А. О. ГЕЛЬФОНД

ВЫЧЕТЫ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2
Г-32
УДК 517.53

Александр Осипович Гельфонд
ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
М., 1966 г., 112 стр.
Редактор *Г. М. Мордасова*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *М. Л. Липелис*

Сдано в набор 21/III 1966 г. Подписано к печати 2/VIII 1966 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 3,5. Условн. печ. л. 5,88. Уч.-изд. л. 5,90.
Т-11050. Тираж 15 000 экз. Цена книги 35 к. Заказ № 375.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-2-3
4-Б 3-5-66

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы становятся сильным и глубоко проникающим орудием исследования в самых различных разделах естествознания и других наук. Среди классических методов, с успехом использующихся в математике и ее приложениях, далеко не последнее место занимает метод вычетов, основанный на свойствах вычетов аналитических функций одного комплексного переменного. Вычисление интегралов, получение глубоких, функциональных тождеств, разложение функций в ряды, в том числе и интерполяционные, получение асимптотик, решение дифференциальных уравнений некоторых классов — вот неполный перечень возможных приложений теории вычетов. Для упрощения пользования предлагаемой книжкой мы даем краткие сведения об особых точках аналитических функций, о целых и мероморфных функциях, интеграле Фурье, преобразованиях Меллина и Лапласа.

Материал, содержащийся в предлагаемой читателю книжке, требует знания начал теории функций комплексного переменного, включая понятие интеграла и теорему Коши о том, что интеграл, взятый по любому замкнутому спрямляемому контуру, целиком лежащему в односвязной области регулярности аналитической функции, равен нулю. Доказательство этого классического предложения можно найти, например, в книгах [1] — [3]. Если область D регулярности $f(z)$ не односвязна, но функция в ней однозначна, другими словами, если выходя из любой точки z области D, двигаясь по любому замкнутому контуру, принадлежащему области D, и возвращаясь в z, мы приходим к тому же значению $f(z)$, что и начальное, то теорема Коши сохраняется. Именно, интеграл по любому замкнутому спрямляемому контуру C, лежащему в D, внутри которого $f(z)$ регулярна, равен нулю. При этом контур C можно считать составленным из нескольких простых замкнутых кривых. Например, пусть область D трехсвязна и состоит из круга $|z|<R$, из внутренности которого выброшены три замкнутые области $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, $\overline{D}_3$. Пусть замкнутые спрямляемые контуры C_1, C_2, C_3 содержат внутри себя области $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, $\overline{D}_3$, не пересекаются между собой и лежат внутри спрямляемого замкнутого контура C^*, содержащегося в области D.

Контуром C будем считать совокупность контуров C^*, C_1, C_2, C_3, причем контур C^* будет проходить против стрелки часов, а контуры C_1, C_2, C_3 по часовой стрелке, чтобы область D'' с границей C при обходе этого контура в положительном направлении лежала бы все время слева. Для этого контура C теорема Коши будет справедлива. Доказывается это утверждение весьма просто. Мы соединяем контуры C_1, C_2, C_3 не пересекающимися жордановыми перемычками с контуром C^* и рассматриваем границу $\overline{C}$ уже односвязной области D''', состоящую из контуров C^*, C_1, C_2, C_3 и трех перемычек. Интеграл по контуру $\overline{C}$ равен нулю по теореме Коши для односвязной области, а интегралы по перемычкам, которые берутся по два раза каждый в противоположных направлениях, взаимно уничтожаются в силу однозначности функции $f(z)$ в области D. Последнее утверждение верно, так как с какой бы стороны и по какому бы пути мы не подходили к точке z на перемычке, мы придем к одному и тому же значению функции $f(z)$. Естественно, что в этом рассуждении круг $|z|<R$ может быть заменен любой областью с жордановой границей и трехсвязность может быть заменена многосвязностью. Положительное направление обхода границы области строго определяется во всех случаях как направление обхода, при котором область остается слева. Противоположное направление обхода называется отрицательным.

Прямым следствием теоремы Коши для многосвязной области является теорема.

Теорема 1. *Если C — спрямляемая граница конечной области D, функция $f(z)$ регулярна и однозначна в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением, может быть, точек $z_1, \ldots, z_n$, $C_1, \ldots, C_n$ — окружности с центрами в этих точках, содержащие каждая только одну из точек $z_1, \ldots, z_n$, состоящие из внутренних точек D и не пересекающиеся между собой, то имеет место равенство*

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz. \qquad (1)$$

Действительно, область D с n выколотыми точками будет $(n+1)$-связной областью, и интеграл по контуру $\bar{C}$, состоящему из контуров C, $C_1, \ldots, C_n$, будет равен нулю. Так как контуры $C_1, \ldots, C_n$ обходятся в направлении, противоположном обходу контура C, то мы и получаем равенство (1), где все интегралы взяты по своим контурам в положительном направлении.

В частности, из теоремы Коши также следует, что если $f(z)$ регулярна и однозначна в какой-то окрестности точки z_0, то интеграл по любому замкнутому спрямляемому контуру, принадлежащему этой окрестности и содержащему точку z_0 внутри, не зависит от этого контура. Действительно, если мы имеем два таких контура, то внутри них обязательно находится достаточно малый круг с центром в точке z_0, откуда по теореме 1 и следует равенство соответствующих интегралов.

Как известно, требование аналитичности $f(z)$ на контуре для справедливости теоремы Коши может быть заменено требованием аналитичности в ограниченной области D, границей которой является наш спрямляемый контур C, и непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}=D+C$. Это следует из возможности замены контура C контуром C', $C' \in D$, настолько близким к C, что разность между интегралами по C и по C' будет сколь угодно мала в силу непрерывности интегрируемой функции в $\overline{D}$. В качестве C' можно взять конечнозвенную ломаную линию. Возможность такой замены контуров обычно участвует в доказательстве теоремы Коши для односвязной области. См., например, [7].

§ 1. ВЫЧЕТЫ

п° 1. Понятие вычета

Если функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки z_0, другими словами, существует круг радиуса $\rho>0$ с центром в точке z_0, внутри которого функция регулярна, за исключением, может быть, только самой точки z_0 и, кроме того, она однозначна в этой окрестности, то можно определить вычет функции $f(z)$ в этой точке. Напомним, что мы считаем $f(z)$ однозначной в точке z_0, если обход этой точки по любому замкнутому контуру, лежащему в нашей окрестности, приводит к тому же самому значению функции $f(z)$, с которого был начат обход. Такую точку z_0 мы будем называть *изолированной особенностью однозначного характера* или, сокращенно, *изолированной особой точкой* аналитической функции. Функция

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-2)^5}e^{\frac{1}{z+1}}\sin\frac{z}{1+z^2} \tag{1.1.1}$$

будет иметь изолированными особыми точками $z=1$, 2, -1, i, $-i$. Точка $z=0$ для функции $f(z)=z^{\frac{1}{3}}$ будет изолированной особой точкой, но эта точка будет уже точкой ветвления, так как после обхода нуля, например, по окружности $|z|=1$, мы приходим к значению $e^{\frac{2\pi i}{3}}z^{\frac{1}{3}}\neq z^{\frac{1}{3}}$, и эта точка не будет для $z^{\frac{1}{3}}$ относиться к той категории изолированных особых точек, которые мы в дальнейшем будем рассматривать. Естественно, что могут быть легко построены функции, имеющие изолированные особые точки и в нашем смысле, и точки ветвления. Например, для функции

$$f(z)=e^{\frac{1}{1+z}} \ln z$$

точка $z=-1$ будет изолированной особой точкой в нашем смысле, а $z=0$ — изолированной точкой ветвления, в окрестности которой $f(z)$ не будет однозначной.

Если для функции $f(z)$ точка z_0 будет изолированной особой точкой, то *вычетом* $f(z)$ *в точке* z_0 мы будем называть число

$$A(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz, \tag{1.1.2}$$

где C — любой спрямляемый замкнутый контур, содержащий внутри себя точку z_0 и лежащий в регулярной окрестности z_0. Как известно, вследствие теоремы Коши этот интеграл не зависит от выбора контура C. Берется он по замкнутому контуру C в положительном направлении, другими словами, так, чтобы при обходе область, ограниченная этим контуром и содержащая точку z_0, все время оставалась слева. Мы определили, таким образом, вычет в любой конечной точке плоскости.

Если бесконечно удаленная точка плоскости z будет изолированной особой точкой однозначного характера, то это значит, что $f(z)$ регулярна вне некоторого круга $|z|\leqslant R$ при достаточно большом R, кроме, может быть, $z=\infty$ и при обходе области $|z|\geqslant R$ по окружности $|z|=R_1$, $R_1>R$ мы приходим к прежним значениям функции. В этом случае мы определяем *вычет в точке* $z=\infty$ интегралом

$$A(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz, \tag{1.1.3}$$

где C — любой замкнутый спрямляемый контур, содержащий внутри себя круг $|z|\leqslant R$, а интеграл взят уже в отрицательном направлении (при таком обходе контура C область, ограниченная им и содержащая точку $z=\infty$, все время остается слева. Если C — окружность, то она обходится по стрелке часов.)

Теорема II. *Если конечная область D ограничена спрямляемым контуром C и если функция $f(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}$, кроме, может быть, изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, принадлежащих D, то имеет место равенство*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} A(z_k), \tag{1.1.4}$$

где $A(z_k)$ — вычет в точке z_k, а интеграл взят по контуру C в положительном направлении.

Эта теорема есть прямое следствие и, по существу, перефразировка теоремы I. Если $f(z)$ в расширенной плоскости имеет только изолированные особенности, то имеет место теорема III.

Теорема III. *Если $f(z)$ имеет только изолированные особенности в расширенной плоскости, то сумма вычетов в этих особых точках равна нулю.*

Доказательство. Число особых точек $f(z)$ должно быть конечно, так как в противном случае существовала бы точка накопления этих особых точек, не являющаяся изолированной особенностью. Поэтому существует окружность $|z|=R$, внутри которой должны лежать все особые точки $f(z)$, за исключением, может быть, точки $z=\infty$. Беря в качестве контура C эту окружность и замечая, что интеграл по C, взятый против стрелки часов, есть $-2\pi i A(\infty)$, мы из теоремы II получаем равенство $-2\pi i A(\infty) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} A(z_k)$, где сумма справа взята по всем конечным особым точкам $f(z)$. Этим теорема доказана.

n° 2. Вычисление вычетов в простейших случаях и интеграл Коши

Наиболее простой функцией, имеющей изолированную особенность в точке $z=z_0$, является функция

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}.$$

Вычет в точке z_0 этой функции будет

$$A(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{ie^{i\varphi}r\,d\varphi}{re^{i\varphi}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=1, \quad (1.2.1)$$

так как

$$z-z_0=re^{i\varphi},\ dz=ire^{i\varphi}\,d\varphi.$$

Вычет в точке z_0 функции $f(z)=(z-z_0)^n$, где $n\neq-1$ — целое число, будет

$$A(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^n\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}r^{n+1}\,ie^{i\varphi(n+1)}\,d\varphi=0, \quad (1.2.2)$$

так как опять

$$z-z_0=re^{i\varphi},\ dz=ire^{i\varphi}\,d\varphi \text{ и } n+1\neq 0.$$

Если функция $f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ изолированную особенность и существуют такие числа $a_{-1}, \ldots, a_{-p}$, $a_{-p}\neq 0$, что функция

$$f_1(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} \quad (1.2.3)$$

будет регулярна в точке $z=z_0$, то мы будем говорить, что $f(z)$ имеет в точке z_0 *полюс p-го порядка*. В случае полюса порядка p в точке z_0 вычет $A(z_0)=a_{-1}$. Действительно, если C — окружность $|z-z_0|=r$,

$$A(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f_1(z)\,dz+\sum_{k=1}^{p}a_{-k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{(z-z_0)^k}=a_{-1} \quad (1.2.4)$$

в силу регулярности $f_1(z)$ в точке z_0 и равенств (1.2.1) и (1.2.2).

Сумма, стоящая в правой части (1.2.3), называется *главной частью* $f(z)$ *в полюсе* $z=z_0$. Из формулы (1.2.3) следует, что для определения $A(z_0)=a_{-1}$ достаточно умножить обе части равенства на $\frac{(z-z_0)^p}{(p-1)!}$, продиффеменцировать полученное равенство $(p-1)$ раз и положить в нем $z=z_0$, если, конечно, $f(z)$ и $f_1(z)$ можно в точке z_0 дифференцировать $(p-1)$ раз. Эта возможность может быть легко доказана с помощью представления аналитической функции интегралом Коши.

Рассмотрим функцию $f_1(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ при условии, что $f(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta=z$, и найдем вычет $f_1(\zeta)$ в точке z. Мы будем иметь, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r} f_1(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r}\frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z),\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,$$

где r достаточно мало в силу (1.2.1) и верного при любом $\rho<r$ неравенства

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|<\rho M,$$

$$M=\max_{|\zeta-z|\leqslant r}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<\infty,$$

так как $f(\zeta)$ имеет в точке $\zeta=z$ производную. Значит, если $f(\zeta)$ аналитична в ограниченной области D со спрямляемой границей C и $z\in D$, то имеет место представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z). \tag{1.2.5}$$

Это важное представление функции $f(z)$, дающее ее значение в любой внутренней точке области по ее значениям на границе, носит название *интеграла Коши*. Условие аналитичности на спрямляемой границе C функции $f(z)$ может быть без труда, как мы видели выше, заменено условием аналитичности в D и непрерывности в $\overline{D}$. Из этого представления уже следует неограниченная дифференцируемость $f(z)$ в любой регулярной точке.

Теорема IV. *Если $f(z)$— аналитическая в ограниченной области D с жордановой границей C и непрерывная в $\overline{D}$ функция, то для всякого $z \in D$ имеет место представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{1.2.6}$$

$f(z)$ имеет производные любого порядка и

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geqslant 0. \tag{1.2.7}$$

Область D может быть и многосвязной.

Доказательство. Утверждение (1.2.6) нашей теоремы отличается от (1.2.5) только тем, что в нем не предполагается аналитичность $f(\zeta)$ на C. Но пока точка z находится внутри контура и контур C' не выходит из D, величина интеграла от C' не зависит. Поэтому, в силу непрерывности $f(\zeta)\,(\zeta-z)^{-1}$ вблизи C, мы можем приближать C', $C' \in D$ сколь угодно близко к C, причем интеграл по C' будет сколь угодно мало, в зависимости от близости C' к C, отличаться от интеграла по C. Этим первое утверждение доказано.

Для доказательства (1.2.7) допустим, что оно верно при $n=k$ и докажем, что оно верно и для $n=k+1$. Итак, при $z+h \in D$ и h сколь угодно малом, будет

$$\frac{\Delta f^{(k)}(z)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}\right) f(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta + R,$$

где

$$R = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{k+1}{(\zeta - z)^{k+2}}\right] f(\zeta)\, d\zeta.$$

Но так как $|\zeta - z| \geqslant \delta > 0$, $\zeta \in C$, то при $|h| < \frac{\delta}{2}$

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}\right) - \frac{k+1}{(\zeta - z)^{k+2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(\zeta - z)^{k+2} - (\zeta - z)(\zeta - z - h)^{k+1} - h(k+1)(\zeta - z - h)^{k+1}}{h(\zeta - z - h)^{k+1}(\zeta - z)^{k+2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{h^2\left[\frac{(k+2)(k+1)}{2!}(\zeta - z)^k + \ldots + h^{k+2}\right]}{h(\zeta - z - h)^{k+1}(\zeta - z)^{k+2}}\right| < |h| M_0,$$

где M_0 — не зависящая от h постоянная, и мы имеем

$$|R| < \frac{M_0 k!}{2\pi} LM|h|, \quad M = \max_{z \in C} |f(z)|,$$

где L — длина контура C. Значит,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f^{(k)}(z)}{\Delta z} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta = f^{(k+1)}(z), \quad (1.2.8)$$

другими словами, мы доказали, что $f^{(k)}(z)$ имеет производную в каждой точке $z \in D$ и производная эта имеет вид (1.2.7). Так как соотношение (1.2.6) установлено, то, опираясь на (1.2.8) и метод полной индукции, мы можем теперь заключить, что теорема IV доказана.

В доказательстве теоремы IV мы предполагали только непрерывность функции $f(z)$ на C. Это позволяет высказать еще одно вспомогательное утверждение, именно, что если $f(z)$ непрерывна на спрямляемом контуре C, функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

аналитична внутри C и вне C равна нулю, если C замкнутый контур, и аналитична всюду вне контура C, если C — незамкнутый контур. Такой интеграл называется *интегралом типа Коши*.

Теперь мы можем вернуться к вопросу вычисления вычета в точке $z = z_0$, если в ней функция имеет полюс p-го порядка.

Т е о р е м а V. *Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс первого порядка, то вычет $A(z_0)$ будет определяться равенством*

$$A(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z), \tag{1.2.9}$$

а если в точке z_0 у $f(z)$ будет полюс p-го порядка, то

$$A(z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}[(z-z_0)^p f(z)]}{dz^{p-1}} \Bigg|_{z=z_0}. \tag{1.2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $p=1$ умножаем равенство (1.2.3) на $z-z_0$ и переходим в обеих частях к пределу при $z \to z_0$. Мы получаем, что

$$a_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

следовательно, формула (1.2.9) доказана; если же $p > 1$, то мы опять умножаем обе части (1.2.3) на $(z-z_0)^p$, дифференцируем обе части равенства

$$(z-z_0)^p f_1(z) = (z-z_0)^p f(z) - \sum_{k=1}^{p} a_{-k} (z-z_0)^{p-k}$$

$p-1$ раз и полагаем $z=z_0$. Так как $f_1(z)$ регулярна и неограниченно дифференцируема в точке $z=z_0$, мы получим слева нуль. Выражение, получающееся справа, и дает нам формулу (1.2.10).

§ 2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

n° 1. Ряды Тейлора и Лорана

Основным аппаратом представления функции $f(z)$ в окрестности точки, вообще говоря, локального, является ряд Тейлора. Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{\zeta - z}, \tag{2.1.1}$$

верное при всех значениях ζ, z и z_0.

Итерируя его n раз, мы получим новое тождество:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \frac{1}{\zeta - z}. \quad (2.1.2)$$

Это тождество может быть использовано для представления $f(z)$ в окрестности правильной для нее точки z_0 сходящимся степенным рядом — рядом Тейлора.

Теорема VI. *Если функция $f(z)$ регулярна в точке z_0, иными словами, существует круг $|z-z_0| \leqslant R$, в котором она регулярна, то она может быть приближена в этом круге сколь угодно хорошо многочленами*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k.$$

Точнее,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k + R_n(z), \quad (2.1.3)$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $r < R$, $|z-z_0| < r$, *и*

$$|R_n(z)| < \left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n \frac{r}{R-r} M(r),$$

$$M(r) = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \quad (2.1.4)$$

Для доказательства теоремы умножим тождество (2.1.2) на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и проинтегрируем почленно по окружности $|\zeta - z_0| = r$, $r < R$. Пользуясь формулами (1.2.7), мы непосредственно получаем представление (2.1.3). Неравенство (2.1.4) есть следствие того обстоятельства, что интеграл не превышает по модулю длины пути интегрирования, умноженной на максимум модуля подынтегральной функции.

Устремляя n к бесконечности, мы получаем из формулы (2.1.3) представление $f(z)$ рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k,$$

сходящимся в максимальном по радиусу круге с центром в z_0, в котором $f(z)$ регулярна. Возможность разложения функции в ряд Тейлора в каждой регулярной точке позволяет исследовать поведение функции в такой точке.

Напомним определение. Мы говорим, что функция $f(z)$ *однолистна* в области D, если $f(z_1)=f(z_2)$ при z_1, $z_2 \in D$ только в случае $z_1=z_2$.

Теорема VII. *Если $f(z)$ регулярна в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то существует круг конечного радиуса r, $|z-z_0|<r$, такой, что в нем $f(z)$ не только регулярна, но и однолистна и $f'(z)\neq 0$. Если же $f(z_0)=0$, то существует целое число $p\geqslant 1$ и $r>0$, такие, что*

$$f(z)=(z-z_0)^p f_1(z), \tag{2.1.5}$$

где $f_1(z)\neq 0$, $|z-z_0|<r$, иначе говоря, функция $f(z)$ в этом случае имеет нуль p-го порядка.

Доказательство. Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в точке $z=z_0$. Этот ряд будет иметь отличный от нуля круг сходимости радиуса R. Тогда мы будем иметь, что

$$f(z_1)-f(z_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\left[(z_1-z_0)^n-(z_2-z_0)^n\right]=$$

$$=(z_1-z_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(z_1-z_0)^{n-k-1}(z_2-z_0)^k,$$

откуда следует неравенство

$$|f(z_1)-f(z_2)|>|z_1-z_2|\left[|f'(z_0)|-\right.$$

$$\left.-r\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}\right|r^{n-2}\right]>\frac{|f'(z_0)|}{2}|z_1-z_2|,$$

верное при

$$|z_1-z_0|\leqslant r,\quad |z_2-z_0|<r,$$

$$r\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}\right|r^{n-2}<\frac{1}{2}\left|f'(z_0)\right|$$

(последнее неравенство заведомо выполняется при достаточно малых r).

Отсюда же следует, что $|f(z)| > \frac{1}{2}|f'(z_0)|$ при $|z-z_0|<r$.

Для доказательства (2.1.5) разложим опять $f(z)$ в ряд Тейлора в точке z_0. Тогда, если $f(z_0)=0$, то существует такое p, что $f^{(k)}(z_0)=0$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, так как в противном случае $f(z)$ была бы тождественным нулем в силу того, что все коэффициенты представляющего ее ряда были бы нулями. Поэтому

$$f(z) = (z-z_0)^p f_1(z),\ f_1(z) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} + (z-z_0)\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-p-1}.$$

Опять, как и выше, если $|z-z_0|<r$,

$$|f_1(z)| > \left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right| - |z-z_0| \sum_{k=p+1}^{\infty} \left|\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right| |z-z_0|^{k-p-1} > \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}\right|$$

при достаточно малом r. Этим теорема доказана.

Следствие. *Функция $[f(z)]^{-1}$ будет регулярной в точке z_0, если $f(z_0)\neq 0$ и z_0 — точка регулярности $f(z)$. Если $f(z)$ имеет при $z=z_0$ нуль p-го порядка, то $[f(z)]^{-1}$ имеет в этой точке полюс p-го порядка.*

Действительно, первое утверждение очевидно, а во втором случае

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^p}\cdot\frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^p}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{(z-z_0)^{p-k}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{p+k}(z-z_0)^k,$$

в силу регулярности $[f_1(z)]^{-1}$ при $z=z_0$.

Если функция регулярна не в круге с центром в z_0, а в кольце между двумя окружностями $|z-z_0|=r$ и $|z-z_0|=R$, то в таком кольце она может быть также представлена степенным рядом, но уже как по положительным, так и по отрицательным степеням $z-z_0$. Этот ряд носит название ряда Лорана.

Теорема VIII. *Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $r<|z-z_0|<R$ и однозначна в нем, то в этом кольце она может быть представлена рядом*

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(z-z_0)^n;$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\rho}f(z)(z-z_0)^{-n-1}\,dz, \qquad (2.1.6)$$

абсолютно и равномерно сходящимся в любом внутреннем кольце.

