ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

II

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ II

Перевод с латинского
В. С. ГОХМАНА
*Редакция перевода,
вступительная статья
и примечания*
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Государственное издательство
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1961

О ВТОРОМ ТОМЕ «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Не будет преувеличением сказать, что за последние годы в области «эйлероведения» сделано больше, чем за весь XIX век. При этом подверглись основательному пересмотру многие оценки и взгляды, которые приобрели силу традиции. Но изучению геометрического наследия Эйлера уделялось мало внимания. Аналитический гений Эйлера прославляли все, кто о нем писал, и прославляли по заслугам. Зато в тени оставалось многое другое. Он перестал в ы ч и с л я т ь и жить — так говорит о его кончине Кондорсе. Как обычно в XVIII веке, Кондорсе называет Эйлера геометром — слово математик не было тогда в ходу, — но меньше всего он имеет при этом в виду геометрическое зрение, геометрическую изобретательность в нашем понимании. Через полтора века после Кондорсе и Фуса — авторов первых общих характеристик Эйлера-ученого — его знаток и почитатель Н. Н. Лузин находит яркие краски для портрета Эйлера, но именно Эйлера—виртуоза аналитической выкладки, чувствующего живую плоть формулы. Такая односторонняя характеристика Эйлера-математика господствует. Когда к двухсотлетию со дня его рождения вышел собрник работ о нем немецких ученых, об Эйлере-геометре там было сказано очень мало. В первой (математической) серии полного собрания сочинений Эйлера томá с геометрическими работами выходят последними — доказательство того, что эта сторона его творчества до недавнего времени меньше всего привлекала внимание. Такой перечень нетрудно продолжить.

Насколько это оправдано фактами? Как никак, а геометрическим работам Эйлера отведено пять томов упомянутой выше первой серии Opera omnia (учитываем при этом второй том «Введения в анализ»). По объему это составляет примерно 20% всех его математических работ, больше чем, скажем, работы по теории чисел, которых никто, кажется, из писавших об Эйлере не обходил. Чтобы правильно определить удельный вес геометрии в наследии Эйлера, к этим пяти томам надо добавить многие из его работ по теоретической механике, оптике, техническим дисциплинам (см., например, двухтомную «Морскую науку»), да и ряд работ, отнесенных к разделу анализа, имеет предметом геометрические вопросы. Но оставим эти, так сказать, количественные прикидки, обратимся к результатам, полученным Эйлером в геометрии. Тогда мы убедимся, что Эйлеру принадлежат первоклассные достижения в дифференциальной геометрии, в теории алгебраических кривых, первые существенные открытия в топологии, что от него берут начало исследования в таких чисто геометрических

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ II

Перевод с латинского
В. С. ГОХМАНА
Редакция перевода, вступительная статья и примечания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Государственное издательство
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1961

ниями (первоначально — алгебраическими) с двумя неизвестными и плоскими линиями. Но до создания системы аналитической геометрии, до оформления ее как самостоятельной математической дисциплины еще было далеко. Ферма совершенно отчетливо выдвигает программу исследования кривых с помощью их уравнения в (декартовых) координатах, но в своей основной работе, опубликованной лишь после смерти, он применяет новый метод только к теории конических сечений, не открывая новых геометрических фактов. Декарт ставит общую задачу примерно так же, как Ферма, демонстрирует силу нового метода на задаче Паппа, но в дальнейшем изложении центр тяжести у него перемещается в сторону решения алгебраических уравнений с помощью построения соответствующих кривых (вплоть до конца восемнадцатого века это коротко называли построением уравнений, и Эйлер тоже пользуется этим термином). Можно сказать, что у Декарта и Ферма мы имеем гениальный эскиз здания, для возведения которого они успели только заложить фундамент.

В конце XVII и начале XVIII века к сделанному Декартом и Ферма было добавлено немало. Совершенствовался самый метод координат: Ферма рассматривал в основном только первый квадрант ($x>0$, $y>0$), Декарт — первый и четвертый ($x>0$); постепенно использование ординат и абсцисс обоих знаков становится обиходным, широко используется переход от одной системы декартовых координат к другой, начинается применение и новых систем (полярных координат, биполярных); появляется и третья координата для изучения пространственных фигур, вырабатывается представление, что одно уравнение с тремя неизвестными соответствует некоторой поверхности. Разумеется, во всем этом сказывались успехи алгебры, обобщение понятия числа. Значительно продвинулось выполнение программы Ферма. Прежде всего теория конических сечений в том объеме, в каком она дошла до эпохи эллинизма, была переведена на аналитический язык и пополнилась новыми результатами (то, что Ньютон при изложении своих открытий в «Математических началах натуральной философии» пользуется методами древних, не могло повлиять на ход дела). Был сделан следующий важный шаг: начата разработка теории кривых третьего порядка. Ньютон, открывший эту новую главу, писал: «Геометры повсюду излагают главным образом свойства конических сечений. Но свойства кривых второго и других родов аналогичны, как это выяснится из нижеследующего перечисления...»[1]). Он обобщает при этом такие понятия, как диаметр, вершина, центр, асимптота кривой, и на основе указанных им свойств кривых третьего порядка дает их классификацию и канонические уравнения для пяти отдельных типов. Все это приводится без доказательства,— может быть, потому, что пользоваться при этом алгебраическими методами означало бы признать их превосходство, а обращаться к чисто геометрическим построениям было бы чересчур искусственно и сложно. Стирлинг, Маклорен, Клеро и другие математики в первые десятилетия XVIII века доказывают и пополняют результаты Ньютона. Вместе с тем начинается исследование и кривых четвертого порядка, как отдельных типов, так и в общем виде. Рассматривались и изучались отдельные трансцендентные кривые вместе с введением и изучением соответствующих функций.

Однако с конца XVII века в геометрии на первый план выдвигаются методы созданного тем временем анализа бесконечно малых. Работы

[1]) Исаак Ньютон, Математические работы, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, М.—Л., 1937, стр. 194. У Ньютона кривые второго рода—кривые третьего порядка.

братьев Бернулли, Лопиталя, первые геометрические исследования Эйлера и многие другие относятся по современной классификации к дифференциальной геометрии. Вероятно, этим сдвигом интересов надо объяснить то, что ко времени вступления Эйлера в науку все еще не было систематического курса «приложения алгебры к геометрии» (термин «аналитическая геометрия» более позднего происхождения).

Примерно двадцать лет научной работы было за плечами Эйлера, когда он писал «Введение». Он стал во главе математики своего времени и знал ее во всех разветвлениях. Сам он в геометрических вопросах работал преимущественно методами анализа бесконечно малых. В интересующей же нас области за это время наиболее значительные работы дали Клеро и Гюа де Мальв.

Первая часть знаменитых «Разысканий о кривых двоякой кривизны» Клеро (1731) значительно продвинула геометрию трех измерений. Клеро выводит там и ранее известные уравнения поверхностей (плоскости, шара, параболоида вращения и др.), и новые, например общее уравнение конических поверхностей, а также поверхностей вращения. Он определяет пространственные кривые как пересечения двух поверхностей, стало быть, с помощью двух уравнений относительно трех декартовых координат (он указывает и на возможность использования полярных координат в пространстве). Следующие части «Разысканий» посвящены применениям анализа к этим кривым и не относятся к нашей теме. Отметим, что Клеро не ставит перед собой задачи систематически исследовать поверхности определенного порядка, пользуясь их уравнениями. Такой подход можно усмотреть у Я. Германа в работе, относящейся к 1732 г. [1]), весьма близкой к первой части «Разысканий» Клеро; но эта работа написана в конце научного и жизненного пути ее автора и осталась без развития.

Книга Гюа де Мальва (1740 г.) носит длинное название: «Применение анализа Декарта для открытия без помощи дифференциального исчисления свойств или главных качеств (affections principales) геометрических линий всех порядков». Впрочем, в неявном виде автор пользуется дифференциалами. В первом разделе книги в общем виде исследуется вопрос об условиях существования центра (симметрии) алгебраической кривой. Второй раздел является основным (третий и последний содержит разбор ряда примеров). Для нас он интересен тем, что здесь впервые в общем виде исследуются и систематизируются особые точки алгебраических кривых. Орудием исследования является разложение алгебраической функции в окрестности особой точки с помощью «аналитического треугольника», что представляет некоторое видоизменение «параллелограмма» Ньютона. По сути, новых фактов у Гюа де Мальва мало, он даже допускает серьезную ошибку, отрицая наличие у алгебраических кривых точки возврата второго рода, указанной Лопиталем [2]). Однако большое значение имеет самый подход к проблеме: то, что рассматривается сразу все семейство алгебраических кривых и что единым методом исследуется их поведение «в малом». Кроме того, выступает и некоторая аналогия между поведением кривой, скажем, в окрестности нуля и на бесконечности: исчезновение членов уравнения, содержащих низшие степени ординаты, указывает на то, что начало координат — кратная точка; исчезновение членов уравнения с высшими степенями ординаты является признаком наличия бесконеч-

---

[1]) Jacob H e r m a n n, De superficiebus..., Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VI, 36—37.

[2]) В эту ошибку впал и Эйлер. Эйлер же и выяснил суть дела (см. гл. XIV текста и примечания к ней).

ных ветвей, соответственно асимптот. Специальному рассмотрению подвергнуты кривые третьего порядка: доказана основная теорема Ньютона об их получении путем проектирования пяти расходящихся парабол третьего порядка, получены и новые результаты. Добавим, что Гюа де Мальв занимается и проблемой элиминации. В этом алгебраическом вопросе он тоже является предшественником Эйлера.

В общем, состояние геометрии к тому времени, когда Эйлер работал над «Введением», должно было представляться его современникам примерно так. Новые методы, то есть алгебраические методы координатной геометрии Декарта благодаря своей общности полностью взяли верх над традиционными методами — «методами древних геометров» [1]). Эти новые методы обогатили науку теорией кривых третьего порядка и поставили задачи: исследование кривых четвертого и высших порядков и создание общей теории алгебраических кривых на плоскости. В этой последней проблеме наметились два направления исследования: анализ поведения кривой вблизи точки, находящейся на конечном расстоянии, и анализ поведения кривой на бесконечности, и тут привлекались уже «новейшие» методы — исчисление бесконечно малых. Координатная геометрия трех измерений делала только первые шаги, — требовалось начать систематическое изучение алгебраических поверхностей, начиная со второго порядка. Наконец, весь накопленный новый материал не был сведен где-либо и кем-либо в нечто цельное.

Что перечисленные нами проблемы были действительно назревшими проблемами эпохи и что они так и воспринимались математиками того времени, доказывается тем, что ряд современников Эйлера с разных позиций и с разным успехом брались за их решение. Кроме уже названных Клеро и Гюа де Мальва, можно сослаться на Маклорена с его написанным по-латыни «Приложением — Об общих свойствах геометрических линий» к его же английской «Алгебре» (1748 г.), на «Введение в анализ алгебраических кривых» Габриеля Крамера (1750 г., франц.), на курс Марии Аньези (1748 г. итал.) [2]), на весьма распространенный в то время учебник Христиана Вольфа. Но то, что сделано Эйлером во втором томе «Введения», — иного, большего масштаба.

Эйлер никогда не был сторонником, «ревнителем» какого-либо метода ради самого метода: важно было решить задачу, а методы оценивались Эйлером в соответствии с целесообразностью их применения. Однако те соображения, которые привели Эйлера к мысли написать свое «Введение», предопределили единство метода в этой книге: так как это она предваряет собственно анализ бесконечно малых, то в ней надо ограничиться алгебраическими средствами; а так как она должна и ввести в анализ, помочь освоиться с его приемами, то Эйлер «приложил старание не только к тому, чтобы пространнее и отчетливее, чем обычно, изложить все, чего безусловно требует анализ бесконечных... Много вопросов, разбираемых обычно в анализе бесконечных, я здесь разрешил при помощи правил элементарной алгебры, чтобы тем лучше выявилась сущность того и другого метода» (из предисловия; см. том первый «Введения в анализ бесконечных»). Так получилось, что после нескольких десятилетий триумфальных успехов

---

[1]) «Остроумнейший и во всех областях науки ученейший муж Эдмунд Галлей» (слова Ньютона из предисловия к первому изданию его «Начал») еще в 1694 г. писал: «Превосходство новой геометрии нигде так не проявляется, как в том, что она дает полные и адэкватные решения задач, сразу охватывая все случаи» (цит. по книге Boyer, History of Analytical Geometry, N. Y., 1956).

[2]) Maria Agnesi, Istituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana

анализа бесконечно малых его самый видный в то время представитель создает курс, вполне соответствующий по применяемым в нем средствам нашему нынешнему пониманию аналитической (не вполне удачный термин!) геометрии.

Конечно, Эйлер не одинок в таком подходе: мы видели его у Гюа де Мальва, находим его и у других авторов, например в книге Гине «Применение алгебры к геометрии»[1]), имевшей много читателей в XVIII веке. Но там это, как правило, связано с пониманием задач новой геометрии в соответствии с картезианскими традициями: на первом плане построение корней определенных уравнений с помощью кривых, да и при построении неопределенных уравнений, как тогда выражались, то есть кривых по их уравнениям, имеется в виду прежде всего именно построение в духе Декарта, а не исследование кривой по ее уравнению. Далее, те авторы, которых никак нельзя отнести к картезианцам, — сошлемся хотя бы на Маклорена,— в этом пункте в той или иной мере следуют за Декартом. У Эйлера же постановка вопроса такова, какой она была в «основной программе» Ферма и Декарта, какой она, собственно, остается и поныне. Понимание Эйлером задач новой, координатной геометрии обусловлено его пониманием задач анализа: «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных величин и их функций» — читаем мы в предисловии к «Введению». В соответствии с этим неопределенное уравнение задает некоторую функцию, а при графической интерпретации с помощью координатного метода — некоторую кривую (или поверхность.) Задача изучения функций переходит, таким образом, в задачу изучения кривых и «при этом я не пользуюсь никакими другими вспомогательными средствами, кроме уравнения, выражающего природу каждой кривой линии», пишет Эйлер в том же предисловии. Такое единство подхода достаточно строго выдержано во втором томе «Введения», и под влиянием этого произведения уклон в сторону построения кривых быстро исчезает из литературы по аналитической геометрии.

Итак, мы видим, что выбор средств исследования и постановка основной задачи при создании геометрического тома «Введения» были достаточно жестко обусловлены. Это обеспечило идейную цельность произведения. И если бы Эйлер ограничился изложением со своих позиций только известных результатов и их систематизацией, его Введение сыграло бы все же заметную роль в истории геометрии. Но такая программа-минимум, из которой он, вероятно, вначале исходил, была им значительно перевыполнена. Это покажет обзор содержания его книги.

Вступительную часть второго тома «Введения» составляют четыре первые главы. Эйлер вводит здесь декартовы координаты на плоскости, устанавливает связь между функциями и кривыми, соответственно классификации функций в первом томе разделяет линии на непрерывные и разрывные, на трансцендентные и алгебраические. Когда он переходит к дальнейшему подразделению алгебраических кривых, он подвергает поучительному пересмотру с геометрической точки зрения различные характеристики алгебраических функций (гл. III) и дает таким образом обоснование классификации алгебраических кривых по порядкам. Еще перед этим, в гл. II, выведены формулы для перехода от одной системы декартовых координат к другой, получено общее уравнение прямой, указаны его частные случаи. В гл. IV речь идет о главных свойствах линий любого порядка — она является вступлением к длинной серии глав об алгебраических кривых. Там выясняется, сколько точек пересечения с прямой может

[1]) Guisnée, Application de l'algèbre à la géométrie (1705).

иметь алгебраическая кривая n-го порядка и сколько коэффициентов содержит ее общее уравнение, стало быть, сколькими точками она определяется. Что получаемое на основе таких соображений число точек может оказаться недостаточным для определения кривой, здесь не оговаривается, быть может, из желания не усложнять изложения. Во всяком случае, Эйлер, как видно из писем к нему Г. Крамера, примерно в это же время занялся вопросом о таких особых расположениях точек. Его работа на эту тему с разъяснением «парадокса Крамера» написана была после того, как он закончил «Введение», но до того, как «Введение» было напечатано (см. об этом в примечаниях).

Стоит обратить внимание на то, что Эйлер указывает на возможность распадения уравнения кривой на два (или на три...) уравнения, если первоначальное уравнение допускает разложение на вещественные множители. Тогда кривая для Эйлера перестает быть непрерывной — в соответствии с его определением непрерывности функции, требующим единства ее аналитического выражения. Такая разрывная, по Эйлеру, кривая состоит из непрерывных кривых низших порядков и не представляет собой самостоятельного предмета для исследования. Поэтому вполне логично, что, скажем, при рассмотрении кривых второго порядка Эйлер не выделяет как самостоятельные случаи вырождения в две различные или совпадающие прямые.

Эйлер в своем «Введении» «опустил первоначальные элементы»; под этим он понимал, применительно к геометрии, примерно то же, что и мы: круг сведений, содержащихся в «Началах» Евклида. Поэтому он не входит ни в какие подробности относительно прямой и окружности[1]). Предметом его изложения являются «вопросы, обычно относимые к высшей геометрии» (из предисловия), и он начинает, конечно, с конических сечений. Их теория (гл. V, VI и частично VII) составляет как бы вторую часть книги.

Эйлер подчеркивал в предисловии, что его подход — не пользоваться «никакими другими вспомогательными средствами, кроме уравнения, выражающего природу каждой кривой линии» — особенно важен «в применении к коническим сечениям, которые до сих пор изучались либо только при помощи геометрии, либо при помощи анализа, но весьма несовершенным и неестественным путем». Такой отзыв о предшественниках, может быть, слишком суров в отношении Лопиталя и Маклорена, но в целом вполне оправдан. Современному читателю изложение Эйлера в некоторых пунктах должно казаться растянутым. Однако оно гораздо ближе к изложению в наших курсах аналитической геометрии, чем к теории конических сечений в том виде, в каком ее дают авторы первой половины XVIII века. Новых фактов в этом разделе нет или почти нет (установление приоритета в области, которой столько занимались, слишком ненадежно,— впрочем, см. примечания). Но в методическом отношении Эйлер добился очень многого. Даже из простейших алгебраических соотношений — между коэффициентами и корнями квадратного уравнения — он извлек массу следствий (см. гл. V). Об этой главе М. Кантор с полным основанием

---

[1]) Аналитическая геометрия прямой и окружности, не говоря уже о плоскостях, сферах и прямых в пространстве, привлекала мало внимания в первое столетие после «Геометрии» Декарта. Это не удивительно: новый метод должен был завоевывать признание на более трудных задачах. Учение о прямолинейных конфигурациях было разработано в последней четверти XVIII века и введено в основной курс аналитической геометрии под влиянием приложений, потребностей преподавания, а также в связи со стремлением дать последовательное аналитическое изложение всей геометрии.

писал, что ее надо было бы тщательно изучать теорему за теоремой, если мы хотим привести все те замечательные, хотя и не новые, но большей частью новым способом полученные результаты, которые объединил в ней Эйлер.

В соответствии со своей общей установкой Эйлер начинает с рассмотрения общего уравнения второго порядка с двумя неизвестными, которое он исследует, записав его в виде $y^2+\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}y+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0$ и опираясь главным образом, как мы уже сказали, на связь между значениями y_1 и y_2 ординаты, удовлетворяющими этому уравнению, и функциями абсциссы x, входящими в него в качестве коэффициентов. Отсюда получается теория диаметров, определяется центр кривой, выводится ряд других свойств кривых второго порядка. Все это, вообще говоря, относится ко всем таким кривым. В частности, Эйлер получает почти все результаты, изложенные Ньютоном в пятом разделе первой книги его «Начал» (§ 120 и сл.). Нельзя сказать, что изложение проведено строго аналитично: геометрические построения используются достаточно широко, а для читателя XX века, пожалуй, слишком широко. Это ослабляет полемический подтекст, направленный против тех, кто выше ставил методы древних.

Далее, в гл. VI, общее уравнение берется в виде $y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, чего можно достичь преобразованием координатной системы. Только теперь вводится подразделение кривых второго порядка на три вида в соответствии с их поведением на бесконечности, что определяется знаком γ. Результаты отныне выводятся для каждого вида в отдельности, причем упоминается окружность как частный случай эллипса; от эллипса переходим к параболе, увеличивая до ∞ один из главных диаметров, — прием, ныне почти не используемый в учебниках, хотя весьма наглядный. Во времена Эйлера и ранее он был в ходу, см., например, схолию, которой заканчивается второй отдел первой книги ньютоновых «Начал». Затем уже исследуются свойства, присущие гиперболе.

К теории конических сечений относится также § 83 в гл. IV, где чисто аналитически решена задача о проведении кривой второго порядка через пять точек, и §§ 169, 177, 178 гл. VII, в которых разбиение конических сечений на три вида получено с помощью нового и общего метода, причем для этой цели впервые в книге явно используется дискриминант уравнения второго порядка. Собственно же с гл. VII начинается новая (третья по нашему счету) часть, в которую естественно включаются все последующие главы, кончая гл. XIV, и которую можно назвать общей теорией алгебраических кривых.

Важным новшеством в этой части является метод исследования асимптот алгебраической кривой и основанная на нем классификация кривых. Он изложен в гл. VII и VIII. Уравнение кривой n-го порядка берется в виде $P+Q+R+S+\ldots=0$, где P обозначает совокупность членов n-го измерения относительно x и y, Q — совокупность членов $(n-1)$-го измерения и т. д. Форма P допускает разложение на однородные вещественные (= с вещественными коэффициентами) множители первой и второй степени, простые или кратные. Если линейных множителей нет, что возможно, разумеется, лишь в случае четного n, кривая лишена прямолинейных асимптот (случай эллипса для $n=2$); при наличии одного такого простого множителя кривая имеет одну прямолинейную асимптоту и две в противоположных направлениях сближающиеся с ней бесконечные ветви (что возможно лишь при нечетном n). Если имеется два простых линейных множителя, то асимптот у кривой две, бесконечных ветвей — четыре (случай гиперболы для $n=2$), а двукратный линейный множитель дает параболическую асимптоту (случай параболы при $n=2$), если соблюдены некоторые дополнительные условия, затрагивающие уже члены измерения ниже n-го. В порядке последовательного усложнения рассматриваются случаи, когда налицо три и четыре линейных множителя, разные или совпадающие, и при кратных множителях приходится учитывать поведение членов уравнения степени ниже n. Метод применим при любом числе линейных вещественных множителей. Он дает классификацию бесконечных ветвей кривой, в первую очередь их подразделение на гиперболические и параболические (что имеем уже у Ньютона). Эйлер выводит также уравнения асимптот и соответствующих бесконечных ветвей кривой. Он оперирует при этом порядками малости или бесконечности, избегает явного применения диаграммы Ньютона и допускает, вероятно, из-за той поспешности, с которой он писал «Введение», ряд погрешностей. Они выявлены А. Шпайзером, который редактировал этот том в Полном собрании сочинений Эйлера, и указаны в нашем издании в примечаниях. Эти погрешности не умаляют достоинства метода, зато творческое возбуждение, которое ощущается в несколько импровизационном стиле Эйлера, делает чтение особенно привлекательным.

Исходя из своего метода анализа и характеристики бесконечных ветвей, Эйлер дает классификацию кривых третьего порядка по их поведению на бесконечности (гл. IX) и аналогичную классификацию кривых четвертого порядка (гл. XI). В последнем вопросе он, в сущности, является пионером, потому что более ранние работы на эту тему Бражелоня, которые Эйлер, видимо, не знал, нельзя считать удачными. «Самый же метод, — справедливо пишет Эйлер,— я настолько отчетливо описал, что деление по родам можно осуществить для каждого из последующих порядков линий».

Однако при одном и том же характере поведения на бесконечности кривые данного порядка могут давать большое разнообразие форм на конечном расстоянии. Как выражается Эйлер, определение бесконечных ветвей еще не дает фигуры кривой. Однако у него нет средств для исследования этого вопроса в общем виде, да и сейчас математика знает очень мало результатов по топологии алгебраических кривых. Эйлер ограничивается (в гл. XII) исследованием одного вида кривых третьего порядка, показывает, что полученные выводы могут быть обобщены на кривые, выражающиеся уравнением $Qy^2+2Py+R=0$, где Q, P, R суть функции абсциссы x, и заканчивает главу разбором частного, но весьма интересного примера (см. § 284). В общем же случае он может провести исследование только локально, и в гл. XIII и XIV он рассматривает ход кривой в окрестности точки, обыкновенной или особой, и в связи с этим соприкосновение линий; вводит понятие о кривизне и радиусе кривизны; классифицирует особые точки. Все это выполнено с помощью алгебраических средств и оценок порядка малости различных членов уравнения кривой. Выше упоминалось об ошибке Эйлера в вопросе о точке возврата второго рода. Собственно, Эйлер внес необходимое исправление в текст книги. Детальное разъяснение этого вопроса Эйлер дает в работе, написанной во время печатания «Введения» и появившейся в Записках Берлинской академии за 1749 г. [1]). Подробности приведены в примечаниях. Остается еще добавить, что гл. X дополняет гл. IX, так как в ней приведены «канонические уравнения» для

[1]) Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hospital, Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1749, t. V, 204—221; Opera omnia. ser. I, t. XXVII, 236—252.

