

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

Введение в общие цепи Маркова

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
факультета ВМК для студентов ННГУ,
обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика» и
010300 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»

Нижний Новгород
2013

УДК 519.245
ББК В17
В24

В24 Введение в общие цепи Маркова. Авторы: Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.: Учебно-методическое пособие — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. — 51 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **О.А. Кузенков**

Настоящее пособие является введением в теорию цепей Маркова с общим измеримым пространством состояний. В нём разбираются те понятия теории общих цепей Маркова, которые имеют наглядные прообразы в теории классических счётных цепей Маркова: неприводимость, минорантные множества, цикличность, возвратность и невозвратность, стационарность. Отобранный материал применяется к одной содержательной задаче об обслуживании конфликтных транспортных потоков с последствием в классе циклических алгоритмов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии», и может быть использовано при чтении специальных курсов «Теория случайных процессов», «Дополнительные главы теории вероятностей», «Теория управляемых систем массового обслуживания», «Теория меры».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 519.245
ББК В17

© Зорин А.В., Зорин В.А.,
Пройдакова Е.В., Федоткин М.А., 2013
© Нижегородский госуниверситет, 2013

Оглавление

Предисловие	4
Глава 1. Классические цепи Маркова.	5
1.1. Цепи Маркова как математические модели.	5
1.2. Счётные цепи Маркова.	9
Глава 2. Общие цепи Маркова	13
2.1. Стохастические переходные ядра. Марковское свойство .	13
2.2. неприводимые цепи	16
2.3. Минорантные множества и цикличность.	21
2.4. Возвратность и невозвратность	28
2.5. Инвариантные и стационарные распределения	31
Глава 3. Применение к задачам управления	34
3.1. Задача об обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов.	34
3.2. Анализ предельных свойств длин очередей.	39
Список литературы	49
Предметный указатель.	50

Предисловие

МАРКОВСКИЕ процессы находят широкое применение в различных областях. Поэтому изучение некоторых разделов теории марковских процессов уже включено в общие и специальные курсы теории вероятностей. К ним относятся раздел по теории марковских процессов с дискретным временем (цепи Маркова) и дискретным пространством состояний, элементы теории процессов с непрерывным временем. При этом, как правило, марковский процесс с непрерывным временем развивается либо в счётном фазовом пространстве, либо в некотором евклидовом пространстве конечной размерности, так что конечномерные сечения процесса являются непрерывными случайными векторами.

Настоящее пособие является введением в теорию цепей Маркова с общим измеримым пространством состояний. Изучение данного пособия будет доступно, в основном, студентам старших курсов и студентам магистратуры из-за необходимости более глубокого знакомства с математическими основаниями теории вероятностей и теорией меры. В то же время, именно цепи Маркова с произвольным измеримым пространством состояний важны в современных исследованиях систем массового обслуживания, теории надёжности, теории и применениях методов Монте-Карло для высокопроизводительных вычислений.

В настоящем учебном пособии разбираются те понятия теории общих цепей Маркова, которые имеют наглядные прообразы в теории классических счётных цепей Маркова: неприводимость, цикличность, возвратность и невозвратность, стационарность. Минорантные множества рассматриваются как аналоги дискретных состояний. За рамками учебного пособия остались такие разделы, как построение расщеплённой цепи с помощью минорантных множеств, теория потенциала для цепей Маркова, эргодичность, предельные теоремы для функционалов. В связи с этим утверждения о существовании инвариантных распределений даны без доказательств. Однако и отобранного материала оказывается достаточно, чтобы рассмотреть в минимально замкнутой форме одну содержательную задачу из теории массового обслуживания.

При написании разделов 1, 2 использовались монографии из списка литературы. Каждый подраздел оснащён необходимыми библиографическими указаниями. Материалы раздела 3 принадлежат авторам учебно-методического пособия.

Глава 1 | Классические цепи Маркова

1.1. Цепи Маркова как математические модели

Многие классические законы физики обладают отсутствием последствия. Это означает следующее: при «правильно выбранном» описании $x(t)$ состояния изучаемого объекта в произвольный момент времени $t \in T$, если точно известно состояние изучаемого объекта в момент $t \in T$, то этим состоянием определяется эволюция объекта в будущем, то есть совокупность состояний $x(t')$, $t' > t$. Для реальных случайных процессов величины $x(t)$, $t \in T$ оказываются случайными, а основной их характеристикой является закон распределения вероятностей. *Цепи Маркова* характеризуются таким видом стохастической зависимости между состояниями изучаемой системы в различные моменты времени $t \in T$, при котором только состояние системы в момент t определяет закон распределения для будущих состояний объекта, независимо от состояний объекта до момента t .

Большое число реальных процессов управления характеризуются дискретностью моментов выработки управляющих воздействий. В этом случае множество T является дискретным. Говорят также о цепях Маркова с дискретным временем. Формальное математическое определение цепи Маркова будет дано ниже (1.2, 2.1). Приведем некоторые примеры возникновения цепей Маркова с дискретным временем.

Пример (а): ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона. Пусть наблюдается популяция однотипных живых организмов в последовательные моменты времени $t = 0, 1, \dots$. Предположим, что за единицу времени один организм производит случайное число потомков, причем число потомков X равно n с вероятностью p_n , $n = 0, 1, \dots$, $p_0 + p_1 + \dots = 1$. Под состоянием системы в момент t будем понимать число X_t особей. Тогда n особей в момент времени t превращаются в $X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}$ особей в момент $t + 1$, где $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ — независимые случайные величины, распределённые одинаково с X . Стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \dots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (б): управление запасами. Рассмотрим деятельность склада в следующей ситуации. Максимально допустимое число единиц

товара есть S . Заказы на пополнение склада осуществляются в моменты $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$. Спрос на товар на промежутке $(\tau_{t-1}, \tau_t]$ обозначим D_t , $t = 1, 2, \dots$. Величины D_1, D_2, \dots предполагаются независимыми, одинаково распределёнными, неотрицательными, целочисленными. Если число единиц товара на складе опускается ниже уровня s , то осуществляется заказ до восполнения уровня S . Состояние системы X_t есть число единиц товара на складе в момент τ_t . Тогда динамика изменения величины запаса имеет вид

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t - D_{t+1}, & \text{если } X_t > s, \\ S - D_{t+1}, & \text{если } X_t \leq s. \end{cases}$$

Порождённая данным рекуррентным соотношением стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \dots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (с): обслуживание однородных требований в однолинейной системе с ожиданием. Пусть в систему массового обслуживания поступает простейший входной поток требований с интенсивностью $\lambda > 0$. Если в момент поступления требования прибор свободен, то немедленно начинается обслуживание. Если прибор оказывается занят, то поступившее требование становится в очередь ожидания. Длительности обслуживаний различных требований независимы, одинаково распределены с функцией распределения $B(x)$, $B(+0) = 0$. Будем наблюдать систему в моменты окончания обслуживания требований. Под состоянием системы X_t в момент $t = 1, 2, \dots$ будем понимать число требований в системе после ухода t -го обслуженного требования. Положим также $X_0 = 0$, то есть в начале очередь пуста. Тогда имеет место соотношение

$$X_{t+1} = \max\{0, X_t + N_{t+1} - 1\}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где случайные величины N_1, N_2, \dots независимы и одинаково распределены, причем

$$\mathbf{P}\{N_t = k\} = \int_0^{\infty} (\lambda u)^k (k!)^{-1} \exp\{-\lambda u\} dB(u), \quad k = 0, 1, \dots$$

Число N_t есть количество новых требований, поступивших за t -ый такт обслуживания. Стохастическая последовательность $\{X_0, X_1, \dots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (d): многолинейная система обслуживания с ожиданием. Предположим, что рекуррентный поток однородных требований обслуживается m однотипными приборами. Интервалы между поступлением требований независимы и одинаково распределены с функцией распределения $A(u)$, $A(+0) = 0$. Если поступившее требование застаёт хотя бы один свободный прибор, то немедленно поступает на обслуживание. Если все приборы в момент поступления требования заняты, то требование становится в очередь ожидания. Длительности обслуживания требований независимы и одинаково распределены с функцией распределения $B(u)$, $B(+0) = 0$. Обозначим U_1, U_2, \dots интервалы между последовательными поступлениями требований, V_1, V_2, \dots длительности обслуживания требований. Введем в рассмотрение вектор $W_n = (W_{1,n}, W_{2,n}, \dots, W_{m,n})$, где величина $W_{j,n}$ обозначает длительность промежутка времени между поступлением n -го требования и моментом времени, когда впервые не меньше j приборов станут свободными от требований. Очевидно, $0 \leq W_{1,n} \leq W_{2,n} \leq \dots \leq W_{m,n}$, а $W_{1,n}$ — время ожидания начала обслуживания n -м поступившим требованием. Пусть $W_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$W_{n+1} = \mathbf{R}((W_{1,n} + U_{n+1} - V_{n+1})^+, (W_{2,n} - V_{n+1})^+, \dots, (W_{m,n} - V_{n+1})^+),$$

где $(a)^+$ принимает значение a при $a > 0$ и значение 0 при $a \leq 0$, а оператор \mathbf{R} упорядочивает элементы своего векторного аргумента по возрастанию. Тогда векторная стохастическая последовательность $\{W_0, W_1, \dots\}$ образует цепь Маркова.

Пример (e): потери энергии при столкновениях. Важные задачи физики связаны с процессами обмена массой или энергией между движущимися частицами при столкновениях. Предполагается, в частности, что если до столкновения энергия (или масса) частицы была $x > 0$, то после столкновения она представляется случайной величиной Y , так что отношение Y/x имеет функцию распределения $G(u)$, не зависящую от x . Такие предположения соответствуют потерям энергии. Обозначим X_t энергию частицы после t столкновений. Тогда последовательность $\{X_0, X_1, \dots\}$ есть цепь Маркова.

Пример (f): моделирование случайных векторов. При приближённом вычислении кратных определенных интегралов

$$J = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_m) p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m,$$

где D — область m -мерного пространства R^m , $p(x_1, \dots, x_m)$ — плотность распределения в D , возникает вопрос о получении значения случайной точки $X = (X^1, \dots, X^m)$ в области D с заданной плотностью распределения $p(x_1, \dots, x_m)$. Метод марковских цепей заключается в моделировании траектории общей цепи Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$, $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^m) \in R^m$ — плотность стационарного распределения которой совпадет с данной плотностью $p(x_1, \dots, x_m)$. При подходящем правиле генерирования последовательности $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ суммы

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(X_i^1, \dots, X_i^m)$$

будут сходиться к $\mathbf{M}f(X^1, \dots, X^m) = J$.

Пример (г): вложенные цепи для кусочно-линейных марковских процессов. Во многих приложениях теории массового обслуживания, теории надёжности применяется класс случайных процессов с непрерывным временем следующего устройства. Состояние процесса в момент t описывается вектором $\zeta(t) = (\nu(t), \xi(t))$, первая компонента которого может принимать лишь счётное число значений (конечное либо бесконечное), а вторая компонента есть вектор $(\xi_1(t), \dots, \xi_j(t))$ с неотрицательными компонентами и размерности $j = j(\nu(t))$, зависящей от значения первой компоненты. С ростом времени t компоненты вектора $\xi(t)$ убывают, компонента $\xi_i(t)$ убывает со скоростью α_i , $1 \leq i \leq j$. В момент t , когда одна из величин $\xi_1(t), \dots, \xi_j(t)$ достигает нулевого значения, процесс $\zeta(t)$ совершает скачок. Из состояния $\nu(t-0) = k$, $\xi(t-0) = x$ совершается мгновенный переход в новое состояние $\nu(t+0) = k'$, $\xi(t+0) = x'$, где вектор x' имеет уже размерность $j' = j'(k')$. Новое состояние (k', x') выбирается случайным образом из некоторого распределения вероятностей $P_{k,x}(k', dx')$. Предполагается, что процесс $\{\zeta(t); t \geq 0\}$ является марковским. Рассмотрим для пояснения систему обслуживания из примера (д). Выберем в качестве дискретной компоненты число находящихся в системе требований. Пусть компонента $\xi_1(t)$ означает оставшееся время до поступления следующего требования, а компоненты $\xi_2(t), \dots, \xi_j(t)$ — оставшееся время до окончания обслуживания первым, вторым, и т.д., $(j-1)$ -м приборами. Очевидно, здесь $j = \min\{m, \nu(t)\}$, а скорости убывания α_i непрерывных компонент равны единице.