Доказательство. Пусть z принадлежит нашему кольцу и

$$r<r_1<|z-z_0|<R_1<R,$$

и пусть числа r_2 и R_2 удовлетворяют условию

$$r<r_2<r_1<R_1<R_2<R.$$

Тогда теорема IV дает нам представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (2.1.7)$$

где оба интеграла взяты в положительном направлении. Так как $R_2>|z-z_0|$, то из тождества (2.1.2), умножая его на $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ и интегрируя по окружности $|\zeta-z_0|=R_2$, мы получаем представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}f(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n,$$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-n-1}\,d\zeta, \qquad (2.1.8)$$

так как остаточный член стремится к нулю, как член геометрической бесконечно убывающей прогрессии. Здесь числа A_n уже не производные в точке z_0, как в случае ряда Тейлора при регулярности $f(z)$. Ряд (2.1.8) сходится равномерно и абсолютно в круге $|z-z_0| \leqslant R_1 < R$. Это следует из неравенства

$$|z-z_0|^n |A_n| < \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta-z_0|=R_2} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n M(R_2),$$

где

$$R_1 < R_2 < R, \quad M(R_2) = \max_{|z-z_0|=R_2} |f(z)|. \qquad (2.1.9)$$

Далее, поменяв в тождестве (2.1.2) z и ζ местами, помножив обе его части на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и проинтегрировав по окружности $|\zeta-z_0|=r_2$, $r_2<r_1\leqslant|z-z_0|$, мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} \times f(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} (z-z_0)^{-n}, \quad A_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1} d\zeta,$$

где последний ряд равномерно и абсолютно сходится вне круга $|z-z_0|\geqslant r_1$ для $r_1>r_2>r$. Это опять следует из неравенств, аналогичных неравенствам (2.1.9):

$$|A_n|\,|z-z_0|^{-n} < \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n M(r_2), \quad |z-z_0| \geqslant r_1, \; r<r_2<r_1<R.$$

Этим теорема доказана.

Примеры к теореме VIII:

1. Пусть

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-3}.$$

Эта функция имеет полюсы первого порядка в точках z, равных 1, 2, 3. Если в качестве точки z_0 взять точку $z=0$, то образуются четыре кольца, в которых возможны лорановы разложения. Это кольца с радиусами $r=0$, $R=1$; $r=1$; $R=2$; $r=2$, $R=3$; $r=3, R=\infty$. В первом кольце наша функция регулярна, включая и точку 0, а в последнем, включая точку ∞. Поэтому в первом кольце мы получим ряд Тейлора, а в последнем — ряд по отрицательным степеням z. В первом кольце мы будем иметь разложение по положительным степеням z, поэтому при $|z|<1$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_0^\infty z^n+\frac{1}{2}\sum_0^\infty 2^{-n}z^n-\frac{1}{6}\sum_0^\infty 3^{-n}z^n=$$

$$=-\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

Во втором кольце при $1<|z|<2$ первое слагаемое надо разлагать по отрицательным степеням z, а остальные по положительным. Поэтому

$$f(z)=\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=$$

$$=\sum_1^\infty\frac{1}{2}z^{-n}+\sum_0^\infty(2^{-n-1}-2^{-1}3^{-n-1})z^n.$$

В третьем кольце при $2<|z|<3$ первые два слагаемых надо разлагать по отрицательным степеням z, а последнее — по положительным. Поэтому

$$f(z)=\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-2^{n-1}\right)z^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}3^{-n-1}z^{n}.$$

Наконец, в четвертом кольце $3<|z|<\infty$ и все слагаемые надо разлагать по отрицательным степеням z. Поэтому

$$f(z)=\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\,3^{n-1}-2^{n-1}+\frac{1}{2}\right)z^{-n}.$$

Все четыре ряда представляют одну и ту же функцию, но в разных кольцах.

2. Пусть $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$. Тогда в кольце $0<|z|<\infty$ мы будем иметь разложение

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\right)\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}\right)=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(|k|+m)!\,m!}\right]z^{k}.$$

n° 2. Изолированные особые точки

Если точка $z=z_0$ будет изолированной особенностью однозначного характера функции $f(z)$, то мы можем представить эту функцию рядом Лорана в окрестности этой точки, в кольце $0<|z-z_0|<R$, $R>0$, где эта функция регулярна и однозначна. Мы будем иметь в этом случае представление

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{0}^{\infty}a_{n}(z-z_0)^{n}, \qquad (2.2.1)$$

и оба ряда будут сходиться в кольце $0<|z-z_0|<R$.

Функция

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^n$$

есть ряд, сходящийся при любом конечном z, другими словами, имеет радиус сходимости, равный бесконечности. Такая функция носит название *целой* функции, и $f_1\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ полностью характеризует поведение $f(z)$ в изолированной особой точке $z=z_0$. Эта часть функции $f(z)$ носит название *особой* или *главной части* $f(z)$. Простейшая классификация особых точек такого типа состоит в том, что мы различаем три случая. Первый случай будет, когда $f_1(z)\equiv 0$. Тогда отсутствует в представлении $f(z)$ разложение по отрицательным степеням $z-z_0$, точка z_0 называется *устранимой особенностью* и является правильной точкой $f(z)$. Второй случай это тот, когда все $a_{-n}=0$, $n\geqslant p+1$ и $a_{-p}\neq 0$, $p\geqslant 1$. С этим случаем мы уже имели дело. Это случай *полюса* p-го порядка. Наконец, если $f_1(z)\not\equiv 0$ и отлична от многочлена, иначе говоря, она является целой трансцендентной функцией, точка $z=z_0$ называется *существенно особой* точкой $f(z)$. Разность $f(z)-f_1\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ называется *правильной частью* $f(z)$ *в точке* $z=z_0$. Можно дать простые признаки, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $f(z)$ имела при $z=z_0$ полюс или устранимую особенность.

Теорема IX. *Если $f(z)$ в точке z_0 имеет устранимую особенность, то $|f(z)|$ ограничен в некотором круге $|z-z_0|<R$. Обратно, если при $r<R$,*

$$\lim_{r\to 0} r \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|=0, \tag{2.2.2}$$

то $z=z_0$ — устранимая особенность. Если $z=z_0$ — полюс p-го порядка, то $|z-z_0|^p f(z)$ ограничено в некотором круге $|z-z_0|<R$. Обратно, если

$$\lim_{r\to 0} r^{p+1} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|=0, \tag{2.2.3}$$

то $z=z_0$ — полюс порядка не выше p. В обоих обратных утверждениях естественно предполагается, что $z=z_0$—

изолированная особенность однозначного характера функции $f(z)$.

Доказательство. Прямые утверждения очевидны и прямо следуют из представления (2.1.6) и определения полюса и устранимой особенности. Для доказательства обратных утверждений заметим, что имеет место неравенство, следующее из (2.1.6), именно,

$$|A_{-n}|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\Big|\leqslant r^n\max_{|\zeta-z_0|=r}|f(\zeta)|.$$

Поэтому если существует предел (2.2.2), то правая часть этого неравенства сколь угодно мала, так как r произвольно и, значит, все $A_{-n}=0$, $n\geqslant 1$. Если же выполнено соотношение (2.2.3), то при $n\geqslant p+1$ A_{-n} должны быть сколь угодно малы, другими словами, все $A_{-n}=0, n\geqslant p+1$. Этим теорема доказана.

Следствием этой теоремы является теорема Лиувилля, утверждающая, что целая функция $f(z)$, ограниченная во всей плоскости, должна быть константой. Действительно, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет точку $z=0$ изолированной особенностью и ограничена в окрестности этой точки. Значит, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ правильна в нуле и отсюда $f(z)=a_0$. Совершенно так же, если $|f(z)|<c|z|^{p+\alpha}$, $0\leqslant\alpha<1$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше p.

К числу простых следствий представления (2.2.1) функции $f(z)$ в окрестности изолированной особенности и теоремы IX принадлежит и теорема Сохоцкого — Вейерштрасса, утверждающая, что любое число a должно быть пределом последовательности значений $f(z)$ по некоторой последовательности значений z_n, для которой z_0 будет предельной точкой, если z_0 существенно особая точка, т. е.

$$a=\lim_{z_n\to z_0} f(z_n). \tag{2.2.4}$$

Прежде всего заметим, что $f(z)$ не может быть ограничена в окрестности z_0, по теореме IX, если z_0 существенно особая точка. Значит, существует такая последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$. Если точка $a_n \neq \infty$ не является в окрестности $z = z_0$ предельной точкой последовательности $f(z_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, ни для какой последовательности z_n, то $\frac{1}{f(z)-a} = f_1(z)$ ограничена в круге $|z-z_0| < r$ при некотором $r > 0$. Но $f_1(z)$ также аналитична в круге $|z-z_0| < r$ и для нее $z = z_0$ тоже изолированная особенность. Так как $f_1(z)$ ограничена в нашем круге, то точка $z = z_0$ является для нее регулярной точкой и $f_1(z) = (z-z_0)^p f_2(z)$, где $f_2(z)$, как мы уже знаем, регулярна и не имеет нулей в каком-то круге $|z-z_0| < r_0 \leqslant r_1$, а $p \geqslant 0$ — целое число. Отсюда уже следует, что $f(z) - a$ может иметь в точке $z = z_0$ не более чем полюс порядка p, что противоречит предположению существенно особой точки в $z - z_0$. Этим наша теорема доказана. Поведение функции в полюсе дается теоремой IX.

Пользуясь представлением (2.2.1), мы можем теперь доказать также, что вычет в изолированной особой точке z всегда равен a_{-1}, если она конечна, и $-a_{-1}$, если $z = \infty$. Действительно, при конечной z_0 и регулярности $f(z)$ в кольце $0 < |z-z_0| < r_0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k dz =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} a_k \int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = a_{-1}, \quad r < r_0, \qquad (2.2.5)$$

в силу равномерной сходимости ряда и соотношений (1.2.1) и (1.2.2). Если же мы ищем вычет в бесконечно удаленной точке, то интеграл берется по стрелке часов и вместо a_{-1} мы получаем $-a_{-1}$.

п° 3. Примеры на вычисление вычетов

1. Найти вычеты $f(z) = z^{-1}e^z$ в особых точках $z = 0$ и $z = \infty$.

Вычет в точке $z = 0$ будет 1, а $z = \infty$: -1 по теореме о сумме вычетов.

2. Найти вычеты $e^{z+\frac{1}{z}}$,

Эту функцию мы уже рассматривали и получили ее разложение в кольце $0<|z|<\infty$; как мы видели, a_{-1} равно $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$.

3. Пусть $f(\zeta)$ имеет вид

$$f(\zeta)=\frac{P_{n-1}(\zeta)}{(\zeta-z_1)^{p_1}\ldots(\zeta-z_s)^{p_s}}\,\frac{1}{\zeta-z},\quad \sum_{1}^{s}p_k=n, \qquad (2.3.1)$$

где все $z_1, \ldots, z_s$ и z различны между собой, а $P_{n-1}(\zeta)$ многочлен степени не выше $n-1$.

Заметим, что степень знаменателя относительно переменного ζ на две единицы больше степени числителя. Поэтому разложение $f(\zeta)$ в кольце $R<|\zeta|<\infty$, $R=\max[|z|, |z_1|, \ldots, |z_s|)$, по отрицательным степеням ζ будет начинаться с ζ^{-2} и, значит, вычет в бесконечно удаленной точке будет нулем. Так как $f(\zeta)$ имеет только полюсы, то по теореме III вычет в точке $\zeta=z$ равен сумме остальных вычетов в точках $z_1, \ldots$ z_s, со знаками минус, и мы будем иметь, что

$$\frac{P_{n-1}(z)}{(z-z_1)^{p_1}\ldots(z-z_s)^{p_s}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(p_k-1)!}\left[\frac{d^{p_k-1}}{d\zeta^{p_k-1}}\frac{P_{n-1}(\zeta)\,(\zeta-z_k)^{p_k}}{(\zeta-z_1)^{p_1}\ldots(\zeta-z_s)^{p_s}(z-\zeta)}\right]_{\zeta=z_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}\sum_{m=1}^{p_k}\frac{A_{m,k}}{(z-z_k)^m}, \qquad (2.3.2)$$

где Am, k — постоянные. Мы получили, таким образом, разложение рациональной функции на простейшие дроби.

4. Пусть $\varphi(z)$ регулярна в области D, спрямляемый замкнутый контур C принадлежит D и различные между собой точки $z, z_1, \ldots, z_s$ лежат внутри C. Пусть также числа $p_k \geqslant 1$, $k=1, \ldots, s$, $\sum_{1}^{s}p_k=n$ будут целыми. Тогда по теореме II мы будем иметь, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)^{p_1}\ldots(\zeta-z_s)^{p_s}(\zeta-z)}=\frac{\varphi(z)}{(z-z_1)^{p_1}\ldots(z-z_s)^{p_s}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(p_k-1)!}\left\{\frac{d^{p_k-1}}{d\zeta^{p_k-1}}\left[\frac{\varphi(\zeta)\,(\zeta-z_k)^{p_k}}{(\zeta-z_1)^{p_1}\ldots(\zeta-z_s)^{p_s}(z-\zeta)}\right]\right\}_{\zeta=z_k}$$

или, после простых преобразований, при $q(z)=(z-z_1)^{p_1}\ldots$ $\ldots\ (z-z_s)^{p_s}$,

$$\varphi(z)=q(z)\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(p_k-1)!}\times$$
$$\times\left\{\frac{d^{p_k-1}}{d\zeta^{p_k-1}}\left[\frac{\varphi(\zeta)(\zeta-z_k)^{p_k}}{(\zeta-z_1)^{p_1}\ldots(\zeta-z_s)^{p_s}(z-\zeta)}\right]\right\}_{\zeta=z_k}+$$
$$+R(z)=Q(z)+R(z), \qquad (2.3.3)$$

где

$$Q(z)=q(z)\sum_{k=1}^{s}\sum_{m=1}^{p_k}\frac{A_{m,k}}{(z-z_k)^m},$$

$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{z-z_k}{\zeta-z_k}\right)^{p_k}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (2.3.4)$$

Нетрудно видеть, что $Q(z)$ — многочлен степени $n-1$ и что

$$Q^{(m)}(z_k)=\varphi^{(m)}(z_k),\quad \begin{matrix} m=0,\ldots,p_k-1,\\ k=1,\ldots,s,\end{matrix} \qquad (2.3.5)$$

а числа $A_{m,k}$ есть линейные комбинации значений $\varphi(z)$ и ее производных до порядков p_k-1 включительно в точках z_k. Мы получили так называемую *интерполяционную формулу Лагранжа* с остаточным членом $R(z)$.

5. Пусть $f(\zeta)=\dfrac{1}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta}$. Эта функция имеет только полюсы первого порядка в точках $\zeta=0,\ \pm1,\ \ldots\pm k,\ldots$, так как $\cos\pi k\neq0$ и точка $z\neq\pm\pi k$. Если C_N есть квадрат, с центром в начале и сторонами, параллельными осям координат, с вершинами в точках $\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pm$ $\pm i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, то по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta}=\frac{1}{\sin\pi z}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(-1)^k}{z-k}+\frac{(-1)^k}{z+k}\right]-\frac{1}{\pi z}. \qquad (2.3.6)$$

Заметим, что на прямых $N+\frac{1}{2}+iy$ и $-\left(N+\frac{1}{2}\right)+iy$, при $|z|<\frac{N}{2}$

$$\left|\frac{1}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta}\right|=\frac{1}{\left|N+\frac{1}{2}+iy-z\right|}\,\frac{2}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}<4N^{-1}e^{-\pi|y|},$$

а на прямых $\left(N+\frac{1}{2}\right)i+x,\ -\left(N+\frac{1}{2}\right)i+x$

$$\left|\frac{1}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta}\right|<\frac{2}{N}\,\frac{2}{e^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}}<4N^{-1}e^{-N\pi}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_N}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta}\right|<\frac{8}{N}\left[e^{-\pi N}\int_{-N-1}^{N+1}dx+\right.$$
$$\left.+\int_{-N-1}^{N+1}e^{-\pi|y|}dy\right]<\frac{20}{N},\ N>N_0.$$

Значит, переходя к пределу при $N\to\infty$ в равенстве (2.3.6), мы будем иметь, что

$$\frac{1}{\sin\pi z}=\frac{1}{\pi z}+\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k z}{z^2-k^2}. \tag{2.3.7}$$

Следовательно, мы получили разложение $\frac{1}{\sin\pi z}$ на элементарные дроби.

6. Пусть $f(\zeta)=\frac{\operatorname{ctg}\pi\zeta}{\zeta-z}$. Эта функция имеет полюсы в тех же точках $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и z, что и в предшествующем примере, но вычет в полюсе $\zeta=k$ будет $\frac{1}{\pi(k-z)}$. Возьмем в качестве контура C_N тот же контур, что и в предшествующем примере. Тогда, опять по общей теореме о вычетах, мы будем иметь, что

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\operatorname{ctg}\pi\zeta\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\operatorname{ctg}\pi z-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right)-\frac{1}{\pi z}. \tag{2.3.8}$$

Вычислим R_N как интеграл по всем четырем сторонам квадрата. На вертикальных сторонах будем иметь: $\zeta=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+iy$, а на горизонтальных сторонах $\zeta=x\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)i$. Но легко видеть, что на этих прямых выполняются неравенства

$$\left|\operatorname{ctg}\pi\left[iy\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]\right|=|\operatorname{tg}\pi yi|=\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}<1,$$

$$\left|\operatorname{ctg}\pi\left[x\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)i\right]\right|<$$

$$<\frac{e^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}+e^{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}}<2,N>N_0. \tag{2.3.9}$$

Далее, пусть $z=z_0$ и не совпадает ни с одним полюсом $\operatorname{ctg}\pi z$. Тогда

$$\left|R_N(z)-R_N(z_0)\right|<\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{C_N}\operatorname{ctg}\pi\zeta\frac{z-z_0}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta\right|<$$

$$<\frac{4}{\pi}\int\limits_{-N-1}^{N+1}\frac{|z-z_0|}{(N-|z|)(N-|z_0|)}dx<32\frac{N+1}{N^2},\ N>N_1.$$

Значит,

$$\operatorname{ctg}\pi z-\operatorname{ctg}\pi z_0-\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi z_0}-\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_1^N\frac{2z}{z^2-k^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_1^N\frac{2z_0}{z_0^2-k^2}=\lim_{N\to\infty}[R_N(z)-R_N(z_0)]=0.$$

Отсюда уже следует, что

$$\operatorname{ctg}\pi z-\frac{1}{\pi z}-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{2z}{z^2-k^2}=\operatorname{ctg}\pi z_0-\frac{1}{\pi z_0}-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{2z_0}{z_0^2-k^2}.$$

Левая часть этого неравенства от z_0 не зависит и оно верно при любом z_0, кроме ранее выделенного счетного множества. Поэтому мы можем устремить z_0 к нулю и правая часть последнего равенства тоже будет стремиться к нулю, так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x\cos\pi x-\sin\pi x}{\pi x\sin\pi x}=0.$$

Значит,

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right). \qquad (2.3.10)$$

Умножая обе части на π и интегрируя от x до z, мы будем иметь, что

$$\ln\sin\pi z-\ln\sin\pi x=\ln\frac{z}{x}+\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{1-\frac{z^2}{k^2}}{1-\frac{x^2}{k^2}}=$$

$$=\ln\frac{\pi z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}{\pi x\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$$

или, потенцируя, что

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\left[\frac{\pi x\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}{\sin\pi x}\right]^{-1}.$$

Устремляя теперь x к нулю, имеем окончательно, в пределе, что

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right), \qquad (2.3.11)$$

другими словами, мы получили разложение $\sin\pi z$ в бесконечное произведение по нулям. Пример 6 содержит часто употребляющийся прием улучшения сходимости процесса.

7. В заключение этого пункта приведем одну достаточно общую лемму, которую приходится использовать в теории вычетов. Это один из вариантов леммы Жордана.

Л е м м а. *Пусть два луча выходят из точки z_0 под углом α: L_1—$\arg(z-z_0)=\varphi_0$ и L_2—$\arg(z-z_0)=\varphi_0+\alpha$,*

$0<\alpha\leqslant 2\pi$ и функция $f(z)$ регулярна в угле $\varphi_0\leqslant\arg(z-z_0)\leqslant\leqslant\varphi_0+\alpha$, образованном этими лучами, за исключением счетного числа изолированных особенностей в точках z_n и z'_n с не более чем двумя точками накопления в z_0 и ∞, причем $z_n\to z_0$ и $z'_n\to\infty$. Пусть интегралы от $f(z)$ вдоль лучей L_1 и L_2 сходятся. Тогда, если существуют две последовательности контуров C_k и R_k, соединяющих стороны лучей, и таких, что контуры C_k стремятся к z_0 с ростом k, а контуры R_k стремятся к бесконечности, другими словами, при любом r и $k>k(r)$ контур C_k попадает в круг $|z-z_0|\leqslant r$, а R_k при $k>k(R)$ целиком лежит вне круга $|z-z_0|<R$, и, наконец,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C_k} f(z)\,dz=\lim_{k\to\infty}\int_{R_k} f(z)\,dz=0, \tag{2.3.12}$$

то

$$\int_{L_1} f(z)\,dz-\int_{L_2} f(z)dz=2\pi i\left[\sum_{k=1}^{\infty}A(z_k)+\sum_{k=1}^{\infty}A(z'_k)\right], \tag{2.3.13}$$

если оба ряда вычетов $A(z_k)$ и $A(z'_k)$ сходятся.

Доказательство этой леммы очевидно, так как она есть следствие общей теоремы о вычетах.

В качестве применения леммы вычислим интеграл

$$f(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin\pi s} \tag{2.3.14}$$

при условии $0<\sigma<1$, $\operatorname{Re} s=\sigma$. Возьмем в качестве луча L_1 положительную часть действительной оси, проходимую в положительном направлении от точки $z_0=0$ до бесконечности; в качестве луча L_2 возьмем тот же луч. Угол α будет тогда 2π. В качестве контура R_k возьмем окружность $|z|=R$, $R>1$, $R\to\infty$, а в качестве контура C_k возьмем также окружность $|z|=r$, $r<1$, $r\to 0$.

Мы получим, что

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^{s-1}}{z+1}dz\right|\leqslant C\int_0^{2\pi}\frac{r^{\sigma-1}\,r\,d\varphi}{1-r}=\frac{2\pi C}{1-r}r^{\sigma},$$

где C от r не зависит и что

$$\left|\int\limits_{|z|=R} \frac{z^{s-1}}{1+z}\,dz\right| < C_0 \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^{\sigma-1}R}{R-1}\,d\varphi < 2C_0R^{\sigma-1}.$$

Оба интеграла стремятся к нулю, когда $r\to 0$ и $R\to\infty$. Поэтому, так как после обхода угла раствора 2π z^{s-1} превращается в $e^{2\pi i s}z^{s-1}$, мы будем иметь по нашей лемме, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx - e^{2\pi i s}\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i e^{\pi i(s-1)},$$

так как вычет $\dfrac{z^{s-1}}{z+1}$ в точке $z=-1=e^{\pi i}$ будет $e^{\pi i(s-1)}$.
Отсюда уже следует, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\, e^{\pi i s}}{e^{2\pi i s}-1} = \frac{\pi}{\sin\pi s}. \qquad (2.3.15)$$

Наша лемма, очевидно, может быть обобщена на тот случай, если какой-либо из контуров, например C_k, не стягивается в точку, а с какого-то момента оказывается фиксированным. Тогда

$$\int\limits_{L_1} f(z)\,dz - \int\limits_{L_2} f(z)\,dz + \int\limits_C f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty}\left[A(z_k) + A(z'_k)\right], \qquad (2.3.16)$$

где C — фиксированный контур, $A(z_k)$ и $A(z'_k)$ имеют прежнее значение, причем в сумму входят только те $A(z'_k)$, которые соответствуют точкам z'_k, лежащим вне криволинейного треугольника, с вершиной в z_0, составленного из сторон угла и контура C. Наша лемма и равенство (2.3.13) сохраняются, когда точка z_0 уходит в бесконечность и наши лучи превращаются в две параллельные прямые. В этом случае оба контура C_k и R_k должны уходить в бесконечность. Совершенно так же сохраняется соотношение (2.3.16), если только один контур уходит в бесконечность, а другой фиксируется и интеграл по нему входит в левую часть (2.3.16).

n° 4. Принцип аргумента и нахождение числа корней и полюсов

К числу важнейших применений теории вычетов относится определение числа корней и полюсов.

