания нас интересует только одно: истинно оно или ложно. Каждому истинному высказыванию будем сопоставлять 1, а ложному – 0. То есть на множестве всех высказываний введем функцию $\delta(A)$, которая принимает значение 1 или 0,

т.е. $$\delta(A) = \begin{cases} 1, \textit{если A истинно}, \\ 0, \textit{если A ложно}. \end{cases}$$

$\delta(A)$ назовем значением истинности высказывания A.

Например, для высказывания A «Миссисипи впадает в Бискайский залив» $\delta(A) = 0$.

Предположим, что мы имеем начальную совокупность высказываний. Из них с помощью логический операций можно строить новые высказывания. Приведем эти операции.

Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, обозначаемое $\bar{A}$, которое читается «не A или неверно, что A». A и $\bar{A}$ связаны между собой следующим образом (табл. 1.15).

Таблица 1.15

$\delta(A)$	$\delta(\overline{A})$
1	0
0	1

Табл. 1.15 называется таблицей истинности для отрицания.

Конъюнкцией высказываний А и В является новое высказывание $(A \wedge B)$, которое читается «А и В».

Таблица истинности для конъюнкции имеет вид табл. 1.16.

Таблица 1.16

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример 1.16. Высказывания $\sin\frac{\pi}{2} < \ln 3$ и $\ln 3 < 2^7$ истинны, т.е. $\sin\frac{\pi}{2} < \ln 3 < 2^7$.

Дизъюнкцией высказываний А и В называется новое высказывание $(A \vee B)$, которое читается «А или В».

Таблица истинности для дизъюнкции имеет вид табл. 1.17.

Таблица 1.17

$\delta(A)$	$\delta(B)$	$\delta(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример 1.17. Высказывание «В сутках 20 часов или в минуте 60 секунд».

Данное высказывание истинно (несмотря на его странность), так как истинно одно из составляющих его высказываний.

Импликацией высказываний А и В называется новое высказывание (А⇒В), которое читается «если А, то В или за А следует В».

Таблица истинности для импликации имеет вид табл. 1.18.

Таблица 1.18

δ(A)	δ(B)	δ(A⇒B)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример 1.18. Высказывание «Если Земля есть эллипсоид вращения, то $\log_2 4 = 2$» есть импликация высказываний «Земля есть эллипсоид вращения» и «$\log_2 4 = 2$». Оно является истинным, так как истинны оба входящих в него высказывания.

Эквивалентностью высказываний А и В называется новое высказывание (А⇔В), которое читается «А эквивалентно В или А тогда и только тогда, когда В».

Таблица истинности для эквивалентности имеет вид табл. 1.19.

Таблица 1.19

δ(A)	δ(B)	δ(A⇔B)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример 1.19. Высказывание «Вега находится в созвездии Лиры тогда и только тогда, когда склонение $\alpha\cup$Mi (Полярная) равно

30°» является эквивалентностью двух высказываний «Вега находится в созвездии Лиры» и «склонение $\alpha\cup$Mi(Полярная) равно 30°». Оно является ложным, так как первое высказывание истинно, а второе ложно.

Число $\delta(A\Leftrightarrow B)$ полностью определяется $\delta(A)$ и $\delta(B)$, поэтому можно оперировать не с высказываниями, а с числами 0 и 1. Например, эквивалентность с помощью 0 и 1 можно записать так: $1\Leftrightarrow 1 = 1$; $1\Leftrightarrow 0 = 0$; $0\Leftrightarrow 1 = 0$; $0\Leftrightarrow 0 = 1$.

Также можно поступать и по отношению к другим логическим операциям. Следовательно, каждой логической операции над высказываниями соответствует функция, определенная на множестве $\{0, 1\}$ и принимающая значения на нем же. Эту функцию называют тем же термином, что и соответствующую логическую операцию.

В математической логике с помощью логических операций можно строить формулы [2].

Например, $((A\wedge B)\Rightarrow C)$ будет формулой, которая построена из высказываний A, B с помощью логических операций конъюнкции и импликации.

Будем называть высказывательными переменными такие переменные, которые могут принимать своими значениями любые конкретные высказывания.

Будем обозначать такие переменные заглавными латинскими буквами X, Y, Z, U, ... Кроме этого, введем две высказывательные переменные И и Л; вместо первой можно подставить любое истинное высказывание, вместо второй – ложное.

Следующие соглашения дают описание понятия формулы.

а) Любая отдельно взятая высказывательная переменная является формулой.

б) Если Φ_1 и Φ_2 – две формулы, то выражение $(\Phi_1\wedge\Phi_2)$; $(\Phi_1\Rightarrow\Phi_2)$; $\bar{\Phi}_1$; $\bar{\Phi}_2$ тоже формулы.

в) Не существует никаких других формул кроме тех, которые получаются в результате применения конечного числа раз пунктов а, б, в.

Например, формулами будут $(Y\Rightarrow\bar{X})$, $((X\Leftrightarrow Y)Z)$, а выражение $(\bar{X}\Rightarrow)\vee Y$ формулой не является.

Пример 1.20. Рассмотрим формулу $((X \vee Y) \Rightarrow Z)$. Обозначим ее Ф(X, Y, Z). Значение истинности этой формулы полностью определяется значениями истинности переменных X, Y, Z. Поэтому можно составить таблицу, дающую значение истинности для Ф(X, Y, Z) в зависимости от значений истинности для X, Y, Z. Так как каждая переменная может принимать два значения (0 и 1), то для тройки X, Y, Z имеем 8 различных возможностей (таблица будет иметь 8 строк). Для заполнения последнего столбца таблицы подставляем значения X, Y, Z в формулу Ф(X, Y, Z).

Например, при X = Y = Z = 1 имеем $Ф = ((1 \vee 1) \Rightarrow 1) = 1$.

В результате заполнения получим табл. 1.20.

Таблица 1.20

X	Y	Z	$(X \vee Y) \Rightarrow Z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Для любой формулы Ф(X, Y, Z, ...) алгебры высказываний можно составить таблицу, которая дает значение истинности формулы в зависимости от переменных X, Y, Z, ... Эта таблица называется таблицей истинности для формулы Ф(X, Y, Z, ...).

Табл. 1.20. будет таблицей истинности для формулы $((X \vee Y) \Rightarrow Z)$ в примере 1.19.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формула Ф(X, Y, Z, ...) алгебры высказываний называется тождественно истинной, или тавтологией, если ее значение истинности равно 1 при любых значениях истинности для X, Y, Z, ...

Приведем некоторые важные тавтологии:

1) Законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции:
$((X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X))$; $((X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X))$

2) Законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции:
$(((X \wedge Y) \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z)))$; $(((X \vee Y) \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z)))$.

3) Законы де Моргана:

$$((\overline{X \wedge Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})); \quad ((\overline{X \vee Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})).$$

4) Закон исключения третьего

$$(X \vee \overline{X})$$

5) Закон контрапозиции

$$((X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}))$$

6) Схема доказательства «от противного»

$$((\overline{X} \Rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}) \Rightarrow X).$$

Предикаты

В математике используются высказывания, зависящие от одной или нескольких переменных. Например, высказывание $\log_2 x > 3$ зависит от переменной x и при различных значениях x может быть истинным или ложным. Например при x = 10 оно превращается в истинное высказывание, а при x = 2 – в ложное.

Высказывание $2x + y > 5$ зависит от двух переменных. Например, при x = 4 и y = 2 оно будет истинным, а при x = 3 и y = –4 – ложным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Высказывание, зависящее от переменных x, y, z, ... и принимающее значения из некоторого множества D, в математической логике называют предикатом на множестве D.

Если предикат содержит одну переменную, то его называют одноместным, а если n переменных, то n-местным. Область D – это область определения предиката. Предикаты будем обозначать заглавными буквами. Например, B(x) – одноместный предикат, а P(x, y) – двухместный предикат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество множества D, состоящее из тех значений переменных, при которых данный предикат превращается в истинное высказывание, называют областью истинности предиката.

Пример 1.21. Найти область истинности предиката

$P(x)=\sqrt{1+x}<3$.

D: $x \geq -1$ – область определения предиката.

Область истинности предиката: $x\in[-1; 8)$.

Предикат на множестве D при подстановке вместо переменных конкретных значений становится истинным или ложным высказыванием. Поэтому можно считать, что предикат определен на множестве D и принимает значение на множестве $\{0, 1\}$. Поэтому на предикаты распространяются операции над обычными высказываниями.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано: $X = \{-5, 17, 22, 34, 101\}$;
   $Y = \{-17, 0, 22, 34, 102, 505\}$.

Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X\backslash Y$, $Y\backslash X$, $X\Delta Y$.

2. Дано: $X = (-\infty;5]$; $Y = [-7;607)$.

Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X\backslash Y$, $Y\backslash X$.

3. Докажите, что отрезки [0, 1] и [0, 5] равномощны.

4. Дано: $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{7, 8\}$ $\rho = \{(1, 7), (1, 8), (2, 8), (3, 7)\}$. Построить матрицу и граф отношения ρ.

5. Сколькими способами в отделе, состоящем из 100 человек, можно выбрать начальника и его заместителей?

6. Есть шесть видов конвертов без марок и пять видов марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?

7. Из двенадцати человек надо выбрать пять и разместить их на занумерованных стульях (по одному человеку на стул). Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно посадить за стол четырех мужчин и четырех женщин так, чтобы женщины и мужчины не сидели рядом?

9. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить, используя цифры 3, 4, 5?

10. Найти таблицы истинности для формул

10.1. $((X \wedge Y) \Leftrightarrow (\overline{X} \Rightarrow Y))$

10.2. $((X \vee Y) \Leftrightarrow (X \vee \overline{Y}))$

11. Доказать, что формула $((\overline{X} \Rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \Rightarrow Y) \Rightarrow X)$ является тавтологией.

12. Найти область истинности предиката $Q(x) = \log_3(x + 2) < 4$.

Вопросы для самопроверки

1) Какие предложения называются высказываниями?
2) Привести определения логических операций.
3) Какие формулы алгебры высказываний называются тавтологиями?
4) Какие высказывания называются предикатами?
5) Что называется областью истинности предиката?
6) Какие способы задания множеств вы знаете?
7) Какое множество называется универсальным?
8) Какое отношение называется бинарным?
9) Что называется числом сочетаний из n элементов по m?
10) Что называется числом размещений из n элементов по m?
11) Что называется перестановкой из n элементов?
12) Какие графы называются изоморфными?
13) Какие графы называются эйлеровыми?
14) Что такое степень вершины графа?
15) Какие графы называют деревьями?
16) Что такое k-раскраски графа?
17) Какие графы называются планарными?
18) Какой граф называется гамильтоновым?
19) Какие из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы циклы?
20) Какие предложения называются высказываниями?
21) Привести определения логических операций.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Линейная алгебра – это часть математики, посвященная в основном теории матриц и связанной с ней теории линейных преобразований и векторных пространств. Она включает теорию форм, теорию инвариантов, тензорную алгебру.

В данном учебнике мы рассмотрим понятие матрицы, а также ее применение для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), рассмотрим определители, векторы, собственные числа и векторы матриц.

2.1. Матрицы, определители и их свойства

Матрицей называется прямоугольная таблица размером m (число строк) на n (число столбцов), заполненная некоторыми математическими объектами [41]. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа.

Как правило, матрицы обозначают большими буквами (A,B, ...), а их элементы маленькими буквами с двумя индексами, указывающими номер строки и номер столбца $(a_{ij}, b_{ij}, \ldots)$. То есть прямоугольную матрицу размера $m \times n$ записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(a_{ij}\right) = \left[a_{ij}\right] = \left\|a_{ij}\right\|, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Если заменить строки матрицы ее столбцами (столбцы строками), то получим транспонированную матрицу, которую обозначают заглавной буквой с индексом Т наверху:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые типы матриц [27, 42].

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то мы имеем квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ называются главной диагональю, а их сумма – это след матрицы.

Элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ составляют побочную диагональ.

Если все элементы матрицы, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, равны нулю, то мы имеем диагональную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все ненулевые элементы диагональной матрицы равны 1, то мы имеем единичную матрицу

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Если ненулевые элементы располагаются выше главной диагонали, то имеем верхнюю треугольную матрицу, а если ниже – нижнюю треугольную матрицу:

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & b_{nn}\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}c_{11} & 0 & \dots & 0\\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}.$$

Матрица размера $m\times 1$ – это матрица-столбец, а матрица размера $1\times n$ – матрица-строка:

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_m\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \dots & b_n\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейные операции над матрицами [19, 27, 42].

Для сложения двух матриц необходимо, чтобы они имели одинаковые размеры.

Сумму двух матриц обозначим $A+B$, а ее элементы равны $a_{ij}+b_{ij}$, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) Для любых двух матриц одинакового размера всегда существует единственная матрица Z, такая что $A+Z=B$. Тогда Z есть разность матриц B и A, т.е. Z = B — A. Элементы матрицы Z равны $b_{ij} - a_{ij}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $k \in R$ называется матрица

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $5\times\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -5\\ 0 & 30\end{pmatrix}$.

Для умножения двух матриц необходимо, чтобы они были согласованными. Матрицы A и B называются согласованными, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пусть заданы матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right), \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np}\end{pmatrix}=\left(b_{jk}\right), \quad j=\overline{1,n}, \quad k=\overline{1,p}.$$

Тогда произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C размера $m\times p$, элементы c_{ik} которой находятся по формуле

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

Из определения произведения матриц следует, что

$$A\times E=E\times A=A.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;

2) $(A+B)\times C=AC+BC$.

В общем случае $A\times B\neq B\times A$.

Рассмотрим конкретный пример умножения двух матриц.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы размера $n \times n$ вводится понятие определителя.

Определителем квадратной матрицы порядка n (определителем порядка n) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки, по одному из каждого столбца и снабженных знаками плюс и минус по некоторому определенному правилу. Это правило сформулируем позже [22, 42].

Определитель порядка n матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \;\; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

обозначается следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приведем легко запоминающиеся правила для вычисления определителей второго и третьего порядков [5, 27].

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times (-6) = 15.$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$+ \qquad\qquad\qquad -$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times (-8) + 0 \times 0 \times 7 + 1 \times 6 \times (-3) - 0 \times 4 \times 1 -$$
$$- (-8) \times (-3) \times 0 - 2 \times 6 \times 7 = -64 - 18 - 84 = -166.$$

Сформулируем свойства определителей [5, 27].

1) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

2) При перестановке строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3) Если все элементы строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

4) Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно выносить за его знак:

$$\begin{vmatrix} k\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ где } k \in R.$$

5) Определитель равен нулю, если все элементы минимум двух его строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \text{ где } k \in R.$$

6) Если каждый элемент строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых суммы, а у другого – из вторых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7) Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же вещественное число:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{где} k \in R.$$

Дадим понятия *минора* и *алгебраического дополнения* [5, 27].

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k различных строк и k различных столбцов, причем $1 \le k \le$ минимального значения из m и n.

Элементы выделенных строк и столбцов образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель выделенной квадратной матрицы порядка k называют минором k-го порядка матрицы A.

Если в выделенную квадратную матрицу порядка k включены строки и столбцы исходной матрицы, имеющие одинаковые номера, то такой минор называется главным.

Полное обозначение минора k-го порядка следующее:

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

где i – номера выделенных строк;

j – номера выделенных столбцов.

Общее число миноров порядка k прямоугольной матрицы размера $m \times n$ можно найти по формуле

$$N_k = C_m^k \times C_n^k,$$

где C_m^k – число сочетаний из m по k,

C_n^k – число сочетаний из n по k.

Число миноров первого порядка совпадает с общим числом элементов исходной матрицы

$$N_1 = C_m^1 \times C_n^1 = m \times n.$$

Рассмотрим конкретный пример

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее число миноров первого порядка данной матрицы A равно $N_1 = C_2^1 \times C_3^1 = 6$. Например,

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5; \qquad M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

Максимальный порядок миноров данной матрицы равен двум.

Общее число миноров второго порядка равно $N_2 = C_2^2 \times C_3^2 = 3$. Например,

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}; \quad M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем в ней все элементы i-й строки и j-го столбца. Оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$. Определитель этой матрицы будет минором $(n-1)$ порядка исходной матрицы A.

Например, вычеркнем в матрице A первую строку и второй столбец и получим следующий минор (n–1) порядка исходной матрицы

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минор обозначаем по номеру элемента, который стоит на пересечении вычеркиваемой строки и вычеркиваемого столбца. В нашем случае это элемент a_{12}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется число, вычисляемое по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. если сумма номеров строки и столбца – четная, алгебраическое дополнение будет совпадать с соответствующим минором, а если нечетная, то алгебраическое дополнение и минор будут иметь разные знаки.

Используя понятие алгебраического дополнения можно сформулировать общее правило вычисления определителей n-го порядка. Он вычисляется с помощью формул разложения по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Всего существует $2n$ формул разложения определителя (по элементам n-строк и n-столбцов) [5, 27, 42].

Например, приведем разложение по элементам первой строки и второго столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{n2}A_{n2}.$$

То есть каждый элемент строки (столбца) умножается на соответствующее алгебраическое дополнение.

Теоретически с помощью формул разложения можно вычислить определитель квадратной матрицы любого порядка, но реально эти формулы используются для нахождения определителей не выше 4-го. Объем вычислений можно несколько сократить, если использовать свойства определителей.

Из формул разложения следуют приведенные нами выше правила вычисления определителей второго и третьего порядков.

Рассмотрим конкретные примеры вычисления определителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-7-18)-5(21-24)+(9-(-4)) =$$

$$= -50+15+13=-22.$$

В данном примере мы разложили определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

К этому определителю сначала применим свойство номер 7. Первую строку определителя умножим последовательно на (–4); (–3); (–2) и сложим со 2, 3, и 4-й строками. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

К полученному определителю вновь применим свойство номер 7. Умножим последовательно третью строку на (–2) и на (–7) и сложим со второй и первой строчками. Получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по элементам первого столбца, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 36 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -(16-(-144)) = -160.$$

Теперь рассмотрим обратную матрицу и правило ее вычисления.

Квадратная матрица A называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, т.е. $\det A = 0$.

В противоположном случае ($\det A \neq 0$) матрица A является невырожденной. А любой невырожденной матрице A соответствует единственная обратная матрица A^{-1}.

Причем выполняется равенство

$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E.$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы [19, 27].

1) Вычислить определитель матрицы A и убедиться, что он не равен нулю.

2) Составить матрицу A_1 из алгебраических дополнений матрицы A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) Составить присоединенную матрицу (B), получаемую транспонированием матрицы A_1:

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{21}}{\det A} & \ldots & \dfrac{A_{n1}}{\det A} \\ \dfrac{A_{12}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} & \ldots & \dfrac{A_{n2}}{\det A} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{A_{1n}}{\det A} & \dfrac{A_{2n}}{\det A} & \ldots & \dfrac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

5) Проверка полученного результата

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$.

Рассмотрим конкретные примеры на обращение матриц.

Пример 2.1. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

Находить A^{-1} будем в соответствии с приведенным алгоритмом. Найдем определитель исходной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-1) \times 2 = 17,$$

т.е. $\det A \neq 0$, поэтому у матрицы A есть обратная A^{-1}.

Теперь найдем алгебраическое дополнение

$$A_{11} = 5;\ A_{12} = 1;\ A_{21} = -2;\ A_{22} = 3.$$

Составим из найденных алгебраических дополнений матрицу A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B (транспонируем матрицу A_1):

$$B = A_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы.

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} + \frac{2}{17} & -\frac{6}{17} + \frac{6}{17} \\ -\frac{5}{17} + \frac{5}{17} & \frac{2}{17} + \frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. обратная матрица A^{-1} вычислена верно.

Пример 2.2. Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

Вычисляем определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку последовательно на (–2) и на (–3) и складываем со второй и третьей, затем полученный определитель раскладываем по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -50 + 30 = -20;$$

$\det A \neq 0$, т.е. исходная матрица A – невырожденная и у нее есть обратная матрица.

Теперь найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -26;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{11} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 10;\quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 15;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Из найденных алгебраических дополнений составляем матрицу A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -26 & -25 & -11 \\ -12 & -10 & -2 \\ 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу $B = A_1^{\mathrm{T}}$.

$$B = \begin{pmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & 15 \\ -11 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times B = \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & 15 \\ -11 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20} \\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20} \\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20} \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку правильности вычисления обратной матрицы $A \times A^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{26}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{10}{20} \\ \frac{25}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{15}{20} \\ \frac{11}{20} & \frac{2}{20} & -\frac{5}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из проверки следует, что обратная матрица вычислена верно.
Имеют место следующие равенства:
$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;
$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$;
$(A \times B \times C \times \ldots \times F)^{-1} = F^{-1} \times \ldots \times C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}$.

Ранг матриц

Любая матрица, кроме своего порядка должна характеризоваться еще одним показателем, который устанавливает количество ее линейно независимых строк и столбцов. Этот показатель и называют рангом матрицы. Дадим его определение [19, 27].

Рангом ($r(A)$) матрицы A называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг имеет любая матрица.

Ранг матрицы считается равным нулю, если все элементы матрицы равны нулю.

Для матриц высокого порядка разработаны специальные вычислительные методы определения ранга, например методы жордановых исключений. Из приведенных выше свойств определителей следует, что ранг матрицы не изменяется: при ее транспонировании, при перестановке каких-либо строк или столбцов, при умножении каждого элемента строки или столбца на одно и то же число, при сложении элементов какой-то строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на действительное число.

Без доказательства приведем теорему и следствия из нее [27].

ТЕОРЕМА 2.1. Если ранг матрицы равен k, то существует k линейно независимых строк, от которых линейно зависят все остальные строки матрицы.

Следствие 1. Если ранг матрицы равен k, то она имеет k линейно независимых столбцов, от которых линейно зависят остальные столбцы.

Следствие 2. Максимальное число линейно независимых строк матрицы совпадает с максимальным числом линейно-независимых столбцов и равно рангу матрицы.

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Линейная система m уравнений с n неизвестными – это система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

В (2.1) $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, а a_{ij} – коэффициенты, x_1, x_2, ..., x_n – неизвестные, b_1, b_2, ..., b_m – свободные члены.

Систему (2.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B, \tag{2.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор свободных членов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных.

Решением СЛАУ называется любая совокупность n чисел (x_1, x_2, ..., x_n), которая обращает каждое уравнение системы (2.1) в верное равенство.

Любая СЛАУ вида (2.1) может иметь одно решение, бесконечное множество решений, ни одного решения.

Если СЛАУ имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если СЛАУ не имеет решений, то она – несовместная.

Если все свободные члены СЛАУ (2.1) равны нулю, то система называется однородной, а если хотя бы один из свободных членов системы не равен нулю, то она называется неоднородной. Система однородных уравнений всегда совместна, т.е. она имеет хотя бы одно решение ($x_j = 0$).

Перед решением СЛАУ надо убедиться в ее совместности. Поэтому приведем без доказательства теорему Кронекера–Капелли, которая позволяет это сделать.

Дополним матрицу A системы (2.2) столбцом свободных членов. В результате этого получим матрицу порядка $m \times (n + 1)$, которую называют расширенной матрицей системы (C):

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}.$$

Через $r(A)$ и $r(C)$ обозначим ранги матриц A и C соответственно.

Теперь сформулируем теорему [27].

ТЕОРЕМА 2.2. Для того чтобы СЛАУ вида (2.2) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы ($r(A)$) был равен рангу расширенной матрицы системы ($r(C)$), т.е. $r(A) = r(C)$. Здесь возможны два случая: 1) если $r(A) = r(C) = n$, где n – число неизвестных в системе (2.2), то СЛАУ имеет единственное решение; 2) если $r(A) = r(C) < n$, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

СЛАУ можно решать или прямыми, или итерационными методами.

В прямых (точных) методах решение системы (2.2) находится за конечное число арифметических действий. К прямым методам относятся метод Гаусса и его модификации, метод квадратного корня, метод Крамера и др.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение системы (2.2) находится как lim (предел) при $k \to \infty$ последовательных приближений $x^{(k)}$, где k – номер итерации. Обычно за конечное число итераций этот предел не достигается. Как правило, задается некоторое малое число $\varepsilon < 0$ (точность), и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| < \varepsilon.$$

К итерационным методам относятся: метод Якоби, метод Зейделя, метод релаксации, метод минимальных невязок, метод скорейшего спуска и др. [1, 36].

В учебнике рассмотрим прямые методы: метод Гаусса и метод Крамера.

Рассмотрим метод Гаусса решения СЛАУ. Он состоит из двух шагов. На первом шаге мы приводим исходную систему уравнений к верхнему треугольному виду, а на втором шаге находим неизвестные (x_j), начиная с последнего [1, 25].

Предположим, что мы имеем систему n уравнений с n неизвестными, и она является совместной, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, начиная со второго. Для этого из второго уравнения почленно вычтем первое, умноженное на a_{21} / a_{11}, из третьего почленно вычтем первое, умноженное на a_{31} / a_{11}, и т.д., причем $a_{11} \neq 0$, если $a_{11} = 0$, то переставляем местами уравнения системы (2.3). После этого система (2.3) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_1 + \ldots. + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}b_1; \quad (i, j = \overline{2,n})$.

В системе (2.4) исключаем неизвестные x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, т.е. ведущим элементом становится $a_{22}^{(1)} \neq 0$, если он равен нулю, то переставляем уравнение местами, т.е. из третьего уравнения системы (2.4) мы вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$, из четвертого уравнения системы (2.4) вычитаем второе, умноженное на коэффициент $a_{42}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ и т.д. В результате мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{11}}b_2^{(1)}; \quad (i, j = \overline{3,n})$.

Аналогичный процесс мы продолжаем далее, и на $(n-1)$-*М* шаге приходим к следующей системе уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + a_{13}x_3 \ + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

То есть исходную систему уравнений (2.3) привели к верхнему треугольному виду (первый шаг метода Гаусса завершен). Второй шаг (обратный ход) заключается в решении системы уравнений (2.6). Он осуществляется следующим образом: из последнего уравнения системы (2.6) находим $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, используя найденное значение x_n, из предпоследнего (n–1) уравнения системы (2.6) находим x_{n-1}, затем из (n–2) уравнение системы (2.6) находим x_{n-2} и т.д. до x_1.

Алгоритм Гаусса состоит из однотипных операций, которые легко программируются.

Решим, используя метод Гаусса, систему уравнений.

Пример 2.3

$$\begin{cases} 3x_1 \ + x_2 - 5x_3 \ = \ 8; \\ 12x_1 + x_2 \ - \ 3x_3 = 24; \\ -15x_1 + 4x_2 + \ x_3 = -42. \end{cases} \tag{2.7}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнения системы (2.7). Для этого умножим первое уравнение почленно на 4 и вычтем из второго, затем умножим первое уравнение на (–5) и вычтем из третьего. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -5x_3 & =8; \\ & -3x_2 & +17x_3 & =-8; \\ & 9x_2 & -25x_3 & =-2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теперь исключим из третьего уравнения системы (2.8) неизвестное x_2. Для этого умножим поэлементно второе уравнение системы (2.8) на (–3) и вычтем из третьего уравнения системы (2.8).

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -5x_3 & =8; \\ & -3x_2 & +17x_3 & =-8; \\ & & 26x_3 & =-26. \end{cases} \tag{2.9}$$

Из системы уравнений (2.9) последовательно находим неизвестные x, начиная с последнего (x_3), т.е. $x_3 = -1$;

$$x_2 = \frac{17x_3 + 8}{3} = -3\,;\; x_1 = \frac{8 - x_2 + 5x_3}{3} = 2\,.$$

Теперь рассмотрим метод Крамера решения СЛАУ.

Рассмотрим систему уравнений (2.3), которую запишем в матричном виде

$$AX = B, \tag{2.10}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица системы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор свободных членов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – вектор неизвестных.}$$

Если определитель матрицы A ($\det A$) не равен нулю, то существует A^{-1}.

Домножим слева систему (2.10) на A^{-1}, получим
$A^{-1}AX = A^{-1}B$, так как $A^{-1}A = E$, то
имеем $EX = A^{-1}B$, а так как $EX = X$, то
окончательно получим $X = A^{-1}B$ (2.11)
или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.12)$$

Из (2.12) следует

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det A} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\det A} \end{array}\right\}. \qquad (2.13)$$

Числители равенств (2.13) есть разложения по элементам 1, 2, ..., n-го столбцов определителя, полученного из $\det A$ заменой в нем 1, 2, ..., n столбцов столбцом свободных членов, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, неизвестные x_i можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \tag{2.14}$$

где $i = 1, 2, ..., n$ [27].

Решим систему уравнений, используя метод Крамера.

Пример 2.4

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 0; \\ 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & = 0; \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 1. \end{cases}$$

Вначале найдем определитель исходной системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -21 - 26 + 46 = -1.$$

Затем находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

и определяем неизвестные x_i; $i = 1, 2, 3$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = -2.$$

2.3. Собственные числа и собственные векторы матриц, квадратичные формы

Проблема собственных чисел играет существенную роль не только в линейной алгебре, но и в других разделах математики, а также во многих прикладных областях (в менеджменте, психологии, юриспруденции) [18].

Пусть задана квадратная матрица A размера $(n \times n)$, элементами которой являются действительные числа (R) и вектор неизвестных X размера $(n \times 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Предположим, что λ – это некоторое неизвестное действительное число.

Если λ и ненулевой вектор X удовлетворяют уравнению

$$A \times X = \lambda \times X, \tag{2.15}$$

то λ называется собственным числом или собственным значением матрицы A, а X – собственным вектором этой же матрицы, соответствующим λ [18, 22].

Преобразуем уравнение (2.15) к следующему виду:

$$\lambda \times X - A \times X = 0, (\lambda E - A) \times X = 0, \qquad (2.16),$$

где E – единичная матрица.

Матрица

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется характеристической матрицей [18].

Так как по условию вектор неизвестных X не равен нулю, то среди его координат x_1, x_2, ..., x_n должна быть хотя бы одна ненулевая. А для того чтобы система линейных однородных уравнений (2.16) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю (это следует из теоремы Кронекера–Капелли).

Поэтому получаем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.17)$$

Число $\lambda = \lambda_k$, где $k = \overline{1,n}$ будет собственным числом только в том случае, если матрица (λ_k $E - A$) – вырожденная.

Уравнение (2.17) называется характеристическим уравнением матрицы A и представляет собой алгебраическое уравнение степени n [18]:

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0. \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Множество всех этих корней называется спектром матрицы A.

Заметим, что уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет те же корни, что и уравнение (2.17), т.е.

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \det(\lambda E - A).$$

Каждому собственному значению спектра матрицы A ставится в соответствие собственный вектор, определенный с точностью до скалярного множителя. Если λ_k есть кратный корень характеристического уравнения, то для произвольной квадратной матрицы число соответствующих собственных векторов может быть не равно кратности корня. С геометрической точки зрения собственный вектор определяет в пространстве некоторое направление (прямую, проходящую через начало координат), которое в результате преобразования не изменяется и вдоль которого пространство испытывает растяжение или сжатие в λ раз [5, 26].

Полином $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ называют характеристическим полиномом. Коэффициенты p_k ($k = \overline{1, n}$) можно вычислить по следующим рекуррентным формулам [42]:

$$\begin{cases} p_1 = -SpA; \\ 2p_2 = -SpA^2 - p_1 SpA; \\ 3p_3 = -SpA^3 - p_1 SpA^2 - p_2 SpA; \\ 4p_4 = -SpA^4 - p_1 SpA^3 - p_2 SpA^2 - p_3 SpA; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ np_n = -SpA^n - p_1 SpA^{n-1} - \ldots - p_{n-1} SpA. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Здесь $SpA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ – след матрицы (сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A). Заметим, что

$p_n = (-1)^n \times \det A$. При отыскании собственных чисел даже для матриц невысокого порядка неизбежно большое количество вычислений. Для общего случая нельзя предложить оптимальный способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Рассмотрим случай, когда собственные числа находятся сразу исходя из вида матрицы (исходная матрица либо диагональная, либо верхняя или нижняя треугольная). В этом случае собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ совпадают с элементами главной диагонали исходной матрицы $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Пусть задана верхняя треугольная матрица *A* размера $(n \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\det(\lambda E - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & (\lambda - a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda - a_{nn}) \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11}) \times (\lambda - a_{22}) \times \dots \times (\lambda - a_{nn}) = 0.$$

Отсюда видно, что собственные числа равны:

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, ..., \lambda_n = a_{nn}.$$

С появлением ЭВМ получили распространение итерационные методы нахождения собственных чисел, которые не используют вычисление характеристического полинома. К этим способам относятся: степенной метод, метод обратных итераций, QR-алгоритм, метод вращений Якоби, QL-алгоритм и другие. Причем применение конкретного итерационного метода зависит от вида исходной матрицы A [1].

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 2.5. Дана матрица A размера (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

Из условия задачи видно, что матрица A является верхней треугольной матрицей. Поэтому собственными числами данной матрицы будут элементы ее главной диагонали

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -4 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 4)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Теперь найдем соответствующие найденным собственным числам собственные векторы. Для этого мы используем уравнение (2.16).

Для $\lambda_1 = -4$ получаем

$$(-4E - A) \times X_1 = 0, \qquad (2.20)$$

где $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Далее раскроем матричное уравнение (2.20)

$$\left[-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&4&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$\begin{pmatrix}0&-4&-1\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases}-4x_2 \quad -x_3 = 0;\\ -5x_2 = 0;\\ -5x_3 = 0.\end{cases}$$

Так как матрица этой системы вырождена, то она имеет ненулевые решения, которые имеют вид

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad x_1\neq 0,\, x_1\in R,$$

т.е. получены искомые собственные вектора для λ_1.

Для $\lambda_2=\lambda_3=1$ получаем

$$(E-A)X_2=0, \text{ где } X_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

или в подробной записи $\begin{pmatrix}5&-4&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$

В результате получаем

$$5x_1-4x_2-x_3=0 \text{ или } x_3=5x_1-4x_2,$$

т.е. это уравнение имеет ненулевые решения, которые и будут искомыми собственными векторами для λ_2.

Эти решения запишем в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \\ 5x_1 & -4x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Пример 2.6. Дана матрица ***A*** размера (2×2). Найти собственные числа и собственные матрицы *A*:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение (2.17) для данного случая

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$(\lambda + 3) \times \lambda - 4 = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0; \quad D = 9 - 4 \times 1(-4) = 25;$$

$$\lambda_1 = \frac{-3+5}{2} = 1; \quad \lambda_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Теперь найдем собственные векторы исходной матрицы ***A***, соответствующие $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -4$.

Для $\lambda_1 = 1$ имеем

$$(E - A)X_1 = 0, \text{ где } X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В подробной записи получим

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель полученной матрицы равен нулю, то она имеет ненулевые решения, которые и являются собственными векторами X_1, которые мы и находим:

$$\begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & = 0; \\ -2x_1 & +x_2 & = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$. Из второго уравнения системы получаем $x_2 = 2x_1$, т.е. она имеет бесконечное множество решений. И искомый собственный вектор X_1 будет иметь вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \neq 0, \quad x_1 \in R.$$

Аналогично для $\lambda_2 = -4$ находим

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \neq 0, \quad x_2 \in R.$$

В заключение приведем два полезных правила [26]:

1) сумма собственных чисел матрицы A равна следу этой матрицы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn};$$

2) произведение собственных чисел матрицы A равно определителю этой матрицы

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A.$$

Введем понятие квадратичной формы

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени от нескольких букв. Эти буквы обозначим x_1, x_2, ... x_n.

Квадратичную форму в общем виде можно записать так [18, 41]:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \text{ где } b_{ij} \in R.$$

В качестве примера рассмотрим квадратичную форму трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{3} (b_{i1} x_i x_1 + b_{i2} x_i x_2 + b_{i3} x_i x_3) = b_{11} x_1 x_1 +$$

$$+ b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{21} x_2 x_1 + b_{22} x_2 x_2 + b_{23} x_2 x_3 + b_{31} x_3 x_1 + b_{32} x_3 x_2 +$$

$$+ b_{33} x_3 x_3 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + x_1 x_2 (b_{12} + b_{21}) + x_1 x_3 (b_{13} + b_{31}) + x_2 x_3 (b_{23} + b_{32}).$$

Введем обозначения:

$$b'_{12} = b'_{21} = \frac{b_{12} + b_{21}}{2}; \quad b'_{13} = b'_{31} = \frac{b_{13} + b_{31}}{2}; \quad b'_{23} = b'_{32} = \frac{b_{23} + b_{32}}{2}.$$

Тогда квадратичная форма примет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b'_{12}x_1x_2 + 2b'_{13}x_1x_3 + 2b'_{23}x_2x_3.$$

Дополнительно вводим симметричную матрицу B, вектор $\vec{X}$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

В этом случае квадратичная форма примет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \vec{X}^T \cdot B \cdot \vec{X}.$$

Последняя формула представляет собой матрично-векторный вид квадратичной формы.

А в общем случае получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{X}^T \cdot B \cdot \vec{X},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} \ldots\ldots b_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где b_{ii} – коэффициенты при x^2_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, а $b_{ij} = b_{ji}$ равны полусуммам коэффициентов при элементах, содержащих произведения $x_i \cdot x_j$ и $x_j \cdot x_i$ при всех $i, j = 1, 2\ldots\ldots, n$, $i \neq j$.

Матрица В является матрицей квадратичной формы.

В качестве примера запишем в матрично-векторном виде квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 x_2 + 8x_1x_3 + 14x_2x_3.$$

В данном случае получаем

$b_{11} = 2$; $b_{22} = 3$; $b_{33} = 1$; $b_{12} + b_{21} = -6$; $b_{13} + b_{31} = 8$;
$b_{23} + b_{32} = 14$, т.е. $b_{12} = b_{21} = -3$;
$b_{13} = b_{31} = 4$; $b_{23} = b_{32} = 7$.

Матрица данной квадратичной формы принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

А ее матрично-векторная запись такова:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.4. Некоторые сведения о векторах

Цифровые данные, используемые в экономике, можно представить в виде списков чисел, каждое из которых имеет определенный смысл.

Например, списки цен различных товаров в магазинах, объемы продукции разных видов, выпущенных каким-либо предприятием за год, и т.д. В математике такие упорядоченные списки чисел называют векторами. Дадим определение n-мерного вектора ($n = 1, 2, \ldots.$).

Упорядоченный набор n действительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называется n-мерным вектором. Мы будем обозначать векторы заглавными буквами со стрелками над ними, т.е.

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ есть координаты вектора, а n – его размерность [18, 19].

Два n-мерных вектора называются равными, если их соответствующие координаты равны, например

$\vec{X} = (2, 3, 7, 12)$; $\vec{Y} = (2, 3, 7, 12) \Rightarrow \vec{X} = \vec{Y}$.

Вектор, все координаты которого нули, называется нольвектором и обозначается $\vec{O}$.

Алгебраической суммой двух n-мерных векторов

$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

называется вектор $\vec{X} \pm \vec{Y}$, каждая координата которого равна алгебраической сумме соответствующих координат векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, т.е.

$$\vec{X} \pm \vec{Y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n). \qquad (2.21)$$

Произведением действительного числа k на n-мерный вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерный вектор $k\vec{X}$, каждая координата которого равна произведению числа k на соответствующую координату вектора $\vec{X}$, т.е.

$$k\vec{X} = (kx_1, kx_2, ..., kx_n). \qquad (2.22)$$

Множество n-мерных векторов, для которых определены действия алгебраического сложения (2.21) и умножения на число (2.22), называют n-мерным векторным пространством и обозначают R^n (в случае $n = 1$ оно совпадает с множеством действительных чисел R).

В случае $n = 2$ и $n = 3$ имеем соответственно двумерное (R^2) и трехмерное (R^3) векторные пространства, а двумерные и трехмерные векторы имеют геометрическую интерпретацию: они изображаются направленными отрезками на плоскости и в пространстве [5, 18, 19].

Пусть в R^n заданы векторы

$$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n),$$
$$\vec{Z} = (z_1, z_2, ..., z_n);\ k \in R;\ t \in R.$$

Приведем свойства линейных действий векторами [5, 18]:

1) $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$;
2) $\vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) = (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z}$;
3) $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$;
4) $k(\vec{X} + \vec{Y}) = k\vec{X} + k\vec{Y}$;
5) $(k + t)\vec{X} = k\vec{X} + t\vec{X}$;
6) $k \cdot t\,(\vec{X}) = k \cdot (t \cdot \vec{X})$;
7) $0\vec{X} = \vec{0}$;
8) $k\vec{0} = \vec{0}$;
9) $\vec{X} - \vec{Y} = \vec{X} + (-1)\vec{Y}$

Длина (норма) вектора $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в пространстве R^n находится по формуле

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad (2.23)$$

Например, задан вектор $\vec{X} = (5, 3, -2)$.

Используя (2.23) найдем, что его длина равна

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

Введем понятие скалярного произведения в действительном пространстве R^n.

Скалярным произведением двух векторов

$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

в R^n ($x_i \in R$, $y_i \in R$, $i = \overline{1, n}$) называется число, получаемое по формулам [5, 18, 19]:

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \tag{2.24}$$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right| \times \cos\alpha, \tag{2.25}$$

где α есть угол между n-мерными векторами и (в случае $n = 2$ и $n = 3\alpha$ будет углом между направленными отрезками на плоскости и в пространстве, а при $n > 3$ векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ являются математическими абстракциями).

Из формулы (2.25) следует, что угол между n-мерными векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)}{\left|\vec{X}\right| \times \left|\vec{Y}\right|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{2.26}$$

Если угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равен $\frac{\pi}{2}$, то скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е.

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n = 0. \tag{2.27}$$

Пример 2.7

Например, заданы векторы

$\vec{X} = (2, 3, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 5)$ в трехмерном пространстве R^3. Найти угол между ними.

ПО формуле (2.26) получим

$$\cos\left(\widehat{\vec{X}\vec{Y}}\right)\frac{x_1y_2+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}=\frac{2+18+35}{\sqrt{4+9+49}\sqrt{1+36+25}}$$

$$=\frac{55}{\sqrt{62}\sqrt{62}}=\frac{55}{62}\approx 0{,}887097.$$

$$\alpha=(\widehat{\vec{X}\vec{Y}})\approx 27°29'21{,}''5$$

Скалярное произведение в пространстве R^n обладает следующими свойствами [5, 18]:

1) $(\vec{X},\vec{X})\geqslant 0$ (при этом равенство нулю будет только в том случае, если $\vec{X}=\vec{0}$);

2) $(\vec{X},\vec{Y})=(\vec{Y},\vec{X})$,

3) $(k\vec{X}+t\vec{Y},\vec{Z})=k(\vec{X},\vec{Z})+t(\vec{Y},\vec{Z})$.