всех 16 видов эйлеровой классификации кривых третьего порядка, дана теория диаметров таких кривых, выясняются условия наличия у них центра.

Главы с XV по XXII (мы объединим их в следующую, четвертую часть тома) являются как бы дополнительными к предыдущим частям. В гл. XV развивается теория диаметров кривых линий. В руках Эйлера это становится теорией симметрии на плоскости — первым разделом новой геометрической дисциплины, которая сформировалась лишь в следующем столетии в связи с запросами кристаллографии и развитием теории групп. «Можно особо рекомендовать читателю эту воистину гениальную главу, которая во всех своих частях является достоянием Эйлера» (А. Шпайзер).

В гл. XVI Эйлер как бы проверяет эффективность методов, примененных им в теории конических сечений, на более широких классах кривых. Рассматриваются кривые, выражаемые уравнением вида $y^2+Py+Q=0$ и $y^3+Py^2+Qy+R=0$, где P, Q, R — функции абсциссы x. Выделяются классы таких кривых, определяемые дополнительным требованием, чтобы сумма вторых, третьих и т. д. степеней ординат, отвечающих одной и той же абсциссе, была постоянной. Такие классы кривых в известном смысле являются обобщением кривых второго, соответственно третьего, порядка. В идейном отношении к этой главе примыкает работа Эйлера, доложенная им в Берлинской академии в 1745 г., «О некоторых свойствах конических сечений, которыми обладают бесконечно много других кривых» (она воспроизведена в Opera omnia, I серия, т. 27, 51—73). Глава содержит очень интересный алгебраический материал.

Изложение в гл. XVII ведется параллельно предыдущей главе, но с тем отличием, что рассматриваются аналогичные уравнения в полярных координатах. Как указывает М. Кантор, это первый случай исследования в полярных координатах новых классов кривых, отличных от спиралей.

Главе XVIII принадлежит заметное место в развитии учения о геометрических преобразованиях. Наряду с преобразованиями подобия Эйлер изучает здесь аффинные (самый термин здесь введен, видимо, впервые) преобразования вида $x=\frac{X}{m}$, $y=\frac{Y}{n}$ и более общие. Эта глава тоже находится в тесной связи с работой 1745 г. «О некоторых свойствах конических сечений...».

А. Шпайзер не прав в своем утверждении, что в гл. XIX «О пересечении кривых» Эйлер открыл новую область алгебры — теорию исключения (см. сказанное выше о Гюа де Мальве). Но безусловно верно, что здесь сделан большой шаг вперед: четко сформулирована основная теорема («теорема Безу»), с обычной эйлеровой отчетливостью изложены два принадлежащих ему метода исключения одного из неизвестных из системы двух алгебраических уравнений[1]).

Главу XX «О построении уравнений» можно рассматривать как дань традиции, связанной с именем Декарта. Изложив графическое решение уравнений первых четырех степеней, Эйлер разбирает затем вопрос о рациональном выборе кривых для решения уравнений высших степеней. Скромное место, которое уделено этой проблеме Эйлером, отсутствие здесь, в отличие от многих предыдущих глав, интересных перспектив — все это содействовало полному вытеснению таких задач из аналитической геоме-

[1]) Этими же вопросами Эйлер занимается в относящейся к тому же периоду работе Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper, Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1748, t. IV, 234—248. Она воспроизведена в т. 26 первой серии Opera omnia.

трии. Совсем иное значение имела гл. XXI «О трансцендентных кривых». Хотя Эйлер рассматривает лишь отдельные примеры, но выделение такой главы имело, можно сказать, программное значение: принципиально расширялись рамки координатной геометрии, которая до тех пор достаточно строго ограничивала себя теорией алгебраических кривых. Глава интересна не только по замыслу. Параграфы о логарифмической кривой — один из этапов в проделанной Эйлером работе: распространении логарифмической функции на область отрицательных и комплексных чисел (завершающими тут явились мемуары, написанные Эйлером несколько позже — в 1747 г.). Поучительны и те трансцендентные уравнения, которые здесь попутно решаются. Трансцендентными, а именно тригонометрическими, уравнениями занимается Эйлер и в следующей главе, озаглавленной: «Решение некоторых задач, относящихся к кругу». Корни вычисляются здесь с помощью «правила ложного положения».

Теперь перед нами последняя часть тома — «Приложение о поверхностях». Это оригинальная по методу изложения работа; в весьма значительной доле она оригинальна и по содержанию. Ее первую главу Эйлер начинает с указания, что ранее изложенная теория не достаточна для исследования пространственных кривых, изучение же таких кривых тесно связано с теорией поверхностей, поэтому он будет излагать совместно оба эти предмета. Однако название «Приложения» вполне оправдано, так как из шести его глав только последняя относится к теории кривых. Возможно, это вызвано тем, что отказ от исчисления бесконечно малых представляет здесь значительно более суровое ограничение, чем в плоском случае.

«Приложение о поверхностях» — первое систематическое изложение аналитической геометрии трех измерений. В гл. I довольно подробно объясняется пространственная система декартовых координат, выясняются условия симметрии относительно координатных плоскостей, иначе говоря, строится группа отражений в пространстве. В гл. II демонстрируется метод исследования поверхностей с помощью плоских сечений. В качестве примеров взяты поверхности вращения, цилиндрические, конические. Эйлер питал отвращение ко всяким спорам о приоритете и неудивительно, что он не ссылается на свою раннюю работу, представленную Петербургской академии в 1728 г. [1]), где он впервые вывел общие уравнения для этих трех видов поверхностей. Такая ссылка есть в «Механике» Эйлера, но тогда (в 1734—1736 гг.) он, вероятно, не знал «Разысканий о кривых двоякой кривизны» Клеро (1731 г.), а том «Commentarii Academiae Petropolitanae» за 1728 г. вышел в 1732 г.

В гл. III этот метод плоских сечений применяется к круговому и эллиптическому цилиндру, к круговому конусу, к шару. Для конических сечений Эйлер определяет оси, асимптоты и т.д.Такие вопросы здесь выступают, так сказать, в пространственной оболочке, а так как они, по сути, уже знакомы читателю, то это облегчает развитие пространственных представлений. Великолепное методическое чутье автора проявляется здесь еще раз.Переходы от одной плоскости к другой, которые здесь применяются, естественно подводят к гл. IV. В ней выведены формулы для преобразования координат в пространстве с использованием знаменитых эйлеровых углов. Это было ново для современников, равно как и содержание гл. V. В ней рассматривается общее уравнение второго порядка в трех переменных. Метод исследования — тот же, что и на плоскости: по членам высшего измерения изучается поведение на бесконечности. Таким

[1]) De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente.

образом, Эйлер вводит в рассмотрение асимптотический конус для поверхностей второго порядка. На этой основе проводится классификация квадрик (случаи вырождения не рассматриваются как самостоятельные), с помощью преобразования координат выводятся канонические уравнения для шести основных видов (эллипсоид, гиперболоид одно- и двуполый, параболоид эллиптический и гиперболический, параболический цилиндр). Указания на гиперболический параболоид у авторов, предшествовавших Эйлеру, пока не обнаружены. Глава заканчивается замечанием, что примененный в ней метод приложим и к поверхностям порядка, большего двух.

Последняя глава «Приложения» носит название «О пересечении двух поверхностей». Она невелика, содержит простые примеры и несколько общих замечаний о пространственных кривых, в частности — указание на то, что мнимая кривая в пространстве может иметь вещественную проекцию (на одну из координатных плоскостей).

Изложенный краткий анализ второго тома «Введения» достаточен для вывода, что в этой книге нашли свое решение основные проблемы, поставленные к тому времени развитием аналитической геометрии (понимая, разумеется «решение проблемы» как решение в соответствии с возможностями науки той эпохи). В ней развит единый метод для классификации плоских алгебраических кривых любого порядка и систематизировано практически все, что дали общие методы исследования таких кривых. В геометрии же трех измерений была закончена, наконец, ее начальная глава — о преобразовании ортогональных декартовых координат и впервые построена теория квадрик. Общие задачи «новой геометрии» были сформулированы с полной определенностью и был как бы обрублен уже засыхавший, но еще оттягивавший немало живых соков побег этого молодого древа: «построение уравнений» в смысле Декарта. В той части книги, о которой Эйлер говорит: «... я прибавил несколько глав, в которых показываю, как найти кривые линии, обладающие заданными свойствами», тоже было много такого, что можно было назвать, говоря его словами, не только новым, но и «источником, откуда можно черпать замечательные открытия». Мы напомним, что здесь показано широкое применение полярных координат, что гл. XV была преддверием большой и важной геометрической теории, что гл. XXI Эйлер поддержал традицию, идущую от Лейбница, который ставил себе в заслугу расширение предмета геометрии за пределы, навязанные ей Виета и Декартом, и говорил, что нужно «открыть родник трансцендентных количеств».

Дидактические достоинства второго тома «Введения» велики. Изложение отличается отчетливостью и доступностью, систематизация материала вполне естественная. Эйлер начинает с основ и подводит своего читателя к границам тогдашней науки — для своего времени этот том «Введения» был научным трактатом. Вместе с тем это превосходный учебный курс, а по насыщенности новым содержанием — научная монография. Впервые аналитическая геометрия была столь полно и последовательно изложена. Отныне ей было обеспечено самостоятельное место среди других математических дисциплин.

Влияние этой книги Эйлера было длительным и определяющим. Оно оставалось в полной силе до конца XVIII века. К тому времени аналитическая геометрия пополнилась главами о конфигурациях прямых и плоскостей (Монж, Лагранж, Лакруа и др.), и мы уже упоминали, чем это было вызвано. Вместе с теорией образов второго порядка эти новые главы выделяются в основной (элементарный) курс аналитической геометрии и появляется само это название. Осуществляя с полной последовательностью установку, которая идет от Эйлера, Лакруа в 1797 г. так характеризовал свой подход к предмету: «Тщательно устраняя все геометрические построения, я хотел дать почувствовать читателю, что существует такая трактовка геометрии, которую можно было бы назвать Аналитической геометрией, и она состоит в том, чтобы вывести свойства протяженности из возможно меньшего числа принципов чисто аналитическими методами, как Лагранж это сделал в своей Механике по отношению к свойствам равновесия и движения». Что же касается теории геометрических образов порядка выше второго, алгебраическая геометрия остается в кругу эйлеровых идей и методов, пока в первые десятилетия XIX века не начнется введение принципиально новых понятий вместе с использованием изобретенных тогда мощных алгебраических средств. Постепенно новые методы проникают и в элементарный курс. Позже произойдет еще одна его перестройка — переход к векторному изложению. Но по содержанию своему сделанное и введенное Эйлером остается непременной частью и современных учебников.

Мы старались показать выше, что второй том «Введения» не стоит особняком в творчестве Эйлера. В нем автор использовал некоторые результаты, полученные им раньше, в связи с ним были написаны и новые работы. Однако в монументальной трилогии Эйлера — «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление» (ее перевод на русский язык завершается выпуском настоящего тома) — эта книга осталась без продолжения. Она должна была подвести читателя к геометрическим применениям анализа бесконечно малых. Эти вопросы Эйлер собирался изложить в третьей книге своего «Дифференциального исчисления», о чем он упоминает неоднократно, но выполнить свой замысел ему не удалось. Отвлекаемый многочисленными другими трудами, он написал только первые параграфы задуманной книги. Этот отрывок был впервые напечатан в 1862 г.

«Введение» Эйлер создал в очень сжатые сроки. Имея полную ясность цели, он явно не связывал себя заранее детальным планом. Он старается продвинуться возможно дальше с помощью своих методов, обрывает изложение, когда сопротивление материала резко нарастает, развивает вопрос там, где он добивается успеха. Эйлер откровенен до конца, читатель все время слышит его живой голос, чувство непосредственного общения с автором не покидает нас на страницах этой книги. Все это относится и ко второму тому и делает его чтение не только поучительным, но и увлекательным.

* * *

Перевод второго тома «Введения» — последняя работа В. С. Гохмана (1880—1956); в его переводах впервые изданы на русском языке многие сочинения классиков естествознания (например, «Аналитическая механика» Ж. Лагранжа, т. I, 1938 г., т. 2, 1950 г.; отдельные работы из «Избранных сочинений по механике» И. Бернулли, 1937 г.; главы из «Основ динамики точки» Л. Эйлера, 1938 г.). Настоящий перевод выполнен с обычной для В. С. Гохмана тщательностью и большим тактом. Разговорный строй эйлеровой речи, несколько домашняя латынь оригинала, тон нетороплнвого наставника, не жалеющего слов ради полноты и доходчивости изложения, нашли свое выражение в переводе, без приглаживания и без нарочитых архаизмов. Читатель все время будет ощущать, что с ним говорит не современный автор, говорит своим и вместе с тем вполне понятным языком.

При редактировании терминология была приведена в соответствие с первым томом «Введения» и с трехтомным «Интегральным исчислением» (Физматгиз, 1956—1958). Относительно обозначений все сказано в предисловии «От издательства» к первому тому, но, в сущности, все, что здесь надо иметь в виду читателю, — знак для логарифма в виде одной буквы l.

Сноски в тексте — трех родов. Подписанные инициалами *А. Ш.* принадлежат А. Шпайзеру, редактировавшему этот том «Введения» в Opera omnia; латинские выдержки приведены для сравнения и пояснения при наличии известных особенностей в языке оригинала либо тогда, когда они имеют терминологическое значение; неподписанные пояснения и справки принадлежат редактору. Числа в квадратных скобках указывают на примечания редактора, внесенные в конце книги.

И. Погребысский

ВВЕДЕНИЕ
В АНАЛИЗ
БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ II

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS SECUNDUS

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

КНИГА ВТОРАЯ,

В КОТОРОЙ СОДЕРЖИТСЯ

ТЕОРИЯ КРИВЫХ ЛИНИЙ, А ТАКЖЕ ДОБАВЛЕНИЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ.

ГЛАВА I

О КРИВЫХ ЛИНИЯХ ВООБЩЕ

1. Так как переменное количество рассматривают как величину вообще, охватывающую все определенные ее значения [1], то в геометрии подобного рода переменное количество удобнее всего представить с помощью неограниченной прямой линии RS (рис. 1). Действительно, так как на неограниченной линии можно отделить любую определенную величину, эта линия может дать то же самое представление о количестве, какое дает переменное количество. Итак, прежде всего надо взять на неограниченной линии RS точку A, которую считаем началом для всех определенных величин, какие предстоит откладывать. Тогда определенная часть ее AP представит определенное значение, содержащееся в переменном количестве.

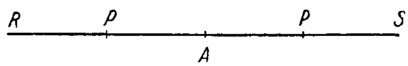

Рис. 1.

2. Итак, пусть x является переменным количеством, которое представляет неограниченная прямая линия RS. Ясно, что с помощью частей, взятых на линии RS, можно выразить все определенные значения x, если только они будут действительными. Так, например, если точку P взять в самой точке A, то исчезающий отрезок AP представит значение $x=0$; а чем больше будут отодвигать точку P от A, тем большим станет определенное значение x, представляемое отрезком AP.

Называются эти отрезки AP *абсциссами*.

Таким образом, абсциссы представляют определенные значения переменного x.

3. Так как неограниченная прямая линия RS простирается бесконечно далеко по обе стороны от точки A, можно откладывать по обе стороны от последней и все значения x. Если мы будем откладывать положительные значения x, продвигаясь по прямой линии вправо, то отрезки Ap, отложенные по левую сторону, будут представлять отрицательные значения x. Действительно, по мере того как точка P уходит от точки A вправо, значение x, представляемое отрезком AP, увеличивается. Обратно, чем больше точка P уходит влево, тем сильнее уменьшается значение x; а когда точка P попадает в A, значение x становится $=0$. Поэтому, когда точка P отходит еще дальше налево, то значения x становятся меньше нуля, то есть они становятся отрицательными, стало быть, отрезки Ap, отложенные налево от точки A, представят отрицательные значения x, если принять, что отрезки AP, взятые по правую сторону, дают положительные его значения. Впрочем, безразлично, какую именно сторону мы изберем для положительных значений x, так как противоположная сторона даст всегда отрицательные его значения [2].

4. Итак, поскольку прямая неограниченная линия представляет переменное количество x, посмотрим, каким образом можно удобнее всего геометрически представить любую функцию x. Пусть y будет некоторой функцией x, которая, стало быть, будет получать определенное значение, когда вместо x будут подставлять определенное значение. Взяв (рис. 2) неограниченную прямую линию RAS для обозначения значений x, проведем для каждого определенного значения AP количества x перпендикулярно линию PM, равную соответствующему значению y. Конечно, если значение y оказывается положительным, указанную линию восставим выше прямой линии RS, а если значение y получается отрицательным, то ее следует провести ниже прямой RS, ибо если принять, что положительные значения y располагаются выше прямой RS, то исчезающие значения будут на самой прямой RS, а отрицательные окажутся расположенными ниже последней [3].

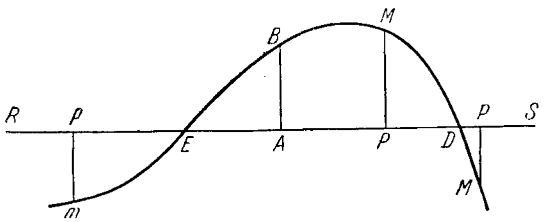

Рис. 2.

5. Таким образом, приведенный выше рисунок дает в качестве y такого рода функцию от x, что если положить $x=0$, то y принимает положительное значение $=AB$, а если взять $x=AP$, то $y=PM$; если $x=AD$, то $y=0$, а если взять $x=Ap$, то функция y получает отрицательное значение и, следовательно, нормально проведенная линия pm (ордината) попадает ниже прямой RS ¹). Аналогичным образом и значения y, соответствующие отрицательным значениям x, изображаются ординатами [4], расположенными выше RS, когда они являются положительными. В противном случае они должны быть расположены ниже прямой RS подобно pm. А если при каком-либо значении x, например при $x=AE$, функция $y=0$, то в этом случае длина ординаты исчезает.

¹) Мы сохраняем обозначения Эйлера, одинаковые для разных точек.

6. Стало быть, когда указанным образом для всех определенных значений x будут определены соответствующие значения y, в каждой из точек P прямой RS будем проводить перпендикулярно к ней ординаты PM, выражающие значения функции y, и одни концы этих ординат, P, будут лежать на прямой RS, другие же концы, M, будут находиться либо выше линии RS, когда значения y положительны, либо ниже ее, когда значения y отрицательны, либо же они будут лежать на самой линии RS, когда эти значения равны нулю, как это получается в точках D и E. Таким образом, концы M всех этих ординат представят какую-нибудь линию, прямую или кривую, которая, стало быть, определяется указанным образом функцией y. В силу этого любая функция от x, будучи истолкована геометрически указанным путем [1]), определит некоторую линию, прямую или кривую, природа которой будет зависеть от природы функции y.

7. Изложенным выше способом можно в совершенстве изучить кривую, которая получается из функции y, так как эта функция определяет все ее точки. Действительно, для каждой точки P устанавливается некоторая длина перпендикуляра PM, конечная точка которого M расположена на кривой линии, и этим путем определяются все точки кривой. А как бы ни была построена кривая линия, из каждой точки ее можно опустить перпендикуляры на прямую RS и получить таким образом отрезки AP, которые представляют значения переменного x, а также длины перпендикуляров PM, которые представляют значения функции y. Таким образом, не существует ни одной точки кривой, которая не была бы определена указанным путем с помощью функции y.

8. Хотя много линий можно вычертить механически непрерывным движением точки, которое сразу наглядно выявляет кривую линию целиком, мы будем здесь рассматривать кривые преимущественно как порожденные функциями, поскольку такой подход является более аналитическим и более широким, а также лучше приспособлен для исчисления. Таким образом, любая функция от x будет давать некоторую линию, прямую или кривую; стало быть, и обратно, кривые линии можно сводить к функциям. Таким образом, природа всякой кривой линии будет определяться с помощью такого рода функции x, которая всегда будет представлять истинную длину ординаты MP, между тем как отрезки AP, на которые опускаются перпендикуляры, проведенные из отдельных точек M кривой, определяются переменным x [[5]].

9. Из вышеизложенного представления о кривых линиях тотчас же следует их деление на *непрерывные* и *прерывные* или *смешанные*. А именно, *непрерывная* линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x. Но если кривая линия построена таким образом, что различные части ее BM, MD, DM и т. д. выражаются с помощью различных функций x, так что одна часть ее BM определяется с помощью одной функции, тогда как другая часть MD описывается другой функцией и т. д., то этого рода кривые линии мы будем называть *прерывными* или *смешанными* и *неправильными*, так как они не образуются на основе единого неизменного закона, а составляются из частей различных непрерывных кривых.

---

[1]) hoc modo ad Geometriam translata.

10. В геометрии речь идет главным образом о непрерывных кривых и ниже будет показано, что те кривые, которые описываются механически однообразным движением согласно некоторому неизменному правилу, выражаются также с помощью одной функции и, стало быть, являются непрерывными. Итак, пусть $mEBMDM$ будет непрерывной кривой линией, природа которой выражается с помощью некоторой функции от x, которую мы обозначим через y. Ясно, что если на прямой линии RS откладывать от неподвижной точки A определенные значения x, то соответствующие значения y будут давать длину нормальных ординат PM.

11. При настоящем определении кривых линий следует также придерживаться некоторых терминов, которые весьма часто применяются в учении о кривых линиях. Итак, прежде всего, прямая RS, на которой откладываются значения x, называется *осью* или прямой *директрисой*.

Точка A, от которой измеряются значения x, называется *началом абсцисс*. А части оси AP, представляющие определенные значения x, обычно называют *абсциссами*.

Перпендикуляры PM, проведенные из концов абсцисс P до кривой линии, получили название *ординат*. В данном случае ординаты называются *нормальными* или *прямоугольными*, так как они образуют с осью прямой угол. Но так как ординаты могут подобным же образом образовывать косые углы с осью, то в таком случае ординаты называются *косоугольными*. Правда, здесь мы будем постоянно разъяснять природу кривых линий с помощью прямоугольных ординат, если только противоположное не будет особо оговорено.

12. Таким образом, когда какая-нибудь абсцисса AP указывается с помощью переменного x, так что имеем $AP = x$, то функция y указывает величину ординаты PM, и тогда $PM = y$. Природа же кривой линии, если только последняя непрерывна, выражается свойствами функции y, т. е. тем соотношением, которое указывает, как y составляется из x и из постоянных количеств. Стало быть, часть AS, взятая на оси RS, будет местом положительных абсцисс, а часть AR местом отрицательных абсцисс; вместе с тем выше оси RS будет находиться область положительных ординат, а ниже ее область отрицательных ординат.

13. Итак, поскольку из любой функции x получается непрерывная кривая линия, последнюю можно также изучить и описать с помощью этой функции. Действительно, придадим сначала x положительные значения, возрастающие постепенно от 0 до ∞, и для каждого из них отыщем соответствующие значения функции y, которые и представим с помощью ординат, отложенных вверх или вниз от оси в зависимости от того, имеют ли они положительные или отрицательные значения, — так мы получим часть кривой линии BMM. После этого таким же образом придадим x все отрицательные значения, продвигаясь от 0 до $-\infty$, и тогда соответствующие значения y определят часть кривой BEm, так что будет представлена вся кривая линия, содержащаяся в данной функции.

14. Так как y является функцией x, то либо y будет равняться явной функции x, либо будет задано уравнение между x и y. В силу этого природа каждой кривой линии выражается с помощью уравнения между двумя переменными x и y, из которых одно, x, обозначает абсциссы, отложенные на оси от заданного начала A, а другое, y, обозначает ординаты,

перпендикулярные к оси. Абсциссы же и ординаты, рассматриваемые совместно, называются *прямоугольными координатами.* Вследствие этого говорят, что природа кривой линии определяется с помощью уравнения между координатами, если существует уравнение, указывающее, какого рода функцией x является y.