Если $f(z)$ регулярна и не обращается в нуль в области $\overline{D}$, за исключением, может быть, точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, в которых она может иметь нули или полюсы кратностей, соответственно, $|p_1|, \ldots, |p_n|$, причем p_k будем считать положительным в нуле и отрицательным в полюсе, иначе говоря, пусть обычная кратность полюса будет $|p_k|$ и $p_k=-|p_k|$. На границе $\Gamma=\overline{D}-D$, предполагающейся замкнутой спрямляемой кривой, $f(z)$ будем предполагать регулярной и отличной от нуля. Тогда $f(z)$ в точке z_k будет иметь вид

$$f(z)=(z-z_k)^{p_k} f_k(z), \tag{2.4.1}$$

где $f_k(z)$ регулярна и не равна нулю в окрестности точки $z=z_k$.

Логарифмируя и беря производную от обеих частей равенства, мы получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{p_k}{z-z_k}+\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}, \tag{2.4.2}$$

другими словами, в окрестности $z-z_k$ логарифмическая производная функции $f(z)$ регулярна, так как $f_k(z)\neq 0$, а в точке z_k имеет полюс первого порядка с вычетом p_k, равным кратности нуля или кратности полюса с обратным знаком. Поэтому по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{1}^{n} p_k=N-P, \tag{2.4.3}$$

где N — число нулей, а P — число полюсов в D, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. Далее, перепишем левую часть этого равенства в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} d\ln f(z)=\frac{1}{2\pi i}\ln f(z)\Big|_{z_0}^{z_0}=N-P, \tag{2.4.4}$$

где точка $z_0 \in \Gamma$. Итак, теперь нам надо узнать, насколько изменится $\ln f(z)$ при обходе контура от z_0 до z_0. Так как

$$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z),$$

а в правой части (2.4.4) стоит действительная величина $N-P$, то мы должны учитывать только изменение $\arg f(z)$ при обходе контура. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname*{var}_{z \in \Gamma} \arg f(z) = N - P, \qquad (2.4.5)$$

другими словами, *полное изменение аргумента $f(z)$ при обходе контура в положительном направлении, деленное на 2π, равно разности между числом нулей и полюсов функции, лежащих внутри контура.* Это утверждение носит название *принципа аргумента.*

Если нам нужно найти сумму значений в точках z_k, некоторой регулярной в области D функции $\varphi(z)$, непрерывной на Γ, то мы будем иметь, по теореме о вычетах, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z_k)}{z - z_k} dz = \sum_{1}^{n} p_k \varphi(z_k), \qquad (2.4.6)$$

где каждое значение $\varphi(z_k)$ берется p_k раз.

Следствием принципа аргумента является, например, очень важная для приложений теорема Руше.

Теорема Руше. *Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ регулярны в конечной области D с жордановой границей Γ, и на границе*

$$|f(z)| > |\varphi(z)|, \qquad (2.4.7)$$

то функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ внутри D имеют одинаковое число нулей.

Действительно, мы будем иметь

$$\ln F(z) = \ln f(z) + \ln \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

При обходе контура Γ в плоскости z переменное W

$$W = \ln \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = \ln \left|1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| + i \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

пробегает контур, не содержащий начала внутри, так как если

$$w = u_1 + iu_2,\ \alpha = \arg w = \operatorname{arc\,tg} \frac{u_2}{u_1},$$

$$|u_1| = \left| \operatorname{Re} \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] \right| > 1 - \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| \neq 0$$

в силу условия теоремы, значит, $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если бы начало было внутри контура, то полное изменение аргумента было бы равно $2\pi k$, $|k| \geqslant 1$, где k — целое число. Отсюда уже следует, что полное изменение α при обходе Γ равно нулю, и полные изменения аргументов $f(z)$ и $F(z)$ равны между собой. Этим теорема доказана.

Пример.

Пусть для многочлена $P(z)$ выполняются условия

$$2|a_s| > \sum_0^n |a_k|,\ P(z) = \sum_0^n a_k z^k. \tag{2.4.8}$$

Тогда в единичном круге $P(z)$ имеет точно s нулей.

Действительно, из теоремы Руше следует наше утверждение, если положить

$$f(z) = a_s z^s,\ \varphi(z) = \sum_0^n a_k z^k - a_s z^s,$$

и принять во внимание, что на единичной окружности

$$|f(z)| = |a_s| > \sum_0^n |a_k| - |a_s| > |\varphi(z)|.$$

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ И СВОЙСТВА ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

n° 1. Представление функций рядами и теорема единственности

Возьмем тождество (2.1.1) и будем его итерировать, заменяя при этом последовательно z_0 на z_1, z_1 на z_2 и т. д. После $n+1$ итераций и замены мы получим новое тождество:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(z - z_0)\dots(z - z_{k-1})}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_k)} + \\ + \prod_0^n \frac{z - z_k}{\zeta - z_k} \frac{1}{\zeta - z}. \quad (3.1.1)$$

Пусть $f(\zeta)$ регулярна в области D, замкнутый жорданов контур C принадлежит D и внутри него находятся все точки $z_0, \dots, z_n$ и отличная от них точка z.

Умножая тогда обе части (3.1.1) на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя по контуру C, мы получим представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = A_0 + \sum_1^n A_k (z - z_0)\dots(z - z_{k-1}) + R_n(z), \quad (3.1.2)$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)\dots(\zeta - z_k)}, \quad R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_0^n \frac{z - z_k}{\zeta - z_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Это представление носит название *интерполяционной формулы Ньютона* и превращается в ряд Ньютона, если $R_n(z)$ стремится к нулю с ростом n. Формула Ньютона отличается только формой представления интерполяционного полинома от ранее рассмотренной формулы Лагранжа. Мы не будем здесь рассматривать различные предположения о поведении $f(z)$ и последовательности $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$, обеспечивающие сходимость ряда Ньютона к $f(z)$. С этим вопросом можно подробнее ознакомиться в книгах [4] [6].

Мы рассмотрим здесь только случай, когда последовательность $z_0, z_1, \dots$ имеет предельную точку a внутри D области регулярности $f(\zeta)$. В этом случае мы будем предполагать, что все точки $z_0, \dots, z_n, \dots$ не выходят за пределы круга $|\zeta - a| \leqslant r$, в котором $f(\zeta)$ регулярна и, более того, предположим, что при всех $k \geqslant 1$ $|z_k - a| < r_1 < r$. Оценивая остаточный член в

(3.1.2), мы получаем, что при $|z-a| \leqslant \rho < r$

$$|R_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|\zeta-a|=r} \prod_0^n \frac{z-a+a-z_k}{\zeta-a+a-z_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right| <$$

$$< \frac{rM}{r-\rho} \prod_0^n \frac{\rho+\varepsilon_k}{r-\varepsilon_k} < c_0 \left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{\varepsilon(n)},$$

$$\varepsilon_k = |a-z_k|, \; M = \max_{|\zeta-a|=r} |f(\zeta)|. \tag{3.1.3}$$

Значит, в нашем случае, ряд (3.1.2) сходится к $f(z)$ в круге $|a-z| < r$ и обладает, являясь его обобщением, свойствами ряда Тейлора в точке $z = z_0$.

Т е о р е м а X. *Если $f(z)$ регулярна в точке z_0, последовательность различных между собой точек z_1, z_2, …, z_n, … сходится к z_0, причем мы предполагаем, что $|z-z_k| \leqslant r_1 < r$, где r — радиус круга $|z-z_0| \leqslant r$, в котором $f(z)$ регулярна, то $f(z)$ представляется в этом круге рядом*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z-z_1)\ldots(z-z_n), \\ A_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(z_k)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} (z_k-z_i)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.4}$$

Доказывает сходимость ряда неравенство (3.1.3), а выражение для A_n есть частный случай (3.1.2) при различных между собой z_k. Если z_k между собой различны, то подынтегральная функция в представлении A_n имеет только полюсы первого порядка и выражение (3.1.4) получается из (3.1.3) по теореме II и правилу вычисления вычетов (1.2.9).

Из теоремы X следует общая теорема единственности.

Т е о р е м а XI. *Если две функции, $f_1(z)$ и $f_2(z)$, регулярны в некоторой области D, содержащей точку $z = z_0$ и их значения совпадают в последовательности точек z_1, z_2, …, z_n …, имеющей своей предельной точкой точку z_0, другими словами, если $f_1(z_k) = f_2(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $f_1(z)$ совпадает с $f_2(z)$ тождественно в области D.*

Действительно, если выполнены условия теоремы, то $\varphi(z) = f_1(z) - f_2(z)$ представляется в некотором круге

$|z-z_0|\leqslant r$ рядом (3.1.4), у которого вследствие того, что $\varphi(z_k)=0$, все $A_n=0$. Отсюда следует, что $\varphi(z)\equiv 0$ в круге $|z-z_0|\leqslant r$. Если в области регулярности D функции $\varphi(z)$ есть хотя бы одна точка, кроме точек круга $|z-z_0|\leqslant\leqslant r$, то эта точка a может быть соединена с z_0 конечнозвенной ломаной, целиком лежащей в D. Мы можем покрыть эту ломаную конечным числом кругов, лежащих в D и таких, что центр следующего круга лежит внутри предшествующего, центр первого есть z_0, центр последнего точка a. Так как $\varphi(z)\equiv 0$ в первом круге, то, разлагая $\varphi(z)$ во втором круге в ряд Тейлора, мы будем иметь, что все его коэффициенты нули. Поэтому $\varphi(z)$ — тождественный нуль во втором круге. Повторяя это рассуждение конечное число раз, мы придем к тому, что $\varphi(z)$ окажется тождественным нулем и в последнем круге с центром в точке a. Этим наша теорема доказана. Заметим также, что следствием этой теоремы является тождественное совпадение двух функций, совпадающих на любом континууме, например, отрезке.

Рассмотрим теперь задачу обращения функции. Пусть $f(z)$ регулярна в точке $z=0$ и $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (случай, когда $f(z_0)=0$, $f'(z_0)\neq 0$, приводится к этому линейным преобразованием z и $f(z)$). Мы уже знаем, что при таких условиях $f(z)$ не только регулярна, но и однолистна в некотором круге $|z|\leqslant r$, $r>0$. Значит, можно ставить задачу об обращении этой функции в круге, то есть, о нахождении функции $z=z(w)$, если $w=f(z)$ аналитическая в окрестности $w=0$ функция.

Рассмотрим функцию

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}.$$

В круге $|z|<r$, $|\zeta|\leqslant r$ эта функция ζ имеет только один полюс первого порядка при $\zeta=z$, так как $f'(\zeta)\neq 0$. Поэтому по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta=z.$$

Отсюда уже следует, что если применить тождество (2.1.2) при $z=0$ и заменить ζ на $f(\zeta)$ и z на $f(z)$, то

$$z=\sum_0^{n-1} A_k [f(z)]^k + R_n(z),\ A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\zeta f'(\zeta)}{[f(\zeta)]^{k+1}}\,d\zeta,$$

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\zeta f'(\zeta)\left[\frac{f(z)}{f(\zeta)}\right]^n\frac{d\zeta}{f(\zeta)-f(z)}. \tag{3.1.5}$$

Если $R=\min\limits_{|\zeta|=r}|f(\zeta)|$ ($R>0$, так как функция $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ однолистна), то существует такое r_0, $r_0=r_0(R_1)$, что $|f(z)|\leqslant R_1<R$ при $|z|\leqslant r_0$, вследствие того, что $f(z)=zf_1(z)$, где $f_1(z)$ регулярно в нуле. Значит, при $r<r_0 |R_n(z)|<C\left|\frac{R_1}{R}\right|^n$, где C постоянная и

$$z=\sum_0^{\infty}A_k w^k,\ A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{\zeta f'(\zeta)\,d\zeta}{[f(\zeta)]^{k+1}}. \tag{3.1.6}$$

Этот ряд носит название *ряда Бюрманна — Лагранжа.*

В качестве примера рассмотрим обращение функции $w=ze^z$. Найдем A_k. Мы будем иметь, что

$$A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{ze^z(z+1)}{z^{k+1}e^{(k+1)z}}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|z|=r}\frac{e^{-kz}}{z^{k-1}}\,dz+\int_{|z|=r}\frac{e^{-kz}}{z^k}\,dz\right]=$$

$$=(-1)^{k-2}\left[\frac{k^{k-2}}{(k-2)!}-\frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\right]=\frac{(-1)^{k-1}k^{k-2}}{(k-1)!}.$$

Значит,

$$z=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k^{k-2}}{(k-1)!}w^k,$$

причем ряд сходится при $|w|<e^{-1}$.

Мы знаем, что *целой* функцией называется функция, имеющая особой точкой только бесконечно удаленную точку и разлагающаяся в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Класс целых функций является замыканием класса многочленов в смысле равномерной сходимости в любой конечной части плоскости. Совершенно так же замыканием класса рациональных функций будет класс функций, имеющих в данной области или в плоскости только полюсы (замыкание тоже в смысле равномерной сходимости в любой конечной области, не содержащей полюсы). Такие функции называются *мероморфными* функциями. Полюсы этих функций своими предельными точками могут иметь только точки границы области, в которой они определены. Каждая рациональная функция есть отношение двух многочленов. Можно показать, что каждая мероморфная функция есть отношение двух регулярных в области функций. Эта задача, очевидно, сводится к задаче построения регулярной функции, имеющей в данной области нули заданной кратности с точками накопления только на границе. Эта задача всегда разрешима, и если $F(z)$ мероморфная функция в D, а $f(z)$ будет регулярная в D функция, имеющая нули только в полюсах $F(z)$, причем той же кратности, то $f(z)F(z)=\varphi(z)$ будет регулярная в D функция и $F(z)$ будет отношением регулярных в D функций. Мы ограничимся здесь только случаем, когда D есть вся плоскость, кроме разумеется, бесконечно удаленной точки.

Пусть имеется последовательность различных между собой точек z_k, стремящаяся к бесконечности, в которых у функции $f(z)$ должны быть нули кратностей, соответственно $p_k \geqslant 1$. Будем считать, что $z_0 \neq 0$ и что $|z_k| \geqslant |z_{k-1}|$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$. Подберем число q_k так, чтобы выполнялось неравенство

$$p_k 2^{-q_k} < \frac{1}{k^2}.$$

Если $|z| < \frac{1}{2}|z_k|$, то

$$\left|p_k\left[\ln\left(1-\frac{z}{z_k}\right)+\sum_{s=1}^{q_k}\frac{z^s}{sz_k^s}\right]\right| <$$

$$< p_k \sum_{q_k+1}^{\infty} \frac{|z|^s}{s|z_k|^s} < p_k \frac{|z|^{q_k}}{|z_k|^{q_k}} < \frac{1}{k^2}.$$

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \left[\ln\left(1-\frac{z}{z_k}\right)+\sum_{s=1}^{q_k}\frac{z^s}{sz_k^s}\right]$$

будет сходящимся в любой точке плоскости, не совпадающей с z_k, а произведение

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{p_k}\exp\sum_{s=1}^{q_k}\frac{z^s}{sz_k^s} \qquad (3.1.7)$$

будет сходящимся при любом конечном z и поэтому не будет иметь других нулей, кроме точек z_k.

Множители $\exp\sum\limits_{s=1}^{q}\frac{z^s}{sz_k^s}$, обеспечивающие сходимость в произведении (3.1.7), называются *множителями Вейерштрасса*.

Итак, мы построили целую функцию с данной последовательностью нулей. Таким же приемом ускорения сходимости мы могли бы воспользоваться для построения мероморфной во всей плоскости функции по заданным ее главным частям в полюсах. Естественно, что мы могли бы построить мероморфную функцию с точностью до целого слагаемого. Действительно, если задана главная часть в точке z_k и $|z|<\frac{1}{2}|z_k|$, то

$$\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{(z_k-z)^m}=\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{z_k^m}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^m}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{z_k^m}\frac{(s+m-1)!}{s!\,(m-1)!}\right)\left(\frac{z}{z_k}\right)^s.$$

Выбирая опять q_k так, чтобы при $|z|<\frac{1}{2}|z_k|$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{(z_k-z)^m}-p_k(z)\right|<\frac{1}{k^2},$$

$$p_k(z)=\sum_{s=0}^{q_k}\left(\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{z_k^m}\frac{(s+m-1)!}{s!\,(m-1)!}\right)\left(\frac{z}{z_k}\right)^s,$$

мы получим, что ряд с теми же главными частями, что и наша мероморфная функция, будет сходящимся во всей плоскости и разность между этим рядом и $f(z)$ есть целая функция $g(z)$. Поэтому

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{p_k}\frac{a_m}{(z_k-z)^m}-p_k(z)\right]+g(z). \quad (3.1.8)$$

Разложение (3.1.8) называется *разложением Миттаг-Леффлера.*

Вблизи изолированной особой точки функция $f(z)$ представлялась рядом Лорана. В окрестности точки z_0, являющейся уже не изолированной, а точкой накопления полюсов для функции $f(z)$, однозначной в этой окрестности, эта функция может быть представлена рядом, обобщающим ряд Лорана. Пусть последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ будет последовательностью полюсов функции $f(z)$, регулярной, за исключением этих точек и точки z_0, в круге $|\zeta-z_0|\leqslant R_0$, $|z_k-z_0|\leqslant$ $\leqslant|z_{k-1}-z_0|<r_0<R_0$, $k=2, 3, \ldots$, причем в этой последовательности каждый полюс будет встречаться столько раз, какова его кратность. По теореме IV, если $r_0<r<|z|<R<R_0$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta+f_1(z), \quad (3.1.9)$$

где $f_1(z)$, будучи интегралом типа Коши, регулярна в круге $|z-z_0|<R_0$, так как R может быть взято сколь угодно близко к R_0. Заменяя в тождестве (2.1.1) ζ на z, а z_0 последовательно на $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и итерируя, мы получаем тождество

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-z_1}+\sum_{1}^{n-1}\frac{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_k)}{(z-z_1)\ldots(z-z_{k+1})}+$$
$$+\prod_{1}^{n}\frac{\zeta-z_k}{z-z_k}\frac{1}{z-\zeta}. \quad (3.1.10)$$

Вставляя правую часть (3.1.10) в (3.1.9) и интегрируя почленно, мы получим представление

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_{-k}}{(z-z_1)\ldots(z-z_{k+1})} + R_n(z) + f_1(z), \\ A_{-k} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_k)\,d\zeta, \\ R_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \prod_1^n \frac{\zeta - z_k}{z - z_k}\,\frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (3.1.11)$$

Каково бы ни было $\rho > 0$, начиная с некоторого $k_0 = k_0(\rho)$ при всех $k \geqslant k_0$, произведение $(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_k) f(\zeta)$ будет регулярно в кольце $\rho \leqslant |\zeta - z_0| < R_0$, так как полюсы $f(\zeta)$ этим множителем последовательно уничтожаются. Беря k достаточно большим, мы получаем тогда, что при $k \geqslant k_0 = k_0(\rho)$

$$|A_{-k}| = \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} f(\zeta)(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_k)\,d\zeta \right| <$$

$$< \rho M_{k_0}(\rho) \prod_{n=k_0+1}^{k} |\zeta - z_n| < \rho M_{k_0}(\rho) \prod_{k_0+1}^{k} (\rho + |z_n - z_0|) <$$

$$< \rho^k e^{o(k)}, \quad M_{k_0}(\rho) = \max_{|\zeta - z_0| = \rho} \left| f(\zeta) \prod_1^{k_0} (\zeta - z_k) \right|, \quad (3.1.12)$$

так как $|z_n - z_0|$ стремится к нулю.

Таким же образом может быть получена оценка для интеграла $R_n(z)$, подынтегральная функция в котором отличается от рассмотренной только множителем, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{|z - \zeta|} \prod_1^k |z - z_n|^{-1} < \frac{C}{|\zeta - z|} \prod_{k_0+1}^{k} (|z - z_0| - |z_0 - z_n|)^{-1} <$$

$$< |z - z_0|^{-k} e^{o(k)}.$$

Из этого неравенства следует, что при $z = z_0$ функция $R_k(z)$ стремится к нулю, так как $|R_k(z)| < \dfrac{\rho^k}{|z - z_0|^k} e^{o(k)}$ и ρ может быть взято сколь угодно малым. Отсюда уже следует окончательно, что

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}}{(z-z_1)\dots(z-z_{k+1})}+f_1(z),\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_{-n}|}=0 \tag{3.1.13}$$

в силу неравенства (3.1.12).

Допустим теперь, что $f(z)$ мероморфна в области, получающейся из плоскости, если выбросить точки $z=z_0$ и $z=\infty$. Тогда $f_1(z)$, являясь интегралом типа Коши, будет регулярна в круге $|z-z_0|<R$ и мероморфна вне круга $|z-z_0|\leqslant R$, $R>R_0$. Пусть опять все полюсы $f_1(z)$ располагаются в порядке возрастания их модулей и имеют аффиксы $\eta_1, \eta_2, \dots, |\eta_k|>R$, причем каждый полюс встречается в последовательности столько раз, какова его кратность. Тогда функция

$$\varphi(\zeta)=f_1\left(z_0+\frac{1}{\zeta}\right)-f_1(z_0)$$

будет мероморфна в круге $|\zeta|<\frac{1}{R}$ и регулярна вне этого круга, причем $|\zeta\varphi(\zeta)|$ будет ограничено вблизи $\zeta=\infty$. В точках $\frac{1}{\eta_k-z_0}$ функция $\varphi(\zeta)$ будет иметь полюсы. Тогда, заменяя в (3.1.13) $f(z)$ на $\varphi(\zeta)$, мы будем иметь

$$\varphi(\zeta)=\sum_{1}^{\infty}\frac{B_k}{\left(\zeta-\frac{1}{\eta_1-z_0}\right)\dots\left(\zeta-\frac{1}{\eta_k-z_0}\right)}+\varphi_1(\zeta),$$

где коэффициенты B_k определяются аналогично A_k. Но при достаточно больших ρ

$$|\varphi_1(\zeta)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\xi|=\rho}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-\zeta}\,d\xi\right|<O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Значит, $\varphi_1(\zeta)\equiv 0$, и после простых преобразований, полагая $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$, мы будем иметь

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}}{(z-z_1)\dots(z-z_{k+1})}+A_0+\\+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(z-z_0)^k}{\prod\limits_{n=1}^{k}\left(1-\frac{z-z_0}{\eta_n-z_0}\right)}, \tag{3.1.14}$$

где

$$A_k = B_{-k},\ A_0 = f_1(z_0)\ \text{и}$$
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|A_k|} = 0.$$

Более подробные сведения о целых и мероморфных функциях можно найти в книгах [7]—[9].

п° 2. Гамма-функция Эйлера

Гамма-функция $\Gamma(s)$ играет очень большую роль в анализе. Она определяется равенством

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt,\quad s = x + iy,\ x > 0. \tag{3.2.1}$$

Так как интеграл и его производная по s, которая существует при $x > 0$, абсолютно и равномерно сходятся при $0 < x_0 \leqslant x \leqslant R, |y| < R$, при любых x_0 и R, то $\Gamma(s)$ аналитическая функция в правой полуплоскости. Если один раз проинтегрировать по частям интеграл справа, то мы получаем функциональное уравнение для $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1), \tag{3.2.2}$$

из которого следует, что $\Gamma(s)$ можно неограниченно продолжать налево от мнимой оси. Разобьем интеграл на две части. Мы получим

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt =$$
$$= \int_0^1 t^{s-1} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n t^n}{n!}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt =$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)} + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt,$$

т. е.

$$\Gamma(s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)} + \int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt. \tag{3.2.3}$$

Так как интеграл в правой части (3.2.3) сходится, вместе со своей производной, абсолютно и равномерно в любом круге $|s| \leqslant R$, то этот интеграл будет целой аналитической функцией s, и мы видим, что $\Gamma(s)$ — мероморфная функция с простыми полюсами в точках $s=0, -1, -2, \ldots$

Для дальнейшего исследования поведения $\Gamma(s)$ нам будут нужны две асимптотические оценки конечных сумм. Первая — это оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2.4}$$

Эта оценка хорошо известна и легко получается из следующих соображений. Из неравенства

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{pk^p} < \frac{1}{2k^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

следует, что если обозначить

$$C = \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] > 0,$$

то

$$C = \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{1}^{n-1} \ln\frac{1+k}{k} + \sum_{n}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right],$$

и

$$0 < C - \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln n < \sum_{n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n},$$

что эквивалентно (3.2.4). Таким образом определенное C называется *постоянной Эйлера*. Другая нужная нам оценка есть *формула Стирлинга*, которую мы сейчас докажем.