Здесь $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$ – векторы в R^n, а k и t – действительные числа.

Пространство R^n, в котором введено понятие скалярного произведения по формуле (2.24), называется евклидовым n-мерным пространством [5, 18].

Векторное произведение

Введем новое действие над векторами – векторное произведение. При этом будем считать, что в трехмерном пространстве задана декартова система координат. Напомним, что декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, которые занумерованы в некотором порядке. Точка пересечения осей – это начало координат, а оси – это координатные оси, причем первую называют осью абсцисс (x), вторую – осью ординат (y), а третью – осью аппликат (z) [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторным произведением вектора $\vec{X}$ на вектор $\vec{Y}$ называется вектор, который обозначается $[\vec{X}, \vec{Y}]$ или $\vec{X} \times \vec{Y}$ и определяется условиями:

а) модуль вектора $\vec{X} \times \vec{Y}$ равен $|\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha$, т.е. $|\vec{X} \times \vec{Y}| =$ $= |\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$;

б) вектор $\vec{X} \times \vec{Y}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$;

в) если вектора $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{X} \times \vec{Y}$ приведены к общему началу, то вектор $\vec{X} \times \vec{Y}$ должен быть направлен так, чтобы из его конца кратчайший поворот вектора $\vec{X}$ к вектору $\vec{Y}$ был совершаем против часовой стрелки. Такая тройка векторов называется правой (рис. 2.1).

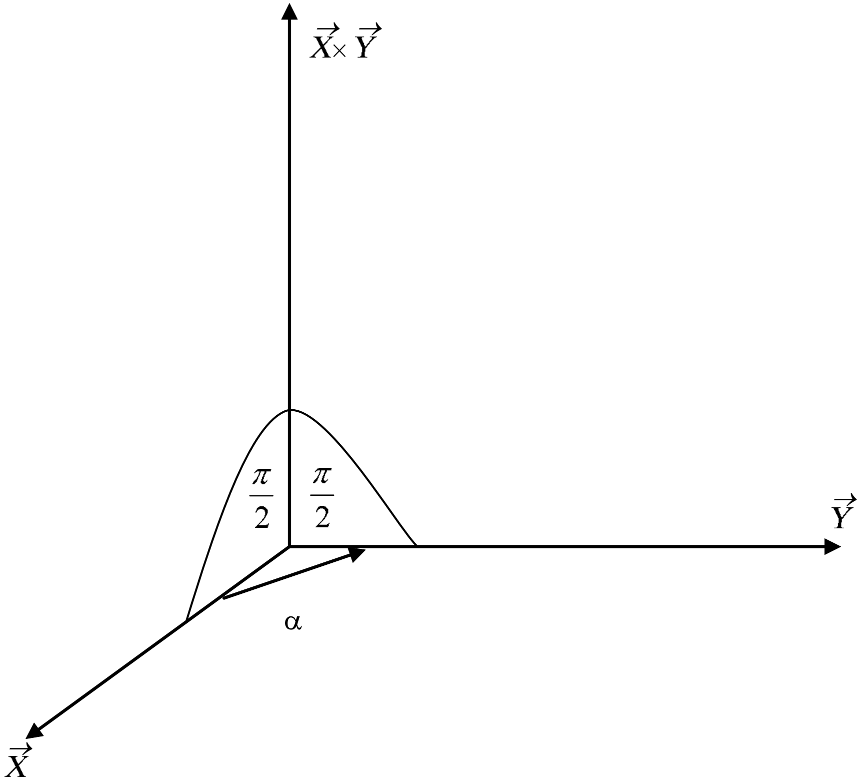


Рис. 2.1

Приведем свойства векторного произведения.

1) Если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ коллинеарные векторы, то их векторное произведение равно нулю, т.е. $\vec{X} \times \vec{Y} = |\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha = 0$.

В данном случае $\alpha = 0°$ или $\alpha = 180°$, а синус α в обоих случаях равен нулю.

2) Если векторное произведение векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ равно нулю, то они коллинеарны.

3) Если векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ приведены к общему началу, то модуль векторного произведения $|\vec{X} \times \vec{Y}|$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Из элементарной геометрии известно, что площадь параллелограмма (S) равна произведению длин смежных сторон на синус угла между ними, т.е. $|\vec{X}| \cdot |\vec{Y}| \cdot \sin\alpha = S$, поэтому имеем $|\vec{X} \times \vec{Y}| = S$.

Из данного свойства следует, что векторное произведение можно записать в виде

$$\vec{X} \times \vec{Y} = S \cdot \vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, т.е. $|\vec{e}| = 1$, а его расположение видно из рис. 2.2.

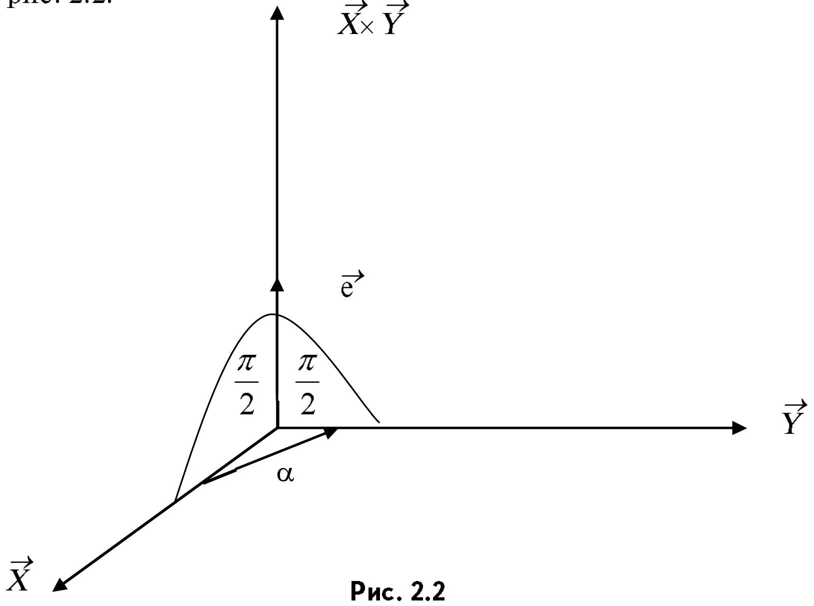


Рис. 2.2

4) Векторное произведение $\vec{X}$ на $\vec{Y}$ – это вектор, обратный векторному произведению $\vec{Y}$ на $\vec{X}$, т.е. $[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$.

5) Свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю k, т.е. $[(k\vec{X}), \vec{Y}] = k[\vec{X}, \vec{Y}]$, или $[\vec{X},(k\vec{Y})] = k[\vec{X}, \vec{Y}]$.

5) Распределительное свойство относительно сложения, т.е. $[\vec{X}, (\vec{Y}+\vec{Z})] = [\vec{X}, \vec{Y}] + [\vec{X}, \vec{Z}]$, или $[(\vec{Y}+\vec{Z}), \vec{X}] = [\vec{Y}, \vec{X}] + [\vec{Z}, \vec{X}]$.

Приведем без доказательства теорему, позволяющую находить векторное произведение двух векторов, если заданы их координаты.

ТЕОРЕМА 2.3. Если заданы координаты векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$:

$\vec{X} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{Y} = (x_2, y_2, z_2)$,

то векторное произведение вектора $\vec{X}$ на вектор $\vec{Y}$ определяется формулой [5, 13, 17]

$$\vec{X}\times\vec{Y} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad [2.28]$$

Формулу (2.28) можно переписать в виде

$$\vec{X}\times\vec{Y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad [2.29]$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, а их расположение видно из рис. 2.3.

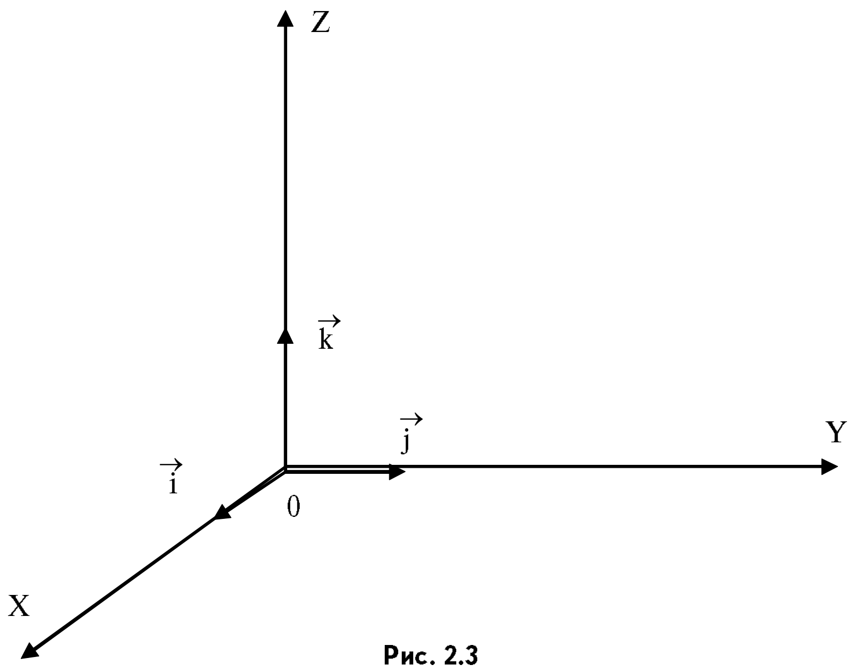


Рис. 2.3

Рассмотрим некоторые задачи на применение векторного произведения.

Пример 2.8

Дано: $\vec{X}$= (2, 5, 7); $\vec{Y}$= (1, 2, 4). Надо найти площадь треугольника, построенного на этих векторах. Обозначим искомую площадь Sтр. и воспользуемся свойством три. Поэтому получим $|\vec{X} \times \vec{Y}| = S_{пар}.$, где $S_{пар}.$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, из элементарной геометрии известно, что $S_{тр}. = \dfrac{S_{пар}}{2}$.

Следовательно, получаем по формуле (2.28)

$$\vec{X}\times\vec{Y} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6; -1; -1),$$

$$S_{пар} = |\vec{X}\times\vec{Y}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{38}\ .$$

$$S_{тр} = \frac{S_{пар}}{2} = \frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3{,}08.$$

Пример 2.9

Дано: вершины треугольника ABC с координатами: A (4, –14, 8); B (2, –18, 12); C (12, –8, 12). Надо найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

Обозначим: площадь треугольника ABC через $S_{тр}$., искомую высоту через h_c.

Из элементарной геометрии известно, что

$$S_{Тр} = \frac{|\vec{AB}|}{2} h_c, \text{ где } |\vec{AB}| \text{ – длина стороны AB.}$$

С другой стороны, из свойства три векторного произведения имеем

$$S_{Тр} = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2}, \text{ где } |\vec{AB}\times\vec{AC}| \text{ – модуль векторного}$$

произведения векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Сравнивая обе формулы, получаем

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} \cdot h_c = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} \text{ или}$$

$$h_c = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$, т.е. мы получили нужное нам соотношение.

Находим: $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$;

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = (8, 6, 4);$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6; \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-40, 40, 20);$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1600+1600+400} = \sqrt{3600} = 60.$$

И окончательно получаем

$$h_c = \frac{60}{6} = 10.$$

Смешанное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Смешанным произведением трех векторов $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ называется число, которое равно векторному произведению $[\vec{X}, \vec{Y}]$, скалярно умноженному на вектор $\vec{Z}$.

Обозначим смешанное произведение векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ следующим образом: $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$.

Выполняются следующие равенства $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = [\vec{X}, \vec{Y}]\vec{Z} = \vec{X}[\vec{Y}, \vec{Z}]$.

Геометрический смысл векторного произведения виден из теоремы 2.4: смешанное произведение $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ – правая и со знаком минус, если это тройка левая (в этом случае, если смотреть из конца вектора Z, кратчайший поворот вектора X к вектору Y осуществляется по часовой стрелке). Если же векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ компланарны, т.е. лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = 0$.

Приведем свойства смешанного произведения.

1) $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = \vec{Y}\vec{Z}\vec{X} = \vec{Z}\vec{X}\vec{Y}$, т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей.

2) $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = -\vec{X}\vec{Z}\vec{Y}$; $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = -\vec{Y}\vec{X}\vec{Z}$; $\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = -\vec{Z}\vec{Y}\vec{X}$, т.е. смешанное произведение меняет свой знак при перестановке местами любых двух векторов-сомножителей.

3) $\vec{X}(\vec{Y} + \vec{U})\vec{Z} = \vec{X}\vec{Y}\vec{Z} + \vec{X}\vec{U}\vec{Z}$; $\vec{X}\vec{Y}(\vec{Z} + \vec{U}) = \vec{X}\vec{Y}\vec{Z} +$
$+ \vec{X}\vec{Y}\vec{U}$;

4) $\vec{X}(k\vec{Y})\vec{Z} = \vec{X}\vec{Y}(k\vec{Z}) = k(\vec{X}\vec{U}\vec{Z})$, где $k \in R$.

В том случае, если векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ заданы своими координатами, т.е.

$\vec{X} = (x_1\ y_1\ z_1)$; $\vec{Y} = (x_2\ y_2\ z_2)$; $\vec{Z} = (x_3\ y_3\ z_3)$, их смешанное произведение находится по формуле

$$|\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}| = \begin{vmatrix} x_1\ y_1\ z_1 \\ x_2\ y_2\ z_2 \\ x_3\ y_3\ z_3 \end{vmatrix}. \qquad [2.30]$$

А объем параллелепипеда, который построен на векторах $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, вычисляется по формуле [5, 17]

$$V = |\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}| = \pm\begin{vmatrix} x_1\, y_1\, z_1 \\ x_2\, y_2\, z_2 \\ x_3\, y_3\, z_3 \end{vmatrix}. \qquad [2.31]$$

В формуле [2.31] знак берется одинаковым со знаком определителя.

Теперь приведем конкретный пример применения смешанного произведения.

Пример 2.10. Дано: $\vec{X}= (1, 5, 4)$; $\vec{Y}= (6, -4, 4)$; $\vec{Z}= (10, -1, 10)$. Надо доказать, что заданные векторы компланарны.

Из теоремы 2.4 следует, что если векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = 0.$

Далее используем формулу (2.30) и получим

$$\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 10 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -17 & -5 \\ 0 & -51 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} -17 & -5 \\ -51 & -15 \end{vmatrix} = 4\cdot(-5)\cdot\begin{vmatrix} -17 & 1 \\ -51 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

При решении определителя мы вынесли общие множители третьего столбца и второй строки, затем умножили первую строку на (–3) и сложили со второй, после этого умножили первую строку на (–10) и сложили с третьей, а затем разложили получившийся определитель по элементам первого столбца, а после вынесли общий множитель третьего столбца. Так как при решении определителя мы получили ноль, то доказано, что заданные векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ компланарны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти произведения матриц:

1.1. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -3 & 9 & 0 \\ 18 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 17 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 10 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$;

1.3. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \\ -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

2.1. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 6 \\ 10 & 0 & -11 & 5 \\ -3 & -7 & 8 & 11 \end{vmatrix}$; 2.2. $\begin{vmatrix} 7 & -10 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 18 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -4 & -3 & 9 & 15 \end{vmatrix}$;

2.3. $\begin{vmatrix} 0 & -10 & 3 & 7 \\ 6 & 13 & -8 & -7 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Найти матрицы, обратные данным:

3.1. $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3.3. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранги матриц:

4.1. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 1 \\ 8 & -7 & 12 & 4 \\ -15 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$; 4.2. $\begin{pmatrix} 2 & 11 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & -2 & -12 \\ 3 & -6 & 8 & -6 \\ 9 & 2 & 4 & 18 \end{pmatrix}$;

4.3. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить СЛАУ методами Гаусса и Крамера:

5.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 5.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 52x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

6. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

6.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6.2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

6.3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 6.4. $\begin{pmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Дано: $\vec{X} = (1, -5, 6, 7, 10)$; $\vec{Y} = (-2, 7, 8, 11, -6)$.
Найти угол между векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$.

8. Даны два ортогональных вектора
   $\vec{X} = (3, x_2, 7)$ и $\vec{Y} = (1, 6, 8)$.
   Найти координату x_2.
9. В трехмерном пространстве заданы три точки M(1; 1; 1); N(2; 2; 2); P(4; 3; 5). Надо найти площадь треугольника MNP.
10. В трехмерном пространстве заданы четыре точки M(1; 1; 1); N(4; 4; 4); P (3; 5; 5); Q(2; 4; 7). Надо найти объем тетраэдра MNPQ.
11. Даны векторы $\vec{X} = (-4; -8; 8)$, $\vec{Y} = (4; 3; 2)$. Надо найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь треугольника, построенного на этих векторах.
12. Проверить, что точки M(5; –1; –1); N(4; 2; 2); P(5; 3; 1); Q(8; 0; –5) лежат в одной плоскости.
13. Записать в матрично-векторном виде квадратичные формы:

13.1. $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 3x_2^2 - 0{,}5x_3^2 - 5x_1x_2 + 17x_1x_3 + 22x_2x_3$;

13.2. $f(x_1, x_2, x_3) = -32x_1^2 - 0{,}5x_2^2 + 11x_3^2 + 92x_1x_2 - 66x_1x_3 - x_2x_3$.

Вопросы для самопроверки

1) Что называется матрицей? Типы матриц.
2) Правило и свойства сложения матриц.
3) Правило и основные свойства перемножения двух матриц.
4) Как найти матрицу, обратную заданной? Любая ли матрица имеет обратную?
5) Что называется определителем?
6) Что такое ранг матрицы?
7) Как определить, совместна ли заданная СЛАУ?
8) В каких случаях однородные СЛАУ имеют ненулевые решения?
9) В чем суть итерационных методов решения СЛАУ?
10) В чем состоит метод Гаусса решения СЛАУ?
11) В чем состоит метод Крамера решения СЛАУ?
12) Какие числа называются собственными значениями матрицы?
13) Что такое след матрицы?
14) Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы?
15) Дать определение n-мерного векторного пространства.

16) Что называется нормой вектора?
17) Как найти угол между двумя векторами в n-мерном векторном пространстве?
18) Какое n-мерное пространство называется евклидовым?
19) Что называется квадратичной формой?
20) Приведите матрично-векторную запись квадратичной формы.
21) Как находится векторное произведение, если заданы координаты составляющих его векторов?
22) Каков геометрический смысл смешанного произведения?

3. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

3.1. Некоторые сведения о функциях

В любой области науки мы встречаемся с различными величинами. Под величиной понимают все то, что может быть измерено и выражено числом или числами [4].

В естественных, технических и гуманитарных науках имеют дело с различными величинами, например, скоростью, силой, температурой, себестоимостью, валовым внутренним продуктом какой-либо страны, количеством преступлений в каком-то регионе и др.

А в математике конкретные величины не участвуют, т.е. рассматривают величины вообще, не принимая во внимание их физический смысл.

Все величины можно разделить на переменные и постоянные.

Переменной называется такая величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, которая не меняет свое числовое значение, называется постоянной.

Все процессы характеризуются взаимоизменяемостью нескольких переменных величин, а это приводит к важнейшему понятию математики – функциональной зависимости [4, 32].

Часто одни и те же величины могут в одних случаях быть переменными, а в других постоянными.

Например, в формуле $F = ma$ величины m (масса) и a (ускорение) могут быть как постоянными, так и переменными.

Но существуют и фундаментальные постоянные, которые сохраняют свое значение, по крайней мере, в нашей Метагалактике.

Например, в законе всемирного тяготения $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ величина $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$ – фундаментальная постоянная.

Установление и описание связей между величинами – одна из основных задач математического анализа, который включает в себя ряд дисциплин: теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления, теорию рядов и др. [4]. Некоторые сведения из этих дисциплин мы рассмотрим в главах 3–7.

Теперь приведем определение функции одного независимого аргумента.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x на множестве определения D, если каждому значению $x \in D$ по какому-то закону поставлено в соответствие одно (несколько, бесконечно много) значение (значений) y [4, 30].

В первом случае функция называется однозначной, например $y = x + 1$ (рис. 3.1).

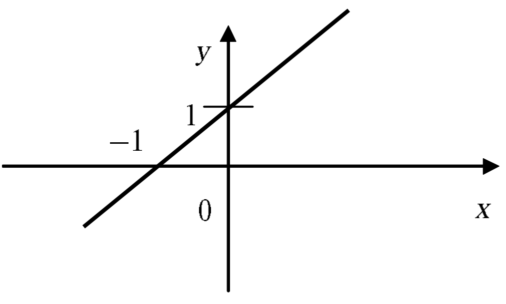


Рис. 3.1

А во втором случае – многозначной, например, $y = Arc\sin x$ (рис. 3.2).

Величину x из области D можно брать произвольно, поэтому она называется аргументом, или независимой переменной. А величина y будет зависеть от выбранной величины x, поэтому ее называют зависимой переменной, или функцией.

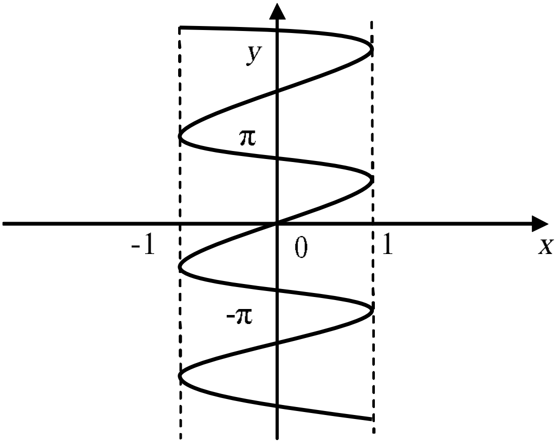


Рис. 3.2

Область определения D может быть любой, но, как правило, используются области двух видов:

— множество целых неотрицательных чисел или какие-то части этого множества;

— один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси.

В первом случае имеем функцию целочисленного аргумента, а во втором – непрерывного.

Тот факт, что величина y есть функция аргумента x, обычно записывают так: $y = f(x)$.

Множество всех значений функции обозначим через E.

Функцию можно задать с помощью таблицы, в виде графика (преимуществом этого способа является его наглядность) или аналитически (формулой). Последний способ является самым распространенным.

Все функции можно разделить на два класса: элементарные и неэлементарные.

К элементарным функциям относятся основные элементарные функции:

$$y = x^n (n \in R),\ y = a^x (a > 0, a \neq 1),$$
$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1),\ y = \sin x,\ y = \cos x,$$
$$y = \mathrm{tg} x,\ y = \mathrm{ctg} x,\ y = \sec x,\ y = \mathrm{cosec} x,$$
$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg} x,\ y = \mathrm{arcctg} x.$$

А также функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции и заданные одной формулой [32].

Например,

$$y = \frac{6\sin^2 x - 5x^3}{\sqrt{14\mathrm{ctg} x + 2}};\ y = \frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}};\ y = \frac{8^x - 7x^3}{\mathrm{tg} 2x};\ y = \frac{e^x - 5^{2x}}{\ln 4x} \text{ и т.д.}$$

Все функции, не подходящие под данное определение, элементарными функциями не являются.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0; \\ 0 \text{ при } x = 0; \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

не является элементарной функцией, так как задана тремя формулами [8, 32].

Функция $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ не будет элементарной, так как количество операций умножения, которое нужно совершить для получения $f(n)$, не будет являться конечным.

3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов

Прежде чем перейти к определению предела, напомним, что в математике используются три вида бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, ∞. Бесконечность не является числом, она показывает, как меняется переменная величина, которая конечна в любой момент времени.

Теперь определим понятие последовательности и ее предела.

Последовательностью называется множество чисел, которое перенумеровано с помощью целых чисел и расположено в порядке возрастания номеров [4].

Если задана последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то тем самым любому целому неотрицательному значению n поставлено в соответствие значение $y_n = f(n)$.

Например, члены геометрической прогрессии $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ являются последовательными значениями функции $f(n) = \frac{1}{3^n}$, где $n \in Z^+$.

Может случиться так, что с увеличением n значения $y_n = f(n)$ будет неограниченно приближаться к какому-то числу a. В этом случае говорят, что число a является пределом функции $f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ при $n \to \infty$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Число a является пределом последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что для всех $f(n)$ с номерами $n > N$ справедливо неравенство [4, 32]

$$\left| f(n) - a \right| < \varepsilon \,. \tag{3.1}$$

Используя приведенное определение, докажем, что последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ имеет предел, равный 1.

Согласно определению имеем

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = N \,.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, что при всех $n > N$ будет выполняться (3.1), а это означает, что 1 есть предел исходной последовательности.

Теперь рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывного аргумента x и предположим, что x неограниченно приближается к числу x_0 $(x \to x_0)$. При этом может оказаться, что соответствующее значение $f(x)$ неограниченно приближается к некоторому числу b. В этом случае говорят, что число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

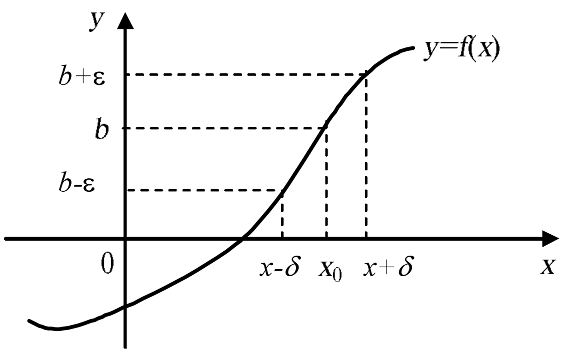


Рис. 3.3

Сформулируем определение предела функции.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ [4, 30]. Заметим, что функция не обязательно должна быть определена в предельной точке x_0, она должна быть определена лишь в некоторой окрестности этой точки.

Тот факт, что b – предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Данное нами определение иллюстрируется рис. 3.3. Используя приведенное определение предела, докажем, что

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

На основании определения имеем

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6\right| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon = \delta. \qquad (3.2)$$

Таким образом, мы доказали, что исходная функция будет отличаться от 6 меньше чем на ε, если будет выполняться неравенство (3.2). В данном случае $\varepsilon = \delta$.

Приведенное определение не дает способа вычисления пределов. Ниже мы рассмотрим некоторые из таких методов.

Дадим понятие о левых и правых пределах функции $y = f(x)$ и точках ее разрыва.

Если $f(x) \to b_1$ при $x \to x_0$, так что x принимает только значения меньшие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = b_1$ и называют b_1 левым пределом.

Аналогично, если $f(x) \to b_2$ при $x \to x_0$, так что x принимает только значения большие x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b_2$ и называют b_2 правым пределом [4, 30].

Геометрическая иллюстрация левого и правого пределов дана на рис. 3.4.

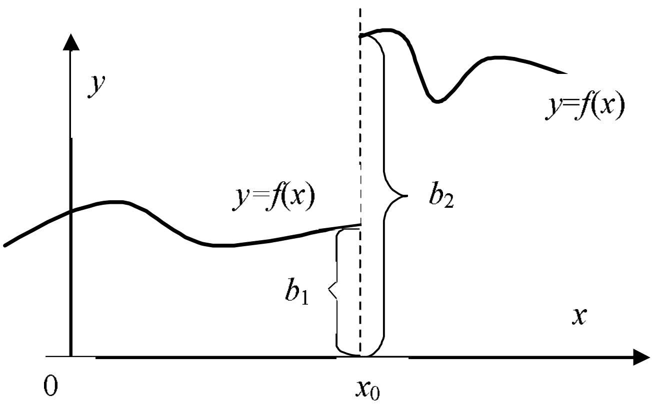


Рис. 3.4

Из рис. 3.4. следует, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет разрыв. Он носит название разрыва первого рода (в точке разрыва первого рода левый и правый пределы не равны $b_1 \neq b_2$ и конечны). Все остальные точки разрыва называются точками разрыва второго рода [4, 30]. Примерами разрывов второго рода являются бесконечные разрывы (рис. 3.5)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

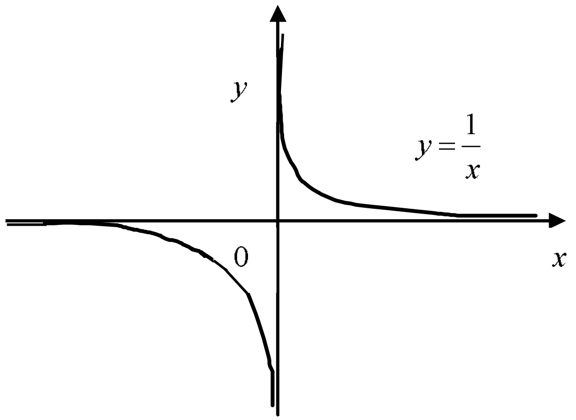


Рис. 3.5

Предположим, что аргумент функции $y=f(x)$ неограниченно возрастает $(x\to\infty)$, т.е. является бесконечно большим аргументом. Может оказаться, что при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b (рис. 3.6).

Функция $y=f(x)$ стремится к пределу b при $x\to\infty$, если для $\forall\varepsilon>0$ можно найти такое $N>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, будет выполняться условие $|f(x)-b|<\varepsilon$ [4, 30, 32].

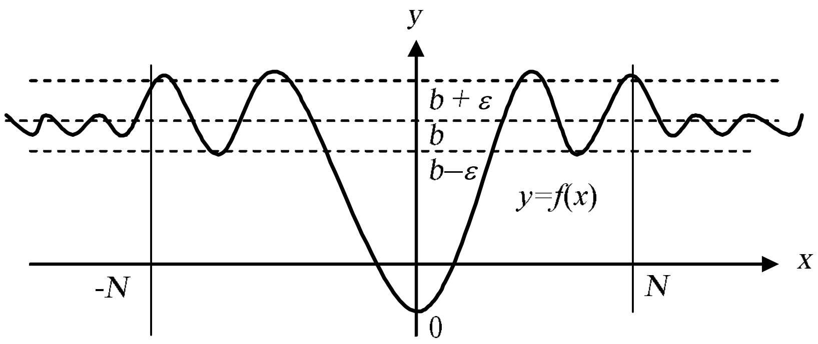


Рис. 3.6

Теперь рассмотрим случай стремления функции $y = f(x)$ к бесконечности при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, если для $\forall M > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$ [4, 30].

Это определение иллюстрируется рис. 3.7.

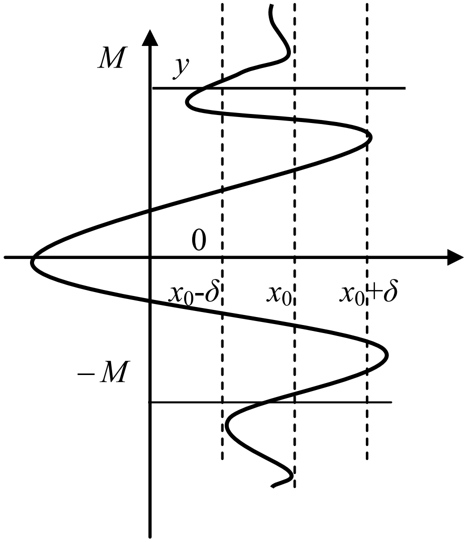


Рис. 3.7

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется ограниченной в данной области изменения аргумента, если существует $N > 0$ такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться неравенство $|f(x)| \le N$. Если такого числа N нет, то $y = f(x)$ является неограниченной в данной области.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на своей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 3.8).

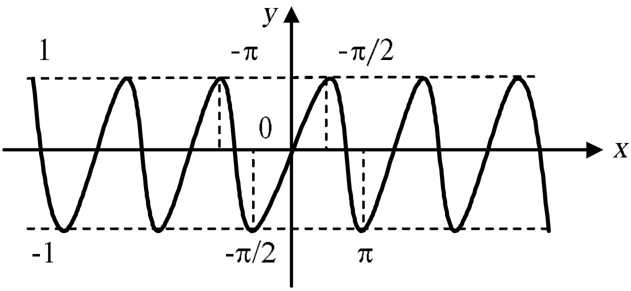


Рис. 3.8

$$|\sin x| \le 1, \text{ т.е. } N = 1.$$

Дадим определение бесконечно малой величины.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Например, функция $y = (x-3)^3$ при $x \to 3$ есть бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{x \to 3} (x-3)^3 = 0$.

Постоянное очень малое число не является бесконечно малой величиной. Единственное число, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, это ноль. Связь бесконечно малых и бесконечно больших величин можно проследить из теоремы 3.1: если $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая величина, и наоборот [4].

Сравнение бесконечно малых

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^5} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где $C \in R$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

Например, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x}{x} = 3$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть эквивалентные бесконечно малые.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1$.

Теперь приведем основные свойства пределов, которые будем использовать при их вычислении [4, 12, 23].

1) Предел алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm \lim_{x\to x_0} f_2(x)\pm\ldots\pm \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

2) Предел постоянной величины равен самой постоянной величине, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} C = C\,,$$

где $C \in R$.

3) Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x)\cdot\ldots\cdot \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x)\,,$$

где $C \in R$.

4) Предел частного двух функций равен частному от их пределов, если предел знаменателя не равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

5) Предел целой положительной степени функции равен той же степени предела этой функции, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n,$$

где $n\in Z^+$.

6) Предел целой положительной n-й степени корня функции равен корню n-й положительной степени предела этой функции, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)},$$

где $n \in Z^+$.

Приведем два замечательных предела, которые можно использовать при решении пределов.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (основание натуральных логарифмов).

Стремление к бесконечности всегда можно заменить стремлением к нулю и наоборот. Заменим во втором замечательном пределе $\dfrac{1}{x} = y$, а $x = \dfrac{1}{y}$. Тогда согласно теореме 3.1. при $x \to \infty$ $y \to 0$ и второй замечательный предел принимает вид $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e$.

Кратко рассмотрим понятие непрерывности функции. Для этого напомним, что приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ [4, 23], где Δx есть приращение аргумента (рис. 3.9).

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в какой-либо окрестности этой точки и если выполняется следующее равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (3.3).

Докажем, например, что функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке x_0 своей области определения.

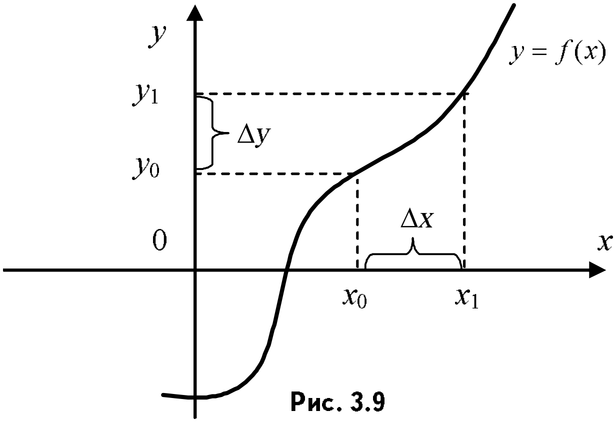


Рис. 3.9

Согласно определению непрерывности функции в точке x_0 получим

$$\Delta y = \cos(x_0+\Delta x) - \cos x_0 = -2\sin\frac{x_0+\Delta x - x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_0+\Delta x + x_0}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0+\Delta x}{2};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x_0+\Delta x}{2} = 0.$$

Пользуясь выражением для приращения функции, формулу (3.3) можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0$$

или $$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)\ .$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$, тогда x будет стремиться к x_0 при $\Delta x \to 0$, и окончательно получим $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, (3.4) т.е.

функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и предел функции при стремлении аргумента к x_0 существует и равен значению функции в этой точке [4].

Заметим, что функция является непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой его точке. А все основные элементарные функции непрерывны на тех интервалах, в которых они определены. Приведем основные свойства непрерывных функций [8].

1) Алгебраическая сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2) Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная в тех точках, в которых делитель не равен нулю.

4) Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также непрерывна.

5) Если функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, то последняя также непрерывна.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то в формуле (3.4) можно поменять местами знаки функции и предела, т.е. [16, 23].

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right). \tag{3.5}$$

Формула (3.5) означает, что если функция непрерывна, то для отыскания предела надо вместо аргумента x подставить предельное значение x_0. Это правило неприменимо в том случае, когда при постановке предельного значения мы получаем неопределенности вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ (0\ \infty);\ (\infty - \infty);\ 1^{\infty};\ 0^{0};\ \infty^{0} \text{ и др.}$$

Теперь приведем конкретные примеры вычисления некоторых пределов [6, 14, 34].

Пример 3.1

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2}{x-3}=\frac{4^2+2}{4-3}=\frac{18}{1}=18.$$

Пример 3.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

Пример 3.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-3x^2+2x-4}{7x^5+6x^4-5x^2+7}=$$

Если подставить предельное значение, то получим неопределенность ($\frac{\infty}{\infty}$). Поэтому для решения подобных примеров используют следующий прием: делят числитель и знаменатель на x в максимальной степени, в данном случае на x^5. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}-\frac{4}{x^5}}{7+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^5}}=\frac{0-0+0-0}{7+0-0-0}=0.$$

Пример 3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}\right)\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 3.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 2x\cdot\frac{3}{x}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

(Предел в квадратных скобках – это второй замечательный предел).

Пример 3.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^{2}}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2}x}{x^{2}(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}(1+\cos x)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]^{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3.7

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log_5(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_5(1+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_5(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_5 e.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то можно воспользоваться формулой (3.5).

Пример 3.8

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}.$$

Данный предел можно свести к первому замечательному пределу путем замены переменной, т.е.

$$8x=y\Rightarrow x=\frac{y}{8},\ \text{при } x\to 0\ y\to 0,$$

тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{y\to 0}8\frac{\sin y}{y}=8\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=8\,.$$

Пример 3.9

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{x}\right)^{x^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0\,.$$

Пример 3.10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+\sin x}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{6+0}{1-0}=6\,.$$

Пример 3.11

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}=\frac{0+1}{0+\dfrac{1}{3}}=3\,.$$

Пример 3.12

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3+x}{3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{3x}}=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}=\ln e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\,.$$

Пример 3.13

$$\lim_{x\to 8}\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}=\lim_{x\to 8}\left[\frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}\cdot\frac{\sqrt{x+8}+4}{\sqrt{x+8}+4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(64-x^2)(\sqrt{x+8}+4)}{x+8-16}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{-(x-8)(x+8)(\sqrt{x+8}+4)}{x-8}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 8}(x+8)(\sqrt{x+8}+4)=-128\,.$$

Пример 3.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\,.$$

Необходимо свести данный предел к первому замечательному пределу. Для этого делаем замену переменной, т.е. $\arcsin x = y$, $x=\sin y$, при $x\to 0$ $y\to 0$.

Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1\,.$$

3.3. Комплексные числа

Комплексным числом t называется выражение следующего вида:

$$t=p+ig,\quad p\in R,\quad g\in R\,,$$

где i – мнимая единица $(i^2=-1)$ [4].

Если $p = 0$, имеем чисто мнимое число $t = ig$.

А если $g = 0$, то $t = p$, т.е. является действительным числом. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел (C), т.е. $R \subset C$.

Величина p есть действительная часть комплексного числа t и обозначается $p = \mathrm{Re}t$, а g – мнимая часть комплексного числа t и обозначается $g = \mathrm{Im}t$ [4].

Комплексные числа $t = p + ig$ и $\bar{t} = p - ig$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными [4, 23].

Пример 3.15

Комплексные числа $t = 5 + 7i$; $\bar{t} = 5 - 7i$ являются комплексно-сопряженными.

Два комплексных числа $t_1 = p_1 + ig_1$ и $t_2 = p_2 + ig_2$ будут равны только в том случае, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $p_1 = p_2$ и $g_1 = g_2$.

Пример 3.16

Найти x и y из равенства $7y + 4xi = 18 - 9i$.

Исходя из условия равенства комплексных чисел, получим

$7y = 18 \to y = 18/7$;

$4x = -9 \to x = -9/4$.

Любое комплексное число $t = p + ig$ можно изобразить точкой A (p, g) на плоскости $0pg$ такой, что $p = \mathrm{Re}t$, $g = \mathrm{Im}t$, и наоборот, каждую точку A (p, g) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа t (рис. 3.10).

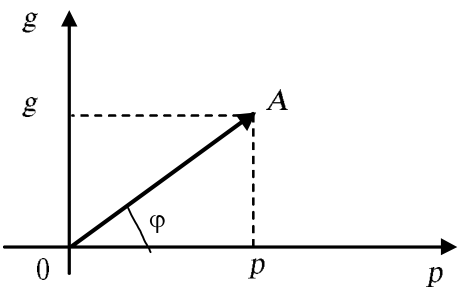


Рис. 3.10

Плоскость $0pg$ называется комплексной плоскостью, ось $0p$ – действительной осью, а $0g$ – мнимой осью.

С каждой точкой A плоскости $0pg$ связан радиус-вектор $\vec{r} = 0\vec{A}$. Угол, образованный этим радиусом-вектором с положительным направлением оси $0p$, называется аргументом $\varphi = \mathrm{Arg}\,t$ комплексного числа.

Наименьшее по модулю значение $\mathrm{Arg}\,t$ называется его главным значением и обозначается $\arg t$. Заметим, что $-\pi < \arg t \le \pi$.

Значение аргумента находят по формулам (рис. 3.10)

$$\cos\varphi = p/|t|; \quad \mathrm{tg}\varphi = g/p\,, \quad \sin\varphi = \frac{g}{|t|}\,.$$

где $|t| = \sqrt{p^2 + g^2}$ – модуль комплексного числа t [4, 23].

Алгебраической формой комплексного числа называется запись вида $t = p + ig$. А модуль $|t|$ и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $0\vec{A}$, изображающего комплексное число t (рис. 3.10).

Тогда получаем $p = |t|\cos\varphi$; $g = |t|\sin\varphi$; и, следовательно, комплексное число $t = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |t|$ можно записать в виде, который называется тригонометрической формулой комплексного числа.

Пример 3.17

Записать в тригонометрической форме комплексное число $t = 1 + i$.

$$|t| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \ \cos\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2; \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Поэтому

$$\arg t = \varphi = \pi/4\,.$$

Следовательно, получим

$$t = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)\,.$$

Из формулы Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = \exp(i\varphi)$ следует показательная форма комплексного числа [16, 23]

$$t = r\exp(i\varphi),$$

где $r = |t|$, а $\varphi = \arg t$.

Пример 3.18

Найдем показательную форму комплексного числа

$$t = 1 + i \quad t = \sqrt{2}\exp(i\pi/4).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

1.1. $y = \sqrt{2x^2 + 7x - 5}$;

1.2. $y = \log_5(6\cos x - 2)$;

1.3. $y = \dfrac{x^4 + 6x^3 - 8x + 2}{x^2 - 5}$;

1.4. $y = 5x^3 - 16x^2 + 2x - 7$.