15. Так как, стало быть, изучение кривых линий сводится к исследованию функций, имеется столько же различных родов кривых линий, сколько, как мы видели выше, существует родов функций. Следовательно, кривые линии подобно функциям лучше всего делить на *алгебраические* и *трансцендентные*. Разумеется кривая линия будет алгебраической, если ордината y будет алгебраической функцией абсциссы x; а так как природа кривой линии выражается с помощью алгебраического уравнения между координатами x и y, то этого рода кривые линии обычно называют также *геометрическими*. Трансцендентной же является линия, природа которой выражается с помощью трансцендентного уравнения между x и y, или с помощью такого уравнения, что y оказывается трансцендентной функцией x. Таково основное разделение непрерывных кривых линий, согласно которому последние являются либо *алгебраическими*, либо *трансцендентными*.

16. Для того чтобы описать кривую линию, которая получается из функции x, дающей значение ординаты y, следует надлежащим образом учесть природу этой функции: является ли она однозначной или многозначной [1]). Положим сначала, что y является однозначной функцией x, т. е. что $y=P$, где P обозначает некоторую однозначную функцию x; так как, если придать x некоторое определенное значение, ордината y также принимает одно определенное значение, то каждой абсциссе будет соответствовать одна ордината и, стало быть, кривая линия будет иметь такой вид, что если в какой-либо точке P оси RS провести к последней перпендикуляр PM, то он всегда пересечет кривую линию, и притом лишь в одной точке M. Таким образом, каждой точке оси будет соответствовать некоторая точка кривой линии, а так как ось простирается бесконечно далеко в обе стороны, то кривая линия точно так же уходит бесконечно далеко в обе стороны. Иначе говоря, кривая линия, которая получается из подобной функции, будет уходить сплошной чертой с обеих сторон в бесконечность вместе с осью, как это можно видеть на рис. 2, где кривая линия $EBMDM$ без всякого перерыва уходит на бесконечность в обе стороны.

17. Пусть y будет двузначной [2]) функцией x, или, если обозначить буквами P и Q однозначные функции x, пусть $y^2=2Py-Q$, так что будет $y=P\pm\sqrt{P^2-Q}$. Стало быть, каждой абсциссе будут соответствовать две ординаты y, причем они будут либо обе действительными, либо обе мнимыми: действительными в том случае, если будет $P^2>Q$, а мнимыми, если будет $P^2<Q$. Следовательно, пока оба значения y будут действительными, абсциссе AP (рис. 3) будут соответствовать две ординаты PM и PM, т. е. прямая, нормальная к оси в точке P, пересечет кривую в двух точках M и M. Но там, где $P^2<Q$, абсциссе не будет соответствовать какая-либо ордината, т. е. прямая, нормальная к оси, в этих местах нигде не встретит данной кривой, как, например, в точке p. Но если раньше было $P^2>Q$,

[1]) У Эйлера: uniformis и multiformis, т. е. буквально единообразная (функция) и многообразная.

[2]) biformis.

то не может стать $P^2<Q$ без того, чтобы пройти через случай $P^2=Q$, что будет границей между действительными ординатами и мнимыми. Таким образом, в тех местах, где кончаются действительные ординаты, как в C или G,

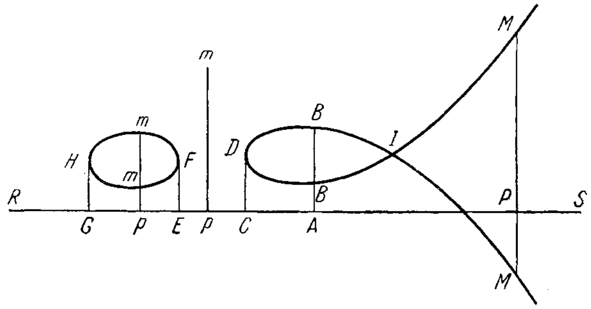

Рис. 3.

там $y=P\pm 0$, т. е. обе ординаты становятся равными между собою, и там кривая, изгибая свой путь, идет в обратном направлении [1]).

18. Из рисунка ясно, что пока отрицательная абсцисса $-x$ находится между пределами AC и AE, ордината становится мнимой, и тогда $P^2<Q$. Если же двигаться дальше точки E влево, то ординаты снова становятся действительными, что не может произойти без того, чтобы в точке E имело место $P^2=Q$ и, стало быть, чтобы обе ординаты совпали. Тут снова абсциссам AP соответствуют две ординаты Pm и Pm, пока мы не дойдем до G, где обе эти ординаты совпадают, а после точки G снова становятся мнимыми. Таким образом, подобного рода кривая линия может состоять из двух или большего числа отделенных друг от друга частей, как $MBDBM$ и $FmHm$. Тем не менее следует считать, что эти части, рассматриваемые совместно, составляют одну непрерывную или правильную линию, так как указанные выше отдельные части получаются из одной и той же функции. Таким образом, эти кривые линии обладают тем свойством, что если в отдельных точках оси провести перпендикулярно к последней прямые линии MM, то последние либо нигде не пересекут кривой линии, либо пересекут ее в двух точках, если только, быть может, обе точки пересечения не сольются в одну, что имеет место, если ординаты провести в точках D, F, H или I.

19. Если y будет трехзначной [2]) функцией x, т. е. y будет определяться с помощью такого рода уравнения:

$$y^3-Py^2+Qy-R=0,$$

где P, Q и R являются однозначными функциями x, то для каждого значения x ордината y будет иметь три значения, и тогда либо все эти значения действительны, либо лишь одно действительно, а остальные два мнимые. Поэтому все ординаты пересекут кривую линию либо в трех точках, либо только в одной точке, если только две или даже три точки пересечения не сольются. Стало быть, поскольку каждой абсциссе соответствует по меньшей мере одна действительная ордината, необходимо, чтобы эта кривая

[1]) ibique curva cursum inflectendo regredietur.
[2]) triformis.

с обеих сторон уходила вместе с осью в бесконечность. Следовательно, эта кривая линия будет состоять либо из одной непрерывной линии, как это показано на рис. 4, либо из двух раздельных частей, как на рис. 5, или же из большего числа частей, которые однако в общей сложности образуют одну и ту же непрерывную линию.

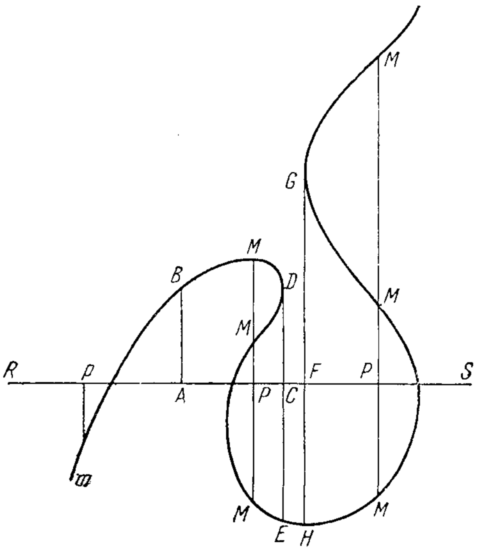

Рис. 4.

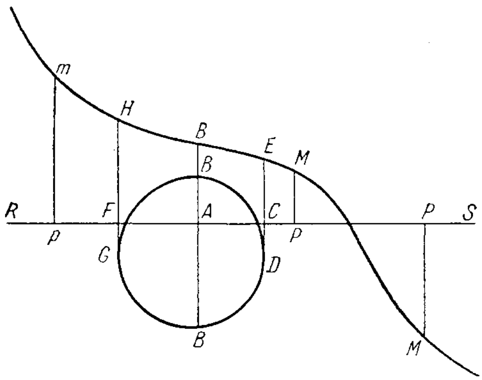

Рис. 5.

20. Если y будет четырехзначной [1]) функцией x, т. е. если y будет определяться с помощью уравнения

$$y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0,$$

то каждому значению x будет соответствовать либо четыре действительных значения y, либо только два, либо их вовсе не будет. Следовательно, у кривой, которая получается из такого рода четырехзначной функции, отдельные ординаты будут пересекать кривую либо в четырех точках, либо только в двух, либо ни в одной; все эти случаи представлены на рис. 6. Надлежит при этом отметить места I и o, где две точки пересечения сливаются в одну. Вследствие этого как вправо, так и влево в бесконечность либо не уходит ни одна ветвь этой кривой, либо уходят две ее ветви, либо даже четыре. В первом случае, когда ни из какой части кривой не уходят в бесконечность никакие ветви, кривая линия будет со всех сторон закрытой, как это видно на рис. 6, и охватит некоторое пространство.

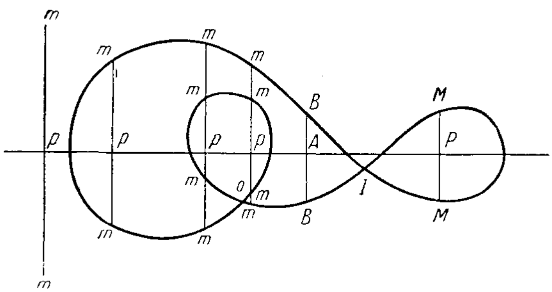

Рис. 6.

Отсюда можно уже составить себе представление о свойствах кривых линий, которые получаются из многозначных функций с любым числом значений.

---

1) quadriformis.

21. Следовательно, когда y будет многозначной функцией, т. е. будет определяться с помощью уравнения, в котором показатель высшей степени x пусть равен n, то в этом случае число действительных значений y составит либо n, либо $n-2$, либо $n-4$, либо $n-6$ и т. д., следовательно, в таком же количестве точек какая-нибудь ордината будет пересекать кривую линию. Таким образом, если одна ордината пересекает непрерывную кривую в m точках, то все остальные ординаты будут пересекать эту кривую в стольких точках, что их число будет всегда отличаться от m на четное число. Стало быть, кривая линия никогда не может быть пересечена ординатой в $m+1$ или в $m-1$ или в $m\pm3$ и т. д. точках. Это значит, что если число пересечений у одной ординаты будет четным или нечетным, то и все прочие ординаты пересекут кривую линию в четном или нечетном количестве точек.

22. Таким образом, если одна ордината пересекает кривую линию в нечетном числе точек, то не может быть того, чтобы какая-нибудь другая ордината нигде не пересекала этой кривой. Стало быть, кривая на каждой стороне будет иметь по меньшей мере одну ветвь, которая уходит в бесконечность, а если с какой-нибудь стороны в бесконечность уходит несколько ветвей, то число последних должно быть нечетным, так как количество пересечений каждой ординаты четным быть не может. Следовательно, если подсчитать с обеих сторон все ветви, уходящие в бесконечность, то их число будет всегда четным. То же самое имеет место, когда ординаты пересекают кривую линию в четном числе точек, так как в этих случаях по обе стороны в бесконечность не уходит ни одной ветви или же уходит две, четыре и тому подобное количество ветвей, в результате чего, стало быть, и общее число ветвей кривой, уходящих в бесконечность, будет четным [6].

Мы ознакомились, таким образом, с некоторыми замечательными свойствами непрерывных и правильных кривых линий, что позволяет отличать их от кривых прерывных и неправильных.

ГЛАВА II

ОБ ИЗМЕНЕНИИ КООРДИНАТ

23. Подобно тому как на основании уравнения между координатами x и y, из которых первая обозначает абсциссу, а вторая ординату, заданную кривую (см. рис. 2, стр. 20) изображают на оси RS, взяв по своему выбору некоторую точку A в качестве начала абсцисс, точно так же, наоборот, когда кривая линия уже начерчена, ее природу можно выразить с помощью уравнения между координатами. Но в данном случае, хотя кривая и задана, две вещи остаются все-таки в нашем произволе, а именно: положение оси RS и начало абсцисс A. Так как последние можно изменять бесконечным числом способов, то даже для одной и той же кривой линии можно представить бесконечное число уравнений, в силу чего не всегда на основании различия уравнений можно делать заключение о различии кривых линий, представляемых этими уравнениями, хотя различные кривые и дают всегда различные уравнения.

24. Итак, поскольку, меняя как ось, так и начало абсцисс, получаем бесконечно много уравнений, выражающих природу одной и той же кривой линии, все эти уравнения будут взаимно связаны, так что по одному заданному уравнению можно будет определить все остальные. Действительно, заданное уравнение между координатами определяет кривую линию, а когда последняя известна, то, приняв какую-нибудь прямую линию в качестве оси и на последней какую-нибудь точку в качестве начала абсцисс, мы выведем соответствующее уравнение между прямоугольными ординатами. И вот, в настоящей главе мы изложим метод, с помощью которого по заданному уравнению для какой-нибудь кривой можно будет найти уравнение между ее координатами по отношению к какой-либо другой оси и к какому-либо иному началу координат, которое будет выражать природу той же кривой линии. Этим путем мы полностью выявим все уравнения, которые содержат в себе природу одной и той же кривой линии, и таким образом можно будет легче судить о различии кривых на основании различия уравнений [7].

25. Итак, пусть дано некоторое уравнение между x и y, на основании которого, взяв (рис. 7) прямую RS в качестве оси и точку A в качестве начала абсцисс, так что x будет обозначать абсциссу AP, а y —ординату PM, проведем кривую линию CBM, природа которой, стало быть, выражается заданным уравнением. Сохраним на первых порах ось RS, но примем

на ней в качестве начала абсцисс другую точку D, так что теперь точке M кривой линии будет соответствовать абсцисса DP, которую мы положим равной t, а ордината MP останется по-прежнему равной y. Итак, будем искать уравнение между t и y, выражающее природу той же кривой CBM. Положим промежуток $AD=f$; этот промежуток откладывается налево от точки A в области отрицательных абсцисс. Тогда $DP=t=f+x$ и, стало быть, $x=t-f$. Таким образом, если в [заданном] уравнении между x и y всюду вместо x подставить $t-f$, получится уравнение между t и y, которое будет представлять ту же самую кривую линию CBA. А так как величина $AD=f$ зависит от нашего произвола, то мы уже получаем бесконечно много различных уравнений, и все они будут выражать одну и ту же кривую линию.

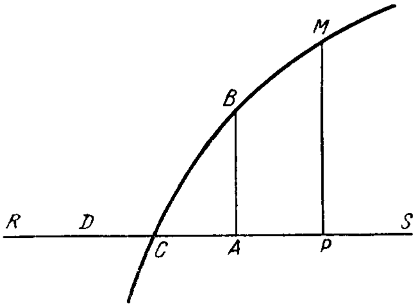

Рис. 7.

26. Если кривая линия пересекает где-нибудь ось RS, например в точке C, то, приняв эту точку C за начало абсцисс, получим такого рода уравнение, что, положив абсциссу $CP=0$, одновременно получим исчезающую ординату PM, если только точке оси C соответствует лишь одна ордината. А точка пересечения C, если таких точек одна или несколько, находится из предложенного вначале уравнения между x и y, если положить $y=0$ и определить из уравнения значение или значения x. Ибо в том месте, где кривая линия встречается с осью, $y=0$: следовательно, если, наоборот, положить $y=0$, то выявятся все те абсциссы, т. е. все те значения x, при которых кривая встречается с осью.

27. Итак, начало абсцисс изменится при той же оси, если абсциссу x увеличить или уменьшить на заданное количество, т. е. если вместо x взять $t-f$. Здесь f будет положительным количеством, если новое начало абсцисс D будет смещено влево от A, и, конечно, оно будет отрицательным количеством, если точка D будет расположена вправо от точки A.

Предположим теперь (рис. 8), что после того, как кривая LBM была описана по заданному уравнению между $AP=x$ и $PM=y$, мы приняли другую ось rs, параллельную прежней, и на ней взяли точку D в качестве начала абсцисс; при этом новая ось проходит в области отрицательных ординат, и пусть расстояние ее от прежней оси $AF=g$; а также примем, что промежуток $DF=AG=f$. Таким образом, на этой новой оси абсциссой, соответствующей точке M кривой, будет $DQ=t$, а ординатой $QM=u$, и тогда

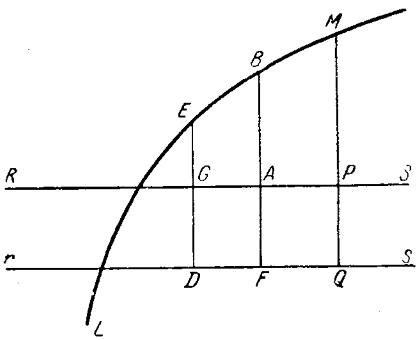

Рис. 8.

$$t=DF+FQ=f+x \quad \text{и} \quad u=PM+PQ=g+y,$$

откуда

$$x=t-f \quad \text{и} \quad y=u-g.$$

Поэтому если в заданном уравнении между x и y всюду поставить $t-f$ вместо x и $u-g$ вместо y, то получится уравнение между t и u, которое будет выражать природу той же самой кривой линии.

28. Так как, стало быть, величины f и g зависят от нашего выбора и, значит, могут быть определены бесконечным числом способов, можно составить бесконечно больше различных уравнений, чем в предыдущем случае, причем, однако, все они будут относиться к одной и той же кривой линии. Итак, если два уравнения, одно между x и y, а другое между t и u, отличаются друг от друга лишь тем, что одно из них переходит в другое, если координаты одного из них увеличить или уменьшить на любые заданные количества, то оба уравнения, хотя и отличаются друг от друга, все-таки представляют одну и ту же кривую линию. Стало быть, указанным путем легко можно составить бесконечно много различных уравнений, причем все они будут все-таки выражать природу одной и той же кривой линии.

29. Предположим (рис. 9), что новая ось rs нормальна к прежней RS и пересекает ее в начале абсцисс A, так что обе эти оси имеют одно и то же начало абсцисс A. Так как по отношению к оси RS задается уравнение кривой LM между абсциссой $AP=x$ и ординатой $PM=y$, опустим из точки M кривой на новую ось rs перпендикуляр MQ и обозначим новую абсциссу $AQ=t$ и новую ординату $QM=u$; тогда ввиду того, что $APMQ$ представляет собою прямоугольник, будем иметь $t=y$ и $u=x$. Таким образом, из заданного уравнения между x и y получится уравнение между t и u, если подставить u вместо x и t вместо y. Стало быть, прежняя абсцисса x превратится теперь в ординату $QM=u$, а прежняя ордината y превратится теперь в абсциссу $AQ=t$. Таким образом, и по отношению к новой оси не произойдет никаких изменений в уравнении, помимо того, что обе координаты x и y обменяются местами. В силу этого абсциссу и ординату обычно называют вместе координатами, не делая никакого различия, какую из них принять в качестве абсциссы или ординаты. Ибо если задано уравнение между двумя координатами x и y, то получится одна и та же кривая, будет ли принято для обозначения абсциссы x или y.

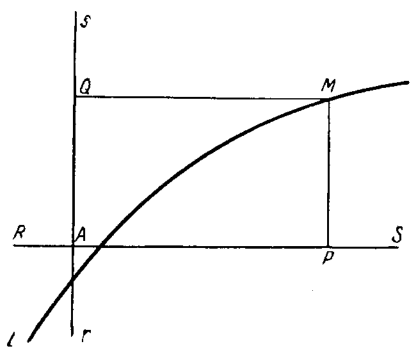

Рис. 9.

30. Мы предположили здесь, что часть As новой оси rs представляет положительные абсциссы и что по правую сторону от оси rs находится область положительных ординат. Так как выбор в данном случае является произвольным, мы можем его по желанию изменить. Следовательно, если часть Ar оси предназначена для положительных абсцисс, то будет $AQ=-t$, так что в уравнении между x и y надо будет вместо y поставить $-t$. Далее, если принять, что вправо от оси rs находится область отрицательных ординат, то получится $QM=-u$, и вместо x надо будет писать $-u$. Отсюда понятно, что природа кривой линии не изменится, если в уравнении между координатами обе координаты или же одну из них сделать отрицательными, — о чем следует помнить при всех преобразованиях уравнения.

31. Пусть теперь (рис. 10) новая ось rs пересекает прежнюю ось RS под каким угодно углом SAs и пусть пересечение происходит в начале абсцисс A, так что эта точка является началом абсцисс на той и другой оси. Итак, пусть дано относительно оси RS некоторое уравнение для кривой LM между абсциссой $AP = x$ и ординатой $PM = y$, из которого следует найти уравнение для той же кривой относительно новой оси rs, то есть, если из точки кривой M опустить перпендикуляр MQ на новую ось, — уравнение между новой абсциссой $AQ = t$ и ординатой $MQ = u$. Пусть угол $SAs = q$[1]), его синус $= m$ и косинус $= n$, так что если принять единицу в качестве полного синуса [8], то будет $m^2 + n^2 = 1$. Опустим из точки P перпендикуляры Pp и Pq на новые оси координат и тогда, поскольку $AP = x$, будем иметь

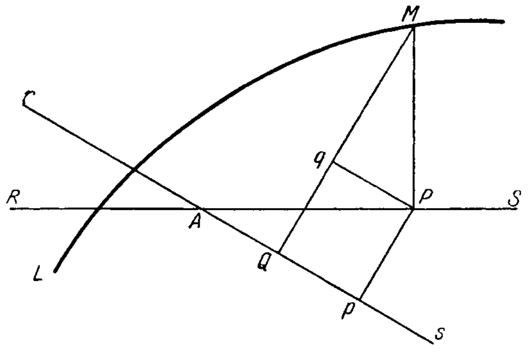

Рис. 10.

$$Pp = x \sin q, \qquad Ap = x \cos q;$$

затем, поскольку угол $PMQ = PAQ = q$, то, так как $PM = y$,

$$Pq = Qp = y \sin q, \qquad Mq = y \cos q.$$

Отсюда получится

$$AQ = t = Ap - Qp = x \cos q - y \sin q$$

и

$$QM = u = Pp + Mq = x \sin q + y \cos q.$$

32. Но так как $\sin q = m$, $\cos q = n$, то будет

$$t = nx - my \quad \text{и} \quad u = mx + ny,$$

а отсюда получается

$$nt + mu = n^2x + m^2x = x$$

и

$$nu - mt = n^2y + m^2x = y.$$

Таким образом, искомое уравнение между t и u будет найдено, если в предложенном уравнении между x и y повсюду вместо x написать $mu + nt$ и вместо y написать $nu - mt$, если только часть оси As содержит положительные абсциссы, а положительные ординаты приходятся на область QM. Мы предположили также здесь, что угол SAs приходится на область отрицательных ординат. А если бы As проходило выше AS, то при вычислении пришлось бы принять угол $SAs = q$ отрицательным и в силу этого считать и синус его m отрицательным.

33. Пусть теперь (рис. 11) новой оси rs придается какое угодно положение и на ней в качестве начала координат берется какая угодно

---

1) В соответствии с оригиналом буква q обозначает и угол, и точку на рис. 10. С подобными случаями читатель встретится и дальше.

точка D. Пусть RS представляет собою прежнюю ось, по отношению к которой имеется уравнение между абсциссой $AP = x$ и ординатой $PM = y$, выражающее природу кривой линии LM, и пусть, исходя из этого, требуется дать уравнение между другими координатами t и u, отнесенными к новой оси rs. Опустив из какой-либо точки M кривой линии перпендикуляр MQ на новую ось rs, обозначим абсциссу DQ через t и ординату QM через u. Для того чтобы найти уравнение между ними, из нового начала абсцисс D опустим перпендикуляр DG на прежнюю ось и положим $AG = f$, $DG = g$, а затем через

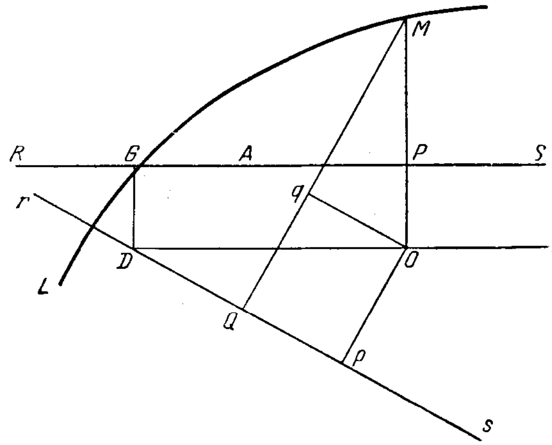

Рис. 11.

точку D проведем параллельную прежней оси RS линию DO, которую прежняя ордината PM, будучи продолжена, встретит в O, и тогда

$$MO = y + g \quad \text{и} \quad DO = GP = x + f.$$

Наконец, положим угол $ODQ = q$, и пусть его синус $= m$ и косинус $= n$, считая всегда полный синус равным 1 [8], так что будем иметь $m^2 + n^2 = 1$.

34. Теперь из точки O опустим как на новую ось DQ, так и на ординату MQ перпендикуляры Op и Oq. Ввиду того, что угол $OMQ = ODQ$ и $DO = x + f$, а $MO = y + g$, будет

$$Op = Qq = (x + f) \sin q = mx + mf$$

и

$$Dp = (x + f) \cos q = nx + nf.$$

Затем,

$$Oq = Qp = (y + q) \sin q = my + mq$$

и

$$Mq = (y + g) \cos q = ny + ng.$$

Итак, отсюда следует, что

$$DQ = t = nx + nf - my - mg$$

и

$$QM = u = mx + mf + ny + ng,$$

и этим путем по x и y будут определены новые координаты t и u. Действительно, из указанного получаем

$$nt + mu = x + f \quad \text{и} \quad nu - mt = y + g,$$

так как $m^2 + n^2 = 1$. Поэтому будем иметь

$$x = mu + nt - f \quad \text{и} \quad y = nu - mt - g.$$

Стало быть, если эти значения подставить вместо x и y в уравнение между x и y, то получится уравнение между t и u, которое будет выражать природу той же кривой линии LM.