Обозначим через t_n , $n = 1, 2, \dots$ момент n -го скачка процесса $\{\zeta(t); t \geq 0\}$. Введём случайные величины $\zeta_n^- = \zeta(t_n - 0) = (\nu_n^-, \xi_n^-)$,

$\zeta_n^+ = \zeta(t_n+0) = (\nu_n^+, \xi_n^+)$. Тогда каждая из последовательностей $\{\zeta_n^-; n = 1, 2, \dots\}$, $\{\zeta_n^+; n = 1, 2, \dots\}$ оказывается однородной цепью Маркова. Её переходная вероятность выражается через распределения $P_{k,x}(\cdot, \cdot)$. Важность изучения вложенных цепей Маркова в данной задаче объясняется тем, что распределение процесса $\{\zeta(t); t \geq 0\}$ выражается через характеристики вложенной цепи Маркова (в предположении, что за любой конечный промежуток времени происходит лишь конечное число скачков).

Библиографические источники: [4, Гл. 3, § 3.3], [5, Раздел 3.4], [6, Гл. 1], [7, Гл. 2], [10, Т. 2, Гл. VI, § 11]

1.2. Счётные цепи Маркова

Приведем здесь сводку основных фактов из теории счётных однородных цепей Маркова. Не уменьшая общности полагают $T = \{0, 1, \dots\}$ и вместо переменной t используют переменную $n = 0, 1, \dots$, означающую номер «шага». Пусть $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счётное (конечное или бесконечное) множество, \mathcal{E} — множество всех подмножеств E , X_0, X_1, \dots — последовательность случайных величин со значениями в E . Последовательность X_0, X_1, \dots называется (однородной) цепью Маркова, если для любого натурального n и любых $x'_0 \in E, x'_1 \in E, \dots, x'_n \in E$ таких, что $\mathbf{P}\{X_0 = x'_0, X_1 = x'_1, \dots, X_{n-1} = x'_{n-1}\} > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{X_n = x'_n\} | \{X_0 = x'_0, X_1 = x'_1, \dots, X_{n-1} = x'_{n-1}\}) &= \\ &= \mathbf{P}(\{X_n = x'_n\} | \{X_{n-1} = x'_{n-1}\}). \end{aligned}$$

Точки множества E называются *состояниями* цепи Маркова. Функция $\mathbf{P}\{X_n = w | X_{n-1} = x\} = p(x, w)$ называется переходной вероятностью марковской цепи. Набор чисел $p_0(x) = \mathbf{P}\{X_0 = x\}$, $x \in E$ называется начальным распределением цепи Маркова. Тогда имеет место основное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_0 = x'_0, X_1 = x'_1, \dots, X_{n-1} = x'_{n-1}, X_n = x'_n\} &= \\ &= p_0(x'_0)p(x'_0, x'_1)p(x'_1, x'_2) \times \dots \times p(x'_{n-1}, x'_n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Цепь Маркова считается заданной, если задана пара $(p_0(\cdot), p(\cdot, \cdot))$. Действительно, пусть $\Omega = E \times E \times \dots$ — пространство бесконечных последовательностей элементов из E , \mathfrak{F} — наименьшая σ -алгебра подмножеств

Ω , содержащая все цилиндрические множества вида $\mathcal{J}(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) = \{\omega = (w_0, w_1, \dots) \in \Omega: w_0 = x'_0, w_1 = x'_1, \dots, w_n = x'_n\}$. Определим случайные величины $X_n(\omega) = w_n$ для $\omega = (w_0, w_1, \dots, w_n, \dots)$. По теореме И. Гулчи о продолжении меры, равенство (1.1) определяет единственную вероятностную меру на измеримом пространстве (Ω, \mathfrak{F}) . В частности, распределение величины X_n находится по формуле

$$p_n(x) = \mathbf{P}\{X_n = x\} = \sum_{w \in E} p_0(w)p_n(w, x),$$

где n -шаговые переходные вероятности $p_n(\cdot, \cdot)$ определяются рекуррентно по формулам

$$p_1(w, x) = p(w, x), \quad p_n(w, x) = \sum_{w_1 \in E} p(w, w_1)p_{n-1}(w_1, x).$$

Набор неотрицательных чисел $\pi(x)$, $x \in E$ образует *стационарное распределение вероятностей*, если имеют место равенства

$$\pi(x) = \sum_{w \in E} \pi(w)p(w, x), \quad x \in E; \quad \sum_{x \in E} \pi(x) = 1.$$

Если все величины $\pi(x) > 0$, $x \in E$ то стационарное распределение называется *эргодическим*. Положив $p_0(x) = \pi(x)$, $x \in E$, будем иметь $p_n(x) = \pi(x)$, $x \in X$.

Состояния x и w из E называются *сообщающимися*, если существуют натуральные n_1 и n_2 , такие что $p_{n_1}(x, w) > 0$ и $p_{n_2}(w, x) > 0$. Множество E разложимо на непересекающиеся множества сообщающихся состояний. Каждое такое множество сообщающихся состояний называется *неразложимым классом*. Марковская цепь, все состояния которой принадлежат единственному неразложимому классу, называется *неразложимой*. Некоторые авторы называют также неразложимую цепь *неприводимой* [3, Гл. 3, § 6]. Наименьшее общее кратное d чисел n , таких что $p_n(x, x) > 0$, называется *периодом* состояния x . Если $d = 1$, то состояние x называется *апериодическим*. Все состояния в пределах одного неразложимого класса имеют один период и распадаются на *циклические подклассы* E_0, E_1, \dots, E_{d-1} , так что для любого состояния $x \in E_j$ возможен переход за один шаг только в класс E_{j+1} (из множества E_{d-1} только в множество E_0):

$$\sum_{w \in E_{j+1}} p(x, w) = 1, \quad x \in E_j.$$

Предельное поведение вероятностей $p_n(x)$, $x \in E$ неразложимой цепи с периодом $d \neq 1$ при $n \rightarrow \infty$ существенно зависит от начального распределения. Пусть существует стационарное распределение $\pi(\cdot)$. Если $p_0(x) = \pi(x)$, $x \in E$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \pi(x)$ для всех x . Если $p_0(x) = 1$ для $x = x^0$ и $p_0(x) = 0$ для $x \neq x^0$, то последовательность $\{p_n(x); n = 0, 1, \dots\}$ расходится, но сходятся подпоследовательности $\{p_{dn+j}(x); n = 0, 1, \dots\}$, $j = 0, 1, \dots, d - 1$.

Для изучения асимптотических свойств переходных вероятностей счётной цепи Маркова $\{X_n: n = 0, 1, \dots\}$ вводят случайные величины

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1: X_n = x\}, \quad x \in E.$$

Вероятности

$$f_{x,x}^{(n)} = \mathbf{P}(\{\tau_x = n\}|\{X_0 = x\})$$

и

$$f_{x,w}^{(n)} = \mathbf{P}(\{\tau_w = n\}|\{X_0 = x\}), \quad w \neq x$$

называют *вероятностью первого возвращения* в состояние x на n -м шаге и *вероятностью первого попадания* в состояние w на n -м шаге. Величина

$$f_{x,w} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x,w}^{(n)}$$

есть вероятность попадания, рано или поздно, в состояние w из состояния x . В частности, состояние x называется *возвратным*, если $f_{x,x} = 1$, и *невозвратным*, если $f_{x,x} < 1$. Для неразложимого класса сообщающихся состояний все его состояния одновременно либо возвратные, либо невозвратные. Классификация возвратных состояний производится по свойствам среднего времени первого возвращения. Возвратное состояние $x \in E$ называется *положительным*, если

$$\mu_x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{x,x}^{(n)} \right)^{-1} > 0,$$

и называется *нулевым*, если $\mu_x = 0$. Здесь μ_x есть *среднее время возвращения* в состояние x . Если состояние $w \in E$ является возвратным и апериодическим, то $p_n(x, w) \rightarrow f_{x,w} \mu_w^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in E$.

Решение вопроса о стационарных и эргодических распределениях счётной марковской цепи с бесконечным числом состояний содержится в следующих утверждениях:

— для существования единственного стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы существовал в точности один неразложимый класс положительных состояний;

— для существования эргодического распределения необходимо и достаточно, чтобы все состояния цепи образовывали единственный неразложимый апериодический класс положительных состояний.

Библиографические источники: [3], [5], [9, Гл. 5], [12, Гл. VIII].

Глава 2 | Общие цепи Маркова

2.1. Стохастические переходные ядра. Марковское свойство

Для теории общих цепей Маркова, как и для теории счетных цепей Маркова, основными объектами являются начальное распределение вероятностей и переходные вероятности. Изучение свойств переходных вероятностей составляет главный путь для ответа на вопрос о предельном поведении марковской цепи, о возможности наличия у нее установившегося стационарного режима.

Пусть (E, \mathcal{E}) — измеримое пространство. Будем предполагать всюду, что σ -алгебра \mathcal{E} порождена счётным семейством подмножеств E . Элементы множества E рассматриваются как возможные состояния системы.

Определение 1. *Неотрицательная функция $P(\cdot, \cdot): E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ называется стохастическим ядром, если 1) для каждого $x \in E$ функция $P(x, \cdot)$ есть вероятность на (E, \mathcal{E}) , и 2) для каждого $A \in \mathcal{E}$ функция $P(\cdot, A)$ измерима.*

Вероятность $\lambda(\cdot)$ на (E, \mathcal{E}) и стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ позволяют построить согласно теореме И. Тулчи стохастическую последовательность $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\lambda)$, где $\Omega = E^\infty$ — пространство бесконечных последовательностей элементов из E , \mathcal{F} — наименьшая σ -алгебра, содержащая все цилиндрические множества, а $\mathbf{P}_\lambda(\cdot)$ — вероятность на (E, \mathcal{E}) , определённая на цилиндрических множествах равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda\{\omega = (u_0, u_1, \dots): u_0 \in A_0, u_1 \in A_1, \dots, u_n \in A_n\} = \\ = \int_{A_0} \lambda(du_0) \int_{A_1} P(u_0, du_1) \dots \int_{A_n} P(u_{n-1}, du_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагают $X_n(\omega) = u_n$, $n = 0, 1, \dots$. Если вероятностная мера $\lambda(\cdot)$ сосредоточена в точке $x \in E$, то используется также обозначение \mathbf{P}_x .

Мероопределение (2.1) приводит к так называемому *марковскому свойству* для условных распределений: с \mathbf{P}_λ -вероятностью 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda(\{X_n \in A_n\} | X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) &= \\ &= \mathbf{P}_\lambda(\{X_n \in A_n\} | X_{n-1}) = P(X_{n-1}, A_n), \quad A_n \in \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Переходные n -шаговые вероятности (итерированные стохастические ядра) определяются последовательно как

$$\begin{aligned} P_0(x, A) &= I(x \in A), \quad P_1(x, A) = P(x, A), \\ P_{n+1}(x, A) &= \int_E P(x, du) P_n(u, A), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Вероятностный смысл переходных вероятностей за n шагов следующий:

$$\mathbf{P}_x\{X_n \in A\} = P_n(x, A).$$

По индукции можно доказать равенство (уравнение Колмогорова – Чепмена)

$$P_{m+n}(x, A) = \int_E P_m(x, du) P_n(u, A). \quad (2.3)$$

Основной интерес для нас будет представлять поведение вероятностей $P_n(x, A)$ при $n \rightarrow \infty$. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 2. Множество $A \in \mathcal{E}$ называется нулевым, если для всех $x \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) = 0.$$

Множество $A \in \mathcal{E}$ называется положительным, если для всех $x \in A$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x, A) > 0.$$

Введём необходимые в дальнейшем случайные величины. Для марковской цепи $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ случайная величина

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} I(X_n \in A)$$

есть время пребывания во множестве $A \in \mathcal{E}$; величины

$$\tau_A = \min\{n \geq 1: X_n \in A\},$$

$$\sigma_A = \min\{n \geq 0: X_n \in A\}$$

обозначают моменты первого возвращения и первого посещения множества $A \in \mathcal{E}$ соответственно. С этими случайными величинами связаны следующие важные в теории общих цепей Маркова функции:

$$U(x, A) = \int_{\Omega} \eta_A(\omega) \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{M}_x(\eta_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A),$$

$$L(x, A) = \mathbf{P}_x\{\tau_A < \infty\} = \mathbf{P}_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \in A\}\right).$$

Функция $U(\cdot, \cdot)$ называется *потенциалом*, порождённым переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$ и может принимать бесконечное значение для некоторых множеств $A \in \mathcal{E}$. Вероятность $L(x, A)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x, A) = P(x, A) + \int_{E \setminus A} P(x, du) L(u, A).$$

Определим *оператор сдвига* $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$ на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) с $\omega = (u_0, u_1, \dots)$ равенством: $\theta((u_0, u_1, \dots)) = (u_1, u_2, \dots)$. Тогда, очевидно, $X_n(\theta(\omega)) = X_{n+1}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $n \geq 0$. Индуктивно определяют степени оператора сдвига: $\theta_1(\cdot) = \theta(\cdot)$, $\theta_{n+1}(\cdot) = \theta(\theta_n(\cdot))$. Дополнительно полагают $\theta_0(\omega) = \omega$. Неотрицательная целочисленная расширенная случайная величина T называется *моментом остановки* относительно семейства сигма-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, если для всех $n \geq 0$ имеет место соотношение $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Это означает, что для всех $n \geq 0$ событие $\{T = n\}$ эквивалентно событию $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in B_n\}$ для некоторого множества $B_n \in \mathcal{E}^{\otimes(n+1)}$. С моментом остановки T интересно связать сигма-алгебру \mathcal{F}_T «событий, наблюдаемых до случайного момента T »:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}: \{T = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots\}.$$