2. Найти пределы функций:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 6x^3 + x^2 - 9}{7x^5 + 11x^4 + 2x^2 - 6x}$;

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{4x^2 - x + 7x^3 + 18}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 5x}{32x}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - x^2 + 4x}{x^2 + 8x}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\arcsin x}{11x}$;

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x}$;

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^2-7x+18)$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

2.10. $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}(x-\sqrt{x^2-3})$;

2.11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$;

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10\pi x}{\operatorname{tg} 5x}$.

3. Найти значение x и y из равенств:

a) $17x+15i = 2-8iy$;

b) $6x-(5x-3y)i = 7+2i$;

c) $(16-3i)x+(12+6i)y = 10+6i$;

d) $(13i-10)x+(12-13i)y = 12-23i$.

4. Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах.

a) $t = -4+2i\sqrt{3}$;

b) $t = 3+3i\sqrt{3}$;

c) $t = 2-2i$;

d) $t = 6i$.

5. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах.

a) $t = 2\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)$;

b) $t = 4\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$;

c) $t = 1{,}6\exp\left(\frac{10}{\pi}i\right)$;

d) $t = 7{,}6\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right)$.

Вопросы для самопроверки

1) Что называется функцией одной независимой переменной?
2) Перечислить основные элементарные функции.
3) Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
4) Что такое предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$? Дайте определение правого и левого пределов функции $y = f(x)$.
5) Дайте определение предела последовательности.
6) Какая функция называется бесконечно большой величиной при $x \to x_0$ и $x \to +\infty$?
7) Какова связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8) Сформулировать правила предельного перехода в случае арифметических действий.
9) В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции?
10) Какое число называется комплексным?
11) Какие комплексные числа называются чисто мнимыми?
12) Какие комплексные числа называются сопряженными?
13) Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
14) Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
15) Как записывается комплексное число в показательной форме?

4. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление – это раздел математического анализа, связанный в основном с понятиями производной и дифференциала функции.

4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производные высших порядков

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю [4, 30, 32].

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т.е. производная функции

$$f(x) \quad \left(f'(x), y', \frac{dy}{dx} \right)$$

есть некоторая функция, полученная по определенным правилам из заданной функции.

Значение производной функции $y = f(x)$ в какой-то точке x_0 обозначают обычно так:

$$f'(x_0) \text{ или } y'_{x=x_0}.$$

Механический смысл производной – это предел средней скорости за бесконечно малый промежуток времени.

Геометрический смысл производной вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1

Если значение производной от функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно $f'(x_0)$, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.

Геометрический смысл производной иллюстрирует рис. 4.1.

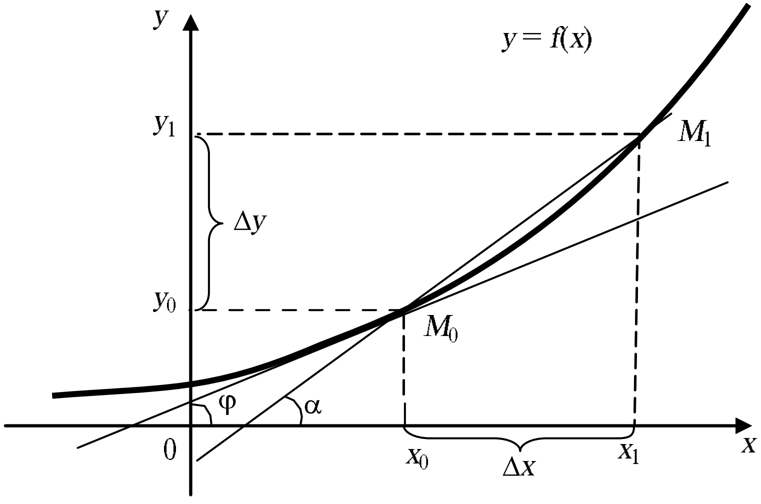


Рис. 4.1

Проведем через точки M_0 и M_1 секущую, угол α между секущей и положительным направлением оси $0x$ равен

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Будем перемещать точку M_1 по кривой в сторону точки M_0, т.е. устремим Δx к нулю. Предельным значением секущей будет касательная, проходящая через точку M_0. Тогда получим [4, 23, 33]:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi.$$

Установим связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Она видна из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она непрерывна. Обратное утверждение неверно.

В качестве примера возьмем функцию $y=|x|$. Ее график показан на рис. 4.2.

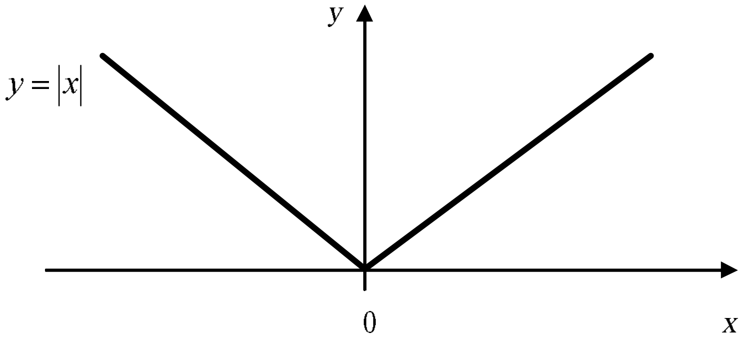


Рис. 4.2

Из графика видно, что в точке $x = 0$ данная функция не имеет определенной касательной, а значит, не имеет в этой точке и производной.

Из определения производной следует способ ее вычисления.

Найдем производную функции $y=x^n$, где $n \in Z$ исходя из определения производной:

$$y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\left(nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}nx^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=nx^{n-1}$$

Итак, $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, например $\left(x^8\right)' = 8x^7$.

Можно доказать, что полученная формула верна для всех $x \in R$ [32].

Из приведенного примера видно, что использовать определение производной для ее вычисления дело достаточно трудоемкое. Поэтому гораздо проще, используя определение производной, вывести производные основных элементарных функций и сформулировать правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения, частного функций, сложной функции, обратной функции. По полученным формулам и правилам можно будет находить производные любых элементарных функций [4].

Производные основных элементарных функций

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a;$$

$$\left(e^x\right)' = e^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

Дополним таблицу производных производными от гиперболических и обратных гиперболических функций, которые не являются основными элементарными функциями, но часто используются в различных приложениях [4, 32].

К гиперболическим функциям относятся гиперболические синус ($\mathrm{sh}x$), косинус ($\mathrm{ch}x$) и тангенс ($\mathrm{th}x$), которые находятся по формулам

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Все эти функции определены на множестве действительных чисел (R) и связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;\ \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x;\ \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x;$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 x};\ \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{th}^2 x}{1-\mathrm{th}^2 x}.$$

Функции, обратные к $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{th}x$ являются обратными гиперболическими функциями и обозначаются Arsh (ареа-синус гиперболический), Arch (ареа-косинус гиперболический), Arth (ареа-тангенс гиперболический):

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right);$$

$$\operatorname{Arch}\ x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{Arth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Производные гиперболических и обратных гиперболических функций находятся по формулам

$$(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x;\ (\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x;\ (\operatorname{th}x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{Arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};\ (\operatorname{Arch}x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\ (\operatorname{Arth}x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Правила дифференцирования

1) Алгебраическая сумма функций

$$[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x)$$

2) Произведение функций

$$[f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$$

Исходя из этого правила для трех функций, получим,

$$[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)]' =$$
$$= [f_1(x) \cdot f_2(x)]' \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) =$$
$$= f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_3(x) +$$
$$+ f_3'(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(x)$$

3) Частное двух функций

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_2'(x) \cdot f_1(x)}{[f_2(x)]^2}; \quad f_2(x) \neq 0$$

4) Производная сложной функции

ТЕОРЕМА 4.3

Сформулируем теорему. Производная сложной функции равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной, т.е. если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$ и $y = f[\varphi(x)]$, то согласно данной теореме

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Аналогично выводится формула при любом числе промежуточных аргументов, т.е. производная сложной функции равна произведению производных от функций ее составляющих.

Например, найдем производную функции

$$y = \cos^2 4x.$$

$$y' = 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = -8\cos 4x \cdot \sin 4x = -4\sin 8x.$$

5) Производная обратной функции находится по формуле

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \text{ или } x'(y) = \frac{1}{y'(x)},$$

т.е. производные от взаимно обратных функций обратны по величине. В качестве примера найдем производную функции

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$x'_y = \cos y \Rightarrow y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Примеры нахождения производных

Пример 4.1. $y = \log_{2x} \sin^2 x = \dfrac{\ln \sin^2 x}{\ln 2x}$

Прежде чем найти производную от заданной функции, перейдем к другому основанию и найдем производную исходной функции по правилу производной частного.

$$y = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x \cdot \ln 2x - \dfrac{1}{2x} \cdot 2\ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2} =$$

$$= \frac{2\mathrm{ctg} x \cdot \ln 2x - x^{-1} \ln \sin^2 x}{(\ln 2x)^2}.$$

Пример 4.2. $y = x^{\sin x}$.

Данная функция называется сложной показательной функцией. Чтобы найти производную от такой функции, прологарифмируем ее левую и правую части, а затем продифференцируем полученные выражения, помня, что y есть функция от x [4].

$$\ln y = \sin x \ln x\ ; \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\ ;$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right); \ y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Дадим понятие о дифференциале функции.

Если задана непрерывная функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Далее получаем

$$\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha(x)\cdot \Delta x .$$

Дифференциалом (от лат. differentia – разность) функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента x, т.е.

$$dy = f'(x)\cdot \Delta x.$$

Геометрический смысл дифференциала понятен из рис. 4.3.

Дифференциал функции геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке $M(x, y)$ при данных значениях x, Δx [23, 32].

Рассмотрим функцию $y = x$.

Для нее получим $dy = \Delta x$, а так как y можно заменить на x по условию, то имеем $dx = \Delta x$.

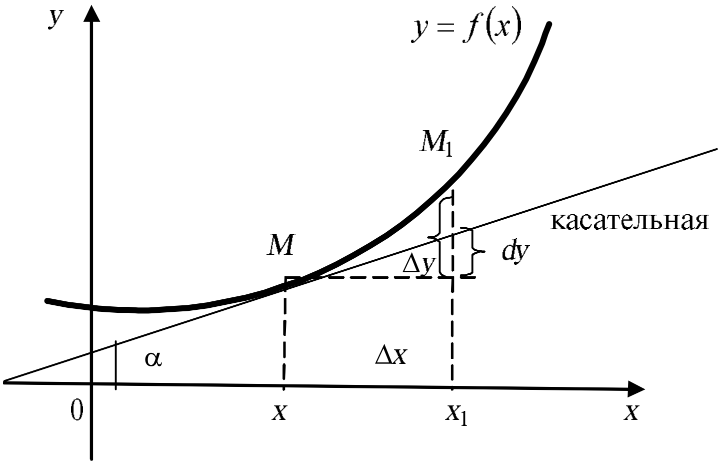


Рис. 4.3

Следовательно, дифференциал функции равен $dy = y'dx$. Отсюда следует формула

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дадим понятие о производной второго порядка. Предположим, что нам задана функция $y = f(x)$, имеющая производную $y' = f'(x)$.

Производная от функции $f'(x)$ также является функцией, и если она дифференцируема, то от нее можно взять производную. Она будет называться производной второго порядка

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Например, найдем вторую производную функции.

Пример 4.3. $y = 3x^2 + \sin^3 x$.

$$y' = 6x + 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

$$y'' = 6 + 3\left(2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x\right).$$

С помощью первой и второй производных можно исследовать функцию на экстремум (max, min), находить точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости функции.

Производная второго порядка $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ также является функцией, и производная от нее будет называться производной третьего порядка от исходной функции и обозначаться следующим образом:

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x}.$$

Производная от производной третьего порядка называется производной четвертого порядка от исходной функции и обозначается так:

$$y^{(4)} = y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'''(x+\Delta x) - f'''(x)}{\Delta x} \text{ и т.д.}$$

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1) порядка, т.е.

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются либо $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., либо $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5}$, ..., либо y^{IV}, y^{V}, ...

Например, найдем производную третьего порядка для функции $y = x^2 \cdot \sin x + \ln^2 x$.

$$y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x + \frac{2\ln x}{x};$$

$$y'' = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x + \frac{\frac{2}{x}x - 2\ln x}{x^2} =$$

$$= 2 \cdot \sin x + 4x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x + \frac{2 - 2\ln x}{x^2};$$

$$y''' = 2 \cdot \cos x + 4\cos x - 4x \cdot \sin x - (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) +$$

$$+ \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (2 - 2\ln x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= 6 \cdot \cos x - 6x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x + \frac{4\ln x - 6}{x^3}.$$

4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной

Производная по направлению. Градиент

Ранее были рассмотрены функции, которые зависели от одного независимого аргумента. Но в действительности чаще приходится иметь дело с функциями, которые зависят от двух, трех и большего числа независимых аргументов.

Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b будет функцией двух независимых аргументов. Функция эта имеет вид $S_{пр} = a \cdot b$, где a и b могут быть любыми действительными положительными числами, так как и стороны прямоугольника, и его площадь не могут быть отрицательными величинами.

Положение какого-либо объекта на поверхности планеты определяется тремя координатами: широтой, долготой и высотой, т.е. является функцией трех независимых аргументов.

Положение космического аппарата (КА), движущегося по невозмущенной эллиптической орбите вокруг Земли, есть функция шести аргументов (трех координат (x, y, z) и трех составляющих скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$). Эта функциональная зависимость имеет следующий вид:

$$F = \varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

В гуманитарных науках, например в юриспруденции и экономике, жестко детерминированные функциональные связи встречаются нечасто. Там используются многофакторные статистические взаимосвязи вида

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta f\,(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \varepsilon\,(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

где $x_1, x_2, \ldots, \cdots x_n$ – учтенные признаки, под влиянием которых меняется функция Z,

$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ – ошибки учтенных признаков,

$y_1, y_2, \cdots, \quad y_m$ – неучтенные признаки, которые могут влиять на функцию Z.

Сначала рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y. Переменная величина Z называется функцией переменных величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины Z [4, 5, 8, 30].

Множество D называется областью определения функции Z. Обычно она представляет собой часть плоскости $x0y$, ограниченной одной или несколькими линиями. Тот факт, что Z есть функция независимых аргументов x и y, записывают так:

$$Z = f(x, y).$$

Функция двух аргументов может задаваться следующими способами:

1) аналитическим, т.е. приводится формула, при помощи которой по заданным значениям аргументов x и y находят значения функции Z. Например,

$$Z = \frac{1}{2}xy;\ Z = \sin^2(x + 2y);\ Z = \sqrt[3]{\sin^3 x - \ln y};\ Z^2 = x^2 + y^2,$$

2) табличным, т.е. для некоторого количества пар аргументов (x, y) приводятся значения функции (Z),

$x \setminus y$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	Z_{11}	Z_{12}	…	Z_{1n}
x_2	Z_{21}	Z_{22}	…	Z_{2n}
…	…	…	…	…
x_n	Z_{n1}	Z_{n2}	…	Z_{nn}

3) графическое задание.

Графиком функции двух независимых аргументов в системе прямоугольных координат называется множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты – соответствующими значениями Z. Графиком функции двух непрерывных аргументов обычно служит поверхность. Например, графиком функции $Z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения (рис. 4.4).

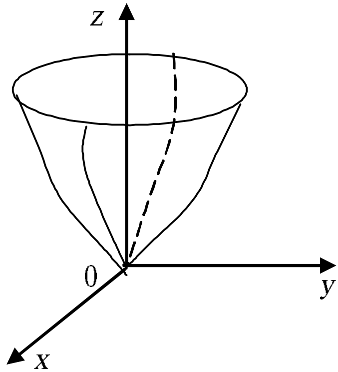


Рис. 4.4

Теперь дадим определение функции n независимых аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Переменная величина W называется функцией переменных величин x_1, $x_2, \ldots$, x_n, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение W.

Тот факт, что W есть функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записывают так:

$$W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Геометрическая иллюстрация функций от n независимых аргументов теряет наглядность при $n > 2$.

При исследовании поверхностей 2-го порядка часто применяют метод сечений, который заключается в том, что определение вида поверхности по ее уравнению производится путем изучения кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Дадим определение предела функции двух независимых аргументов.

Число b называется пределом функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся от x_0 и y_0, соответствующие значения функции $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа b [8, 32].

Тот факт, что b есть предел функции $Z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b.$$

Теперь введем понятия частных производных по независимым аргументам.

Рассмотрим функцию двух независимых аргументов x и y

$$Z = f(x, y).$$

Предположим, что $y = \text{const}$, и рассмотрим $f(x, y)$ как функцию одного независимого аргумента.

Если эта функция дифференцируема, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y).$$

Нижний индекс (x) указывает на то, что производная берется по аргументу x.

Частной производной по x от функции $Z = f(x, y)$ называется функция переменных величин x и y, которая получается при дифференцировании $f(x, y)$ по x в предположении, что $y = \text{const}$.

Она обозначается так:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, Z'_x.$$

Аргумент y считается постоянным только в процессе дифференцирования. После нахождения частной производной функция $\frac{\partial Z}{\partial x}$ будет зависеть от двух аргументов x и y.

Аналогично определим частную производную по y от функции $Z = f(x, y)$ при $x = \text{const}$. Как предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Она обозначается так: $\frac{\partial Z}{\partial y}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, Z'_y$. При нахождении частных производных используются формулы и правила дифференцирования функции одного независимого аргумента. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 4.4

$Z = 5x^3 \cdot \cos y$;

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 15x^2 \cdot \cos y; \ \frac{\partial Z}{\partial y} = -5x^3 \cdot \sin y.$$

Пример 4.5

$Z = 6x^4 \cdot \mathrm{tg} y + 5x \cdot \ln y$,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 24x^3 \cdot \mathrm{tg} y + 5\ln y,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{6x^4}{\cos^2 y} + \frac{5x}{y}.$$

Аналогично можно определить частные производные от любого числа независимых аргументов.

Например, имеем функцию n независимых переменных

$$W = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Определим частную производную по аргументу x_1

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определим частную производную по аргументу x_2

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1,, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_2}$$

и так далее.

Пример 4.6

$W = 2x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3$;

$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2 \cdot \cos x_2 \cdot \ln x_3$; $\frac{\partial W}{\partial x_2} = -2x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ln x_3$;

$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \frac{2x_1 \cdot \cos x_2}{x_3}$.

Дифференцирование сложных функций

Пусть имеем функцию двух независимых аргументов $Z = f(u, v)$, причем аргументы являются функциями независимых переменных x и y, т.е. $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$, следовательно

$$Z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

В этом случае частные производные функции Z по аргументам x и y будут вычисляться по формулам [4, 32].

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Пример 4.7

$Z = e^{3xy} \cdot \sin(5x + y)$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{3xy} \cdot 3y \cdot \sin(5x + y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x + y) \cdot 5 =$$

$$= e^{3xy} \cdot [3y \cdot \sin(5x + y) + 5\cos(5x + y)],$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = e^{3xy} \cdot 3x \cdot \sin(5x + y) + e^{3xy} \cdot \cos(5x + y) =$$

$$= e^{3xy} \cdot [3x \cdot \sin(5x + y) + \cos(5x + y)].$$

Пример 4.8

$$Z = \sin(x^3 y^2) \cdot \ln(3y + x^2).$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \cos(x^3 y^2) \cdot 3x^2 \cdot y^2 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 2x.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \cos(x^3 y^2) \cdot 2yx^3 \cdot \ln(3y + x^2) + \frac{\sin(x^3 y^2)}{(3y + x^2)} \cdot 3.$$

Частные производные высших порядков

Пусть задана функция двух независимых аргументов Z = f(x, y), имеющая частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x$; $\frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y$. Эти производные тоже являются функциями аргументов x и y. Частные производные от этих функций называются частными производными второго порядка от функции Z = f(x, y).

Каждая частная производная первого порядка имеет две частные производные, поэтому мы имеем четыре частные производные второго порядка, обозначаемые следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = Z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = Z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=Z''_{xy}\ .$$

Производные $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ называются смешанными частными производными. Первая из них получается дифференцированием исходной функции сначала по y, а потом по x, а вторая наоборот.

Приведем теорему о вторых смешанных частных производных.

ТЕОРЕМА 4.4. Если вторые смешанные частные производные функции Z = f(x, y) непрерывны, то они равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}\ .$$

Поэтому функция Z = f(x, y) имеет при условии выполнения теоремы 4.4. не четыре, а три частные производные второго порядка.

Пример 4.9. Найти для функции $Z = 5x^4y^3-6x^2y^5$ вторые частные производные.

Сначала находим первые частные производные:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=20x^3y^3-12xy^5\ ;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=15x^4y^2-30x^2y^4\ .$$

Далее находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=60x^2y^3-12y^5\ ;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 30x^4 y - 120x^2 y^3;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 60x^3 y^2 - 60xy^4;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 60x^3 y^2 - 60xy^4.$$

Из данного примера видно, что условия теоремы 4.4 выполняются, поэтому равны вторые смешанные частные производные.

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка и т.д.

Опираясь на теорему 4.4, можно доказать общее положение: результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, при этом рассматриваемые частные производные должны быть непрерывны.

Например, будут равны смешанные частные производные третьего порядка $\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial x}$. Функция Z = f(x, y) имеет (n + 1) частных производных n-го порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial^n Z}{\partial x^n};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1} \partial y};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-2} \partial y^2};\ \ldots;\ \frac{\partial^n Z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}};\ \frac{\partial^n Z}{\partial x \partial y^{n-1}};\ \frac{\partial^n Z}{\partial y^n}.$$

Если задана функция, имеющая n независимых аргументов, то частные производные любого порядка для нее определяются аналогично. В этом случае также имеет место теорема о независимости результата от порядка дифференцирования.

Производная по направлению и градиент

Предположим, что в каждой точке A некоторой области D задано значение скалярной физической величины W (температура, давление, влажность и т.п.). Тогда W называется скалярной функцией точки и записывается как $W = W(A)$. Если в области D задана скалярная функция точки $W(A)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле. Если скалярное поле не зависит от времени, оно называется стационарным. В противном случае поле будет не стационарным, т.е. будет зависеть не только от точки A, но и от времени t.

Производная по направлению

В гиперпространстве, в котором задано поле $W = W(x_1, x_2, ..., x_n)$, возьмем точку $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и найдем скорость изменения функции при движении точки A в направлении некоторого вектора $\vec{\mu}$. Этот вектор начинается в точке A, а косинусы углов между ним и координатными осями $X_1, X_2, ..., X_n$ (направляющие косинусы) равны: $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, ..., \cos\varphi_n$.

Приращение ΔW, получаемое при переходе от точки A в точку A_1 по направлению $\vec{\mu}$ равно

$$\Delta W = W(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - W(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Тогда $\Delta\mu = |AA_1| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2}$.

Производной от функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $\vec{\mu}$ называется предел

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \lim_{\Delta\mu \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta \mu}\right).$$

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [4]), что

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\cdot\cos\varphi_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\cdot\cos\varphi_2 + ... + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)\cdot\cos\varphi_n.$$

То есть производная характеризует скорость изменения функции по данному направлению.

Пример 4.10. Найти производную функции

$$W = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 - 4x_1x_4^2$$

в точке A (0, 1, 2, 1) в направлении к точке A_1 (2, 0, 1, 3).

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AA_1} = (2, -1, -1, 2)$:
$\cos\varphi_1 = 0{,}632$; $\cos\varphi_2 = -0{,}316$; $\cos\varphi_3 = -0{,}316$; $\cos\varphi_4 = 0{,}632$.

Далее определяем частные производные исходной функции W и их значения в точке A, т.е.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_1 - 4x_4^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = 4x_2;\ \frac{\partial W}{\partial x_3} = 9x_3^2;\ \frac{\partial W}{\partial x_1} = -8x_1 x_4.$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_A = -4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_A = 4;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)_A = 36;\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)_A = 0.$$

Затем вычисляем искомую производную по направлению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)_A = -15{,}179.$$

Знак минус говорит о том, что функция в заданном направлении убывает.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называют градиентом функции и обозначают $\operatorname{grad} W$, т.е.

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) \text{ или}$$

$$\operatorname{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\vec{e}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)\vec{e}_n.$$

Теперь формулу для производной по направлению можно переписать в виде скалярного произведения $\operatorname{grad} W$ на единичный вектор $\vec{e}_\mu = (\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \ldots, \cos\varphi_n)$, т.е.

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = (\operatorname{grad} W, \vec{e}_\mu) \text{ или } \frac{\partial W}{\partial \mu} = |\operatorname{grad} W| \cos\alpha,$$

где α – угол между вектором $\operatorname{grad} W$ и направлением $\vec{\mu}$.

Из последней формулы видно, что $\partial W / \partial \mu$ достигает своего максимального значения в том случае, когда $\alpha = 0$. Поэтому направление градиента совпадает с направлением $\vec{\mu}$, вдоль которого функция меняется быстрее всего, т.е. $\mathrm{grad}\, W$ показывает направление скорейшего возрастания функции. А наибольшая скорость изменения функции W в точке A равна

$$\left|\mathrm{grad} W\right| = \sqrt{(\partial W / \partial x_1)^2 + (\partial W / \partial x_2)^2 + \ldots + (\partial W / \partial x_n)^2}.$$

Пример 4.11. Найти наибольшую скорость возрастания функции $W = 2x_1 x_2 + 3x_2^2 x_3 - 4x_4^3$ в точке $A(1, 2, -1, 3)$.

Вначале находим частные производные

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_2; \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 2x_1 + 6x_2 x_3; \quad \frac{\partial W}{\partial x_3} = 3x_2^2; \quad \frac{\partial W}{\partial x_1} = -12x_4^2.$$

Затем получаем

$$\mathrm{grad} W = 2x_2 \vec{e}_1 + (2x_1 + 6x_2 x_3)\vec{e}_2 + 3x_2^2 \vec{e}_3 - 12x_4^2 \vec{e}_4$$

и вычисляем $\mathrm{grad} W(1,2,-1,3) = 4\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 - 108\vec{e}_4$ и, наконец, находим наибольшую скорость возрастания функции $\left|\mathrm{grad} W\right| = 109{,}2$.

4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления

4.3.1 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n + 1)$-го порядка включительно на некотором интервале, включающем точку x_0. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению функции $y = f(x)$ в этой точке, а значение его производных до n-го порядка в точке $x = x_0$ равны значениям соответствующих производных от функции $y = f(x)$ в этой точке, т.е.

$$P_n(x_0)=f(x_0);\ \ P'_n(x_0)=f'(x_0);\ P''_n(x_0)=f''(x_0);$$

$$P_n'''(x_0)=f'''(x_0),\ldots,P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_o). \tag{4.1}$$

Искомый многочлен (более подробно см., например, [30, 32]) будет иметь вид

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}f''(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(x_0). \tag{4.2}$$

Через $R_n(x)$ обозначим разность значений данной функции $y=f(x)$ и многочлена, находимого по формуле (4.2), т.е. $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

Отсюда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ или

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_o)+R_n(x), \tag{4.3}$$

где $R_n(x)$ – это остаточный член, который может быть записан в разных формах. Мы приведем так называемую форму Лагранжа, которая имеет вид

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta). \tag{4.4}$$

Здесь $\eta\in[x,x_0]$ и ее можно представить в виде $\eta=x_0+\lambda(x-x_0)$, где $0<\lambda<1$. Тогда формула для остаточного члена примет вид

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\lambda(x-x_0)].$$

А формула

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}[x_0+\lambda(x-x_0)] \qquad (4.5)$$

называется формулой Тейлора для функции $y=f(x)$.

Если в формуле (4.5) принять $x_0=0$, то она примет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\lambda x). \qquad (4.6)$$

Здесь $0<\lambda<1$, а формулу (4.6) часто называют формулой Маклорена. Теперь найдем разложение функции $y=e^x$ по формуле (4.6).

$$f(x)=e^x;\ f(0)=1;\ f'(x)=e^x;\ f'(0)=1;\ f''(x)=e^x;$$
$$f''(0)=1,\ \ldots,\quad f^{(n)}(x)=e^x;\quad f^{(n)}(0)=1.$$

Эти данные подставляем в формулу (4.6) и получаем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda x}$$, где $0<\lambda<1$.

Если $|x| \leq 1$, то, взяв $n = 8$, найдем оценку остаточного члена $R_n < \frac{1}{9!}3$. А если x = 1, то получим формулу для приближенного вычисления числа e [32], т.е.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71827.$$

Здесь верны первые четыре знака после запятой, так как ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или 10^{-5}. Заметим, что какое бы ни было *x*, остаточный член $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda x} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. Поэтому при $\forall x$, взяв достаточное число членов разложения, по формуле (4.6) получим e^x с любой необходимой степенью точности.

4.3.2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Данное правило помогает раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, его суть выражается теоремой [4, 30, 32].

ТЕОРЕМА Лопиталя 4.5. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение производных этих функций имеет предел, то отношение самих функций тоже имеет предел, который равен пределу отношения производных, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{4.8}$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры применения этого правила.

Пример 4.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1\cdot$$

Ранее сводили этот предел ко второму замечательному пределу и пользовались тем, что является непрерывной функцией. Заметим, что простота взятия данного предела кажущаяся, так как дифференцирование функций само опирается на знание пределов [4].

Пример 4.13

$$lim_{x\to 0}\frac{sin\ 7x}{2\,sin\ 3x}=lim_{x\to 0}\frac{7\cdot cos\ 7x}{6\,cos\ 3x}=\frac{7}{6}.$$

Пример 4.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3}=\frac{1}{3}\cdot$$

Пример 4.15

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3}=-1.$$

Заметим, что если производные числителя и знаменателя одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, можно применять правило Лопиталя еще раз, а в случае необходимости и далее.

Пример 4.16

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+2x-6}{7x^4+20x^2-7x+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3-9x^2+2}{28x^3+40x-7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{60x^2-18x}{84x^2+40}=\lim_{x\to\infty}\frac{120x-18}{168x}=\lim_{x\to\infty}\frac{120}{168}=\frac{5}{7}.$$

Пример 4.17

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{6}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{6}{x}\right)\left(-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}6\cos\frac{6}{x}=6.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{7}=\infty.$$

Формулы (4.7) и (4.8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение их производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 4.18

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Предел производных равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

При этот предел колеблется между 0 и 2 и поэтому не имеет предела. То есть к данному примеру правило Лопиталя применить нельзя, оно не является универсальным.

При помощи правила Лопиталя можно раскрывать другие неопределенности, например

$$0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^{0};\quad 0^{0}.$$

Эти случаи сводятся к рассмотренным нами неопределенностям $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 4.19

$\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln 5x$.

Это случай $0 \cdot \infty$.

Преобразуем данный предел к виду $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}}$,

т.е. привели исходный предел к случаю $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теперь можно применить правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln 5x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5x}\cdot 5}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = 0 .$$

Пример 4.20

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{\ln x}\right),$$

т.е., имеем случай $\infty - \infty$. Исходный предел преобразуем к виду

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x\ln x - 2x + 2}{(x-1)\ln x},$$

видно, что мы пришли к случаю $\dfrac{0}{0}$, поэтому применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x\ln x - 2x + 2}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{3\ln x + \frac{3x}{x} - 2}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{3\ln x + 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty .$$

Пример 4.21

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$, т.е., имеем случай 1^{∞}.

Рассмотрим предел

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x}$, а это случай $\frac{0}{0}$, потому к последнему пределу применимо правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{1} = \lim_{x\to 0}(-2tg\,2x) = 0 \cdot$$

Поэтому исходный предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$$

Пример 4.22

Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{7x}$, т.е. имеем случай 0^{0}.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^{7x} = \lim\limits_{x\to 0}7x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{7x}}$,

т.е. пришли к случаю $\frac{\infty}{\infty}$. Теперь к последнему примеру применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{7x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{7x^{2}}} = \lim_{x\to 0}(-7x) = 0.$$

Поэтому исходный предел равен

$$\lim_{x\to 0}x^{7x} = e^{0} = 1.$$

4.3.3. АСИМПТОТЫ

Прямая L называется асимптотой функции $y = f(x)$, если расстояние δ от переменной точки A функции до этой прямой при удалении точки А в бесконечность стремится к нулю (рис. 4.5) [4, 8, 32].

Различают вертикальные асимптоты (параллельные оси 0у) и наклонные.

Сначала рассмотрим вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \text{, или } \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty \text{, или } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ является асимптотой функции $y = f(x)$, и наоборот, если прямая $x = x_0$ есть асимптота кривой $y = f(x)$, то существуют указанные выше пределы.

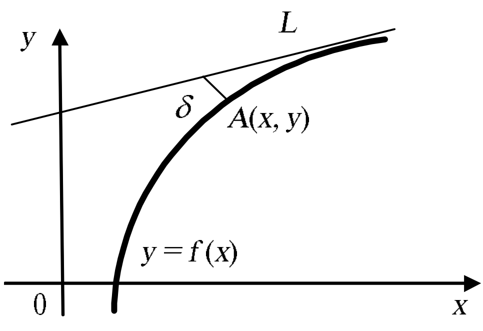


Рис. 4.5

То есть для нахождения вертикальных асимптот надо найти такие значения $x = x_0$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное число вертикальных асимптот (рис. 4.6)

$$x = \pm\frac{\pi}{2}; \quad x = \pm\frac{3\pi}{2}; \quad x = \pm\frac{5\pi}{2}; \ldots$$

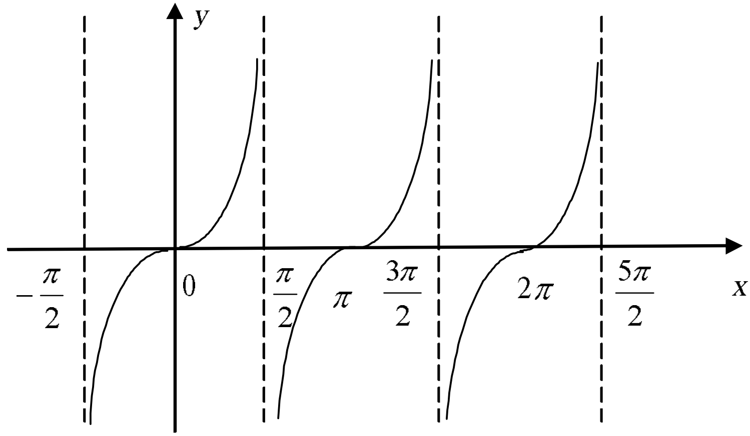


Рис. 4.6

Теперь рассмотрим наклонные асимптоты. Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$ (рис. 4.7).

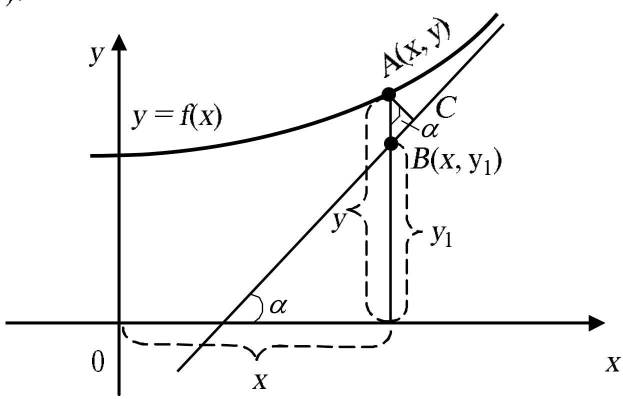


Рис. 4.7

Нам нужно найти коэффициенты *a* и *b*. Точка *A*(*x*, *y*) принадлежит функции $y = f(x)$, а точка *B*(*x*, y_1) – асимптоте. Длина отрезка *AC* – это расстояние от точки *A* до асимптоты и по условию

$$\lim_{x\to+\infty}(AC)=0. \qquad (4.9)$$

Обозначим через α угол наклона асимптоты к положительному направлению оси $0x$ и из ΔABC найдем

$$(AC)=(AB)\cos\alpha \Rightarrow (AB)=\frac{(AC)}{\cos\alpha},$$

так как $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ и $\alpha=\mathrm{const}$, то в силу (4.9) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(AB)=0, \qquad (4.10)$$

так как $(AB)=|y-y_1|=|f(x)-ax-b|$, то (4.10) принимает следующий вид:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0. \qquad (4.11)$$

Следовательно, если $y=ax+b$ есть асимптота, то выполняется (4.11), и наоборот, если при коэффициентах a и b выполняется (4.11), то прямая $y=ax+b$ является асимптотой. Теперь найдем коэффициенты a и b. Из (4.11) получаем

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Так как $x\to+\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0,$$

а так как b есть число, то $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$, поэтому получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$$

или

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (4.12)$$

Получив a из (4.11), находим b по формуле

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax). \tag{4.13}$$

Следовательно, если $y = ax + b$ является асимптотой, то a и b находятся по формулам (4.12) и (4.13). Если хотя бы один из пределов (4.12) или (4.13) не существует, то функция $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет [32].

Все приведенные рассуждения справедливы и при $x \to -\infty$. Так как асимптотическое изменение функции может быть различным при стремлении x к положительной и отрицательной бесконечности, то надо раздельно рассматривать случаи $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Если существует асимптота в первом случае, то ее называют левосторонней, а во втором случае – правосторонней.

Если при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ пределы (4.12) и (4.13) совпадают, то левосторонняя и правосторонняя асимптоты являются частями одной и той же прямой.

Заметим, что если функция дробно-рациональная, то при нахождении a и b сразу можно рассматривать произвольное стремление к бесконечности.

Рассмотрим примеры нахождения наклонных асимптот.

Пример 4.23

$$y = \frac{x^3}{2x^2-1}.$$

Так как данная функция дробно-рациональная, то сразу рассматриваем произвольное стремление x к ∞:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(2x^2-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - x(2x^2-1)}{2(2x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3+x}{4x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x^2}} = 0.$$

Поэтому получаем $y = \frac{1}{2}x$.

Пример 4.24

$$y = 2x + \ln x.$$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 2$$

(по правилу Лопиталя).

$$b = \lim_{x\to+\infty} (2x + \ln x - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty .$$

Из последнего равенства следует, что исходная функция наклонной асимптоты не имеет.

4.3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Приведем ряд теорем, позволяющих находить: участки монотонности (возрастания, убывания) функции, экстремумы функции, участки выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.

Вначале сформулируем достаточный признак монотонности [4, 23]:

1) если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале возрастает;

2) если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале убывает;

3) если $f'(x) = 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ на этом интервале постоянна.

Геометрическая интерпретация этого признака показана на рис. 4.8.

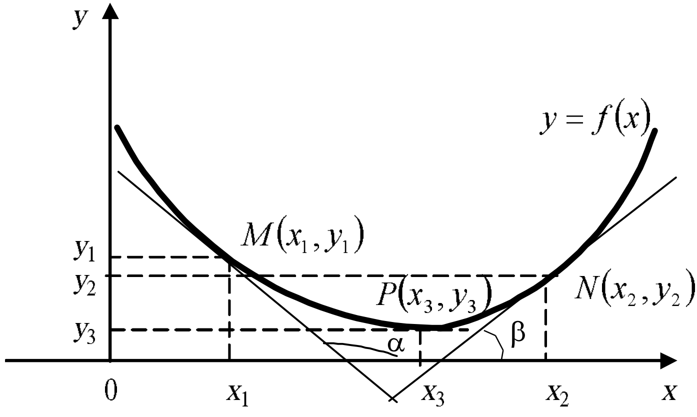


Рис. 4.8

Из рис. 4.8. видно, что $\mathrm{tg}\alpha = y'(x = x_1) < 0$;

$\mathrm{tg}\beta = y'(x = x_2) > 0$; $y'(x = x_3) = 0$.

Важную роль в исследовании функций играют точки, отделяющие интервалы ее возрастания от интервалов ее убывания. Эти точки носят название экстремумов функции или ее локальных максимумов и минимумов. Слово «локальный» означает, что точка будет максимальной (минимальной) лишь на каком-то интервале.

Теперь приведем определение:

1) точка $M(x_1, y_1)$ есть точка локального максимума функции $y = f(x)$, если $f(x_1)$ – наибольшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $M(x_1, y_1)$;

2) точка $N(x_2, y_2)$ есть точка локального минимума функции $y = f(x)$, если $f(x_2)$ – наименьшее значение функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $N(x_2, y_2)$.

Функция на своей области определения может иметь несколько экстремумов. Наибольшее и наименьшее значения функции ее области определения обычно называют абсолютным максимумом и абсолютным минимумом.

Понятие экстремума функции иллюстрируется рис. 4.9.

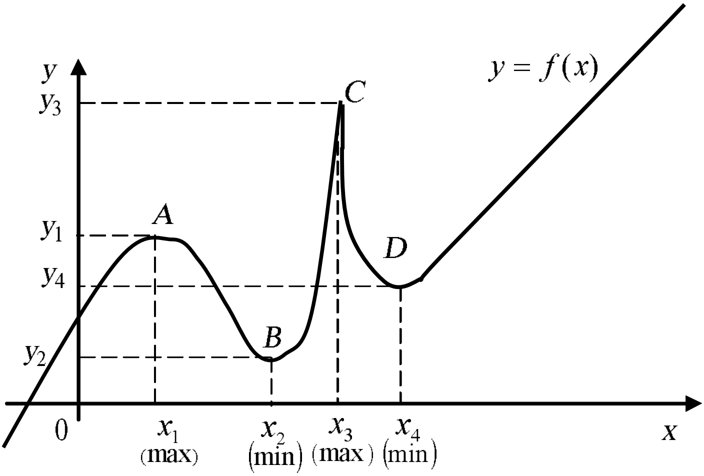


Рис. 4.9

Теперь сформулируем необходимый признак экстремума [4, 23]: если в точке (т. A, т. B, т. C, т. D на рис. 4.9) функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю (т. A, т. B, т. D на рис. 4.9), либо не существует (т. C на рис. 4.9).

Приведенный признак не является достаточным, т.е. из того факта, что производная в данной точке равна нулю или не существует, еще не следует, что эта точка есть экстремум функции.

Недостаточность данного признака проиллюстрируем **примером 4.25**: рассмотрим функцию $y = x^3$ и найдем ее экстремум, используя приведенный признак (найдем производную данной функции, приравняем ее к нулю и найдем координаты экстремума, если он существует).

$$y' = 3x^2\,;\ 3x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$ – экстремум данной функции в соответствии с необходимым признаком.

Но из графика функции $y = x^3$ (рис. 4.10) следует, что экстремума в точке с координатами x = 0, y = 0 у данной функции нет.