35. Так как нельзя себе представить какой-либо оси rs, которая как бы ни была расположена в той же плоскости, что и кривая линия, однако не содержалась бы в этом последнем определении, то для одной и той же кривой LM не существует никакого уравнения между прямоугольными ее координатами, которое не содержалось бы в приведенном выше уравнении между t и u. А так как количества f и g и угол q, от которых зависят m и n, можно изменять бесконечным числом способов, то все уравнения, которые содержатся в уравнении между t и u, найденном вышеуказанным путем, выражают природу одной и той же линии. В силу этого приведенное выше уравнение между t и u обычно называют общим уравнением кривой линии LM, так как оно содержит в себе решительно все уравнения, которые относятся к одной и той же кривой линии.

36. Выше мы уже коснулись того, что на основании различия некоторых уравнений между координатами трудно судить, относятся ли эти уравнения к одной и той же кривой линии или же к различным кривым. Теперь, стало быть, выявляется путь для разрешения всех подобного рода вопросов. Действительно, пусть предложены два уравнения, одно между x и y, второе между t и u; положим в первом

$$x = mu + ut - f \quad \text{и} \quad y = nu - mt - g,$$

где m и n связаны между собою соотношением $m^2 + n^2 = 1$. После этого следует выяснить, содержится ли второе уравнение между t и u в том уравнении, которое было только что выведено, то есть не могут ли количества f, g вместе с m и n быть определены таким образом, чтобы получилось второе уравнение между t и u. Если это можно сделать, то оба [первоначальных] уравнения выражают одну и ту же кривую линию, если же нет, то они выражают различные линии.

ПРИМЕР

Указанным путем можно выявить, что следующие два уравнения:

$$y^2 - ax = 0$$

и

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0,$$

относятся к одной и той же кривой линии, хотя они сильно отличаются друг от друга. Действительно, если в первом уравнении мы положим

$$x = mu + nt - f \quad \text{и} \quad y = nu - mt - g,$$

то оно преобразуется в такое:

$$n^2u^2 - 2mntu + m^2t^2 - 2ngu + 2mgt + g^2 - mau - nat + af = 0.$$

Для того чтобы узнать, содержится ли в этом уравнении приведенное выше второе уравнение, умножим это уравнение на n^2, а вышеприведенное — на 16, дабы первые члены в обоих уравнениях совпали, и будем иметь

$$16n^2u^2 - 24n^2tu + 9n^2t^2 - 55n^2au + 10n^2at = 0$$

и

$$16n^2u^2 - 32mntu + 16m^2t^2 - 32ngu + 32mgt + 16g^2 - 16mau - 16at + 16af = 0.$$

Теперь выясним, сколько членов в этих уравнениях можно уравнять, определяя произвольные количества f, g, m и n. Прежде всего будем иметь [равенства] $24n^2 = 32mn$ и $9n^2 = 16m^2$, и любое из них дает $3n = 4m$, а в силу $m^2 = 1 - n^2$ будет также $25n^2 = 16$, откуда

$$n = \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad m = \frac{3}{5},$$

так что уже совпадут три члена. Четвертый и пятый члены дают

$$55n^2a = 32ng + 16ma \quad \text{и} \quad 10n^2a = 32mg - 16na,$$

и тут надо выяснить, получается ли для g одно и то же значение. Но первое [равенство] дает

$$g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a,$$

а из второго

$$g = \frac{5n^2a}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a,$$

стало быть, оба значения совпадают и уже пять членов находятся в согласии. Остается лишь, чтобы было $g^2 + af = 0$, что не вызывает никаких затруднений, так как f не было еще до сих пор определено; а именно получается $f = -a$. Таким образом, показано, что два предложенных уравнения представляют одну и ту же кривую линию.

37. Но хотя может случиться, что сильно отличающиеся друг от друга уравнения представляют одну и ту же линию, тем не менее зачастую только на основании различия между уравнениями с уверенностью заключаем о различии кривых линий. Это случается, когда предложенные уравнения принадлежат к различным порядкам, то есть когда в них наивысшие степени, образуемые координатами x и y, или t и u, различны; ибо в этом случае кривые линии, которые выражаются этими уравнениями, определенно будут различными. Ведь какого бы порядка ни было уравнение между x и y, если положить

$$x = mu + nt - f \quad \text{и} \quad y = nu - mt - g,$$

то в результате получится уравнение между t и u такого же порядка. Поэтому если другое предложенное уравнение между t и u принадлежит к другому порядку, то оно указывает и на другую кривую линию.

38. Таким образом, когда два уравнения, одно между x и y, а другое между t и u, не одного и того же порядка, надо сразу прийти к заключению, что кривые линии, выражаемые этими уравнениями, различны. Стало быть, сомнение может иметь место лишь в том случае, когда оба эти уравнения будут одного и того же порядка, и только в этих случаях надлежит прибегать к исследованию, которое было изложено выше. Но так как это исследование оказывается весьма утомительным, когда уравнения относятся к какому-либо более высокому порядку, ниже будут изложены более удобные правила, с помощью которых можно будет сразу выявить различие между кривыми.

39. Те указания, которые были даны для нахождения общего уравнения для любой кривой линии, можно применить и к прямой линии. Действительно, пусть вместо кривой линии имеется прямая линия LM (рис. 12), которую мы предполагаем параллельной оси RS. Поэтому, где бы мы ни взяли начало абсцисс A, ордината PM будет всегда иметь постоянную величину, т. е. $y=a$; последнее, стало быть, представляет уравнение для прямой линии, параллельной оси. Найдем теперь общее уравнение для прямой линии, отнесенное к любой оси rs. Если положить $DG=g$, синус угла $ODs=m$, а косинус $=n$ и обозначить абсциссу $DQ=t$ и ординату $MQ=u$ и так как

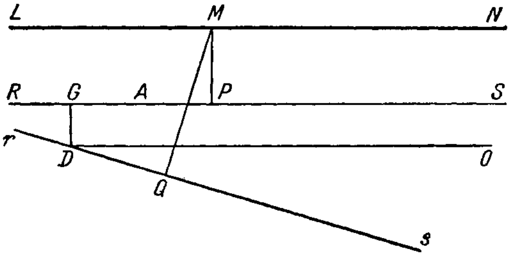

Рис. 12.

$$y=nu-mt-g,$$

то

$$nu-mt-g-a=0$$

и будет общим уравнением прямой линии. Умножим последнее на постоянное k и положим $nk=\alpha$, $mk=-\beta$ и $(g+a)k=-b$. Тогда получится уравнение

$$\alpha u+\beta t+b=0$$

для прямой линии. Так как последнее представляет собою общее уравнение первого порядка между t и u, то ясно, что всякое уравнение первого порядка между двумя координатами представляет только прямую линию, а вовсе не кривую [9].

40. Таким образом, всякий раз, когда между координатами x и y получается такого рода уравнение

$$\alpha x+\beta y-a=0,$$

последнее даст прямую линию, положение которой (рис. 13) относительно оси RS определится следующим образом. Прежде всего положим $y=0$, и этим путем будет найдена на оси точка C, в которой эта прямая пересекает ось, ибо ведь $AC=\frac{a}{\alpha}$. Далее положим $x=0$; тогда получится $y=\frac{a}{\beta}$, что представляет собою значение ординаты AB в начале абсцисс. Так как, стало быть, имеются две точки B и C на искомой прямой, то последняя будет определена и, следовательно, прямая линия LM будет удовлетворять рассматриваемому уравнению. Действительно, если допустить, что какая-нибудь абсцисса $AP=x$ и соответствующая ей ордината $MP=y$, то вследствие подобия треугольников CPM и CAB будет

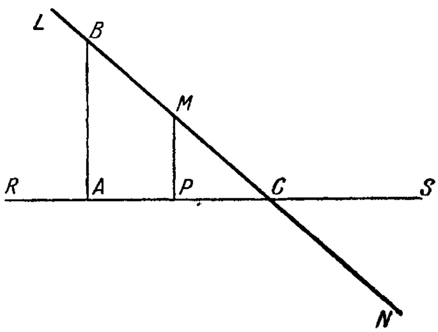

Рис. 13.

$$CP:PM=CA:AB,$$

то есть

$$\left(\frac{a}{\alpha}-x\right):y=\frac{a}{\alpha}:\frac{a}{\beta},$$

откуда получается

$$\frac{ay}{\alpha}=\frac{aa}{\alpha\beta}-\frac{ax}{\beta}$$

или

$$\alpha x+\beta y=a,$$

что и представляет собою предложенное уравнение.

41. Если α или $\beta=0$, то это построение не может быть использовано, но эти случаи сами по себе очень легки. Действительно, пусть $\alpha=0$ и $y=a$; отсюда ясно, что линией, удовлетворяющей [уравнению], является прямая, параллельная оси и отстоящая от нее на расстоянии $=a$. Если же и $a=0$, то есть $y=0$, то линия, удовлетворяющая [уравнению], сольется с осью. Но если будет $\beta=0$ и $x=a$, то очевидно, что линией, удовлетворяющей этим условиям, будет прямая, перпендикулярная к оси, которая находится на расстоянии a от начала абсцисс. Это значит, что в данном случае всем ординатам соответствует единственная абсцисса, так что абсцисса перестает здесь быть переменным количеством. Таким образом, из изложенного вполне ясно, как прямые линии могут быть определены с помощью уравнений между прямоугольными координатами.

42. До сих пор мы предполагали, что координаты, с помощью которых определяется природа линий, взаимно перпендикулярны, но подобным же образом можно определить кривую линию по заданному уравнению, когда ординаты наклонены к оси под каким угодно углом. Следовательно, и обратно, природу кривой линии можно выразить с помощью уравнения между двумя косоугольными координатами и можно изменять эти уравнения бесконечными способами, изменяя как ось, так и начало абсцисс, причем кривая линия не изменится [10]. Этим путем можно получить общее уравнение кривой линии для любого угла наклона между координатами. Но если допустить, что и угол наклона берется то один, то другой, то уравнение кривой будет гораздо большего охвата, и мы назовем его наиболее общим, так как оно будет выражать природу кривой не только с помощью уравнения, отнесенного к любой оси и любому началу абсцисс, но также для любого угла наклона между координатами. Стало быть, это наиболее общее уравнение переходит в общее уравнение, когда угол, образуемый координатами, полагаем прямым.

43. Пусть дано (рис. 14) для кривой линии LM уравнение между прямоугольными координатами, а именно между $AP=x$ и $PM=y$, и требуется найти, сохраняя неизменными ось RS и начало абсцисс A, уравнение между координатами, образующими друг с другом заданный угол, который пусть $=\varphi$. Проведем, стало быть, из точки M к оси RS прямую линию MQ под этим заданным углом MQA, синус которого пусть $=\mu$, а косинус $=\nu$. Таким образом, AQ будет новой абсциссой и MQ новой ординатой. Следовательно, если положить $AQ=t$ и $QM=u$, то в прямоугольном треугольнике PMQ будет

$$\frac{y}{u}=\mu \quad \text{и} \quad \frac{PQ}{u}=\nu=\frac{t-x}{u}.$$

Отсюда получается

$$u=\frac{y}{\mu} \quad \text{и} \quad t=\nu u+x=\frac{\nu y}{\mu}+x$$

и, обратно,

$$y=\mu u \quad \text{и} \quad x=t-\nu u.$$

Следовательно, если в предложенном уравнении между x и y положить $x=t-\nu u$ и $y=\mu u$, то получится уравнение между косоугольными координатами t и u, образующими друг с другом заданный угол φ.

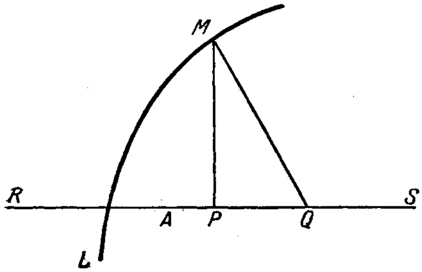

Рис. 14.

44. А если для кривой линии LM будет дано уравнение между косоугольными координатами AQ и QM, то из него можно будет обратно получить уравнение для той же кривой линии между прямоугольными координатами AP и PM. Действительно, пусть φ — угол, образуемый ординатами MQ и абсциссами AQ, и пусть синус его $=\mu$ и косинус $=\nu$, и пусть дано уравнение между $AQ=t$ и $QM=u$. Проведем из точки M под прямым углом к оси ординату MP и положим абсциссу $AP=x$ и ординату $MP=y$; так как

$$u=\frac{y}{\mu} \quad \text{и} \quad t=\frac{\nu y}{\mu}+x,$$

то, если эти значения подставить в предложенное уравнение между t и u, оно даст уравнение между x и y, которое требовалось найти.

45. Если теперь дано уравнение между прямоугольными координатами (рис. 15) $AP=x$ и $PM=y$ для кривой LM, то следующим путем можно найти наиболее общее уравнение для той же кривой линии. Возьмем некоторую прямую линию rs в качестве оси и на ней точку D в качестве начала координат. Ординаты MT, проведенные к этой оси, пусть образуют с последней угол $DTM=\varphi$, синус которого пусть $=\mu$ и косинус $=\nu$. Следовательно, мы будем иметь новую абсциссу DT и новую ординату TM,

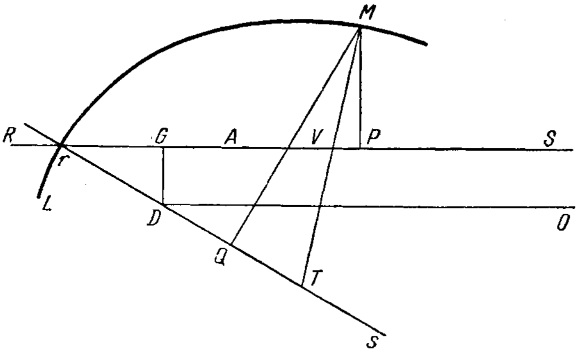

Рис. 15.

уравнение между которыми требуется найти. Проведем из точки D на прежнюю ось RS перпендикуляр DG, и пусть $AG=f$, $DG=g$. Проведем линию DO параллельно оси RS, и пусть синус угла $ODs=m$, косинус $=n$. Проведем, как мы делали раньше, из точки M к новой оси rs перпендикуляр MQ и положим $DQ=t$, $QM=u$, а косоугольными координатами будут $DT=r$, $TM=s$.

Следовательно, будем иметь, во-первых,

$$t = r - \nu s \quad \text{и} \quad u = \mu s;$$

затем, конечно,

$$x = mu + nt - f \quad \text{и} \quad y = nu - mt - g.$$

Отсюда получается

$$x = nr - (n\nu - m\mu) s - f \quad \text{и} \quad y = -mr + (\mu n + \nu m) s - g,$$

где $n\nu - m\mu$ является косинусом угла AVM, который образуют новые ординаты с прежней осью RS, а $\mu n + \nu m$ представляет собою синус того же угла AVM. Следовательно, если в уравнении между x и y подставить вместо x и y найденные для них значения, получится уравнение между косоугольными координатами r и s, которое будет наиболее общим уравнением для кривой линии LM.

46. Так как в тех значениях, которые подставляются вместо x и y, новые переменные r и s входят в первом измерении, то ясно, что наиболее общее уравнение будет того же самого порядка, какой имело предложенное уравнение между x и y. Стало быть, как бы ни преобразовывалось уравнение одной и той же кривой линии, как путем любого изменения оси и начала абсцисс, так и путем изменения взаимного наклона координат, уравнение все-таки останется уравнением того же порядка. Следовательно, хотя уравнение между координатами, прямоугольными или косоугольными, можно преобразовывать бесчисленными способами, так что оно будет относиться к одной и той же кривой линии, тем не менее его невозможно ни поднять до более высокой степени, ни спустить до более низкой. По этой то причине уравнения различного порядка, каким бы сходством они ни обладали в остальном, все-таки всегда будут представлять различные кривые линии.

ГЛАВА III

О РАЗДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ЛИНИЙ НА ПОРЯДКИ

47. Так как разнообразие кривых линий, равно как и функций, бесконечно, то их совершенно нельзя было бы изучить, если бы бесконечное их множество не было разбито на определенные классы и если бы наш ум не получал таким образом направление и помощь при их исследовании. Правда, мы разделили уже кривые линии на *алгебраические* и *трансцендентные*, но каждый из этих классов вследствие бесконечного разнообразия кривых требует дальнейшего подразделения. Однако мы рассмотрим здесь лишь *алгебраические* кривые и обсудим, каким образом будет удобнее всего разделить их на классы. Стало быть, надо будет прежде всего определить те признаки, по которым будет определяться различие классов, с тем, чтобы кривые, обладающие одинаковыми признаками, отнести к одному и тому же классу, а кривые с различными признаками отнести к различным классам.

48. Но признаки, которые отличают одни классы от других, могут быть выведены лишь из тех функций или уравнений, в которых содержится природа кривых линий, как потому, что до сих пор перед нами не было какого-либо иного пути для изучения кривых, так и потому, что никакой иной известный путь не может быть применен ко всем алгебраическим линиям. Однако функции и уравнения между двумя координатами можно разделить на различные виды многими путями, как мы это сделали в предыдущей книге. И прежде всего, конечно, здесь нам представляется многозначность функций, что кажется наиболее подходящим для разделения кривых линий на классы. Отсюда возникает такого рода деление, что кривые линии, которые получаются из однозначных функций, относятся к первому роду; те, которые получаются из двузначных функций, — ко второму роду; те, которые получаются из трехзначных функций, — к третьему роду и так далее.

49. Но хотя указанное выше разделение представляется естественным, однако при более внимательном рассмотрении оно оказывается весьма мало соответствующим природе кривых линий и их свойствам. Ведь многозначность функций зависит в значительной мере от положения оси, которое является произвольным, так что если при одной оси ордината будет однозначной функцией абсциссы, то при другой оси она же может оказаться

многозначной функцией. Стало быть, при этих условиях одна и та же кривая линия может оказаться принадлежащей к различным родам, что не соответствует установке. Так, например, кривая линия, которая выражается уравнением $a^3y=a^2x^2-x^4$, принадлежала бы к первому роду, так как ордината y является однозначной функцией от x. А если переставить координаты, то есть взять ось, перпендикулярную к прежней, то та же кривая выразится с помощью уравнения $y^4-a^2y^2+a^3x=0$ и, следовательно, будет принадлежать к четвертому роду. Итак, по этой причине нельзя принять многозначность функций в качестве признака, по которому кривые линии разделяются на классы.

50. Столь же мало может дать для установления признака различия кривых линий простота уравнений, выражающих их природу (количество членов этих уравнений). Действительно, если отнести к первому роду те кривые, уравнение которых состоит из двух членов, как $y^m=\alpha x^n=0$, ко второму роду — кривые, уравнение которых состоит из трех членов, как $\alpha y^m+\beta y^p x^q+\gamma x^n=0$, и т. д., то ясно, что одна и та же линия может оказаться принадлежащей ко многим родам. Действительно, приведенную в примере § 36 кривую линию, содержащуюся в уравнении $y^2-ax=0$, можно было бы отнести одновременно к первому роду и к четвертому, так как после изменения оси она выражается также следующим уравнением:

$$16u^2-24tu+9t^2-55au+10at=0.$$

А избрав иную ось и иное начало абсцисс, можно было бы также прийти ко второму роду, третьему и пятому. В силу этого указанное деление совершенно нельзя применять.

51. Изложенных выше неудобств можно избежать, если для распределения кривых по классам применить порядки уравнений, выражающих зависимость между координатами. Так как у одной и той же кривой, как бы ни изменялись ось и начало абсцисс, а равно угол наклона координат, уравнение всегда остается одного и того же порядка, то одна и та же кривая линия уже не будет отнесена к различным классам. Следовательно, если принять в качестве признака число измерений, которые образуют в уравнении координаты, прямоугольные или же косоугольные, то ни изменение оси или начала абсцисс, ни изменение наклона координат уже не нарушат структуру классов. Одна и та же кривая линия, будет ли для нее взято какое-либо частное уравнение между координатами, или же общее уравнение, или даже наиболее общее,—всегда будет причислена к одному и тому же классу. В силу этого признак различения кривых линий будет удобнее всего построить на порядке уравнений.

52. Так как мы назвали порядками различные роды уравнений, которые получаются при данном числе измерений, то мы будем именовать порядками и различные виды кривых линий, которые при этом возникают. Стало быть, так как общим уравнением первого порядка является

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y,$$

то все кривые линии, которые получаются из этого уравнения, если принять x и y в качестве координат, будь то прямоугольные или косоугольные, мы отнесем к первому порядку. Но выше мы видели, что в таком уравнении содержится лишь прямая линия, а поэтому первый порядок содержит в себе только прямую линию, которая, конечно, является простейшей среди всех линий. А так как наименование кривой не подходит для этого первого порядка, то будем называть эти порядки не порядками *кривых линий*, а более широким словом: порядками просто *линий*. Стало быть, первый порядок линий не содержит в себе никакой кривой линии, но исчерпывается одной лишь прямой линией.

53. При этом, однако, безразлично, берутся ли прямоугольные координаты или косоугольные. Действительно, если ординаты образуют с осью угол φ, синус которого пусть будет μ и косинус ν, то уравнение можно привести к прямоугольным координатам, положив

$$y=\frac{u}{\mu} \quad \text{и} \quad x=\frac{\nu u}{\mu}+t,$$

в результате чего получается следующее уравнение между прямоугольными координатами t и u:

$$0=\alpha+\beta t+\left(\frac{\beta\nu}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}\right)u.$$

Ввиду того, что охват этого уравнения не меньше предыдущего, так как оба они являются общими уравнениями, ясно, что смысл этого уравнения не сузится и в том случае, если принять, что угол, образуемый ординатами с осью, прямой. То же самое будет и с общими уравнениями следующих порядков, которые будут обладать не меньшим охватом, хотя бы были приняты прямоугольные координаты. Так как, стало быть, общее уравнение любого порядка не теряет ничего в своем охвате в результате принятия определенного наклона ординат к оси, то мы не ограничим его смысла, если примем прямоугольные координаты. Ибо, какая бы кривая линия ни содержалась в общем уравнении любого порядка, когда берут косоугольные координаты, эта же кривая линия будет содержаться в том же уравнении, когда будут приняты прямоугольные координаты.

54. Далее, все линии второго порядка будут содержаться в следующем общем уравнении второго порядка:

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2.$$

Значит, все кривые линии, которые содержатся в этом уравнении, где буквами x и y обозначены прямоугольные координаты, мы причисляем ко второму порядку линий. Стало быть, эти кривые линии являются простейшими, так как в первом порядке линий не содержится никаких кривых линий, и поэтому некоторые называют их кривыми линиями первого порядка. Но кривые линии, содержащиеся в приведенном выше уравнении, широко известны под названием *конических сечений*, так как все они получаются в результате сечения конуса. Различными видами этих линий являются *круг*, *эллипс*, *парабола* и *гипербола*, которые мы ниже выведем из общего уравнения.

55. Далее, к линиям третьего порядка относят все кривые линии, которые получаются из следующего общего уравнения третьего порядка:

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^2+\vartheta x^2y+\iota xy^2+\varkappa y^3,$$

где x и y приняты в качестве прямоугольных координат, ибо условие косоугольности ординат, как мы уже отметили выше, не сообщает этому уравнению более широкого смысла. Так как в этом уравнении имеется гораздо больше постоянных букв, которые могут быть произвольно определены, чем в предшествующем, то в нем содержится и гораздо большее количество различных видов кривых, перечисление которых дал Ньютон [11].

56. К четвертому порядку линий относятся все кривые линии, которые получаются из следующего общего уравнения четвертого порядка:

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\vartheta x^2y+\iota xy^2+$$
$$+\varkappa y^3+\lambda x^4+\mu x^3y+\nu x^2y^2+\xi xy^3+o y^4,$$

где x и y приняты в качестве прямоугольных координат, так как косоугольность координат не сообщает уравнению большей общности. Таким образом, в рассматриваемом уравнении имеется пятнадцать постоянных количеств, которым можно сообщить произвольные значения, вследствие чего среди линий этого порядка встречается гораздо большее разнообразие видов кривых, чем в предыдущем случае. Эти линии четвертого порядка обычно называют также кривыми линиями третьего порядка, так как второй порядок линий принято считать первым порядком для кривых линий. Подобно этому линии третьего порядка совпадают с кривыми линиями второго порядка [12].