Теорема 1. *Имеет место строго марковское свойство: для любых A_1, A_2, \dots, A_m из \mathcal{E} и любого момента остановки T относительно $\{\mathcal{F}_n; n = 0, 1, \dots\}$ \mathbf{P}_λ -почти наверное*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \dots, X_{T+m} \in A_m\} | \mathcal{F}_T) = \\ = \mathbf{P}_{X_T}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_m \in A_m\}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. Требуется установить, что для каждого $A \in \mathcal{F}_T$ интегралы от левой и правой частей равенства (2.4) совпадают. Из определения условного математического ожидания (применительно к условной вероятности) имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \dots, X_{T+m} \in A_m\} | \mathcal{F}_T) \mathbf{P}_\lambda(d\omega) = \\
 & = \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \dots, X_{T+m} \in A_m\} \cap A) = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{T+1} \in A_1, X_{T+2} \in A_2, \dots, X_{T+m} \in A_m, T = n\} \cap A) = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \dots, X_{n+m} \in A_m, T = n\} \cap A),
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \dots, X_{n+m} \in A_m, T = n\} \cap A) = \\
 & = \int_{\{T=n\} \cap A} \mathbf{P}_\lambda(\{X_{n+1} \in A_1, X_{n+2} \in A_2, \dots, X_{n+m} \in A_m\} | \mathcal{F}_n) \mathbf{P}_\lambda(d\omega) = \\
 & = \int_{\{T=n\} \cap A} \mathbf{P}_{X_n}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_m \in A_m\}) \mathbf{P}_\lambda(d\omega) = \\
 & = \int_{\{T=n\} \cap A} \mathbf{P}_{X_T}(\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_m \in A_m\}) \mathbf{P}_\lambda(d\omega).
 \end{aligned}$$

Эти две цепочки равенств доказывают теорему. \square

Библиографические источники: [12, Гл. VIII], [8, Гл. 1], [13, Раздел 3].

2.2. Неприводимые цепи

Непосредственное перенесение понятия сообщающихся состояний на случай общего пространства состояний встречает ту трудность, что может оказаться $P(x, \{y\}) = 0$ для любой пары состояний x, y . Например,

такая ситуация имеет место если при каждом x вероятность

$$P(x, A) = \int_A p(x, u) du,$$

то есть $P(x, \cdot)$ имеет плотность распределения $p(x, \cdot)$.

Определение 3. *Стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ называется φ -неприводимым, если существует мера $\varphi(\cdot)$ на измеримом пространстве (E, \mathcal{E}) , такая что $L(x, A) > 0$ для всякого множества $A \in \mathcal{E}$ с $\varphi(A) > 0$ и для всех $x \in E$. Цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ с φ -неприводимой переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$ также называется φ -неприводимой.*

Легко видеть, что данное определение φ -неприводимости эквивалентно следующим утверждениям:

- для всех $x \in E$ из $\varphi(A) > 0$ следует $U(x, A) > 0$;
- для каждого $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}$ с $\varphi(A) > 0$ существует натуральное $n = n(x, A)$, такое что $P_n(x, A) > 0$;
- для всех $x \in E$ из $\varphi(A) > 0$ для $A \in \mathcal{E}$ следует

$$K_\varepsilon(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, A) \varepsilon (1 - \varepsilon)^n > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Приведённое определение φ -неприводимости согласуется с неприводимостью счётной цепи Маркова следующим образом. Если множество E счётно, то возьмём в качестве меры φ считающую меру $|\cdot|$, для которой $|A|$ равно числу элементов во множестве A . Неравенство $|A| > 0$ означает, что множество A не пусто, тогда $L(x, A) = \sum_{y \in A} L(x, \{y\})$, а

$L(x, \{y\}) > 0$ означает $P_n(x, \{y\}) > 0$ для некоторого n . Наоборот, из $L(y, \{x\}) > 0$ следует $P_m(y, \{x\}) > 0$. Таким образом, любые два состояния x и y сообщаются.

Переходная вероятность может быть φ -неприводимой для более чем одной меры φ . В связи с этим, важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 2. *Если стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ φ -неприводимо для некоторой меры φ , то существует вероятностная мера $\psi(\cdot)$ на измеримом пространстве (E, \mathcal{E}) , такая что 1) $P(\cdot, \cdot)$ является ψ -неприводимым, 2) любая другая мера $\varphi'(\cdot)$ определяет φ' -неприводимость тогда и*

только тогда, когда φ' абсолютно-непрерывна относительно ψ , 3) если $\psi(A) = 0$, то $\psi\{x: L(x, A) > 0\} = 0$; 4) вероятностная мера $\psi(\cdot)$ эквивалентна мере

$$\psi'(A) = \int_E \varphi'(du) K_\varepsilon(u, A)$$

для каждой конечной определяющей неприводимость меры $\varphi'(\cdot)$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi(E) = 1$. Выберем $0 < \varepsilon < 1$ и определим меру $\psi(\cdot)$ на (E, \mathcal{E}) равенством

$$\psi(A) = \int_E \varphi(du) K_\varepsilon(u, A). \quad (2.5)$$

Легко убедиться, что $\psi(\cdot)$ также является вероятностной мерой. Рассмотрим множества

$$\bar{A}(k) = \left\{ x: \sum_{n=1}^k P_n(x, A) > k^{-1} \right\}.$$

Тогда $\bar{A}(k) \subset \bar{A}(k+1)$ и $\lim_k \bar{A}(k) = E_0 = \{x: \sum_{n \geq 1} P_n(x, A) > 0\}$. При этом, $K_\varepsilon(x, A) = 0$ для $x \notin E_0$. Поскольку функция $P(\cdot, A)$ измерима по первому аргументу, множество $\bar{A}(k) \in \mathcal{E}$. Пусть $\psi(A) > 0$. Покажем, что тогда $L(x, A) > 0$ для всех $x \in E$. Имеем:

$$0 < \int_E \varphi(du) K_\varepsilon(u, A) = \int_{E_0} \varphi(du) K_\varepsilon(u, A) = \lim_k \int_{\bar{A}(k)} \varphi(du) K_\varepsilon(u, A).$$

Тогда существует натуральное k , такое что $\varphi(\bar{A}(k)) > 0$. Теперь из φ -неприводимости следует существование натурального m , такого что $P_m(x, \bar{A}(k)) > 0$. Затем,

$$\begin{aligned} L(x, A) &\geq \sum_{n=1}^k P_{m+n}(x, A) = \\ &= \int_E P_m(x, du) \left(\sum_{n=1}^k P_n(u, A) \right) \geq k^{-1} P_m(x, \bar{A}(k)) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ядро $P(\cdot, \cdot)$ является ψ -неприводимым.

Пусть теперь имеется еще одна мера, $\varphi'(\cdot)$, такая что ядро $P(\cdot, \cdot)$ является φ' -неприводимым. Тогда из неравенства $\varphi'(A) > 0$ следует, что для всех $x \in E$ будет $L(x, A) > 0$, откуда $K_\varepsilon(x, A) > 0$ и, значит, $\psi(A) > 0$ в силу формулы (2.5). Таким образом, мера $\varphi'(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $\psi(\cdot)$. Предположим теперь, что стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ -неприводимо и $\varphi'(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $\psi(\cdot)$. То есть, из $\varphi'(A) > 0$ следует $\psi(A) > 0$, затем из ψ -неприводимости имеем $K_\varepsilon(x, A) > 0$ для всех $x \in E$, что эквивалентно $L(x, A) > 0$ для всех $x \in E$. Это означает φ' -неприводимость стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$.

Для доказательства пункта 3 используем неравенства

$$\int_E \psi(du) P_m(u, A) (1-\varepsilon)^{-m} = \int_E \varphi(du) \sum_{n=1}^{\infty} P_{m+n}(u, A) \varepsilon (1-\varepsilon)^{-m-n} \leq \psi(A).$$

Поэтому из $\psi(A) = 0$ следует

$$0 = \int_E \psi(du) P_m(u, A) = \int_{E_0} \psi(du) P_m(u, A) + \int_{E \setminus E_0} \psi(du) P_m(u, A).$$

В силу определения E_0 имеем

$$\int_{E \setminus E_0} \psi(du) P_m(u, A) = 0,$$

и

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_0} \psi(du) P_m(u, A) = \int_{E_0} \psi(du) L(u, A).$$

Поскольку $L(u, A) > 0$ для всех $u \in E_0$, предположение $\psi(E_0) > 0$ ведёт к противоречию. \square

Будем называть стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ -неприводимым, если оно φ -неприводимо для некоторой меры $\varphi(\cdot)$, а $\psi(\cdot)$ есть максимальная определяющая неприводимость мера, существование которой установлено в теореме 2. Марковскую цепь $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ с ψ -неприводимой переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$ также называют ψ -неприводимой цепью. Класс всех множеств из \mathcal{E} , имеющих положительную меру $\psi(\cdot)$, обозначается \mathcal{E}^+ :

$$\mathcal{E}^+ = \{A \in \mathcal{E} : \psi(A) > 0\}.$$

Множество $A \in \mathcal{E}^+$ называется ψ -положительным.

Понятие максимальной меры, определяющей неприводимость, является нетривиальным. Пусть $\psi(\cdot)$ — максимальная мера, определяющая неприводимость стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим сужение меры $\psi(\cdot)$ на некоторое множество $B \in \mathcal{E}$: $\varphi_B(A) = \psi(A \cap B)$. Тогда ядро $P(\cdot, \cdot)$ также окажется φ_B -неприводимым, а мера ψ однозначно, с точностью до эквивалентности, восстанавливается по формуле (2.5) по своему сужению на множество B .

Определим отношение $x \rightarrow A$ на прямом произведении $E \times \mathcal{E}$ следующим образом: $x \rightarrow A$ тогда и только тогда, когда $L(x, A) > 0$. Если $x \rightarrow A$, то говорят, что множество A *достижимо* из состояния x .

Теорема 3. Пусть стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ -неприводимо, $\psi(A) > 0$ и $x \rightarrow B$ для всех $x \in A$. Тогда $\psi(B) > 0$.

Доказательство. Утверждение следует из конструкции максимальной меры (2.5), определяющей неприводимость. \square

Определение 4. Множество $F \in \mathcal{E}$ называется замкнутым относительно стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$, если

$$P(x, E \setminus F) = 0 \quad \text{для всех } x \in F.$$

Пусть стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ -неприводимо. Множество $F \in \mathcal{E}$ называется полным, если $\psi(E \setminus F) = 0$.

Теорема 4. Замкнутое множество является полным. В любом полном множестве содержится непустое замкнутое множество.

Доказательство. Пусть A — замкнутое множество. Тогда для всех $x \in E \setminus A$ следует $P_1(x, E \setminus A) = P(x, E \setminus A) = 0$. Допустим, что $P_{n-1}(x, E \setminus A) = 0$ для всех $x \in A$ и некоторого натурального n . Тогда из уравнения Колмогорова — Чепмена получим

$$\begin{aligned} P_n(x, E \setminus A) &= \int_{E \setminus A} P(x, dw) P_{n-1}(w, E \setminus A) + \\ &+ \int_A P(x, dw) P_{n-1}(w, E \setminus A) = 0. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как область интегрирования имеет нулевую $P(x, \cdot)$ -меру. Таким образом, по индукции $P_n(x, E \setminus A) = 0$ для всех $x \in A$ и всех натуральных n . Но тогда $L(x, E \setminus A) = 0$ для всех $x \in A$ и из ψ -неприводимости должно быть $\psi(E \setminus A) = 0$.

Предположим теперь, что A — полное множество. Положим

$$B = \left\{ x \in E : \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, E \setminus A) = 0 \right\}.$$

Поскольку $P_0(x, E \setminus A) = 1$ для $x \in E \setminus A$, то $B \subset A$. В силу пункта 3 теоремы 2, $\psi(B) > 0$ и B не пусто. Наконец, если $P(x, E \setminus B) > 0$ для некоторого $x \in B$, из уравнения Колмгорова — Чепмена имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x, E \setminus A) \geq \int_{E \setminus B} P(x, dw) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w, E \setminus A) \right\} > 0.$$

Но этого быть не может, значит, B — искомое замкнутое множество. \square

Библиографические источники: [8, Глава 2], [13, Раздел 4.2].