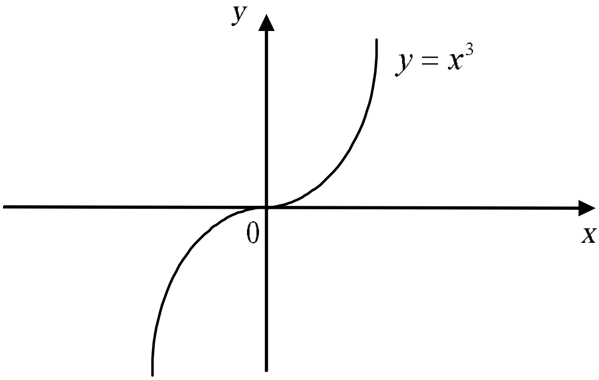


Рис. 4.10

Сформулируем теперь *достаточный признак экстремума*: точка (т. *A*, т. *B*, т. *C*, т. *D* на рис. 4.9) есть точка экстремума функции $y = f(x)$, если производная этой функции $y' = f'(x)$ при переходе *x* через критическую точку (точку, где производная равна нулю или не существует) меняет знак. Если знак меняется с плюса на минус (т. *A*, т. *C* на рис. 4.9), то имеем локальный максимум, а если знак меняется с минуса на плюс (т. *B*, т. *D* на рис. 4.9), то имеем локальный минимум.

Заметим, что функция $y = f(x)$ должна быть непрерывна на интервале, содержащем критическую точку. Например, производная функции

$$y = \frac{2}{x^2}\,;\ y' = \frac{-4}{x^3}$$

меняет знак при переходе через точку x = 0, но экстремума в ней не имеет, так как в этой точке она разрывна [4].

Вернемся к примеру 4.25 и проверим, удовлетворяется ли там достаточный признак экстремума.

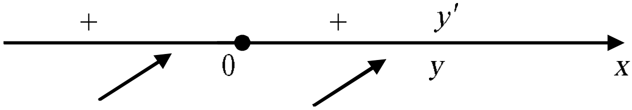


Рис. 4.11

Видно (рис. 4.11), что производная функции не меняет знака при переходе x через точку $x = 0$, поэтому данная функция не имеет экстремума в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$.

В качестве еще одного примера (**пример 4.26**) рассмотрим функцию

$$y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2.$$

$$y' = 9x^2 + 12x - 1$$

$$9x^2 + 12x - 1 = 0$$

$$x_1 \approx 0{,}06; \quad x_2 \approx -1{,}4.$$

$$y' = 9(x - 0{,}06)(x + 1{,}4).$$

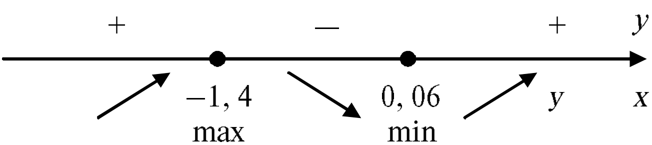


Рис. 4.12

Применяя достаточный признак экстремума, находим, что в точке $x = -1{,}4$ – максимум, а в точке $x = 0{,}06$ – минимум (рис. 4.12).

Точки экстремума можно находить и с помощью второй производной. Для этого сформулируем *второй достаточный признак* *экстремума*: некоторая точка с координатами x_0, y_0 будет точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, при этом, если $f''(x_0) > 0$, то данная точка будет точкой минимума функции $y = f(x)$, а если $f''(x_0) < 0$ – точкой максимума; если $f''(x_0) = 0$ – данный признак неприменим [4, 23].

Используя приведенный признак, найдем экстремумы функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$ из примера 4.26.

$$y'' = 18x + 12.$$

$$y''(x = 0{,}06) = 18 \cdot 0{,}06 + 12 \approx 13{,}1.$$

$$y''(x = -1{,}4) = 18 \cdot (-1{,}4) + 12 \approx -13{,}2.$$

Следовательно, в точке $x = 0,\ 06$ исходная функция будет иметь минимум, а в точке $x = -1,\ 4$ – максимум.

Теперь покажем, как применять вторую производную для нахождения участков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

Сначала приведем соответствующие определения.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен выше касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.13).

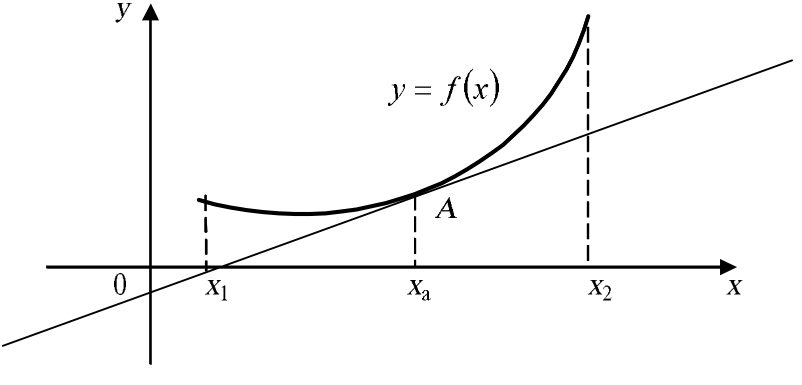


Рис. 4.13

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (в положительном направлении оси ординат) на некотором интервале, если на этом интервале он расположен ниже касательной, проведенной к любой точке графика в этом интервале (рис. 4.14).

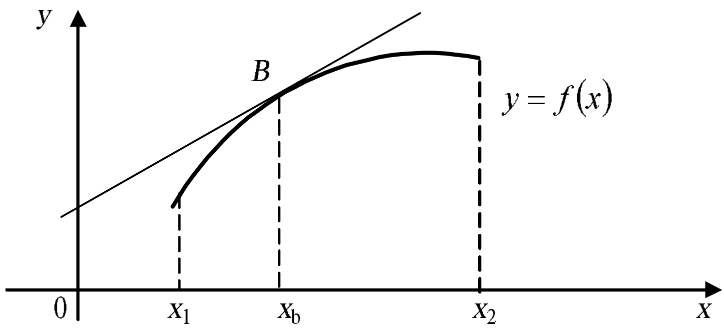


Рис. 4.14

Точки, отделяющие участки выпуклости функции от участков ее вогнутости (и наоборот), называются точками перегиба.

Теперь сформулируем теорему.

ТЕОРЕМА 4.6. Если вторая производная функции $y = f(x)$ всюду на некотором интервале меньше нуля, то функция $y = f(x)$ на этом интервале – выпуклая; если вторая производная функции $y = f(x)$ всюду на некотором интервале больше нуля, то функция $y = f(x)$ на этом интервале – вогнутая [4, 23, 30].

Приведем также необходимый признак существования точки перегиба: если точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная данной функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует [4, 23].

Недостаточность данного признака мы проиллюстрируем примером (**пример 4.27**).

Рассмотрим функцию $y = x^4$. Воспользовавшись приведенным выше признаком, проверим, есть ли у этой функции точки перегиба.

$y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$.

$12x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ должна быть точкой перегиба по необходимому признаку, но если взглянуть на график этой функции (рис. 4.15), видно, что в данной точке перегиба нет.

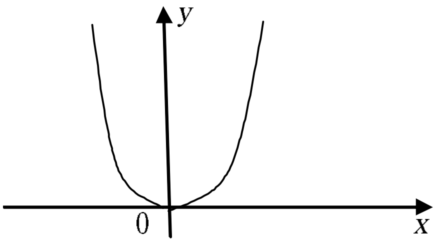


Рис. 4.15

Поэтому сформулируем достаточный признак существования точки перегиба: точка с координатами x_0, y_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, если $f''(x)$, меняет знак при переходе *x* через x_0 ; если знак меняется с минуса на плюс, то слева от данной точки лежит участок выпуклости, а справа – участок вогнутости, а если знак меняется с плюса на минус, то наоборот [4, 23].

Применим данный признак к функции из примера 4.27.

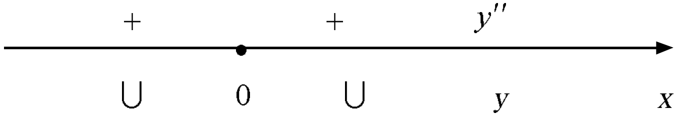


Рис. 4.16

По рис. 4.16 видно, что достаточный признак не выполняется, поэтому в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ перегиба нет.

Теперь применим достаточный признак существования точки перегиба к функции из примера 4.26.

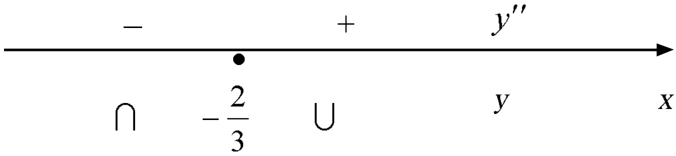


Рис. 4.17

$$y'' = 18x + 12\,;\; 18x + 12 = 0\,;\; x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}\,.$$

В данном случае достаточный признак свидетельствует о том, что точка с абсциссой $\left(-\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба функции $y = 3x^3 + 6x^2 - x + 2$ (рис. 4.17).

Теперь приведем схему, по которой удобно проводить исследование функций [4]:

1) Нахождение области определения функции, точек ее разрыва, интервалов ее непрерывности и вертикальных асимптот.

2) Проверка функции на четность, нечетность, периодичность.

3) Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат (если это не требует больших вычислительных затрат).

4) Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

5) Нахождение участков выпуклости, вогнутости функции и точек ее перегиба.

6) Нахождение наклонных асимптот.

7) Построение графика функции по результатам проведенного исследования.

Пример 4.28

Теперь в соответствии с приведенной схемой исследуем функцию $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Данная функция определена на всей оси 0х за исключением точки $x = 2$, т.е. $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой данной функции, так как

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty; \ \lim_{x\to 2-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty.$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической, так как $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x+T) \neq f(x)$, где T – период, а график данной функции проходит через начало координат.

Теперь найдем первую производную исходной функции и найдем участки монотонности и экстремумы.

$$y' = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2};$$

$$x^2 - 4x = 0; \ x(x-4) = 0; \ x = 0; \quad x = 4.$$

Точку $x = 2$, где не существует первая производная исходной функции, на экстремум можно не проверять, так как в этой точке сама функция имеет бесконечный разрыв.

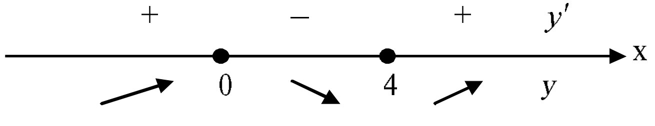


Рис. 4.18

Следовательно (рис. 4.18), в соответствии с достаточным признаком экстремума данная функция имеет максимум в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ и минимум в точке с координатами $x = 4$, $y = 8$.

Теперь найдем вторую производную и определим участки вогнутости, выпуклости и точки перегиба, используя теорему 4.6 и достаточный признак существования точки перегиба:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} =$$
$$= \frac{(x-2)\left[(2x-4)(x-2) - 2x^2 + 8x\right]}{(x-2)^4} =$$
$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Видно, что вторая производная нигде не обращается в ноль, следовательно, данная функция не имеет точек перегиба. Надо только проверить, меняет ли вторая производная исходной функции знак при переходе x через точку бесконечного разрыва $x = 2$ (вторая производная заданной функции также не существует в точке $x = + 2$).

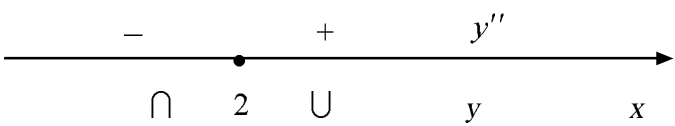


Рис. 4.19

Поэтому (рис. 4.19) слева от точки $x = 2$ исходная функция будет выпуклой, а справа от точки $x = 2$ – вогнутой.

Теперь проверим, имеет ли исходная функция наклонные асимптоты, для этого воспользуемся формулами (4.12) и (4.13) (так как заданная функция является дробно-рациональной, можно рассматривать произвольное стремление x к бесконечности).

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

Поэтому прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой исходной функции.

Теперь по результатам проведенного исследования построим график заданной функции (рис. 4.20).

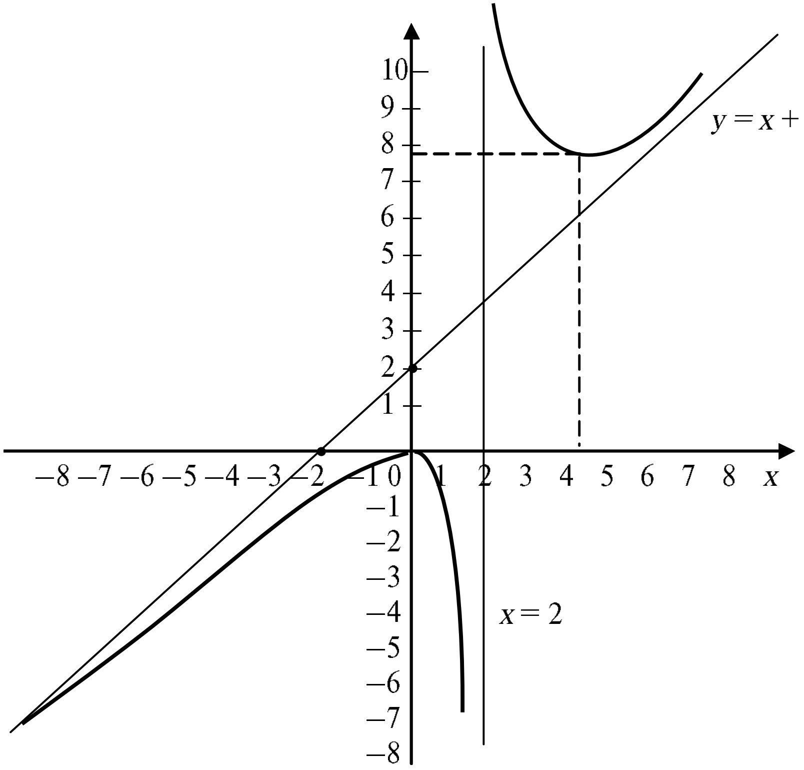


Рис. 4.20

4.3.5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Понятие экстремума функции двух аргументов аналогично соответствующему понятию функции одного аргумента.

Пусть функция $Z = f(x, y)$ определена в некоторой области Д плоскости XOY, а точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ принадлежат Д.

Определения. Точка $A(x_1, y_1)$ есть точка максимума функции $Z = f(x, y)$, если $f(x_1, y_1)$ является наибольшим значением функции $Z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $A(x_1, y_1)$. Аналогично, точка $B(x_2, y_2)$ есть точка минимума функции $Z = f(x, y)$, если $f(x_2, y_2)$ является наименьшим значением функции $Z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $B(x_2, y_2)$ [4, 25].

Часто говорят, что функция $Z = f(x, y)$ достигает в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ экстремума.

Заметим, что экстремум функции двух аргументов всегда лежит внутри области определения функции (это следует из определния).

Точки максимума и минимума функции двух аргументов показаны на рис. 4.21.

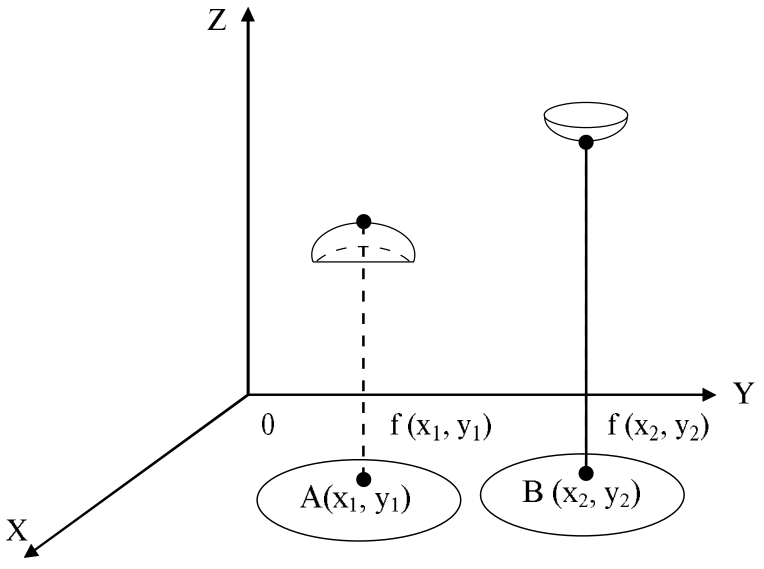


Рис. 4.21

Приведем необходимое условие экстремума функции двух независимых аргументов.

ТЕОРЕМА 4.7. Если в точке С (x_0, y_0) дифференцируемая функция Z = f (x, y) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = 0; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = 0. \qquad [4]$$

Точка С (x_0, y_0) в которой частные производные функции Z = f (x, y) обращаются в ноль, называется стационарной точкой функции Z = f (x, y).

Геометрически необходимый признак означает, что в экстремальной точке касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости Х∅У.

Точками экстремума непрерывной функции двух аргументов могут быть точки, в которых функция недифференцируема. Этим точкам соответствуют острия поверхности графика функции Z = f (x, y) (рис. 4.22).

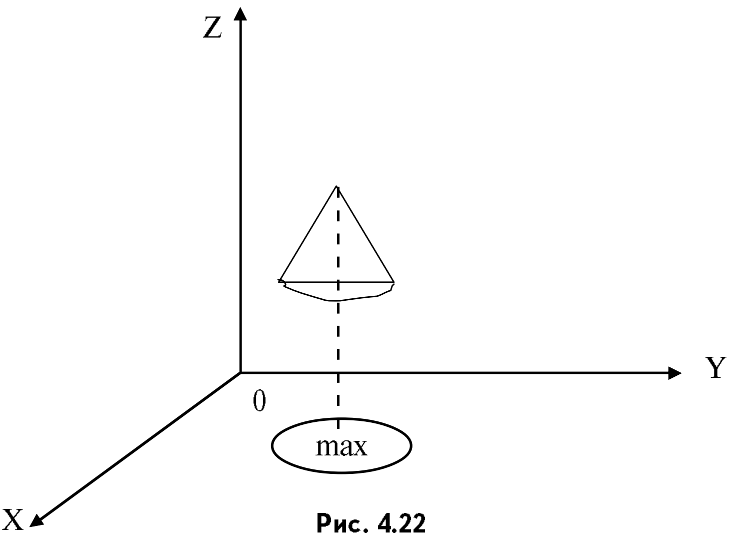


Рис. 4.22

Например, [4] функция $Z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ имеет минимум в начале координат, но в этой точке функция недифференцируема. Данная функция представляет собой круглый конус с вершиной в начале координат.

Следовательно, точками экстремума функции двух аргументов могут быть точки, где либо одновременно $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, либо хотя бы одна из этих частных производных не существует. Точки этих двух типов называют критическими.

Аналогично определяется экстремум функции любого числа независимых аргументов $W = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ и вводятся необходимые условия экстремума.

ТЕОРЕМА 4.8. Дифференцируемая функция $W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет экстремумы только при тех значениях $x_1, x_2 \ldots x_n$, при которых равны нулю все ее n частных производных первого порядка [4], т.е.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \text{— — — — — — — — — — —} \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Поэтому для нахождения экстремумов мы имеем систему n уравнений с n неизвестными.

Однако не любая критическая точка является точкой экстремума.

Пример 4.29 [25].

Для функции $Z = x \cdot y$ точка A (0, 0) будет критической, так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$,

и по необходимому признаку экстремума $x = 0$, $y = 0$. Но экстремума в этой точке нет.

Действительно, $Z(0, 0) = 0$ а в любой окрестности точки A (0, 0) можно найти и положительные и отрицательные значения функции. Данная функция $Z = xy$ называется гиперболическим параболоидом и имеет вид седла.

Приведем достаточный признак экстремума для функции двух аргументов. Он имеет гораздо более сложный вид, чем для функции одного аргумента.

ТЕОРЕМА 4.9

Пусть в стационарной точке K (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности функция $Z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Найдем в точке K (x_0, y_0) значения:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_K;$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_K;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_K.$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} B & A \\ C & B \end{vmatrix} = B^2 - AC$.

Тогда:

а) если $\Delta < 0$, то функция $Z = f(x, y)$ имеет в точке $K(x_0, y_0)$ экстремум: максимум при $A < 0$, $C < 0$ и минимум при $A > 0$, $C > 0$ (из условия $\Delta < 0$ следует, что A и C всегда имеют одинаковые знаки);

б) если $\Delta > 0$, то точка $K(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума функции $Z = f(x, y)$;

в) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке $K(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть, и для определения его нужны дополнительные исследования [4].

Пример 4.30. Найти экстремумы функции $Z = 7x^3 - y^3 + 3xy - 5$. Используем необходимый признак экстремума и получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3x;$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ -y^2 + x = 0 \end{cases}$$

Далее находим $x = y^2$, поэтому $y^4 + y = 0$ или $y\,(y^3 + 1) = 0$ из последнего выражения находим $y = 0$ или $y = -1$ (комплексные корни не учитываем).

Поэтому получаем две стационарные точки: N (0, 0) и K (1, –1).

Для того чтобы определить, будут ли найденные точки экстремумами исходной функции, применим достаточный признак экстремума. Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y;$$

Рассмотрим точку N (0, 0).

Найдем:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_N = 0;$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_N = 3;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_N = 0;$$

Тогда $\Delta = B^2 - AC = 9 > 0$, т.е. точка N(0, 0) не является точкой экстремума исходной функции.

Рассмотрим точку K (1, –1).

Найдем:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_K = 6;$$

$$\underset{K}{B} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 3;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_K = 6;$$

тогда $\Delta = B^2 - AC = -27 < 0$, т.е. точка K (–1, 1) будет точкой экстремума исходной функции, а так как $A > 0$ и $C > 0$, то это точка минимума, и значение функции в этой точке равно –6 ($Z_{min} = -6$).

4.3.6. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

При обработке результатов наблюдений в естественных, технических и гуманитарных науках часто приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основании наблюдений. Один из способов получения таких формул – это МНК [20]. В 1806 году французский математик Лежандр предложил способ решения неопределенных СЛАУ, неизвестными в которых являются поправки в результаты наблюдений. Этот способ получил название МНК.

В данном способе уравнения подчиняются дополнительному условию – сумма квадратов поправок (V), вводимых в равноточные наблюдения, должна быть минимальной, т.е. меньше суммы квадратов любой другой системы поправок, удовлетворяющей исходным уравнениям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} V^2_i = \min. \tag{4.14}$$

Условие (4.14) – это математическое выражение принципа МНК [39].

Например, мы хотим установить зависимость между двумя величинами *x* и *y*, где *x* – это административные правонарушения, а *y* – преступления. Данные, собранные юридической статистикой, свидетельствуют о наличии неполной прямой линейной зависимости между административными правонарушениями и преступлениями [24]. То есть в этом случае естественно считать, что *y* – это линейная функция от *x*, записываемая следующим образом: $\bar{y} = ax + b$ (4.15), где *a* и *b* – неизвестные коэффициенты, x – измерения, а $\bar{y}$ – теоретические значения показателя, лежащие точно на прямой линии.

Исходные данные наблюдений удобно представить в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

X	x_1	x_2	....	x_n
У	y_1	y_2	....	y_n

Причем значения y_i, где $i = \overline{1, n}$ необязательно точно лежат на прямой линии.

Неизвестные коэффициенты *a* и *b* в уравнении (4.15) можно найти, используя МНК. В данном случае условие МНК (4.14) будет иметь вид

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 = \min.$$

Подставляем в него вместо $\bar{y}_i$ его значение из (4.15) и получим

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \min.$$

Данную функцию можно рассматривать как функцию двух аргументов *a* и *b*. Необходимыми условиями минимума этой функции будут равенства

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 0$$ (более подробно смотри экстремум функции двух аргументов)

Далее имеем:

$$2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-x) = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

и после преобразований получаем так называемую систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i . \end{cases}$$

Решая данную систему, находим искомые коэффициенты:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (4.16)$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i \times x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}. \qquad (4.17)$$

Рассмотрим конкретный **пример 4.31** [24].

Пусть нам заданы два ряда наблюдений, характеризующих за шесть лет количество хищений оружия (*x*) и вооруженные преступления (*y*). Эти деяния связаны между собой потому, что у них почти одни и те же причины.

Исходные данные поместим в табл. 4.2, причем заполнять ее будем по возрастанию ряда *x*.

Таблица 4.2

Хищение оружия (x)	773	1130	1138	1336	1352	1396
Вооруженные преступления (y)	4481	9549	8873	12 160	18 059	19 154
Выравненные значения $\bar{y}$	3010	10 864	11 040	15 396	15 748	16 716
Поправки $V = y - \bar{y}$	1471	–1315	–2167	–3236	2311	2438

В данном случае связь между *y* и *x* будем искать в виде $\tilde{y} = ax + b$.

По формулам (4.16) и (4.17) находим искомые коэффициенты $b = -13\,996$; $a = 22$.

И тогда получим $\bar{y} = 22x - 13\,996.$ (14.18)

Используя формулу (14.18), найдем выравненные значения ряда *y*. Они приведены в третьей графе табл. 4.2, в четвертой графе показаны поправки.

Используя МНК, можно находить коэффициенты и для случая любой нелинейной зависимости двух величин, а также для случая многофакторной зависимости, т.е. исходная функция будет зависеть от нескольких аргументов, причем она может быть и линейной, и криволинейной. Например, если связь между x_1, x_2 и y ищется в виде

$\bar{y} = a_1 x^2 + a_2 x + b$, то коэффициенты a_1, a_2, b находятся в результате решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 = a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i = a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные следующих функций:

1.1. $y = \log_{\cos 2x}\left(5\sin^2 8x - e^{4x^3}\right);$

1.2. $y = (tg\,5x)^{\cos^3 x};$

1.3. $y = e^{\mathrm{tg}^3 x} \cdot \ln^6\left(2x^4 + 7x\right);$

1.4. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\cos^2 5x - x^6}}{16\mathrm{tg}^3 7x};$

1.5. $y = 6^{\mathrm{ctg}^2 x} \cdot x^8 + \ln^2 4x;$

1.6. $y = e^{\operatorname{tg}^3 x} \cdot 7^{\cos^2 2x}$.

2. Найти вторые производные следующих функций:

2.1. $y = 6x^4 + 4\sin 3x$;

2.2. $y = e^{7x} \cdot \operatorname{tg}5x$;

2.3. $y = \dfrac{\ln 6x}{4x^2}$;

2.4 $y = 5x^8 - 16x^5 + \sin 2x$.

3. Исследовать функции и построить их графики.

3.1. $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$;

3.2. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$;

3.3. $y = 2x^2 - 10$;

3.4. $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$;

3.5. $y = 3x - x^3$;

3.6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 16}$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если функция Z имеет вид:

4.1. $Z = x^3 \cdot \sin^2 y$;

4.2. $Z = x^y$;

4.3. $Z = \sqrt{2x^2 + y^2}$;

4.4. $Z = \operatorname{tg}^2\left(x^3 y\right) \cdot 2^{2x+3}$

4.5. $Z = \operatorname{arctg}\left(x^4 + 5y^6\right)$;

4.6. $Z = \sqrt{\operatorname{tg}^5 x^3 - \ln^2 y^6}$.

5. Используя правило Лопиталя, найти пределы функций:

5.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1-2x}+1}{\sqrt{2-x}-1}$;

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-6x}{8x^4-15x^2-10}$;

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$;

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}8x}{\mathrm{tg}12x}$;

5.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x}{1-x^3}$;

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

6. Найти производную функции

$W=2x_1^3x_3^2-3x_2^2+3x_3x_4x_5^3$ в точке A (0, –1, 2, 4, –3) по направлению к точке B (0, 0, 3, 1, 6).

7. Найти наибольшую скорость возрастания функции

$W=5x_1x_3^2-4x_1^2x_2^3+2x_3x_4x_5^2$ в точке A (–2, –1, 3, 0, 4).

8. Найти вторые частные производные функций:

а) $Z = 5x^3y^8-7\ln^2 y\cdot\sin x$

б) $Z = 16\,\mathrm{tg}\,y\cdot x^5+2x^7y^6$.

9. Найти производные третьего порядка для функций:

а) $y=x^3\cdot\cos x-\dfrac{2x}{2^x}$; б) $y=\ln^3 x-x^2\cdot\sin x$

10. Результаты измерения величин x и y заданы в таблице

X	12	22	32	42	52	62
У	149	98	38	–0, 1	–59	–99

Полагая, что между x и y существует линейная зависимость вида $y = ax + b$, с помощью МНК найти коэффициенты a и b.

11. Найти экстремумы функции двух аргументов:

11.1. $Z = 6 - x^2 - (y^2 - 5)^2$

11.2. $Z = 7(x - y) - 2x^2 - 3y^2$

11.3. $Z = y''x - x^2 + 2y + 7x + 8$

Вопросы для самопроверки

1) Дать определение производной функции.
2) Каковы геометрический и механический смыслы производной?
3) Как найти производную сложной функции?
4) Дать определение дифференциала функции.
5) Какой геометрический смысл имеет дифференциал?
6) Что называется производной второго порядка от функции?
7) В чем состоит достаточный признак экстремума?
8) Какие точки называются точками перегиба функции?
9) Что называется асимптотой функции?
10) Сформулировать правило Лопиталя и привести примеры его применения.
11) Что называется функцией двух независимых переменных?
12) Что называется графиком функции двух независимых переменных?
13) Что называется пределом функции f(x) при $x \to x_o$?
14) Дать определение частных производных функции двух независимых аргументов.
15) Дать определение градиента.
16) Как можно выразить производную по направлению через градиент?
17) Что называется частной производной второго порядка от функции двух независимых аргументов?
18) Дать формулировку теоремы о равенстве вторых смешанных частных производных.
19) Что называется производной n-го порядка от заданной функции?
20) В чем состоит суть МНК?
21) Как с помощью МНК находить коэффициенты эмпирических формул?
22) Дать определение точки экстремума функции двух аргументов.
23) В чем состоит необходимый признак экстремума функции двух аргументов?
24) В чем состоят достаточные условия экстремума функции двух аргументов?

5. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Интегральное исчисление – это раздел математического анализа, в котором изучаются свойства и способы вычисления интегралов и их применение.

Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию, например, с его помощью находится скорость тела по заданному ускорению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразной от функции $y = f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, производная которой равна исходной функции, т.е. $F'(x) = f(x)$. Из этого определения следует, что любая функция по отношению к своей производной является первообразной [4, 23].

Рассмотрим пример $y = x^5$. Данная функция служит производной для функции $y = \frac{x^6}{6}$, так как $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$ и $\left(\frac{x^6}{6} - 1000\right)' = x^5$, или в общем виде $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = x^5$, где $C = \text{const}$.

Из данного примера видно, что любая функция $\left(\frac{x^6}{6} + C\right)$ будет первообразной для функции $y = x^5$.

Теперь приведем формулировку основной теоремы о первообразных.

ТЕОРЕМА 5.1. Любая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных, причем любые две из них друг от друга отличаются постоянным слагаемым [4, 32].

Формула $F(x) + C$ исчерпывает множество всех первообразных исходной функции. Геометрически выражение $F(x) + C$ есть семейство кривых (рис. 5.1), каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых вдоль оси $0y$.

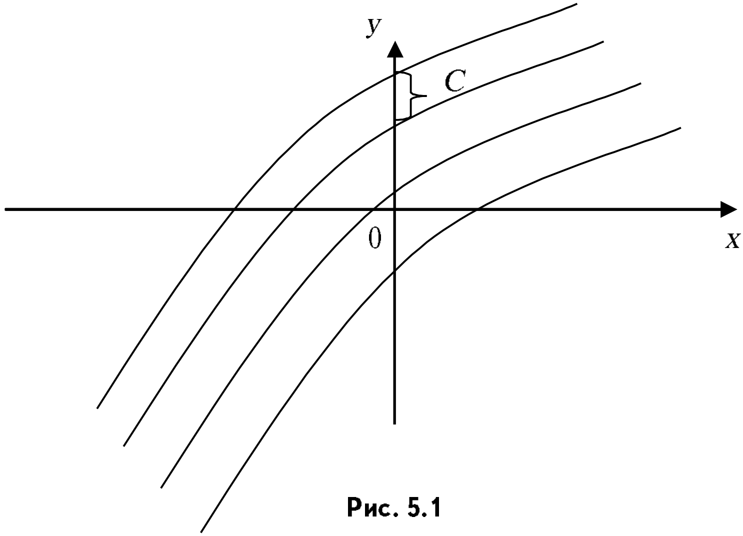


Рис. 5.1

Заметим, что первообразную можно находить не только по производной, но и по дифференциалу.

Теперь дадим определение неопределенного интеграла.

Отыскание первообразных называется неопределенным интегрированием, а выражение, охватывающее совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$, называется неопределенным интегралом и обозначается так:

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

$\int$ – знак интеграла.

Заметим, что $f(x)$ на участке интегрирования должна быть непрерывна.

Таким образом, неопределенный интеграл есть семейство функций $F(x) + C$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ [4, 8].}$$

Нахождение всех первообразных для данной функции $f(x)$ и называется неопределенным интегрированием. Термин «неопределенное интегрирование» появился потому, что не указывается, какая первообразная имеется в виду.

Сразу скажем, что интегрирование значительно сложнее дифференцирования. Дифференцирование любых элементарных функций производится по определенным правилам, а интегрирование требует в каждом конкретном случае индивидуального подхода. Разумеется, есть общие методы интегрирования, некоторые мы рассмотрим далее. Заметим, что производная от любой элементарной функции есть функция элементарная, а про неопределенный интеграл от элементарной функции этого сказать нельзя. То есть первообразная от элементарной функции может оказаться и не представимой с помощью конечного числа элементарных функций. Про такие функции говорят, что они не интегрируемы в элементарных функциях. Примерами «неберущихся интегралов» являются:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};\ \int \frac{dx}{\ln x};\ \int \frac{\sin x dx}{x};$$

$$\int \frac{\cos x dx}{x};\ \int \frac{e^x dx}{x};\ \int e^{-x^2} dx \text{ и др.}$$

Из определения неопределенного интеграла следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \\ &\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C. \end{aligned}\right\} \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (5.1)$$

Найдем неопределенные интегралы от основных элементарных функций, используя для этого таблицу производных от основных элементарных функций (см. главу «Основы дифференциального исчисления»).

Например, $(\sin x)' = \cos x$. Перепишем это равенство в виде $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x \Rightarrow d\sin x = \cos x dx$. Проинтегрируем обе части последнего равенства и с учетом третьей формулы (5.1) получим

$$\int d\sin x = \int \cos x dx \Rightarrow \sin x + C = \int \cos x dx.$$

Это и есть табличный интеграл.

Точно так же получают и другие табличные интегралы от основных элементарных функций.

Приведем таблицу интегралов от основных элементарных функций. Справедливость приведенных формул легко проверить дифференцированием.

Таблица интегралов

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$;

9) $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg}x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$.

Добавим формулы интегрирования гиперболических и обратных гиперболических функций:

12) $\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$;

13) $\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$;

15) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$; где $\mathrm{cth}x = \frac{1}{\mathrm{th}x}$

16) $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \mathrm{Arth}x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$;

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \mathrm{Arsh}x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| + C$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$

Объединение формул 17 и 18 и дает формулу 11. Заметим, что существуют таблицы интегралов от элементарных и специальных функций, например [*Брычков Ю.А.*, *Маричев О.И.*, *Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986; Интегралы и ряды: В 3 т. М.: Наука, 1986].

Задача «взятия» неопределенного интеграла и состоит в том, чтобы преобразовать его к табличному.

Приведем **свойства неопределенного интеграла**.

1) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\, dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\,dx.$$

2) Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k \in R$.

3) Любая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ,$$

то и $\int f(u)du = F(u) + C$,

где $u = u(x)$ – любая дифференцируемая функция от *x*.

В силу правила 3) таблица интегралов будет справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функции от нее, т.е. таблица, таким образом, сразу значительно расширяется [4, 32].

Методы интегрирования

1) Непосредственное интегрирование. Используются таблица интегралов, свойства неопределенных интегралов и различные преобразования подынтегрального выражения.

Пример 5.1

$$\int\left(2\sin x+3x^3-\frac{5}{\cos^2 x}\right)dx=2\int\sin x dx+3\int x^3 dx-5\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=-2\cos x+\frac{3}{4}x^4-5\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 5.2

$$\int\frac{3x^3+4x^2+7x}{2x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int x^2dx+2\int xdx+\frac{7}{2}\int dx=\frac{1}{2}x^3+x^2+\frac{7}{2}x+C.$$

Пример 5.3

$$\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=2\int\sin xdx=-2\cos x+C\ .$$

Пример 5.4

$$\int\sin^2 xdx=$$

[Воспользуемся формулами $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Последнее выражение подставляем вместо подынтегральной функции

$$\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d2x$$

[Заметим, что $d2x = \underline{2dx}$, заменяем $2x$ на y, т.е. $2x = y$, тогда получим] $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos y dy = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin y + C$ = [Возвращаемся к прежнему аргументу]

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

Таким образом, в примере 5.4. использовали еще один метод интегрирования (замена переменной), который более подробно рассмотрим ниже.

2) Интегрирование по частям. Этот метод следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента x, тогда имеем

$$(uv)' = u'v + v'u \text{ или}$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu .$$

Интегрируем обе части последнего равенства и получим

$$\int udv = uv - \int vdu . \qquad (5.2)$$

Это и есть формула интегрирования по частям.

Этот способ состоит в том, что подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух множителей u и dv и заменяется двумя интегрированиями:

1) отыскание v из выражения для dv;

2) отыскание интеграла от vdu.

Смысл способа состоит в том, что эти два интегрирования выполнить легче, чем «взять» исходный интеграл [4, 8, 32].

Рассмотрим конкретные примеры и применения данного метода.

Пример 5.5

$$\int \ln x dx = \left[u = \ln x, dv = dx \Rightarrow v = x, du = \frac{dx}{x} \right] = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

В данном примере выбор u и dv производится однозначно, но так бывает не всегда.

Пример 5.6

$$\int xe^x dx = \left[u = x; du = dx; dv = e^x dx; v = \int e^x dx = e^x \right] =$$
$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C,$$

но если принять

$$[u = e^x; du = e^x dx; dv = xdx; v = \frac{x^2}{2}],$$

то $$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx ,$$

т.е. получим более сложный интеграл, чем исходный.

Бывает случаи, когда формулу (5.2) надо применять несколько раз.

Пример 5.7

$$\int e^x \sin x dx = \left| u = \sin x; \ du = \cos x dx; \ dv = e^x dx; \ v = \int e^x dx = e^x \right| =$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

[К интегралу $\int e^x \cos x dx$ опять применим формулу (5.2), получим

$$u = \cos x; du = -\sin x dx; dv = e^x dx; v = e^x\,] =$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right) =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Переносим $\int e^x \sin x dx$ в левую часть равенства и получим:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + 2C,$$

(постоянная может быть любой, возьмем ее равной $2C$),

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 5.8

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left[u = \sqrt{1-x^2}; dv = dx \Rightarrow v = x; du = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \arcsin x.$$

Переносим $\int \sqrt{1-x^2}dx$ в левую часть и получаем

$$2\int\sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2C,$$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

3) Метод замены переменной. Его применяют в том случае, если исходный интеграл сложно или невозможно с помощью алгебраических и иных преобразований свести к одному или нескольким табличным интегралам [4, 23].

Способ заключается в следующем: заменяется новой переменной такая часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить или разделить подынтегральное выражение).

Метод замены переменной основан на следующей теореме: пусть некоторая функция $\varphi(t) = x$ определена и дифференцируема на некотором промежутке $[a, b]$, пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на отрезке $[a, b]$ справедлива формула

$$\int f(x)dx \;\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (5.3)$$

В некоторых случаях лучше использовать замену переменной не в виде $x = \varphi(t)$, а

$$t = \psi(x) \text{ [4, 23, 32].}$$

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.9

Найти $\int(5x-6)^{90}dx$.

$\int(5x-6)^{90}dx$ = [Можно разложить подынтегральную функцию, используя бином Ньютона, но это будет слишком длинно, поэтому делаем замену переменной:

$t = 5x - 6 \Rightarrow x = \dfrac{t+6}{5}; dx = \dfrac{dt}{5}$, поэтому получим] =

$$\int (5x-6)^{90} dx = \frac{1}{5}\int t^{90} dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{91}}{91} + C =$$

= [Или, возвращаясь к первоначальной переменной x, имеем] = $\displaystyle\int (5x-6)^{90} dx = \frac{(5x-6)^{91}}{455} + C$.

Пример 5.10

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{dx}{\dfrac{16(x^2+16)}{16}} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{(\dfrac{x}{4})^2 + 1} =$$

[Теперь делаем замену переменной

$y = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x = 4y \Rightarrow dx = 4dy$] =

$$\frac{1}{16}\cdot 4\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{4} arctgy + C =$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$= \frac{1}{4} arctg\left(\frac{x}{4}\right) + C .$$

Пример 5.11

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\dfrac{(x+1)^2+4}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 1}$$

$= $ [Теперь делаем замену переменной

$$t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 2t - 1 = x \Rightarrow dx = 2dt\ ] = \frac{1}{4}\int \frac{2\,dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} arctgt + C =$$

[Возвращаем переменную x и получаем]

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\,.$$

Пример 5.12

$$\int \frac{2x^2 dx}{x^3 + 7} = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 7} =$$

[Заметим, что

$$d(x^3 + 7) = 3x^2 dx\ ] = \frac{2}{3}\int \frac{d(x^3 + 7)}{x^3 + 7} =$$

$=$ [Делаем замену переменной $y = x^3 + 7$]

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{2}{3}\ln|y| + C =$$

$=$ [Возвращаем переменную x и получаем]

$$= \frac{2}{3}\ln\left|x^3 + 7\right| + C\,.$$

Пример 5.13

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} =$$

[Заметим, что $d\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$] =

$$= 2\int 2^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} =$$

[Теперь делаем замену переменной $\sqrt{x} = y$]

$$= 2\int 2^{y}\, dy = 2 \cdot \frac{2^{y}}{\ln 2} + C =$$

[Возвращаем переменную x]

$$= \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C.$$

Пример 5.14

$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = 2\int e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx =$

[Заметим, что $d\sin^2 x = 2\sin x \cos x$]

$$= \int e^{\sin^2 x} d\sin^2 x =$$

[Теперь делаем замену переменной $t = \sin^2 x$]

$= \int e^{t} dt =$

$= e^{t} + C =$

[Возвращаем переменную x] =

$$= e^{\sin^2 x} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Любая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде дроби, т.е. $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Если степень числителя (m) больше или равна степени знаменателя (n), то, разделив $P(x)$ на $Q(x)$, получим многочлен $P_1(x)$ и в остатке многочлен $P_2(x)$ не выше (n–1) степени, т.е. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=P_1(x)+\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$. Интегрирование $P_1(x)$ проходит без проблем.

Надо проинтегрировать правильную рациональную дробь, степень числителя которой меньше степени знаменателя $\left(\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}\right)$.

$\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей двух видов $\dfrac{A_i}{(x-a)^i}$; $\dfrac{B_i x+C_i}{(x^2+px+q)^i}$,

где A_i, B_i, C_i – постоянные [4, 30, 32].