Пусть $s = x + iy$, $-1 < x < 2$ и n-большое целое число. Тогда в силу функционального уравнения

$$\Gamma(s+n+2) = (s+n+1)(s+n)(s+n-1)\ldots(s+1)\Gamma(s+1),$$

имеем

$$\Gamma(s+1)=\frac{\Gamma(s+n+2)}{(1+s)\dots(n+s)(n+s+1)}=$$

$$=\frac{1}{(1+s)\dots(n+s+1)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{s+n+1}dt,$$

откуда, проводя в интеграле замену $t=u(n+1)$, получаем $\Gamma(s+1)=$

$$=\frac{(1+n)^{s+n+2}\,e^{-n-1}}{(1+s)\dots(1+s+n)}\int_0^\infty (e^{1-u}\,u)^n\,u^{s+1}\,e^{-u+1}du.$$

Так как функция $e^{1-t}t=\varphi(t)$, производная которой равна $\varphi'(t)=e^{1-t}(1-t)$, принимает максимум, равный единице в точке $t=1$, то, если

$$\varepsilon=\frac{\ln n}{\sqrt{n}},$$

$$\left|\int_0^{1-\varepsilon}(e^{1-t}\,t)^n\,t^{s+1}\,e^{-t+1}\,dt\right|<\int_0^{1-\varepsilon}e^{1-t}\,dt\,e^{[\varepsilon+\ln(1-\varepsilon)]\,n}<$$

$$<3e^{-n\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}+\dots\right)}<3e^{-\frac{1}{2}\ln^2 n}$$

и

$$\left|\int_{1+\varepsilon}^\infty (e^{1-t}\,t)^n\,t^{s+1}\,e^{-t+1}\,dt\right|<\int_0^\infty t^3\,e^{1-t}\,dt\,e^{-[\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)]\,n}<$$

$$<6e^{-n\left[\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^3}{3}\right]}=6e^{-\frac{\ln^2 n}{2}+\frac{\ln^3 n}{3\sqrt{n}}}<9e^{-\frac{\ln^2 n}{2}},\quad n>n_0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\left|\int_0^\infty (e^{1-t}t)^n\,t^{s+1}\,e^{-t+1}\,dt-\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}(e^{1-t}\,t)^n\,t^{s+1}\,e^{-t+1}\,dt\right|<$$

$$<4e^{-\frac{\ln^2 n}{2}},\quad n>n_0.$$

Далее,

$$\int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} (e^{1-t}t)^n\, t^{s+1}\, e^{-t+1}\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n\,[t_1 - \ln(t_1+1)]}\,(1+t_1)^{s+1}\, e^{-t_1}\, dt_1 =$$

$$= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n[t-\ln(1+t_1)]}\, dt_1 + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n\,[t_1-\ln(t_1+1)]} \times$$

$$\times [(1+t_1)^{s+1}e^{-t_1} - 1]\, dt_1.$$

Но так как, снова заменяя t_1 на $n^{-\frac{1}{2}}t$, мы имеем

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n\,[t_1-\ln(1+t_1)]}\, dt_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3\sqrt{n}}-\frac{t^4}{4n}+\dots}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}-\frac{t^4}{4n}+\dots} - 1 \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + O\left(e^{-\frac{\ln^2 n}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} O\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n}\right),$$

и при $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|(1+t)^{s+1}e^{-t} - 1| = |[(1+t)^{s+1} - 1]\, e^{-t} + e^{-t} - 1| <$$

$$< |(s+1) \int\limits_0^t (1+y)^s\, dy| + |t| < 4\,|s+1|\,|t| + |t| <$$

$$< 4\,(|s|+2)\,\varepsilon = \frac{4\,(|s|+2)\ln n}{\sqrt{n}},$$

то окончательно

$$\left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n\,[t-\ln(1+t)]}\, [(1+t)^{s+1}e^{-t} - 1]\, dt \right| <$$

$$< \frac{4\,(|s|+2)}{\sqrt{n}} \ln n \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-n[t-\ln(1+t)]}\, dt < \frac{24\,(|s|+2)\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} (e^{1-t}\,t)^n\, t^{s+1} e^{1-t}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{(|s|+2)\ln^3 n}{n}\right).$$

Теперь имеет место заключительная оценка, именно, что

$$\Gamma(s+1) = \frac{(n+1)^{s+n+2}\,e^{-n-1}}{(1+s)\dots(1+n+s)}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n+1}} + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{(|s|+2)\ln^3(n+1)}{n+1}\right)\right]. \quad (3.2.5)$$

Полагая здесь $s=0$, мы будем иметь, что

$$\Gamma(1) = 1 = \frac{(n+1)^{n+1}\,e^{-(n+1)}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(n+1)!} \times$$

$$\times\left[1 + O\left(\frac{\ln^3(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)\right],$$

откуда

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1}\,e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)} \times$$

$$\times\left[1 + O\left(\frac{\ln^3(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)\right]. \quad (3.2.6)$$

Заменяя n на $n-1$ и логарифмируя, получаем *формулу Стирлинга*

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi n + O\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.2.7)$$

Заменяя в (3.2.5) s на $s-1$ и умножая и деля знаменатель на $n!$, мы будем теперь иметь

$$\Gamma(s)=\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}+s}e^{-n-1}\sqrt{2\pi}}{s\prod\limits_{1}^{n}\left(1+\frac{s}{k}\right)n!}\left[1+O\left(\frac{(|s|+2)\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right)\right]=$$

$$=\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}\,\frac{n^s\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}+s}e^{-1}}{s\prod\limits_{1}^{n}\left(1+\frac{s}{k}\right)}\times$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{|s|+2}{\sqrt{n}}\ln^3 n\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{-Cs}}{s\prod\limits_{1}^{n}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}}\left[1+O\left(\frac{(|s|+2)\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

так как из (3.2.4) следует, что

$$n^s e^{-\sum\limits_{1}^{n}\frac{s}{k}}=e^{-\left(\sum\limits_{1}^{n}\frac{s}{k}-s\ln n\right)}=e^{-s\left[C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=$$

$$=e^{-Cs}\left[1+O\left(\frac{|s|+1}{n}\right)\right].$$

Переходя к пределу, мы имеем, что при $n\to\infty$

$$\Gamma(s)=\frac{e^{-Cs}}{s\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}}. \tag{3.2.8}$$

Мы получили разложение $\Gamma(s)$ в бесконечное произведение, сходящееся при любом $s\neq 0, -1, -2, \ldots$ Его сходимость следует из того, что при $k>2|s|$

$$\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}=e^{-\frac{s}{2k^2}+\frac{s}{3k^3}-\cdots},\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

Равенство (3.2.8) доказано только в предположении $-1<x<2$, $|y|<\infty$, $s=x+iy$. Но слева и справа стоят аналитические функции и для справедливости представления (3.2.8) во всей плоскости достаточна его справедливость на любом отрезке, что и имеет место. Поэтому (3.2.8) справедливо всюду, кроме $s=0,\ -1,\ -2,\ \dots$

С помощью (3.2.5) можно получить оценку, аналогичную (3.2.6) для комплексных s. Пусть $s=re^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi-\alpha$, $\alpha>0$, фиксировано и любое. В этих предположениях мы и получим нужную нам оценку. Прежде всего заметим, что при этом предположении и $k\geqslant 0$

$$|s+k|^2=(r\cos\varphi+k)^2+r^2\sin^2\varphi=$$
$$=r^2+k^2+2kr-2kr(1-\cos\varphi)=$$
$$=(k+r)^2-4kr\sin^2\frac{\varphi}{2}>(r+k)^2\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant(r+k)^2\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)>0,$$

так как $4kr\leqslant(r+k)^2$.

Поэтому

$$O\left(\frac{1}{|s+k|^p}\right)=O\left[\frac{1}{(r+k)^p}\right]=O\left(\frac{1}{(|s|+k)^p}\right). \quad (3.2.9)$$

Далее, так как

$$(s+k)\ln(s+k)-(s+k-1)\ln(s+k-1)-$$
$$-\frac{1}{2}[\ln(s+k)-\ln(s+k-1)]-(s+k)+(s+k-1)=$$
$$=(s+k)\ln(s+k)-(s+k)\ln(s+k)+\ln(s+k-1)+$$
$$+1+\frac{1}{2(s+k)}+O\left(\frac{1}{|s+k|^2}\right)-\frac{1}{2(s+k)}+O\left(\frac{1}{(s+k)^2}\right)-$$
$$-1=\ln(s+k-1)+O\left(\frac{1}{(|s|+k)^2}\right),$$

то, суммируя обе части по k от 1 до n, мы получаем, что

$$\sum_1^n\ln(s+k-1)=\ln\prod_1^n(s+k-1)=$$
$$=(s+n)\ln(s+n)-s\ln s-\frac{1}{2}\ln(s+n)+$$

$$+\frac{1}{2}\ln s - s - n + s + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(|s|+k)^2}\right) =$$

$$= (s+n)\ln n - n + O\left(\frac{|s|^2}{n}\right) - s\ln s - \frac{1}{2}\ln n +$$

$$+\frac{1}{2}\ln s + O\left(\frac{1}{|s|}\right) = -s\ln s + s + \frac{1}{2}\ln s + (s+n)\ln n -$$

$$- n - \frac{1}{2}\ln n + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

так как $n \geqslant |s|^3$ и

$$\sum_1^n \frac{1}{(|s|+k)^2} = \sum_1^{k \leqslant |s|}\frac{1}{(|s|+k)^2} + \sum_{k \geqslant |s|}^{n}\frac{1}{(|s|+k)^2} <$$

$$< |s|\sum_1^k \frac{1}{|s|^2} + \sum_{k \geqslant |s|}^{n}\left(\frac{1}{k+|s|-1} - \frac{1}{k+|s|}\right) < \frac{2}{|s|}.$$

Таким образом,

$$\sum_1^n \ln(s+k-1) =$$

$$= -s\ln s + s + \frac{1}{2}\ln s + (s+n)\ln n - n - \frac{1}{2}\ln n + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Заменяя опять в (3.2.5) n на $n-1$, s на $s-1$ и логарифмируя, мы получаем вследствие (3.2.10), что

$$\ln\Gamma(s) = \ln\sqrt{2\pi} + (s+n)\ln n - \frac{1}{2}\ln n + O\left(\frac{1}{|s|}\right) -$$

$$- \ln\prod_1^n (s+k-1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + (s+n)\ln n -$$

$$- \frac{1}{2}\ln n + O\left(\frac{1}{|s|}\right) + s\ln s - s - \frac{1}{2}\ln s -$$

$$- (s+n)\ln n + n - n - \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln n =$$

$$= s\ln s - s - \frac{1}{2}\ln s + O\left(\frac{1}{|s|}\right) + \frac{1}{2}\ln 2\pi,$$

т. е.

$$\ln\Gamma(s) = s\ln s - s - \frac{1}{2}\ln s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \quad (3.2.11)$$

В частности, полагая в формуле (3.2.11) $s=x+iy$, мы получаем при фиксированном x и растущем y следующую оценку:

$$\ln\Gamma(x+iy)=-\frac{\pi y}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln y+$$
$$+i\left(y\ln y-y+\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{y}\right). \quad (3.2.12)$$

Действительно,

$$(x+iy)\ln(x+iy)=$$
$$=(x+iy)\ln y+(x+iy)\ln\left(1+\frac{x}{iy}\right)+(x+iy)\frac{\pi i}{2}=$$
$$=-\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi x}{2}i+x\ln y-iy\ln y+x+O\left(\frac{1}{y}\right),$$
$$-\frac{1}{2}\ln(x+iy)=-\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x}{iy}\right)-\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln y-\frac{\pi i}{4}+O\left(\frac{1}{y}\right),$$

откуда с помощью формулы (3.2.11) получаем формулу (3.2.12). Из этой последней оценки следует неравенство

$$|\Gamma(x\pm yi)|<e^{-\frac{\pi y}{2}}y^{x-\frac{1}{2}}e^{O\left(\frac{1}{y}\right)}, \quad (3.2.13)$$

так как $|\Gamma(x+iy)|=|\Gamma(x-iy)|$, $y>0$.

Наконец, докажем, что

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}. \quad (3.2.14)$$

Действительно, если $s=x+iy$, $0<x<1$, то после простых замен переменных

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t_1-t_2}t_1^{s-1}t_2^{-s}\,dt_1dt_2=$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+t_1)t_2}t_1^{s-1}\,dt_2dt_1=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t_2}\frac{t_1^{s-1}}{1+t_1}\,dt_1dt_2=$$
$$=\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

вследствие (2.3.15). Отсюда имеем, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Это же соотношение может быть получено и с помощью (3.2.8) и (2.3.11). Действительно,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=-s\Gamma(s)\Gamma(-s)=$$

$$=\frac{-se^{-Cs}e^{Cs}}{-s^2\prod_1^\infty\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}\left(1-\frac{s}{k}\right)e^{\frac{s}{k}}}=$$

$$=\frac{1}{s\prod_1^\infty\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Из (3.2.8) следует также теорема сложения для $\Gamma(s)$, именно, соотношение

$$\Gamma(s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \tag{3.2.15}$$

Для доказательства этого тождества преобразуем произведение для $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$. Заметив, что $\ln 2=\sum_1^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, мы будем иметь

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{2e^{-C\frac{s}{2}-\frac{C}{2}}}{(s+1)\prod_1^\infty\left(1+\frac{s+1}{2n}\right)e^{-\frac{s+1}{2n}}}=$$

$$=\frac{4e^{-\frac{C}{2}}e^{-\frac{Cs}{2}}}{(1+s)e^{-s}e^s\prod_1^\infty\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}\left(1+\frac{s}{2n+1}\right)e^{-\frac{s}{2n+1}}\right.}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{e^{\frac{s}{2n+1}-\frac{s}{2n}}}\right]=\frac{ae^{-\frac{Cs}{2}}}{\prod_0^\infty\left(1+\frac{s}{2n+1}\right)e^{-\frac{s}{2n+1}}e^{s\ln 2}},$$

где a — постоянная, так как $\prod\limits_1^\infty \left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}$ сходится.

Рассмотрим теперь произведение

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{2e^{-\frac{Cs}{2}}}{s\prod\limits_1^\infty\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}}\times$$

$$\times\frac{ae^{-\frac{Cs}{2}}}{2^s\prod\limits_0^\infty\left(1+\frac{s}{2n+1}\right)e^{-\frac{s}{2n+1}}}=2a2^{-s}\Gamma(s).$$

Для определения постоянной $2a$ достаточно положить $s=1$. Мы будем иметь равенство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=a,$$

откуда следует (3.2.15).

Пусть $0<\operatorname{Re} s<2$. Покажем, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin z}{z^s}\,dz=\cos\frac{\pi}{2}s\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s}. \qquad (3.2.16)$$

Из этого тождества следует, в частности, при $s=1$, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \qquad (3.2.17)$$

Для доказательства (3.2.16) рассмотрим функцию $z^{-s}e^{zi}$, $0<\operatorname{Re} s<1$, на лучах $(0,\ \infty)$ и $(0,\ i\infty)$ и внутри прямого угла между ними. На четверти окружности $|z|=r$, $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$ при $\operatorname{Re} s=\sigma$, $0<\sigma<1$ имеем

$$|z^{-s}e^{zi}|<e^{\frac{\pi}{2}|s|}r^{-\sigma}|e^{ire^{i\varphi}}|<e^{\frac{\pi}{2}|s|}r^{-\sigma}e^{-r\sin\varphi}.$$

Поэтому интеграл, взятый по этой четверти окружности от $e^{iz}z^{-s}$, будет удовлетворять неравенству

$$\left|\int\limits_C e^{iz}z^{-s}\,dz\right| < e^{\frac{\pi}{2}|s|}r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi}r^{-\sigma}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\pi}{2}|s|}r^{1-\sigma}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r\sin\varphi}\,d\varphi + \frac{\pi}{4}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}\right] <$$

$$< e^{\frac{\pi}{2}|s|}r^{1-\sigma}\left[\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{\pi}{4}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}\right] =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}|s|}r^{1-\sigma}\left[\frac{\sqrt{2}\left(1-e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right)}{r} + \frac{\pi}{4}e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right] = O(r^{-\sigma}),$$

если r велико.

Совершенно так же, на окружности $|z| = r_0$, если r_0 мало,

$$\left|\int\limits_C e^{iz}z^{-s}\,dz\right| < e^{\frac{\pi|s|}{2}+1}\,2\pi r_0 r_0^{-\sigma} = O(r_0^{1-\sigma}).$$

Поэтому, учитывая, что внутри прямого угла между положительными направлениями действительной и мнимой осей нет полюсов $e^{iz}z^{-s}$, мы из (2.3.13), условия для которого выполнены, получаем, что

$$\int\limits_0^\infty e^{ix}x^{-s}\,dx = ie^{-is\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{-s}dx = ie^{-is\frac{\pi}{2}}\Gamma(1-s):$$

Будем считать временно, что s действительно $0 < s < 1$. Тогда мы можем считать, что $\Gamma(1-s)$ действительно, и приравнять между собой действительные и мнимые части, и будем иметь

$$\int\limits_0^\infty x^{-s}\cos x\,dx = \sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s) \qquad (3.2.18)$$

и

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\,dx = \cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s). \qquad (3.2.19)$$

Последний интеграл сходится при $0<\operatorname{Re} s<2$ и абсолютно сходится при $1<\operatorname{Re} s<2$. Формулы (3.2.14) и (3.2.19) дают (3.2.16).

Функция $\Gamma(s)$ связана с так называемым эйлеровым интегралом $B(z, s)$,

$$B(z, s)=\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{s-1}\,dx=\frac{\Gamma(z)\Gamma(s)}{\Gamma(z+s)}, \quad (3.2.20)$$

причем $B(z, s)$ имеет смысл при $\operatorname{Re} s>0$, $\operatorname{Re} z>0$.

Докажем (3.2.20), предполагая s и z действительными, $s>1$ и $z>1$. Этого достаточно, так как для всех значений s и z, $\operatorname{Re} s>0$, $\operatorname{Re} z>0$, (3.2.20) будет следовать в силу теоремы единственности аналитических функций. При наших предположениях, производя замены переменных, мы будем иметь

$$\Gamma(s)\Gamma(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{s-1}y^{z-1}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y(x+1)}x^{s-1}y^{z+s-1}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y}y^{z+s-1}\frac{x^{s-1}}{(x+1)^{z+s}}\,dy\,dx=$$

$$=\Gamma(s+z)\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{(x+1)^{s+z}}\,dx\ \Gamma(s+z)\int_0^1 y^{s-1}(1-y)^{z-1}\,dy,$$

делая в последний раз замену $x=\dfrac{y}{1-y}$.

Наконец, дадим еще представление $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$, верное при $\operatorname{Re} s>0$:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{z}z^{-s}\,dz,\ \operatorname{Re} s>0,\ \sigma>0. \quad (3.2.21)$$

Докажем его при $0<\operatorname{Re} s<1$. Оно будет тогда верно всегда в силу аналитичности левой и правой частей равенства. Итак, пусть $\operatorname{Re} s=\theta$, $0<\theta<1$. Передвинем прямую $\operatorname{Re} z=\sigma$ в положение $\operatorname{Re} z=0$. Это можно сделать ввиду того, что на перемычке между прямыми подынтегральная функция убывает, как $|z|^{-\theta}$, что достаточно для стремления интеграла по перемычке длины σ к нулю. Разрежем плоскость z от $-\infty$ до 0. В такой разрезанной плоскости z^{-s} будет однозначна, на верхнем разрезе мы будем иметь $z^{-s}=r^{-s}e^{-\pi i s}$, а на нижнем $z^{-s}=r^{-s}e^{-\pi i s}$. Интеграл от нуля до $i\infty$ вдоль мнимой оси можно заменить интегралом вдоль верхнего разреза плоскости, так как интеграл по четверти окружности, замыкающий прямой угол, будет стремиться к нулю с ростом радиуса окружности. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R\\ \frac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant \pi}} e^{z} z^{-s}\,dz\right| \leqslant CR^{1-\theta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{R\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= CR^{1-\theta}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi <$$

$$< CR^{1-\theta}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\varphi} e^{-R\sin\varphi}\,d\sin\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi\right] =$$

$$= O(R^{-\theta}).$$

По той же причине интеграл вдоль мнимой оси от $-i\infty$ до 0 можно заменить интегралом вдоль нижней кромки разреза плоскости z. Мы будем тогда иметь, что

$$\frac{e^{\pi i s}-e^{-\pi i s}}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} x^{-s}\,dx = \frac{\sin \pi s}{\pi}\Gamma(1-s),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z} z^{-s}\,dz = \frac{\sin \pi s}{s}\Gamma(1-s) = \frac{1}{\Gamma(s)}$$

в силу (3.2.14).

n° 3. Формула суммирования Эйлера и уточнение асимптотической оценки Γ (s)

Мы изложим здесь коротко вывод формулы суммирования Эйлера, отсылая читателей за подробностями, например, к книге [5].

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\frac{t}{e^t-1}=1+\sum_1^\infty \frac{B_k}{k!}t^k. \tag{3.3.1}$$

Так как в нуле она правильная и имеет только в точках $t=\pm 2k\pi i$ полюсы первого порядка, то ряд (3.3.1) сходится в круге $|t|<2\pi$. Делая замену t на $-t$, мы получаем, что

$$\varphi(-t)=1+\sum_1^\infty(-1)^k\frac{B_k}{k!}t^k=\frac{-t}{e^{-t}-1}=\frac{te^t}{e^t-1}=$$
$$=t+\frac{t}{e^t-1}=1+(1+B_1)\,t+\sum_2^\infty\frac{B_k}{k!}t^k,$$

откуда следует, что

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_{2k+1}=0,\ k=1,2,\ldots \tag{3.3.2}$$

Числа B_k называются *числами Бернулли*. Далее определим многочлены Бернулли $B_k(x)$ из соотношения

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^\infty\frac{B_k}{k!}t^k\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}t^n=\sum_0^\infty\frac{B_k(x)}{k!}t^k, \tag{3.3.3}$$

$$B_n(0)=B_n,\ B_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{n!\,B_n}{k!(n-k)!}x^{n-k},\ B_1(x)=x-\frac{1}{2}.$$

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые свойства многочленов Бернулли. Прежде всего заметим, что

$$B_n(x)=(-1)^n B_n(1-x),\ B_n(1)=(-1)^n B_n(0)=$$
$$=(-1)^n B_n=B_n,\ n\geqslant 2. \tag{3.3.4}$$

Действительно, заменяя x на $1-x$ в (3.3.3), мы получаем, что

$$\frac{te^{t-tx}}{e^t-1}=\frac{-te^{-tx}}{e^{-t}-1}=\sum_0^\infty(-1)^k\frac{B_k(x)}{k!}t^k,$$

откуда и следует (3.3.4).

Далее имеет место связь

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x). \tag{3.3.5}$$

В самом деле, дифференцируя по x, получаем, что

$$\frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_0^\infty \frac{B'_n(x)}{n!} t^n = \sum_1^\infty \frac{nB_{n-1}(x)}{n!} t^n,$$

откуда и следует (3.3.5).