57. Из вышесказанного уже ясно, какие кривые линии относятся к пятому порядку, к шестому, седьмому и дальнейшим порядкам. Общее уравнение, в которое входят все линии пятого порядка, вследствие того, что к общему уравнению четвертого порядка прибавляются еще члены с

$$x^5,\quad x^4y,\quad x^3y^2,\quad x^2y^3,\quad xy^6,\quad y^5,$$

будет состоять всего из двадцати одного члена, а общее уравнение, содержащее в себе все линии шестого порядка, будет иметь двадцать восемь членов, и так далее, согласно закону треугольных чисел [13]. Следовательно, общее уравнение для линии n-го порядка будет содержать $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$ членов и, стало быть, в него войдет столько же постоянных букв, которые можно определить по произволу.

58. Однако не любое изменение в определении постоянных букв создает различные кривые линии; ведь в предшествующей главе мы видели, что, изменяя ось и начало абсцисс, можно для одной и той же кривой линии получить бесконечно много различных уравнений. Таким образом, из различия уравнений, принадлежащих к одному и тому же порядку, не следует еще различие кривых, представляемых этими уравнениями. Поэтому при перечислении родов и видов, относящихся к одному и тому же порядку, которое выводится из общего уравнения, следует быть весьма осторожным, дабы не отнести одну и ту же кривую к двум или к большему числу видов.

59. Итак, поскольку порядок кривой линии устанавливается на основании порядка уравнения, которое дается между координатами, то всякое предложенное алгебраическое уравнение между координатами x и y тотчас же покажет, к какому порядку следует отнести кривую линию, представленную этим уравнением. Следовательно, прежде всего уравнение надлежит освободить от иррациональности, если оно иррациональное, а затем, если в нем имеются дроби, освободиться от дробей; после того как это

будет выполнено, наибольшее число измерений, которое образуют в уравнении переменные x и y, покажет порядок, к которому принадлежит данная кривая линия. Так, кривая линия, которую дает уравнение $y^2 - ax = 0$, будет линией второго порядка; а кривая линия, содержащаяся в уравнении $y^2 = x\sqrt{a^2 - x^2}$ (которое после освобождения от иррациональности станет четвертого порядка), будет линией четвертого порядка. Кривая же линия, которую дает уравнение $y = \frac{a^3 - ax^2}{a^2 + x^2}$, будет третьего порядка, так как это уравнение после освобождения от дробей принимает вид $a^2y + x^2y - a^3 = ax^2$ и в нем член x^2y имеет три измерения.

60. Но в одном и том же уравнении может содержаться много различных кривых линий в зависимости от того, каким образом, согласно допущению, ординаты встречают ось: под прямым углом или под заданным косым углом. Так, уравнение $y^2 = a^2 - x^2$, если координаты предполагаются прямоугольными, дает окружность; если же принято, что координаты являются косоугольными, то кривая будет эллипсом. Тем не менее все эти различные кривые линии принадлежат к одному и тому же порядку, так как вследствие замены косоугольных координат прямоугольными порядок кривой не изменяется. Таким образом, хотя величина угла, который ординаты образуют с осью, не расширяет и не сужает общности уравнения для кривых линий каждого порядка, тем не менее предложенное частное уравнение не определяет содержащейся в нем кривой линии, если не указан угол, который образуют между собою координаты.

61. Для того чтобы кривая линия принадлежала именно к тому порядку, на который указывает уравнение, необходимо, чтобы уравнение не могло быть разложено на рациональные множители. Ибо если это уравнение содержит два или большее число сомножителей, то оно включает в себя два или большее число уравнений, из которых любое порождает особую кривую линию, и [только] все они, взятые вместе, исчерпывают содержание предложенного уравнения. Стало быть, такого рода уравнения, которые разлагаются на множители, содержат в себе не одну, а несколько непрерывных кривых, из которых каждая может быть представлена особым уравнением и которые связаны между собой лишь тем, что их уравнения умножены друг на друга. Так как эта связь зависит от нашего произвола, то нельзя считать, что этого рода кривые линии образуют единую непрерывную линию. Таким образом, те уравнения, которые мы выше назвали составными, дают не непрерывные кривые линии, а линии, составленные из непрерывных; в силу этого будем называть их составными.

62. Например, уравнение $y^2 = ay + xy - ax$, которое выглядит так, как если бы оно относилось к линии второго порядка, после приведения к нулю, $y^2 - ay - xy + ax = 0$, будет состоять из двух множителей $(y - x)(y - a) = 0$. Таким образом, оно заключает в себе такие два уравнения:

$$y - x = 0 \quad \text{и} \quad y - a = 0,$$

из которых каждое представляет собою уравнение для прямой линии, а именно: первая из них образует с осью в начале координат полупрямой[1]) угол, а вторая параллельна оси и проходит на расстоянии $= a$ от нее. Таким образом, обе эти линии, рассматриваемые вместе, содержатся

[1]) То есть равный 45°.

в предложенном уравнении

$$y^2 = ay + xy - ax.$$

Точно так же составным будет следующее уравнение:

$$y^4 - xy^3 - a^2x^2 - ay^3 + ax^2y + a^2xy = 0,$$

и поэтому оно не будет представлять непрерывной линии четвертого порядка. Действительно, так как оно состоит из множителей: $(y-x)(y-a)(y^2-ax)$, то оно содержит три отдельные линии, а именно две прямые и одну кривую, содержащуюся в уравнении $y^2-ax=0$.

63. Таким образом, можно по желанию создавать любые составные линии, которые будут содержать в себе две или большее число линий, прямых или кривых, имеющих любую форму. Действительно, если природа каждой линии выражена с помощью уравнения, отнесенного к одной и той же оси и к одному и тому же началу координат, и если после приведения каждого из этих уравнений к нулю их все перемножить, то получится составное уравнение, в котором одновременно будут содержаться все рассматриваемые линии.

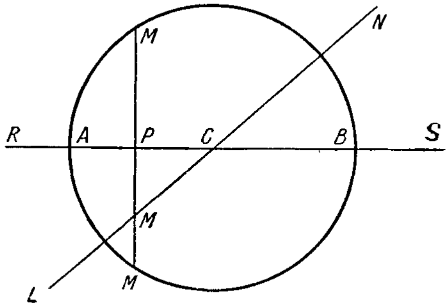

Рис. 16.

Так (рис 16), если из центра C радиусом $CA = a$ описать окружность и, кроме того, провести через центр C прямую линию LN, то можно будет относительно какой угодно оси найти уравнение, которое одновременно будет включать в себя окружность и прямую линию, как если бы обе они образовывали одну линию.

64. Примем диаметр AB, который составляет с прямой линией LN полупрямой угол, за ось x, а за начало абсцисс — точку A и обозначим абсциссу $AP = x$ и ординату $PM = y$; тогда получим для прямой линии $PM = CP = a - x$, и так как точка M прямой оказывается в области отрицательных ординат, то будет $y = -a + x$ или $y - x + a = 0$. А для круга мы будем иметь $PM^2 = AP \cdot PB$ и $BP = 2a - x$, что дает $y^2 = 2ax - x^2$ или $y^2 + x^2 - 2ax = 0$. Умножим теперь оба эти уравнения друг на друга и тогда получим составное уравнение третьего порядка

$$y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + ay^2 - 2axy + 3ax^2 - 2a^2x = 0,$$

которое будет содержать в себе одновременно окружность и прямую линию. Окажется, что абсциссе $AP = x$ соответствуют три ординаты: две из них для окружности и одна для прямой линии. Пусть, например, $x = \frac{1}{2}a$; тогда

$$y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}a^2y - \frac{3}{8}a^3 = 0,$$

откуда сначала получается $y + \frac{1}{2}a = 0$, а затем после деления на этот корень получается $y^2 - \frac{3}{4}a^2 = 0$, и, таким образом, тремя значениями y будут:

$$\text{I. } y = -\frac{1}{2}a, \qquad \text{II. } y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}, \qquad \text{III. } y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Итак, все это представлено в уравнении в таком виде, как если бы круг составлял одну непрерывную линию с прямой LN.

65. После того как указано различие между несоставными линиями и составными, очевидно, что линии второго порядка бывают либо непрерывными линиями, либо составными, образовавшимися из двух прямых. Ибо если общее уравнение имеет сомножители, то они будут первого порядка и, стало быть, будут обозначать прямые линии. Линии третьего порядка будут либо несоставными, либо составными, образовавшимися из одной прямой линии и одной линии второго порядка или из трех прямых линий. Далее, линии четвертого порядка будут либо непрерывными, т. е. несоставными, либо будут состоять из одной прямой линии и одной линии третьего порядка, либо они будут состоять из двух линий второго порядка, либо из одной линии второго порядка и из двух прямых, либо, наконец, из четырех прямых линий. Аналогичен учет составных частей у линий пятого и более высоких порядков, и его можно осуществить путем такого же исчисления. Из изложенного ясно, что линии любого порядка содержат в себе все линии низших порядков, но не просто, а могут содержать в себе какую-нибудь составную линию низшего порядка вместе с прямой линией или с прямыми линиями, или же с линиями второго, третьего и следующих порядков, но при этом так, что если взять сумму показателей всех порядков отдельных линий, входящих в состав рассматриваемой линии, то получится число, которое показывает порядок составной линии.

ГЛАВА IV

ОБ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНИЙ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

66. При изучении основных свойств линий любого порядка первое место занимает вопрос об их пересечениях с прямой линией, то есть о числе пересечений, какое может иметь прямая линия с линиями того или иного порядка. Так как линия первого порядка, т. е. прямая, может быть пересечена другой прямой лишь в одной точке, а кривые линии могут быть пересечены прямой линией во многих точках, то вполне естественно поставить вопрос, во скольких точках кривая линия каждого порядка может быть пересечена произвольно проведенной прямой. Уже разрешение одного этого вопроса поможет лучше узнать природу кривых линий, относящихся к различным порядкам. При этом выявляется, что линия второго порядка не может быть пересечена прямой более чем в двух точках, кривая же третьего порядка не может быть пересечена прямой более чем в трех точках, и так далее.

67. Выше мы уже упомянули о способе, пользуясь которым можно определить, в скольких точках ось какой-нибудь кривой пересекается самой этой кривой. А именно, если дано уравнение между абсциссой x и ординатой y, то, так как там, где точка кривой попадает на ось, ордината y становится равной 0, положим в уравнении $y=0$, и тогда полученное уравнение, которое будет содержать лишь x, укажет те значения x и, стало быть, те точки оси, где кривая ее пересекает. Так, если в найденном нами выше уравнении окружности $y^2=2ax-x^2$ мы положим $y=0$, то будем иметь $0=2ax-x^2$, откуда получается два значения x: $x=0$ и $x=2a$, которые показывают, что ось RS пересекается окружностью прежде всего в начале абсцисс A, а затем, конечно, еще в точке B, причем $AB=2a$. Подобным же образом и для других кривых линий, если положить в уравнении $y=0$, то корни x укажут места пересечения кривой с осью.

68. Так как в общем уравнении всякой кривой линии роль оси играет любая прямая, то если в общем уравнении положить ординату $y=0$, оставшееся уравнение покажет, в скольких точках эта кривая линия пересекается какой-либо прямой. Оно будет представлять собою уравнение, которое будет содержать только неизвестное x и корни которого покажут пересечения кривой с осью. Таким образом, количество пересечений будет зависеть от высшей степени x в уравнении и, стало быть, оно не может

превысить показателя этой высшей степени. Следовательно, пересечений будет столько, сколько единиц содержит в себе показатель высшей степени x, если все корни уравнения являются действительными; если же некоторые корни окажутся мнимыми, то количество пересечений, соответственно, уменьшится.

69. Стало быть, так как мы дали для каждого порядка линий наиболее общие уравнения, то с их помощью, пользуясь указанным способом, мы в состоянии узнать, в скольких точках линии любого порядка могут быть пересечены какой-либо прямой. Возьмем, значит, общее уравнение для линий первого порядка, т. е. для прямой линии,

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y,$$

из которого, если положить $y=0$, получается $0=\alpha+\beta x$, а это уравнение не может иметь больше одного корня, откуда следует, что прямая линия пересекается другой прямой лишь в одной точке. Но если будет $\beta=0$, то невозможное равенство $0=\alpha$ покажет, что в этом случае прямая линия нигде не пересекает оси. Действительно, в этом случае обе прямые параллельны друг другу, как это следует из уравнения $0=\alpha+\gamma y$, которое получается, когда $\beta=0$.

70. Если в общем уравнении для линий второго порядка

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2$$

положить $y=0$, то получится уравнение

$$0=\alpha+\beta x+\delta x^2,$$

которое имеет либо два действительных корня, либо ни одного корня или даже один, если $\delta=0$. Поэтому линия второго порядка пересекается прямой линией либо в двух точках, либо в одной, либо нигде. Все эти случаи можно свести к одному, если мы скажем, что линия второго порядка не может быть пересечена прямой линией более чем в двух точках.

71. Если в общем уравнении для линий третьего порядка мы положим $y=0$, то получится уравнение

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3.$$

Так как это уравнение не может иметь больше трех корней, то ясно, что линии третьего порядка не могут быть пересечены прямой линией более чем в трех точках. Но может случиться, что линия третьего порядка будет пересекаться прямой линией в меньшем количестве точек, а именно, либо в двух точках, если будет $\delta=0$ и если оба корня уравнения $0=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ будут действительными, либо в одной точке, если оба корня приведенного выше уравнения окажутся мнимыми или же если будет и $\delta=0$ и $\gamma=0$, либо, наконец, ни в одной точке, если будет $\delta=0$, а остальные два корня уравнения окажутся мнимыми, что может также случиться, когда β, γ и δ окажутся равными нулю, а α окажется количеством, не равным нулю.

72. Аналогичным путем выясняем, что линии четвертого порядка могут быть пересечены прямой не более чем в четырех точках, и это свойство можно распространить на линии всех порядков таким образом, что линии порядка n не могут быть пересечены прямой более чем в n точках.

Конечно, отсюда не следует, что всякая линия порядка n пересекается любой прямой линией в n точках, и может случиться, что число пересечений окажется меньшим или что их даже совсем не будет, как мы уже отметили по отношению к линиям второго и третьего порядков. Таким образом, смысл данного положения заключается лишь в том, что число пересечений никогда не может превысить показателя порядка, к которому относится рассматриваемая кривая линия.

73. Таким образом, на основании числа пересечений, которое имеет какая-либо прямая с заданной кривой линией, нельзя определить порядок, к которому принадлежит кривая линия. Ибо если число пересечений составляет n, то отсюда не следует, что рассматриваемая кривая принадлежит к линиям n-го порядка: она может одинаково принадлежать к линиям какого-нибудь более высокого порядка. А может даже случиться, что рассматриваемая кривая не алгебраическая, а трансцендентная. Но можно всегда с уверенностью утверждать, что кривая, которая пересекается прямой линией в n точках, не может принадлежать к какому-либо более низкому, чем n, порядку линий. Так, если предложенная кривая линия пересекается прямой в четырех точках, то достоверно, что она не принадлежит ни ко второму, ни к третьему порядку. Но принадлежит ли она к четвертому или какому-либо более высокому порядку или же она является трансцендентной, выяснить на таком основании невозможно.

74. Общие уравнения, которые мы дали для линий каждого порядка, содержат в себе много произвольных постоянных количеств, и если последним приписать определенные значения, то кривые линии вполне определятся и их можно будет начертить при заданной оси, так что все прочие кривые линии, хотя бы они и содержались в том же общем уравнении, окажутся исключенными. Так, например, хотя в уравнении первого порядка $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ содержится только прямая линия, тем не менее ее положение относительно оси можно варьировать бесчисленными способами для различных бесчисленных значений постоянных количеств α, β, γ. Но как только этим постоянным количествам приданы определенные значения, положение прямой линии определено так, что, помимо этой линии, никакая другая уже не может удовлетворить уравнению.

75. Таким образом, уравнение $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ допускает как будто три определения[1]) ввиду наличия трех произвольных постоянных α, β и γ. Но из природы уравнений можно понять, что уравнение уже определено, если задано лишь отношение между этими постоянными, т. е. отношение двух из них к третьему. В силу этого указанное выше уравнение допускает лишь два определения. Действительно, если определить β и γ через α таким образом, чтобы было $\beta = -\alpha$ и $\gamma = 2\alpha$, то уравнение $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, ввиду того, что в результате сокращения α выпадает, окажется вполне определенным. На том же основании общее уравнение для линий второго порядка, содержащее в себе шесть произвольных постоянных, допускает лишь пять определений; общее уравнение для линий третьего порядка допускает девять определений, и вообще общее уравнение для линий порядка n допускает $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ определений.

[1]) Определение (determinatio) — в смысле выполнения какого-нибудь наложенного условия.

76. Но всегда эти произвольные постоянные можно определить таким образом, чтобы кривая линия прошла через заданную точку, и этим путем будет получено одно определение. Действительно, пусть предложено общее уравнение для линий какого-нибудь порядка, которое должно быть определено таким образом, чтобы кривая линия (рис. 17) проходила через заданную точку B. Взяв произвольно какую-либо ось и на ней начало абсцисс A, опустим из точки B на ось перпендикуляр Bb, и тогда очевидно, что если кривая проходит через точку B и если в качестве x примем отрезок Ab, то перпендикуляр Bb даст значение ординаты y. Поэтому в предложенном общем уравнении вместо x подставим Ab и вместо y подставим Bb, и тогда получится уравнение, из которого можно будет определить одно из постоянных количеств α, β, γ, δ, ε и т. д. В результате все кривые, которые содержатся в общем уравнении, определенном указанным образом, будут проходить через заданную точку B.

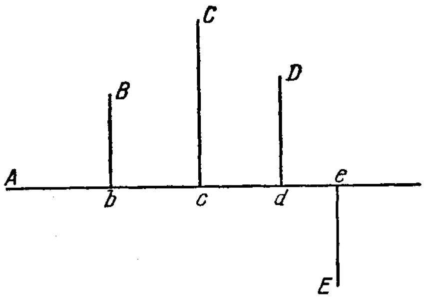

Рис. 17.

77. Если, сверх того, кривая линия должна проходить через точку C, то, опустив из последней на ось перпендикуляр Cc и положив в уравнении $x=Ac$ и $y=Cc$, мы получим новое уравнение, с помощью которого таким же образом определится одно из постоянных количеств α, β, γ, δ и т. д. Точно так же понятно, что если даются три точки B, C и D, через которые должна пройти кривая линия, то отсюда могут быть определены три постоянные, а по четырем точкам B, C, D, E определятся значения четырех постоянных букв. Стало быть, если задается столько точек, через которые должна пройти кривая линия, сколько общее уравнение допускает определений, то этим будет вполне определена, и притом единственным образом, кривая линия, проходящая через все предложенные точки [14].

78. Итак, поскольку общее уравнение для линий первого порядка, т. е. для прямой линии, допускает лишь два определения, то предложенными двумя точками, через которые проходит линия первого порядка, т. е. прямая, эта последняя вполне определяется; ведь через две заданные точки нельзя провести больше одной прямой линии, что известно также из элементарной математики[1]). Если же предлагают одну только точку, тогда, ввиду того, что уравнение еще не определено, через эту точку можно провести бесконечно много прямых линий.

79. Общее уравнение для линий второго порядка допускает пять определений. Следовательно, если предложены пять точек, через которые должна проходить кривая линия, то линия второго порядка этим вполне определяется. В силу этого через пять заданных точек можно провести одну лишь линию второго порядка. Если же предложены лишь четыре или меньшее количество точек, то, так как последние полностью еще не определяют уравнения, через них можно провести бесконечно много линий, и все они будут второго порядка. А если из этих пяти точек три точки лежат на одной прямой, то, так как линия второго порядка не может

[1]) quod quidem ex elementis intellegitur.

быть пересечена прямой в трех точках, не найдется ни одной непрерывной кривой линии, а получится составная линия, а именно: две прямые линии, которые, как мы уже упоминали, содержатся в общем уравнении второго порядка.

80. Далее, так как общее уравнение для линий третьего порядка допускает девять определений, то через девять произвольно взятых точек можно всегда провести линию третьего порядка и притом только одну. Но если число точек окажется меньше девяти, то через них можно провести бесконечно много линий третьего порядка. Равным образом, через четырнадцать заданных точек можно провести единственную линию четвертого порядка, через двадцать заданных точек единственную линию четвертого порядка и т. д. И вообще линии порядка n определяются с помощью такого количества точек, сколько единиц содержится в формуле

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}.$$

Таким образом, если число заданных точек окажется меньше, то через эти точки можно провести бесконечно много линий n-го порядка.

81. Итак, если предложено не больше чем $\frac{n(n+3)}{2}$ точек, то через них всегда можно провести одну или же бесконечно много линий порядка n, а именно, одну линию, когда число заданных точек $=\frac{n(n+3)}{2}$, и бесконечно много линий, когда число точек меньше. Но никогда, как бы эти точки ни были расположены, решение не становится невозможным, ибо определение коэффициентов α, β, γ, δ и т. д. никогда не требует решения уравнения квадратного или более высокой степени, а полностью осуществляется с помощью простых уравнений. Благодаря этому для количеств α, β, γ и т. д. никогда не получается мнимых или же многозначных решений. По указанной причине всегда получается действительная линия, проходящая через заданные точки. И эта линия будет единственной, если только предложено столько точек, сколько общее уравнение допускает определений.

82. Так как ось можно взять произвольно, то указанное выше определение коэффициентов облегчается, если ось провести через одну из заданных точек и начало абсцисс принять в той же точке A; ибо при этом, если положить $x=0$, должно стать $y=0$, вследствие чего в рассматриваемом общем уравнении

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\text{ и т. д.}$$

α тотчас же оказывается равным 0. Затем ось может также проходить через какую-нибудь другую из заданных точек, благодаря чему уменьшится число количеств, определяющих положение заданных точек. Наконец, вместо прямоугольных координат можно избрать такого рода косоугольные координаты, что ордината, проведенная в начале абсцисс, пройдет точно так же через заданную точку. Ведь ознакомление с кривой и ее построение одинаково ясно из ее уравнения, будут ли приняты прямоугольные координаты или косоугольные.

83. Если требуется найти линию второго порядка, проходящую через пять заданных точек A, B, C, D и E, проведем ось через две

точки A и B и примем начало абсцисс в одной из этих точек A. Затем соединим точку A с третьей точкой C и примем в качестве угла наклона ординат угол CAB. Поэтому из остальных точек D и E проведем к оси ординаты Dd и Ee, параллельные ординате AC.

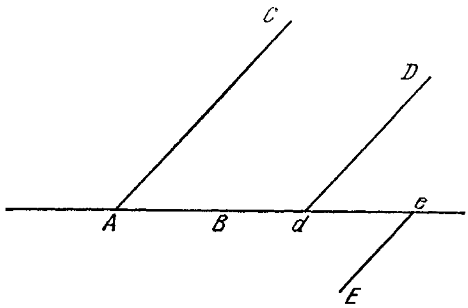

Рис. 18.

Положим $AB=a$, $AC=b$, $Ad=c$, $Dd=d$, $Ae=e$ и $eE=f$. Возьмем общее уравнение линий второго порядка

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2.$$

Очевидно, что

если положить	то будет
$x=0$	$y=0$,
$x=0$	$y=b$,
$x=a$	$y=0$,
$x=c$	$y=d$,
$x=e$	$y=f$.

Поэтому получатся следующие пять уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && 0=\alpha,\\ &\text{II.} && 0=\alpha+\gamma b+\zeta b^2,\\ &\text{III.} && 0=\alpha+\beta a+\delta a^2,\\ &\text{IV.} && 0=\alpha+\beta c+\gamma d+\delta c^2+\varepsilon cd+\zeta d^2,\\ &\text{V.} && 0=\alpha+\beta e+\gamma f+\delta e^2+\varepsilon ef+\zeta f^2.\end{aligned}$$

Стало быть, будет $\alpha=0$, $\gamma=-\zeta b$, $\beta=-\delta a$; если эти значения подставить в остальные уравнения, то они дадут

$$0=-\delta ac-\zeta bd+\delta c^2+\varepsilon cd+\zeta d^2,$$
$$0=-\delta ae-\zeta bf+\delta e^2+\varepsilon ef+\zeta f^2.$$

Умножим верхнее уравнение на ef, а нижнее на cd, и вычтем одно из них из другого, чтобы исключить ε; тогда получится

$$0=-\delta acef-\zeta bdef+\delta c^2ef+\zeta d^2ef+\delta acde+\zeta bcdf-\delta cde^2-\zeta cdf^2$$

или

$$\frac{\delta}{\zeta}=\frac{bdef-bcdf-d^2ef+cdf^2}{acde-acef-cde^2+c^2ef},$$

откуда получается

$$\delta = df\,(be - bc - de + cf),$$
$$\zeta = ce\,(ad - af - de + cf),$$

и таким образом определяются все коэффициенты [15].