2.3. Минорантные множества и цикличность

В теории общих цепей Маркова ключевую роль играют определяемые ниже *минорантные* множества. Во многих аспектах они аналогичны отдельным состояниям у счётной марковской цепи. Основное теоретическое достоинство минорантных множеств заключено в конструкции «расщеплённой цепи», которая выходит за рамки настоящего учебного пособия. Однако, и для анализа марковских моделей реальных процессов минорантные множества оказываются полезными, как будет показано в главе 3.

Определение 5. *Множество $A \in \mathcal{E}^+$ называется минорантным, если существуют натуральное m и нетривиальная мера $\nu_m(\cdot)$, такие что для всех $x \in A$ и $B \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство*

$$P_m(x, B) \geq \nu_m(B).$$

В этом случае множество A называют ν_m -минорантным.

Из определения минорантного множества следует, что мера $\nu_m(\cdot)$ определяет неприводимость стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$. Действительно, из неприводимости следует, что для любого $x \in E$ найдется натуральное число n , такое что $P_n(x, A) > 0$. Тогда

$$P_{n+m}(x, B) \geq \int_A P_n(x, dw) P_m(w, B) \geq P_n(x, A) \nu_m(B).$$

Если $\nu_m(B) > 0$, то $P_{n+m}(x, B) > 0$. Итак, из $\nu_n(B) > 0$ следует $L(x, B) > 0$ для всех $x \in E$. Следовательно, мера $\nu_n(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно максимальной определяющей неприводимость меры $\psi(\cdot)$.

Далее, всегда можно выбрать меру $\nu_m(\cdot)$ таким образом, что $\nu_m(A) > 0$. Для множества $A \in \mathcal{E}^+$ имеем $K_\varepsilon(x, A) > 0$ для всех $x \in E$. Тогда

$$0 < \int_E \nu_m(dx) K_\varepsilon(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^n \int_E \nu_m(dx) P_n(x, A),$$

значит, для некоторого n будем иметь

$$\int_E \nu_m(dx) P_n(x, A) > 0.$$

Рассмотрим меру

$$\nu_{m+n}(\cdot) = \int_E \nu_m(dx) P_n(x, \cdot).$$

Убедимся, что множество A одновременно и ν_{n+m} -минорантное. Для произвольного $x \in A$ и $B \in \mathcal{E}$ имеем

$$P_{m+n}(x, B) = \int_E P_m(x, dw) P_n(w, B) \geq \int_E \nu_m(dw) P_n(w, B) = \nu_{n+m}(B).$$

Здесь использовано следующее свойство интеграла Лебега: если $\lambda(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ — меры на (E, \mathcal{E}) , такие что $\lambda(A) \geq \mu(A)$ всюду на \mathcal{E} , а $f(x)$ — \mathcal{E} -измеримая функция, то

$$\int_E f(x) \lambda(dx) \geq \int_E f(x) \mu(dx).$$

Данное неравенство очевидно для простых функций $f(\cdot)$ и распространяется на произвольные измеримые функции обычным образом.

Оказывается, у ψ -неприводимой марковской цепи минорантные множества обязательно существуют. Точнее, для любого множества $B \in \mathcal{E}^+$ существуют натуральное m , мера $\nu_m(\cdot)$ и соответствующее минорантное множество $A \subset B$, такие что $A \in \mathcal{E}^+$ и $\nu_m(A) > 0$. Этот факт является следствием счётной порождённости σ -алгебры \mathcal{E} . Более того, отыскав хотя бы одно минорантное множество, мы можем указать покрытие всего пространства E минорантными множествами. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 5. *Если множество A является ν_n -минорантным, а для каждого $x \in B$ выполнено неравенство $P_m(x, A) \geq \delta$, тогда множество B необходимо ν_{m+n} -минорантное и мера $\nu_{m+n}(\cdot)$ отличается от $\nu_n(\cdot)$ постоянным множителем.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся уравнением Колмогорова – Чепмена (2.3). Для $x \in B$ и $C \in \mathcal{E}$ имеем:

$$\begin{aligned} P_{m+n}(x, C) &= \int_E P_m(x, dy) P_n(w, C) \geq \int_A P_m(x, dy) P_n(w, C) \geq \\ &\geq \int_A P_m(x, dy) \nu_n(C) = P_m(x, A) \nu_n(C) \geq \delta \nu_n(C). \end{aligned}$$

Итак, достаточно положить $\nu_{m+n}(\cdot) = \delta \nu_n(\cdot)$. □

Также как и для счётных цепей, у цепи Маркова с общим пространством состояний выделяют циклические подклассы, между которыми только и осуществляются переходы за один шаг.

Определение 6. *Последовательность E_0, E_1, \dots, E_{m-1} непересекающихся подмножеств из \mathcal{E} называется m -циклом, если для каждого $i = 0, 1, \dots, m-1$ и для каждого $x \in E_i$ оказывается*

$$P(x, E_j) = 1, \quad j \equiv i + 1 \pmod{m}.$$

Циклический подкласс у счётной марковской цепи состоит из отдельных состояний. Так же и минорантное множество принадлежит не более чем одному из компонент E_i цикла с точностью до подмножества ψ -меры ноль.

Теорема 6. Пусть стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ ψ -неприводимо, E_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ — m -цикл и A — ν_n -минорантное множество.

Обозначим $N = E \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} E_i$. Тогда найдётся индекс i , $0 \leq i < m$, такой, что $A \subset E_i \cup N$ и $\nu_n(E \setminus E_j) = 0$ для $j = i + n \pmod m$.

Доказательство. Множество N имеет нулевую ψ -меру как дополнение к замкнутому и полному (по теореме 4) множеству $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{m-1}$. Из абсолютной непрерывности меры $\nu_n(\cdot)$ относительно меры $\psi(\cdot)$ следует равенство $\nu_n(N) = 0$. Значит, найдётся такое i , $0 \leq i < m-1$, что $\nu_n(E_i) > 0$ (напомним, мера $\nu_n(\cdot)$ не равна тождественно нулю). Тогда неравенство $P_n(x, E_j) \geq \nu_n(E_j) > 0$ возможно, только если $x \in E_i$ и $i \equiv j - n \pmod m$, или если $x \in N$, т.е. $A \subset E_i \cup N$. Для $j' \neq j$, в силу определения m -цикла, имеем $P_n(x, E_{j'}) = 0$, откуда $\nu_n(E_{j'}) = 0$. \square

Пусть A — минорантное множество и мера $\nu_m(\cdot)$ выбрана так, что $\nu_m(A) > 0$. Тогда условие минорантности $P_m(x, A) \geq \nu_m(A) > 0$ для $x \in A$ означает, что марковская цепь, стартуя из множества A , с положительной вероятностью вернётся в исходное множество A через m шагов. Рассмотрим все числа m , обладающие этим свойством:

$$I = \{m \geq 1: A \text{ — } \nu_m\text{-минорантное с } \nu_m(A) > 0\}.$$

Обозначим d наибольший общий делитель чисел из множества I . Покажем, что если $m \in I$ и $m' \in I$, то $m + m' \in I$. Действительно, для $x \in A$ имеем

$$P_{m+m'}(x, B) \geq \int_A P_m(x, dw) P_{m'}(w, B) \geq \nu_{m'}(B) \nu_m(A)$$

и $P_{m+m'}(x, A) > 0$. Поскольку I замкнуто относительно сложения, оно содержит все достаточно большие кратные d .

Теорема 7. Пусть $P(\cdot, \cdot)$ — ψ -неприводимое стохастическое ядро, A — ν_M -минорантное множество и число d как определено выше. Тогда существует d -цикл E_0, E_1, \dots, E_{d-1} , а число d не зависит от выбора множества A и меры ν_M .

Доказательство. Положим для $i = 0, 1, \dots, d-1$

$$\tilde{E}_i = \left\{ x: \sum_{n=1}^{\infty} P_{nd-i}(x, A) > 0 \right\}.$$

Тогда объединение

$$\bigcup_{i=0}^{d-1} \tilde{E}_i = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A) > 0 \right\}$$

совпадает со всем E в силу предположения о ψ -неприводимости. Покажем, что любые два множества $\tilde{E}_i, \tilde{E}_k, i \neq k$, могут иметь только ψ -нулевые пересечения. Положим $\tilde{E}_{i,n,r} = \{x : P_{nd-i}(x, A) \geq r^{-1}\}$ для $r > 0$. Нетрудно убедиться в представлении

$$\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{\infty} \tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}.$$

Предположим, что $\psi(\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k) > 0$. Тогда найдутся такие натуральные m, n, r и s , что окажется $\psi(\tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}) > 0$. Заметим, что для всех $x \in C = \tilde{E}_{i,n,r} \cap \tilde{E}_{k,m,s}$ выполняются оценки

$$P_{nd-i}(x, A) \geq 1/r, \quad P_{md-k}(x, A) \geq 1/s. \quad (2.6)$$

Кроме того, из ψ -неприводимости стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$ и неравенства $\psi(C) > 0$ следует для некоторого q неравенство

$$\int_A \nu_M(dx) P_q(x, C) = \delta_q > 0. \quad (2.7)$$

Действительно, предположение

$$\int_A \nu_M(dx) P_q(x, C) = 0, \quad q = 0, 1, \dots$$

влечет $P_q(x, C) = 0$ тождественно по $x \in A$, чего не может быть, так как $\psi(A) > 0$. Наконец, поскольку множество A — ν_M -минорантное, с учётом оценок (2.6), (2.7), для любого $B \subset A$ имеем

$$\begin{aligned} P_{2M+nd-i+q}(x, B) &\geq \\ &\geq \int_A P_M(x, dy) \int_C P_q(y, dw) \int_A P_{nd-i}(w, dz) P_M(z, B) \geq \\ &\geq \int_A P_M(x, dy) \int_C P_q(y, dw) P_{nd-i}(w, A) \nu_M(B) \geq \\ &\geq \int_A \nu_M(dy) P_q(y, C) r^{-1} \nu_M(B) \geq \delta_q r^{-1} \nu_M(B). \end{aligned}$$

Следовательно, число $2M + md + q - i$ входит в множество I . Аналогично показывается, что $2M + nd + q - k \in I$. Отсюда $i \equiv k \pmod{d}$, что противоречит определению числа d . Итак, противоречие доказывает, что $\psi(\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k) = 0$.

Положим

$$N = \bigcup_{i=0}^{d-1} \bigcup_{k=0}^{d-1} \tilde{E}_i \cap \tilde{E}_k.$$

По доказанному, $\psi(N) = 0$. Множества $\tilde{E}_i \setminus N$, $i = 0, 1, \dots, d-1$, попарно не пересекаются и их объединение полно. По теореме 4 существует непустое замкнутое множество $D \subset E \setminus N$. Положим $E_i = D \cap (\tilde{E}_i \setminus N)$. Тогда E_0, E_1, \dots, E_{d-1} есть разбиение множества D и d -цикл. Из теоремы 6 следует, что если $E'_0, E'_1, \dots, E'_{d'-1}$ — другой цикл, то d' делит d , а каждое множество E'_i с точностью до ψ -нулевого множества есть объединение d/d' множеств из набора E_0, E_1, \dots, E_{d-1} . Следовательно, цикл не зависит от выбора минорантного множества A \square

В связи с фактами, содержащимися в теоремах 6, 7, введём в рассмотрение классы \mathcal{S}_i^+ , $i = 0, 1, \dots, d-1$, минорантных множеств A , таких что $A \cap E_j = \emptyset$ при $j \neq i$. Очевидно, что из $A \in \mathcal{S}_i^+$ и $A' \subset A$, $\psi(A') > 0$, следует $A' \in \mathcal{S}_i^+$. Также из $C \in \mathcal{S}_i^+$ следует $C' = \{x: P_q(x, C) > 0\} \in \mathcal{S}_{i-q}^+$. Наконец, если $C \in \mathcal{S}_i^+$ и $C' \in \mathcal{S}_i^+$, то $C \cup C' \in \mathcal{S}_i^+$. Для доказательства последнего свойства предположим, что множество C — ν_M -минорантное, а множество C' — $\nu_{M'}$ -минорантное и выберем достаточно большие m и m' из множества I , такие что $m = m' + M' - M$. Тогда для $x \in C$ и $B \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} P_{m+2M}(x, B) &\geq \int_E P_M(x, dy) \int_C P_m(y, dz) \int P_M(z, B) \geq \\ &\geq \nu_M(B) \int_E \nu_M(dy) P_m(y, C), \end{aligned}$$

а для $x \in C'$ —

$$\begin{aligned} P_{m+2M}(x, B) &= P_{m'+M+M'}(x, B) \geq \\ &\geq \int_E P_{M'}(x, dy) \int_{C'} P_{m'}(y, dz) \int P_M(z, B) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \nu_M(B) \int_E \nu_{M'}(dy) P_{m'}(y, C),$$

откуда

$$P_{m+2M}(x, B) \geq \nu_M(B) \min \left\{ \int_E \nu_M(dy) P_m(y, C), \int_E \nu_{M'}(dy) P_{m'}(y, C) \right\}$$

для $x \in C \cup C'$.