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t+z)\,dt = R_n(z), \tag{3.3.6}$$

предполагая при этом существование нужного числа производных $f(z)$. Интегрируя по частям и пользуясь (3.3.4) и (3.3.5), получаем:

$$R_{2n}(z) = \frac{B_{2n}(1)}{2n!} f^{(2n-1)}(z+1) - \frac{B_{2n}(0)}{2n!} f^{(2n-1)}(z) - \\ - R_{2n-1}(z) = \frac{B_{2n}}{2n!} \Delta f^{(2n-1)}(z) - R_{2n-1}(z),$$

$$\Delta\varphi(z) = \varphi(z+1) - \varphi(z).$$

Повторяя интегрирование по частям для $R_{2n-1}(z)$ и принимая во внимание, что $B_{2n-1}(1) = B_{2n-1}(0) = 0$, $n \geqslant 1$, получаем $R_{2n}(z) = \frac{B_{2n}}{2n!} \Delta f^{(2n-1)}(z) + R_{2n-2}$.

Отсюда следует, что

$$R_{2n}(z) = \sum_{k=2}^{n} \frac{B_{2k}}{2k!} \Delta f^{(2k-1)}(z) + R_2(z).$$

Но так как

$$R_2(z) = \frac{B_2}{2!} \Delta f'(z) - \int_0^1 B_1(t) f'(z+t)\,dt =$$

$$= \frac{B_2}{2!} \Delta f'(z) - \frac{1}{2} f(z+1) - \frac{1}{2} f(z) + \int_0^1 f(z+t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \Delta f(z) + \frac{B_2}{2!} \Delta f'(z) - f(z) + \int_0^1 f(z+t)\,dt,$$

то, окончательно выражая $f(z)$ из последнего равенства и заменяя z на $z+\nu$, получаем, что

$$f(z+\nu)=\int_{\nu}^{\nu+1} f(z+t)\,dt-\frac{1}{2}\Delta f(z+\nu)+$$
$$+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k!}\Delta f^{(2k-1)}(z+\nu)-\int_{0}^{1}\frac{B_{2m}(t)}{2m!}f^{(2m)}(z+\nu+t)\,dt. \tag{3.3.7}$$

Суммируя по ν от нуля до $n-1$, получаем формулу суммирования Эйлера, именно,

$$\sum_{0}^{n-1} f(z+\nu)=\int_{0}^{n} f(z+t)\,dt-\frac{1}{2}[f(z+n)-f(z)]+$$
$$+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k!}[f^{(2k-1)}(z+n)-f^{(2k-1)}(z)]+T_{2m}(z,n), \tag{3.3.8}$$
$$T_{2m}(z,n)=-\int_{0}^{1}\frac{B_{2m}(t)}{2m!}\sum_{0}^{n-1} f^{(2m)}(z+\nu+t)\,dt.$$

Мы получили остаточный член T_{2m} именно в такой форме, так как нам нужно будет пользоваться этой формулой при $|z|$, n и $|z+n|$ больших и при быстром убывании $f^{(n)}(s)$, $|s|\to\infty$. Получим теперь более точную, чем раньше, оценку $\Gamma(s)$ при $|s|\to\infty$.

Предположим, как и выше, что $s=re^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi-\alpha$, $\alpha>0$ и $n\geqslant|s|^3=r^3$. Тогда, беря в качестве $f(z)$ функцию $\ln z$, мы получим вместо (3.2.10) более точное соотношение, именно

$$\sum_{0}^{n-1}\ln(s+k)=\int_{0}^{n}\ln(s+t)\,dt-\frac{1}{2}[\ln(s+n)-\ln s]+$$
$$+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\left[\frac{1}{(s+n)^{2k-1}}-\frac{1}{s^{2k-1}}\right]+O\left(\frac{1}{|s|^{2m-1}}\right).$$

Так как при наших предположениях относительно s и n имеет место (3.2.9) и

$$|T_{2m}(s,n)|=O\left[\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{(|s|+n)^{2m}}\right]=O\left(\frac{1}{|s|^{2m-1}}\right).$$

Отсюда уже следует, что

$$\sum_{1}^{n}\ln(s+k-1)=(s+n)\ln(s+n)-s\ln s-n-$$
$$-\frac{1}{2}[\ln(s+n)-\ln s]+$$
$$+\sum_{1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\left[\frac{1}{(s+n)^{2k-1}}-\frac{1}{s^{2k-1}}\right]+O\left(\frac{1}{|s|^{2m-1}}\right).$$

Заменяя в (3.2.5) опять s на $s-1$, n на $n-1$ и логарифмируя, мы получаем, что

$$\ln\Gamma(s)=(s+n)\ln n-n-\frac{1}{2}\ln n+\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-$$
$$-\sum_{1}^{n}\ln(s+n-1)=-(s+n)\ln(s+n)+s\ln s+n+$$
$$+\frac{1}{2}\ln(s+n)-\frac{1}{2}\ln s+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}s^{-2k+1}+$$
$$+O\left(\frac{1}{|s|^{2m-1}}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+(s+n)\ln n-n-\frac{1}{2}\ln n+$$
$$+\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=s\ln s-(s+n)\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\ln s+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}s^{-2k+1}+$$
$$+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Считая $|\arg s|<\pi-\alpha$, $\alpha>0$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем окончательно, что

$$\ln\Gamma(s)=s\ln s-s-\frac{1}{2}\ln s+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$
$$+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}s^{-2k+1}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right),\tag{3.3.9}$$

или, потенцируя, что

$$\Gamma(s)=s^{s}e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left[1+\sum_{1}^{2m}C_k s^{-k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right)\right],\tag{3.3.10}$$

где числа C_k можно выразить через B_{2k}.

В дальнейшем нам понадобится асимптотическая связь между $\Gamma^p(s)$ и $\Gamma\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)$. Для установления этой связи заменим в (3.3.9) s на $ps-\frac{p-1}{2}$. Имеем

$$\ln\Gamma\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)=$$

$$=\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\ln\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)-ps+\frac{p-1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+\sum_{1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m-1}}\right).$$

Преобразуем правую часть. Заметим сначала, что

$$\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\ln\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)-ps+\frac{p-1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)=\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\ln ps+$$

$$+\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{p-1}{2ps}\right)-ps+\frac{p-1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln ps-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{p-1}{2ps}\right)=ps\ln ps-\frac{p}{2}\ln s-ps-$$

$$-\frac{p}{2}\ln p+\sum_{k=1}^{2m}\frac{B'_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right),$$

так как

$$-\frac{1}{2}\ln\left[1-\frac{p-1}{2ps}\right]+\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\ln\left[1-\frac{p-1}{2ps}\right]+$$

$$+\frac{p-1}{2}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{B'_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right),$$

и что

$$\sum_1^m \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\,\frac{1}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)^{2k-1}}=\sum_1^{2m}\frac{B''_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right),$$

в силу того, что

$$\frac{1}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)^q}=\frac{1}{(ps)^q}\,\frac{1}{\left(1-\frac{p-1}{2ps}\right)^q}=\sum_1^{2m}\frac{B'''_k}{s^k}+$$
$$+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right).$$

Мы окончательно получаем

$$\ln\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)=ps\ln ps-\frac{p}{2}\ln s-ps-\frac{p}{2}\ln p+$$
$$+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{k=1}^{2m}\frac{\overline{B}_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right), \quad (3.3.11)$$

где B'_k, B''_k, B'''_k и $\overline{B}_k$ — некоторые постоянные.

Умножим теперь (3.3.9) на p и вычтем почленно из (3.3.11). Мы приходим к равенству

$$\ln\frac{\Gamma\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma^p(s)}=ps\ln p-\ln\gamma_p+\sum_1^{2m}\frac{\theta_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2m+1}}\right),$$

где $\gamma_p=p^{\frac{p}{2}}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}$. Потенцируя, мы получаем, что

$$\Gamma^{-p}(s)\Gamma\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)=$$
$$=p^{ps}\gamma_p^{-1}\left[1+\sum_1^{2m}\frac{\theta'_k}{s^k}+O\left(\frac{1}{|s|^{2k+1}}\right)\right]=p^{ps}\gamma_p^{-1}\left[1+\right.$$
$$+\sum_1^m\frac{a_k}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\left(ps-\frac{p-1}{2}+1\right)\dots\left(ps-\frac{p-1}{2}+k-1\right)}+$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{|s|^{m+1}}\right)\right],$$

так как при больших $|s|$

$$\frac{1}{s^k}=\frac{p^k}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\dots\left(ps-\frac{p-1}{2}+k-1\right)}+$$
$$+\frac{d_2}{\left(ps-\frac{p-1}{2}\right)\dots\left(ps-\frac{p-1}{2}+k\right)}+\dots,$$

где d_2, d_3, ... постоянные, и $2m$ можно заменить m. Предполагая, что $s=\sigma\pm it$, $t>0$, мы получаем окончательно, что

$$\frac{1}{\Gamma^p(s)}=\gamma_p^{-1}p^{ps}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{\Gamma\left(ps-\frac{p-1}{2}+k\right)}+\right.$$
$$\left.+O\left(e^{\frac{\pi pt}{2}}t^{p\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-m-1}\right)\right], \quad (3.3.12)$$

где $a_0=1$, a_1, ..., a_m постоянные, вследствие (3.3.11), которые можно вычислить, зная B_2, B_4, ...

Связи типа (3.3.12) можно получать и в более общих случаях. Пусть

$$p_1\geqslant p_2\geqslant\dots\geqslant p_n>0,\ q_1\geqslant q_2\geqslant\dots\geqslant q_m>0;\ \alpha_1,\dots,\alpha_n,\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_m$$

— действительные числа,

$$r=\sum_1^n p_k-\sum_1^m q_k,\quad \theta=\sum_1^n\alpha_k-\sum_1^m\beta_k-\frac{n-m-1}{2},$$

$$\gamma=(2\pi)^{\frac{m+1-n}{2}}r^{\theta-\frac{1}{2}}\prod_1^m q_k^{\beta_k-\frac{1}{2}}\prod_1^n p_k^{\frac{1}{2}-\alpha_k},$$

$$V=r^r\frac{\prod_1^m q_k^{q_k}}{\prod_1^n p_k^{p_k}}.$$

Тогда будет при $r>0$ иметь место асимптотическое соотношение

$$\frac{\prod_1^m \Gamma(q_k s+\beta_k)}{\prod_1^n \Gamma(p_k s+\alpha_k)}=\gamma V^s\left[\frac{a_0}{\Gamma(rs+\theta)}+\ldots+\frac{a_N}{\Gamma(rs+\theta+N)}+\right.$$
$$\left.+O\left(e^{\frac{\pi r t}{2}}t^{-\sigma r-\frac{1}{2}-\theta-N}\right)\right],\quad a_0=1, \qquad (3.3.13)$$

если $s=\sigma\pm it$, $t>0$ и σ фиксировано.

Доказательство (3.3.13) ничем не отличается от доказательства (3.3.12) и получается простым подсчетом. Если же $r=0$, $\quad \theta=\sum_1^n \alpha_k-\sum_1^m \beta_k-\frac{n-m}{2}$,

$$\gamma=(2\pi)^{\frac{m-n}{2}}\prod_1^m q_k^{\beta_k-\frac{1}{2}}\prod_1^n p_k^{\alpha_k-\frac{1}{2}},\quad V=\frac{\prod_1^m q_k^{q_k}}{\prod_1^n p_k^{p_k}},$$

то

$$\frac{\prod_1^m \Gamma(q_k s+\beta_k)}{\prod_1^n \Gamma(p_k s+\alpha_k)}=\gamma V^s\left[\frac{a_1\Gamma(s)}{\Gamma(s+\theta)}+\ldots+\frac{a_N\Gamma(s)}{\Gamma(s+\theta+N)}+\right.$$
$$\left.+O\left(t^{-\theta-N-1}\right)\right]. \qquad (3.3.14)$$

Доказываются эти связи так же, как и (3.3.12).

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

n° 1. Свойства дзета-функции Эйлера — Римана

Дзета-функцией называют функцию $\zeta(s)$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \qquad (4.1.1)$$

Так как этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} s>1+\sigma$, $\sigma>0$, $|s|<R$, где σ произвольно мало, а R сколь угодно велико, то $\zeta(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s>1$. Для того чтобы продолжить $\zeta(s)$ налево от прямой $\operatorname{Re} s=1$, дадим другое представление этой функции.

Пусть сначала $\operatorname{Re} s > 2$. Тогда рассмотрим функцию

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_1^\infty e^{-nt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_0^\infty \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_1^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \zeta(s), \qquad (4.1.2)$$

причем суммирование и интегрирование можно менять местами, так как ряд $\sum_1^\infty t^{\sigma-1} e^{-nt}$ сходится на оси $(0, \infty)$ равномерно при $\sigma > 2$. Но функция

$$\frac{t}{e^t - 1}$$

на оси $(-\infty, \infty)$ аналитическая и все ее производные стремятся к нулю не медленнее, чем te^{-t} при $t \to \infty$. Поэтому, интегрируя по частям n раз, мы получаем, что

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\, dt^{s-1} =$$

$$= \frac{(-1)}{(s-1)\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{e^t - 1}\right) t^{s-1}\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(s-1)\Gamma(s)\, s(s+1)\ldots(s+k-1)} \int_0^\infty \frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{t}{e^t-1}\right] t^{s+k-1} dt =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(s-1)\Gamma(s+k)} \int_0^\infty \frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{t}{e^t - 1}\right] t^{s+k-1} dt.$$

Это соотношение показывает, что, кроме $s = 1$, никаких особенностей $\zeta(s)$ не может иметь, потому что интеграл справа сходится при $\operatorname{Re} s > -k$, а k произвольно велико. Далее,

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{-1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{e^t - 1}\right) dt.$$

При $s \to 1$ последний интеграл стремится к интегралу $-\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt = 1$, поэтому

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s) = 1. \tag{4.1.3}$$

Значит, $\zeta(s)(s-1)$ — целая функция и $\zeta(s)$ имеет в точке $s=1$ полюс первого порядка с вычетом 1.

Заметим теперь, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$s\sum_{k=N+1}^{\infty}\int\limits_k^{k+1}\int\limits_k^t \frac{dx\,dt}{x^{s+1}} = \sum_{N+1}^{\infty}\int\limits_k^{k+1}\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{t^s}\right)dt =$$

$$= \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^s} - \int\limits_{N+1}^{\infty}\frac{dt}{t^s} = \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^s} - \frac{(N+1)^{1-s}}{s-1}.$$

Поэтому

$$\zeta(s) = \frac{(N+1)^{1-s}}{s-1} + \sum_1^N \frac{1}{k^s} + s\sum_{k=N+1}^{\infty}\int\limits_k^{k+1}\int\limits_k^t \frac{dx}{x^{s+1}}\,dt, \tag{4.1.4}$$

где N — любое целое число. Бесконечный ряд в правой части сходится при $\operatorname{Re} s > 0$ и формула (4.1.4) представляет $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Для того чтобы оценить рост $\zeta(s)$ в так называемой критической полосе при $0 < \operatorname{Re} s < 1$, положим $N = [|s|]$, другими словами, пусть N будет наибольшим целым числом, не превосходящим $|s|$, $0 \leqslant |s| - N < 1$. Тогда, при $s = \sigma + i\tau$, $0 < \sigma \leqslant 1$, заменяя суммы на интегралы, мы будем иметь

$$|\zeta(s)| < \frac{(|s|+1)^{1-\sigma}}{|s|-1} + \sum_1^{|s|}\frac{1}{k^\sigma} + |s|\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{\sigma+1}} <$$

$$< 3 + \int\limits_1^{|s|}\frac{dx}{x^\sigma} + |s|\int\limits_{N+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\sigma+1}} < 3 + \frac{|s|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \frac{|s|}{\sigma N^\sigma} <$$

$$< \frac{2|s|^{1-\sigma}}{\sigma} + \frac{|s|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + 3, \quad |s| > C,$$

т. е.

$$|\zeta(s)| < \frac{2}{\sigma}|s|^{1-\sigma} + \frac{|s|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + 3. \tag{4.1.5}$$

Итак, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 \, |s-1| > \varepsilon$ модуль $|\zeta(s)|$ ограничен, при $\sigma=1$ из формулы (4.1.5) получаем $|\zeta(s)| < 5+\ln|s|$ и, при $0<\sigma<1$ $|\zeta(s)|<C_0|s|^{1-\sigma}$, C_0 — постоянная. Эта оценка может быть улучшена, но нам достаточно полученной оценки. Теперь перейдем к изучению поведения $\zeta(s)$ в левой полуплоскости.

Докажем функциональное уравнение Эйлера — Римана, имеющее вид

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \qquad (4.1.6)$$

или, при замене s на $1-s$,

$$\zeta(s) = 2^{s}\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \qquad (4.1.7)$$

Из формулы (4.1.7), например, следует, что

$$\zeta(0) = \lim_{s\to 1}\zeta(1-s) =$$

$$= \lim_{s\to 1}\left[2^{1-s}\pi^{-s}\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{s-1}\Gamma(s)(s-1)\zeta(s)\right] = -\frac{1}{2}.$$

Функциональное уравнение (4.1.6) позволит нам оценить рост $|\zeta(s)|$ во всей плоскости. Для доказательства (4.1.7) постараемся вычислить интеграл, входящий в представление (4.1.2), воспользовавшись равенством (2.3.13) нашей общей леммы о вычетах.

Разрежем плоскость z от нуля до бесконечности вдоль положительного направления действительной оси. Будем считать, что вдоль верхней части разреза функции $z^{s-1}=e^{(s-1)\ln x}$, $\ln x$ действительно. Тогда вдоль нижней части разреза z^{s-1} будет уже равна $e^{2\pi i s}e^{(s-1)\ln x}$, так как при обходе начала в положительном направлении аргумент z увеличится на 2π. В разрезанной плоскости функция $\dfrac{z^{s-1}}{e^z-1}=f(z)$ будет уже однозначной.

Рассмотрим контур L_r, состоящий из нижней кромки разреза от ∞ до $r>0$, окружности $|z|=r$, которую мы будем обходить по стрелке часов от r до r, и верхнего края разреза от r до ∞.

Интеграл, взятый от функции $f(z)$ по контуру L_r, не будет зависеть от r, $0<r\leqslant 1$. Действительно, интеграл, взятый по контуру $C=L_r-L_1$, $r<1$, будет равен нулю, так как контур C будет замкнутым, состоящим из окружности $|z|=r$, проходимой в отрицательном направлении, отрезка от r до 1, окружности $|z|=1$, проходимой в положительном направлении, и отрезка от 1 до r, причем $f(z)$ внутри и на C будет аналитической. Отсюда и следует независимость интеграла от контура L_r при $0<r\leqslant 1$. Это будет верно при любом s, так как $r>0$ и нуль не лежит на пути интегрирования. Если же $\operatorname{Re} s>1$, то на окружности $|z|=r$

$$|f(z)|=\left|\frac{z}{e^z-1}\right|\,|z^{s-2}|<2e^{2\pi|s|}r^{\sigma-2},\ \sigma=\operatorname{Re} s>1,$$

откуда следует неравенство

$$\left|\int\limits_{L_r} f(z)\,dz\right|<4\pi e^{2\pi|s|}r^{\sigma-1},\ \sigma-1>0.$$

Последнее неравенство показывает, что интеграл по $|z|=r$ стремится к нулю вместе с r, и поэтому

$$\int\limits_{L_1} f(z)\,dz=(1-e^{2\pi is})\,\Gamma(s)\,\zeta(s), \tag{4.1.8}$$

так как

$$\int\limits_{L_1} f(z)\,dz=\int\limits_{L_0} f(z)\,dz=\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx-e^{2\pi is}\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=$$
$$=(1-e^{2\pi is})\,\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

вследствие (4.1.2). Это равенство получено при условии $\sigma>1$, $\operatorname{Re} s=\sigma$. Но нуль не лежит на контуре L_1, и поэтому интеграл по контуру L_1 есть аналитическая целая функция s. Нетрудно видеть, что и правая часть тоже целая аналитическая функция s, так как полюсы $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$ погашаются нулями $1-e^{2\pi is}$. Поэтому равенство (4.1.8) верно при любом s в силу теоремы единственности.

Подынтегральная функция в (4.1.8) имеет полюсы в точках $z=\pm 2\pi in$, $n=1, 2,\ldots$ Вычеты в этих полюсах легко подсчитать, так как $\frac{1}{e^z-1}$ имеет в этих точках полюсы с вычетами 1. Учитывая это, мы получаем, что в точках

$$z=2\pi in=2\pi ne^{\frac{\pi i}{2}} \quad \text{и} \quad z=-2\pi in=2\pi ne^{\frac{3\pi}{2}i}, n>0,$$

вычеты, соответственно, будут

$$(2\pi in)^{s-1}=(2\pi n)^{s-1}e^{\frac{\pi i(s-1)}{2}}, \quad (-2\pi in)^{s-1}=$$

$$=(2\pi n)^{s-1}e^{\frac{3\pi i}{2}(s-1)}.$$

Для того чтобы воспользоваться общей леммой о вычетах (соотношением (2.3.16)), будем считать, что $\operatorname{Re} s=-\sigma$, $\sigma>0$, что обеспечивает абсолютную сходимость ряда вычетов и возьмем в качестве контуров R_n окружности $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)=|z|$. Прежде всего заметим, что при

$$|\pi(2n+1)\cos\varphi|\geqslant 1,$$

$$\left|e^{\pi(2n+1)e^{i\varphi}}-1\right|=\left|e^{\pi(2n+1)\cos\varphi+i\pi(2n+1)\sin\varphi}-1\right|>\frac{1}{2}.$$

Далее, если $\theta=|\pi(2n+1)\cos\varphi|<1$, то

$$\theta^2=\pi^2(2n+1)^2\cos^2\varphi=\pi^2(2n+1)^2-\pi^2(2n+1)^2\sin^2\varphi,$$

откуда

$$\pi(2n+1)\sin\varphi=\pm\pi(2n+1)\sqrt{1-\frac{\theta^2}{\pi^2(2n+1)^2}}=$$

$$=\pm\pi(2n+1)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит, в этом случае

$$e^{\pi i(2n+1)\sin\varphi}=e^{(2n+1)\pi i+O\left(\frac{1}{n}\right)}=-e^{O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

и окончательно при $|\pi(2n+1)\cos\varphi|<1$

$$\left|e^{\pi(2n+1)e^{i\varphi}}-1\right|=\left|1+e^{\pi(2n+1)\cos\varphi+iO\left(\frac{1}{n}\right)}\right|>1,$$

если $n>n_0$.

Поэтому на контуре $|z| = R = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ имеет место оценка

$$\left|\int_{R_n} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\,dz\right| < 4\pi R e^{2\pi|s|} R^{\sigma-1} < 4\pi e^{2\pi|s|} R^{\sigma},\ \sigma > 0.$$

Значит, условие стремления к нулю интегралов по R_n выполнено, и из (2.3.16) мы имеем, что

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\frac{\pi i}{2}(s-1)}(2\pi n)^{s-1} + e^{\frac{3\pi i}{2}(s-1)}(2\pi n)^{s-1}\right] =$$

$$= 2\pi i\left(-ie^{\frac{\pi i s}{2}} + ie^{\frac{3\pi i}{2}s}\right)\zeta(1-s)(2\pi)^{s-1} =$$

$$= -2\pi e^{\pi i s}\left(e^{\frac{\pi i s}{2}} - e^{-\frac{\pi i s}{2}}\right)\zeta(1-s)(2\pi)^{s-1} =$$

$$= -4\pi i(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)e^{\pi i s}.$$

Возвращаясь к (4.1.8), мы получаем

$$(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s) = 4\pi i(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)e^{\pi i s}$$

или

$$\sin\pi s\,\Gamma(s)\zeta(s) = 2\cos\frac{\pi s}{2}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s) = (2\pi)^s\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s).$$

Из этого равенства вытекает (4.1.6).