84. После того как указанным выше путем будут определены все коэффициенты общего уравнения $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 +$ и т. д., следует, при принятой оси и для принятого угла наклона координат, описать с помощью уравнения проходящую через бесконечно много точек кривую, и эта кривая пройдет через все заданные точки. Если общее уравнение допускает большее число определений, чем было задано точек, тогда, взяв остальные точки произвольно, опишем кривую линию по заданным точкам с помощью вполне определенного уравнения. Придадим абсциссе x последовательно ряд значений, положительных и отрицательных: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д., а также -1, -2, -3, -4 и т. д. и для каждого из них определим из уравнения соответствующие значения ординаты y; таким образом будет определено много достаточно близких точек, по которым проходит кривая, и по ним легко будет выявить ход этой кривой.

ГЛАВА V

О ЛИНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

85. Так как в состав линий первого порядка входит лишь прямая линия, свойства которой уже достаточно известны из элементарной геометрии, мы несколько внимательнее рассмотрим *линии второго порядка*, поскольку они являются простейшими среди всех кривых линий и находят очень широкое применение во всей высшей геометрии. Этим линиям, которые также называют *коническими сечениями*, присущи многие замечательные свойства, открытые древнейшими геометрами и пополненные позднее. Изучение свойств этих линий признается настолько необходимым, что многие авторы обычно излагают их тотчас же вслед за элементарной геометрией. Но так как эти свойства не могут быть полностью выведены из единого начала, а одни из них выявляются из уравнения, другие — на основе их получения из сечения конуса, третьи же — благодаря иному способу построения, то мы исследуем здесь лишь те их свойства, которые получаются из их уравнения без иных вспомогательных средств [16].

86. Итак, рассмотрим общее уравнение для линий второго порядка, а именно

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2.$$

Мы показали, что это уравнение составлено так, что под каким бы углом ординаты ни были наклонены к оси, уравнение все-таки всегда содержит в себе все линии второго порядка. Придадим теперь этому уравнению следующий вид:

$$y^2 + \frac{(\varepsilon x + \gamma) y}{\zeta} + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

откуда ясно, что каждой абсциссе x соответствуют либо две ординаты y, либо не соответствует ни одна, в зависимости от того, являются ли оба корня y действительными или мнимыми. Если же будет $\zeta = 0$, тогда, конечно, каждой абсциссе будет соответствовать лишь одна ордината, так как другая ордината уйдет в бесконечность, в силу чего этот последний случай не нарушит нашего исследования [17].

87. Во всех случаях, когда оба значения y являются действительными, а это имеет место, когда (рис. 19) ордината PMN пересекает

кривую линию в двух точках M и N, сумма корней составляет

$$PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\varepsilon \cdot AP - \gamma}{\zeta},$$

если принять прямую линию AEF в качестве оси, точку A за начало абсцисс и если считать угол APN, под которым ординаты встречают ось, каким угодно. Стало быть, если под тем же углом провести какую-нибудь другую ординату npm, у которой значение pm является конечно отрицательным, то тем же путем получим

$$pn - pm = \frac{-\varepsilon \cdot Ap - \gamma}{\zeta}.$$

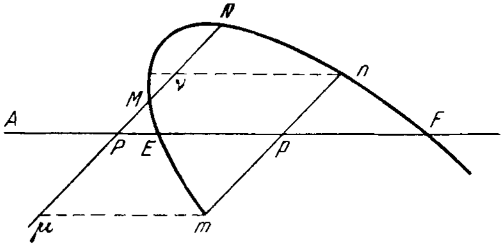

Рис. 19.

Вычтем это равенство из предыдущего; тогда будет

$$PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}.$$

Проведем из точек m и n прямые линии, параллельные оси x — до того, как они встретятся с прежней ординатой в точках μ и ν; тогда

$$M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta},$$

т. е. отношение суммы $M\mu + N\nu$ к Pp, или к $m\mu$, или к $n\nu$, будет постоянным и равным отношению ε к ζ. Разумеется, это отношение будет всегда оставаться одинаковым, где бы на кривой ни были проведены прямые линии MN и mn, если только они составляют заданный угол с осью и прямые $n\nu$ и $m\mu$ проведены параллельно оси.

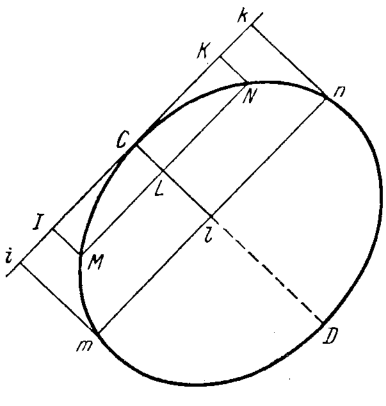

Рис. 20.

88. Если ординату PMN (рис. 19) переместить настолько, что точки M и N совпадут друг с другом, то в этом случае ордината будет касаться кривой, ибо в тех местах, где две точки пересечения совпадают, там секущая линия переходит в касательную (рис. 20).

Итак, пусть KCI будет такого рода касательной линией. Проведем какие-нибудь параллельные ей линии MN, mn, которые пересекают кривую линию по обе стороны. Такого рода прямые обычно называют *хордами* или *ординатами*[1]. После этого из точек M, N, m и n проведем к касательной прямые MI, NK, mi и nk, параллельные выбранной раньше оси. Так как теперь отрезки CK и Ck попадают на противоположную от точки C сторону, то их следует взять отрицательными. Отсюда получается

$$(CI - CK) : MI = \varepsilon : \zeta \text{ и } (Ci - Ck) : mi = \varepsilon : \zeta;$$

[1] Чтобы избежать смешения с термином ордината в современном смысле, в переводе мы пользуемся только первым термином.

следовательно,

$$(CI - CK) : MI = (Ci - Ck) : mi,$$

или

$$MI : mi = (CI - CK) : (Ci - Ck).$$

89. Так как положение оси по отношению к кривой линии является произвольным, то прямые MI, NK, mi, nk могут быть проведены как угодно, лишь бы только они были параллельны друг другу, и всегда будет

$$MI : mi = (CI - CK) : (Ci - Ck).$$

Стало быть, если параллельные прямые MI и NK будут проведены таким образом, что получится $CI = CK$, а это произойдет в том случае, если линии MI и NK параллельны прямой CL, которая, будучи проведена из точки соприкосновения C, делит хорду MN в точке L на две равные части, то в силу $CI - CK = 0$ получится также

$$Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0.$$

Поэтому если продолжить прямую линию CL до l, то в силу того, что линии mi и nk точно так же параллельны линии CL, будем иметь $ml = Ci$ и $nl = Ck$ и, следовательно, $ml = nl$. Отсюда следует, что если прямая CLl, будучи проведена из точки касания C, делит пополам одну хорду MN, параллельную касательной, то она делит пополам и все хорды mn, параллельные той же касательной.

90. Итак, поскольку прямая CLl делит пополам все хорды, параллельные касательной линии ICK, эту линию CLl обычно называют *диаметром линии второго порядка* или *диаметром конического сечения* [18]. Стало быть, для каждой линии второго порядка можно провести бесконечно много диаметров, так как в любой точке кривой линии имеется касательная. Действительно, где бы ни была дана касательная линия ICK, проведем какую-нибудь хорду MN, параллельную этой касательной, и поделим ее в точке L пополам. Тогда прямая CL будет диаметром линии второго порядка, который делит пополам все хорды, параллельные касательной IK.

91. Из вышесказанного также следует, что если прямая линия Ll делит пополам две какие-либо параллельные хорды MN и mn, то она делит пополам и все остальные параллельные им хорды; ведь повсюду найдется прямая IK, касательная к кривой, которая параллельна этим хордам и, стало быть, получится диаметр. Отсюда получается новый метод нахождения бесчисленного количества диаметров в предложенной линии второго порядка. А именно, следует провести две какие-либо ординаты или хорды MN и mn, параллельные друг другу, разделить их пополам в точках L и l и через эти точки провести прямую линию. Тогда последняя будет пересекать пополам все хорды, параллельные вышеуказанным и, стало быть, она будет диаметром. И если через точку C, в которой полученный вышеуказанным образом диаметр пересекает кривую линию, провести прямую линию IK, параллельную хордам, то она будет касаться кривой линии в точке C.

92. К указанному свойству нас привело рассмотрение суммы двух корней y в уравнении

$$y^2 + \frac{(\varepsilon x+\gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta} = 0.$$

Из того же уравнения следует, что произведение обоих корней (рис. 19, стр. 53)

$$PM \cdot PN = \frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta},$$

и выражение $\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}$ имеет либо два простых действительных множителя, либо ни одного. Первое имеет место, когда ось пересекает кривую линию в двух точках E и F. Действительно, так как в этих местах $y=0$, получается $\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0$; отсюда корнями x будут AE и AF, а следовательно, множителями будут $(x - AE)(x - AF)$, так что получится

$$\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta} \cdot PE \cdot PF,$$

ввиду того, что $x = AP$. Таким образом, в силу изложенного будет

$$PM \cdot PN = \frac{\delta}{\zeta} \cdot PE \cdot PF,$$

т. е. прямоугольник [19] $PM \cdot PN$ находится в постоянном отношении к прямоугольнику $PE \cdot PF$, как δ к ζ, где бы ни была проведена ордината PMN, если только угол NPF равен углу, под которым, согласно допущению, ординаты наклонены к оси. Следовательно, если провести ординату mn, то поскольку Ep и pm отрицательны, получится подобно прежнему

$$pm \cdot pn = \frac{\delta}{\zeta} pE \cdot pF.$$

93. Следовательно (рис. 21), когда дана любая прямая PEF, пересекающая линию второго порядка в двух точках E и F, то если провести любые параллельные между собою хорды NMP, npm, всегда будет

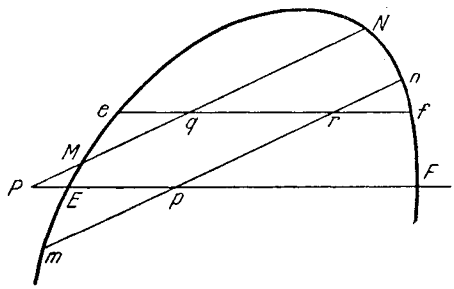

Рис. 21.

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = pm \cdot pn : pE \cdot pF,$$

так как в обеих этих пропорциях отношение составляет $\delta : \zeta$. Аналогично, если (так как положение оси является произвольным) принять прямую PMN в качестве оси и провести параллельно линии PEF какую-нибудь другую линию eqf, то будет также

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = qM \cdot qN : qe \cdot qf = pm \cdot pn : pE \cdot pF.$$

Следовательно, после перестановки,

$$qe \cdot qf : pE \cdot pF = qM \cdot qN : pm \cdot pn.$$

Таким образом, если даны две параллельные хорды ef и EF и если провести две какие-либо другие параллельные друг другу хорды MN

и mn, пересекающие первые две хорды в точках P, p, q и r, то все нижеприведенные отношения будут равны между собою:

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = pm \cdot pn : pE \cdot pF = qM \cdot qN : qe \cdot qf = rm \cdot rn : re \cdot rf.$$

Последнее представляет собою второе общее свойство линий второго порядка.

94. Следовательно, когда (см. рис. 24 на стр. 59) две точки кривой M и N совпадают друг с другом, прямая PMN становится касательной к кривой в месте слияния указанных двух точек, и прямоугольник $PM \cdot PN$ превращается в квадрат линии PM или PN, в результате чего получается новое свойство касательных. Действительно, пусть прямая CPp касается линии второго порядка в точке C, и пусть проведены какие-нибудь линии PMN и pmn, которые параллельны друг другу и, следовательно, составляют один и тот же угол с касательной. Стало быть, в силу найденного выше свойства будет

$$PC^2 : PM \cdot PN = pC^2 : pm \cdot pn,$$

т. е. какую бы хорду MN мы ни провели под заданным углом к касательной, квадрат прямой CP будет всегда в постоянном отношении к прямоугольнику $PM \cdot PN$.

95. Отсюда также следует, что если (рис. 20, стр. 53) для линии второго порядка провести какой-нибудь диаметр CD, который делит пополам все параллельные друг другу хорды MN и mn, и этот диаметр пересекает кривую в двух точках C и D, то будет $CL \cdot LD : LM \cdot LN = Cl \cdot lD : lm \cdot ln$. Так как также $LM = LN$ и $lm = ln$, то $LM^2 : lm^2 = CL \cdot LD : Cl \cdot lD$, т. е. квадрат половины хорды LM будет всегда в постоянном отношении к прямоугольнику $CL \cdot LD$. Отсюда, если взять диаметр CD в качестве оси и полухорду LM в качестве ординаты, можно вывести уравнение линий второго порядка. Действительно, пусть диаметр $CD = a$, абсцисса $CL = x$ и ордината $LM = y$; так как $LD = a - x$, то y^2 находится в постоянном отношении к $ax - x^2$, которое пусть будет равно отношению h к k, откуда получается следующее уравнение для линий второго порядка:

$$y^2 = \frac{h}{k}(ax - x^2).$$

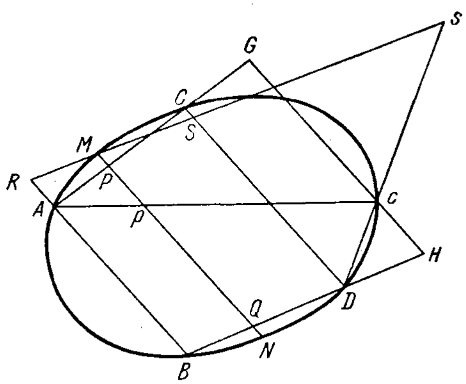

Рис. 22.

96. А из совокупности обоих найденных выше свойств линий второго порядка можно вывести еще и другие свойства. Пусть (рис. 22) на линии второго порядка даны две параллельные друг другу хорды AB и CD, которые дополним до четырехугольника $ACDB$. Если через какую-нибудь точку M кривой мы проведем хорду MN параллельно указанным хордам AB и CD, пересекающую прямые AC и BD в точках P и Q, то части PM и QN будут между собою равны. Ведь прямая, делящая пополам обе хорды AB и CD, разделит пополам и хорду MN, а согласно

элементарной геометрии, та же прямая, которая делит пополам бока AB и CD, рассечет пополам и отрезок PQ. Итак, поскольку линии MN и PQ делятся пополам в одной и той же точке, то необходимо, чтобы было $MP = NQ$ и $MQ = NP$. Таким образом, если сверх четырех точек линии второго порядка A, B, C и D дается еще и пятая точка M, то с ее помощью можно определить шестую точку N, если взять $NQ = MP$.

97. Так как мы уже имеем, что $MQ \cdot QN$ находится в постоянном отношении к $BQ \cdot DQ$, то, в силу $QN = MP$, $MP \cdot MQ$ будет находиться в таком же постоянном отношении к $BQ \cdot DQ$. Следовательно, если взять какую-нибудь другую точку кривой линии, например c, и через последнюю провести прямую линию GcH, параллельную линиям AB и CD, до пересечения ее со сторонами AC и BD в точках G и H, то $cG \cdot cH$ окажется в том же постоянном отношении к $BH \cdot DH$ и, следовательно,

$$cG \cdot cH : BH \cdot DH = MP \cdot MQ : BQ \cdot DQ.$$

А если через точку M провести параллельно основанию BD линию RMS, пересекающую параллельные хорды AB и CD в точках R и S, то в силу $BQ = MR$ и $DQ = MS$ получится также, что и отношение $MP \cdot MQ : MR \cdot MS$ является постоянным. Следовательно, если через какую-либо точку кривой M провести две прямые линии, одну MPQ параллельно противоположным сторонам AB и CD, а другую RMS параллельно основанию BD, то точки пересечения P, Q, R и S окажутся расположенными таким образом, что $MP \cdot MQ$ будет в постоянном отношении к $MR \cdot MS$.

98. Если вместо хорды CD, которая предполагалась параллельной AB, провести из точки D какую-нибудь другую линию Dc и провести хорду Ac с тем, чтобы теперь прямые MQ и RMS, проведенные, как и раньше, через M параллельно сторонам AB и BD, пересекли стороны четырехугольника $ABDc$ в точках p, Q, R и s, то получится подобное же свойство. Действительно,

$$MP \cdot MQ : BQ \cdot DQ = cG \cdot cH : BH \cdot DH$$

или

$$MP \cdot MQ : MR \cdot MS = cG \cdot cH : BH \cdot DH,$$

так как прямая линия RS параллельна и равна линии BD. А подобные треугольники APp, AGc и DSs, cHD дадут следующие отношения:

$$Pp : AP = Gc : AG,$$

то есть, в силу

$$AP : AG = BQ : BH,$$

будем иметь

$$Pp : BQ = Gc : BH;$$

другое подобие дает пропорцию

$$DS\,(MQ) : Ss = cH : DH.$$

Из этих пропорций получается

$$MQ \cdot Pp : MR \cdot Ss = cG \cdot cH : BH \cdot DH, \text{ так как } BQ = MR.$$

Сопоставление этой пропорции с приведенной выше дает

$$MP \cdot MQ : MR \cdot MS = Pp \cdot MQ : MR \cdot Ss;$$

отсюда, если взять сумму предыдущих и сумму последующих членов,

$$MP \cdot MQ : MR \cdot MS = Mp \cdot MQ : MR \cdot Ms;$$

следовательно, где бы ни были взяты точки c и M на кривой, отношение $Mp \cdot MQ$ к $MR \cdot Ms$ будет всегда оставаться неизменным, если только прямые линии MQ и Rs проводятся через точку M параллельно хордам AB и BD. Из вышеприведенной пропорции следует, что

$$MP : MS = Mp : Ms.$$

Стало быть, так как с изменением точки c изменяются лишь точки p и s, то отношение Mp к Ms будет оставаться неизменным, как бы ни изменялось положение точки c, если только точка M будет оставаться неизменной.

99. Стало быть (рис. 23), если заданы четыре какие-нибудь точки A, B, C, D на линии второго порядка и если эти точки соединить прямыми линиями, так что получится вписанная трапеция [20] $ABDC$, то

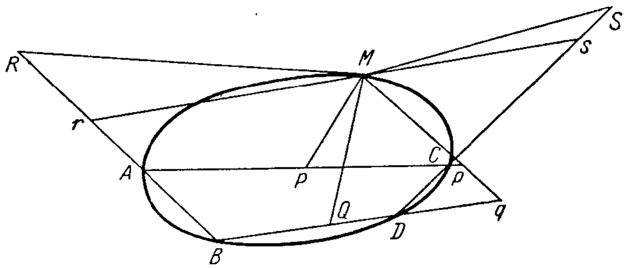

Рис. 23.

из изложенного выше можно вывести весьма общее свойство конических сечений. А именно, если из любой точки M кривой линии провести к каждой стороне трапеции под заданными углами прямые линии MP, MQ, MR и MS, то прямоугольники [21], образуемые парами этих линий, проведенными к противоположным сторонам, будут находиться в одном и том же отношении друг к другу, т. е. $MP \cdot MQ$ будет находиться в данном отношении к $MR \cdot MS$, где бы ни была взята точка M на кривой, если только углы у точек P, Q, R и S остаются неизменными. Для того чтобы это показать, проведем через точку M две прямые Mq и rs: одну параллельно стороне AB, другую—параллельно стороне BD и обозначим точки их пересечения со сторонами трапеции буквами p, q, r и s. Тогда, в силу найденного выше, $Mp \cdot Mq$ будет находиться в заданном отношении к $Mr \cdot Ms$. А так как все углы даны, то данными окажутся и отношения $MP : Mp$, $MQ : Mq$, $MR : Mr$ и $MS : Ms$, из чего следует, что $MP \cdot MQ$ тоже будет в заданном отношении к $MR \cdot MS$.

100. Выше мы видели, что если (рис. 24) продолжить параллельные хорды MN и mn до тех пор, пока они пересекут какую-нибудь касательную CPp в точках P и p, то будет $PM \cdot PN : CP^2 = pm \cdot pn : Cp^2$. Поэтому если отметить точки L и l таким образом, чтобы PL было средней пропорциональной между PM и PN и, равным образом, чтобы pl было средней пропорциональной между pm и pn, то будет

$$PL^2 : CP^2 = pl^2 : Cp^2,$$

и, следовательно, $PL:CP = pl:Cp$, откуда ясно, что все точки L, l будут расположены на прямой, проходящей через точку касания C. В силу этого, если одна какая-нибудь ордината PMN пересекается в точке L таким образом, что $PL^2 = PM \cdot PN$, то прямая CLD, проведенная через точки C и L, тоже пересечет все остальные ординаты pmn в точке l так, что pl будет средней пропорциональной между pm и pn. Или же если две ординаты PN и pn делятся в точках L и l таким образом, что

$$PL^2 = PM \cdot PN \quad \text{и} \quad pl^2 = pm \cdot pn,$$

то прямая, проведенная через L и l, будет проходить через точку соприкосновения C и будет пересекать остальные ординаты, параллельные указанным, в том же отношении.

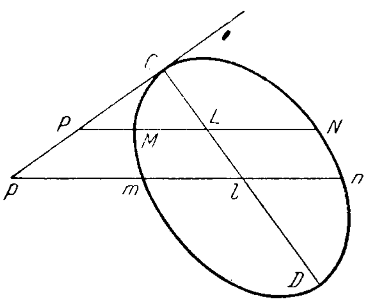

Рис. 24.

101. После того как мы изложили указанные выше свойства линий второго порядка, которые вытекают непосредственно из вида их уравнения, перейдем к исследованию других, более скрытых их свойств. Итак, пусть для линий второго порядка дано общее уравнение

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

из которого можно определить положение диаметра, делящего пополам все хорды MN, так как каждой абсциссе $AP = x$ соответствуют две ординаты (рис. 25), а именно PM и PN. Действительно, пусть IG будет

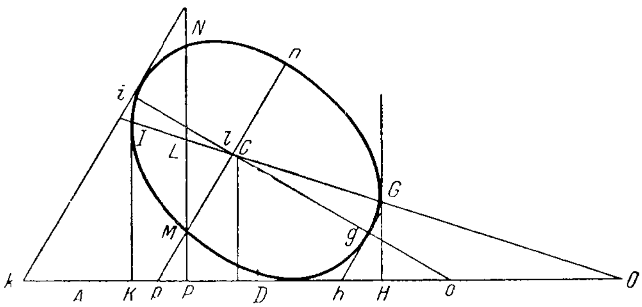

Рис. 25.

этим диаметром, который пересечет хорду MN в средней точке L, каковая, стало быть, находится на диаметре. Положим $PL = z$ и, так как $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, будем иметь

$$z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta},$$

то есть

$$2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0;$$

это уравнение, которое дает положение диаметра IG.

102. Отсюда, далее, можно определить длину диаметра IG, что дают два места на кривой, где точки M и N совпадают и где имеем $PM = PN$.

Из уравнения [кривой] имеем

$$PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta} \quad \text{и} \quad PM \cdot PN = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta},$$

откуда

$$(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM \cdot PN =$$
$$= \frac{(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)\, x^2 + 2(\varepsilon\gamma - 2\beta\zeta)\, x + (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}{\zeta^2} = 0$$

или

$$x^2 - \frac{2(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}\, x + \frac{\gamma^2 - 4\alpha\zeta}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} = 0.$$

Поэтому корнями этого уравнения являются AK и AH, так что

$$AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} \quad \text{и} \quad AK \cdot AH = \frac{\gamma^2 - 4\alpha\zeta}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}.$$

Отсюда

$$(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)^2}.$$

А

$$IG^2 = \frac{\varepsilon^2 - 4\zeta^2}{4\zeta^2} KH^2,$$

если, конечно, взяты ординаты, перпендикулярные к оси.