Каждому множителю $(x-a)^k$ в представлении знаменателя $Q(x)$ соответствует в разложении дроби $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые, сумма k простейших дробей вида

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}.$$

Каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^t$ соответствует сумма t простейших дробей вида

$$\frac{B_t x+C_t}{\left(x^2+px+q\right)^t}+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)}.$$

Имеет место следующее разложение дроби $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ на слагаемые [4, 32]:

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}+\ldots+$$

$$+\frac{B_t x+C_t}{\left(x^2+px+q\right)^t}+\frac{B_{t-1}x+C_{t-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{t-1}}+\ldots+\frac{B_1 x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)}. \quad (5.4)$$

Пример 5.15

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=$$

[Делаем замену переменной, обозначив $\sqrt{e^x+1}=y$, тогда получим

$$e^x+1=y^2\Rightarrow e^x=y^2-1\Rightarrow \ln e^x=$$

$$=\ln(y^2-1), x=\ln(y^2-1), dx=\frac{2ydy}{y^2-1}]=$$

$$=\int\frac{2ydy}{y(y^2-1)}=2\int\frac{dy}{y^2-1}=2\int\frac{dy}{(y-1)(y+1)}.$$

Дробь $\dfrac{1}{(y-1)(y+1)}$ – правильная рациональная дробь; разложим ее на простейшие дроби (см. 5.4)

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1},$$

где A и B неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти.

Освобождаясь от знаменателя, имеем:

$1 = A(y+1) + B(y-1)$

$1 = Ay + A + By - B.$

Приравнивая коэффициенты при y и y^0, получим систему уравнений для определения A и B.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A - B \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow A = -B. \\ &1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \text{ и } A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{0{,}5}{y-1} - \frac{0{,}5}{y+1},$$

и искомый интеграл примет вид:

$$2\int\frac{dy}{(y-1)(y+1)} = 2\left(\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y+1}\right) = \int\frac{d(y-1)}{y-1} - \int\frac{d(y+1)}{y+1} =$$

= [Заметим, что $d(y+1) = dy$ и $d(y-1) = dy$]

$$= \ln|y-1| - \ln|y+1| + C = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C =$$

[Возвратим переменную e^x]

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int f(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $u = tg\frac{x}{2}$ можно преобразовать в интеграл от рациональной функции [4, 32].

Используются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Из равенства $x = 2\operatorname{arctg} u$ имеем $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. В результате указанной подстановки исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2},$$

т.е. подынтегральная функция рациональна относительно u.

Пример 5.16

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

Применим подстановку $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и получаем

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2du}{\left(1+u^2\right)\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)}} = 2\int \frac{du}{1-u^2} =$$

[Воспользуемся формулой 16) из таблицы интегралов.]

$$= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

С помощью указанной подстановки хорошо берутся интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}$.

Интегрирование функций $\int f(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $u = tg\,\frac{x}{2}$ всегда приводит к успеху, но в силу своей общности она не всегда является оптимальной.

Интегралы вида $\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$ находятся следующим образом [4, 12; 32]:

а) если m – целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\cos x = U$.

Пример 5.17

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x\, dx =$$
$$= -\int \cos^2 x\,(1 - \cos^2 x)\, d\cos x =$$

[делаем подстановку $\cos x = U$] $= -\int U^2 (1 - U^2)\, dU =$
$$= -\int U^2\, dU + \int U^4\, dU =$$
$$= \frac{U^3}{3} + \frac{U^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$$

b) если n – целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\sin x = U$.

Пример 5.18

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x\, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin^2 x \; d \sin x =$$

$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cdot \sin^2 x \; d \sin x =$ [делаем замену переменной $\sin x = U$] =

$$\int (1 - 2U^2 + U^4)\, U^2\, dU = \int (U^2 - 2U^4 + U^6)\, dU =$$
$$= \int U^2\, dU - 2\int U^4\, dU + \int U^6\, dU =$$

$$= \frac{U^3}{3} - 2\frac{U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C;$$

c) если $(n + m)$ – четное отрицательное число, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = U$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + U^2}\,;\ \sin^2 x = \frac{U^2}{1 + U^2}\,;\ dx = \frac{dU}{1 + U^2}\,.$$

Пример 5.19

$\int \dfrac{dx}{4 - \sin^2 x} =$ [делаем замену $\operatorname{tg} x = U$] $= \int \dfrac{dU}{(1 + U^2)(4 - U^2/1 + U^2)} =$

$$= \int \frac{dU}{4(1 + U^2) - U^2} = \int \frac{dU}{4 + 3U^2} = \int \frac{dU}{\frac{3(3U^2 + 4)}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dU}{U^2 + 4/3} =$$

$= \dfrac{1}{3}\int \dfrac{dU}{\dfrac{\frac{4}{3}(U^2 + \frac{4}{3})}{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\int \dfrac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2}U)^2 + 1} =$ [делаем замену $\dfrac{\sqrt{3}\,U}{2} = t;$

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}}t;\quad dU = \frac{2}{\sqrt{3}}dt\ ] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{arctg } t + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{arctg } \left(\frac{\sqrt{3}\,U}{2}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{arctg } \left(\frac{\sqrt{3}\ \text{tg } x}{2}\right) + C;$$

d) если m и n – целые неотрицательные четные числа, то используются формулы

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}\ ;\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Пример 5.20

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int dx + 2 \int \cos 2x\, dx + \int \cos^2 2x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx =\right.$$

$$= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Интегралы от иррациональных функций

а) Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \ldots.\ x^{k/t})\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, т.е. над величинами x, $x^{m/n}, \ldots x^{k/t}$ проводятся только рациональные операции [32].

Пусть *p* – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots\ldots \frac{k}{t}$.

Теперь делаем подстановку $x = y^p$; $dx = py^{p-1}dy$, тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень, т.е. подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от y.

Пример 5.21

$$\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[4]{x} - 6}$$

Так как общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ — это 4, то поэтому делаем замену

$x = y^4$, $dx = 4y^3\,dy$, $\sqrt{x} = y^2$; $\sqrt[4]{x} = y$.

В результате получаем

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x} - 6} = \int \frac{y^2 \cdot 4y^3\,dy}{y - 6} = 4\int \frac{y^5\,dy}{y - 6},$$

делим числитель на знаменатель и получаем

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} y^5 \\ y^5-6y^4 \end{array} & \begin{array}{l} y-6 \\ \hline y^4+6y^3+36y^2+216y+1296 \end{array} \\
\hline
\quad -\begin{array}{l} 6y^4 \\ 6y^4-36y^3 \end{array} & \\
\hline
\qquad -\begin{array}{l} 36y^3 \\ 36y^3-216y^2 \end{array} & \\
\hline
\qquad\quad -\begin{array}{l} 216y^2 \\ 216y^2-1296y \end{array} & \\
\hline
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 1296y \\ 1296y-7776 \end{array} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 7776 &
\end{array}
$$

$$4\int\frac{y^5\,dy}{y-6} = 4\left(\int y^4+6y^3+36y^2+216y+1296+\frac{7776}{y-6}\right)dy =$$

$$= 4\left(\frac{y^5}{5}+\frac{6y^4}{4}+36\,\frac{y^3}{3}+216\,\frac{y^2}{2}+1296y+7776\int\frac{dy}{y-6}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{y^5}{5}+\frac{3}{2}y^4+12y^3+108y^2+1296y+7776\ln|y-6|\right)+C =$$

$$4\left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{3}{2}x+12\sqrt[4]{x^3}+108\sqrt{x}+1296\sqrt[4]{x}+7776\ln\left|\sqrt[4]{x}-6\right|+C\right).$$

б) Теперь рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots\ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k/t}\right] dx.$$

Он сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой [32].

$\dfrac{ax+b}{cx+d} = Z^s$, где S – общий знаменатель дробей $\dfrac{m}{n}, \ldots, \dfrac{k}{t}$.

Пример 5.22

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+4}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx$. В данном примере $\dfrac{ax+b}{cx+d} = x+1$,

так как общий знаменатель дробей $\dfrac{1}{2}$ и 2 равен 2, то получаем $x+1 = Z^2$, поэтому $dx = 2ZdZ$, и исходный интеграл примет вид.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+4}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{(Z+4)\,2\,ZdZ}{Z^4 - Z} = 2\int \frac{Z(Z+4)\,dZ}{Z\,(Z^3-1)} =$$

$$= 2\int \frac{Z+4}{Z^3-1}\,d\,Z =$$

$$= 2\int \frac{Z+4}{(Z-1)\,(Z^2+Z+1)}\,d\,Z.$$

Разлагаем подынтегральную функцию на элементарные дроби и получаем:

$$\frac{Z+4}{(Z-1)\,(Z^2+Z+1)} = \frac{A}{Z-1} + \frac{BZ+C}{(Z^2+Z+1)}.$$

Отбрасываем знаменатель и имеем

$$Z + 4 = A\,(Z^2 + Z + 1) + (Z - 1)\,(B\,Z + C);$$
$$Z + 4 = A\,Z^2 + A\,Z + A + BZ^2 + CZ - BZ - C);$$
$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A + C - B \\ 4 = A - C \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим искомые коэффициенты A, B, C.

Складываем второе и третье уравнения полученной системы и получаем

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 5 = 2A - B \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} A = -B \\ 5 = -3B \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow B = -\frac{5}{3};\ A = \frac{5}{3};\ C = A\text{-}4 = \frac{5}{3} - 4 = \frac{5 - 12}{3} = \frac{-7}{3}\,.$$

Поэтому получаем

$$2\int \frac{Z + 4}{(Z-1)\,(Z^2 + Z + 1)}dZ = 2(\frac{5}{3}\int \frac{dZ}{Z-1} + \int \frac{-\frac{5}{3}\,Z - \frac{7}{3}}{Z^2 + Z + 1}\,dZ) =$$

$$2(\frac{5}{3}\ln|\,Z - 1| - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\,.\ \int\frac{2\,Z + 7/5\cdot 2}{Z^2 + Z + 1}\,dZ) =$$

$$= 2\,(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1} - 1| - \frac{5}{6}\int \frac{2Z + 14/5 - 9/5 + 9/5}{Z^2 + Z + 1}\,dZ) =$$

$$= 2(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1} - 1| - \frac{5}{6}\int \frac{2Z + 1}{Z^2 + Z + 1}dZ - \frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}\int\frac{dZ}{Z^2 + Z + 1} =$$

$$2\cdot\left(\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{6}\cdot\int\frac{d\,(Z^2+Z+1)}{Z^2+Z+1}\right)-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{Z^2+Z+1}) =$$

$$2(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}\text{ -}1|-\frac{5}{6}\ln|Z^2+Z+1|-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{(Z+1/2)^2+3/4}=$$

$$=2(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}\text{ -}1|-\frac{5}{6}\ln|(x+1)+\sqrt{x+1}+1|-\frac{3}{2}\int\frac{dZ}{\frac{3/4\,[(Z+1/2)^2+3/4]}{3/4}}=$$

$$=2(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\ln|x+\sqrt{x+1}+2|-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dZ}{\left(\frac{2(Z+1/2)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=$$

[делаем замену переменной $\frac{2(Z+1/2)}{\sqrt{3}}=t$ и после преобразований получаем] =

$$=2\left(\frac{5}{3}\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{5}{6}\ln|x+\sqrt{x+1}+2|-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\cdot\text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)$$

5.2. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла можно прийти, рассматривая различные задачи, например нахождение площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы, определение пути по заданной переменной скорости.

Найдем площадь криволинейной трапеции, т.е. фигуры, которая ограничена осью $0x$, графиком непрерывной функции $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.2). Пока будем считать, что криволинейная трапеция расположена над осью ох, т.е. $f(x) > 0$.

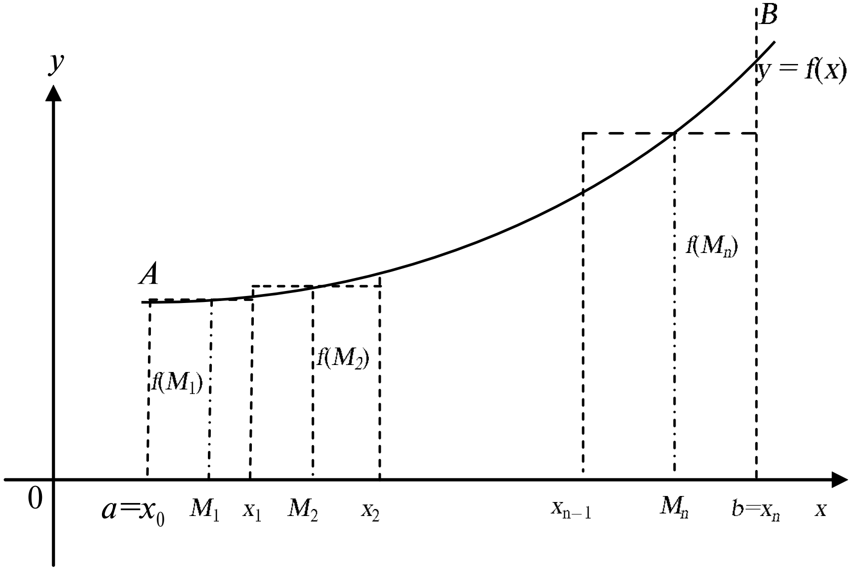


Рис. 5.2

Разделим отрезок $[a, b]$ на n частичных интервалов: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$.

В точках деления отрезка $[a, b]$ проведем прямые, параллельные оси $0y$, и разобьем криволинейную трапецию $aABb$ на n частичных трапеций. В каждом из частичных интервалов возьмем по произвольной точке M_1, M_2, ..., M_n (некоторые из этих точек могут совпадать с точками деления отрезка [a, b]).

Через точки M_1, M_2, ..., M_n проведем прямые, параллельные оси $0y$ до пересечения с функцией $y = f(x)$. Отрезки этих прямых $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$ есть ординаты графика функции $y = f(x)$. Взяв частичные интервалы за основания, построим на них n прямоугольников с высотами, равными $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$. В результате мы получим ступенчатую фигуру, состоящую их n прямоугольников. Так как площадь любого из прямоугольников будет равна $f(M_i)(x_i - x_{i-1}),\ i = \overline{1,n}$, то площадь ступенчатой фигуры можно найти по формуле

$$S_{\text{ступ}} = f(M_1)(x_1 - x_0) + f(M_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$+ f(M_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.3}$$

При неограниченном увеличении количество частичных интервалов $(n \to \infty)$ и при стремлении длины наибольшего из них к нулю ступенчатая фигура будет неограниченно приближаться к криволинейной трапеции $aABb$, т.е. получим

$$S_{\text{кр.трап}} = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.4}$$

Зная площадь криволинейной трапеции, мы можем находить площади любых плоских фигур (этот вопрос мы подробнее рассмотрим ниже). К выражению вида (5.4) приводят и другие задачи (нахождение работы переменной силы, вычисление пути по заданной переменной скорости).

Теперь приведем строгое определение определенного интеграла.

Впервые для непрерывной функции оно было дано в 1823 году французским математиком Коши, а позднее немецкий математик Риман показал, что определение Коши применимо к более широкому классу функций [4, 32]. Это позволило ему впервые дать в общей форме определение интеграла и определить условие его существования.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$, ($f(x)$ не обязательно положительна на $[a, b]$). Отрезок $[a, b]$ разбивается на n частичных интервалов точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ причем $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Во всех частичных интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ берутся произвольно точки $M_1, M_2, ..., M_n$, находятся значения функций $y = f(x)$ в этих точках $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n)$.

Составляем сумму вида

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i, \tag{5.5}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Затем находим предел интегральной суммы (5.5) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, т.е. при $\max \Delta x_i \to 0$.

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i. \tag{5.6}$$

В рассмотренной нами задаче о криволинейной трапеции предел (5.6) определяет ее площадь. В общем случае он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и читается: интеграл от a до b $f(x)$ по dx. То есть согласно определению мы получаем

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.7}$$

Сумма в выражении (5.5) называется n-й интегральной суммой [4, 30, 32].

Как и в неопределенном интеграле, $f(x)$ есть подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, переменная x – переменная интегрирования, отрезок $[a, b]$ называется интервалом интегрирования, а числа a и b нижним и верхним пределами соответственно.

Определенный интеграл есть некоторое число, а величина его зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Заметим, что площадь криволинейной трапеции – это геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла с помощью составления интегральных сумм вида (5.5) вызывает серьезные проблемы даже в самых простых случаях, поэтому для их нахождения используют другой способ, который мы рассмотрим ниже.

Теперь приведем без доказательства теорему существования определенного интеграла.

ТЕОРЕМА 5.2. Если функция $f(x)$ непрерывна в отрезке $[a, b]$, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала. Этот предел, т.е. определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$ на частичные интервалы, ни от выбора в этих интервалах промежуточных точек [4].

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k \in R.$$

3. Если переставить местами пределы интегрирования, то интеграл изменит только знак, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если интервал интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

6. Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ на длину интервала интегрирования, т.е.

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a),\ a < b,$$

где M и m – наибольшее и наименьшее соответственно значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 5.3) [32].

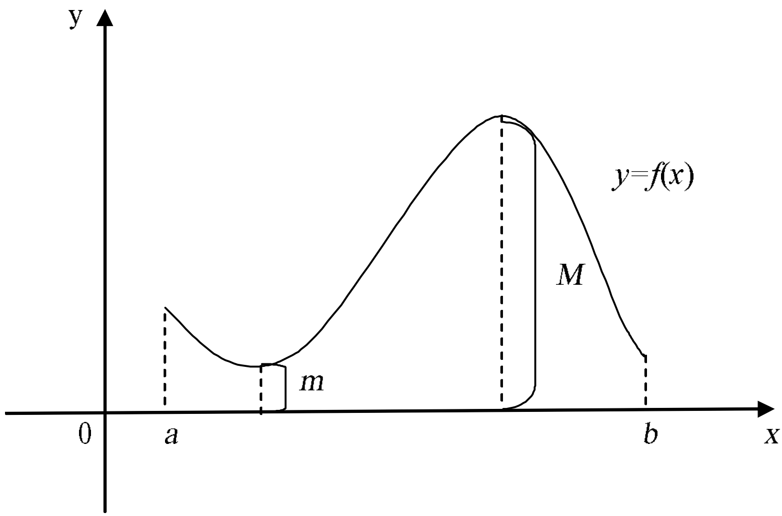


Рис. 5.3

7. Если в каждой точке x отрезка $[a, b]$ $\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b \psi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \text{ , } a < b.$$

8. Внутри интервала интегрирования $[a, b]$ есть хотя бы одно значение $x = A$, для которого выполняется следующее равенство:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(A).$$

Формула Ньютона–Лейбница

Приведем без доказательства формулировку теоремы.

ТЕОРЕМА 5.3. Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интегрирования [4, 32], т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{5.8}$$

Или иначе: значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Формула (5.8) дает удобный способ вычисления определенных интегралов, если известна первообразная подынтегральной функции, т.е. необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции и подставить в нее пределы интегрирования.

Приведем конкретные примеры.

Пример 5.23

$$\int_0^3 5e^x dx = 5\int_0^3 e^x dx = 5e^x\Big|_0^3 = 5(e^3 - e^0) = 5(e^3 - 1).$$

Пример 5.24

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}) =$$

$$= -(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

Пример 5.25

$$\int_3^7 \frac{dx}{x+5} =$$

[заметим, что $d(x + 5) = dx$] =

$$\int_3^7 \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5|\Big|_3^7 = \ln(7+5) - \ln(3+5) = \qquad \ln 12 - \ln 8 = \ln(\frac{12}{8}) = \ln(\frac{3}{2})$$

.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в этом случае будет иметь вид

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \quad . \qquad (5.9)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.26

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx =$$

$$= \left[u = \sin x; du = cosxdx, dv = \sin x dx; v = \int \sin x dx = -\cos x \right] =$$

$$= -\sin x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = -(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 \cos 0) +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

Перенеся $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ в левую часть равенства, окончательно получим

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 5.27

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left[u = \ln x;\ du = \frac{dx}{x};\ dv = xdx;\ v = \int xdx = \frac{x^2}{2}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x} = \left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2) = \ln 4 - \frac{3}{4}.$$

Метод замены переменной в определенном интеграле

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной проводится так же, как и при нахождении неопределенного интеграла, за исключением того, что в данном случае нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной. Но надо помнить, что, заменяя переменную под знаком интеграла, надо менять и пределы интегрирования.

Решим конкретные примеры.

Пример 5.28

$$\int_2^4 \frac{xdx}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{2xdx}{x^2+8}.$$

[Заметим, что $d(x^2+8) = 2xdx$]

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{d(x^2+8)}{x^2+8}.$$

Делаем замену переменной, обозначим $y = x^2 + 8$. Теперь необходимо поменять пределы интегрирования:

$$y\Big|_{x=2}^{=2^2+8=12}\ ;\quad y\Big|_{x=4}^{=4^2+8=24}$$

и окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{d(x^2+8)}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int_{12}^{24}\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|\Big\|_{12}^{24} = \frac{1}{2}\left(\ln 24 - \ln 12\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{24}{12} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 5.29

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx =$$

[Заметим, что $d(1+x^2) = 2xdx$]

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2).$$

Теперь заменяем переменную и пределы интегрирования $t = 1 + x^2$;

$$t\Big|_{x=1}^{=1+1^2=2}\ ;\quad t\Big|_{x=2}^{=1+2^2=5}$$

и окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\int_2^5 y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}\right) = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Пример 5.30

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx =$$

[Заметим, что $d\mathrm{tg}x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\mathrm{tg}x .$$

Теперь делаем замену переменной и меняем пределы интегрирования $\mathrm{tg}x = t$; $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1;\quad \mathrm{tg}0 = 0$,

в результате получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)d\,\mathrm{tg}x = \int_0^1 \left(2+\sqrt{t}\right)dt = 2\int_0^1 dt + \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= 2t\Big|_0^1 + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах

Несобственный интеграл первого рода

Распространим понятие определенного интеграла на случай бесконечного интервала интегрирования.

Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a; +\infty)$. Тогда можно найти интеграл от функции $f(x)$, который взят по любому интервалу $[a, b]$, где $b > a$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ тем лучше выражает значение, которое надо принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$, чем больше b.

Пусть b неограниченно возрастает, тогда есть две возможности: или $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ имеет предел, или данный интеграл предела не имеет, а это означает, что он или стремится к бесконечности, или колеблется, т.е. не стремится ни к какому пределу.

Теперь дадим определение несобственного интеграла.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$ называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$. Это записывается следующим образом:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.10)$$

Если предел (5.10) существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если не существует, то расходящимся [4, 32].

Если первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ известна, то можно определить, сходится несобственный интеграл или нет. Используем формулу Ньютона–Лейбница и получим

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a).$$

Поэтому если предел первообразной $F(x)$ при $b \to \infty$ существует, то несобственный интеграл сходится, а если предел не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл в интервале $(-\infty; b)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(-\infty).$$

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty;\ +\ \infty)$, то получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части последнего выражения сходятся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а если хотя бы один из них расходится, то и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится [4, 32].

Если известна первообразная $F(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Сходящиеся несобственные интегралы имеют определенный геометрический смысл. Например, график функции $y = f(x)$ ограничивает криволинейную трапецию с бесконечным основанием (рис. 5.4).

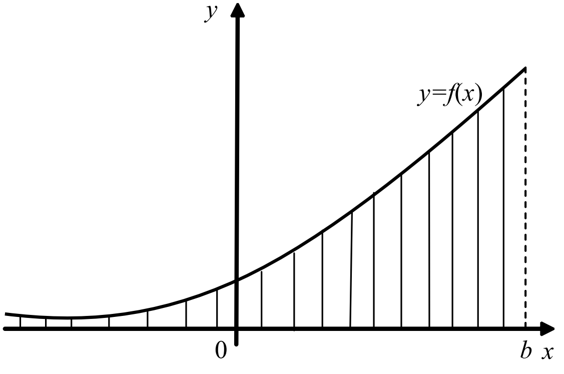


Рис. 5.4

Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+b} f(x)dx$ сходится, то заштрихованная фигура имеет площадь, которая равна этому интегралу. А если интеграл расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.

Теперь приведем конкретные примеры решения несобственных интегралов.

Пример 5.31

Вычислим $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}dx \;=$

[Делаем замену переменной $-2x = y => x = -\dfrac{y}{2} => dx = -\dfrac{dy}{2}$. Затем меняем пределы интегрирования $y(0) = 0$; $y(\infty) = -\infty$. Тогда получим]

$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x} dx \;=$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-\infty} e^{y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{y} dy = \frac{1}{2} e^{y}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}\left(e^{0} - \frac{1}{e^{\infty}}\right) = \frac{1}{2}\text{, т.е.}$$

$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}dx$ несобственный интеграл сходится и равен $\dfrac{1}{2}$.

Пример 5.32

$\int\limits_{5}^{\infty} \dfrac{3dx}{x} = 3\int\limits_{5}^{\infty} \dfrac{dx}{x} = \ln x\Big|_{5}^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(5) = \infty$, т.е. данный интеграл расходится.

Пример 5.33

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \sin x dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{b} \sin x dx = \lim_{b\to\infty} (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{b} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} (\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot$$

Величина $[-\lim\limits_{b\to\infty}(\cos b - \frac{\sqrt{2}}{2})]$ не стремится к определенному пределу при $b\to\infty$ (колеблется).

Пример 5.34

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3e^x dx = 3e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 3(e^{\infty} - \frac{1}{e^{\infty}}) = \infty,$$

т.е. данный интеграл расходится.

Часто важно знать не конкретное значение несобственного интеграла, а сходится он или расходится. Для этого используются признаки сравнения, которые мы и приводим.

1. Если для $\forall x (x \ge a)$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и если $\int_{a}^{\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то сходится и $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$, при этом выполняется неравенство

$$\int_{a}^{\infty} f(x) dx \le \int_{a}^{\infty} \varphi(x) dx .$$

Например, проверим, сходится ли интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(2+e^x)}.$$

При $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2(2+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$.

Теперь рассмотрим, сходится ли несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = -(\frac{1}{\infty} - 1) = 1,$$

т.е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(2+e^x)}$ и его значения меньше 1.

2. Если для $\forall x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$,

причем $\displaystyle\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и

$$\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Например, проверим сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}}dx.$$

Очевидно, что $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^3}} > \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Теперь рассмотрим сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\bigg|_1^b = 2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b} - 1) = \infty,$$

т.е. данный интеграл расходится. Поэтому по признаку 2 расходится

$$\int_1^{\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^3}}dx .$$

3. Если несобственный интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся.

В качестве примера проверим сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx .$$

На интервале $[1;\infty)$ подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x^3}$ знакопеременная.

Видно, что $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Теперь рассмотрим, сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\infty}-1\right) = \frac{1}{2},$$

т.е. данный интеграл сходится. Поэтому по признаку 1 сходится

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin\ x}{x^3}\right|dx ,$$

а следовательно, по признаку 3 сходится и интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx .$$

При использовании признаков сравнения надо иметь запас функций, несобственные интегралы от которых или сходятся, или расходятся и результат этот нам известен заранее. Эти функции мы будем использовать в качестве $\varphi(x)$.

Интегралы от разрывных функций (несобственные интегралы второго рода)

Если на отрезке [*a*, *b*] функция $y = f(x)$ имеет конечное количество точек разрыва первого рода, то дать определение интеграла для такой функции легко. В этом случае искомый интеграл есть сумма определенных интегралов, взятых по частичным интервалам, на которые разбивается отрезок [*a*, *b*] всеми точками разрыва функции $a < c_1 < c_2 .... c_n < b$, где $c_1\ c_2 ..... c_n$ точки разрыва. Тогда будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots\dots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$ [4].

Таким образом мы дали определение площади криволинейной трапеции, соответствующей функции $y = f(x)$ с конечным числом точек разрыва первого рода на отрезке [*a*, *b*] (рис. 5.5).

Площадь этой трапеции есть сумма площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы $[a_1, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ...$[c_n, b]$.

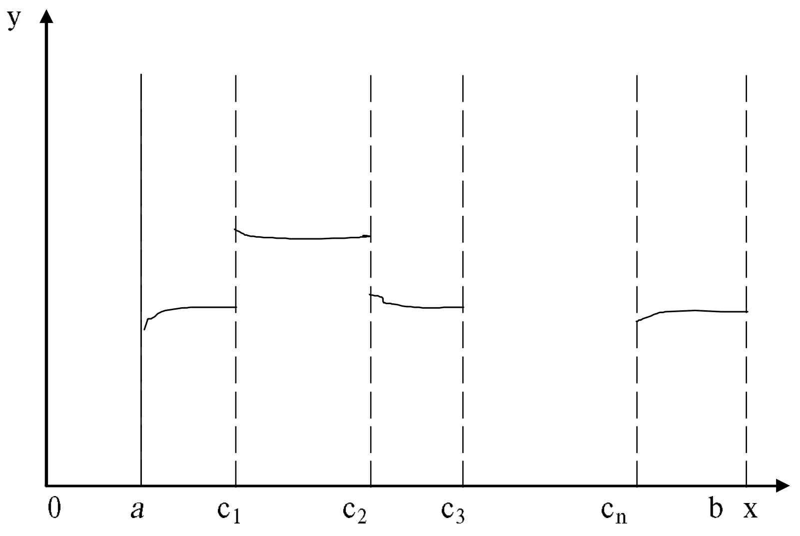


Рис. 5.5

Распространим определение интеграла на функции с бесконечными разрывами.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для всех значений $a \leq x < b$, но в точке b имеет бесконечный разрыв (рис. 5.6).

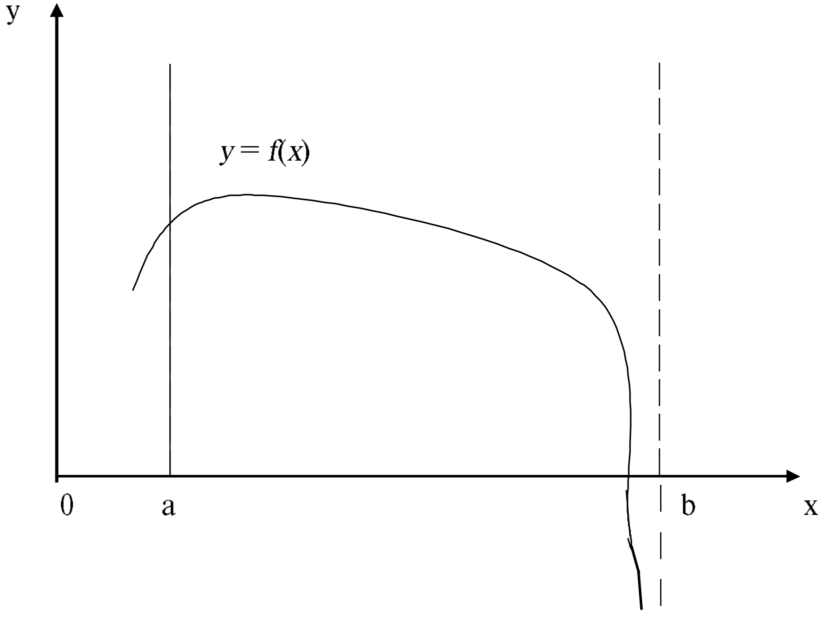


Рис. 5.6

Поэтому определение интеграла в точке b теряет свой смысл. Но если взять обычный интеграл

$I = \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0,$ то можно считать, что функция $y = f(x)$ с уменьшением ε будет все лучше выражать ту величину, которую нужно взять в качестве интеграла от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Устремим ε к нулю, тогда I либо имеет предел, либо не имеет (стремится к бесконечности, либо не стремится ни к какому пределу, колеблется).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Несобственным интегралом от функции $y = f(x)$, непрерывной при $a \le x < b$ и неограниченной при $x \to b$, называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon \to 0$, записывается это следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \ \varepsilon > 0.$$

Если данный предел существует, то несобственный интеграл сходится, а если не существует, то расходится [4].

Аналогично дается определение несобственного интеграла в том случае, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в левом конце отрезка интегрирования $[a, b]$ (рис. 5.7).

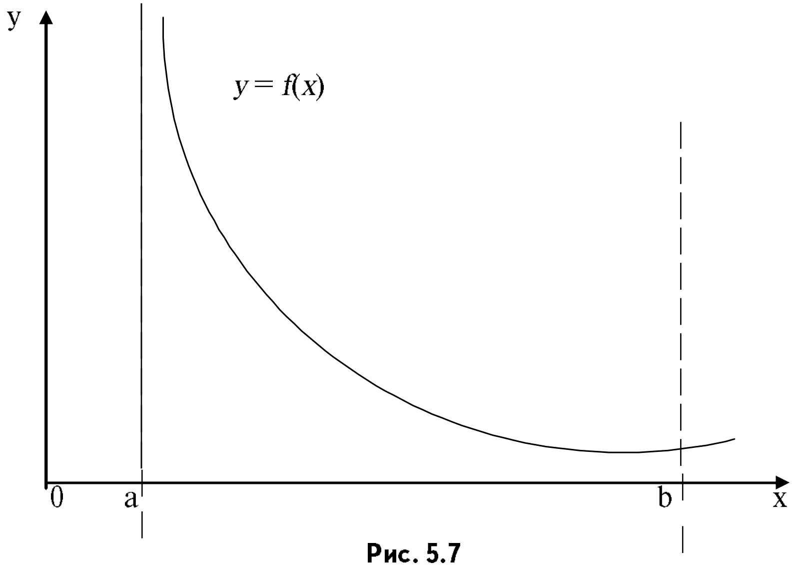


Рис. 5.7

В этом случае имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \ \varepsilon > 0.$$

Если первообразную от функции $y = f(x)$ можно найти, то тогда искомый интеграл в обоих рассмотренных случаях находится по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

В том случае, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в какой-то промежуточной точке $x = c$ отрезка интегрирования $[a, b]$, $a < c < b$ (рис. 5.8), то согласно определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

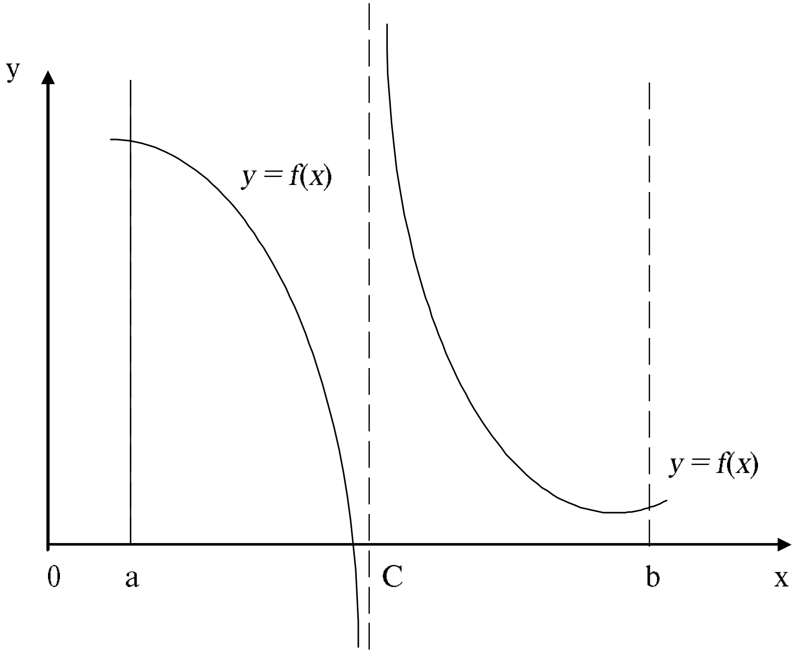


Рис. 5.8

Если оба интеграла в правой части последнего равенства сходятся, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то расходится и исходный интеграл.

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.35

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^4 x^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\,\Big|_{0+\varepsilon}^4 = 2\sqrt{4} = 4$$ – интеграл сходится.

Пример 5.36

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int_0^{2-\varepsilon} \frac{d(2-x)}{2-x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\ln|2-x|\right)\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{1}{2-x}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \infty$$ – интеграл расходится.

5.4. Приложения интегрального исчисления

5.4.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Так как определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции, а площадь любой плоской фигуры можно представить как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций, то, следовательно, определенный интеграл можно использовать для вычисления площадей плоских фигур [4, 23].

Если функция $y = f(x)$ или плоская фигура $ABCD$ находятся выше оси $0x$ (рис. 5.9 и рис. 5.10), то мы имеем

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad S_2 = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx .$$

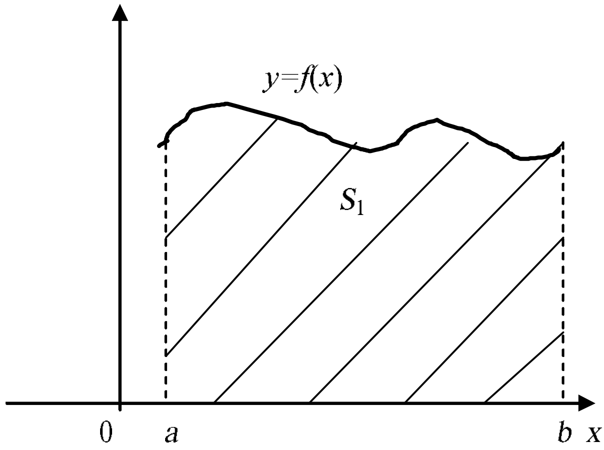


Рис. 5.9

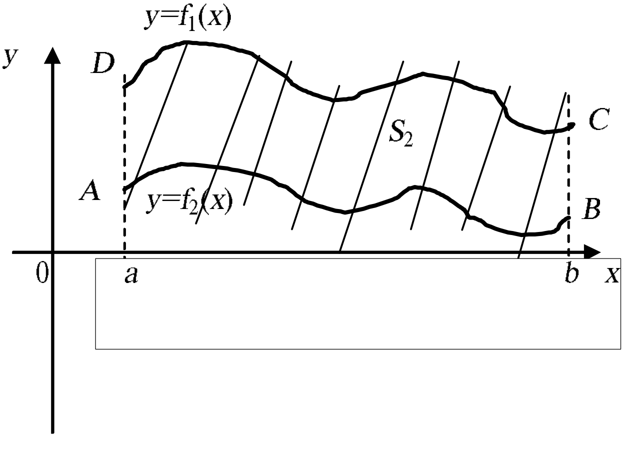


Рис. 5.10

Если функция $y = f(x)$ находится полностью или частично под осью $0x$ (рис.5.11 и рис. 5.12), то мы получаем

$$S_3 = \left|\int_a^b f(x)dx\right|; \; S_4 = \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right|.$$

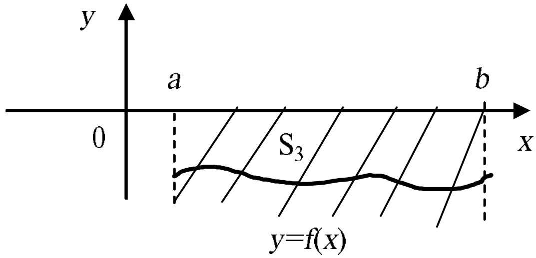


Рис. 5.11

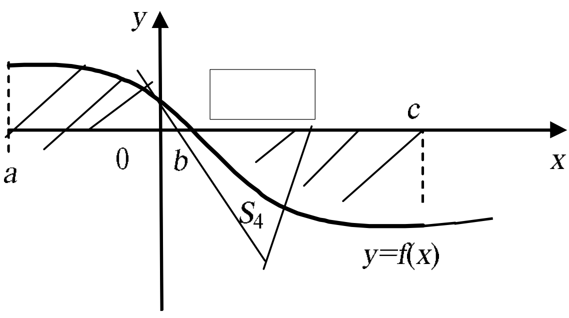


Рис. 5.12

Если функция $x = \varphi(y)$ или плоская фигура $ABCD$ прилегают к оси $0y$, то (рис. 5.13 и рис. 5.14)

$$S_5 = \int_a^b \varphi(y)dy; \; S_6 = \int_a^b \big(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\big)dy.$$

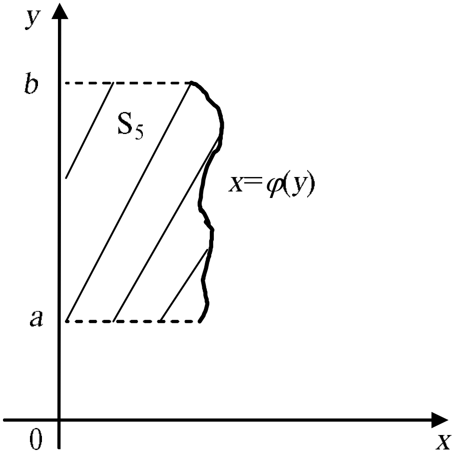


Рис. 5.13

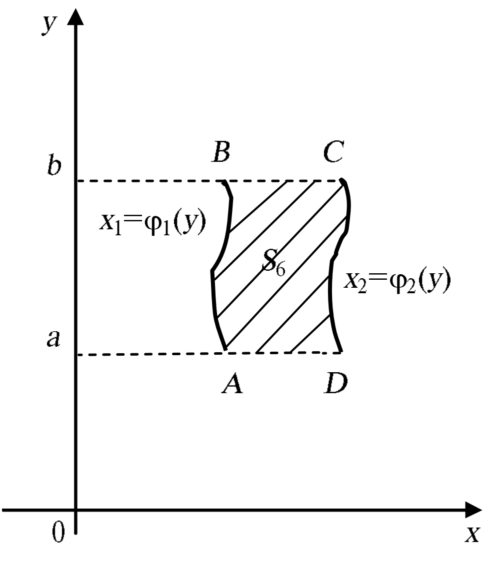


Рис. 5.14

Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующей схеме:

1) В соответствии с условиями задачи делают схематический чертеж.

2) Искомую площадь представляют как сумму и (или) разность площадей криволинейных трапеций.

3) Находят пределы интегрирования.

4) Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и искомую площадь фигуры.

Теперь рассмотрим конкретные примеры вычисления площадей плоских фигур.

Пример 5.37

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
$x = 4 - y^2$, $x = 0$.

Сначала по условиям задачи строим схематический чертеж (рис. 5.15).

$x = 4 - y^2$ – парабола. Найдем ее вершину $x' = -2y$. $y = 0$, $x = 4$ (max) и точки пересечения с осью 0y. $4 - y^2 = 0$, $y = 2$, $y = -2$.