Определение 7. Если $d = 1$, то стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ называется аperiodическим. Если $d > 1$, то стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ называют периодическим, а число d называют периодом.

Теорема 8. Существует не более чем счётное разбиение множества E на минорантные множества A_m , $m = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Выберем некоторое минорантное множество A . Рассмотрим множества

$$C_m^{(i)} = \left\{ x : \sum_{n=1}^m P_{nd-i}(x, A) \geq m^{-1} \right\}.$$

Тогда $C_m^{(i)} \subset C_{m+1}^{(i)}$ и

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m^{(i)} = \tilde{E}_i,$$

где снова встретилось введённое при доказательстве теоремы 7 множество \tilde{E}_i . Таким образом, класс ψ -положительных множеств $C_m^{(i)}$, $m \geq 1$, $0 \leq i \leq d-1$, образует не более чем счётное покрытие множества E . Наконец, множества $C_m^{(i)}$ — минорантные для достаточно больших m . \square

Итак, минорантные множества во многом подобны дискретным состояниям счётной марковской цепи: счётное их число образует разбиение всего пространства состояний цепи и элементы разбиения могут быть объединены в циклические подклассы.

Библиографические источники: [8, Глава 2], [13, Раздел 5.3].

2.4. Возвратность и невозвратность

Для изучения предельных свойств общей марковской цепи, как и для счётной цепи, выделяют возвратные и невозвратные цепи.

Определение 8. 1) Множество $A \in \mathcal{E}$ называется равномерно невозвратным, если существует константа $M < \infty$, такая что $\mathbf{M}_x \eta_A \leq M$ для всех $x \in A$. Множество $A \in \mathcal{E}$ называется невозвратным, если его можно покрыть счётным числом равномерно невозвратных множеств. Множество $A \in \mathcal{E}$ называется возвратным, если для всех $x \in A$ имеет место равенство $\mathbf{M}_x \eta_A = \infty$.

2) Цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ называется возвратной, если она ψ -неприводима и $U(x, A) = \infty$ для каждого $x \in E$ и каждого $A \in \mathcal{E}^+$. Цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ называется невозвратной, если она ψ -неприводима и множество E является невозвратным.

Если множество A равномерно невозвратно, то оно является нулевым в смысле определения 2. Действительно, необходимое условие сходимости ряда

$$\mathbf{M}_x(\eta_A) = U(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A)$$

имеет вид $P_n(x, A) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что это предельное соотношение имеет место не только для $x \in A$, но и для любых $x \in E$. Введём табу-вероятности ${}_A P_n(x, B) = \mathbf{P}_x\{X_n \in B, \tau_A \geq n\}$. Из строго марковского свойства цепи $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ имеем разложение по моменту первого входа: для произвольного множества $B \in \mathcal{E}$

$$P_n(x, B) = {}_A P_n(x, B) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_A {}_A P_j(x, dw) P_{n-j}(w, B).$$

В частности, для $x \notin A$ и $B = A$ имеем

$$P_n(x, A) = {}_A P_n(x, A) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_A {}_A P_j(x, dw) P_{n-j}(w, A),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_A P_n(x, A) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_A P_j(x, dw) \sum_{n=j+1}^{\infty} P_{n-j}(w, A) \leq 1 + M.$$

А это значит, что $P_n(x, A) \rightarrow 0$ и для $x \notin A$. Тогда, по теореме о мажорируемой сходимости ($P_n(x, A) < 1$, $n = 1, 2, \dots$), для любого начального распределения $\lambda(\cdot)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\lambda\{X_n \in A\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_n(x, A) \lambda(dx) = 0.$$

Пусть случайная величина $L_B = \sup\{n \geq 0: X_n \in B\}$ обозначает момент последнего выхода из множества B . Оказывается, для равномерно невозвратного множества B

$$\mathbf{P}_x\{L_B < \infty\} = 1 \quad \text{для всех } x \in B.$$

Это следует из представления ограниченной функции $U(x, B)$ как конечного математического ожидания $\mathbf{M}_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} I(\{X_n \in B\})\right)$.

Если множество невозвратно, то не обязательно вероятность нахождения в нем X_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Достаточно взять всё пространство E , для которого $\mathbf{P}_\lambda\{X_n \in E\} = 1$.

В общем случае цепь Маркова может не быть ни возвратной, ни невозвратной. Для этого достаточно, чтобы функция $U(x, A)$ переменного x при фиксированном A принимала как конечные, так и бесконечные значения. Однако для ψ -неприводимой цепи реализуется только одна из этих возможностей.

Теорема 9. *ψ -неприводимая цепь Маркова либо возвратна, либо невозвратна.*

Доказательство. Предположим, что цепь Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ с переходной вероятностью $P(\cdot, \cdot)$ не является возвратной. Построим явно покрытие множества E равномерно невозвратными множествами.

Так как определение возвратности для стохастического ядра $P(\cdot, \cdot)$ не выполняется, должны существовать точка $x^* \in E$ и множество $A \in \mathcal{E}^+$, для которых $U(x^*, A) < \infty$. Рассмотрим измеримое множество $A_* = \{x: U(x, A) = \infty\} \in \mathcal{E}$. Предположение $\psi(A_*) > 0$ ведёт, в силу ψ -неприводимости, к неравенству $P_n(x^*, A_*) > 0$ для некоторого натурального n . Но тогда мы имели бы

$$U(x^*, A) \geq \int_E P_n(x^*, dw)U(w, A) \geq \int_{A_*} P_n(x^*, dw)U(w, A) = \infty.$$

Следовательно, $\psi(A_*) = 0$. Рассмотрим измеримые множества $A_r = A \cap \{x: U(x, A) \leq r\}$, $r = 1, 2, \dots$. Последовательность множеств A_r , $r = 1, 2, \dots$ возрастает и имеет пределом $\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r = A \setminus A_*$. Поскольку $\psi(A) > 0$, из свойства монотонности вероятности найдётся такое число r , для которого $\psi(A_r) > 0$. Тогда известным уже способом устанавливается оценка

$$U(x, A_r) < 1 + r, \quad x \in E.$$

Наконец, введём множества $\bar{A}_r(m) = \left\{x: \sum_{n=0}^m P_n(x, A_r) > m^{-1}\right\}$, $m = 1, 2, \dots$, при этом $x \in \bigcup_{m=0}^{\infty} \bar{A}_r(m)$ тогда и только тогда, когда $L(x, A_r) > 0$. Поскольку $\psi(A_r) > 0$, из определения ψ -неприводимости имеем $E = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bar{A}_r(m)$. Это значит, что последовательность множеств $\bar{A}_r(m)$, $m = 0, 1, \dots$ образует покрытие множества E . Покажем, что каждое множество $A_r(m)$ невозвратно. Это следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} m(1+r) &\geq mU(x, A_r) \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^m \sum_{n=j}^{\infty} P_n(x, A_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E P_n(x, dw) \sum_{j=1}^n P_j(w, A_r) \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_r(m)} P_n(x, dw) \sum_{j=1}^m P_j(w, A_r) \geq m^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, \bar{A}_r(m)). \end{aligned}$$

Доказательство завершено. \square

Теорема 10. Пусть ψ -неприводимое стохастическое ядро $P(\cdot, \cdot)$ невозвратно. Тогда любое минорантное множество A является равнономерно невозвратным.

Доказательство. Пусть множества A_1, A_2, \dots равномерно невозвратны и образуют покрытие множества E , причём $U(x, A_i) \leq M_i$, $i = 1, 2, \dots$. Определим функцию

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I(x \in A_i)}{2^i M_i}, \quad x \in E.$$

Тогда $g(x) > 0$ и

$$\int_E U(x, dy)g(y) \leq 1$$

всюду на E . Пусть C — ν_M -минорантное множество. Тогда, в силу ψ -неприводимости, для достаточно большого n и $x \in C$

$$\int_E P_{M+n}(x, dy)g(y) \geq \gamma = \int_C \nu_M(dy) \int_E P_n(y, dz)g(z) > 0.$$

Наконец,

$$\int_E U(x, dy)g(y) \geq \sum_{m=0}^{\infty} \int_E P_{m+M+n}(x, dy)g(y) \geq \gamma U(x, C).$$

Итак, мы доказали ограниченность функции $U(x, C)$, а следовательно, и равномерную невозвратность минорантного множества C . \square

Библиографические источники: [8, Глава 3], [13, Глава 8].

2.5. Инвариантные и стационарные распределения

Среди всех распределений вероятностей $\lambda(\cdot)$ на (E, \mathcal{E}) выделяют распределение $\pi(\cdot)$ (если такое существует), обладающее свойством

$$\pi(A) = \int_E \pi(dx)P(x, A), \quad A \in \mathcal{E}. \quad (2.8)$$

Взяв $\pi(\cdot)$ в качестве начального распределения, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\pi\{X_n \in A\} &= \int_E \pi(dx)P_n(x, A) = \int_E \pi(dx) \int_E P(x, dw)P_{n-1}(w, A) = \\ &= \int_E \pi(dw)P_{n-1}(w, A) = \mathbf{P}_\pi\{X_{n-1} \in A\} = \dots = \pi(A). \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что величина

$$\mathbf{P}_\pi\{X_n \in A_0, X_{n+1} \in A_1, \dots, X_{n+m} \in A_m\}$$

не зависит от n . В этом случае марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ называется *стационарной*.

Всякая σ -конечная мера $\pi(\cdot)$, удовлетворяющая уравнению (2.8) и условию $\pi(A) > 0$ хотя бы для одного множества $A \in \mathcal{E}^+$, называется *инвариантной*. При этом класс инвариантных мер, соответствующих данному стохастическому ядру $P(\cdot, \cdot)$, может оказаться пустым. Очевидно, домножением инвариантной меры на положительную константу мы получаем снова инвариантную меру.

Определение 9. *Марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ называется положительной, если она ψ -неприводима и обладает инвариантной вероятностной мерой. Марковская цепь $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ называется нулевой, если она ψ -неприводима, но инвариантная мера не подчинена условию $\pi(E) < \infty$.*

Всякая положительная цепь Маркова является также и возвратной. Действительно, из предположения о невозвратности цепи следует, что для любого равномерно невозвратного множества A из покрытия E равномерно невозвратными множествами можно написать:

$$k\pi(A) = \sum_{n=1}^k \int_E \pi(dw) P_n(w, A) \leq M,$$

где M определяется условием $U(x, A) \leq M$, $x \in E$. Левая часть неравенства обязана оставаться ограниченной с ростом k , что возможно, только если $\pi(A) = 0$. По свойству полуаддитивности вероятности отсюда следует, что $\pi(E) = 0$ и мера E не может быть вероятностью.

Приведём без доказательства следующее важное утверждение.

Теорема 11. *Пусть $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ — ψ -неприводимая цепь Маркова. Тогда существует единственная с точностью до постоянного множителя инвариантная мера π (возможно, лишь σ -конечная), которая 1) эквивалентна максимальной определяющей неприводимость мере $\psi(\cdot)$, 2) для любых множеств A , $\psi(A) > 0$ и $B \in \mathcal{E}$ удовлетворяет уравнению*

$$\pi(B) = \int_A \pi(dw) \mathbf{M}_w \left(\sum_{k=1}^{\tau_A} I\{X_k \in B\} \right).$$

Интересно отметить физическую интерпретацию инвариантной меры. Выберем множество $A \in \mathcal{E}$ с $\psi(A) > 0$. Предположим, что начальное состояние X_0 цепи выбирается случайно во множестве A исходя из

распределения вероятностей $\pi_A(\cdot) = \pi(\cdot)(\pi(A))^{-1}$. Тогда $\pi(B)$ можно рассматривать как среднее время, проведённое цепью во множестве B до первого возвращения в множество A .

Если цепь нулевая, то имеет место следующий результат.

Теорема 12. Пусть $P(\cdot, \cdot)$ — апериодическое нулевое возвратное ядро с инвариантной мерой $\pi(\cdot)$. Тогда для любого начального распределения $\lambda(\cdot)$ и любого положительного ε будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{E}} \int_E \lambda(dx) P_n(x, A) / (\pi(A) + \varepsilon) = 0.$$

Для практического применения теоремы 12 к конкретному множеству A желательно знать, что $\pi(A) < \infty$. Это можно гарантировать для минорантных множеств. Действительно, пусть множество A обладает свойством $\pi(A) < \infty$, а множество C — ν_M -минорантное. Тогда определение инвариантности приводит к соотношениям

$$\infty > \pi(A) = \int_E \pi(dx) P_{M+n}(x, A), \quad n = 0, 1, \dots$$

Но

$$\begin{aligned} \int_E \pi(dx) P_{M+n}(x, A) &\geq \int_C \pi(dx) \int_E P_M(x, dy) P_n(y, A) \geq \\ &\geq \int_C \pi(dx) \int_E \nu_M(dy) P_n(y, A). \end{aligned}$$

В силу π -неприводимости найдётся n , такое что

$$\int_E \nu_M(dy) P_n(y, A) > 0.$$

Следовательно, $\pi(C) < \infty$.