Пользуясь теоремой сложения $\Gamma(s)$, (3.2.15), можно доказать факт, эквивалентный уравнению (4.1.6). Для этого преобразуем сначала (3.2.15). Мы будем иметь

$$\Gamma(1-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}2^{1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}2^{-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}}.$$

Далее, положим

$$\varphi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s). \qquad (4.1.9)$$

Тогда в силу (4.1.7) и (3.2.15)

$$\varphi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)2^s\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}}=$$

$$=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)=\varphi(1-s).$$

Итак, функция $\varphi(s)=\varphi(1-s)$. Мы уже знаем, как растет $|\zeta(s)|$ вместе с $|y|$ при фиксированном x, $x>0$. Уравнение (4.1.7) позволяет оценить рост $|\zeta(s)|$ при любом фиксированном $x<0$. Так как $\zeta(s)$ действительная функция (при $s>1$), то достаточно рассматривать рост $|\zeta(s)|$ при $y>0$. Из (4.1.7) мы будем иметь, что при $s=x+iy$, $x<0$

$$|\zeta(s)|=2^x\pi^{x-1}e^{\frac{\pi y}{2}}|\Gamma(1-s)||\zeta(1-s)|=O\left(y^{\frac{1}{2}-x}\right), \qquad (4.1.10)$$

вследствие оценки (3.2.13) и ограниченности $\zeta(s)$ при $\sigma>1$ и $s=\sigma+iy$. Если же $x=0$, то рост $\zeta(1-iy)$ нам известен (см. (4.1.5)) и мы будем иметь оценку

$$|\zeta(s)|=O(\sqrt{y}\ln y). \qquad (4.1.11)$$

п° 2. Преобразования Фурье и Меллина

Мы говорим, что функция $\varphi(x)$, определенная на $[a, b]$, удовлетворяет условиям Дирихле, если на отрезке $[a, b]$ она непрерывна, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, в частности, конечна, и имеет конечное число максимумов и минимумов. Для таких функций интервал $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна и монотонна.

Лемма Римана-Лебега. *Если функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то*

$$\lim_{r \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin rx\, dx = 0. \tag{4.2.1}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число таких отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k=0, \ldots, p-1$, на каждом из которых $\varphi(x)$ будет равномерно непрерывной; тогда

$$\int_a^b \varphi(x) \sin rx\, dx = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(x) \sin rx\, dx,$$

и нам достаточно доказать лемму для отрезка, на котором $\varphi(x)$ равномерно непрерывна. Пусть $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Заменяя x на $x+\alpha$, $\alpha=\frac{\pi}{r}$, получаем

$$\int_a^b \varphi(x) \sin rx\, dx = \int_{a-\alpha}^{b-\alpha} \varphi(x+\alpha) \sin r(x+\alpha)\, dx =$$
$$= - \int_{a-\alpha}^{b-\alpha} \varphi(x+\alpha) \sin rx\, dx$$

и что если $|\varphi(x)|<m$, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\left| \int_{a-\alpha}^{a} \varphi(x+\alpha) \sin rx\, dx \right| < \frac{m\pi}{r}, \quad \left| \int_{b-\alpha}^{b} \varphi(x) \sin rx\, dx \right| < \frac{m\pi}{r}.$$

Поэтому

$$2\int_a^b \varphi(x) \sin rx\, dx = \int_a^b \varphi(x) \sin rx\, dx - \int_{a-\alpha}^{b-\alpha} \varphi(x+\alpha) \sin rx\, dx =$$
$$= \int_a^{b-\alpha} [\varphi(x) - \varphi(x+\alpha)] \sin rx\, dx + \eta, \quad |\eta| < \frac{2\pi m}{r}.$$

Отсюда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin\alpha x\,dx\right| < \frac{1}{2}\int_a^{b-\alpha} |\varphi(x) - \varphi(\alpha + x)|\,dx + \frac{m\pi}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b-a-\alpha}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b-\alpha}|\varphi(x) - \varphi(x+\alpha)| + \frac{m\pi}{r} < \varepsilon,\ r > r_0(\varepsilon),$$

так как $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b-\alpha}|\varphi(x)-\varphi(x+\alpha)|\to 0$ при $r\to\infty$. Здесь $\varepsilon>0$ произвольно, что и доказывает лемму.

Если мы заменим в интеграле (4.2.1) x на $x+\frac{\pi}{2r}$, то мы получим

$$\lim_{r\to\infty}\int_{a-\alpha}^{b-\alpha}\varphi(x+\alpha)\cos rx\,dx = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2r},$$

или, так как

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos rx\,dx\right| < \left|\int_{b-\alpha}^{b}|\varphi(x)|\,dx\right| + \int_a^{b-\alpha}|\varphi(x)-\varphi(x+\alpha)|\,dx\,| +$$

$$+\left|\int_{a-\alpha}^{b-\alpha}\varphi(x+\alpha)\cos rx\,dx\right| + \left|\int_{a-\alpha}^{\alpha}\varphi(x+\alpha)\,dx\right|,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos rx\,dx = 0.$$

Значит, и

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\,e^{irx}\,dx = 0. \tag{4.2.2}$$

Пусть теперь $f(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда, понимая под $f(+0)$ предел $f(x)$ в нуле справа, а $f(-0)$ предел в нуле слева, мы будем иметь, что при $a<b$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}f(+0) & a=0,\\ \frac{1}{2}f(-0) & b=0,\\ \frac{1}{2}[f(+0)+f(-0)] & a<0<b,\\ 0 & a>0,\ b<0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Для доказательства (4.2.3) заметим прежде всего, что при $a>0$ или $b<0$ функция $\frac{f(x)}{x}$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[a, b]$, и поэтому для нее выполняется равенство (4.2.1). В этом случае формула (4.2.3) доказана.

Рассмотрим случай $a=0$ (случай $b=0$ получается из случая $a=0$ заменой x на $-x$). Возьмем $\varepsilon>0$ и пусть $\delta_1>0$ — столь малое число, что $f(x)$ на $[0, \delta_1]$ монотонна. Тогда существует такое δ_2, $0<\delta_2<\delta_1$, что при $r>r_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\delta_2}^{b} f(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx\right|<\varepsilon,$$

так как на интервале (δ_2, b) функция $\frac{f(x)}{x}$ удовлетворяет условиям Дирихле. Далее,

$$\int_0^{\delta_2} f(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}f(+0)=\int_0^{\delta_2}[f(x)-f(+0)]\frac{\sin rx}{x}\,dx-$$

$$-f(+0)\int_{\delta_2}^{\infty}\frac{\sin rx}{x}\,dx,\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin rx}{x}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

вследствие (3.2.17). Так как интеграл от $\frac{\sin x}{x}$ сходится, то при $r\geqslant r_2\geqslant r_1(\varepsilon)$ верно неравенство

$$|f(+0)|\left|\int_{\delta_2}^{\infty}\frac{\sin rx}{x}\,dx\right|=|f(+0)|\left|\int_{r\delta_2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|<\varepsilon.$$

Наконец, так как $|f(x)-f(+0)|$ монотонно не убывает на $[0, \delta_2]$ вследствие того, что она монотонна и при $x=+0$ равна нулю, то функция $f_1(x)=|f(\varepsilon)-f(+0)|-|f(x)-$ $-f(+0)|$ будет монотонно убывающей и $f_1(+0)=$ $=|f(\varepsilon)-f(+0)|\geqslant 0$.

По второй теореме о среднем *) существует на $(0,\delta_2)$ такое δ, что

$$\int_0^{\delta_2} f_1(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx = f_1(+0)\int_0^{\delta}\frac{\sin rx}{x}\,dx = f_1(+0)\int_0^{r\delta}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Значит,

$$\left|\int_0^{\delta_2} f_1(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx\right| = \left|\int_0^{\delta_2} |f(\varepsilon)-f(+0)|\,\frac{\sin rx}{x}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\delta_2} |f(x)-f(+0)|\,\frac{\sin rx}{x}\,dx\right| = |f_1(+0)|\left|\int_0^{r\delta}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|,$$

откуда уже следует, что

$$\left|\int_0^{\delta_2} [f(x)-f(+0)]\frac{\sin rx}{x}\,dx\right| < |f(\varepsilon)-f(+0)|\left|\int_0^{r\delta}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| +$$

$$+ |f(\varepsilon)-f(+0)|\left|\int_0^{r\delta_2}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < C\,|f(\varepsilon)-f(+0)|,$$

где C не зависит от ε, $r(\varepsilon)$ и δ в силу (3.2.17). Окончательно мы получаем при $r>r_2(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^{b} f(x)\frac{\sin rx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}f(+0)\right| < 2\varepsilon + C\,|f(\varepsilon)-f(+0)|.$$

Так как левая часть от ε не зависит, а правая может быть сделана сколь угодно малой, то мы доказали (4.2.3) в случае a или b, равных нулю.

Если же $a<0<b$, то интеграл от a до b разобьем на интегралы от a до 0 и от 0 до b. Переходя к пределу в каждом интеграле, мы получим, что величина предела в этом случае равна $\frac{1}{2}[f(+0)+f(-0)]$. Соотношение (4.2.3) позволяет доказать теоремы относительно так называемых *преобразований Фурье и Меллина.*

*) Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, Наука, М., 1966, стр. 117.

Теорема XII. *Пусть $f(x)$ на любом конечном интервале (a, b) удовлетворяет условиям Дирихле, в точках разрыва*

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty. \tag{4.2.4}$$

Определяя тогда преобразование Фурье $\varphi(x)$ функции $f(x)$ равенством

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(y)\,dy, \tag{4.2.5}$$

мы будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\varphi(t)\,dt, \tag{4.2.6}$$

причем несобственный интеграл в правой части (4.2.6) *мы будем определять как главное значение интеграла по Коши соотношением*

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\varphi(t)\,dt=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}e^{-ixt}\varphi(t)\,dt. \tag{4.2.7}$$

Мы не будем здесь выяснять вопрос, следует ли и когда из сходимости интеграла в смысле (4.2.7) сходимость несобственного интеграла в обычном смысле. Покажем лишь эквивалентность этих сходимостей в простейших случаях. Прежде всего это будет иметь место, если $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,dx$ сходится.

Действительно, тогда при $|R_1|\leqslant|R_2|$

$$\left|\int_{R_1}^{R_2}e^{-xti}\varphi(t)\,dt-\int_{-R_1}^{R_1}e^{-xti}\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int_{R}^{R_2}|\varphi(t)|\,dt\right|,$$

где $|R|=|R_1|$, $R_2R>0$, откуда и следует эквивалентность определений сходимости.

Затем это будет также иметь место, если $f(z)$ четная или нечетная. Тогда, в первом случае, $\varphi(x)=\varphi(-x)$

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xy\, f(y)dy,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xy\varphi(y)dy. \tag{4.2.8}$$

Преобразования (4.2.8) называются *косинус-преобразованиями Фурье*. В случае нечетности $f(x)$: $\varphi(x)=-\varphi(-x)$ и при $\psi(x)=-i\varphi(x)$, $\psi(x)=-\psi(-x)$,

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xy\, f(y)dy,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xy\psi(y)dy. \tag{4.2.9}$$

Эти преобразования носят название *синус-преобразований Фурье*.

Для доказательства теоремы XII воспользуемся (4.2.7) и (4.2.5). Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-xti}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{(y-x)ti} f(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-r}^{r} e^{(y-x)ti}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y-x)r}{y-x}f(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin yr}{y}f(x+y)\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{a}^{\infty}\frac{\sin yr}{y}f(x+y)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a}\frac{\sin yr}{y}f(x+y)\,dy.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Выбираем a настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_a^\infty f(x+y)\frac{\sin yr}{y}\,dy\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_a^\infty |f(x+y)|\,dy<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a} f(x+y)\frac{\sin yr}{y}\,dy\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a} |f(x+y)|\,dy<\varepsilon,$$

что возможно сделать в силу сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$. Возьмем также $r>r_0(\varepsilon)$, где $r_0\ (\varepsilon)$ таково, что при всех $r>r_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin yr}{y}f(x+y)\,dy-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|<\varepsilon,$$

что также возможно сделать в силу формулы (4.2.3). Тогда мы получаем, что при $r>r_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-r}^{r}e^{-xti}\varphi(t)\,dt-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — любое число. Это и доказывает нашу теорему.

Легко видеть, что в силу сходимости интеграла (4.2.4) $\varphi(x)$ непрерывна. Если же (4.2.6) сходится в обычном смысле, то и $f(x)$ непрерывна. Точнее, если интеграл (4.2.6) сходится равномерно по x в обычном смысле в некотором интервале, то в этом интервале $f(x)$ непрерывна. Доказательство этих утверждений мы предлагаем восстановить читателям. Если рассматривать интегралы в смысле Лебега, то можно расширить условия нашей теоремы. Более подробно см. [10], [11].

Перейдем теперь к преобразованиям Меллина.

Теорема XIII. *Если $f(x)$ на интервале* $(0,\infty)$ *удовлетворяет условию Дирихле и интеграл*

$$\int\limits_{0}^{\infty}x^{\sigma_0-1}\,|f(x)|\,dx, \tag{4.2.10}$$

при некотором σ_0 сходится, то определяя преобразование Меллина функции $f(x)$ интегралом

$$g(s)=\int\limits_{0}^{\infty}x^{s-1}f(x)\,dx,\quad s=\sigma_0+it \tag{4.2.11}$$

мы можем утверждать, что

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}g(s)\,x^{-s}ds, \tag{4.2.12}$$

где интеграл взят по прямой Re $s=\sigma_0$, *причем опять,* *вообще говоря, в смысле главного значения по Коши. Обратно, если интеграл* (4.2.12) *абсолютно сходится, то имеет место* (4.2.11).

Для доказательства теоремы XIII достаточно положить $f_1(x) = e^{x\sigma_0} f(e^x)\sqrt{2\pi}$, $g(s) = g(\sigma_0 + iy) = \varphi(y)$.

Тогда условие (4.2.10) примет вид $\int\limits_0^\infty |f_1(x)|\,dx < \infty$, а равенства (4.2.11) и (4.2.12) заменятся равенствами

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f_1(y)\,dy,\quad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-xyi}\,dy,$$

другими словами, теорема XIII переходит в теорему XII и этим она и доказывается, так как $\varphi(x)$ и $f_1(x)$ взаимно заменяемы. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(s)$ являются Меллиновой парой. Примеры таких пар:

1) Мы знаем, что $\Gamma(s)$ определяется равенством

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx. \tag{4.2.13}$$

Обратно, по теореме XIII, так как ее условия выполнены уже при $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, мы получаем, что

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} x^{-s}\Gamma(s)\,ds, \tag{4.2.14}$$

где интеграл может быть взят уже не только по прямой σ, а и по любой другой прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_0 > 0$, так как между прямыми $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ и $\operatorname{Re} s = \sigma_0 > 0$ функция $x^{-s}\Gamma(s)$, при фиксированном действительном $x > 0$, не имеет особенностей и вследствие (3.2.13) убывает на отрезках прямых $y + it$, где $\sigma_0 \leqslant y \leqslant \sigma$ или $\sigma \leqslant y \leqslant \sigma_0$, и $|t|$ растет, не медленнее, чем $e^{-\frac{\pi|t|}{2}} |t|^c$, c — постоянная.

2) Из (3.2.19), заменяя в нем s на $1-s$ и считая, что $-1 < \operatorname{Re} s < 0$, мы будем иметь соотношение

$$\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \sin x\,dx. \tag{4.2.15}$$

Так как при $-1<\mathrm{Re}\, s<0$ интеграл абсолютно сходится, то по теореме XIII

$$\sin x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\,x^{-s}ds, \qquad (4.2.16)$$

где $-1<\sigma_0<2$ — любое число, причем замена σ на σ_0 возможна по тем же причинам, что и в случае (1). Пару, аналогичную рассмотренной, дает нам и (3.2.18).

3) Мы знаем, что при $\mathrm{Re}\, s=\sigma_0>1$,

$$\Gamma(s)\,\zeta(s)=\int\limits_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,$$

причем интеграл справа сходится абсолютно. Поэтому при $\mathrm{Re}\, s=\sigma>1$

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,\zeta(s)\,x^{-s}ds,$$

причем опять $\sigma_0>1$ можно заменить на любое $\sigma>1$ в силу того, что в полосе $\sigma_0<\mathrm{Re}\, s<\sigma$ или $\sigma<\mathrm{Re}\, s<\sigma_0$ нет особенностей $\Gamma(s)\zeta(s)$, верна оценка (3.2.13) для $|\Gamma(s)|$ и $|\zeta(s)|<C$, где C — постоянная.

Перенесем контур в последнем интеграле на прямую $\mathrm{Re}\, s=\sigma$, $0<\sigma<1$. При таком переносе мы минуем полюс $\zeta(s)$ при $s=1$ с вычетом $\Gamma(1)x^{-1}=x^{-1}$. Значит, к интегралу надо добавить x^{-1}, и мы получаем, что

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,\zeta(s)\,x^{-s}ds,\ 0<\mathrm{Re}\, s<1, \qquad (4.2.17)$$

откуда

$$\Gamma(s)\,\zeta(s)=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)x^{s-1}dx,\ 0<\mathrm{Re}\, s<1. \qquad (4.2.18)$$

Мы получили, таким образом, новую меллинову пару и, заодно, еще одно представление $\zeta(s)$ в полосе $0<\mathrm{Re}\, s<1$.

4) Из (4.2.14), заменяя в нем x на πx^2, и s на $\frac{s}{2}$, мы получим, что

$$e^{-\pi x^2}=\frac{1}{4\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}x^{-s}ds.$$

Предполагая, что $\operatorname{Re} s=\sigma>1$, заменяя последовательно x на $2x$, $3x$, ... и суммируя, мы получим, что

$$2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,x^{-s}ds,\ \sigma>1.$$

Перестановка суммирования и интегрирования возможна в силу абсолютной сходимости суммы и интеграла при $\operatorname{Re} s>1$. Если перейти с прямой интегрирования $\operatorname{Re} s=\sigma>1$ на прямую $\operatorname{Re} s=\sigma_0$, $-1<\sigma_0<0$, что возможно, так как подынтегральная функция убывает в полосе $\sigma_0\leqslant\operatorname{Re} s\leqslant\sigma$ как показательная функция, то нужно при такой замене добавить вычеты в точке $s=1$, так как это полюс $\zeta(s)$, и в точке нуль, где $\Gamma(s)$ имеет полюс первого порядка. В точке $s=1$ вычет будет $\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1}=x^{-1}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$, а в точке $s=0$ вычет равен $2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)=-1$. Поэтому

$$1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-\pi n^2x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)x^{-s}ds=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\sigma_0-i\infty}^{1-\sigma_0+i\infty}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)\,x^{-1+s}as=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi ix}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,\pi^{-s}\zeta(s)\,x^{s}ds,\ \sigma=1-\sigma_0>1,$$

после замены s на $1-s$ и в силу уравнения $\varphi(s)=\varphi(1-s)$, где $\varphi(s)$ определена в (4.1.9). Значит,

$$f(x^2)=\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2}=\frac{1}{x}\left(1+\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{x^2}}\right)=\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.2.19)$$

или $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)$. Мы получили функциональное уравнение для $f(x)$, связанной с эллиптическими θ-функциями, о которых будет речь ниже.

n° 3. Некоторые асимптотики

Рассмотрим прежде всего функцию $f(x)$, определяемую рядом

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty} n^{\beta}e^{-n^{\alpha}x}, \quad (4.3.1)$$

где β действительно, $\alpha>0$ тоже действительно.

Пользуясь представлением (4.2.14), и заменяя в нем x на $n^{\alpha}x$, мы получим, что

$$n^{\beta}e^{-n^{\alpha}x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,x^{-s}n^{-\alpha s+\beta}ds.$$

Беря $\sigma>0$ и одновременно $\sigma>\frac{\beta+1}{\alpha}$, мы видим, что при этом выборе σ $\operatorname{Re}(\alpha s-\beta)>1$ и поэтому можно суммировать обе части равенства по n от 1 до ∞. Суммируя, мы получаем соотношение

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,x^{-s}\zeta(\alpha s-\beta)\,ds.$$

Пусть теперь $N<\sigma_N<N+1, -\alpha\sigma_N-\beta<1$ и $\frac{1+\beta}{\alpha}\neq -k$, $k=1, 2, \ldots$ Тогда, если мы заменим прямую интегрирования $\operatorname{Re} s=\sigma$ на прямую $\operatorname{Re} s=-\sigma_N$, что можно сделать, так как $|\Gamma(s)\zeta(\alpha s-\beta)|$ убывает между этими прямыми не медленнее, чем $e^{-\frac{\pi}{4}|s|}$, мы получим, что

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)x^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\zeta(-\alpha k-\beta)x^k+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_N-i\infty}^{\sigma_N+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}\zeta(\alpha s-\beta)\,ds=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)x^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k!}(2\pi)^{-\alpha k-\beta}\sin\frac{\pi}{2}(\alpha k+\beta)\Gamma(1+\alpha k+\beta)\times$$
$$\times\zeta(\alpha k+\beta+1)x^k+O(x^{\sigma_N})\qquad(4.3.2)$$

в силу (4.1.7), причем справа стоят вычеты подынтегральной функции в точке $r=\frac{\beta+1}{\alpha}$, где $\zeta(\alpha s-\beta)$ имеет полюс первого порядка с вычетом $\frac{1}{\alpha}$ и в точках $-k$, $k=0, 1, \ldots, N$, где $\Gamma(s)$ имеет полюсы с вычетами $\frac{(-1)^k}{k!}$.

Если же $\frac{1+\beta}{\alpha}=-p$, $p\geqslant 1$ и p — целое число, то в точке $s=-p$ подынтегральная функция имеет полюс второго порядка и сумма справа должна быть изменена соответствующим образом. При $\alpha>1$ ряд в (4.3.2) будет, как говорят, асимптотическим, т. е. его частичная сумма с номером N будет приближать $f(x)$ при малых x с точностью до $O(x^{N+1-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$. При $\alpha\leqslant 1$ он будет сходящимся и можно показать, пользуясь оценкой $|\Gamma(s)\zeta(\alpha s-\beta)|$, что ряд просто сходится к $f(x)$. Мы видим также, что только первое слагаемое в (4.3.2) может расти с убыванием x, если $\beta+1>0$.

Пусть теперь $f(x)$ определяется рядом

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\beta}e^{-n^{\alpha}x}.\qquad(4.3.3)$$

Произведя, как и выше, замену $e^{-n^{\alpha}x}$ на интеграл с помощью (4.2.14) и суммируя по n при $\sigma>0$, $\sigma>\frac{1+\beta}{\alpha}$, мы опять будем иметь, что

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha s-\beta}}ds.$$

Заметим теперь, что

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s). \quad (4.3.4)$$

Пользуясь этим, опять получаем, что

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}(1-2^{1+\beta-\alpha s})\zeta(\alpha s-\beta)\,ds. \quad (4.3.5)$$

Множитель $1-2^{1+\beta-\alpha s}$ погашает полюс $\zeta(\alpha s-\beta)$ и мы можем опять получить для $f(x)$ асимптотическое разложение по степеням x^{-k}, $k=0, 1, 2, \ldots$ Это разложение уже не имеет растущих членов.

В случае, когда в (4.3.3.) $(-1)^n$ заменена на $e^{in\varphi}$, можно также получить асимптотическое разложение, если воспользоваться свойствами функции

$$\zeta(s, a)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},\quad a\geqslant-1,$$

которые можно найти в книге [12].