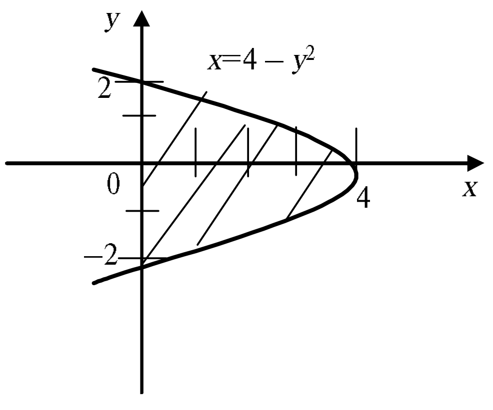


Рис. 5.15

$y_1 = -2$ и $y_2 = 2$ являются пределами интегрирования.

Теперь найдем искомую площадь. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс, то можно записать:

$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)dy=2\int_{0}^{2}\left(4-y^2\right)dy=2\left(4y\Big|_0^2-\frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right)=$$

$$=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ кв.ед.}$$

Пример 5.38

Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=x^2–6x+8$; $y=0$.

Построим схематический чертеж искомой фигуры (рис. 5.16).

Кривая $y=x^2–6x+8$ есть парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем ее характерные точки.

$y' = 2x–6$;

$y' = 0$;

$2x–6 = 0$;

$x = 3$, $y = –1$ (min);

$x^2–6x+8=0$;

$D = 36–4*1*8 = 4$;

$x_1=\dfrac{6+2}{2}=4$; $x_2=\dfrac{6-2}{2}=2$ (пределы интегрирования).

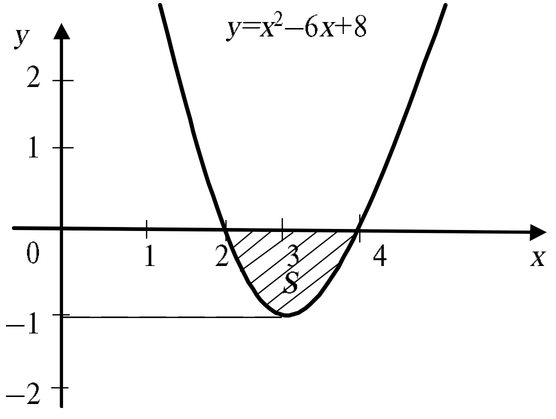


Рис. 5.16

Теперь находим искомую площадь (знак модуля ставится, так как фигура находится под осью 0х).

$$S=\left|\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}\Big|_2^4-6\frac{x^2}{2}\Big|_2^4+8x\Big|_2^4\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right)-3\left(16-4\right)+8(4-2)\right|=$$

$$=\left|\frac{56}{3}-36+16\right|=\left|\frac{56}{3}-20\right|=\frac{4}{3}\text{ кв. ед.}$$

Пример 5.39

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

Построим схематический чертеж (см. 5.17) и найдем пределы интегрирования

$$\frac{6}{x}=7-x;\ 6-7x+x^2=0, x\neq 0;\ D=25;$$

$$\begin{cases} x_1=1; \\ x_2=6 \end{cases}$$

(пределы интегрирования).

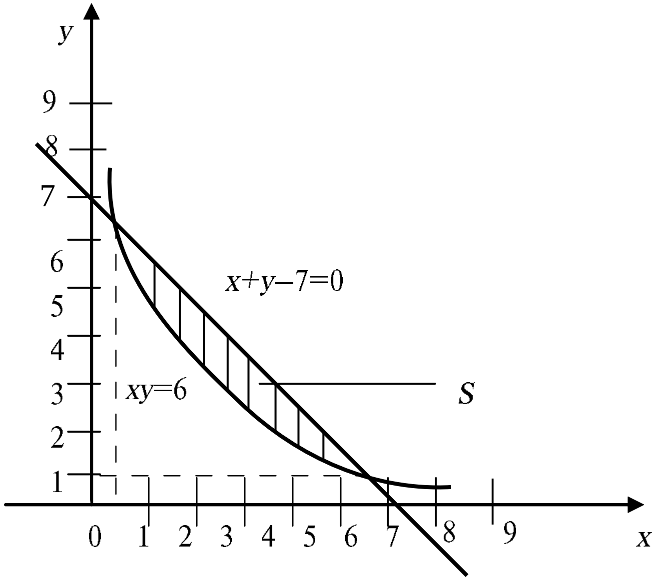


Рис. 5.17

Теперь находим искомую площадь

$$S=\int_1^6\left(7-x-\frac{6}{x}\right)dx=7x\Big|_1^6-\frac{x^2}{2}\Big|_1^6-6\ln 6\Big|_1^6=$$

$$=(42-7)-(18-\frac{1}{2})-6(\ln 6-\ln 1)=$$

$$=35-17{,}5-6\ln 6=(17{,}5-6\ln 6)\text{ кв. ед.}$$

5.4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ

Пусть в плоскости $x0y$ уравнением $y = f(x)$ задана кривая линия. Вычислим длину дуги AB этой кривой, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.18).

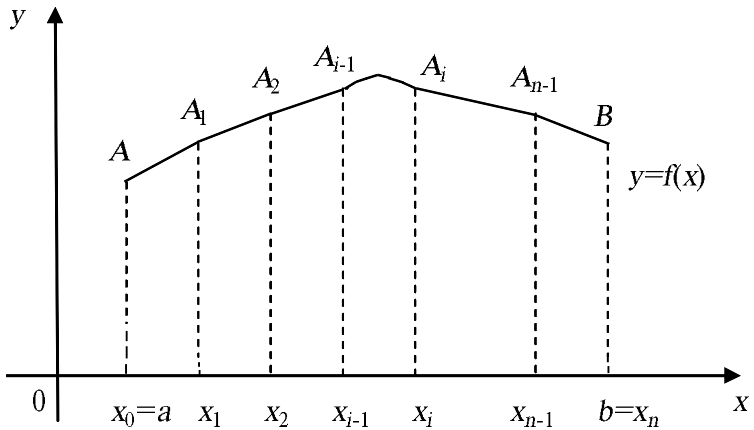


Рис. 5.18

На дуге AB возьмем точки A, A_1, A_2, ..., A_i, ..., B с абсциссами $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $b = x_n$. Проведем хорды AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}, B, длины которых соответственно обозначим ”l_1, ”l_2, ..., ”l_n. В результате получим ломаную линию AA_1A_2, ..., A_{n-1} B, которая вписана в дугу AB. Длина этой ломанной будет равна $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Длиной (l) дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю, т.е.

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

В курсах математического анализа доказывается (см. например, [4, 30]), что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует, и длина дуги AB находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\ . \qquad (5.11)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.40

Найдите длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью $0x$.

Сначала построим график исходной функции и найдем a и b (рис. 5.19):

$y' = x$.

$\min x = 0; y = -\frac{3}{2}$.

Находим a и b.

$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0,\ \ x^2 = 3,\quad x = \pm\sqrt{3}$

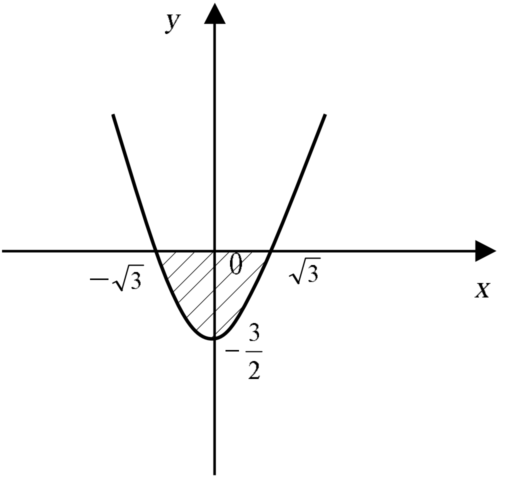


Рис. 5.19

Теперь по формуле (5.11.) находим искомую длину дуги.

$l = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\,dx$ = [Так как исходная парабола симметрична относительно оси 0у, то получаем] = $2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\,dx$.

Найдем $l_1 = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\,dx = \dfrac{l}{2}$.

Получившийся определенный интеграл можно брать несколькими способами, например подстановкой $x = \mathrm{sh}y$, где $\mathrm{sh}y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ – гиперболический синус или методом интегрирования по частям, которым мы и воспользуемся. Напомним, что формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du \,.$$

В нашем случае имеем

$$u = \sqrt{1+x^2}\,; dv = dx \Rightarrow v = x;$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Тогда получим

$$l_1 = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx \right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) =$$

$$= 2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ является табличным (см. формулу 17 таблицы интегралов). Он равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Arshx + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

В нашем случае получаем

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln(\sqrt{3}+2) .$$

Поэтому l_1 примет вид

$$l_1 = 2\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx + \ln(\sqrt{3}+2) .$$

Переносим $\left(-\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx\right)$ налево и окончательно получаем

$$l = 2l_1 = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx = 2\sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}+2) .$$

5.4.3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим тело, которое образовано вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.20).

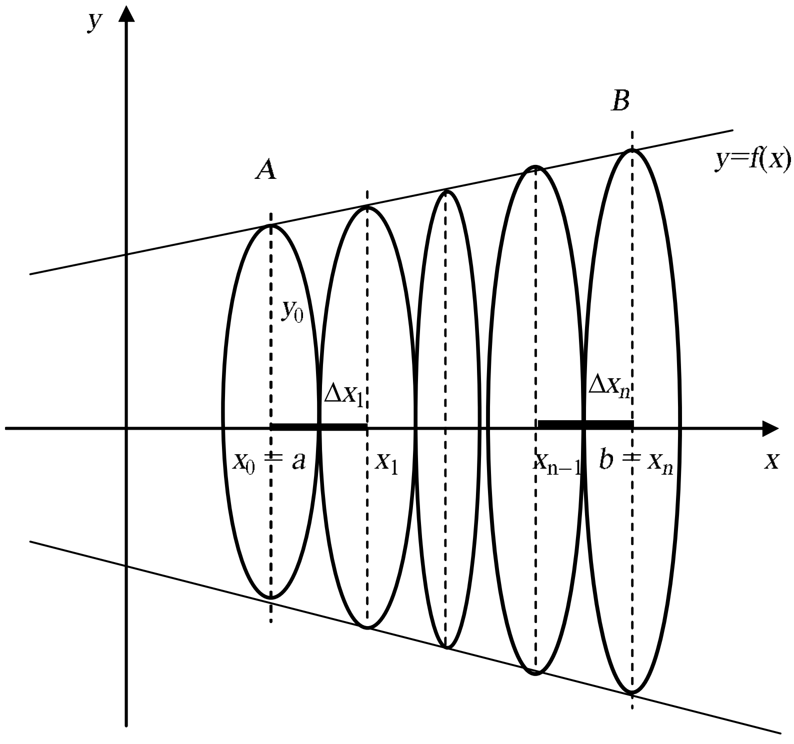


Рис. 5.20

Разобьем полученное тело на слои с помощью секущих плоскостей, перпендикулярных к оси $0x$ и пересекающих ее в точках $x_0 = a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$. Каждый слой заменим прямым цилиндром. Объем каждого из этих цилиндров будет равен $V_i = \pi y^2_{i-1}\ \Delta x_i$; $i = \overline{1, n}$ [в данном случае поперечные сечения с абсциссами $x_0 = a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ есть окружности].

Поэтому объем n-ступенчатого тела будет равен

$$V_n = \pi y_0^2 \Delta x_1 + \pi y_1^2 \Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ \pi y_{n-1}^2 \Delta x_n = \pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i .$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$ и при стремлении max $\Delta x_i \to 0$ и получаем искомый объем тела вращения [4].

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx\,. \tag{5.12}$$

В том случае, если тело образовано вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции $cCDd$, ограниченной функцией $x = \varphi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 5.21), то его объем находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy\,. \tag{5.13}$$

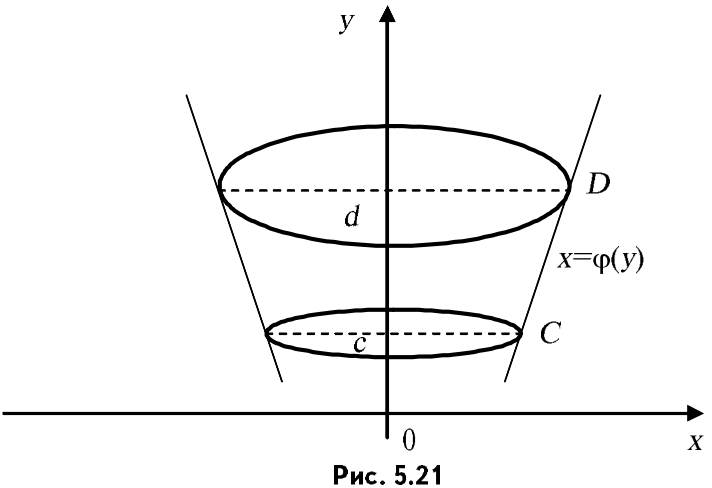


Рис. 5.21

Теперь рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.41

Найдем объем двухосного эллипсоида вращения, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, где a и b – большая и малая полуоси соответственно (одной из моделей Земли как раз и является двухосный эллипсоид вращения, в РФ принят рефенц-эллипсоид с параметрами a = 6 378 245м, $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298{,}3}$). Его сечением, в плоскости $x0z$ будет эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.22).

Таким образом, эллипсоид образован вращением вокруг оси 0x функции $z = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, ограниченной прямыми $x = -a$ и $x = a$, и осью $0x$.

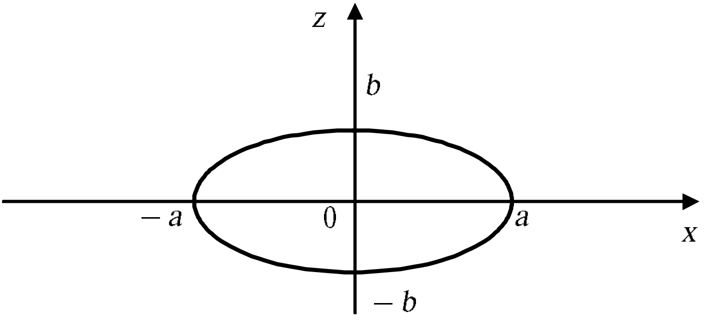


Рис. 5.22

Тогда по формуле (5.12) получаем:

$$V = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= \pi b^2\left(\int_{-a}^{a} dx - \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} x^2 dx\right) = \pi\, b^2\left(x\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}\right) =$$

$$=\pi b^2\left[(a-(-a))-\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3}{3}-\left(-\frac{a^3}{3}\right)\right)\right]=$$

$$=\pi b^2\left(2a-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2a^3}{3}\right)=\pi b^2\left(2a-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов

В тех случаях, когда подынтегральная функция имеет сложный вид и неясно, как ее преобразовать к табличной, или же первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции, применяют приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Приведем несколько способов приближенного интегрирования, исходя из определения интеграла как предела суммы.

а) *Формула прямоугольников.*

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Надо вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$. Отрезок $[a, b]$ разделим точками $a = x_0$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ на n одинаковых частей длины Δx, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ (рис. 5.23).

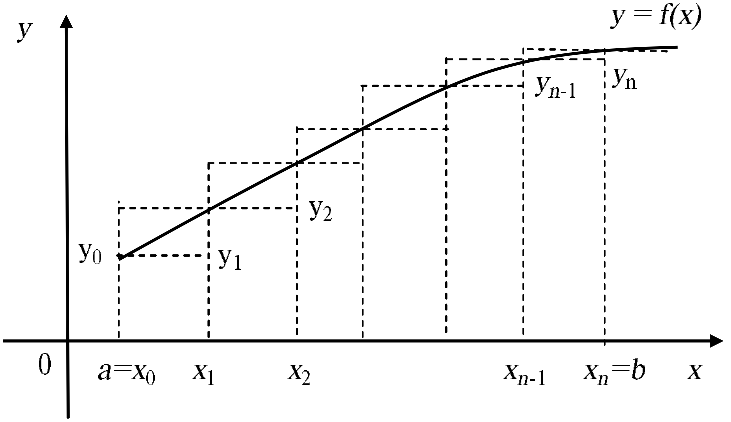


Рис. 5.23

Значения функции $y = f(x)$ в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n обозначим через y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n.

Теперь составим две суммы:

$$S_1 = y_0\,\Delta x + y_1\,\Delta x + y_2\,\Delta x + ... + y_{n-1}\,\Delta x\,. \qquad (5.14)$$

S_1 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих ниже $y = f(x)$.

$$S_2 = y_1\,\Delta x + y_2\,\Delta x + ... + y_n\,\Delta x. \qquad (5.15)$$

S_2 есть суммарная площадь прямоугольников, лежащих выше $y = f(x)$.

Истинная площадь фигуры, ограниченная $y = f(x)$, удовлетворяет условию $S_1 < S_{\text{ист}} < S_2$.

Поэтому можно записать приближенные равенства [1, 23]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\,, \qquad (5.16)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)\,. \qquad (5.17)$$

Приближенные равенства (5.16) и (5.17) и есть формулы прямоугольников. Ошибка, которую мы совершаем при вычислении интегралов по формулам (5.16) и (5.17), будет тем меньше, чем больше n. Для того чтобы определить, сколько точек деления надо взять, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, надо использовать формулу оценки погрешности, которая получается при приближенном вычислении интеграла. Для метода прямоугольников она имеет вид

$$|\alpha_n| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n}\,,$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$ [12].

Приведем конкретный пример.

Пример 5.42

Используя метод прямоугольников, вычислим приближенно интеграл

$$\int_2^6 \frac{dx}{\ln x}\text{, взяв } n = 10.$$

Заметим, что этот интеграл относится к числу неберущихся, т.е. он не выражается в элементарных функциях.

$$y = f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{6-2}{10} = 0{,}4.$$

Используем для расчета формулу (5.16)

$$y_0 = \frac{1}{\ln 2} = 1{,}443;\ y_1 = \frac{1}{\ln 2{,}4} = 1{,}142;\ y_2 = \frac{1}{\ln 2{,}8} = 0{,}971;$$

$$y_3 = \frac{1}{\ln 3{,}2} = 0{,}860;\ y_4 = \frac{1}{\ln 3{,}6} = 0{,}781;\ y_5 = \frac{1}{\ln 4} = 0{,}721;$$

$$y_6 = \frac{1}{\ln`4{,}4} = 0{,}675;\ y_7 = \frac{1}{\ln 4{,}8} = 0{,}638;\ y_8 = \frac{1}{\ln 5{,}2} = 0{,}607;$$

$$y_9 = \frac{1}{\ln 5{,}6} = 0{,}581.$$

Теперь по формуле (5.16) имеем

$$S_1 = \int_a^b \frac{dx}{\ln x} \approx 0{,}4(1{,}443 + 1{,}142 + 0{,}971 + 0{,}860 + 0{,}781 +$$
$$+ 0{,}721 + 0{,}675 + 0{,}638 + 0{,}607 + 0{,}581) \approx 3{,}368.$$

б) *Формула трапеций.*

Более точное значение определенного интеграла, чем по (5.16) и (5.17), мы получим, заменив исходную функцию $y = f(x)$ ломаной линией (рис. 5.24).

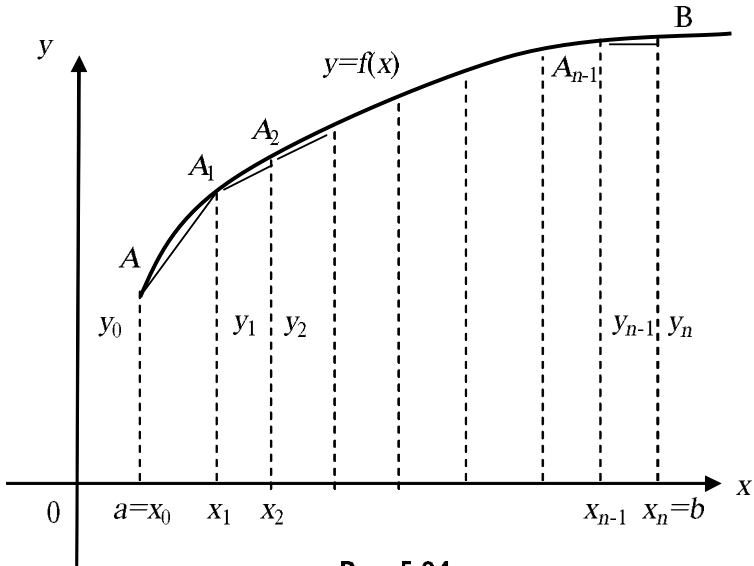


Рис. 5.24

То есть площадь криволинейной трапеции *aABb* мы заменим площадью фигуры, состоящей из прямоугольных трапеций: aAA_1x_1, $x_1A_1A_2x_2$, ..., $x_{n-1}A_{n-1}Bb$. Их площади будут равны: $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$; $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$;...; $\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$. Поэтому определенный интеграл приближенно будет равен [1, 23]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}\Delta x+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (5.18)$$

Выражение (5.18) носит название формулы трапеций.

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [12]

$$|\alpha_n| \le \frac{(b-a)^3 M_1}{12n^2}, \text{ где } M_1 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.18).

Пример 5.43

Используя метод трапеций, приближенно вычислим интеграл $\int_1^4 \frac{e^x}{x}dx$, приняв n = 10. Этот интеграл, как и интеграл предыдущего примера, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{e^x}{x}$; $\frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{10} = 0{,}3$.

$$y_0 = \frac{e^1}{1} = e \approx 2{,}718;\ y_1 = \frac{e^{1,3}}{1{,}3} \approx 2{,}823;\ y_2 = \frac{e^{1,6}}{1{,}6} \approx 3{,}096;$$

$$y_3 = \frac{e^{1,9}}{1{,}9} \approx 3{,}519;\ y_4 = \frac{e^{2,2}}{2{,}2} \approx 4{,}102;\ y_5 = \frac{e^{2,5}}{2{,}5} \approx 4{,}873;$$

$$y_6 = \frac{e^{2,8}}{2{,}8} \approx 5{,}873;\ y_7 = \frac{e^{3,1}}{3{,}1} \approx 7{,}161;\ y_8 = \frac{e^{3,4}}{3{,}4} \approx 8{,}813;$$

$$y_9 = \frac{e^{3,7}}{3{,}7} \approx 10{,}932;\ y_{10} = \frac{e^4}{4} \approx 13{,}650.$$

Теперь по формуле (5.18) получаем

$$\int_1^4 \frac{e^x}{x}dx \approx 0{,}3\left(\frac{2{,}718 + 13{,}650}{2} + 2{,}823 + \cdots + 10{,}932\right) \approx 17{,}813.$$

в) *Формула парабол (формула Симпсона).*

Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разделим [*a*, *b*] на четное число частей $n = 2m$. Сущность способа заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси 0*y* (рис. 5.25).

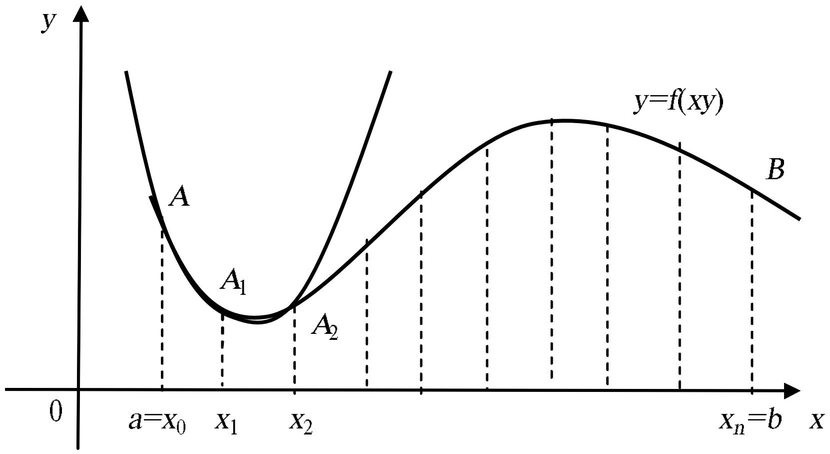


Рис. 5.25

Уравнения таких парабол имеют вид $y = cx^2 + dx + p$. Коэффициенты c, d, p можно однозначно найти по трем точкам, если абсциссы их различны. Дуги парабол проводят через каждую тройку точек. Криволинейную трапецию $aABb$ заменяют суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол. Площадь первой из таких параболических трапеций равна

$$S_1 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right),$$

площадь второй равна $S_2 = \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т.д.

Искомая формула Симпсона имеет вид [1, 23]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \cdots y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right)\right]. \quad (5.19)$$

Формула оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла, в этом случае имеет вид [12]

$$\left|\alpha_n\right| \le \frac{(b-a)^5 M_2}{180(2n)^4}, \text{ где } M_2 = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Применение формулы (5.19) значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

Метод прямоугольников является наиболее простым и наименее точным способом.

Выбор способа приближенного интегрирования зависит от подынтегральной функции и требуемой точности расчета.

Приведем конкретный пример вычисления определенного интеграла по формуле (5.19).

Пример 5.44

Используя формулу Симпсона, приближенно вычислим интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$, приняв $n = 10$. Заметим, что этот интеграл, как и интегралы из двух предшествующих примеров, является неберущимся. В данном случае $y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$;

$$\frac{b-a}{3n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{30} = \frac{\pi}{120}; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{10} = \frac{\pi}{40};$$

$$y_0 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}9003; \quad y_1 = \frac{\cos\frac{11\pi}{40}}{\frac{11\pi}{40}} \approx 0{,}752; \quad y_2 = \frac{\cos\frac{12\pi}{40}}{\frac{12\pi}{40}} \approx 0{,}624;$$

$$y_3 = \frac{\cos\frac{13\pi}{40}}{\frac{13\pi}{40}} \approx 0{,}512; \quad y_4 = \frac{\cos\frac{14\pi}{40}}{\frac{14\pi}{40}} \approx 0{,}413; \quad y_5 = \frac{\cos\frac{15\pi}{40}}{\frac{15\pi}{40}} \approx 0{,}325;$$

$$y_6 = \frac{\cos\frac{16\pi}{40}}{\frac{16\pi}{40}} \approx 0{,}246; \quad y_7 = \frac{\cos\frac{17\pi}{40}}{\frac{17\pi}{40}} \approx 0{,}175; \quad y_8 = \frac{\cos\frac{18\pi}{40}}{\frac{18\pi}{40}} \approx 0{,}111;$$

$$y_9 = \frac{\cos\frac{19\pi}{40}}{\frac{19\pi}{40}} \approx 0{,}053; \quad y_{10} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

По формуле (5.19) получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx \approx \frac{\pi}{120}[0{,}9003 + 0 + 2(0{,}624 + 0{,}413 + 0{,}246 + 0{,}111) +$$

$$+ 4(0{,}752 + 0{,}512 + 0{,}325 + 0{,}175 + 0{,}053)] \approx 0{,}287.$$

5.6. Понятие о двойном интеграле

Понятие двойного интеграла является расширением понятия определенного интеграла на случай функции двух аргументов.

На плоскости $x0y$ рассмотрим замкнутую область В (область В называется замкнутой, если она ограничена линией, и точки, которые лежат на границе, считаются принадлежащими области B), ограниченную линией L. В этой области зададим непрерывную функцию $z = f(x, y)$. Область B произвольно разобьем на n частей (площадок): b_1, b_2, b_3, ..., b_n. Площади этих частей (площадок) обозначим ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. В каждой площадке b_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ возьмем произвольную точку M_i (эта точка может лежать и на границе площадки). Таким образом, будем иметь n точек: M_1, M_2, ..., M_n (рис. 5.26).

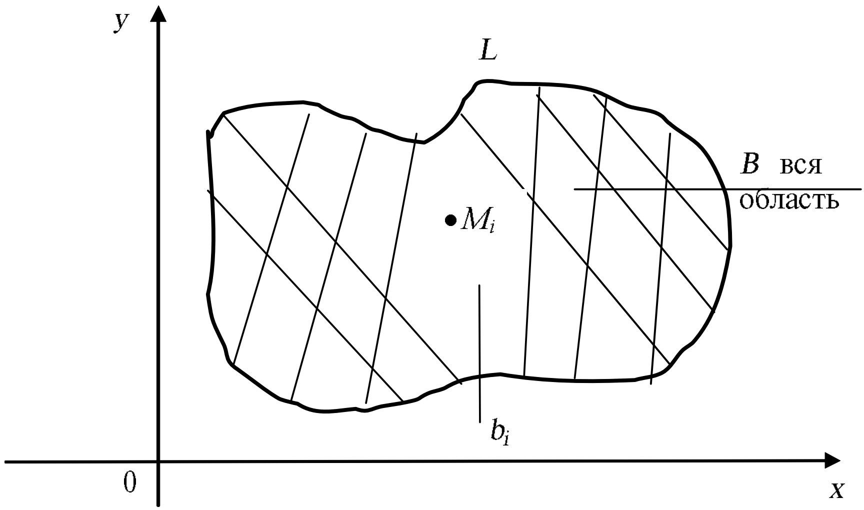


Рис. 5.26

Через $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$ обозначим значения функции $z = f(x, y)$ в выбранных нами точках. Затем составим сумму произведений $f(M_i)\Delta S_i$, которую обозначим V_s:

$$V_s = f(M_1)\Delta S_1 + f(M_2)\Delta S_2 + \dots + f(M_n)\Delta S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \,. \qquad (5.20)$$

Сумма (5.20) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области B [32].

В случае, если $z = f(x, y) \geq 0$, в области B каждое слагаемое $f(M_i)\Delta S_i$ есть объем цилиндра, площадь основания которого ΔS_i, а высота $f(M_i)$. А сумма V_s представляет собой объем некоторого ступенчатого тела (рис. 5.27).

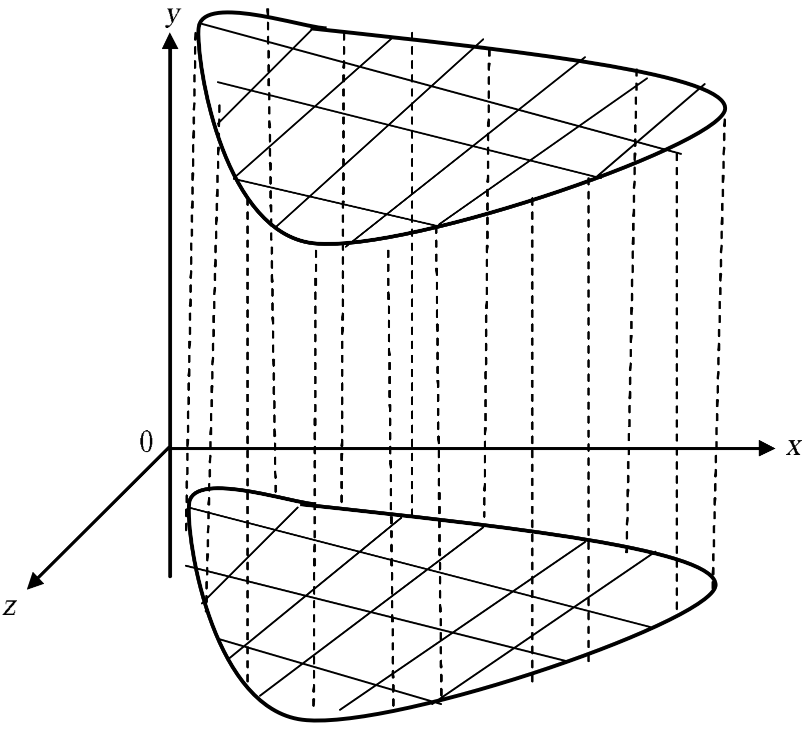


Рис. 5.27

Теперь рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, которые составлены с использованием функции $z = f(x, y) \geq 0$ для области B: $V_{s1}, V_{s2}, \ldots, V_{sk}$ (5.21) при различных способах разбиения области B на площадки b_i. Потребуем, чтобы максимальный диаметр площадок b_i стремился к нулю ($max\ diam\ b_i \to 0$) при стремлении к бесконечности количества этих площадок ($n_k \to \infty$). Тогда будет справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 5.4. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области B, то существует предел последовательности (5.21) интегральных сумм (5.20), если максимальный диаметр площадок $b_i \to 0$, а $n \to \infty$. Этот предел будет одинаков для любой последовательности вида (5.21), т.е. он не зависит ни от способа разделения области B на площадки b_i , ни от выбора в этих площадках точек M_i. Этот предел называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области B и обозначается

$$\iint_B f(x)ds = \iint_B f(xy)dxdy ,$$

т.е.

$$\lim_{\max \operatorname{diam} b_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S = \iint_B f(xy)dxdy .$$

Область B называется областью интегрирования.

В случае, если $z = f(x, y) \geq 0$, двойной интеграл от этой функции по области В равен объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $x0y$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $0z$, а направляющей служит линия L.

Некоторые свойства двойного интеграла

1. Если область B разбить на две части B_1 и B_2, то

$$\iint_B f(xy)dxdy = \iint_{B_1} f(xy)dxdy + \iint_{B_2} f(xy)dxdy .$$

Аналогично при разбиении области B на число частей больше двух.

2. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint_B \left[f_1(xy) \pm f_2(xy) \pm \cdots \pm f_n(xy)\right]dxdy =$$

$$= \iint_B f_1(xy)dxdy \pm$$

$$\pm \iint_B f_2(xy)dxdy \pm \cdots \pm \iint_B f_n(xy)dxdy .$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_B cf(xy)dxdy = c\iint\limits_B f(xy)dxdy,$$

где c – постоянная величина.

Вычисление двойного интеграла

1) *Простейший случай.*

Область B задана неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, т.е. она является прямоугольником $ABCD$ (рис. 5.28).

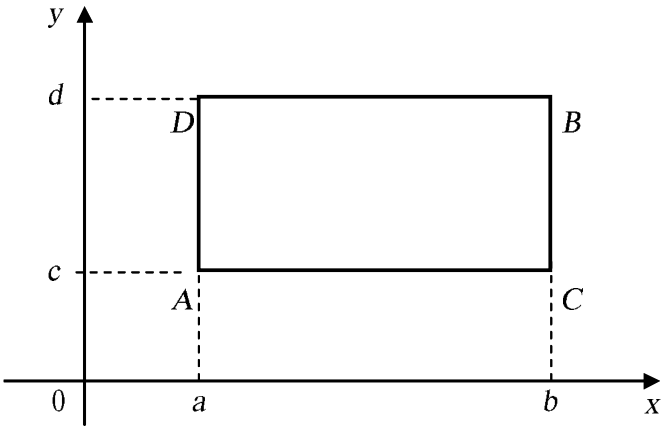


Рис. 5.28

В этом случае двойной интеграл вычисляется по одной из приводимых ниже формул [4, 32]:

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(xy)dx; \tag{5.22}$$

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(xy)dy. \tag{5.23}$$

В правых частях формул (5.22) и (5.23) стоят повторные интегралы.

При вычислении по формуле (5.22) сначала находится определенный интеграл $\int_a^b f(xy)dx$, причем y рассматривается как постоянная, но результат интегрирования рассматривается как функция от y. Второе интегрирование в пределах от c до d выполняется по аргументу y. При использовании формулы (5.23) порядок действий обратный.

Двойной интеграл $\iint\limits_{(ABCD)} f(xy)dxdy$ есть объем призматического тела с основанием $ABCD$. Заметим, что внешние знаки интеграла соответствуют внешним дифференциалам.

Рассмотрим конкретные примеры вычисления двойных интегралов.

Пример 5.45

$$\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dy\int_1^2 (x^2+y^2)dx = \int_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_0^1 dy\left[\frac{8}{3}+2y^2-\frac{1}{3}-y^2\right] = \frac{8}{3}\int_0^1 dy + 2\int_0^1 y^2dy - \frac{1}{3}\int_0^1 dy - \int_0^1 y^2dy =$$

$$= \frac{8}{3}y\Big|_0^1 + \frac{2y^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{3}y\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

Пример 5.46

$$\int_3^4\int_1^2 \frac{dydx}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\int_1^2 \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_3^4 dx\left[-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right] = \int_3^4 dx\left(\frac{1}{(x+2)(x+1)}\right) = \int_3^4 \frac{dx}{(x+2)(x+1)} = [\frac{1}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x+2)}{(x+2)\,(x+1)} \Rightarrow (1 = A\,x + A + B\,x + 2B, 0 = A +$$

$$+ B, 1 = A + 2B, B = 1, A = -1)\text{: получаем } = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1}] = -\int_3^4 \frac{d\,x}{x+2} + \int_3^4 \frac{d\,x}{x+1} =$$

$$= -\ln|x+2|\Big|_3^4 + \ln|x+1|\Big|_3^4 = -\ln 6 + \ln 5 + \ln 5 - \ln 4 = \ln\left(\frac{2\,5}{2\,4}\right).$$

2) *Общий случай.*

а) Если контур области B встречается с любой пересекающейся его вертикальной прямой не более чем в двух точках (т. N_1 и т. N_2 на рис. 5.29), то область B задается неравенствами $a \leq x \leq b$ и $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

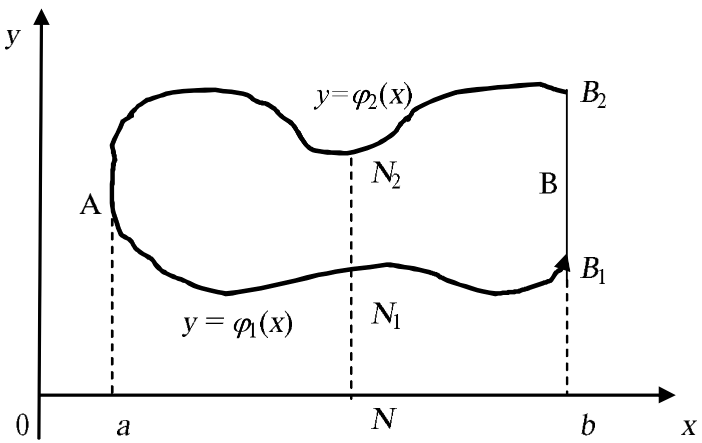


Рис. 5.29

a и b – крайние абсциссы области B,

$\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – функции, выражающие ординаты нижней и верхней граничных линий AN_1B_1 и AN_2B_2.

В этом случае двойной интеграл находится по формуле [4, 32]:

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(xy)dy \qquad (5.24)$$

б) Если контур области *B* встречается не более чем в двух точках с любой пересекающей его горизонтальной прямой, то аналогично случаю а) получаем (рис. 5.30)...

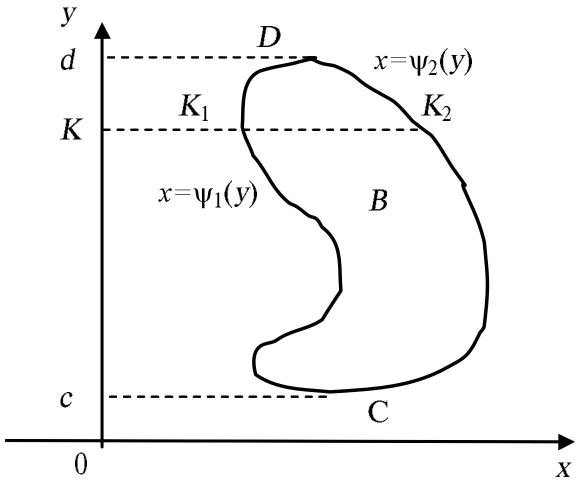


Рис. 5.30

$$\iint\limits_B f(xy)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(xy)dx\,. \qquad (5.25)$$

Если контур области В не подходит ни под случай а, ни под случай б, то ее разбивают на несколько частей так, чтобы к каждой части были применимы или формула (5.24), или (5.25).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.47

Вычислим интеграл $\iint\limits_B \left(2y^2+3x\right)dxdy$, если область B ограничена линиями $y = x^2$, $y^2 = x$ (рис. 5.31). Данная задача подходит под случаи а и б.

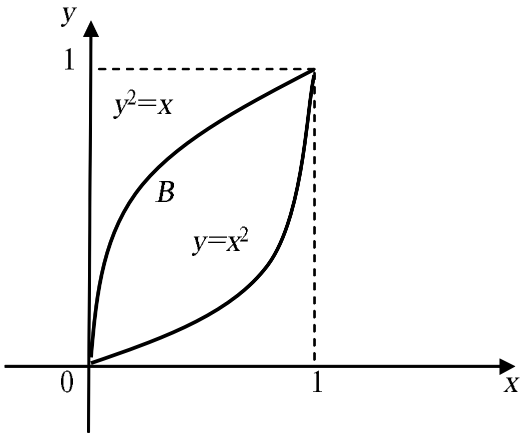


Рис. 5.31

Используем, например, формулу (5.24), (случай а). В данном случае $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. Поэтому получим

$$\iint\limits_B (2y^2+3x)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (2y^2+3x)dy = \int\limits_0^1 dx\left(\frac{2}{3}y^3+3xy\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\left[\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}x^6+3x^3\right)\right] = \int\limits_0^1\left(\frac{11}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^6-3x^3\right)dx =$$

$$= \frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1 - \frac{3x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{22}{15}-\frac{2}{21}-\frac{3}{4} \approx 1{,}47-0{,}09-0{,}75 = 0{,}63.$$

5.7. Некоторые сведения о тройном интеграле

Тройной интеграл является обобщением определенного интеграла на случай функции трех независимых аргументов.

К понятию тройного интеграла можно прийти, рассматривая, например, задачу о нахождении массы неоднородного тела.

Предположим, что имеется некоторое тело, которое занимает пространственную область G (рис. 5.32), а плотность распределения массы в этом теле есть непрерывная функция координат точек этого тела, т.е. $\rho = \rho(x, \ y, z)$ [4, 35].

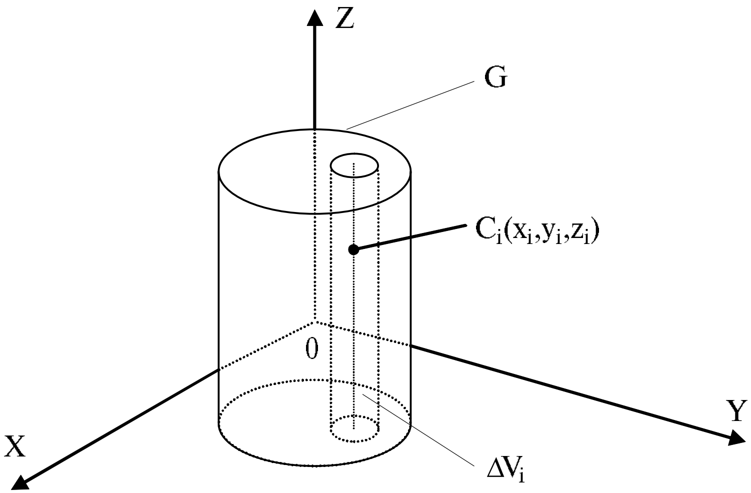


Рис. 5.32

Произвольно разобьем данное тело на n частей $g_1, g_2, \dots, g_n$, их объемы обозначим ΔV_1, V_2, .. , ΔV_n, выберем в этих частях точки $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$, ... , $C_n(x_n, y_n, z_n)$. Далее, предполагая, что в каждой из частей плотность постоянна и равна ее значению в точке $C_i(i = \overline{1,n})$, запишем приближенную формулу для массы всего тела:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \quad [4,\ 35]. \tag{5.26}$$

Предел суммы (5.26) в том случае, если n→∞ и максимальный диаметр каждой части стремится к нулю, и есть масса исходного тела, т.е.

$$M_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, g_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i\ . \tag{5.27}$$

Сумма (5.26) называется *n*-й интегральной суммой, а ее предел тройным интегралом от функции ρ(*x, y, z*) по области G.