Библиографические источники: [8, Глава 5], [13, Глава 10].

Глава 3 | Применение к задачам управления

3.1. Задача об обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов

Имеется $m < \infty$ конфликтных входных потоков $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$. Многие реальные потоки обладают следующей особенностью: интервалы между поступлением требований могут быть зависимы и иметь различный закон распределения. Поэтому получить математическое описание входного потока в виде совокупности конечномерных распределений интервалов между моментами поступления требований не удаётся. Однако для транспортных потоков иногда возможно выделить «медленные» и «быстрые» машины, причем «медленные» машины образуют рекуррентный поток с абсолютно-непрерывной функцией распределения $A_j(t)$ (с плотностью $a_j(t)$) интервалов между «медленными» машинами, а «быстрые» машины маневрируют и совершают обгоны при возможности. Догнав движущуюся группу с «медленной» машиной во главе, «быстрая» машина движется вместе с группой, дожидаясь случая для обгона. Обозначим $\tau'_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$ моменты поступления «медленных» машин по потоку Π_j к стоп-линии перекрестка. Моменты поступления машин i -ой группы располагаются между моментами τ_n и τ_{n+1} . Будем считать, тем не менее, что все требования n -ой группы поступают одновременно в момент τ_n . Тогда нелокальное описание входного потока Π_j будет иметь вид $\{(\tau'_{j,n}, \eta'_{j,n}); n = 0, 1, \dots\}$, где $\eta'_{j,n}$ — число машин в группе с n -ой «медленной» машиной. Интервалы $\tau'_{j,n} - \tau'_{j,n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ независимы и одинаково распределены с плотностью $a_j(t)$. Размеры групп $\eta'_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$ независимы и одинаково распределены. Распределение размера группы задано производящей функцией $f_j(z) = \sum_{b=1}^{\infty} z^b \mathbf{P}\{\eta'_{j,n} = b\}$. Таким образом, в качестве математической модели входного потока выбираем неординарный рекуррентный поток.

Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j неограниченного объёма. Обслуживание требований осуществляется единственным прибором с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются требования только из очереди O_j . В состоянии $\Gamma^{(2j)}$

осуществляется акт переналадки с целью разрешения конфликтности. Длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ равна T_r , $r = 1, 2, \dots, 2m$. Обслуживание требований осуществляется в классе циклических алгоритмов, то есть смена состояний обслуживающего устройства происходит по схеме $\Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \dots$.

Длительности обслуживания требований могут быть зависимыми величинами с различными законами распределения. Поэтому для задания процесса обслуживания используем потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$. При состоянии прибора $\Gamma^{(2j-1)}$ поток насыщения Π'_j содержит ℓ_j требований за время T_{2j-1} , а при прочих состояниях — 0 требований.

Предполагается, что все случайные величины далее заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем наблюдать за системой в моменты $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots$ смены состояний обслуживающего устройства. Пусть Γ_0 — состояние обслуживающего прибора в момент 0. Обозначим Γ_n состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{n-1}, \tau_n]$, $\kappa_{j,n}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_n , $\zeta_{j,n}$ — оставшееся время до поступления следующей после τ_n группы требований потока Π_j , $\eta_{j,n}$ — число поступивших за промежуток $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ требований потока Π_j , $\xi_{j,n}$ — число требований потока насыщения Π'_j на промежутке $(\tau_n, \tau_{n+1}]$. Введём векторы $\kappa_n = (\kappa_{1,n}, \kappa_{2,n}, \dots, \kappa_{m,n})$, $\zeta_n = (\zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \dots, \zeta_{m,n})$, $\eta_n = (\eta_{1,n}, \eta_{2,n}, \dots, \eta_{m,n})$.

Обозначим $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$ множество состояний обслуживающего устройства. Введем отображение $u(\cdot): \Gamma \rightarrow \Gamma$ равенствами $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r+1)}$, $1 \leq r < 2m$ и $u(\Gamma^{(2m)}) = \Gamma^{(1)}$. Тогда динамика обслуживающего устройства описывается рекуррентным по $n = 0, 1, \dots$ соотношением

$$\Gamma_{n+1} = u(\Gamma_n). \quad (3.1)$$

Введем отображение $v(\cdot): \Gamma \rightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_{2m}\}$ равенством $v(\Gamma^{(r)}) = T_r$. Тогда последовательность моментов наблюдения порождается рекуррентным соотношением

$$\tau_{n+1} = \tau_n + v(\Gamma_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

При экстремальной стратегии обслуживания длина очереди изменяется по закону

$$\kappa_{j,n+1} = \max\{0, \kappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}. \quad (3.3)$$

Выясним вид условного распределения величин $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$. Пусть $X = \{0, 1, \dots\}^m$ — m -мерная неотрицательная целочисленная решётка, $R_+^m = \{(t_1, t_2, \dots, t_m): t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \dots, t_m \geq 0\}$, $x^0 \in X$, $x^1 \in X$,

..., $x^n \in X$, $t^0 \in R_+^m$, $t^1 \in R_+^m$, ..., $t^n \in R_+^m$, $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)$, $t^i = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_m^i)$, $r_i \in \Gamma$, $0 \leq i \leq n$. В силу предположения о независимости и рекуррентности входных потоков имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left\{ \eta_{n-1} = x^n, \zeta_n < t^n \right\} \middle| \bigcap_{i=0}^{n-1} \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x^i, \zeta_i = t^i \right\} \right) = \\ & = \prod_{j=1}^m \mathbf{P} \left(\left\{ \eta_{j,n-1} = x_j^n, \zeta_{j,n} < t_j^n \right\} \middle| \left\{ \Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \zeta_{j,n} = t_j^n \right\} \right), \quad (3.4) \end{aligned}$$

а совместные условные распределения пар $(\eta_{j,n-1}, \zeta_{j,n})$ находятся из двойного преобразования Лапласа – Стильтьеса

$$\begin{aligned} & \sum_{b=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^b e^{-sy} d_y \mathbf{P} \left(\left\{ \eta_{j,n-1} = b, \zeta_{j,n} < y \right\} \middle| \left\{ \Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t \right\} \right) = \\ & = \mathbf{M} \left(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}} \middle| \left\{ \Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t \right\} \right). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Событие $\left\{ \Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t \right\}$ при $t > T_{r+1}$ ($t > T_1$, если $r = 2m$) означает, что за промежуток времени T_{r+1} требования не поступают. В этом случае величина $\eta_{j,n-1}$ принимает значение 0, а оставшееся время до поступления группы требований по потоку Π_j уменьшается на величину T_{r+1} , $\zeta_{j,n} = t - T_{r+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}} \middle| \left\{ \Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t \right\} \right) = \\ & = \begin{cases} e^{-s(t-T_{r+1})}, & r < 2m, t > T_{r+1}; \\ e^{-s(t-T_1)}, & r = 2m, t > T_1. \end{cases} \quad (3.6) \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $t \leq T_{r+1}$. Рассмотрим вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины e_1, e_2, \dots с плотностью распределения $a_j(u)$, положим $S_0 = 0$, $S_b = S_{b-1} + e_b$, $b = 1, 2, \dots$. Будем рассматривать величины e_1, e_2, \dots как интервалы до поступления следующих после момента $\tau_n + t$ групп требований. Неравенства

$$S_b \leq T_{r+1} - t < S_{b+1}, \quad S_{b+1} - (T_{r+1} - t) < y$$

имеют место, если за оставшееся время до переключения состояния прибора поступают $b \geq 0$ групп потока Π_j , а время до прихода следующей

группы не превышает величины $y > 0$. Введём функцию

$$G_b(t, y) = \mathbf{P}\{S_b \leq t < S_{b+1} < t + y\}.$$

Обозначим $A^{*b}(t)$ и $a_j^{*b}(t)$ соответственно функцию распределения и плотность распределения величины S_b . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_b \leq t < S_{b+1} < t + y\} &= \\ &= \mathbf{P}\{S_b \leq t < S_b + e_{b+1} < t + y\} = \\ &= \int_0^t a_j^{*b}(s)(A_j(t + y - s) - A_j(t - s + 0)) ds \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z^{\eta_{j,n-1}} e^{-s\zeta_{j,n}} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\}) &= \\ &= \int_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} e^{-sy} d_y G_b(T_{r+1} - t, y) = \\ &= \int_0^\infty e^{-sy} d_y \left(\sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} G_b(T_{r+1} - t, y) \right) = \\ &= \int_0^\infty e^{-sy} \left(\int_0^{T_{r+1}-t} a_j(T_{r+1} - t + y - y_1) \sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} a_j^{*b}(y_1) dy_1 \right) dy = \\ &= \int_0^{T_{r+1}-t} \left(\int_0^\infty e^{-sy} a_j(T_{r+1} - t + y - y_1) dy \right) \sum_{b=0}^\infty (f_j(z))^{b+1} a_j^{*b}(y_1) dy_1. \end{aligned}$$

При $r = 2m$ вместо $r + 1$ следует писать 1.

Наконец, условная вероятность $\mathbf{P}(\{\xi_{j,n} = \ell_j\} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2j-2)}\}) = 1$, $\mathbf{P}(\{\xi_{j,n} = 0\} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}\}) = 1$ при $r \neq 2j - 2$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{\xi_n = x^n\} \middle| \bigcap_{i=0}^n \{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x^i, \zeta_i = t^i\}\right) &= \\ &= \prod_{j=1}^m \mathbf{P}(\{\xi_{j,n} = x_j^n\} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}\}). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Маркированный точечный процесс

$$\{(\tau_n, \Gamma_n, \kappa_{1,n}, \dots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \dots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \dots\}$$

описывает изменение состояния обслуживающего устройства и длин очередей при обслуживании конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов управления.

Теорема 13. *Последовательности*

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{1,n}, \dots, \kappa_{m,n}, \zeta_{1,n}, \dots, \zeta_{m,n}); n = 0, 1, \dots\}, \quad (3.8)$$

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{j,n}, \zeta_{j,n}); n = 0, 1, \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

являются однородными цепями Маркова.

Доказательство. Докажем марковость последовательности (3.9). В силу рекуррентных соотношений (3.1), (3.3), (3.10) и (3.7) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}, \kappa_{j,n} = w, \zeta_{j,n} < t\} \middle| \bigcap_{i=0}^{n-1} \{\Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{j,i} = x_i, \zeta_{j,i} = t_i\}\right) = \\ & = \sum_{b_1=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\eta_{j,n-1} = b_1, \zeta_{j,n} < t\} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \zeta_{j,n-1} = t_{n-1}\}) \times \\ & \quad \times \sum_{b_2=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\xi_{j,n-1} = b_2\} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}\}) \times \\ & \quad \times \mathbf{P}\{\Gamma^{(r_n)} = u(\Gamma^{(r_{n-1})}), w = \max\{x_{n-1} + b_1 - b_2, 0\}\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Такое же выражение имеет вероятность события $\{\Gamma_n = \Gamma^{(r_n)}, \kappa_{j,n} = w, \zeta_{j,n} < t\}$ при условии $\{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r_{n-1})}, \kappa_{j,n-1} = x_{n-1}, \zeta_{j,n-1} = t_{n-1}\}$. Марковость доказана. \square

Пусть $E = \Gamma \times \{0, 1, \dots\} \times [0, \infty)$, и \mathcal{E} — наименьшая σ -алгебра, содержащая множества вида $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y < y_1\}$, $r = 1, 2, \dots, 2m$, $x = 0, 1, \dots, -\infty < y_1 < \infty$. Тогда измеримое пространство (E, \mathcal{E}) является пространством состояний цепи Маркова

$$\{(\Gamma_n, \kappa_{j,n}, \zeta_{j,n}); n = 0, 1, \dots\}. \quad (3.11)$$

при каждом $j = 1, 2, \dots, m$. В следующем разделе будет изучено предельное поведение цепи (3.11). Назовём множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y \geq 0\} \in \mathcal{E}$ для краткости и образности $(\Gamma^{(r)}, x)$ -слоем.