Хорошо известно, что функция $e^{-x}=\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ очень быстро убывает с ростом x, при положительном действительном x. Исследуем поведение функции $f(x)$, являющейся в каком-то смысле обобщением e^{-x}

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha}x^n,\quad 0<\alpha<2. \quad (4.3.6)$$

Рассмотрим интеграл

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\pi x^{-s}ds}{[\Gamma(1-s)]^\alpha\sin\pi s},\ 0<\sigma<1,\ 0<\alpha<2. \quad (4.3.7)$$

Функция $\Gamma(1-s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s<1$ отлична от нуля, не имеет полюсов и положительна на полуоси $(-\infty,1)$. Поэтому функция $[\Gamma(1-s)]^\alpha$ будет аналитической при $\operatorname{Re} s<1$. Мы выберем ту ветвь этой функции, которая принимает положительные значения на полуоси $(-\infty, 1)$. Если мы заменим прямую интегрирования $\operatorname{Re} s = \sigma$ на прямую $\operatorname{Re} s = \sigma_N = -N + \frac{1}{2}$, что можно сделать в силу оценки при $\operatorname{Re} s = -\sigma$, $\sigma > 0$

$$\operatorname{Re}[\ln \Gamma(1+\sigma+it)] = \operatorname{Re}[(1+\sigma+it)\ln(1+\sigma+it) - \\ -1-\sigma-it-\frac{1}{2}\ln(1+\sigma+it)+O(1)] = \\ = (1+\sigma)\ln\frac{1}{e}\sqrt{(1+\sigma)^2+t^2} - t\operatorname{arctg}\frac{t}{\sigma+1} - \\ -\frac{1}{2}\ln\sqrt{(1+\sigma)^2+t^2}+O(1), \quad (4.3.8)$$

то мы получим

$$\left|\int_{\sigma_N - i\infty}^{\sigma_N + i\infty} \frac{x^{-s}\,ds}{[\Gamma(1-s)]^\alpha \sin \pi s}\right| < \\ < x^{\sigma_N} e^{O(1)} \int_0^\infty e^{-\alpha(1+\sigma_N)\ln\frac{1}{e}\left[(1+\sigma_N)^2+t^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[(1+\sigma_N)^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}} \times \\ \times e^{-\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{t}{1+\sigma_N}\right)t\alpha} dt < e^{O(1)} x^{\sigma_N}(1+\sigma_N)^3 e^{-\alpha(1+\sigma_N)\ln\frac{1}{e}(1+\sigma_N)}.$$

Поэтому

$$\varphi(x) = \sum_0^N \frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha} x^n + O\left[x^{\sigma_N}\sigma_N^3 e^{-\alpha\sigma_N \ln\frac{\sigma_N}{e}}\right] = \\ = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha} x^n = f(x).$$

Итак, мы видим, что функции

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha} x^n, \qquad F(s) = \frac{\pi}{[\Gamma(1-s)]^\alpha \sin \pi s} \quad (4.3.9)$$

образуют меллинову пару.

Далее, заменяя в (4.3.7) s на $1-s$ и сдвигая прямую $\operatorname{Re} s = \sigma$ налево, мы получаем, что

$$f(x) = \frac{x^{-1}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\pi x^s s^\alpha}{[\Gamma(1+s)]^\alpha \sin \pi s}\,ds.$$

Вследствие быстрого убывания подынтегральной функции по вертикали и регулярности в верхней и нижней полуплоскостях, мы можем заменить путь интегрирования от 0 до $i\infty$ на путь, состоящий из отрезка от нуля до $-\frac{1}{2}$ и от $-\frac{1}{2}$ до $-\frac{1}{2}+i\infty$ и, соответственно, путь от $-i\infty$ до 0 на путь от $-\frac{1}{2}-i\infty$ до $-\frac{1}{2}$ и от $-\frac{1}{2}$ до 0. На путях $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+i\infty\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-i\infty\right)$ интегралы абсолютно сходятся, а $|x^s|=x^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому

$$f(x)=\frac{x^{-1}}{2\pi i}\left[\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{\pi x^t e^{\pi i\alpha}|t|^\alpha dt}{\Gamma^\alpha(1+t)\sin\pi t}-\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{\pi x^t e^{-\pi i\alpha}|t|^\alpha dt}{\Gamma^\alpha(1+t)\sin\pi t}\right]+$$

$$+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{\sin\alpha\pi}{x}\int_0^{1/2}x^{-t}\frac{t^\alpha}{\Gamma^\alpha(1-t)\sin\pi t}dt+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Но при малых t, в частности, при $|t|<\frac{3}{4}$

$$\frac{t}{\sin\pi t\,\Gamma^\alpha(1-t)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k,\quad a_0=\frac{1}{\pi}.$$

Поэтому

$$f(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{x}\sum_0^\infty a_k\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-t}t^{\alpha-1+k}dt+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right),$$

а так как

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-t}t^{\alpha-1+k}dt=\frac{1}{\ln^{k+1}x}\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1+k}dt-\int_{\frac{1}{2}\ln x}^\infty e^{-t}t^{\alpha-1+k}dt\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\ln^{k+\alpha}x}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

то мы получаем

$$f(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{x}\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{[\ln x]^{\alpha+n}}+O\left(\frac{1}{x\ln^{\alpha+N+1}x}\right).\quad(4.3.10)$$

Мы получили асимптотическое разложение $f(x)$ при растущих x.

В случае, когда $\alpha=2$, легко видеть, что

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^{-s}\pi ds}{\Gamma^2(1-s)\sin\pi s},$$
$$-1<\sigma<0. \quad (4.3.11)$$

Интеграл здесь в силу (3.2.13) абсолютно сходится. Для интеграла, очевидно, справедлива оценка $O(x^\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, но она нас не устраивает, поэтому надо перенести путь интегрирования направо. Для удобства сделаем замену s на $1-s$. Мы получим тогда

$$f(x)=1+\frac{x^{-1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\pi x^s ds}{\Gamma^2(s)\sin\pi s},\ 1<\operatorname{Re}s<2.$$

Полагая в (3.3.12) $p=2$, $m=1$, мы получаем, что $\gamma=2\sqrt{2\pi}$ и что при $s=\sigma+it$, $t>0$

$$\frac{1}{\Gamma^2(s)\sin\pi s}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{2^{2s}}{\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)\sin\pi s}+O(t^{-2\sigma}). \quad (4.3.12)$$

Поэтому при $1<\operatorname{Re}s<2$ имеем

$$f(x)=1+\frac{x^{-1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\pi x^s\left[\frac{1}{\Gamma^2(s)\sin\pi s}-\right.$$
$$\left.-\frac{2^{2s}}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)\sin\pi s}\right]ds+$$
$$+\frac{x^{-1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\pi x^s 2^{2s}}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)\sin\pi s}ds.$$

Если мы в первом интеграле заменим прямую $\operatorname{Re}s=\sigma>1$ на прямую $\operatorname{Re}s=\sigma_0=\frac{1+\varepsilon}{2}$, где ε, $\frac{1}{8}>\varepsilon>0$, сколь угодно мало, то только добавятся вычеты в точке $s=1$, где

$\frac{1}{\sin \pi s}$ имеет полюс первого порядка с вычетом $-\frac{1}{\pi}$ и на этой прямой $|x|^s = x^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}$. Поэтому

$$f(x) = \frac{2^2}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{x^{-1}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\pi (4x)^s ds}{2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)\sin \pi s} + O\left(x^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

Так как на полуокружностях $|s| = n+\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \arg s < \frac{1}{2}\pi$ подынтегральная функция быстро убывает, то интеграл можно заменить суммой вычетов в точках $s=2, 3, 4, \ldots$, учитывая, что при этом он берется в отрицательном направлении, по стрелке часов. Мы получаем, вычисляя вычеты в простых полюсах, что

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(4x)^{n-1}}{\Gamma\left(2n-\frac{1}{2}\right)} + O\left(x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \qquad (4.3.13)$$

при больших x.

Мы свели оценку $f(x)$ при больших x к оценке ряда $\varphi(t)$, $t>0$,

$$\varphi(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, {}^{n-1}}{\Gamma(pn+\beta)}, \quad t>0 \qquad (4.3.14)$$

при $p=2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $t=4x$. Эта последняя функция оценивается при замене суммы интегралом с помощью (3.2.21). Мы получаем, что при $p\sigma > \ln t$, $p+\beta>0$, $p>1$

$$\varphi(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^s s^{-pn-\beta} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{s^{pn}} e^s s^{-\beta} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^s s^{-\beta}}{s^p + t}\, ds. \qquad (4.3.15)$$

Пусть контур L состоит из прямой $\operatorname{Im} s=-r$, $r>0$, проходимой от $\infty-ir$ до $-ir$, полуокружности $s=re^{i\alpha}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, проходимой против стрелки часов, и прямой $\operatorname{Im} s=r$, по которой надо двигаться от ir до $ir-\infty$. Пусть также $r<t^{1/p}$ и на прямых $\operatorname{Im} s=-r$, $\operatorname{Im} s=r$ нет нулей s^p+t, причем нуль на отрицательной части действительной оси допустим.

В разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси плоскости функция s^p при любом p однозначна. На окружности $|s|=R$, $R^p>t$, где R сколь угодно велико, обозначим z_1 — точку пересечения окружности с прямой $\operatorname{Im} s=-r$, z_2 — точку пересечения с прямой $\operatorname{Re} s=\sigma$, лежащую под действительной осью, z_3 — точку пересечения с $\operatorname{Re} s=\sigma$ над действительной осью и z_4 — точку пересечения с прямой $\operatorname{Im} s=r$. Так как $p+\beta>0$, то интегралы по дугам окружности $|s|=R$ от точки z_1 до z_2 и от точки z_3 до z_4 будут малы. Именно,

$$\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{e^s s^{-\beta}}{s^p+t}\,ds\right|=O\left(R^{-\beta-p}\right),\quad \left|\int\limits_{z_3}^{z_4}\frac{e^s s^{-\beta}}{s^p+t}\,ds\right|=O\left(R^{1-p-\beta}\right).$$

Эти оценки нами делались выше. Напомним, что на дуге конечной длины, от точки z_2 до iR порядок подынтегральной функции будет $O(R^{-\beta-p})$, а на оставшейся части дуги интеграл не превысит $R^{-\beta-p}R\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{R\cos\varphi}\,d\varphi\simeq R^{-\beta-p}$.

Аналогично будет и в нижней полуплоскости. Поэтому интеграл (4.3.15) можно заменить интегралом по L, добавив сумму вычетов. Подынтегральная функция будет иметь в разрезанной плоскости полюса в точках

$$s=e^{\pm\frac{2k+1}{p}\pi i}\,t^{\frac{1}{p}}\quad 0\leqslant k\leqslant q,\ q=\left[\frac{p-1}{2}\right],$$

где q — наибольшее целое, не превосходящее $\frac{p-1}{2}$. Вычеты в этих полюсах первого порядка легко подсчитываются и мы получаем, что

$$\varphi(t)=\frac{2t^{-\frac{\beta+p-1}{p}}}{p}\sum_{k=0}^{q}\operatorname{Re}\left[e^{\frac{\beta+p-1}{p}(2k+1)\pi i}\exp\left(e^{-\frac{2k+1}{p}\pi i}t^{\frac{1}{p}}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^s s^{-\beta}}{s^p+t}\,ds. \quad (4.3.16)$$

При любых p и β интеграл по L есть $O\left(\frac{1}{t}\right)$ при больших t. Если $p=2$, то $\varphi(t)$ содержит колебательный член. Пусть $p=2$, $\beta=-\frac{1}{2}$. Тогда $q=0$ и

$$\varphi(t)=t^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\sqrt{t}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (4.3.17)$$

Переходя теперь к $f(x)$, будем иметь, что

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varphi(4x)+O\left(x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\cos\left(2\sqrt{x}-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$+O\left(x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (4.3.18)$$

Мы получили, таким образом, оценку функции Бесселя.

Этими приемами можно получать и оценки в общем случае, именно, когда

$$f(x)=\sum_0^\infty e^{-\theta n i}\frac{\prod_1^m\Gamma(q_k n+\theta_k)}{\prod_1^n\Gamma(p_k n+\alpha_k)}x^n,$$

$$\theta\neq 0,\ 0<\theta<\pi,\ \sum_1^m q_k\leqslant\sum_1^n p_k,\ p_k>0,\ q_k>0. \quad (4.3.19)$$

Для этих оценок надо пользоваться представлением (3.3.17). Заметим в заключение, что убывания асимптотики в (4.3.19) при $\sum_1^m q_k-\sum_1^n p_k<2$ нельзя ждать, так как целая функция порядка $\rho<\frac{1}{2}$ на бесчисленном множестве кругов растет неограниченно. Граничной в этом смысле является целая функция $\cos\sqrt{z}$.

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЮЩИЕСЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

п° 1. Преобразование Лапласа

Если при сколь угодно малом $p>0$, $|e^{-px}f(x)|<C_0(p)$, где $C_0>0$ — постоянная и $f(x)$ на каждом конечном отрезке оси $(0,\infty)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то функция $\varphi(s)$, $\operatorname{Re} s>0$

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx \tag{5.1.1}$$

называется *преобразованием Лапласа* $f(x)$ и, обратно,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} e^{xs}\varphi(s)\,ds,\ \sigma_0>0, \tag{5.1.2}$$

где интеграл берется в смысле главного значения по Коши, если $x>0$ и правая часть равна нулю при $x<0$. Это соотношение (5.1.2) есть следствие соответствующего соотношения (4.2.6) теоремы XII.

Мы займемся в дальнейшем более частным случаем преобразования (5.1.1), именно случаем, когда $f(z)$ — целая аналитическая функция z первого порядка и конечного типа или, как говорят, целая функция экспоненциального типа. Такие функции, целые экспоненциального типа, должны подчиняться неравенству

$$|f(z)|<c(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)r},\ r=|z|,\ |f(z_k)|>e^{(\sigma-\varepsilon)r_k};\ |z_k|=r_k, \tag{5.1.3}$$

где σ — постоянная, $\varepsilon>0$ произвольно мало и для каждого ε во втором неравенстве существует какая-то последовательность z_k, $k=1,2,\ldots$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, r_k=\infty$. Именно это число σ и называется типом целой функции $f(z)$. Такая функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}z^n,$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенству

$$|a_n| < C(\sigma+\varepsilon')^n, \tag{5.1.4}$$

где ε' — произвольное положительное число.

Действительно, при $R = \dfrac{n}{\sigma+\varepsilon}$ имеем

$$|a_n| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{Ce^{(\sigma+\varepsilon)R}n!}{R^n} =$$

$$= \frac{Cn!\,(\sigma+\varepsilon)^n e^n}{n^n} < \frac{C\sqrt{n}\,n^n e^{-n} e^n(\sigma+\varepsilon)^n}{n^n} < C(\sigma+\varepsilon')^n.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n x^n}{n!}dx = \int\limits_0^\infty e^{-t}\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n t^n}{n!\,s^{n+1}}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!\,s^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^n dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{s^{n+1}},$$

т. е.

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{s^{n+1}}, \tag{5.1.5}$$

причем последний ряд абсолютно и равномерно сходится в силу оценки (5.1.4) при $|s| \geqslant \sigma_1 > \sigma$.

В том случае, когда $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, функцию $\varphi(s)$ принято называть *ассоциированной* с $f(z)$ *по Борелю.*

Отметим теперь еще одно неравенство. Нетрудно видеть, что если при любом $\varepsilon > 0$

$$|a_n| < c(\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)^n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

то

$$\left|f(z)\right| = \left|\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}z^n\right| < c(\varepsilon)\sum_0^\infty \frac{(\sigma+\varepsilon)^n}{n!}r^n = c(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)r}.$$

Отсюда получаем для функции экспоненциального типа равенство пределов

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\frac{\ln M(r)}{r} = \sigma,\ M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|. \tag{5.1.6}$$

Из этого соотношения следует регулярность $\varphi(s)$ вне круга $|s|=\sigma$. Вместо преобразования (5.1.2) здесь удобнее рассмотреть другое представление функции $f(z)$, сохраняющее ее аналитичность; именно, можно доказать, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=R} e^{zs}\varphi(s)\,ds. \tag{5.1.7}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=R} e^{zs}\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}}\,ds=\sum_{0}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=R} e^{zs}\frac{ds}{s^{n+1}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,$$

так как порядок интегрирования и суммирования можно изменить в силу абсолютной и равномерной сходимости суммы и интеграла. Это преобразование отображает класс рядов Тейлора на класс целых функций экспоненциального типа и весьма облегчает исследование свойств как ряда Тейлора, так и целых функций экспоненциального типа.

Из (5.1.7) следует также, что

$$f^{(\nu)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} s^{\nu}e^{zs}\varphi(s)\,ds, \tag{5.1.8}$$

где C окружность $|z|=R>\sigma$.

Уже это соотношение позволяет сводить дифференциальные и разностные уравнения к обычным, в частности, алгебраическим. Например, пусть дано уравнение

$$\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{n}a_{k,m}f^{(k)}(z+m)=0. \tag{5.1.9}$$

Тогда можно рассмотреть другое уравнение,

$$\int\limits_{|z|=R}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{n}a_{k,m}s^k e^{sm}\right]\varphi(s)\,e^{zs}ds=0. \tag{5.1.10}$$

Из равенства (5.1.10), дифференцируя его по z и полагая $z=0$, находим, что

$$\int\limits_{|z|=R}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{n}a_{k,m}s^k e^{sm}\right]\varphi(s)\,s^q ds=0,\quad q=0,1,2,\ldots,$$

другими словами, что функция $F(s)$:

$$F(s)=\left[\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{n}a_{k,m}s^k e^{sm}\right]\varphi(s)$$

будет регулярна в круге $|z|\leqslant R$, причем $\varphi(s)$ будет ассоциирована с $f(z)$ по Борелю. Если мы ищем решение $f(z)$ экспоненциального типа σ и $R>\sigma$, то $F(s)$ будет целой функцией, так как $\varphi(s)$ регулярна вне $|z|\leqslant\sigma$. Следовательно, $\varphi(z)$ может иметь в качестве особенностей только полюсы в тех точках z_k, $k=1, 2, \ldots, N$, в которых функция

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{n}a_{k,m}z^k e^{mz}$$

обращается в нуль. Это дает нам

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{N}A(z, z_k)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{q_k}\frac{C_{k,m}}{(z-z_k)^m},$$

где $A(z, z_k)$ — главные части $\dfrac{F(z)}{P(z)}$ в точках z_k и сумма взята по всем z_k, $|z_k|\leqslant\sigma$. Числа $C_{k,m}$ произвольны, а q_k — конечны. Окончательно, по теореме о вычетах получаем

$$f(s)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{q_k}\frac{C_{k,m}}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{e^{zs}}{(z-z_k)^m}dz=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{q_k}\frac{C_{k,m}s^{m-1}e^{z_k s}}{(m-1)!},\qquad(5.1.11)$$

где $C_{k,m}$ — произвольные постоянные, а $|z_k|\leqslant\sigma$.

Мы получили общее решение (5.1.9) в классе целых функций, степень которых не превышает σ. Это решение годится и для более общего случая уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(z)=0,$$

получающегося, когда $P(s)=\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}s^n$ — произвольная целая функция или просто ряд Тейлора с конечным радиусом ρ круга своей сходимости, и мы ищем решения в целых функциях типа σ, $\sigma<\rho$. Решая данное уравнение, мы приходим к равенству

$$\int\limits_{|z|=R} P(z)\,\varphi(z)\,e^{sz}dz=0,\ \sigma<R<\rho \qquad (5.1.12)$$

откуда следует, что

$$\varphi(z)\,P(z)=F(z),$$

где $F(z)$ опять регулярна в круге $|z|<\rho$. Из последнего равенства уже следует представление (5.1.10), в котором z_k — опять все нули $P(z)$ в круге $|z|\leqslant\sigma$. Более подробно об этом см. в книге [5], где изложены более глубокие связи между $f(z)$ и $\varphi(z)$. Преобразование Лапласа или, точнее, ассоциированная с $f(s)$, по Борелю, функция $\varphi(s)$ может быть использована для получения достаточно точных и тонких теорем единственности. Рассмотрим одну такую теорему.

Т е о р е м а. *Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ будут целыми функциями конечной типа σ_1 и σ_2 соответственно, причем $\sigma_1<\pi$ и $\sigma_2<\pi$ и*

$$f_1(n)=f_2(n),\ n=0,1,2,\ldots, \qquad (5.1.13)$$

то $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

Действительно, для $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$ выполняются условия

$$f(n)=0,\ n=0,1,2,\ldots$$

Но если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то $e^{z_1}\neq e^{z_2}$ при условии $0<|y_1-y_2|<2\pi$. Далее, положив $\sigma_0=\max(\sigma_1,\sigma_2)$, мы можем утверждать, что тип функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству $\sigma\leqslant\sigma_0<\pi$. Пусть $\sigma<R<\pi$. Тогда будем иметь, что при достаточно большом R

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} e^{zs}\varphi(z)\,dz,\quad \int\limits_{|z|=R} e^{nz}\varphi(z)\,dz=0,\ n=0,1,2,\ldots$$

Очевидно, что

$$e^{zs}=[1+(e^z-1)]^s=(1+w)^s=\psi(w).$$

Но функция $\psi(w)$ регулярна в любой односвязной области, где $w \neq 0$. Она отображает полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ на разрезанную от -1 до $-\infty$ плоскость w конформно. Поэтому любой спрямляемый замкнутый контур Γ, содержащий начало $z=0$ внутри и состоящий из внутренних точек полосы, перейдет в плоскости w, в силу конформности отображения в замкнутый же контур Γ', тоже содержащий начало внутри, причем точка -1 будет лежать вне контура Γ'. В области, ограниченной контуром Γ' по теореме о возможности приблизить регулярную в любой конечной односвязной области функцию полиномами, мы можем получить такое приближение. Реализуется эта возможность с помощью, например, многочленов Фабера (см., например, [5]). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти многочлен $P(w)$ такой, что

$$|e^{zs} - P(e^z - 1)| = |(1+w)^s - P(w)| < \varepsilon, \quad z \in \Gamma.$$

Мы видели, что при достаточно большом R

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} e^{zs} \varphi(z)\, dz.$$

Если все особенности $\varphi(z)$ лежат внутри контура Γ, то по теореме Коши

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zs} \varphi(z)\, dz.$$

Но

$$\left| \int_{L} [e^{zs} - P(e^z - 1)]\, \varphi(z)\, dz \right| = \left| \int_{\Gamma} e^{zs} \varphi(z)\, dz \right| < LM\varepsilon,$$

где L — длина Γ, M есть $\max\limits_{z \in \Gamma} |e^{zs}|$, так как

$$\int_{\Gamma} P(e^z - 1)\, \varphi(z)\, dz = \sum_{k=0}^{N} A_k \int_{\Gamma} e^{kz} \varphi(z)\, dz, \qquad (5.1.14)$$

т. е. $|f(s)| < ML\varepsilon$, где ε можно взять произвольно малым. Мы здесь доказали более общую теорему, предполагающую только то, что все особенности $\varphi(z)$ принадлежат конечной области D, внутренней по отношению к нашей полосе шириной 2π. Такое предположение относительно $\varphi(z)$ накладывает определенные ограничения на рост $f(z)$, с которой $\varphi(z)$ ассоциирована по Борелю. Дадим формулировку связи между ростом $f(z)$ и расположением особенностей $\varphi(z)$. Определим индикатрису $f(z)$ равенством

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\alpha})|}{r} = h(\alpha),\ h(\alpha) \leqslant \sigma. \tag{5.1.15}$$

С другой стороны, пусть E есть ограниченное множество плоскости z, D — наименьшая выпуклая область, к которой E принадлежит (будем называть ее выпуклой оболочкой E), и $L(\alpha)$ —луч, образующий с положительным направлением действительной оси угол α, расстояния вдоль которого будем считать в его положительном направлении от 0 до $e^{i\alpha}\infty$ положительными, а в обратном отрицательными. Рассмотрим прямую, перпендикулярную к $L(\alpha)$ и такую, что за этой прямой, если смотреть от начала координат, нет точек D и хотя бы одна точка границы D принадлежит ей. При этом, так как D — выпуклая оболочка E, хотя бы одна точка E принадлежит прямой. Обозначим через $K(\alpha)$ расстояние точки пересечения этой прямой с $L(\alpha)$ до начала. $K(\alpha)$ может быть, конечно, и отрицательной. Например, если E и D есть круг $|z+2|\leqslant 1$, то $K(0)=-1$, $K(\pi)=-3$. $K(\alpha)$ будем называть опорной функцией выпуклой оболочки E.