К вычислению тройного интеграла приводит, кроме рассматриваемой нами, и ряд других задач. Теперь рассмотрим непрерывную в области G функцию *W* = *f*(*x, y, z*). Разобьем область *G* на *n* частей g_i с объемами $\Delta V_i (i = \overline{1,n})$, в каждой части выберем произвольную точку $C_i (i = \overline{1,n})$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \tag{5.28}$$

и найдем ее предел при стремлении n→∞ и максимального диаметра каждой части к нулю.

Этот предел и называют тройным интегралом от функции W = *f(x, y, z)* по области G и обозначают следующим образом:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, g_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = \iiint\limits_{G} f(x, y, z) dV, \tag{5.29}$$

здесь *f(x, y, z)* – подынтегральная функция, а dV – элемент объема.

Теперь сформулируем теорему о существовании тройного интеграла.

ТЕОРЕМА 5.5. [4, 33, 35]

Если функция *W* = *f*(*x, y, z*) непрерывна в ограниченной замкнутой области G, то существует предел интегральной суммы (5.28) при n→∞ и max diam g_i→0 и этот предел (тройной интеграл) не зависит от метода разбиения области G на части g_i и от выбора точек $C_i(x_i, y_i, z_i)$ в них.

Свойства тройных интегралов полностью совпадают со свойствами двойных интегралов, некоторые из которых перечислены нами в пункте 5.6. Более подробно с ними можно ознакомиться, например, в [4, 33, 35].

Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат

Если задан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, т.е. $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ и область G расположена в системе декартовых координат OXYZ, то, разбив область G плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получим частичные области, которые будут параллелепипедами с гранями, параллельными плоскостям OXY, OYZ, OXZ. Элемент объема в этом случае будет равен $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, и поэтому будем иметь $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

1) *Простейший случай.*

Если пространственная область G задана неравенствами $a \le x \le b$; $c \le y \le d$; $k \le z \le p$, т.е. представляет собой параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, то тройной интеграл находится по формуле [8, 35] $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_k^p dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y,z)dx$ (5.30) или по одной из аналогичных, так как аргументы *x, y, z* могут меняться местами, так же как в двойном интеграле (см. п.5.6.). Выражение, стоящее в правой части формулы (5.30), называется повторным интегралом. Заметим, что внешний интеграл соответствует внешнему дифференциалу, а внутренний внутреннему.

В формуле (5.30) сначала находится внутренний интеграл по переменной x при постоянных z и y, затем вычисляется средний интеграл по переменной y при постоянной z и, наконец, определяется внешний интеграл по переменной z.

Приведем конкретный пример применения формулы (5.30).

Пример 5.48. Найти интеграл

$$\int_0^1\int_0^4\int_0^6 (x^2+y^3+z^4)dxdydz = \int_0^1 dz\int_0^4 dy\int_0^6 (x^2+y^3+z^4)dx = \int_0^1 dz\int_0^4 dy\left[\frac{x^3}{3}+y^3x+z^4x\right]\Bigg|_0^6 =$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^4\left(\frac{216}{3}+6y^3+6z^4\right)dy = \int_0^1 dz\left[\frac{216}{3}y+\frac{6y^4}{4}+6z^4y\right]\Bigg|_0^4 = \int_0^1\left(\frac{216\cdot 4}{3}+\frac{3\cdot 256}{2}+24z^4\right)dz=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{864}{3}+384+24z^4\right)dz = \left[\frac{2016}{3}z+24\frac{z^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2016}{3}+\frac{24}{5} = 672+4{,}8 = 676{,}8.$$

2) *Общий случай*.

Предположим, что областью интегрирования G является тело, ограниченное снизу поверхностью $\psi_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $\psi_2(x, y)$, причем $\psi_1(x, y)\le\psi_2(x, y)$ и данные функции являются непрерывными в замкнутой области E, которая является проекцией тела на плоскость ОХУ (рис. 5.33).

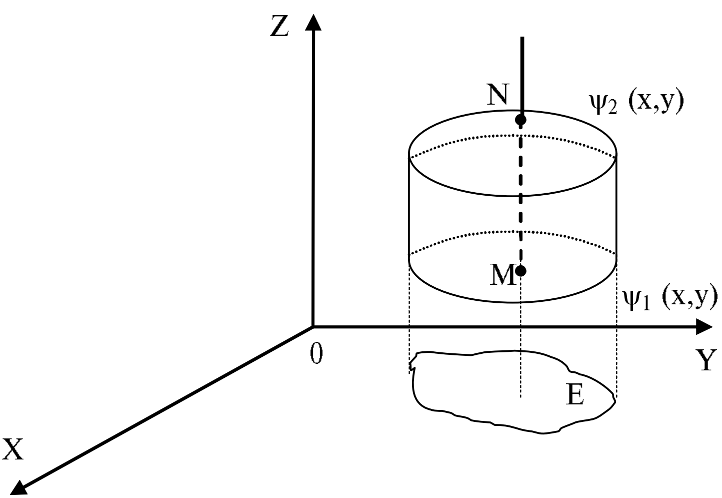


Рис. 5.33

Пусть область G будет правильной в направлении оси OZ, т.е. любая прямая, параллельная оси OZ, пересекает область не более, чем в двух точках. В этом случае для любой непрерывной в области G функции *f(x, y, z)* будет верна формула [4, 32, 8, 33, 35]

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_E dxdy \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{5.31}$$

Формула (5.31) сводит вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла. Сначала находится внутренний интеграл по переменной *z* при постоянных x и y. Нижней границей интегрирования будет аппликата точки *M* – точки входа прямой, параллельной оси OZ в область G, т.е. $\psi_1(x, y)$, а верхней – аппликата точки *N* – точки выхода прямой из области G, т.е. $\psi_2(x, y)$. Результат нахождения этого интеграла – функция двух аргументов *x* и *y*.

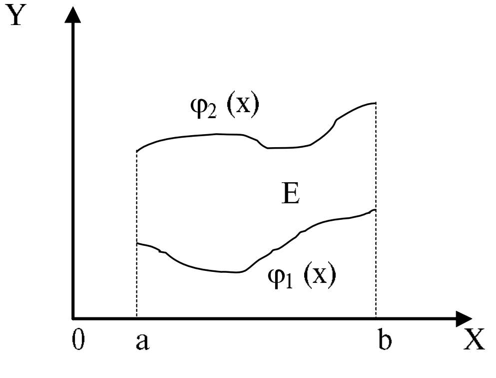


Рис. 5.34

В том случае, если область E ограничена линиями $x = a$, $x = b$ $(a<b)$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_2(x)>\varphi_1(x))$ и данные функции непрерывны на отрезке [*a*, *b*] (см. рис. 5.34), то тогда, переходя от двойного интеграла к повторному, получим формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ . \tag{5.32}$$

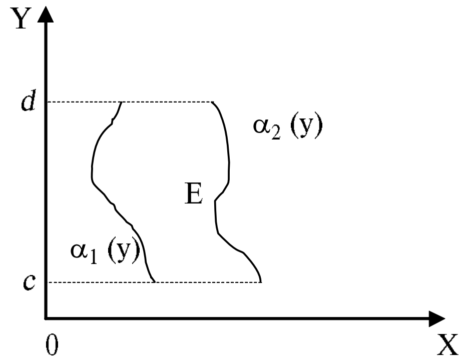


Рис. 5.35

В том случае, если область Е ограниченна линиями $y = c$, $y = d$ ($c<d$), $x = \alpha_1(y)$, $x = \alpha_2(y)$ ($\alpha_2(y) > \alpha_1(y)$) и данные функции непрерывны на отрезке $[c, d]$ (рис. 5.35), то тогда, переходя от двойного интеграла к повторному, получаем формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} dx \int\limits_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (5.33)$$

Если область G является сложной, то ее надо разбить на конечное число правильных областей, к которым можно применить формулы (5.32) и (5.33).

Аналогичные формулы можно получить и для случаев, когда область G будет правильной в направлении осей OX и OY.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.49. Найти тройной интеграл [4].

$\iiint\limits_G (3x+2y)dxdydz$, если область G ограничена координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостью $x+y+z = 1$ (рис. 5.36).

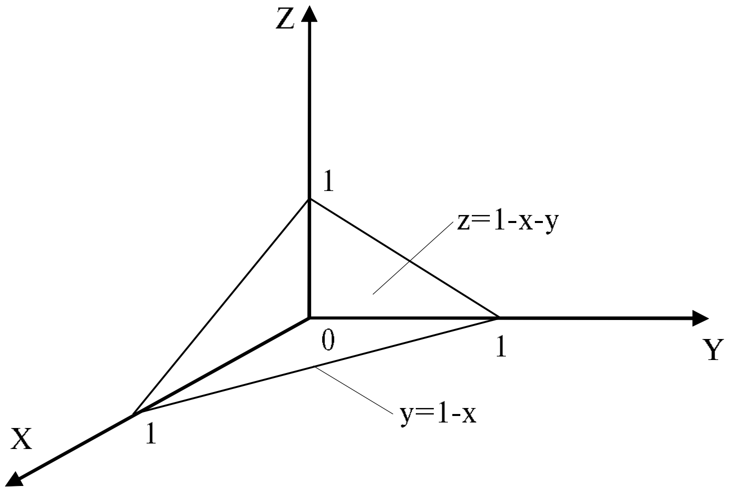


Рис. 5.36

В этом случае интегрирование по z совершается от z = 0 до z = 1 – x – y. Поэтому, обозначив проекцию области G на плоскость OXУ через E, получим по формуле (5.32)

$$\iint\limits_E dxdy \int_0^{1-x-y}(3x+2y)dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y}(3x+2y)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\left[(3x+2y)z\right]\Big|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\left[(3x+2y)(1-x-y)\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x}(3x-3x^2-5xy+2y-2y^2)dy = \int_0^1 dx\left(-\frac{2y^3}{3}-3x^2y-\frac{5xy^2}{2}+y^2+3xy\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{7x^3}{6}-2x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)dx = \left(\frac{7x^4}{24}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{24}.$$

Аналогичный результат можно получить, использовав формулу (5.33), т.е.

$$\iint_E dxdy \int_0^{1-x-y}(3x+2y)dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y}(3x+2y)dz =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\left[(3x+2y)z\right]\Big|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\left[(3x+2y)(1-x-y)\right] =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (3x-3x^2-5xy+2y-2y^2)dx =$$

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^2 y}{2} + 2xy - 2y^2 x\right)\Bigg|_0^{1-y} = \frac{5}{24}\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Методом непосредственного интегрирования найти интегралы:

1.1. $\int \frac{x^4+2x}{x}dx$; 1.2. $\int\left(3x^3+\frac{7}{x}\right)dx$;

1.3. $\int(8x^3+3\sin x)dx$; 1.4. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)}dx$.

2. Найти интегралы, использовав метод замены переменной:

2.1. $\int 3x(6x^2-7)^5 dx$; 2.2. $\int 5tgx dx$;

2.3. $\int\frac{3xdx}{\sqrt{x+5}}$; 2.4. $\int\frac{7dx}{x+\sqrt{x}}$.

3. Найти интегралы, использовав метод интегрирования по частям:

3.1. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 3.2. $\int 5 \arcsin x dx$;

3.3. $\int x^2 \sin x dx$; 3.4. $\int x^3 e^{-x} dx$.

4. Вычислить определенные интегралы:

4.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{tg} x dx$; 4.2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-5}$; 4.3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$;

4.4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x \cos^2 x dx$; 4.5. $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{3x} dx$;

4.6. $\int\limits_2^8 \frac{\ln x}{x^2} dx$; 4.7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$; 4.8. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x dx}{\sin^2 x}$.

5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\int\limits_0^{+\infty} (5x+1) dx$; 5.2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^5}$;

5.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 5.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$.

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0х криволинейной трапеции, ограниченной функцией $xy = 4$ и прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью $0x$.

7. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси 0у криволинейной трапеции, ограниченной функцией $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $y = \pm 2b$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y^2 = x^3$, $x = 4$.

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

10. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью $0x$, вращается вокруг оси $0x$. Найти объем тела вращения.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 10$ и осью $0y$.

12. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

12.1. $y = x^2$, $y^2 = x$; 12.2. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$; 12.3. $y^3 = x^2$, $y = 1$;

12.4. $y = x^2$, $y = 2x^2-1$.

13. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.

14. Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

15. Найти длину дуги кривой $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

16. Определите длину окружности $x^2 + y^2 = 25$.

17. Используя формулу прямоугольников, вычислить интеграл $\int\limits_1^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, приняв $n = 10$.

18. Используя формулу трапеции, вычислить интеграл $\int\limits_0^6 e^{-x^2}dx$, приняв $n = 10$.

19. Используя формулу Симпсона, вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$, приняв n = 10.

20. Вычислить двойные интегралы:

20.1. $\int_0^2 \int_y^{y\sqrt{3}} xydxdy$;

20.2. $\int_0^5 \int_{\frac{x}{3}}^{x} \frac{xdydx}{x^2 + y^2}$.

21. Вычислить интеграл $\iint_B (3x + y)dxdy$, если область интегрирования B ограничена линиями:

21.1. $x = 2, x = 3, y = -1, y = 5$;

21.2. $x = 0, x = 5, y = -2, y = 2$.

22. Найти неопределенные интегралы:

22.1. $\int \sin^7 x \cos^4 x \, dx$; 22.2. $\int (\cos^3 x / \sin^2 x) \cdot dx$;

22.3. $\int dx / (6 + 3 \sin x)$; 22.4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$;

22.5. $\int (\sqrt{x+9} / 2x) \cdot dx$; 22.6. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(x + \sqrt[3]{x})} dx$.

23. Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

23.1. $\int\limits_{0}^{2} 2 \ln x \, dx$; 23.2. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-4}$;

23.3. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$; 23.4. $\int\limits_{5}^{10} \frac{dx}{(x-5)}$.

24. Вычислить тройные интегралы:

24.1. $\int\limits_{1}^{7}\int\limits_{3}^{5}\int\limits_{0}^{6}(5x^2+\ln y+5^Z)dxdydz$;

24.2. $\int\limits_{0}^{5}\int\limits_{1}^{7}\int\limits_{3}^{8}(5xy-y^2z+7x^2z)dxdydz$.

25. Найти тройной интеграл

$\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+2)^3}$, если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью x + y + z = 1.

Вопросы для самопроверки

1) Какая функция называется первообразной?
2) В чем состоит суть метода интегрирования по частям?
3) В чем состоит суть метода замены переменной?
4) Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5) В чем состоит суть метода замены переменной в определенном интеграле?
6) Вывести формулу для объема тела вращения.
7) В каких случаях применяют приближенные методы интегрирования?
8) В чем заключается суть признаков сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами?

9) В чем состоит теорема существования двойного интеграла?
10) С помощью каких подстановок решаются интегралы вида $\int cos^n x \cdot sin^m x \cdot dx$?
11) Как «берутся» интегралы от иррациональных функций?
12) Дайте определение несобственного интеграла от разрывной функции на конечном участке интегрирования.
13) Как находится масса неоднородного тела по заданной плотности?
14) Сформулировать теорему существования тройного интеграла.
15) Как находятся тройные интегралы в декартовой системе координат?

6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

6.1. Основные понятия и определения

Дифференциальными называются уравнения, которые содержат искомые функции, их производные и (или) дифференциалы различных порядков, независимые переменные[20, 32, 43].

Теория дифференциальных уравнений появилась в конце XVIII века в результате решения некоторых задач механики и физики. Термин «дифференциальные уравнения» ввел Г. Лейбниц.

Дифференциальные уравнения делятся на дифференциальные уравнения в частных производных, неизвестная функция в которых зависит от двух и большего количества неизвестных, и на обыкновенные дифференциальные уравнения, неизвестная функция в которых зависит от одного аргумента.

В данном учебнике кратко рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения следующий [14, 32, 43]:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0\ .$$

Наивысший порядок производных, входящих в дифференциальное уравнение, называется его порядком.

Например, $2xy'' + 5xy' - 7y = 0$ – это дифференциальное уравнение второго порядка.

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти такую функцию, подстановка которой в это дифференциальное уравнение превращает его в тождество [23, 43].

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Геометрически они изображаются семейством интегральных кривых. Эту совокупность решений называют общим решением дифференциального уравнения и записывают так: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ [4, 32].

Решения, содержащие конкретные значения постоянных, называются частными решениями дифференциальных уравнений.

6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию, ее производную и (или) дифференциал [4, 43].

Его общий вид следующий:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

Если это уравнение можно разделить относительно производной (y'), то оно примет вид

$$y' = f(x, y).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$y = \varphi(x, C).$$

Для того чтобы получить конкретные частные решения, надо задать начальные условия, т.е. указать пару соответствующих друг другу значений аргумента (x_0) и функции (y_0). Обычно это записывается так: $y\big|_{x=x_0} = y_0$ [4, 32].

Задавая начальные условия, мы из семейства интегральных кривых выделяем какую-то конкретную кривую.

Вопрос о том, в каком случае можно утверждать, что частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию существует, а также является единственным, становится ясным из **теоремы**:

если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная по y $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $x0y$, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого дифференциального уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию при $x = x_0$ и $y = y_0$ [32].

Приведенная теорема была впервые сформулирована и доказана Коши. Поэтому задачу нахождения частного решения по заданным начальным условиям называют задачей Коши.

6.2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В общем случае они имеют вид $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$.

Разделим обе части этого дифференциального уравнения на произведение $f_2(y)f_3(x)$, предполагая, что оно не равно нулю:

$$\frac{f_1(x)f_2(y)dx}{f_2(y)f_3(x)} + \frac{f_3(x)f_4(y)dy}{f_2(y)f_3(x)} = 0 .$$

Далее получаем

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy .$$

В полученном дифференциальном уравнении при dx стоит только функция от x, а при dy стоит только функция от y, т.е. переменные разделены. Интегрируем левую и правую части последнего равенства и получаем

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = -\int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy + C .$$

Это и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения[4, 8].

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 6.1. Найдем частное решение дифференциального уравнения $xdx + ydy = 0$, если начальное условие таково: $y\Big|_{x=2}^{=10}$.

$$ydy = -xdx,\ \int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,\ y^2 + x^2 = 2C_1.$$

Поскольку постоянная может быть любой, то примем $2C_1 = C^2$. Тогда получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y^2 + x^2 = C^2$.

С геометрической точки зрения это решение представляет собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C (рис. 6.1).

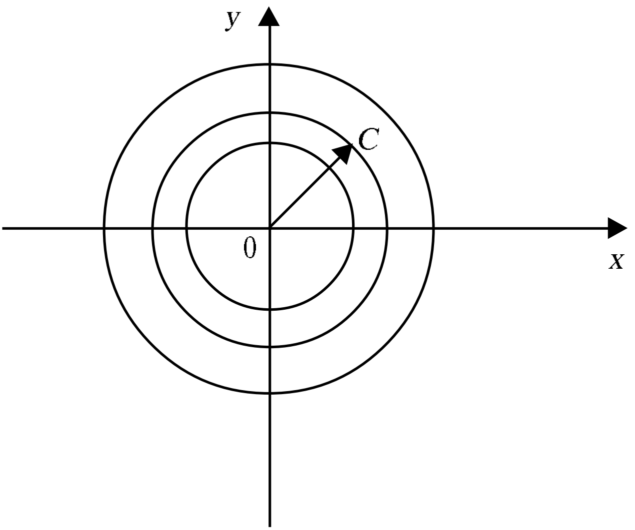


Рис. 6.1

Найдем теперь частное решение для заданных начальных условий, т.е. выделим из семейства окружностей одну. Получим $10^2 + 2^2 = C^2 => C^2 = 104$, $C = \sqrt{104}$.

Поэтому частное решение имеет вид $y^2 + x^2 = 104$.

Пример 6.2. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$1+y'+y+xy'=0\,.$$

Перепишем его в виде

$$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(1+y)+\frac{dy}{dx}(1+x)=0$$

Правую и левую часть домножим на dx:

$$(1+y)dx+dy(1+x)=0\,.$$

Правую и левую части делим на $(1+x)\neq 0$:

$$\frac{(1+y)dx}{1+x}+dy=0\,.$$

Правую и левую части делим на $(1+y)\neq 0$:

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{dy}{1+y}=0\,,$$

$$\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}\,.$$

Теперь интегрируем правую и левую части:

$$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x};\qquad \int\frac{d\left(1+y\right)}{1+y}=-\int\frac{d\,(1+x)}{1+x};$$

$$\ln\left|1+y\right|=-\ln\left|1+x\right|+\ln C\,;\qquad \ln\left|1+y\right|=\ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;$$

$$1+y=\frac{C}{1+x}\,.$$

Окончательно получаем $y = \dfrac{C}{1+x} - 1$.

Полученное выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.3. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$2xyy' = y^2 - 1.$$

Перепишем его в виде

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 1.$$

Домножим правую и левую часть на dx:

$$2xydy = (y^2 - 1)dx.$$

Разделим правую и левую части на $x \neq 0$:

$$2ydy = \frac{(y^2-1)dx}{x}.$$

Разделим правую и левую части на $y^2 - 1 \neq 0$:

$$\frac{2ydy}{y^2-1} = \frac{dx}{x}.$$

Теперь проинтегрируем правую и левую части полученного выражения:

$$\int\frac{2ydy}{y^2-1} = \int\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{d(y^2-1)}{y^2-1} = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y^2 - 1| = \ln|xC|, \quad y^2 - 1 = xC,$$

$$y^2 = xC + 1, \quad y = \sqrt{xC+1}.$$

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 6.4. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x^2+4)y'-2xy=0$, если задано следующее начальное условие: $y\Big|_{x=1}^{=5}$.

Перепишем исходное дифференциальное уравнение так:

$$(x^2+4)\frac{dy}{dx}-2xy=0.$$

Домножим правую и левую части на dx:

$$(x^2+4)dy-2xydx=0.$$

Разделим правую и левую части на x^2+4:

$$dy-\frac{2xydx}{x^2+4}=0.$$

Разделим правую и левую части на $y\neq 0$:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{x^2+4}=0,\quad \frac{dy}{y}=\frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Теперь интегрируем обе части полученного выражения:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2xdx}{x^2+4},\quad \ln|y|=\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4},$$

$$\ln|y|=\ln\left|x^2+4\right|+\ln C,\quad \ln|y|=\ln\left|C\left(x^2+4\right)\right|,$$

$$y=C(x^2+4).$$

Полученное уравнение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения. Геометрически оно представляет собой семейство парабол.

По заданным начальным условиям найдем частное решение, т.е. выделим конкретную параболу из полученного семейства.

$$5=C(1^2+4) => 5=5C => C=1.$$

Поэтому частное решение имеет вид $y = x^2 + 4$.

Рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, которые сводятся к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

6.2.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно аргументов x и y, если при любом k справедливо равенство [32]

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = 2xy - 3y^2$ является однородной функцией второго измерения, так как

$$2(kx)(ky) - 3(ky)^2 = k^2(2xy - y^2).$$

А функция $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $\dfrac{(kx)^2 - (ky)^2}{(kx)(ky)} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$,

т.е. $\quad f(kx, ky) = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.1}$$

называется однородным относительно x и y, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

По условию имеем $f(kx, ky) = f(x, y)$, положим $k = \dfrac{1}{x}$, тогда получим $f(x,y) = f(1,\dfrac{y}{x})$, т.е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов. Тогда дифференциальное уравнение (6.1) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{6.2}$$

Сделаем замену переменных, обозначим

$$u = \frac{y}{x}\text{, т.е. } y = ux,$$

тогда $\quad y' = u'x + u = \dfrac{du}{dx}x + u\,.$

После подстановки дифференциальное уравнение (6.2) примет вид:

$$\frac{du}{dx}x = f(1,u) - u, \tag{6.3}$$

т.е. пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Преобразуя (6.3.), получим

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}\,. \tag{6.4}$$

Интегрируя обе части (6.4.), получаем

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + C, \tag{6.5}$$

так как постоянная C может быть любой, можно записать (6.5) в

виде $\displaystyle\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$.

Интегрируя (6.5), получаем u, затем делаем обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получаем искомое общее решение однородного дифференциального уравнения. При наличии начальных условий можно найти и частное решение.

Пример 6.5. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$xy' - y = y(\ln y - \ln x), \quad \frac{dy}{dx}x - y = y\ln\left|\frac{y}{x}\right|.$$

Обе части последнего равенства разделим на x, тогда получим

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\ln\left|\frac{y}{x}\right|, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\ln\left|\frac{y}{x}\right|+1\right),$$

т.е. исходное дифференциальное уравнение является однородным.

Для его решения используем замену

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u.$$

После замены дифференциальное уравнение примет вид

$$u'x+u=u(\ln u+1), \quad \frac{du}{dx}x=u(\ln u+1)-u,$$

$$\frac{du}{dx}x=u\ln u, \quad \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{d\ln u}{\ln u}=\ln|x|+\ln C,$$

$$\ln(\ln u)=\ln|Cx|, \quad \ln u=Cx\Rightarrow u=e^{Cx}.$$

Делаем обратную замену $u=\frac{y}{x}$ и получаем $\frac{y}{x}=e^{Cx}$ или $y=xe^{Cx}$ – это и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Предположим, что заданы начальные условия $y\Big|_{x=2}^{=1}$. Тогда находим частное решение заданного дифференциального уравнения

$$1=2e^{2C} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{2C} \Rightarrow \ln\frac{1}{2}=\ln e^{2C} \Rightarrow \ln\frac{1}{2}=2C\ln e \Rightarrow C=\frac{\ln\frac{1}{2}}{2},$$

т.е. частное решение имеет вид

$$y = xe^{\frac{\ln\frac{1}{2}}{2}x}.$$

6.2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

К линейным дифференциальным уравнениям относятся дифференциальные уравнения вида

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{6.6}$$

т.е. линейное относительно неизвестной функции и ее производной. В (6.6) $p(x)$ и $q(x)$ – известные функции аргумента x [4, 32].

Дифференциальное уравнение (6.6) сводится к двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными с помощью следующего приема.

Представим функцию y в виде произведения двух функций $y = uv$. Одной из этих функций можно распорядиться произвольно, а вторая при этом должна быть определена в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло исходному дифференциальному уравнению. Свободой выбора одной из функций u и v надо воспользоваться для упрощения дифференциального уравнения, получающегося после замены.

Из равенства $y = uv$ получим $y' = u'v + v'u$. Это выражение подставим в (6.6) и получим:

$$u'v+v'u+p(x)uv=q(x);$$

$$u'v+u(v'+p(x)v)=q(x).$$

В качестве v выберем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + p(x)v = 0\,. \qquad (6.7)$$

Тогда для нахождения u получим дифференциальное уравнение

$$u'v = q(x)\,. \qquad (6.8)$$

Из дифференциального уравнения (6.7) находим v.

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx\,.$$

Интегрируем обе части последнего выражения:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx; \quad ln|v| = -\int p(x)dx;$$
$$v = exp(-\int p(x)dx). \qquad (6.9)$$

Под неопределенным интегралом в (6.9) понимается какая-то одна первообразная от функции $p(x)$, т.е. v есть вполне определенная функция от x.

Теперь, используя найденное значение функции v, из (6.8) находим функцию u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow du = q(x)\exp(-\int p(x)dx).$$

Интегрируем обе части последнего выражения и получаем

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,. \qquad (6.10)$$

В (6.10) для функции u берутся все первообразные.

Зная функции u и v, находим искомую функцию y.

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \qquad (6.11)$$

Выражение (6.11) является общим решением линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 6.6. Найдем общее решение линейного дифференциального уравнения $y'-3\frac{y}{x}=x^3$.

Используем подстановку $y=u\nu \Rightarrow y' = u'\nu + \nu'u$ и получим

$$u'\nu+\nu'u-\frac{3}{x}u\nu=x^3, \quad u'\nu+u(\nu'-\frac{3}{x}\nu)=x^3.$$

В качестве v выберем какое-то частное решение дифференциального уравнения $\nu'-\frac{3}{x}\nu=0$, тогда u можно найти из дифференциального уравнения $u'v=x^3$.

Находим функцию v

$$\frac{d\nu}{dx}-\frac{3}{x}\nu=0 \Rightarrow \frac{d\nu}{dx}=\frac{3}{x}\nu \Rightarrow \frac{d\nu}{\nu}=$$

$$=3\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{d\nu}{\nu} = 3\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\nu|=3\ln|x| \Rightarrow \nu = x^3.$$

Зная v, находим функцию u:

$$\frac{du}{dx}\nu=x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}x^3=x^3, \quad \frac{du}{dx}=1 \Rightarrow du=dx, \quad u=x+C.$$

Зная функции u и v, находим исходную функцию y:

$$y=u\nu=x^3(x+C). \tag{6.12}$$

Выражение (6.12) есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y'+ay=b, \tag{6.13}$$

где $a,b \in R$ [23].

Дифференциальное уравнение вида (6.13) решается разделением переменных, т.е.

$$\frac{dy}{dx}=b-ay \Rightarrow \frac{dy}{b-ay}=dx.$$

Интегрируем левую и правую части последнего выражения и получаем

$$\int\frac{dy}{b-ay}=\int dx \Rightarrow -\frac{1}{a}\int\frac{d(b-ay)}{b-ay}=x+C_1 \Rightarrow -\frac{1}{a}\ln|b-ay|=x+C_1,$$

$$\ln|b-ay|=-ax-aC_1, \quad b-ay=e^{-ax}e^{-aC_1},$$

$$-ay=e^{-ax}e^{-aC_1}-b, \quad y=-\frac{1}{a}e^{-ax}e^{-aC_1}+\frac{b}{a}.$$

Так как постоянная может быть любая, обозначим $C=-\frac{1}{a}e^{-aC_1}$ и получаем общее решение дифференциального уравнения (6.13)

$$y=Ce^{-ax}+\frac{b}{a}. \tag{6.14}$$

Пример 6.7. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y + 5 = 0.$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y-5 \Rightarrow \frac{dy}{(-2y-5)}=dx,$$

$$\int\frac{dy}{(-2y-5)}=\int dx, \quad -\frac{1}{2}\int\frac{d(-2y-5)}{(-2y-5)}=x+C,$$

$$-\frac{1}{2}\ln|-2y-5|=x+C, \quad \ln|-2y-5|=-2x-2C,$$

$$-2y-5=\exp(-2x)\exp(-2C), \quad -2y=\exp(-2x)\exp(-2C)+5,$$

$$y=-\frac{1}{2}\exp(-2x)\exp(-2C)-\frac{5}{2}.$$

6.2.4. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальное уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)y^n$, где $n\in R$, называется уравнением Бернулли. Заметим, что его очевидное решение $y = 0$. При $n = 0$ данное уравнение будет линейным, при $n = 1$ – с разделяющимися переменными, а при любых других n оно сводится к линейному с помощью подстановки $\omega = y^{1-n}$ [32, 33, 43].

Делим все элементы исходного уравнения на y^n и получаем

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}\frac{dy}{dx}=q(x).$$

Теперь делаем замену $\omega = y^{1-n}$, замечая, что $\frac{d\omega}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

Тогда получаем

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{d\omega}{dx}+p(x)\cdot\omega=q(x) \text{ или } \frac{d\omega}{dx}+(1-n)p(x)\cdot\omega=(1-n)q(x).$$

Последнее дифференциальное уравнение является линейным, и решение таких уравнений мы рассматривали. Находим общий интеграл полученного линейного уравнения и, подставляя вместо ω выражение y^{1-n}, находим общее решение уравнения Бернулли.

Теперь приведем конкретный пример. Найдем общее решение дифференциального уравнения $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 1/2$. Поэтому используем подстановку $\omega=y^{\frac{1}{2}}$. Делим все элементы исходного уравнения на $y^{\frac{1}{2}}$ и получаем $y^{-\frac{1}{2}}xy'-4y^{\frac{1}{2}}=x^2$. Разделим обе части этого уравнения на $x \neq 0$. Тогда получим $y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}}=x$. Теперь осуществляем подстановку $\omega=y^{\frac{1}{2}}$, замечая, что $\frac{d\omega}{dx}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$. После этого уравнение принимает вид $2\frac{d\omega}{dx}-\frac{4}{x}\omega = x$ или $\frac{d\omega}{dx}-\frac{2}{x}\omega = \frac{x}{2}$, т.е. мы получили линейное уравнение, из решения которого и найдем неизвестную функцию ω. Применим подстановку $\omega = u \cdot v$, тогда $\omega' = u'v + u \cdot v'$ и наше линейное уравнение примет вид:

$$\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2};$$

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v\right) = \frac{x}{2}.$$

В качестве v выберем какое-либо частное решение дифференциального уравнения $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = 0$, тогда u можно найти из дифференциального уравнения $\frac{du}{dx}v = \frac{x}{2}$.

Определяем функцию v:

$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow ln|v| = 2\,ln|x|$ или $v = x^2$.

Зная v, находим функцию u:

$$\frac{du}{dx}x^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2x} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}ln|x| + C .$$

Зная u и v, вычисляем ω:

$$\omega = u \cdot v = \left(ln\sqrt{x} + C\right)\cdot x^2.$$

Теперь находим искомую функцию:

$$y = \omega^2 = \left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2 \cdot x^4.$$

Это и есть общее решение исходного уравнения Бернулли. Его решением является и ноль, т.е. $y = 0$.

6.2.5. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Сначала поясним понятие полного дифференциала функции двух независимых аргументов.

Полный дифференциал функции двух независимых аргументов W(x, y) равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных [4, 32, 33], т.е.

$$dW = \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}dy .$$

Дифференциальное уравнение первого порядка P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции W(x, y), т.е. должно выполняться условие [4, 32, 43, 6]:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} .$$

Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде dW = 0, т.е. решение уравнения в полных дифференциалах имеет вид *W(x, y) = C*, где *C* = const. Следовательно, для нахождения решения уравнения в полных дифференциалах надо проинтегрировать его левую часть, т.е. найти интеграл от полного дифференциала. Мы приведем окончательные формулы, не касаясь их вывода, который выходит за рамки этой книги, а интересующихся им направляем, например, к [4].

Итак, общее решение исходного уравнения в полных дифференциалах можно записать в виде

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

или

$$W(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C .$$

Точку (x_0, y_0) обычно выбирают так, чтобы подынтегральные функции были более простыми. Можно получить общее решение уравнения в полных дифференциалах и другим методом. Имея в виду, что $\frac{\partial W}{\partial x} = P(x,y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y} = Q(x,y)$, получим $W(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$, где $C(y)$ – произвольная функция от y. Дифференцируем найденную функцию $W(x, y)$ по у и получаем $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + C'(y) = Q(x,y)$. Из последнего уравнения находим $C'(y)$ и, интегрируя, получаем $C(y)$.

Рассмотрим конкретный пример.

Найдем общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 2xy + 4)dx + (x^2 + y^2 - 4)dy = 0$. В данном случае $P(x,y) = x^2 + 2xy + 4$; $Q(x,y) = x^2 + y^2 - 4$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. В соответствии с приведенными формулами будем искать общее решение данного уравнения, приняв в качестве точки (x_0, y_0) начало координат ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$):

$$W(x,y) = \int_0^x (x^2 + 2xy + 4)dx + \int_0^y (y^2 - 4)dy = C$$

или

$$W(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + 4x + \frac{y^3}{3} - 4y = C .$$

Последнее выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Если левая часть дифференциального уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не является полным дифференциалом, то иногда удается подобрать такую функцию $\lambda(x, y)$, после умножения на которую всех элементов уравнения его левая часть становится полным дифференциалом. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения, а функция λ(x, y) носит название интегрирующего множителя заданного уравнения.

Для определения λ(x, y) умножаем на него обе части исходного уравнения и тогда получаем $\lambda P dx + \lambda Q dy = 0$.

Чтобы это уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial(\lambda \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda \cdot Q)}{\partial x}, \text{ т.е. } \lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

или

$$P \frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Отсюда видно, что для того, чтобы найти $\lambda(x, y)$ надо проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных, а это очень непростая задача, ее можно упростить, если предположить, что λ-функция только одного аргумента или x, или y.

Например, пусть λ = λ(x), тогда имеем $-Q \frac{d\lambda}{dx} = \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

или $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$ и окончательно получаем

$$\lambda(x) = \exp\left(\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}{Q} dx \right).$$

Заметим, что в этом выражении подынтегральная функция зависит от x.

Аналогично в случае, если λ = λ(y), получаем: $\lambda(y) = \exp\left(\int \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{P} dy\right)$, здесь подынтегральная функция зависит только от *y*.

Рассмотрим конкретный пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

Здесь $P(x, y) = 2y + xy^3$; $Q(x, y) = x + x^2y^2$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 3xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2xy^2$, т.е условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется. Попробуем найти интегрирующий множитель λ. Будем считать, что он зависит только от аргумента *x*, т.е. λ = λ(x). Тогда получаем

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2 + 3xy^2 - 1 - 2xy^2}{x + x^2y^2} dx = \frac{1 + xy^2}{x(1 + xy^2)} dx = \frac{1}{x} dx,$$

$$\ln|\lambda| = \ln|x| \text{ или } \lambda = x.$$

Умножаем обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель и получаем $(2xy + x^2y^3)dx + (x^2 + x^3y^2)dy = 0$. Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3x^2y^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2$, т.е $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, и мы получили дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Примем в качестве точки (x_0, y_0) начало координат, т.е. x_0 = 0; y_0 = 0. Тогда получим

$$W(x, y) = \int_0^x (2xy + x^2y^3)dx = C$$

или

$$W(x, y) = x^2y + \frac{x^3}{3}y^3 = C.$$

Это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения.

6.3. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальные уравнения второго порядка имеют следующий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{6.15}$$

или $$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}) = 0 .$$

Если (6.15) можно разрешить относительно второй производной, то оно примет вид [4, 32]

$$y'' = f(x, y, y') . \tag{6.16}$$

Простейшим случаем дифференциального уравнения второго порядка является дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f(x) , \tag{6.17}$$

которое решают двукратным интегрированием, т.е.

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \Rightarrow dy' = f(x)dx,$$

$$\int dy' = \int f(x)dx \Rightarrow y' = F_1(x) + C_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x) + C_1 \Rightarrow dy = (F_1(x) + C_1)dx,$$

$$\int dy = \int (F_1(x) + C_1)dx \Rightarrow y = F_2(x) + C_1 x + C_2 .$$

В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 .$$

Заметим, что дифференциальное уравнение вида (6.16) имеет бесконечное множество решений, которые задаются формулой $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ (6.18), содержащей две произвольные постоянные. Выражение вида (6.18) называется общим решением дифференциального уравнения (6.16).

Частное решение дифференциального уравнения (6.15) находится при помощи задания начальных условий

$$y\Big|_{x=x_0}^{=y_0} \text{ и } y'\Big|_{x=x_0}^{=y'_0}.$$

Найдем частные решения рассмотренного дифференциального уравнения $y'' = x^2$ при следующих начальных условиях:

$$y\Big|_{x=2}^{=2} \text{ и } y'\Big|_{x=2}^{=4}.$$

Тогда получаем следующую систему уравнений для нахождения постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{2^3}{3} + C_1 \\ 2 = \dfrac{2^4}{12} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{4}{3} \\ C_2 = -2 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{4}{3}x - 2.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки с координатами (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, задают еще угловой коэффициент касательной (y'_0) к этой кривой. Так как общее решение дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит бесконечное множество интегральных кривых, но одна из них имеет заданный угловой коэффициент (y'_0).

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения (6.16) $f(x, y, y')$ является функцией трех независимых аргументов, так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Тогда сформулируем **теорему существования и единственности решения** дифференциального уравнения вида (6.16).

Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то дифференциальное уравнение вида (6.16) имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$. Если кроме этого непрерывны и частные производные

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'},$$

то это решение единственное [4, 32].

Как и для дифференциального уравнения первого порядка, задача отыскания частного решения по начальным условиям называется задачей Коши.

Для дифференциальных уравнений второго порядка выделение частного решения можно проводить путем задания так называемых краевых условий. В этом случае задаются значения функции y в двух различных точках

$$y\Big|_{x=x_1}^{=y_1} \text{ и } y\Big|_{x=x_2}^{=y_2}.$$

В качестве примера найдем частное решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$ при следующих краевых условиях:

$$y\Big|_{x=1}^{=0} \text{ и } y\Big|_{x=2}^{=1}.$$

Подставляя эти значения в общее решение исходного уравнения, получим систему уравнений для нахождения неизвестных постоянных C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{12} + C_1 + C_2 \\ 1 = \dfrac{4}{3} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{4}; \\ C_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}.$$

В рассмотренном случае получилось одно частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям, но так бывает не всегда. Дифференциальное уравнение вида (6.16) может не иметь решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям или иметь бесконечное множество таких решений. В этом состоит коренное отличие задания краевых условий от задания начальных условий [4, 8, 32].

6.3.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К ним относятся дифференциальные уравнения вида

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad (6.19)$$

где $a \in R$, $b \in R$.

Приведем без доказательства теоремы, помогающие находить общее решение дифференциального уравнения вида (6.19).

ТЕОРЕМА 6.1. Если функция $y = y_1$ – это решение дифференциального уравнения (6.19), то и функция $y = Cy_1$ ($C = \text{const}$) также решение дифференциального уравнения (6.19).

ТЕОРЕМА 6.2. Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$ есть решения дифференциального уравнения (6.19), то и функция $y = y_1 + y_2$ также решение дифференциального уравнения (6.19).

При этом y_1 и y_2 называются частными решениями (6.19).

Два частных решения дифференциального уравнения (6.19) называют линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный коэффициент C, т.е. $y_2 \neq Cy_1$.

ТЕОРЕМА 6.3. Если y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения (6.19), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \qquad (6.20)$$

где (C_1 и C_2 – постоянные).

Для того чтобы найти общее решение (6.19), имеющее вид (6.20), надо найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Эйлер предложил искать частное решение (6.19) вида $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$, и k необходимо подобрать [4, 32].