3.2. Анализ предельных свойств длин очередей

Введём обозначение для вероятностей из соотношения (3.6)

$$v_j(b, y; r, t) = \mathbf{P}(\{\eta_{j,n-1} = b, \zeta_{j,n} < y\} | \{\Gamma_{n-1} = \Gamma^{(r)}, \zeta_{j,n-1} = t\}).$$

Из соотношения (3.10) находим для переходной вероятности цепи Маркова (3.11): при $j > 1$

$$P((\Gamma^{(r)}, x, t); \{(\Gamma^{(s)}, w, y): y < y_1\}) = \begin{cases} \sum_{b=0}^{\ell_j-x} \varphi_j(b, y_1; r, t), & r = 2j - 2, w = 0; \\ v_j(w + \ell_j - x, y_1; r, t), & r = 2j - 2, w \geq 1; \\ v_j(w - x, y_1; r, t), & r \neq 2j - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.12)$$

При $j = 1$ надо в соотношении (3.12) заменить $2j - 2$ на $2m$.

Теорема 14. Пусть $a_j(t) > 0$ для всех $t \geq 0$. Определим меру $\varphi(\cdot)$ на (E, \mathcal{E}) соотношением

$$\varphi\{(\Gamma^{(s)}, w, y): y < y_1\} = \begin{cases} y_1, & s = 2j - 1, w = 0, y_1 > 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда стохастическое ядро (3.12) ν -неприводимо. Каждое множество вида $\{\gamma, x, y): 0 \leq y < \infty\}$, $\gamma \in \Gamma$, $x = 0, 1, \dots$ является ψ -положительным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное состояние $(\Gamma^{(r)}, x, t)$. Пусть $A_{\tilde{y}} = \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y): y < \tilde{y}\}$. За время t , оставшееся до поступления новой группы требований, успеет обслужиться $k = \ell_j[t/(T_1 + \dots + T_{2m})]$ требований, и непосредственно перед поступлением группы требований потока Π_j длина очереди O_j составит $x_1 = (x - k)^+$ требований. С положительной вероятностью $f'_j(0)$ после поступления этой группы размер очереди составит $x_1 + 1$. Из предположения теоремы о неотрицательности плотности $a_j(u)$ находим, что существует положительная вероятность того, что до поступления новой группы требований пройдет время, достаточное для ухода оставшихся $x_1 + 1$ требований и непосредственно в момент окончания того такта обслуживания, когда очереди O_j становится пустой, оставшееся время до поступления новой группы требований было меньше \tilde{y} . Следовательно, $L((\Gamma^{(r)}, x, t); A_{\tilde{y}}) > 0$. \square

Из вида переходной вероятности (3.12) следует, что в пространстве состояний E содержится m -цикл E_0, E_1, \dots, E_{m-1} с

$$E_r = \{(\Gamma^{(r+1)}, x, y) : x = 0, 1, \dots; y \geq 0\}.$$

Укажем также некоторые минорантные множества для переходной вероятности (3.12).

Теорема 15. Пусть $a_j(t) > 0$ — непрерывная функция для всех $t > 0$. Каждое множество вида

$$\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : 0 \leq y_1 \leq y < y_2\}, \quad \Gamma^{(r)} \in \Gamma, x = 0, 1, \dots, y_1 > 0 \quad (3.13)$$

с достаточно малой величиной $y_2 - y_1$ является минорантным.

Доказательство. Установим, что множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y_1 \leq y < y_2\}$ является минорантным при $0 \leq y_1 < y_2 < T_{r \oplus 1}$. Рассмотрим событие следующего вида: после поступления одного требования (спустя время y) за оставшееся время $T_{r \oplus 1} - y$ поступает ровно одно требование через промежуток времени s_1 , $T_{r \oplus 1} - \Delta < y + s_1 < T_{r \oplus 1}$, а следующее требование поступает через время s_2 , $\Delta + (T_{r \oplus 1} - (y + s_1)) \leq s_2 < \Delta + (T_{r \oplus 1} - (y + s_1)) + y_3$ для достаточно малого Δ . Тогда оставшееся время $y_2 = s_2 - (T_{r \oplus 1} - (y + s_1))$ до следующей группы в момент $T_{r \oplus 1}$ удовлетворяет ограничениям $\Delta \leq y_2 < \Delta + y_3$ (рис. 3.1). Если $\Gamma^{(r \oplus 1)} \notin {}^j \Gamma$,

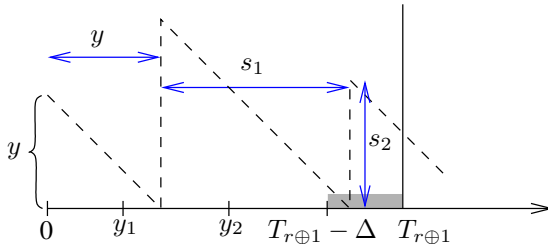


Рис. 3.1. Построение минорантного множества. Пунктирная линия отражает процесс оставшегося время ожидания до поступления требования

то требования из очереди O_j на этом такте не обслуживаются и цепь из состояния $(\Gamma^{(r)}, x)$ перейдет за один шаг в $(\Gamma^{(r \oplus 1)}, x + 2)$ -слой. Имеем

$$P((\Gamma^{(r)}, x, y); \{(\Gamma^{(r \oplus 1)}, x + 2, y_2) : \Delta \leq y_2 < \Delta + y_3\}) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_{T_{\oplus 1} - \Delta - y}^{T_{r\oplus 1} - y} (A_j(\Delta + T_{r\oplus 1} - y - s_1 + y_3) - A_j(\Delta + T_{r\oplus 1} - y - s_1)) \times \\ &\quad \times a(s_1)(p(1; j))^2 ds_1 \geq \delta \int_0^{\Delta} A_j(y_3 + s_1) - A_j(\Delta + s_1) ds_1, \end{aligned}$$

где $p(1; j) = \mathbf{P}\{\eta'_{j,i} = 1\}$ и $\delta = \min_{T_{\oplus 1} - \Delta - y \leq s_1 \leq T_{\oplus 1} - y} a(s_1) > 0$ из непрерывности и положительности $a_j(t)$. Функция

$$G(y) = \delta \int_0^{\Delta} A_j(y + s) - A_j(\Delta + s) ds, \quad y \geq \Delta$$

задаёт некоторую меру на полуоси $[\Delta, \infty)$. Следовательно, множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y_1 \leq y < y_2\}$ является ν_1 -минорантным с мерой $\nu_1(\cdot)$, порожденной на $(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x + 2)$ -слое функцией распределения $G(y)$.

Если, напротив, $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in {}^j\Gamma$, то аналогичная последовательность событий переведёт цепь в $(\Gamma^{(r\oplus 1)}, \min\{0, x + 2 - \ell_j\})$ -слой и минорантная мера $\nu_1(\cdot)$ порождается той же функцией распределения на этом слое.

Для справедливости приведённого рассуждения критично, чтобы было $y_2 < T_{r\oplus 1}$, иначе не найдётся достаточно малое $\Delta > 0$. Однако, если $y_2 = T_{r\oplus 1}$ и $\Gamma^{(r\oplus 1)} \notin {}^j\Gamma$, то из любой точки $(\Gamma^{(r)}, x, y) \in \{(\Gamma^{(r)}, x, y) : 0 \leq y_1 \leq y < y_2\}$ минорантное множество $\{(\Gamma^{(r\oplus 1)}, x + 1, y) : 0 \leq y_3 \leq y < y_4\}$, $0 < y_3 < y < y_4 < T_{r\oplus 1\oplus 1}$ достигается за один шаг с вероятностью, не меньшей $\delta'(y_4 - y_3)$ с

$$\delta' = \min\{a_j(s_1) : y_3 \leq s_1 \leq y_4 + T_{r\oplus 1} - y_1\}.$$

Поэтому множество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : 0 \leq y_1 \leq y < y_2\}$ является ν_2 -минорантным по теореме 5. Аналогично разбирается случай $\Gamma^{(r\oplus 1)} \in {}^j\Gamma$.

Наконец, если $T_{r\oplus 1} \leq y_1 < y_2 < T_{r\oplus 1\oplus 1}$, то нужно снова применить теорему 5, выбрав в качестве m из теоремы номер такта, на котором оставшееся время до поступления группы требований обращается в ноль. \square

Лемма 1. Пусть для всех $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $x = 0, 1, \dots$ и независимо от начального распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} = 0.$$

Тогда средняя длина очереди $\mathbf{M}\kappa_{j,n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\kappa_{j,n} &\geq (N+1)\mathbf{P}\{\kappa_{j,n} > N\} = \\ &= (N+1)\left(1 - \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=0}^N \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\}\right), \end{aligned}$$

из $\mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех r, x следует, что для достаточно больших n будет $\mathbf{M}\kappa_{j,n} > N$. В силу произвольности N получаем утверждение леммы. \square

Обозначим $\lambda_j^{-1} = \int_0^{\infty} t a_j(t) dt$ среднее время между поступлениями групп, $\bar{\lambda}_j = \lambda f'_j(1)$ интенсивность поступления требований потока Π_j . Положим

$$Q_{j,n}(r, x, y) = \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x, \zeta_{j,n} < y\}.$$

Теорема 16. Пусть плотность $a_j(t)$ положительна и непрерывна при всех $t > 0$. Если не существует стационарного распределения цепи Маркова (3.11), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x\} = 0$$

независимо от распределения случайного элемента $(\Gamma_0, \kappa_{j,i}, \zeta_{j,0})$.

Доказательство. Каждое множество вида $\{(\Gamma^{(r)}, x, y) : y < y_1\}$ можно покрыть конечным числом минорантных множеств вида (3.13). В силу ψ -неприводимости (теорема 14) цепь Маркова (3.11) может быть либо возвратной нулевой, либо невозвратной. Если цепь возвратная нулевая, то вероятность любого минорантного множества стремится к нулю, по теореме 12 и замечанию после неё. Если цепь невозвратна, предел вероятности попадания в любое минорантное множество равен нулю вследствие теоремы 10. Итак, в любом из двух случаев

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x, \zeta_{j,n} < y_1\} = 0.$$

Поэтому,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,n} = x, \zeta_{j,n} < y_1\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta_{j,n} \geq y_1\}. \quad (3.14)$$

Из теории процессов восстановления известно, что существует предельное распределение для остаточного времени ожидания восстановления в процессе восстановления [10, Гл. XI, § 4]. Следовательно, величину в правой части (3.14) можно сделать как угодно малой, устремляя $y_1 \rightarrow \infty$. \square

Следующая теорема содержит фактически достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова (3.11). Обозначим $T_0 = T_1 + T_2 + \dots + T_{2m}$ длительность полного цикла работы прибора.

Теорема 17. Пусть $\bar{\lambda}_j T_0 - \ell_j < 0$. Тогда средняя длина $M\kappa_{j,n}$ очереди O_j ограничена по n .

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $j = 1$, поскольку случай произвольного j сводится к этому перенумерацией потоков. Изучим поведение при $n \rightarrow \infty$ функции

$$\Psi_n(z, s, r) = \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^x e^{-sy} dQ_{1,n}(r, x, t) = \mathbf{M}(I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)}) z^{\kappa_{1,n}} e^{-s\zeta_{1,n}}),$$

являющейся производящей функцией по z и преобразованием Лапласа – Стильтьеса по s от вероятностей $Q_{1,n}(r, x, t)$, $x = 0, 1, \dots, t \geq 0$ при каждом $r = 1, 2, \dots, 2m$. Пусть сначала $r \neq 2m$. Тогда по формуле повторного математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(z, s, r+1) &= \mathbf{M}[I(\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(r+1)}) z^{\kappa_{1,n+1}} e^{-s\zeta_{1,n+1}}] = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{M}(z^{\kappa_{1,n} + \eta_{1,n}} e^{-s\zeta_{1,n}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(r)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) dQ_{1,n}(r, x, t) = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^x dQ_{1,n}(r, x, t) \left(I(t > T_{r+1}) e^{-s(t-T_{r+1})} + \right. \\ &\quad \left. + I(t \leq T_{r+1}) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} d_y G_b(T_{r+1} - t, y) \right) = \\ &= \mathbf{M}[I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z, s; T_{r+1}, \zeta_{1,n})], \quad (3.15) \end{aligned}$$

где

$$q_j(z, s; \theta, t) = I(t > \theta)e^{-s(t-\theta)} + I(t \leq \theta) \int_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} d_y G_b(\theta - t, y).$$

Аналогично при $r = 2m$ находим

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(z, s, 1) &= \mathbf{M}[I(\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(1)})z^{\kappa_{1,n+1}}e^{-s\zeta_{1,n+1}}] = \\ &= \sum_{x=0}^\infty \int_0^\infty \mathbf{M}(z^{\max\{0, \kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1\}} e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) \times \\ &\quad \times dt Q_{1,n}(2m, x, t) = \sum_{x=0}^\infty \int_0^\infty dQ_{1,n}(2m, x, t) \times \\ &\quad \times \mathbf{M}(z^{\kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1} e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) + \\ &\quad + \sum_{x=0}^{\ell_1-1} \int_0^\infty dQ_{1,n}(2m, x, t) \mathbf{M}(z^{\max\{0, \kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1\}} - z^{\kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1}) \times \\ &\quad \times e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) = \\ &= z^{-\ell_1} \mathbf{M}[I(\Gamma_n = \Gamma^{(2m)})z^{\kappa_{1,n}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,n})] + B_n(z, s), \quad (3.16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_n(z, s) &= \sum_{x=0}^{\ell_1-1} \int_0^\infty \mathbf{M}(z^{\max\{0, \kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1\}} - z^{\kappa_{1,n} + \eta_{1,n} - \ell_1}) \times \\ &\quad \times e^{-s\zeta_{1,n+1}} | \{\Gamma_n = \Gamma^{(2m)}, \kappa_{1,n} = x, \zeta_{1,n} = t\}) dQ_{1,n}(2m, x, t). \end{aligned}$$