103. Пусть ординаты, которые мы выше рассматривали, будут перпендикулярными к оси AH; теперь будем искать уравнение для наклонных ординат. Итак, проведем из какой-либо точки M кривой к оси наклонную ординату Mp, образующую с осью угол MpH, синус которого пусть $= \mu$, а косинус $= \nu$. Пусть новая абсцисса $Ap = t$, ордината $pM = u$; тогда будет

$$\frac{y}{u} = \mu \quad \text{и} \quad \frac{Pp}{u} = \nu,$$

а отсюда

$$y = \mu u \quad \text{и} \quad x = t + \nu u.$$

Если эти значения подставить в уравнение между x и y, которое имело вид

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2,$$

то получится

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta t + \nu\beta u &+ \delta t^2 + 2\nu\delta tu + \nu^2\delta u^2 \\ + \mu\gamma u &\qquad\;\; + \mu\varepsilon tu \;\; + \mu\nu\varepsilon u^2 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad + \mu^2\zeta u^2 \end{aligned}$$

или

$$u^2 + \frac{((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, t + \mu\gamma + \nu\beta)\, u + \delta t^2 + \beta t + \alpha}{\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta} = 0.$$

104. Стало быть, здесь каждая ордината будет снова иметь два значения, а именно: pM и pn, благодаря чему можно будет, как и раньше, определить диаметр ilg хорд Mn. Действительно, поскольку хорда Mn делится пополам в точке l, эта точка будет находиться на диаметре. Итак, положим $pl = v$; тогда

$$v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta)}.$$

Опустим из l перпендикуляр lq на ось AH и положим $\overline{Aq}$[1]$)=p$, $\overline{ql}$[1]$)=q$; будем иметь

$$\mu=\frac{q}{v} \quad \text{и} \quad \nu=\frac{\overline{pq}}{v}\,^{1})=\frac{p-t}{v},$$

откуда

$$v=\frac{q}{\mu} \quad \text{и} \quad t=p-\nu v=p-\frac{\nu q}{\mu}.$$

Подставим эти значения в найденное раньше уравнение между t и v; тогда получим

$$\frac{q}{\mu}=\frac{-\mu\varepsilon p-2\nu\delta p+\nu\varepsilon q+2\nu^2\delta q:\mu-\mu\gamma-\nu\beta}{2\mu^2\zeta+2\mu\nu\varepsilon+2\nu^2\delta},$$

или

$$(2\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon)\,q+(\mu^2\varepsilon+2\mu\nu\delta)\,p+\mu^2\gamma+\mu\nu\beta=0$$

то есть

$$(2\mu\zeta+\nu\varepsilon)\,q+(\mu\varepsilon+2\nu\delta)\,p+\gamma\mu+\nu\beta=0;$$

этим уравнением определяется положение диаметра ig.

105. Первый диаметр IG, положение которого определялось с помощью уравнения $2\zeta z+\varepsilon x+\gamma=0$, будучи продолжен, пересечет ось в O, и мы будем иметь $AO=\frac{-\gamma}{\varepsilon}$. Отсюда получается

$$PO=\frac{-\gamma}{\varepsilon}-x,$$

и тангенс угла LOP будет

$$=\frac{z}{PO}=\frac{-\varepsilon z}{\varepsilon x+\gamma}=\frac{\varepsilon}{2\zeta},$$

а тангенс угла MLG, под которым диаметр IG делит пополам хорды MN, будет $=\frac{2\zeta}{\varepsilon}$. Другой же диаметр ig, будучи продолжен, пересечет ось в o, и будет

$$Ao=\frac{-\mu\gamma-\nu\beta}{\mu\varepsilon+2\nu\delta},$$

а тангенс угла Aol будет

$$=\frac{\mu\varepsilon+2\nu\delta}{2\mu\zeta+\nu\varepsilon}.$$

Так как тангенс угла $AOL=\frac{\varepsilon}{2\zeta}$, то оба диаметра пересекаются в некоторой точке C и образуют угол $OCo=Aol-AOL$, тангенс которого поэтому

$$=\frac{4\nu\delta\zeta-\nu\varepsilon^2}{4\mu\zeta^2+2\nu\delta\varepsilon+2\nu\varepsilon\zeta+\mu\varepsilon^2}.$$

А угол, под которым этот второй диаметр пересекает пополам свои хорды, это угол $MLo=180°-lpo-Aol$; поэтому его тангенс

$$=\frac{2\mu^2\zeta+2\mu\nu\varepsilon+2\nu^2\delta}{\mu^2\varepsilon+2\mu\nu\delta-2\mu\nu\zeta-\nu^2\varepsilon}.$$

[1]) Горизонтальная черта для обозначения длины соответствующего отрезка поставлена в настоящем издании, чтобы облегчить чтение текста, где буквы p и q одновременно обозначают и точки на чертеже, и длины отрезков.

106. Определим теперь точку C, в которой оба эти диаметра взаимно пересекаются, для чего опустим из этой точки на ось перпендикуляр CD и обозначим $AD = g$ и $CD = h$. Тогда, во-первых, так как точка C находится на диаметре IG, будем иметь $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$. Затем, так как C находится и на диаметре ig, будет

$$(2M\zeta + \nu\varepsilon)\,h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\,g + \mu\gamma + \nu\beta = 0.$$

Вычтем отсюда предыдущее равенство, умножив его на μ, и тогда останется

$$\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0, \qquad \text{то есть} \qquad \varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0.$$

Отсюда

$$h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{2\delta g - \beta}{\varepsilon}$$

и, стало быть, $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)\,g = 2\beta\zeta - \gamma\varepsilon$ и

$$g = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}, \qquad h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}.$$

Так как в состав этих выражений не входят количества μ и ν, от которых зависит наклон ординат pMn, то ясно, что точка C остается неизменной, как бы ни изменялся наклон.

107. Итак, все диаметры IG и ig взаимно пересекаются в одной и той же точке C. Следовательно, если эта точка однажды найдена, то через нее будут проходить все диаметры. И обратно, все прямые, проведенные через эту точку, будут диаметрами, делящими пополам все хорды, проведенные под определенным углом. Итак, поскольку эта точка является единственной в каждой линии второго порядка и в ней все диаметры делят друг друга пополам, то эту точку принято называть центром конического сечения. Как видно, ее можно найти из предложенного уравнения между x и y

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2,$$

приняв

$$AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} \qquad \text{и} \qquad CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}.$$

108. А раньше мы нашли, что

$$AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}.$$

Но IK и GH являются перпендикулярами, опущенными из концов диаметра IG на ось; отсюда ясно, что

$$AD = \frac{AK + AH}{2},$$

и, следовательно, точка D будет находиться посередине между точками K и H. Поэтому и центр C будет точно так же находиться на середине диаметра IG. Так как это имеет силу для любого другого диаметра, то отсюда следует, что все диаметры не только взаимно пересекаются в одной и той же точке C, но и делятся в ней пополам.

109. Возьмем теперь (рис. 26) в качестве оси какой-нибудь диаметр AI, с которым хорды MN составляют угол $APM = q$, синус

которого $=m$ и косинус $=n$. Пусть абсцисса $AP=x$ и ордината $PM=y$. Так как последняя имеет два равных значения с противоположными знаками, то их сумма равна 0, и общее уравнение для линии второго порядка принимает следующий вид:

$$y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2;$$

последнее, если положить $y=0$, даст точки G и I на оси, в которых кривая пересекает последнюю. Стало быть, корнями уравнения

$$x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma}=0$$

будут $x=AG$ и $x=AI$ и, значит, будем иметь

$$AG+AI=\frac{-\beta}{\gamma} \quad \text{и} \quad AG\cdot AI=\frac{\alpha}{\gamma}.$$

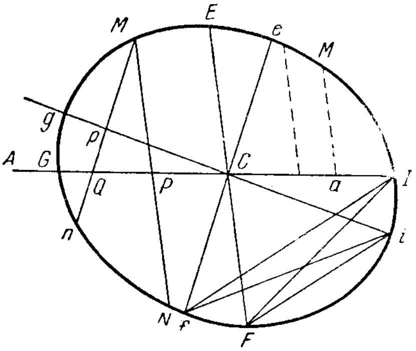

Рис. 26.

А так как центр C находится посередине диаметра GI, легко найти центр конического сечения C. Действительно, будем иметь

$$AC=\frac{AG+AI}{2}=\frac{-\beta}{2\gamma}.$$

110. После того как мы нашли центр C конического сечения на оси AI, удобнее всего его принять за начало абсцисс. Итак, пусть $CP=t$; так как по-прежнему $PM=y$, то, поскольку

$$x=AC-CP=\frac{-\beta}{2\gamma}-t,$$

получится следующее уравнение между t и y:

$$y^2=\alpha-\frac{\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2}{4\gamma}-\beta t+\beta t+\gamma t^2,$$

или

$$y^2=\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma}+\gamma t^2.$$

Стало быть, подставив x вместо t, мы получим общее уравнение для линий второго порядка, когда какой-нибудь диаметр выбран в качестве оси и центр в качестве начала абсцисс; если изменить вид постоянных, то получится уравнение вида $y^2=\alpha-\beta x^2$. Следовательно, если положить $y=0$, то будет $CG=CI=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ и, стало быть, весь диаметр GI будет $=2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

111. Положим $x=0$ и найдем хорду EF, проходящую через центр; очевидно, что $CE=CF=\sqrt{\alpha}$, и, следовательно, вся хорда $EF=2\sqrt{\alpha}$; а так как она проходит через центр, то она будет также диаметром, который составляет с диаметром GI угол $ECG=q$. Этот же второй диаметр EF будет рассекать пополам все хорды, параллельные первому диаметру GI; ибо если считать абсциссу CP отрицательной, то ордината aM, находящаяся со стороны I, останется равной первой ординате PM, а так как она ей параллельна, то соединение обеих точек M даст линию, параллельную диаметру GI, которую, стало быть, диаметр EF

должен делить пополам. Следовательно, оба эти диаметра GI и EF расположены по отношению друг к другу таким образом, что каждый из них делит пополам все хорды, параллельные другому диаметру: благодаря этому взаимному свойству такие два диаметра получили название *сопряженных*. Стало быть, если через концы G и I диаметра GI провести прямые, параллельные другому диаметру EF, то они будут касаться кривой и, равным образом, если через точки E и F провести прямые, параллельные диаметру GI, то они будут касаться кривой в точках E и F.

112. Проведем теперь какую-нибудь косоугольную ординату MQ и пусть угол $AQM=\varphi$, его синус $=\mu$ и косинус $=\nu$. Положим абсциссу $CQ=t$ и ординату $MQ=u$. Тогда ввиду того, что угол $PMQ=\varphi-q$, а вследствие этого $\sin PMQ=\mu n-\nu m$, в треугольнике PMQ будет

$$y:u:PQ=\mu:m:(\mu n-\nu m),$$

а отсюда

$$y=\frac{\mu u}{m} \quad \text{и} \quad PQ=\frac{(\mu n-\nu m)\,u}{m},$$

откуда

$$x=t-PQ=t-\frac{(\mu n-\nu m)\,u}{m}.$$

Подставив эти значения в приведенное выше уравнение

$$y^2=\alpha-\beta x^2 \quad \text{или} \quad y^2+\beta x^2-\alpha=0,$$

получим

$$(\mu^2+\beta(\mu n-\nu m)^2)\,u^2-2\beta(\mu n-\nu m)\,mtu+\beta m^2t^2-\alpha m^2=0,$$

откуда для ординаты и получаются два значения QM и $-Qn$, и будем иметь

$$QM-Qn=\frac{2\beta m(\mu n-\nu m)\,t}{\mu^2+\beta(\mu n-\nu m)^2}.$$

Так как хорда Mn делится пополам в p и прямая Cpg является новым диаметром, который делит пополам все хорды, параллельные Mn, то

$$Qp=\frac{\beta m(\mu n-\nu m)\,t}{\mu^2+\beta(\mu n-\nu m)^2}.$$

113. Отсюда же получается, что

$$\text{тангенс угла } GCg=\frac{\mu\cdot Qp}{CQ+\nu\cdot Qp},$$

или

$$\text{тангенс } GCg=\frac{\beta m(\mu n-\nu m)}{\mu+n\beta(\mu n-\nu m)},$$

и

$$\text{тангенс } Mpg=\frac{\mu\cdot CQ}{pQ+\nu\cdot CQ}=\frac{\mu^2+\beta(\mu n-\nu m)^2}{\mu\nu+\beta(\mu n-\nu m)(\nu n+\mu m)};$$

Mpg — это угол, под которым диаметр gi делит пополам новые хорды Mn. Дальше будет

$$Cp^2=CQ^2+Qp^2+2\nu\cdot CQ\cdot Qp=\frac{\mu^4+2\beta\mu^3n(\mu n-\nu m)+\beta^2\mu^2(\mu n-\nu m)^2}{[\mu^2+\beta(\mu n-\nu m)^2]^2}\,t^2,$$

а также

$$Cp = \frac{\mu t \sqrt{\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2}}{\mu^2 + \beta(\mu n - \nu m)^2}.$$

Положим $Cp = r$ и $pM = s$; тогда

$$t = \frac{(\mu^2 + \beta(\mu n - \nu m)^2)\, r}{\mu \sqrt{\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2}}$$

и

$$u = s + Qp = s + \frac{\beta m(\mu n - \nu m)\, r}{\mu \sqrt{\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2}},$$

а эти значения дальше дают

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\beta(\mu n - \nu m)\, r}{\sqrt{(\ldots)}},$$

$$x = -\frac{(\mu n - \nu m)\, s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\ldots)}},$$

на основании чего из уравнения $y^2 + \beta x^2 - \alpha = 0$ получается

$$\frac{(\mu^2 + \beta(\mu n - \nu m)^2)\, s^2}{m^2} + \frac{\beta(\mu^2 + \beta(\mu n - \nu m)^2)\, r^2}{\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2} - \alpha = 0.$$

114. Обозначим теперь полудиаметр CG через f, а сопряженный полудиаметр $CE = CF$ через g; будем иметь

$$f = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{и} \quad g = \sqrt{\alpha},$$

или

$$\alpha = g^2 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{g^2}{f^2},$$

откуда

$$y^2 + \frac{g^2 x^2}{f^2} = g^2.$$

Далее положим угол $GCg = p$; тогда

$$\operatorname{tg} p = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}.$$

Но так как угол $GCE = q$, то если положить угол $ECe = \pi$, получится $AQM = \varphi = q + \pi$ и, стало быть,

$$\mu = \sin(q + \pi), \quad \nu = \cos(q + \pi), \quad m = \sin q \quad \text{и} \quad n = \cos q.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} p = \frac{\beta \sin q \sin \pi}{\sin(q + \pi) + \beta \cos q \sin \pi} = \frac{\beta \operatorname{tg} q \operatorname{tg} \pi}{\operatorname{tg} q + \operatorname{tg} \pi + \beta \operatorname{tg} \pi}$$

и $\sin p = \dfrac{\beta \sin q \sin \pi}{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2}}$, а также

$$\mu^2 + \beta(\mu n - \nu m)^2 = \sin^2(q + \pi) + \beta \sin^2 \pi.$$

Если воспользоваться этими значениями, то получится следующее уравнение между r и s:

$$\frac{[\sin^2(q + \pi) + \beta \sin^2 \pi]\, s^2}{\sin^2 q} + \frac{\beta[\sin^2(q + \pi) + \beta \sin^2 \pi]\, r^2}{\beta^2 \sin^2 q \sin^2 \pi} \sin^2 p - \alpha = 0.$$

Но

$$\beta=\frac{\operatorname{tg} p \sin (q+\pi)}{(\sin q-\cos q \operatorname{tg} p) \sin \pi}=\frac{\operatorname{tg} p\,(\operatorname{tg} q+\operatorname{tg} \pi)}{\operatorname{tg} \pi\,(\operatorname{tg} q-\operatorname{tg} p)}=\frac{g^2}{f^2}=\frac{\operatorname{ctg} \pi \operatorname{tg} q+1}{\operatorname{ctg} p \operatorname{tg} q-1},$$

то есть

$$\operatorname{tg} q=\frac{f^2+g^2}{g^2 \operatorname{ctg} p-f^2 \operatorname{ctg} \pi},$$

откуда можно вывести многочисленные следствия. И, разумеется,

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{\sin p \sin (q+\pi)}{\sin \pi \sin (q-p)}.$$

115. Пусть полудиаметр $Cg=a$ и сопряженный с ним полудиаметр $Ce=b$. Тогда из найденного ранее уравнения получаем

$$a=\frac{\sin q \sin \pi \sqrt{\alpha\beta}}{\sin p \sqrt{\sin^2 (q+\pi)+\beta \sin^2 \pi}}=\frac{g^2 \sin q \sin \pi}{\sin p \sqrt{f^2 \sin^2 (q+\pi)+g^2 \sin^2 \pi}}$$

и

$$b=\frac{fg \sin q}{\sqrt{f^2 \sin^2 (q+\pi)+g^2 \sin^2 \pi}},$$

а отсюда

$$a : b=g \sin \pi : f \sin p.$$

Далее, конечно,

$$\sin^2 (q+\pi)+\frac{g^2}{f^2} \sin^2 \pi=\frac{\sin (q+\pi)}{\sin (q-p)}\,[\sin (q-p) \sin (q+\pi)+\sin p \sin \pi]=$$

$$=\frac{\sin q \sin (q+\pi) \sin (q+\pi-p)}{\sin (q-p)},$$

откуда

$$a=\frac{g^2 \sin \pi}{f \sin p} \sqrt{\frac{\sin q \sin (q-p)}{\sin (q+\pi) \sin (q+\pi-p)}};$$

или же, ввиду того, что

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{\sin p \sin (q+\pi)}{\sin \pi \sin (q-p)},$$

будет

$$a=f \sqrt{\frac{\sin q \sin (q+\pi)}{\sin (q-p) \sin (q+\pi-p)}}$$

и

$$b=g \sqrt{\frac{\sin q \sin (q-p)}{\sin (q+\pi) \sin (q+\pi-p)}};$$

следовательно,

$$a : b=f \sin (q+\pi) : g \sin (q-p) \quad \text{и} \quad ab=\frac{fg \sin q}{\sin (q+\pi-p)}.$$

116. Стало быть, если в коническом сечении имеем по два сопряженных диаметра GI, EF и gi, ef, то

$$Cg : Ce=CE \sin ECe : CG \sin GCg.$$

Следовательно,

$$\sin GCg : \sin ECe = CE \cdot Ce : CG \cdot Cg$$

и если провести хорды Ee и Gg, то отсюда получается, что треугольник CGg = треугольнику CEe. Далее будет

$$Cg : Ce = CG \sin GCe : CE \sin gCE,$$

или

$$Ce \cdot CG \sin GCe = CE \cdot Cg \sin gCE,$$

откуда, если провести хорды Ge и gE, окажется, что треугольники GCe и gCE между собою равны, то есть с противоположной стороны будет треугольник ICf = треугольнику iCF. Последнее же уравнение

$$ab \sin (q + \pi - p) = fg \sin q$$

даст

$$Cg \cdot Ce \sin gCe = CG \cdot CE \sin GCE.$$

Следовательно, если провести хорды EG и eg или же, с противоположной стороны FI и fi, то окажутся также равными между собою треугольники ICF и iCf, откуда следует, что все параллелограммы, построенные на двух сопряженных диаметрах, равны между собою.

117. Таким образом, имеются три пары треугольников, которые равны между собою:

I. Треугольник FCf, равный треугольнику ICi.

II. Треугольник fCI, равный треугольнику FCi.

III. Треугольник FCI, равный треугольнику fCi.

Отсюда следует, что трапеции $FfCI$ и $iICf$ между собою равны. Если от этих трапеций отнять один и тот же треугольник fCI, то получится, что треугольник FIf = треугольнику Ifi; а так как последние опираются на одно и то же основание fI, то хорда Fi должна обязательно быть параллельна fI. Далее, точно так же треугольник FIi = треугольнику ifF, а если прибавить к ним равные треугольники FCI и fCi, то окажутся равными между собою и трапеции $FCIi$ и $iCfF$.

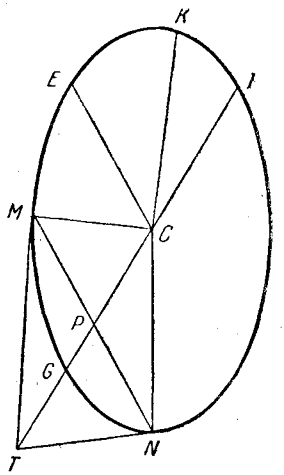

Рис. 27.

118. Отсюда можно также вывести способ проведения касательной MT в какой-либо точке M (рис. 27) любой линии второго порядка. А именно, если взять в качестве оси диаметр GI, по отношению к которому EC будет представлять собою сопряженный полудиаметр, и из точки M провести к оси линию MP, параллельную линии CE, которая будет представлять собою полухорду, то $PN = PM$. Проведя линию CM, которая будет полудиаметром, надо будет найти сопряженный с ним полудиаметр CK, которому будет параллельна искомая касательная MT. Пусть угол $GCE = q$, $GCM = p$ и $ECK = \pi$; как мы видели, будет

$$\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin p \sin (q + \pi)}{\sin \pi \sin (q - p)} \quad \text{и} \quad MC = CG \sqrt{\frac{\sin q \sin (q + \pi)}{\sin (q - p) \sin (q + \pi - p)}}.$$

А из треугольника CMP получаем

$$MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM \cdot CP \cos q$$

и

$$MP : MC = \sin p : \sin q, \quad MP : CP = \sin p : \sin (q - p).$$

Затем из треугольника CMT, в котором углы даны, находим

$$CM : CT : MT = \sin (q + \pi) : \sin (q + \pi - p) : \sin p.$$

Отсюда, после исключения углов,

$$MC = CG \sqrt{\frac{MC \cdot CM}{CP \cdot CT}},$$

или $CG^2 = CP \cdot CT$. Далее, будем иметь $CP : CG = CG : CT$, откуда удобным образом определяется положение касательной. Действительно, из приведенной выше пропорции путем *разделения* следует $CP : PG = CG : TG$, а путем *объединения*, в силу $CG = CI$, получаем $CP : IP = CG : TI$ [22].

119. Так как

$$\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin p \sin (q + \pi)}{\sin \pi \sin (q - p)} \quad \text{и} \quad \frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\sin p \sin (q - p)}{\sin \pi \sin (q + \pi)},$$

а также

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin q \sin (q + \pi)}{\sin (q - p) \sin (q + \pi - p)} \quad \text{и} \quad \frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\sin q \sin (q - p)}{\sin (q + \pi) \sin (q + \pi - p)},$$

то будет

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\sin p \sin (q + \pi) + \sin \pi \sin (q - p)}{\sin \pi \sin (q - p)}$$

и

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\sin p \sin (q - p) + \sin \pi \sin (q + \pi)}{\sin \pi \sin (q + \pi)}.$$

Но

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \cos (A - B) - \frac{1}{2} \cos (A + B)$$

и, обратно,

$$\frac{1}{2} \cos A - \frac{1}{2} \cos B = \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{B - A}{2}.$$

Отсюда

$$\sin p \sin (q + \pi) + \sin \pi \sin (q - p) =$$
$$= \frac{1}{2} \cos (q + \pi - p) - \frac{1}{2} \cos (q + \pi + p) + \frac{1}{2} \cos (q - \pi - p) -$$
$$- \frac{1}{2} \cos (q + \pi - p) = \frac{1}{2} \cos (q - \pi - p) - \frac{1}{2} \cos (q + \pi + p) = \sin q \sin (p + \pi),$$

а также

$$\sin p \sin (q - p) + \sin \pi \sin (q + \pi) =$$
$$= \frac{1}{2} \cos (q - 2p) - \frac{1}{2} \cos q + \frac{1}{2} \cos q - \frac{1}{2} \cos (q + 2\pi) =$$
$$= \frac{1}{2} \cos (q - 2p) - \frac{1}{2} \cos (q + 2\pi) = \sin (q + \pi - p) \sin (p + \pi).$$

Следовательно, из вышеприведенного получится

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2}=\frac{\sin q \sin (p+\pi)}{\sin \pi \sin (q-p)}$$

и

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}=\frac{\sin (q+\pi-p) \sin (p+\pi)}{\sin \pi \sin (q+\pi)},$$

откуда заключаем, что

$$\frac{CE^2+CG^2}{CK^2+CM^2}=\frac{CG^2}{CM^2}\,\frac{\sin q \sin (q+\pi)}{\sin (q-p) \sin (q+\pi-p)}=\frac{CG^2}{CM^2}\,\frac{CM^2}{CG^2}.$$

Поэтому

$$CE^2+CG^2=CK^2+CM^2;$$

стало быть, в каждой линии второго порядка сумма квадратов обоих сопряженных диаметров всегда постоянна.