Чтобы найти значение k, при котором $y = e^{kx}$ будет решением дифференциального уравнения (6.19), подставим $y = e^{kx}$ и ее производные первого и второго порядка в это дифференциальное уравнение. Получим

$$y' = ke^{kx}; y'' = k^2 e^{kx},$$

$$k^2 e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}\left(k^2 + ak + b\right) = 0,$$

$$e^{kx} \neq 0 \text{ для } \forall x,$$

значит,

$$k^2 + ak + b = 0 \cdot \qquad (6.21)$$

Уравнение (6.21) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (6.19). Решая его, можно найти неизвестные постоянные k_1 и k_2.

При решении (6.21) возможны три случая:

1. $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, общее решение (6.19) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} . \qquad (6.22)$$

2. $D = 0$, $k_1 = k_2 = k$. В этом случае $y_1 = e^{kx}$ и можно доказать (см., например, [4, 32]), что $y_2 = xe^{kx}$, а общее решение (6.19) имеет вид

$$y = \bullet_1 e^{kx} + x \bullet_2 e^{kx} . \qquad (6.23)$$

3. $D < 0$, k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные корни вида

$$k_1 = c + ip; k_2 = c - ip \text{, где } i = \sqrt{-1} \cdot$$

Частные решения дифференциального уравнения (6.19) в этом случае имеет вид

$$y_1 = e^{(c+ip)x}; y_2 = e^{(c-ip)x} .$$

Как правило, чтобы не иметь мнимых величин в показателе степени, эти решения преобразуют, используя формулы Эйлера.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x\,.$$

Для рассматриваемого случая получаем:

$$y_1 = e^{(c+ip)x} = e^{cx}e^{ipx} = e^{cx}(\cos\, px + i \sin\, px);$$

$$y_2 = e^{(c-ip)x} = e^{cx}e^{-ipx} = e^{cx}(\cos\, px - i \sin\, px).$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (6.19) имеет вид

$$y = C_I e^{cx}(\cos px + i \sin px) + C_{II} e^{cx}(\cos px - i \sin px) =$$

$$= C_I e^{cx} \cos px + i C_I e^{cx} \sin px + C_{II} e^{cx} \cos px - i C_{II} e^{cx} \sin px =$$

$$= e^{cx} \cos px (C_I + C_{II}) + i e^{cx} \sin px (C_I - C_{II}).$$

Введем следующие обозначения:

$$C_1 = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} \text{ и } C_2 = i(C_{\mathrm{I}} - C_{\mathrm{II}})$$

и окончательно получим

$$y = e^{cx}(C_1 \cos px + \mathrm{C}_2 \sin px)\,. \qquad (6.24)$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

Пример 6.8

Найдем частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

при следующих начальных условиях $y\big|_{x=0}^{=8}$; $y'\big|_{x=0}^{=0}$.

Сначала будем искать общее решение исходного дифференциального уравнения.

$$k^2 e^{kx} - 2ke^{kx} - 3e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}\left(k^2 - 2k - 3\right) = 0,$$

$$e^{kx} \neq 0; \left(k^2 - 2k - 3\right) = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1(-3) = 16,$$

$$k_1 = \frac{2+4}{2} = 3; k_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Теперь находим частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Вначале находим

$$y' = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x},$$

затем получаем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 8 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 0 = 3C_1 e^0 - C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = C_1 + C_2 \\ 0 = 3C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 6 \end{cases}.$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y = 2e^{3x} + 6e^{-x}.$$

Пример 6.9

Найдем общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Перепишем исходное дифференциальное уравнение в виде:

$$k^2 e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = 0,$$
$$e^{kx}\left(k^2 - 6k + 9\right) = 0,$$
$$e^{kx} \neq 0; \left(k^2 - 6k + 9\right) = 0,$$
$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0,$$
$$k_1 = k_2 = k = \frac{6}{2} = 3.$$

Частными решениями данного уравнения являются

$$y_1 = e^{kx} = e^{3x} \text{ и } y_2 = xe^{kx} = xe^{3x}.$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + xC_2 e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 6.10

Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+13y=0.$$

$$k^2e^{kx}-4ke^{kx}+13e^{kx}=0;$$
$$e^{kx}\left(k^2-4k+13\right)=0;$$
$$e^{kx}\neq 0;\left(k^2-4k+13\right)=0;$$
$$D=16-4\cdot 1\cdot 13=-36;$$
$$k_1=\frac{4+i6}{2};\quad k_2=\frac{4-i6}{2}.$$
$$k_1=2+3i;k_2=2-3i\ .$$

Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\,.$$

6.3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Общий вид таких дифференциальных уравнений следующий:

$$y''+ay'+by=f(x). \tag{6.25}$$

Общее решение такого дифференциального уравнения получается суммированием общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y''+ay'+by=0$ и какого-то частного решения дифференциального уравнения (6.25) [4, 32].

Так как нахождение общего решения дифференциального уравнения вида (6.19) мы рассмотрели раньше, то остается найти любое частное решение дифференциального уравнения (6.25).

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

1) Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.25) имеет вид $f(x)=P_1(x)e^{nx}$ (6.26), где $P_1(x)$ – мно-

гочлен. Тогда дифференциальное уравнение (6.25) имеет частное решение вида $y = x^m P_2(x)e^{nx}$, где $P_2(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_1(x)$, причем если число n не является корнем характеристического уравнения, то $m = 0$, а если является, то m – кратность этого корня. Взяв решение в указанной форме, находим неизвестные коэффициенты многочлена $P_2(x)$ по способу неопределенных коэффициентов. Правило сохраняется и в том случае, когда $n = 0$, т.е. в правой части стоит только многочлен $P_1(x)$ (в этом случае надо проверить, не является ли ноль корнем характеристического уравнения, в частном случае многочлен $P_1(x)$ может быть нулевой степени, т.е. постоянной величиной).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.11

Найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' - 4y = 4 + x.$$

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1(-4) = 25$$

$$k_1 = \frac{-3+5}{2} = 1; k_2 = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Значит, общее решение однородного дифференциального уравнения будет $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Правая часть рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид $P_1(x)e^{nx}$, причем $n = 0$, а $P_1(x) = 4 + x$.

Так как ноль не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 3k - 4 = 0$, то частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = Ax + B$, где A и B – постоянные, которые нужно найти. Находим $y'_2 = A$; $y''_2 = 0$ и подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем

$$3A-4Ax-4B=4+x;$$

$$\begin{cases}-4A=1\\3A-4B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\-\dfrac{3}{4}-4=4B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\B=-\dfrac{19}{8}\end{cases}$$

Поэтому частным решением заданного дифференциального уравнения будет функция

$$y_2=-\frac{1}{4}x-\frac{19}{8}.$$

А его общим решением – функция

$$y=y_1+y_2=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{4}x-\frac{19}{8}.$$

2) Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (6.25) имеет вид $f(x)=a\cdot\cos nx+b\sin nx.$ (6.27)

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то дифференциальное уравнение (6.25) имеет частное решение вида

$$y=A\cos nx+B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ есть корни характеристического уравнения, то частное решение (6.25) имеет вид

$$y=x(A\cos nx+B\sin nx).$$

В тех случаях, когда или $a=0$, или $b=0$, решение нужно искать в указанном виде.

Пример 6.12. В качестве примера найдем общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=3\cos 2x$.

Сначала находим общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\left(k^2+4k+13\right)=0;$$

$$D=-36;$$

$$k_1=-2+3i;\ k_2=-2-3i.$$

А его общее решение таково:

$$y_1 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\,.$$

Теперь находим частное решение исходного дифференциального уравнения. Его правая часть имеет вид (6.27), причем $a = 3$; $b = 0$; $n = 2$. Числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение заданного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B – неизвестные коэффициенты, которые надо найти.

Дважды дифференцируем y_2 и результаты подставляем в исходное дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$y'_2 = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$y''_2 = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 3\cos 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x + 13A\cos 2x +$$
$$+13B\sin 2x = 3\cos 2x.$$

Теперь приравниваем друг к другу одноименные коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ и получаем

$$\begin{cases} -4A + 8B + 13A = 3 \\ -4B - 8A + 13B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + 8B = 3 \\ 9B = 8A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A + \dfrac{64}{9}A = 3 \\ B = \dfrac{8}{9}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{27}{145} \\ B = \dfrac{24}{145} \end{cases}.$$

И частное решение исходного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y_2 = \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x\,.$$

Поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y = y_1 + y_2 = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{27}{145}\cos 2x + \frac{24}{145}\sin 2x.$$

Теперь приведем метод Лагранжа (способ вариации произвольных постоянных), который позволяет находить общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

где $f(x)$ – любая функция [4].

Чтобы применить описываемый метод, надо знать общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{6.28}$$

где a и b могут быть как числами, так и некоторыми функциями от x. Будем считать, что a и b – числа.

Предположим, что дифференциальное уравнение (6.28), соответствующее дифференциальному уравнению (6.25), имеет общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Будем искать общее решение дифференциального уравнения (6.25) в виде

$$y = k_1(x) y_1 + k_2(x) y_2. \tag{6.29}$$

Здесь $k_1(x)$ и $k_2(x)$ – неизвестные функции, которые надо определить, а y_1 и y_2 – известные частные решения дифференциального уравнения (6.28).

Продифференцируем (6.29) и получим

$$y' = k'_1(x) y_1 + k_1(x) y'_1 + k'_2(x) y_2 + k_2(x) y'_2.$$

Так как надо найти две функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$, то одним из соотношений между ними можно распорядиться произвольно.

Поэтому положим

$$k'_1(x) y_1 + k'_2(x) y_2 = 0. \tag{6.30}$$

Тогда $y' = k_1(x) y'_1 + k_2(x) y'_2$.

Последнее выражение продифференцируем второй раз и получим

$$y'' = k'_1(x) y'_1 + k_1(x) y''_1 + k'_2(x) y'_2 + k_2(x) y''_2.$$

Теперь подставим в левую часть дифференциального уравнения (6.25) y, y', y'' и получим:

$$k'_1(x)y'_1 + k_1(x)y''_1 + k'_2(x)y'_2 + k_2(x)y''_2 + ak_1(x)y'_1 + ak_2(x)y'_2 + bk_1(x)y_1 +$$
$$+ bk_2(x)y_2 = k'_1(x)y'_1 + k'_2(x)y'_2 + k_1(x)(y''_1 + ay'_1 + by_1) +$$
$$+ k_2(x)(y''_2 + ay'_2 + by_2) = f(x);$$
$$y''_1 + ay'_1 + by_1 = 0; y''_2 + ay'_2 + by_2 = 0.$$

так как y_1 и y_2 есть частные решения дифференциального уравнения (6.28).

Поэтому для того чтобы функция (6.29) была общим решением (6.25), необходимо выполнения двух условий:

$$\begin{cases} k'_1(x)y_1 + k'_2(x)y_2 = 0; \\ k'_1(x)y'_1 + k'_2(x)y'_2 = f(x). \end{cases} \qquad (6.31)$$

Для того чтобы система (6.31) имела решения, необходимо, чтобы ее определитель не был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому из системы (6.31) сначала находим $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$, а затем интегрированием определяем сами функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$. Если при интегрировании $k'_1(x)$ и $k'_2(x)$ ввести произвольные постоянные, то сразу получим общее решение дифференциального уравнения (6.25).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.13

$$y'' + 2y = \operatorname{ctg}\sqrt{2}x.$$

Исходному дифференциальному уравнению соответствует однородное дифференциальное уравнение $y'' + 2y = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$k^2 + 2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm i\sqrt{2}; \quad y_1 = \cos\sqrt{2}x; y_2 = \sin\sqrt{2}x.$$

Поэтому запишем общее решение исходного дифференциального уравнения в виде

$y = k_1 \cos\sqrt{2}x + k_2 \sin\sqrt{2}x$, где k_1 и k_2 – функции от x.

А затем составим систему уравнений для нахождения k'_1 и k'_2

$$\begin{cases} k'_1 \cos\sqrt{2}x + k'_2 \sin\sqrt{2}x = 0; \\ -\sqrt{2}k'_1 \sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}k'_2 \cos\sqrt{2}x = \operatorname{ctg}\sqrt{2}x. \end{cases}$$

Решаем систему и получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & \sin\sqrt{2}x \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2}\cos^2\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin^2\sqrt{2}x = \sqrt{2};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{2}x \\ \operatorname{ctg}\sqrt{2}x & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg}\sqrt{2}x \cdot \sin\sqrt{2}x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}x & 0 \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x & \operatorname{ctg}\sqrt{2}x \end{vmatrix} = \cos\sqrt{2}x \cdot \operatorname{ctg}\sqrt{2}x;$$

$$k'_1 = \frac{-\operatorname{ctg}\sqrt{2}x \cdot \sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}};\ k'_2 = \frac{\cos\sqrt{2}x \cdot \operatorname{ctg}\sqrt{2}x}{\sqrt{2}};$$

$$k'_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x; \quad k'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x}.$$

Интегрируем k_1', k_2' и находим

$$k_1 = -\int\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x dx = \left[\sqrt{2}x = t, x = \frac{t}{\sqrt{2}}; dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int\cos t dt = -\frac{1}{2}\sin t + C_1 = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}x + C_1.;$$

здесь C_1 произвольная постоянная.

$$k_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos^2\sqrt{2}x}{\sin\sqrt{2}x}dx=\left[\sqrt{2}x=t, x=\frac{t}{\sqrt{2}}; dx=\frac{dt}{\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{\sin t}-\int\sin t dt\right)=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{\sin t}+\cos t\right)=$$

$$=\left[u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}; dt=\frac{2du}{1+u^2}; \sin t=\frac{2u}{1+u^2}\right]=\frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{u}+\cos t\right)=\frac{1}{2}\left(\ln|u|+\cos t\right)+$$

$$+C_2=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\cos t\right)+C_2=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}x}{2}\right|+\cos\sqrt{2}x\right)+C_2.$$

Здесь C_2 – произвольная постоянная.

Теперь общее решение исходного дифференциального уравнения мы запишем в виде

$$y=\left(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}x+C_1\right)\cdot\cos\sqrt{2}x+$$
$$+\left[\left(\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\sqrt{2}x}{2}\right|+\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}x\right)+C_2\right]\cdot\sin\sqrt{2}x.$$

6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений

При решении некоторых задач физики, механики, экономики часто надо находить функции $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, ..., $y_n=y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих искомые функции y_1, y_2, ..., y_n, независимую переменную и производные и (или) дифференциалы искомых функций [32]. В настоящем учебнике кратко рассмотрим системы дифференциальных уравнений первого порядка. Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n);\\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\dots,\ y_n);\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2,\dots,\ y_n).\end{aligned}\right\} \qquad (6.32)$$

Система вида (6.32), правые части которой не содержат производных искомых функций, называется нормальной. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений — значит найти функции $y_1, y_2, \dots, y_n$, удовлетворяющие (6.32) и начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0, \qquad (6.33)$$

если они заданы.

Интегрирование системы (6.32) проводят следующим образом.

Дифференцируем по x первое уравнение системы (6.32) и получаем

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя в этом уравнении производные $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями из (6.32), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \Phi_2(x, y_1, \dots, y_n).$$

Дифференцируем его по x и, поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \Phi_3(x, y_1, \dots, y_n).$$

Продолжая далее так же, придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Поэтому исходная система дифференциальных уравнений (6.32) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (6.34)$$

Из первых (n–1) уравнений системы (6.34) получаем $y_2, y_3, \ldots, y_n$, выразив их через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (6.35)$$

Подставляем выражения для $y_2, y_3, \ldots, y_n$ из (6.35) в последнее уравнение системы (6.34) и получаем дифференциальное уравнение n-го порядка для определения y_1, т.е.

$$\frac{dy_1^n}{dx^n} = F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \qquad (6.36)$$

Решаем уравнение (6.36) и находим y_1

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (6.37)$$

Далее дифференцируем уравнение (6.37) $(n-1)$ раз и находим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$, как функции от $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Затем подставляем их в (6.35) и находим искомые функции $y_2, y_3, ..., y_n$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_3 &= \psi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned}\right\} \qquad (6.38)$$

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (6.33), надо найти из (6.37) и (6.38) соответствующие постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ [32].

Теперь приведем конкретный пример решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 6.14. Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t \end{aligned}\right\}. \qquad (6.39)$$

Из второго уравнения системы находим

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - y$$

и, подставив в первое уравнение этой системы, получим

$$4\cos t - 4y - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t$$

или $$\frac{dy}{dt} = 4\cos t - 4y + 3x - \sin t\,. \qquad (6.40)$$

Продифференцируем по t уравнение (6.40)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} - \sin t - \cos t\,.$$

Подставим в это уравнение вместо $\frac{dy}{dt}$ его значение из (6.40), а вместо $\frac{dx}{dt}$ его значение из (6.39):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3\cos t - 3y - 16\cos t + 16y - 12x + 4\sin t - 4\sin t - \cos t.$$

После преобразований получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -14\cos t + 13y - 12x. \qquad (6.41)$$

Найдем x из дифференциального уравнения (6.40):

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} - 4\cos t + 4y + \sin t\right)$$

и подставим его значение в (6.41). Тогда получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\cos t - 4\sin t\ . \qquad (6.42)$$

Уравнение (6.42) – это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, которые рассматривались в пункте 6.3.2. Решив (6.42), найдем неизвестную функцию y.

Вначале найдем общее решение дифференциального уравнения без правой части, т.е. $y''+4y'+3y = 0$.

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 3 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = -3\ .$$

А общее решение следующее:

$$y_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t},$$

где C_1 и C_2 постоянные.

Теперь найдем любое частное решение дифференциального уравнения (6.42)

$$f(x) = 3\cos t - 4\sin t\ .$$

Так как числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение (6.42) мы ищем в виде

$$y_2 = A\cos t + B\sin t,$$

где A и B неизвестные постоянные, которые необходимо определить. Находим y_2' и y_2'':

$$y_2' = -A\sin t + B\cos t;$$

$$y_2'' = -A\cos t - B\sin t.$$

Поставляем y_2; y_2'; y_2'' в (6.42) и получаем:

$$-A\cos t - B\sin t - 4A\sin t + 4B\cos t + 3A\cos t + 3B\sin t = 2\cos t - 4\sin t$$

или

$$2A\cos t + 4B\cos t + 2B\sin t - 4A\sin t = 2\cos t - 4\sin t,$$

или

$$\cos t(2A + 4B) + \sin t(2B - 4A) = 2\cos t - 4\sin t,$$

$$2A + 4B = 2 \to A = 1,$$

$$2B - 4A = -4 \to B = 0.$$

Следовательно,

$$y_2 = \cos t.$$

А общее решение дифференциального уравнения (6.42) имеет вид

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} + \cos t. \tag{6.43}$$

Теперь определим неизвестную функцию x по формуле

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt} - 4\cos t + 4y + \sin t\right). \tag{6.44}$$

Дифференцируя по t уравнение (6.43), находим

$$\frac{dy}{dt} = -C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t} - \sin t.$$

Подставляя в (6.44) найденные значения dy/dt и значение y из формулы (6.43), получаем искомую функцию x, т.е.

$$x = \frac{1}{3}\left(-C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t} - \sin t - 4\cos t + \sin t + 4C_1e^{-t} + 4C_2e^{-3t} + 4\cos t\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}\right) = C_1e^{-t} + \frac{1}{3}C_2e^{-3t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1.1 $(x+5)dy-(y+10)dx=0$;

1.2. $(3xy^2+2x)dx+(2y+x^2y)dy=0$;

1.3. $y'=\dfrac{10}{x^2-4}$,

1.4. $2\sin xdx+\dfrac{3dy}{\sqrt{2y}}=0$,

1.5. $2y\cos xdx-\sin^5 xdy=0$.

2. Предположим, что темп изменения производительности труда характеризуется функцией $f(t)$. Найти функцию производительности труда $y=y(t)$, если

2.1. $f(t)=\dfrac{5t}{\sqrt{t^2+4}}$; $y\Big|_{t=0}^{=0}$;

2.2. $f(t)=\dfrac{\ln t}{6t}$; $y\Big|_{t=0}^{=1}$.

3. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений

3.1. $(y-x)dx+(y+x)dy$;

3.2. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$;

3.3. $(6y+4x)dx+(3y+8x)dy=0$;

3.4. $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\dfrac{y}{x}(xdy-ydx)$.

4. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений и частные решения там, где заданы начальные условия.

4.1. $y'+\frac{2x}{1-x^2}y=1$;

4.2. $y'-7ytgx=\frac{5x}{\cos x}$;

4.3. $2xy'-3x^2y=\frac{e^{x^2}}{x+\frac{1}{x}}, y\Big|_{x=0}^{=1}$;

4.4. $2xy'+\frac{1}{\ln x}y=\frac{x^2+7}{\ln x}, y\Big|_{x=e}^{=e^2}$.

5. Найти общие решения дифференциальных уравнений.

5.1. $y'-2y+7=0$;

5.2. $3y'-6y+9=0$.

6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

6.1. $y''=5x$;

6.2. $y''=\cos x$;

6.3. $y''=18x^2+2$;

6.4. $y''=10x^3+2x$.

7. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений:

7.1. $y''=\frac{1}{x^2}-1$ при $y\Big|_{x=1}^{=-1}; y'\Big|_{x=1}^{=1}$

7.2. $y''=\sin x$ при $y\Big|_{x=0}^{=0}; y'\Big|_{x=0}^{=1}$

8. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

8.1. $y''-5y'+6=0$;

8.2. $y''-3y'+16=0$;

8.3. $y''-22y'+12y=0;$

8.4. $6y''-10y'-7=0.$

9. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

9.1. $y''+4y'+3=0$, если $y\Big|_{x=0}^{=-1}$; $y'\Big|_{x=0}^{=4}$

9.2. $y''-10y'+25=0$, если $y\Big|_{x=1}^{=2}$; $y'\Big|_{x=1}^{=6}$

10. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

10.1. $y''-2y'+2y=3e^{4x};$

10.2. $y''-y'-2y=e^{7x};$

10.3. $y''+3y'+2y=4x^2-3x-16;$

10.4. $y''+4y'+4y=3\sin 3x+2\cos 3x;$

10.5. $y''-12y'+36y=3\sin x;$

10.6. $y''-4y'-5y=\cos 3x.$

11. Решить системы дифференциальных уравнений

11.1. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=4y+3x; \\ \dfrac{dy}{dt}=3y+2x. \end{cases}$$

11.2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y+2z; \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+y+2z; \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y+2z. \end{cases}$$

12. Найти общее решение уравнений Бернулли.

12.1. $y'+\dfrac{2y}{x}=-xy^2$

12.2. $y'+4xy=x^3y^2$

13. Проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах.

13.1. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$

13.2. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

14. Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида λ = λ(x) или λ = λ(y).

14.1. $(x+y^2)dx-2xydy=0$

14.2. $(y+xy^2)dx-xdy=0$

Вопросы для самопроверки

1) Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2) Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка?
3) Что такое частное решение и в чем суть начальных условий для дифференциального уравнения первого порядка?
4) Дать формулировку теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
5) Что является геометрической иллюстрацией общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка?
6) Что такое дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными и каким методом его можно решить?
7) Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются однородными, каков метод их решения?
8) Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются линейными, каков метод их решения?
9) Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются обыкновенными? Каков их общий вид?
10) Какие функции называются однородными функциями n-го измерения?
11) Как найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами?

12) Чем отличается задание краевых условий от задания начальных условий в дифференциальных уравнениях второго порядка?
13) Какие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами называются однородными?
14) Как найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
15) Как найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью?
16) Что называется системой дифференциальных уравнений и ее решением?
17) Как система дифференциальных уравнений сводится к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.
18) Какое уравнение называется уравнением Бернулли и каков метод его решения?
19) Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением в полных дифференциалах?
20) Каковы методы решения уравнений в полных дифференциалах?
21) Что такое интегрирующий множитель и каков метод его нахождения?

7. РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Выражение $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$, (7.1)

где $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ – некоторые числа, называют числовым рядом, $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ – это члены ряда.

Для любого числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ можно построить последовательность его частичных сумм :

$S_1 = w_1$;

$S_2 = w_1 + w_2$;

$S_3 = w_1 + w_2 + w_3$;

....

$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда и говорят, что этот ряд сходится. Если этот предел не существует, то говорят, что ряд (7.1) расходится и суммы не имеет [5,16, 32].

Приведем конкретные примеры.

Пример 7.1

Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Пример 7.2

Геометрическая прогрессия

$$w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots \quad (w \neq 0),$$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Если $|q|<1$, то $w + wq + wq^2 + \ldots + wq^{n-1} + \ldots = \frac{w}{1-q}$.

Пример 7.3

Обобщенно гармонический ряд $\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \le 1$.

Пример 7.4

$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e - 1$, т.е. данный ряд сходится и его сумма равна (e–1).

При исследовании рядов одним из важнейших вопросов является вопрос о том, сходится изучаемый ряд или расходится. Далее рассмотрим достаточные признаки, на основании которых можно решить этот вопрос. Сейчас же приведем необходимый признак сходимости рядов, то есть условие, при невыполнении которого ряды расходятся.

ТЕОРЕМА 7.1. Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n [4, 32].

Следствие. Если n-й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится. Данный признак не является достаточным, т.е. он может выполняться, а ряд будет расходиться. Например, гармонический ряд из примера (7.1) расходится, несмотря на то что $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Основные свойства сходящихся числовых рядов [16].

1) Сходимость числового ряда не нарушится, если приписать или отбросить конечное число его членов.

2) Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число k, то его сходимость не нарушится.

3) Два сходящихся ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S_1$; $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = S_2$ можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$ будет сходится, а его сумма будет равна $S_1 \pm S_2$.

Признаки сходимости положительных числовых рядов [4, 16, 32].

Признаки сравнения

Если все члены рядов

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7.2}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{7.3}$$

неотрицательны и $u_n \le v_n$, $n = 1,2,3,\ldots$, то из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2). Из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

Если все члены рядов (7.2) и (7.3) положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = C, \quad 0 < C < +\infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 7.5

Ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n} + \ldots$ расходится, так как гармонический ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ расходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n} : \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 7.6

Ряд $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$ расходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$, который расходится.

Признак Коши

Если все члены ряда $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ не отрицательны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n} = b$, то при $b < 1$ этот ряд сходится, а при $b > 1$ расходится (при $b = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.7

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots.$$

Применяем к данному ряду признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{w_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

и видим, что он сходится.

Признак Даламбера

Если все члены ряда $w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots$ положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=l$, то при $l<1$ этот ряд сходится, а при $l>1$ этот ряд расходится (при $l=1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда).

Пример 7.8. Исследуем сходимость ряда

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Применяем к данному ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}:\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

и видим, что он сходится.

Интегральный признак сходимости Коши

Если $W_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $f(n)$ – значение при x = n некоторой функции $f(x)$, непрерывной, положительной и не возрастающей при $x \geq 1$, то ряд $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ сходится или расходится в зависимости от того, существует или нет конечный $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(x)dx$.

Пример 7.9

Исследуем сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots .$$

Применяем к данному ряду интегральный признак Коши, положив $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1$$

и видим, что он сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов

Числовой ряд

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \tag{7.4}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots \tag{7.5}$$

Абсолютно сходящийся ряд всегда сходится. Если ряд (7.4) сходится, а ряд (7.5) расходится, то говорят, что ряд (7.4) сходится условно [16, 32].

Теперь приведем **ТЕОРЕМУ 7.2** Лейбница, которая применяется для знакочередующихся рядов: ряд

$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \ldots + (-1)^{n-1} w_n + \ldots ,$$

где все $w_n > 0$, сходится, если все его члены таковы, что $w_1 > w_2 > w_3 > \ldots > w_n > \ldots$ и $\lim\limits_{b\to\infty} w_n = 0$, а его сумма положительна и не превосходит первого члена [4, 16, 32].

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1) Если ряд сходится абсолютно, то новый ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

2) Если ряд сходится условно, то какое бы число S ни взять, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы сумма преобразованного ряда была равна именно S.

3) Если ряд сходится условно, то можно так переставить члены в этом ряде, что новый ряд будет расходиться.

7.2. Функциональные ряды

Выражение вида

$$W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x), \tag{7.6}$$

где $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$ – некоторые функции, определенные на одном и том же множестве D, называется функциональным рядом [4, 16].

Множество $E \subseteq D$ всех значений x, при которых функциональный ряд (7.6) сходится (как числовой ряд), называется областью сходимости этого ряда. Функция $S(x)$, $x \in E$ является суммой ряда (7.6), если

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)\text{, где } S_n(x)=W_1(x)+W_2(x)+\ldots+W_n(x).$$

Если функция $S(x)$, $x\in P(P\subseteq E)$ является суммой ряда (7.6), то говорят, что этот ряд сходится на множестве P к функции $S(x)$.

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве P к функции $S(x)$, если для $\forall$ числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что при $n\geq N$ сразу для всех $x\in P$ выполняется неравенство [16]

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon .$$

Если функциональный ряд сходится на множестве P, то на этом множестве сходимость не обязана быть равномерной, но на некотором подмножестве множества P сходимость может оказаться равномерной.

Приведем признак равномерной сходимости Вейер-Штрасса.

Если члены функционального ряда

$$W_1(x)+W_2(x)+\ldots+W_n(x)+\ldots$$

удовлетворяют на множестве P неравенствам

$$|W_n(x)|\leq W_n \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

где W_n – члены сходящегося числового ряда

$$W_1+W_2+\ldots+W_n+\ldots ,$$

то функциональный ряд сходится на множестве P равномерно [16].

Пример 7.10

Ряд $\dfrac{\sin x}{1^2}+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin nx}{n^2}+\ldots$ сходится на $P=(-\infty;+\infty)$ равномерно, так как всегда $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Если функции $W_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, а составленный из них ряд $W_1(x)+W_2(x)+\ldots+W_n(x)+\ldots$ сходится равномерно на этом отрезке к функции $S(x)$, то:

1) Функция $S(x)$ на $[a,b]$ непрерывна.

2) $\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b W_1(x)dx + \int\limits_a^b W_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b W_n(x)dx + \ldots$

Пример 7.11

Ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$

на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сходится равномерно к функции $\frac{1}{1-x}$, поэтому

$$\int\limits_0^{1/2} 1 \cdot dx + \int\limits_0^{1/2} x dx + \ldots + \int\limits_0^{1/2} x^{n-1} dx + \ldots = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1-x}$$

или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots = \ln 2$.

Если функции $W_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке:

1) ряд $W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x) + \ldots$

сходится к функции $S(x)$;

2) ряд $W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots$ сходится равномерно, то $S(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную и

$$S'(x) = W_1'(x) + W_2'(x) + \ldots + W_n'(x) + \ldots$$ [16, 30, 32].

7.3. Степенные ряды

Функциональный ряд.

$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \alpha_n(x - x_0)^n + \ldots == \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x - x_0)^n \quad (7.7)$$

где $\alpha_n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и x_0 – некоторые числа, называют степенным рядом с центром в точке x_0.

Возможны следующие три случая:

1) степенной ряд (7.7) сходится только при $x = x_0$ (везде расходящийся ряд);

2) степенной ряд (7.7) сходится (причем абсолютно) при $\forall$ значениях x (всюду сходящийся ряд);

3) существует число $R > 0$ такое, что ряд (7.7) сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$ (радиус сходимости ряда). $R = 0$ для всюду расходящегося ряда и $R = \infty$ для всюду сходящегося ряда.

Интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда (7.7). При этом на концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 7.12

Найдем область сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{x^m}{n \cdot 2^n} + \ldots .$$

Положим $W_n = \dfrac{|x|^n}{n \cdot 2^n}$; $W_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$.

Тогда по признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}|x|^n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2},$$

следовательно, данный степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 2$ и расходится при $|x| > 2$, а радиус его сходимости равен 2($R = 2$).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости: при $x = 2$ ряд $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится, а при $x = -2$

ряд $-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^m\frac{1}{n}+\ldots$ сходится. Поэтому область сходимости исходного степенного ряда $E=[-2;\,2)$.

Основные свойства степенных рядов [4, 16]

1) Если степенной ряд не является всюду расходящимся, то его сумма непрерывна в каждой точке области сходимости.

2) Степенной ряд внутри его области сходимости можно интегрировать почленно, так что если

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+\alpha_n(x-x_0)^n+\ldots=S(x),\ x\in E,$$

то

$$\alpha_0(x-x_0)+\alpha_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\alpha_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+\ldots+$$
$$+\alpha_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+\ldots=\int_0^x S(x)dx.$$

3) Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно, так что если

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+\alpha_n(x-x_0)^n+\ldots=S(x),$$
$$x\in(x_0-R,\,x_0+R),\ R>0,$$

то

$$\alpha_1+2\alpha_2(x-x_0)+3\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+n\alpha_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots=S'(x),$$
$$x\in(x_0-R,x_0+R).$$

Это свойство сохраняет силу и для конца интервала сходимости, если только последний ряд на этом конце сходится.

4) Если степенной ряд

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\ldots+\alpha_n(x-x_0)^n+\ldots$$

не является всюду расходящимся, то его сумма имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков. При этом

$$\alpha_0 = S(x_0); \quad \alpha_1 = S'(x_0),\ \alpha_2 = \frac{S''(x_0)}{2!}, \ldots, \alpha_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots .$$

Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков при $x = x_0$, то степенной ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{7.8}$$

называют рядом Тейлора для функции $f(x)$. При $x_0 = 0$ получают частный случай ряда Тейлора

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \tag{7.9}$$

который часто называют рядом Маклорена [4, 16, 32].

Для того чтобы ряд (7.8) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, где $R_n(x)$ – остаточный член ряда Тейлора.

Приведем теорему, которая позволяет устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при неограниченном возрастании n или нет, т.е. разлагается ли функция $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

ТЕОРЕМА 7.3. Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет $(n+1)$-ю производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этого интервала имеет вид

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\eta)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где η заключено между x_0 и x [4] (см. также главу 4).

Приведем разложения в степенной ряд некоторых функций:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sin x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos x, \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=arctgx, \quad |x|\le 1;$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\ln(x+1), \quad x\in(-1;1].$$

7.4. Понятие о рядах Фурье

Сначала напомним, что функция *f(x)*, которая определена при всех значениях x, называется периодической, если есть такое число $T\neq 0$, что при любом значении x выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ [35].

В этом случае *T* называется периодом функции.

Приведем некоторые свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение, частное периодических функций с периодом *T* есть периодические функции периода *T*.

2. Если функция *f(x)* имеет период T, то функция f(bx) имеет период T/b.

3. Если *f(x)* есть периодическая функция с периодом *T*, то равны два любые интеграла от этой функции, взятые по промежутку длины T (предполагается, что эти интегралы существуют), т.е.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_c^{c+T} f(x)dx.$$

Дадим также понятия о гармонических колебаниях.

Простое гармоническое колебание описывается функцией $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha_0)$, где y – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия; A – амплитуда колебания; $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота; α_o – начальная фаза [4, 33].

Функция $A\sin(\omega t + \alpha_0)$ и ее график называется простой гармоникой. Ее можно представить в виде $A \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \alpha_o + \cos \omega t \cdot \sin \alpha_o)$.

То есть простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями *sin* ωt и *cos* ωt.

Колебания, которые получаются в результате сложения нескольких или бесконечно многих простых гармонических колебаний, тоже будут описываться функциями вида $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$.

С помощью так называемого тригонометрического ряда практически любую периодическую функцию можно разложить на простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида [4, 32, 33]

$$a_o/2 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (7.10)$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ – коэффициенты тригонометрического ряда.

Если ряд (7.10) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом 2π, так как такой период имеют функции *sin nx* и *cos nx*.

Поэтому $f(x) = f(x+2\pi)$.

Предположим, что функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. является суммой этого ряда и записывается следующим образом:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (7.11)$$

Если коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{7.12}$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \tag{7.13}$$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \tag{7.14}$$

то они называются коэффициентами Фурье, а тригонометрический ряд (7.10) с такими коэффициентами называется рядом Фурье функции $f(x)$ (более подробно см. [4, 32, 33, 35]).

Теперь сформулируем теорему, которая дает достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье [4, 32, 33, 35].

ТЕОРЕМА 7.4 (теорема Дирихле).

Пусть функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, или этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов таким образом, что на каждом из них функция будет монотонна;

2) $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на данном отрезке и при этом:

а) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией, т.е. $S(x)=f(x)$,

б) в каждой точке разрыва (x_o) функции $f(x)$ сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0+0)}{2},$$

т.е. она равна среднему арифметическому от правого и левого пределов в этой точке,

в) на концах отрезка в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi+0)}{2} .$$

Теореме Дирихле удовлетворяют большинство функций, встречающихся в математике. Есть функции, которые не удовлетворяют условиям Дирихле, но разлагаются в ряд Фурье, так как теорема 7.4 дает только достаточное условие разложимости.

Приведем конкретный пример разложения функции в ряд Фурье.

Пример 7.13 [32]

Пусть периодическая функция *f(x)* с периодом 2π определена следующим образом: $f(x) = x,\ x\in(-\pi;\ \pi]$.

Данная функция является кусочно-монотонной и ограниченной, т.е. она может быть разложена в ряд Фурье. Применяем формулы (7.12)–(7.14) и находим:

$$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 1/\pi \cdot x^2/2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \left(\begin{array}{c} u = x;\ du = dx \\ dv = \cos nx\,dx \\ v = 1/n\ \sin nx \end{array}\right) = 1/\pi\ \Big(x\cdot(\sin nx)/n \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- 1/n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\Big) = 0$$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \left(\begin{array}{c} u = x;\ du = dx \\ dv = \sin nx\,dx \\ v = -1/n\cos nx \end{array}\right) = 1/\pi\ \Big(\frac{-x\cdot\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ 1/n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx\Big) = (-1)^{n+1}\ 2/n$$

Поэтому получаем ряд

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} + \ldots \right).$$

Данное равенство имеет место во всех точках, за исключением точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда есть среднее арифметическое от ее пределов слева и справа, т.е. нулю.

Задачи для самостоятельного решения

1. С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^{2n}+2}$; 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1}$;

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$; 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n-1}$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

2.1. $1+\frac{2!}{5}+\frac{3!}{5^2}+\frac{4!}{5^3}+\ldots$;

2.2. $\frac{1}{(\ln 2)^3}+\frac{1}{2!(\ln 3)^3}+\frac{1}{3!(\ln 4)^3}+\ldots$

3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши:

3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$; 3.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n^2}$.

4. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$; 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{5n^4+2}$.

5. Исследовать абсолютную или условную сходимость рядов:

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^3}$; 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$;

5.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n}$; 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)\cdot 4^n}$.

6. Найти области сходимости степенных рядов:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{3n}$; 6.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$;

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; 6.4. $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π.

7.1. $f(x) = |x|$, где $x \in (-\pi, \pi)$.

7.2. $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ где } x \in (-\pi; 0] \\ 4x, \text{ где } x \in (0; \pi) \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1) Что называется числовым рядом?
2) Что такое сумма ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов.
3) В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
4) В чем суть признаков Даламбера и Коши?
5) В чем суть интегрального признака Коши?
6) Какой ряд называется знакочередующимся?
7) В чем сущность признака Лейбница?
8) Что называется абсолютной и условной сходимостью ряда?
9) Какой ряд называется функциональным?
10) Что называется областью сходимости функционального ряда?
11) Какой ряд называется степенным?
12) Каковы основные свойства степенных рядов?
13) Какой ряд называется тригонометрическим?
14) Сформулируйте достаточный признак разложения функции в ряд Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

2. *Асеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Э.* Дискретная математика. Ростов н/Д: Феникс, 2003.

3. *Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В.* Математика. М.: ЮНИТИ, 2006.

4. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1969.

5. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика: В 3 т. М.: Дрофа, 2003.

6. *Булдык Г.М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. Минск: Юнипресс, 2002.

7. *Верещагин Н.К., Шень А.* Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999.

8. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: ДЖАНГАР-Большая медведица, 2001.

9. *Гончарова Г.А., Мочалин А.А.* Элементы дискретной математики. М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2003.

10. *Грес П.В.* Математика для гуманитариев. М.: ЮРАЙТ, 2000.

11. *Грешилов А.А.* Прикладные задачи математического программирования. М.: МГТУ, 1990.

12. *Гусак А.А.* Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. Минск: ТетраСистемс, 1998.

13. *Гусак А.А.* Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. Минск: ТетраСистемс, 2003.

14. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель-Аст, 2006.

15. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1989.

16. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. М.: Высшая школа, 1987.

17. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1969.

18. *Идельсон А.В., Блюмкина И.А.* Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. М.: ИНФРА-М, 2000.

19. *Клиот-Дашинский М.И.* Алгебра матриц и векторов. СПб.: Лань, 2001.

20. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

21. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика. М.: Наука, 1990.

22. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: ГИФМЛ, 1962.

23. *Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л.* Математика. М.: Высшая школа, 1991.

24. *Лунеев В.В.* Юридическая статистика. М.: Юристъ, 1999.

25. *Максимов Ю.Д. и др.* Курс высшей математики для гуманитарных специальностей. СПб.: Специальная литература, 1999.

26. Математика для бакалавров технических специальностей. Т. 1. Общие разделы / Под общ. ред. Ю.Д. Максимова. СПб.: Специальная литература, 1999.

27. *Марков Л.Н., Размыслович Г.П.* Высшая математика. Ч. 1. Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. Минск: Амалфея, 1999.

28. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.

29. *Мордкович А.Г., Солодовников А.С.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1990.

30. *Немыцкий В.В. и др.* Курс математического анализа: В 2 т. М.: ГИТТЛ, 1957.

31. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.

32. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. М.: Наука, 1964.

33. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2005.

34. *Подольский В.А., Суходский А.М.* Сборник задач по высшей математике. М.: Высшая школа, 1974.

35. Курс высшей математики / Под ред. П.И. Романовского. М.: Высшая школа, 1964.

36. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.

37. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

38. Общая алгебра: Т. 1 / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1990.

39. *Смолич Б.А.* Уравнительные вычисления. М.: Недра, 1989.

40. *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Элементы дискретной математики. М.: ИНФРА-М, 2002.

41. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.

42. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.

43. *Эльсгольц Л.Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2002.

Учебное издание

Балдин Константин Васильевич
Башлыков Виктор Николаевич
Рукосуев Андрей Вадимович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник

Подписано в печать 24.09.2008. Формат 60×88/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 15,8.
Тираж 2000 экз. Заказ . Изд. 1786.

ООО «Флинта», 117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17-Б, комн. 324.
Тел./факс: (495)334-82-65; тел. (495)336-03-11.
E-mail: flinta@mail.ru; WebSite: www.flinta.ru

НОУ ВПО «МПСИ», 115191, Москва, 4-й Рощинский пр., 9а.
Тел.: (495)234-43-15, (495)958-19-00 (доб. 111).
E-mail: publish@col.ru

К.В. Балдин
В.Н. Башлыков
А.В. Рукосуев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

ISBN 978-5-9765-0299-4
9785976502994