Заменяя $n + 1$ на $n + 2m$ в соотношении (3.16) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{n+2m}(z, s, 1) &= B_{n+2m-1}(z, s) + \\ &\quad + z^{-\ell_1} \mathbf{M}[I(\Gamma_{n+2m-1} = \Gamma^{(2m)})z^{\kappa_{1,n+2m-1}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,n+2m-1})]. \end{aligned}$$

Для краткости положим $n + 2m - 2 = k$. Снова воспользовавшись формулой повторного математического ожидания, найдём:

$$\mathbf{M}[I(\Gamma_{k+1} = \Gamma^{(2m)})z^{\kappa_{1,k+1}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1})] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) \times \\ \times z^x dQ_{1,k}(2m-1, x, t).$$

При $t > T_{2m}$ имеем $\eta_{1,k} = 0$ и $\zeta_{1,k+1} = t - T_{2m}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) &= \\ &= q_1(z, s; T_1, t - T_{2m}) = (I(t - T_{2m} > T_1) e^{-s(t - T_{2m} - T_1)} + \\ &+ I(t - T_{2m} \leq T_1) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} dG_b(T_1 - t + T_{2m}, y)) = \\ &= I(t > T_1 + T_{2m}) e^{-s(t - T_1 - T_{2m})} + I(T_{2m} < t \leq T_1 + T_{2m}) \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} dG_b(T_1 + T_{2m} - t, y). \end{aligned}$$

Для $t \leq T_{2m}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1}) | \{\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t\}) &= \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} q_1(z, s; T_1, y) d_y G_b(T_{2m} - t, y) = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y > T_1) e^{-s(y - T_1)} d_y G_b(T_{2m} - t, y) + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y \leq T_1) \int_0^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} (f_j(z))^{c+1} \times \\ &\quad \times e^{-su} d_u G_c(T_1 - y, u) d_y G_b(T_{2m} - t, y) = \\ &= I(t \leq T_{2m}) \int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} e^{-sy} d_y G_b(T_1 + T_{2m} - t, y). \end{aligned}$$

Действительно,

$$\int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} I(y > T_1) e^{-s(y - T_1)} d_y G_b(T_{2m} - t, y)$$

есть производящая функция по z и преобразование Лапласа – Стильтьеса по s для числа вызовов, поступивших на промежутке длительностью $T_1 + T_{2m} - t$, и остаточного времени до поступления вызовов в том случае, если все поступившие вызовы принадлежат первому промежутку длины T_{2m} , а остаточное время y (в конце первого промежутка длины T_{2m}) больше T_1 , так что по окончании всего промежутка $T_1 + T_{2m} - t$ останется еще время $y - T_1$ до поступления следующей группы вызовов. Слагаемое

$$\int_0^\infty \sum_{b=0}^\infty (f_1(z))^{b+1} I(y \leq T_1) \int_0^\infty \sum_{c=0}^\infty (f_j(z))^{c+1} \times \\ \times e^{-su} d_u G_c(T_1 - y, u) d_y G_b(T_{2m} - t, y)$$

есть производящая функция по z и преобразование Лапласа – Стильтьеса по s для числа вызовов, поступивших на промежутке длительностью $T_1 + T_{2m} - t$, и остаточного времени до поступления вызовов в том случае, когда b вызовов, $b \geq 0$, поступают на первом промежутке длины $T_{2m} - t$, а остальные вызовы, числом c , поступают на втором промежутке длины T_1 . Для этого необходимо, чтобы остаточное время y (в конце первого промежутка длины T_{2m}) было меньше T_1 .

Итак,

$$\mathbf{M}(z^{\eta_{1,k}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1}) | \{ \Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}, \kappa_{1,k} = x, \zeta_{1,k} = t \}) = \\ = q_1(z, s; T_1 + T_{2m}, t)$$

и

$$\mathbf{M}[I(\Gamma_{k+1} = \Gamma^{(2m)}) z^{\kappa_{1,k+1}} q_1(z, s; T_1, \zeta_{1,k+1})] = \\ = \mathbf{M}[I(\Gamma_k = \Gamma^{(2m-1)}) z^{\kappa_{1,k}} q_1(z, s; T_1 + T_{2m}, \zeta_{1,k})].$$

Повторяя этот процесс $m - 2$ раз, получим рекуррентное соотношение

$$\Psi_{n+2m}(z, s, 1) = B_{n+2m-1}(z, s) + \\ + z^{-\ell_1} \mathbf{M}[I(\Gamma_n = \Gamma^{(1)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z, s; T_1 + \dots + T_{2m}, \zeta_{1,n})].$$

Рассматривая $g = 1, 2, \dots$ полных циклов работы обслуживающего

устройства, получим:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+2mg}(z, s, 1) &= B_{n+2mg-1}(z, s) + \\ &+ \tilde{B}_{n+2m(g-1)-1}(z, s) + \dots + \tilde{B}_{n+2m-1}(z, s) + z^{-g\ell_1} \times \\ &\times \mathbf{M}[I(\Gamma_n = \Gamma^{(1)})z^{\kappa_{1,n}}q_1(z, s; gT_0, \zeta_{1,n})], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где при $k = 1, 2, \dots, g-1$ обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n+2mk-1}(z, s) &= \sum_{x=0}^{\ell_1-1} \int_0^{\infty} dQ_{1,n+2mk-1}(2m, x, t) \times \\ &\times \mathbf{M}([z^{\max\{0, \kappa_{1,n+2mk-1} + \eta_{1,n+2mk-1} - \ell_1\}} - z^{\kappa_{1,n+2mk-1} + \eta_{1,n+2mk-1} - \ell_1}] \times \\ &\times q_1(z, s; (g-k)T_0, \zeta_{1,n+2mk-1}) | \{\Gamma_{n+2mk-1} = \Gamma^{(2m)}, \\ &\kappa_{1,n+2mk-1} = x, \zeta_{1,n+2mk-1} = t\}). \end{aligned}$$

Подставим $s = 0$ в соотношение (3.17). Получим

$$\begin{aligned} \Psi_{n+2mg}(z, 0, 1) &= B_{n+2mg-1}(z, 0) + \tilde{B}_{n+2m(g-1)-1}(z, 0) + \dots + \\ &+ \tilde{B}_{n+2m-1}(z, 0) + z^{-g\ell_1} \mathbf{M}[I(\Gamma_n = \Gamma^{(1)})z^{\kappa_{1,n}}q_1(z, 0; gT_0, \zeta_{1,n})], \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(z, 0; gT_0, t) &= I(t > gT_0) + I(t \leq gT_0) \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} G_b(gT_0 - t, \infty) = \\ &= 1 + \left\{ \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} G_b(gT_0 - t, \infty) - 1 \right\} I(t \leq gT_0). \end{aligned}$$

Если $z > 1$, функция

$$\sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} G_b(t, \infty)$$

возрастает по t . Поэтому имеет место оценка

$$z^{-g\ell_1} q_1(z, 0; gT_0, t) \leq z^{-g\ell_1} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} G_b(gT_0, \infty).$$

Далее

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left(z^{-g\ell_1} \sum_{b=0}^{\infty} (f_1(z))^{b+1} G_b(gT_0, \infty) \right) \Big|_{z=1} = \\ & = -g\ell_1 + \sum_{b=0}^{\infty} f_1'(1)(b+1)G_b(gT_0, \infty) = g(f_1'(1)g^{-1}H(gT_0) - \ell_1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь $H(t) = \mathbf{M}(\inf\{k: S_k \geq t\})$ — функция восстановления [2]. В теории восстановления доказывается существование предела, в нашем случае, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}H(t) = \lambda_1$. Поэтому можно выбрать достаточно большое натуральное число g так что производная (3.19) будет отрицательной в силу условия $\bar{\lambda}_1 T_0 - \ell_1 < 0$. Тогда найдется $z_0 > 1$, такое что

$$z_0^{-g\ell_1} q_1(z_0, 0; gT_0, t) \leq R_+ = z_0^{-g\ell_1} q_1(z_0, 0; gT_0, 0) < 1.$$

Применяя эту оценку к равенству (3.18) при $z = z_0$, получаем неравенство

$$\Psi_{n+2mg}(z_0, 0, 1) \leq R_+ \Psi_n(z_0, 0, 1) + \tilde{B}, \quad \tilde{B} > 0.$$

Отсюда можно заключить, что последовательность $\Psi_n(z_0, 0, 1)$, $n = 0, 1, \dots$ ограничена некоторой константой M_1 . Но тогда имеем $|\Psi_n(z, 0, 1)| \leq M_1$ в круге $|z| \leq z_0$. Из равенства (3.15) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(z, 0, r+1) &= \mathbf{M} \left[I(\Gamma_n = \Gamma^{(r)}) z^{\kappa_{1,n}} q_1(z, 0; T_{r+1}, \zeta_{1,n}) \right] \leq \\ &\leq q_1(z_0, 0; T_{r+1}, 0) \Psi_n(z, 0, r). \end{aligned}$$

Можно заключить о равномерной по n и r ограниченности всех производящих функций $\Psi_n(z, 0, r)$ некоторой константой M в круге $|z| \leq z_0$. В силу известной формулы Коши,

$$\mathbf{M}\kappa_{1,n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z-1|=\rho} (z-1)^{-2} \sum_{r=1}^{2m} \Psi_n(z, 0, r) dz \leq \frac{2mM}{\rho}.$$

Теорема доказана. \square

Полученное достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова (3.9) легко проверяемо и имеет простой физический смысл: максимальная пропускная способность обслуживающего устройства должна превышать среднее число поступающих требований за достаточно большой интервал времени.

Список литературы

1. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 440 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учебное пособие. — Изд. 5-е, сущ. перераб. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 656 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — Изд. 4-е, испр. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 400 с.
5. Зорин А.В., Федоткин М.А. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — 192 с. — (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
6. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978. — 248 с. — (Серия «Теория и методы системного анализа»).
7. Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
8. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. — М.: Мир, 1989. — 207 с.
9. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 608 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984.
11. Чжун К. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964. — Т. 1 528 с., Т. 2 738 с.
12. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 2004. — Кн. 1 520 с., Кн. 2 408 с.
13. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. — 2nd ed. — London: Springer-Verlag, 1993. — 566 p. <http://probability.ca/MT/>

Предметный указатель

- вероятность
 - достижения, 15
 - первого возвращения, 11
 - первого попадания, 11
- время пребывания, 14
- инвариантная мера, 32
- марковское свойство, 14
- множество
 - ν_m -минорантное, 21
 - ψ -положительное, 20
 - возвратное, 28
 - достижимое из состояния, 20
 - замкнутое, 20
 - минорантное, 21
 - невозвратное, 28
 - нулевое, 14
 - полное, 20
 - положительное, 14
 - равномерно невозвратное, 28
- момент
 - остановки, 15
 - первого возвращения, 15
 - первого посещения, 15
 - последнего выхода, 29
- начальное распределение цепи
 - Маркова, 9
- неприводимая цепь
 - счётная, *см.* неразложимая цепь
 - счётная
- неразложимая цепь
 - счётная, 10
- оператор сдвига, 15
- переходные вероятности, 9
 - n -шаговые, 10
- период
 - сеестохастическое ядро период, 27
- потенциал, 15
- состояние
 - возвратное, 11
 - невозвратное, 11
- среднее время возвращения, 11
- стохастическое ядро, 13
 - ψ -неприводимое, 19
 - φ -неприводимое, 17
 - апериодическое, 27
 - итерированное, 14
 - период, 27
 - периодическое, 27
- строго марковское свойство, 15
- табу-вероятность, 28
- уравнения Колмгорова – Чепмена, 14
- цепь Маркова
 - возвратная, 28
 - невозвратная, 28
 - нулевая, 32
 - положительная, 32
 - расщеплённая, 21
 - стационарная, 32
 - счётная, 9
- цикл, m -, 23

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩИЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Учебно-методическое пособие

Авторы:

Андрей Владимирович **Зорин**

Владимир Александрович **Зорин**

Екатерина Вадимовна **Пройдакова** и др.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать _____. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.

Уч.-изд. л. 3,2. Усл. печ. л. 2,79. Заказ № _____. Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского университета
им. Н.И. Лобачевского

603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37

Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01