Теорема. *Если индикатриса $f(z)$ есть $h(\alpha)$, а опорная функция выпуклой оболочки множества особенностей $\varphi(z)$, ассоциированной по Борелю с $f(z)$, есть $K(\varphi)$, то $h(\varphi)=K(-\varphi)$.*

Доказательство этого утверждения и другие применения ассоциированной по Борелю с $f(z)$ функции $\varphi(z)$ читатель может найти в книге [5].

Для функции экспоненциального типа индикатриса $h(\varphi)$ оказывается непрерывной, так как $K(\varphi)$, опорная функция выпуклой оболочки множества особенностей $\varphi(z)$, ассоциированной по Борелю с $f(z)$, будет, как нетрудно показать, непрерывной.

n° 2. Некоторые задачи, решающиеся с помощью теории вычетов

1) Пусть требуется найти число решений в целых неотрицательных числах $x_0, \ldots, x_\nu$ и при больших N уравнения

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_k x_k = N, \quad a_l \neq a_k, \tag{5.2.1}$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ целые положительные с общим наибольшим делителем, равным единице. Для этой цели рассмотрим функцию

$$F(s) = \prod_{0}^{\nu} \frac{1}{1 - s^{a_k}} = \prod_{k=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} s^{a_k n} = \sum_{n_0=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_\nu=0}^{\infty} s^{\sum\limits_{k=0}^{\nu} a_k n_k} =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} P(N)\, s^N, \quad P(N) = \sum_{\sum\limits_{k=0}^{\nu} n_k a_k = N} 1, \tag{5.2.2}$$

где $P(N)$ — число решений уравнения (5.2.1) в целых неотрицательных числах.

По известному и рассмотренному выше представлению коэффициентов ряда Тейлора в виде интеграла Коши, мы будем иметь

$$P(N) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=\rho} F(s) \frac{ds}{s^{N+1}}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{5.2.3}$$

Но $F(s)$ есть рациональная функция, все полюсы которой лежат на единичном круге в точках

$$s = e^{2\pi i \frac{m}{a_k}}, \quad m = 0,\ 1, \ldots, a_k - 1; \ k = 0, 1, \ldots, \nu. \tag{5.2.4}$$

Кратность полюса в точке $s = 1$ будет максимальной и равной $\nu + 1$. Кратность полюса в какой-либо точке $s_{m,k}$

$$s_{m,k} = e^{2\pi i \frac{m}{a_k}}$$

будет меньше $\nu + 1$, так как общий наибольший делитель чисел $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ равен единице. В противном случае $s_{m,k}$ было бы корнем всех многочленов $s^{a_k} - 1$ и все многочлены делились бы на многочлен $s^q - 1$, где

$q\ (q>1)$ — степень алгебраического числа $s_{m,k}$, откуда и следовало бы, что q есть общий наибольший делитель всех $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$. Поэтому, заменяя контур $|s|=\rho<1$ контуром $|s|=R>1$ и устремляя R в бесконечность, мы получаем по теореме о вычетах, что

$$P(N)=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu}{ds^\nu}\left[s^{-N-1}\prod_0^\nu\frac{1-s}{1-s^{a_k}}\right]_{s=1}+\sum_0^{\nu-1}C_kN^k=$$

$$=\frac{N^\nu}{\nu!\,a_0a_1\ldots a_\nu}+\sum_0^{\nu-1}C_k'N^k, \quad (5.2.5)$$

где $C_0', C_1', \ldots, C_{\nu-1}'$ — постоянные, легко вычисляемые в любом конкретном случае. Если все a_k взаимно попарно просты, т. е. наибольший общий делитель $(a_k, a_m)=1$, $k\neq m$, то выражение (5.2.5) значительно упрощается, так как все полюсы в точках $s_{m,k}$ будут простые. Тогда мы будем иметь

$$P(N)=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu}{ds^\nu}\left[s^{-N-1}\prod_0^\nu\frac{1-s}{1-s^{a_k}}\right]_{s=1}+R, \quad (5.2.6)$$

$$|R|<C,$$

где C — легко вычисляемая постоянная.

2) В теории эллиптических функций самую существенную роль играют так называемые ϑ-функции. С помощью теории вычетов можно, не вводя понятия эллиптических и ϑ-функций, получить все свойства последних. Рассмотрим интеграл

$$f(s)=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)\left(1+\frac{x}{q}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{q^n}\right)},$$

где $\prod_0^\infty\left(1+\frac{x}{q^n}\right)=u(x)$ и $q>1$.

Произведение в знаменателе интеграла сходится и сам интеграл сходится и будет аналитической функцией s при $\operatorname{Re}s>0$. Делая сначала замену s на $s+1$ и складывая, а потом заменяя в интеграле x на qx, мы получаем

$$f(s+1)+f(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{\left(1+\frac{x}{q}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{q^n}\right)\cdots}=q^s f(s), \quad (5.2.7)$$

откуда получаем функциональное уравнение для $f(s)$:

$$f(s)=\frac{1}{q^s-1}f(s+1), \quad (5.2.8)$$

следовательно, $f(s)$ — мероморфная функция во всей плоскости. Пусть $0<\operatorname{Re} s<1$, а L пусть будет контур, состоящий из окружности $|z|=r$, $0\leqslant r<1$, которую мы будем проходить по стрелке часов, отрезка действительной оси от r до ∞ и отрезка той же оси, проходимого от ∞ до r. Плоскость z будем считать разрезанной вдоль положительного направления действительной оси, а z^{s-1} будет равна $e^{(s-1)\ln r}$ на верхней кромке разреза и $e^{2\pi i s}e^{(s-1)\ln r}$ на нижней кромке разреза. В такой разрезанной плоскости z^{s-1} будет однозначной. Прямые, входящие в контур L, и будут частями от r до ∞ верхней и нижней кромок разреза. На окружности $|z|=q^{N+\frac{1}{2}}$, $q>1$ мы будем иметь оценку

$$|u(z)|=\prod_0^\infty\left|1+\frac{z}{q^k}\right|>\prod_1^N\left(q^{N+\frac{1}{2}-k}-1\right)\prod_{N+1}^\infty\left(1-\frac{q^{N+\frac{1}{2}}}{q^k}\right)>$$

$$>\prod_{k=1}^N q^{N+\frac{1}{2}-k}\prod_{k=0}^\infty\left(1-\frac{1}{q^{\frac{1}{2}+k}}\right)^2>\theta_1 q^{\frac{N^2}{2}};$$

окончательно,

$$|u(z)|>\theta_1 q^{\frac{N^2}{2}} \quad \left(|z|=q^{N+\frac{1}{2}}\right), \quad (5.2.9)$$

где θ_1 — постоянная, зависящая только от q. Значит, мы будем иметь неравенство

$$\left|\int\limits_{|z|=q^{N+\frac{1}{2}}}\frac{z^{s-1}}{u(z)}\,dz\right|<c_0 q^{-\frac{N^2}{2}+N|s|}, \quad (5.2.10)$$

где c_0 — постоянная. Поэтому мы можем применить теорему о вычетах и получить

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\frac{z^{s-1}}{u(z)}\,dz=-e^{\pi is}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(s-1)}}{u'(-q^n)}.$$

Но легко видеть, что

$$u'(-q^n)=\frac{1}{q^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{q^n}{q^k}\right)\prod_{n+1}^{\infty}\left(1-\frac{q^n}{q^k}\right)=$$

$$=(-1)^n\gamma q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1}^{n}\left(1-\frac{1}{q^k}\right), \quad (5.2.11)$$

где

$$\gamma=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{q^k}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\frac{z^{s-1}}{u(z)}\,dz=-e^{\pi is}\gamma^{-1}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{-\frac{n(n+1)}{2}}q^{ns}}{\prod\limits_{1}^{n}(1-q^{-k})}=$$

$$=-e^{\pi is}\gamma^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{ns}}{\prod\limits_{1}^{n}(q^k-1)}.$$

Но так как интеграл в последнем равенстве от r не зависит, если $r<1$ и $\operatorname{Re}s>0$, то можно перейти к пределу при $r\to 0$, мы получаем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\frac{z^{-1}\,dz}{u(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{z^{s-1}dz}{u(z)}=$$

$$=\frac{1-e^{2\pi is}}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{z^{s-1}}{u(z)}\,dz=-e^{\pi is}\frac{\sin\pi s}{\pi}f(s).$$

Значит, мы получаем

$$f(s)\frac{\sin\pi s}{\pi}=\gamma^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{ns}}{\prod\limits_{1}^{n}(q^k-1)}=\gamma^{-1}\varphi(s). \quad (5.2.12)$$

Функцию $\varphi(s)$ мы можем теперь разложить в бесконечное произведение. Заменим s на $s+1$ и рассмотрим разность $\varphi(s+1)-\varphi(s)$. Мы будем иметь

$$\varphi(s+1)-\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{ns}(q^n-1)}{\prod\limits_1^n (q^k-1)}=$$

$$=-q^s\sum_0^{\infty}\frac{q^{ns}(-1)^n}{\prod\limits_1^n (q^k-1)}=-q^s\varphi(s),$$

откуда

$$\varphi(s+1)=(1-q^s)\,\varphi(s)$$

или, заменяя s на $s-1$,

$$\varphi(s)=(1-q^{s-1})\varphi(s-1)=\prod_{k=1}^{n}(1-q^{s-k})\varphi(s-n)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{s-k}).$$

Значит, мы будем иметь тождество

$$f(s)=\frac{\pi^{\gamma-1}}{\sin \pi s}\prod_1^{\infty}(1-q^{s-k}). \tag{5.2.13}$$

Вернемся к тождеству (5.2.8). Из него мы прежде всего получаем соотношение

$$f(s)=\frac{1}{q^s-1}f(s+1)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{q^{s+k}-1}f(s+n). \tag{5.2.14}$$

Но далее, делая замену x на $q^n x$, получаем

$$f(s+n)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s+n-1}dx}{(1+x)\dots\left(1+\frac{x}{q^n}\right)\dots}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x^{s+n-1}q^{ns+n^2}dx}{(1+q^n x)\dots(1+x)\dots\left(1+\frac{x}{q^k}\right)\dots}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x^{s+n-1}q^{ns+n^2}dx}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n\prod\limits_1^{n-1}\left(1+\frac{1}{xq^k}\right)u(x)}=\int_0^{\infty}\frac{q^{ns+\frac{n(n-1)}{2}}x^{s-1}}{u(x)\prod\limits_1^{n-1}\left(1+\frac{1}{xq^k}\right)}dx.$$

Поэтому мы имеем

$$f(s)=\frac{q^{-sn-\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod\limits_{0}^{n-1}(1-q^{-s-k})}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{q^{ns+\frac{n(n-1)}{2}}x^{s-1}\,dx}{u(x)\prod\limits_{1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{xq^k}\right)}=$$

$$=\prod_{0}^{n-1}(1-q^{-s-k})^{-1}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}dx}{u(x)\prod\limits_{1}^{n-1}\left(1+\frac{x^{-1}}{q^k}\right)}.$$

Нетрудно видеть, что ввиду абсолютной сходимости произведений можно перейти здесь к пределу при $n\to\infty$, и мы получаем окончательно соотношение

$$f(s)=\frac{1}{u(-q^{-s})}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}dx}{u(x)\,u\left(\frac{1}{qx}\right)}. \qquad (5.2.15)$$

Интеграл справа может быть опять вычислен с помощью теории вычетов. Разрежем снова плоскость z вдоль действительной оси и возьмем контур L_r такой же, как и выше, но будем рассматривать не все r, а только r вида $q^{-N-\frac{1}{2}}=r_N$, а контуры R_N считать окружностями $|z|=q^{N+\frac{1}{2}}$. Замечая, что $u(0)=1$, так что $\left|u\left(\frac{1}{qz}\right)\right|>\frac{1}{2}$ при достаточно большом $|z|$, мы на окружностях $|z|=q^{N+\frac{1}{2}}$ будем попрежнему иметь неравенство

$$\int\limits_{|z|=R_N}\left|u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)\right|^{-1}|z|^{|s|}\,|dz|<2C_0q^{-\frac{N^2}{2}+N|s|}, \qquad (5.2.16)$$

в силу (5.2.10), а на окружностях $|z|=r_N$ соответственно неравенства

$$\int\limits_{|z|=r_N} \left| u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)\right|^{-1} |z|^{|s|}\,|dz| < 2C_1 q^{-\frac{N^2}{2}+N|s|}, \tag{5.2.17}$$

так как при замене x на $\frac{1}{qx}$ знаменатель в интеграле не меняется и условие $\operatorname{Re} s>0$ здесь ввиду быстрого роста в нуле знаменателя отпадает. Поэтому если перейти к пределу при $N\to\infty$ в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_N} \frac{z^{s-1}dz}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)},$$

то в силу (5.2.16) и (5.2.17) можно применить теорему о вычетах, которые теперь будут уже в точках $z=-q^n$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ и будут иметь вид

$$\rho_n = -q^{n(s-1)}e^{\pi i s} \lim_{z\to -q^n} \frac{z+q^n}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)} =$$

$$= -e^{\pi i s}(-1)^n \gamma^{-2} q^{ns-\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.2.18}$$

Действительно, например, для $n>0$ мы будем иметь в силу (5.2.11)

$$\rho_n = -e^{\pi i s}\frac{q^{ns-n}(-1)^n q^{-n\frac{n+1}{2}}}{\prod\limits_1^n (1-q^{-k}) \prod\limits_1^\infty \left(1-\frac{1}{q^k}\right) \prod\limits_{k=n+1}^\infty \left(1-\frac{1}{q^k}\right)}.$$

Отсюда уже следует

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{L_N} \frac{z^{s-1}dz}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)} = -e^{\pi i s}\gamma^{-2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{ns-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

С другой стороны, в силу (5.2.17) и того обстоятельства, что после обхода начала z^s приобретает множитель $e^{2\pi is}$, получаем в пределе

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{L_N}\frac{z^{s-1}\,dz}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)}=\frac{1-e^{2\pi is}}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{z^{s-1}\,dz}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)}.$$

Значит, сопоставляя два последних равенства с (5.2.15), имеем

$$f(s)=\frac{1}{u(-q^{-s})}\int\limits_0^\infty\frac{z^{s-1}dz}{u(z)\,u\left(\frac{1}{qz}\right)}=$$

$$=\frac{\pi\gamma^{-2}}{u(-q^{-s})\sin\pi z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{ns-\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (5.2.19)$$

Исключая $f(s)$ из этого равенства и равенства (5.2.14), мы получаем окончательно то соотношение, к которому мы стремились, именно

$$\omega(s,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{ns-\frac{n(n+1)}{2}}=$$

$$=\gamma\prod_1^\infty(1-q^{s-k})\prod_0^\infty(1-q^{-s-k}). \quad (5.2.20)$$

Это последнее тождество было доказано при предположении действительности q, $q>1$. Но в силу того, что правая и левая части (5.2.20) — аналитические функции q при $|q|>1$, мы можем утверждать в силу теоремы единственности аналитических функций, что тождество остается верным и при любом комплексном q, $|q|>1$. Переменное s может принимать любые комплексные значения и $\omega(s, q)$ будет целой аналитической функцией s при $|q|>1$. Для того чтобы из функции $\omega(s, q)$ получить четыре классические тета-функции $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, достаточно положить соответственно

$$q=h^{-2},\ \ s=\frac{1}{2}-\frac{\ln z}{\ln h};\ \ q=h^{-2},\ \ s=1-\frac{1}{8}-\frac{\ln z}{\ln h};$$

$$q=h^{-2},\ \ s=1-\frac{1}{8}-\frac{\ln z}{\ln h}+\frac{\pi}{2i\ln h};$$

$$q=h^{-2},\ \ s=\frac{1}{2}-\frac{\ln z}{\ln h}+\frac{\pi}{2i\ln h}.$$

Мы будем иметь тогда формулы:

$$\vartheta_0(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{n^2} z^{2n}=\gamma\prod_1^{\infty}(1-h^{2k-1}z^{2k})\prod_0^{\infty}(1-z^{-2k}h^{2k+1}),$$

$$\vartheta_1(v)=i\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}=$$

$$=\frac{\gamma i}{z}\prod_1^{\infty}\left(1-h^{2k-2+\frac{1}{4}}z^{2k}\right)\prod_0^{\infty}\left(1-h^{2k+1-\frac{1}{4}}z^{-2k}\right),$$

$$\vartheta_2(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}=$$

$$=\frac{\gamma}{z}\prod_1^{\infty}\left[1-(-1)^k h^{2k-2+\frac{1}{4}}z^{2k}\right]\prod_0^{\infty}\left(1-(-1)^k h^{2k+2-\frac{1}{4}}z^{-2k}\right),$$

$$\vartheta_3(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}h^{n^2}z^{2n}=$$

$$=\gamma\prod_1^{\infty}(1-(-1)^k h^{2k-1}z^{2k})\prod_0^{\infty}\left[1-(-1)^k h^{2k+1}z^{-2k}\right],$$

где $z=e^{\pi i v}$.

Соотношение (5.2.20) можно получить и без вычисления нашего интеграла, опираясь на теорию эллиптических функций, но имея это соотношение, многие факты этой теории можно получить непосредственно.

3) Пусть Γ_r будет контур, состоящий из прямых $z=ir+x$, $z=-ir+x$, где x меняется от 0 до ∞, и полуокружности $z=re^{i\alpha}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Плоскость z будем считать разрезанной от 0 до ∞ вдоль положительной части действительной оси. Функция z^s будет равна x^s на верхней части разреза и $e^{2\pi i s}x^s$ на нижней части разреза. Наконец, пусть

$$\gamma=\frac{\sqrt{q^2+4}\mp q}{2},\quad \gamma^{-1}=\gamma\pm q,$$

где $q\geqslant 1$ — целое число.

Рассмотрим интеграл

$$I(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{z^{s-1}dz}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})(e^{\pi\gamma z}-e^{-\pi\gamma z})}. \quad (5.2.21)$$

Этот интеграл является аналитической целой функцией переменного s. Вычислив его двумя способами, мы получим уравнение, похожее на уравнение Римана для $\zeta(s)$, связывающее две функции типа функции $\zeta(s)$.

Допустим прежде всего, что $s=\sigma+it$, $\sigma>2$. Тогда параметр r в контуре Γ_r можно стремить к нулю и мы получаем в пределе, так как I не зависит от r, что

$$I(s)=\frac{1-e^{2\pi is}}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{z^{s-1}dz}{(e^{\pi z}-e^{-\pi z})(e^{\pi\gamma z}-e^{-\pi\gamma z})}=$$

$$=\frac{e^{-\pi is}\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^\infty z^{s-1}\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty e^{-\pi[2n+1+(2k+1)\gamma]z}dz=$$

$$=-\frac{e^{\pi is}\sin\pi s}{\pi}\pi^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{[2n+1+\gamma(2k+1)]^s}. \tag{5.2.22}$$

Менять порядок интегрирования и суммирования можно при достаточно большом $\operatorname{Re} s$, а ряд сходится при $\operatorname{Re} s>2$.

Беря теперь в качестве контуров R_n в общей лемме о вычетах окружности $|z|=n+\alpha_n$ и выбирая α_n так, чтобы были выполнены неравенства

$$|\sin\pi\alpha_n|>\frac{1}{4},\ |\sin\pi\gamma(n+\alpha_n)|>\frac{1}{4},\ 0<\alpha_n<1,$$

чего можно добиться без труда выбором α_n, и вычисляя вычеты в точках

$$e^{\frac{\pi i}{2}}n,\ e^{\frac{3\pi i}{2}}n,\ e^{\frac{\pi i}{2}}\gamma^{-1}n,\ e^{\frac{3\pi i}{2}}\gamma^{-1}n,$$

мы получаем, что при $\operatorname{Re} s>0$

$$I(s)=-\frac{2}{\pi}e^{\pi is}\cos\frac{\pi is}{2}\left[\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n^{1-s}\sin\pi\gamma n}+\gamma^{-s}\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n^{1-s}\sin\pi\gamma^{-1}n}\right],$$

или, используя равенство $\gamma^{-1}=\gamma\pm q$, получаем

$$I(s)=-\frac{2}{\pi}e^{\pi is}\cos\frac{\pi is}{2}\left[\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n^{1-s}\sin\pi\gamma n}+\gamma^{-s}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n(1+q)}}{n^{1-s}\sin\pi\gamma n}\right]. \tag{5.2.23}$$

Благодаря возможности выбора α_n мы можем утверждать сходимость рядов в (5.2.23) при $\operatorname{Re} s<1$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^{2n}}\,dx,\ n\geqslant 1,\ \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^{2n}}\,dx,\ n\geqslant 2,$$

где a действительно и n — целое.

2. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x}{1+x^n}\,dx,\ n\geqslant 2.$$

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{(x-a_1)\dots(x-a_n)}\,dx,$$

где все a_k, $k=1, \dots, n$, не лежат на $(0, \infty)$ и $\operatorname{Re} s<n-1$.

4. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{2\pi 2n!}{2^{2n}(n!)^2},$$

вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}.$$

5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+2a\cos\varphi)^n},\quad a>\frac{1}{2},$$

где $n \geqslant 1$ — целое, воспользовавшись равенством

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+2a\cos\varphi)^n} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(1+az+az^{-1})^n}.$$

6. Вычисляя двумя способами интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} z^{s-1} \prod_0^\infty \frac{1+\alpha t^{-n} z}{1+t^{-n} z}\, dz, \quad \operatorname{Re} s + \ln|\alpha| < 0,$$

доказать тождество

$$\prod_0^\infty \frac{1-xz^n}{1-yz^n} = (1-x) \sum_{n=0}^\infty \prod_{k=1}^n \frac{y-xz^k}{1-z^k}, \quad |y| < 1, \quad |z| < 1.$$

7. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{2}}^{\infty e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{2}} \frac{e^{\pi z^2 i + 2\pi xz}}{e^{2\pi z} - 1}\, dz,$$

взятый по прямой $y = x$ в плоскости $z = x + iy$, составляя для него два разностных уравнения (*К. Зигель*).

8. Показать, что целая функция $f(z)$

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{n_k}}{n_k!}, \quad n_k > n_{k-1}(1+\lambda), \quad \lambda > 0, \quad k > k_0,$$

имеет в круге $|z| < n_k$, $k > k_1$ ровно n_k нулей.

9. Доказать, что если область D с границей $|f(z)| = M$ односвязна и $f(z)$ аналитична в $\overline{D}$, то число нулей $f(z)$ в D на единицу больше числа нулей $f'(z)$ в D (*Макдональд*).

10. Полагая

$$\zeta(s, a) = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+a)^s}, \quad 0 < a < 1, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

доказать что при $\operatorname{Re} s < 1$

$$\zeta(s,\ a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin\frac{\pi s}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi a}{k^{1-s}} + \cos\frac{\pi s}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k a}{k^{1-s}} \right\},$$

воспользовавшись представлением

$$\zeta(s,\ a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1-e^{-x}}\, dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960.
[2] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций. М., Физматгиз, 1961.
[3] М. А. Евграфов, Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
[4] Нерлунд, Differenzenrechnung, Берлин, изд. Шпрингера, 1926.
[5] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1959.
[6] В. Л. Гончаров, Теория функций комплексного переменного. М., Учпедгиз, 1955.
[7] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
[8] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
[9] Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960.
[10] Снеддон И. Н., Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.
[11] Е. К. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
[12] Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана. М., ИЛ, 1953.

СОДЕРЖАНИЕ