120. Итак, когда даны два сопряженных полудиаметра CG и CE, то для каждого произвольно взятого полудиаметра CM сразу определяется сопряженный с ним полудиаметр CK, полагая

$$CK=\sqrt{CE^2+CG^2-CM^2}.$$

Следовательно, в силу изложенных выше свойств конических сечений [§ 92] будет

$$TG\cdot TI:TM^2=CG\cdot CI:CK^2=CG^2:CK^2=CG^2:CE^2+CG^2-CM^2$$

и, стало быть,

$$TM=\frac{1}{CG}\sqrt{TG\cdot TI\,(CE^2+CG^2-CM^2)}\ ^{1)}.$$

Равным образом, если провести хорду MN и затем касательную NT, то обе касательные MT и NT пересекут ось TI в одной и той же точке T, ибо для той и другой будет $CP:CG=CG:CT$. А если провести прямую CN, то будет

$$TN=\frac{1}{CG}\sqrt{TG\cdot TI\,(CE^2+CG^2-CN^2)}\ ^{2)};$$

стало быть,

$$TM^2:TN^2=(CE^2+CG^2-CM^2):(CE^2+CG^2-CN^2).$$

А так как MN делится пополам в точке P, то

$$\sin CTM:\sin CTN=TN:TM=\sqrt{CE^2+CG^2-CN^2}:\sqrt{CE^2+CG^2-CM^2}.$$

121. Проведем (рис. 28) в концах диаметра A и B касательные AK, BL и продолжим какую-нибудь касательную MT пока она не пересечет обе первые касательные в точках K и L. Пусть ECF — сопряженный диаметр, которому параллельны как ордината MP, так и касательные AK и BL. Так как, по природе касательной,

$$CP:CA=CA:CT,$$

[1]) В первом издании: $TM^2=CG\sqrt{\dfrac{CE^2+CG^2-CM^2}{TG\cdot TI}}$. [*А. Ш.*]

[2]) В первом издании: $TN=CG\sqrt{\dfrac{CE^2+CG^2-CM^2}{TG\cdot TI}}$. [*А. Ш.*]

то, поскольку $CB = CA$, будем иметь

$$CP : AP = CA : AT \quad \text{и} \quad CP : BP = CA : BT.$$

Следовательно,

$$CP : CA = CA : CT = AP : AT = BP : BT,$$

а отсюда $AT : BT = AP : BP$. Но $AT : BT = AK : BL$, следовательно, $AK : BL = AP : BP$. Затем имеем

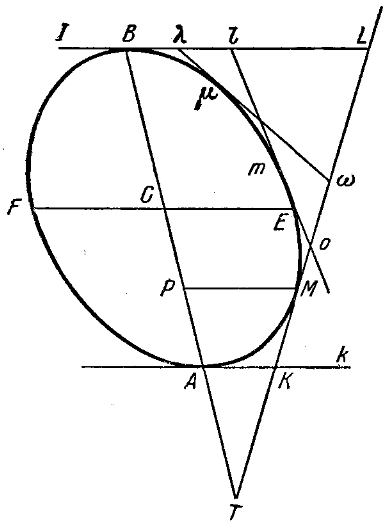

Рис. 28.

$$AT = \frac{CA \cdot AP}{CP}, \qquad BT = \frac{CA \cdot BP}{CP}$$

и

$$PT = \frac{CA \cdot AP}{CP} + AP = \frac{AP \cdot BP}{CP},$$

стало быть,

$$AT : PT = CA : BP = AK : PM;$$

подобным же образом получаем, что

$$BT : PT = CA : AP = BL : PM,$$

откуда

$$AK = \frac{CA \cdot PM}{BP}, \qquad BL = \frac{CA \cdot PM}{AP}$$

и

$$AK \cdot BL = \frac{CA^2 \cdot PM^2}{AP \cdot BP}.$$

Но $AP \cdot BP : PM^2 = AC^2 : CE^2$, и отсюда вытекает следующее замечательное свойство:

$$AK \cdot BL = CE^2,$$

из которого далее получаем, что

$$AK = CE\sqrt{\frac{AP}{BP}}, \qquad BL = CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$$

$$AP : BP = AK^2 : CE^2 = CE^2 : BL^2 = KM : ML,$$

а также

$$AK : BL = KM : LM.$$

122. Таким образом, в какой бы точке K кривой мы ни провели касательную, пересекающую параллельные друг другу касательные AK и BL в точках K и L, полудиаметр CE, параллельный касательным AK и BL, всегда будет средним пропорциональным между AK и BL, т. е. будет $CE^2 = AK \cdot BL$. Следовательно, если в какой-нибудь другой точке m кривой провести таким же образом касательную kml, то будет точно так же $CE^2 = Ak \cdot Bl$, поэтому

$$AK : Ak = Bl : BL,$$

а, значит, отсюда получится также, что $Ak : Kk = Bl : Ll$. Если касательные KL и kl пересекаются в точке o, то будет

$$AK : Bl = Ak : BL = Kk : Ll = ko : lo = Ko : Lo.$$

то, поскольку $CB=CA$, будем иметь

$$CP:AP=CA:AT \quad \text{и} \quad CP:BP=CA:BT.$$

Следовательно,

$$CP:CA=CA:CT=AP:AT=BP:BT,$$

а отсюда $AT:BT=AP:BP$. Но $AT:BT=AK:BL$, следовательно, $AK:BL=AP:BP$. Затем имеем

$$AT=\frac{CA\cdot AP}{CP}, \qquad BT=\frac{CA\cdot BP}{CP}$$

и

$$PT=\frac{CA\cdot AP}{CP}+AP=\frac{AP\cdot BP}{CP},$$

стало быть,

$$AT:PT=CA:BP=AK:PM;$$

подобным же образом получаем, что

$$BT:PT=CA:AP=BL:PM,$$

откуда

$$AK=\frac{CA\cdot PM}{BP}, \qquad BL=\frac{CA\cdot PM}{AP}$$

и

$$AK\cdot BL=\frac{CA^2\cdot PM^2}{AP\cdot BP}.$$

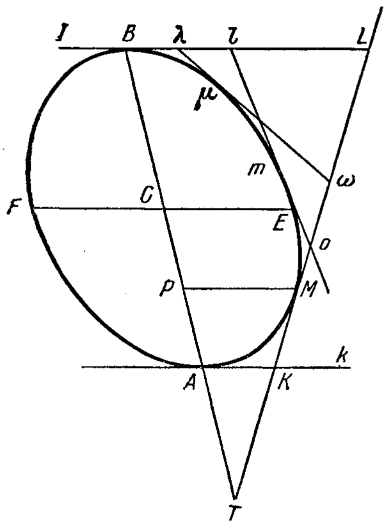

Рис. 28.

Но $AP\cdot BP:PM^2=AC^2:CE^2$, и отсюда вытекает следующее замечательное свойство:

$$AK\cdot BL=CE^2,$$

из которого далее получаем, что

$$AK=CE\sqrt{\frac{AP}{BP}}, \qquad BL=CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$$

$$AP:BP=AK^2:CE^2=CE^2:BL^2=KM:ML,$$

а также

$$AK:BL=KM:LM.$$

122. Таким образом, в какой бы точке K кривой мы ни провели касательную, пересекающую параллельные друг другу касательные AK и BL в точках K и L, полудиаметр CE, параллельный касательным AK и BL, всегда будет средним пропорциональным между AK и BL, т. е. будет $CE^2=AK\cdot BL$. Следовательно, если в какой-нибудь другой точке m кривой провести таким же образом касательную kml, то будет точно так же $CE^2=Ak\cdot Bl$, поэтому

$$AK:Ak=Bl:BL,$$

а, значит, отсюда получится также, что $Ak:Kk=Bl:Ll$. Если касательные KL и kl пересекаются в точке o, то будет

$$AK:Bl=Ak:BL=Kk:Ll=ko:lo=Ko:Lo.$$

Но имеем также, что

$$\sin Q : \sin K = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega},$$

откуда

$$HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega.$$

125. Если даны (рис. 27, стр. 67) два сопряженных полудиаметра CG и CE, которые образуют косой угол $GCE = q$, можно всегда найти два других сопряженных полудиаметра CM и CK, которые образуют прямой угол MCK. Пусть угол $GCM = p$; если положить угол $ECK = \pi$, то будет $q + \pi - p = 90^\circ$ и, следовательно,

$$\sin \pi = \cos (q - p) \quad \text{и} \quad \sin (q + \pi) = \cos p.$$

Отсюда (в силу § 119) получаем

$$\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin p \cos p}{\sin (q-p) \cos (q-p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2(q-p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2q \cos 2p - \cos 2q \sin 2p}.$$

Следовательно,

$$\frac{CG^2}{CE^2} = \sin 2q \operatorname{ctg} 2p - \cos 2q,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2GCM = \operatorname{ctg} 2q + \frac{CG^2}{CE^2 \sin 2q},$$

а это уравнение всегда дает возможное решение. Конечно,

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin q \cos p}{\sin (q-p)} \quad \text{и} \quad \frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\operatorname{tg} p}{\operatorname{tg} q},$$

откуда

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{tg} q - \frac{CG^2}{CM^2} \operatorname{tg} q.$$

А так как

$$CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2 \quad \text{и} \quad CK \cdot CM = CG \cdot CE \sin q,$$

то будет

$$CM + CK = \sqrt{CG^2 + 2CG \cdot CE \sin q + CE^2},$$

и

$$CM - CK = \sqrt{CG^2 - 2CG \cdot CE \sin q + CE^2},$$

откуда и определяются сопряженные взаимно перпендикулярные диаметры.

126. Итак, пусть (рис. 30) CA и CE — два взаимно перпендикулярных сопряженных полудиаметра конического сечения, которые обычно называют *главными диаметрами*, пересекающиеся друг с другом в центре C под прямым углом. Пусть абсцисса $CP = x$, ордината $PM = y$; тогда, как мы видели, $y^2 = \alpha - \beta x^2$; а если обозначить главные полудиаметры $Ac = a$ и $CE = b$, то будет $\alpha = b^2$ и $\beta = \frac{b^2}{a^2}$, так что получается

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

Из этого уравнения можно усмотреть, что, так как оно не изменяется, будут ли взяты x и y положительными или отрицательными, кривая содержит в себе четыре подобные и равные друг другу части, расположенные по обе стороны диаметров AC и EF. А именно, квадрант ACE подобен и равен квадранту ACF, а две равные им части расположены по другую сторону от диаметра EF.

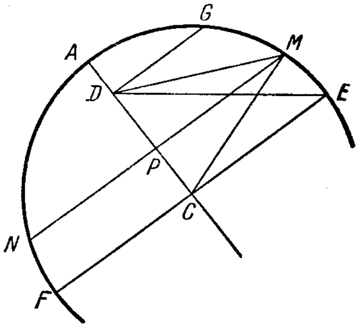

Рис. 30.

127. Если из центра C, который был принят нами за начало абсцисс, проведем прямую CM, то она будет

$$=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+x^2}.$$

Отсюда понятно, что если будет $b=a$, т. е. $CE=CA$, то $CM=\sqrt{b^2}=b=a$. Стало быть, в этом случае все прямые, проведенные из центра C до кривой, будут равны между собою. Так как последнее представляет собою свойство окружности, то очевидно, что коническое сечение, у которого оба сопряженных главных диаметра равны, является окружностью, уравнением которой при прямоугольных координатах, если положить $CP=x$ и $PM=y$, будет $y^2=a^2-x^2$, принимая радиус окружности $CA=a$.

128. Если же не будет иметь места $b=a$, то прямую CM никогда нельзя будет выразить рационально через x. Но на оси находится такая другая точка D, что все прямые DM, проведенные из нее до кривой, можно выразить рационально. Чтобы найти эту точку, положим $CD=f$. Тогда, поскольку $DP=f-x$, будем иметь

$$DM^2=f^2-2fx+x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=b^2+f^2-2fx+\frac{(a^2-b^2)\,x^2}{a^2}.$$

Это выражение будет квадратом в том случае, если $f^2=\frac{(a^2-b^2)(b^2+f^2)}{a^2}$, то есть $0=a^2-b^2-f^2$, откуда $f=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Таким образом, на оси AC имеются две подобные точки, причем каждая из них находится на расстоянии $CD=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра. В этом случае будем иметь также

$$DM^2=a^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+\frac{(a^2-b^2)\,x^2}{a^2},$$

а отсюда

$$DM=a-\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}=AC-\frac{CD\cdot CP}{AC}.$$

Если взять $CP=0$, получится $DM=DE=a=AC$; а если взять абсциссу $CP=CD$, то есть $x=\sqrt{a^2-b^2}$, то прямая DM перейдет в ординату DG и, стало быть, получится

$$DG=\frac{b^2}{a}=\frac{CE^2}{AC},$$

т. е. DG станет третьей пропорциональной между AC и CE.

129. В силу отмеченного особого свойства, которое присуще точкам D, определяемым вышеуказанным образом, эти точки главного диаметра заслуживают всяческого внимания. Этим точкам присущи еще многие другие замечательные свойства, благодаря которым возникли особые наименования. Эти точки называют *фокусами* или *пуповинами* конического сечения, и так как они расположены на большем диаметре a, то этот диаметр отличают от сопряженного с ним диаметра b, называя первый из них главной и поперечной осью, а другой диаметр — *сопряженной* с ней осью. А прямоугольная ордината DG, восстановленная в том или другом фокусе, получила наименование *полупараметра*, полным же параметром является хорда в точке D или дважды взятая DG. Ее называют также latus rectum[1]). Стало быть, сопряженная полуось CE есть средняя пропорциональная между полупараметром DG и поперечной полуосью AC. Далее, концы поперечной оси, где последнюю пересекает кривая, называют *вершинами*; таковой, например, является точка A. Последние обладают также тем свойством, что касательная к кривой, проведенная в этих местах, нормальна к главной оси AC.

130. Положим, что полупараметр $DG = c$ и что расстояние от фокуса до вершины $AD = d$. Тогда

$$CD = a - d = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{и} \quad DG = \frac{b^2}{a} = c;$$

отсюда

$$b^2 = ac \quad \text{и} \quad a - d = \sqrt{a^2 - ac};$$

стало быть,

$$ac = 2ad - d^2 \quad \text{и} \quad a = \frac{d^2}{2d - c}, \qquad b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}.$$

Таким образом, по заданному расстоянию фокуса от вершины $AD = d$ и по заданной половине «прямого бока» $DG = c$ можно определить коническое сечение. Если теперь положить $CP = x$, то будет

$$DM = a - \frac{(a-d)\,x}{a} = \frac{d^2}{2d - c} - \frac{(c-d)\,x}{d}.$$

Пусть $DP = t$; тогда

$$x = CD - t = \frac{(c-d)\,d}{2d - c} - t,$$

откуда

$$DM = c + \frac{(c-d)\,t}{d}.$$

Обозначим угол ADM через v; тогда

$$\frac{t}{DM} = -\cos v,$$

а поэтому

$$d \cdot DM = cd + (d - c)\,DM \cos v$$

и

$$DM = \frac{cd}{d - (d - c)\cos v} \quad \text{и} \quad \cos v = \frac{d\,(DM - DG)}{(d - c)\,DM}.$$

---

1) Буквально «прямой бок».

ГЛАВА VI

О ПОДРАЗДЕЛЕНИИ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА РОДЫ

131. Свойства, которые мы выявили в предшествующей главе, присущи в равной мере всем линиям, относящимся ко второму порядку, ибо мы не упоминали о каком-либо различии, которое отличало бы одни из этих линий от каких-либо других таких линий. Но хотя изложенные выше свойства являются общими для всех линий второго порядка, последние все-таки очень сильно отличаются друг от друга по своей форме, вследствие чего представляется целесообразным линии, входящие в состав этого порядка, разделить на роды, благодаря чему будет легче выделить различные фигуры, которые встречаются в этом порядке, а также выявить те свойства, которые присущи лишь отдельным их родам.

132. Изменяя лишь ось и начало абсцисс, мы привели общее уравнение линий второго порядка к такому виду, что все линии второго порядка содержатся в уравнении

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

в котором x и y обозначают прямоугольные координаты. Так как, стало быть, при любой абсциссе x ордината y имеет два значения: одно положительное и другое отрицательное, то та ось, на которой откладываются абсциссы x, делит кривую на две подобные и равные части. Эта ось будет к тому же ортогональным диаметром кривой линии, и всякая линия второго порядка будет иметь ортогональный диаметр, на котором, как на оси, я откладываю здесь абсциссы.

133. Итак, в приведенное уравнение входят три постоянных количества α, β и γ. Так как эти количества можно изменять бесчисленными способами, то получается неисчислимое разнообразие кривых линий, которые в большей или меньшей степени отличаются друг от друга с точки зрения формы. Ведь прежде всего одну и ту же фигуру можно получить бесконечно много раз из предложенного уравнения $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, а именно: если изменять начало абсцисс на оси, что достигается увеличением или уменьшением абсциссы x на заданное количество. Затем одна и та же фигура, содержащаяся в уравнении, может иметь различную величину, так что получается бесконечно много кривых линий, которые отличаются друг от друга лишь количественно[1]), подобно кругам, описанным

[1]) ratione quantitatis.

различными радиусами. Из изложенного ясно, что не всякое изменение букв α, β и γ дает различные виды или роды линий второго порядка.

134. Наибольшее различие кривых линий, содержащихся в уравнении

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

связано с природой коэффициента γ, в зависимости от того, имеет он положительное значение или отрицательное. Действительно, если γ имеет положительное значение, то, считая абсциссу x бесконечно большой,— а в этом случае член γx^2 становится бесконечно бо́льшим, чем остальные члены $\alpha + \beta x$, и поэтому выражение $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ получает положительное значение,— находим, что ордината y будет иметь точно так же два бесконечно больших значения, одно положительное и другое отрицательное. То же самое находим, если положить $x = -\infty$, так как и в этом случае выражение $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ будет иметь бесконечно большое положительное значение. Поэтому, если γ является положительным количеством, кривая будет иметь четыре ветви, уходящие в бесконечность, из которых две ветви будут соответствовать абсциссе $x = +\infty$ и две — абсциссе $x = -\infty$. Принято считать, что эти кривые, имеющие четыре уходящие в бесконечность ветви, составляют один род линий второго порядка, и их называют *гиперболами*.

135. Но если коэффициент γ имеет отрицательное значение, то при $x = +\infty$ или $-\infty$ выражение $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ сохраняет отрицательное значение, и стало быть, ордината y становится мнимой. Следовательно, у этих кривых ни абсцисса, ни ордината никогда не могут быть бесконечными и, стало быть, эта кривая не имеет какой-либо части, которая уходила бы в бесконечность, а вся кривая содержится в конечном и определенном пространстве. Этот вид линий второго порядка получил название *эллипсов*, и поэтому природа этих кривых выражается уравнением

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

если γ является отрицательной величиной.

136. Если, таким образом, значение γ, в зависимости от того, является ли оно положительным или отрицательным, создает столь различные свойства у линий второго порядка, что здесь с полным основанием устанавливается два различных вида линий, то с принятием $\gamma = 0$, каковое значение занимает среднее место между положительными и отрицательными, получающаяся при этом кривая точно так же образует некоторый средний между гиперболами и эллипсами вид. Этот вид кривой линии называют *параболой* и природа последней выражается, стало быть, уравнением $y^2 = \alpha + \beta x$. Здесь безразлично, будет ли β положительным или отрицательным количеством, так как природа кривой не изменяется, если взять абсциссу x отрицательной. Итак, пусть β является положительной величиной; тогда ясно, что когда x возрастает до бесконечности, ордината y становится точно так же бесконечно большой: как положительной, так и отрицательной, в силу чего парабола имеет две ветви, которые уходят в бесконечность. Но больше двух таких ветвей она не может иметь, так как, если положить $x = -\infty$, ордината y получает мнимое значение.

137. Итак, мы имеем три вида линий второго порядка: эллипс, параболу и гиперболу, которые до такой степени отличаются друг от друга,

что их совершенно невозможно смешать. Ибо существенным признаком их отличия является число ветвей, уходящих в бесконечность: эллипс совершенно не имеет какой бы то ни было части, которая уходила бы в бесконечность, и целиком умещается в конечном пространстве, парабола же имеет две ветви, уходящие в бесконечность, а гипербола имеет четыре такие ветви. Поэтому если в предшествующей главе мы рассмотрели в общем виде свойства конических сечений, то теперь мы рассмотрим, какими свойствами обладает каждый из видов конических сечений [24].

138. Начнем с эллипса (рис. 31), уравнение которого таково:

$$y^2 = \alpha + \beta x - \gamma x^2;$$

абсциссы откладываются на ортогональном диаметре. Но так как начало координат мы можем избрать по своему усмотрению, то, если его сдвинуть на промежуток $\frac{\beta}{2\gamma}$, получится уравнение следующего вида:

$$y^2 = \alpha - \gamma x^2,$$

при котором абсциссы откладываются от центра фигуры. Итак, пусть C

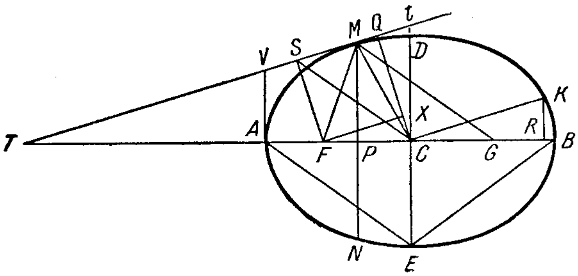

Рис. 31.

является центром и AB—прямоугольным диаметром, тогда абсциссой будет $CP = x$ и ординатой $PM = y$. Стало быть, если взять $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, получится $y = 0$, а если x выйдет за пределы $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, то ордината y станет мнимой, и это указывает на то, что кривая целиком содержится в указанных пределах. Следовательно, будем иметь $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Положив далее $x = 0$, получим $CD = CE = \sqrt{\alpha}$. Положим теперь, что полудиаметр или главная полуось $CA = CB = a$, а сопряженная полуось $CD = CE = b$; тогда будет $\alpha = b^2$ и $\gamma = \frac{b^2}{a^2}$. Отсюда для эллипса получается следующее уравнение:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

139. Когда эти сопряженные полуоси a и b оказываются равными друг другу, тогда эллипс переходит в окружность, так как $y^2 = a^2 - x^2$, или $y^2 + x^2 = a^2$; ибо тогда будет $CM = \sqrt{x^2 + y^2} = a$ и, следовательно, все точки кривой окажутся на равном расстоянии от центра C, что является свойством окружности. Но если полуоси a и b не равны между собою, то кривая линия оказывается удлиненной, т. е. либо AB больше, чем DE, либо DE больше, чем AB. А так как сопряженные оси AB и DE можно поменять местами, то положим, что AB—большая ось; тогда величина a больше величины b и расстояние от центра оси до фокусов эллипса F и G равно $CF = CG = \sqrt{a^2 - b^2}$; полупараметр

эллипса $= \frac{b^2}{a}$ есть величина ординаты, восстановленной в одном из фокусов F или G.

140. Если из какой-нибудь точки кривой M провести к фокусам прямые FM и GM, то, как было указано выше,

$$FM = AC - \frac{CF \cdot CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{2}, \quad GM = \frac{a+x\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad \text{и} \quad FM+GM=2a.$$

Следовательно, для любой точки M сумма расстояний от того и другого фокусов FM и GM всегда постоянна и равна большей оси $AB = 2a$; на этом основан хорошо известный способ механического построения эллипса.

141. В точке M проведем касательную TMt, которая пересекает оси в точках T и t, откуда, как излагалось выше,

$$CP : CA = CA : CT$$

и $CT = \frac{a^2}{x}$; аналогично, меняя обозначения, получаем $Ct = \frac{b^2}{y}$.

Вследствие этого

$$TP = \frac{a^2}{x} - x, \quad TF = \frac{a^2}{x} - \sqrt{a^2-b^2} \quad \text{и} \quad TA = \frac{a^2}{x} - a.$$

Поскольку $TP = \frac{a^2-x^2}{x} = \frac{a^2y^2}{b^2x}$ и $TM = \frac{y\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$, то отсюда

$$\operatorname{tg} CTM = \frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \sin CTM = \frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$$

и

$$\cos CTM = \frac{a^2y}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}.$$

Следовательно, если в точке A восставить перпендикуляр AV к оси, который в то же время является касательной к кривой, то будет

$$AV = \frac{a(a-x)}{x}\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b^2(a-x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

так как $ay = b\sqrt{a^2-x^2}$.

142. Так как $FT = \frac{a^2 - x\sqrt{a^2-b^2}}{x}$ и $FM = \frac{a^2-x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

то $FT : FM = a : x$. Равным образом, поскольку

$$GT = \frac{a^2+x\sqrt{a^2-b^2}}{x} \quad \text{и} \quad GM = \frac{a^2+x\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

будет $GT : GM = a : x$, откуда $FT : FM = GT : GM$. Но

$$FT : FM = \sin FMT : \sin CTM \quad \text{и} \quad GT : GM = \sin GMt : \sin CTM,$$

вследствие чего будет $\sin FMT = \sin GMt$ и, стало быть, угол $FMT =$ = углу GMt. Таким образом, прямые линии, проведенные из фокусов в какую-нибудь точку кривой линии M, одинаково наклонены к касательной, проведенной к кривой линии в этой же точке M, что является самым главным[1]) свойством фокусов.

---

[1]) maxime principalis.

143. Так как $GT : GM = a : x$, то, поскольку $CT = \frac{a^2}{x}$, будет также $CT : CA = a : x$, откуда $GT : GM = CT : CA$. Поэтому если из центра C провести параллельную прямой GM линию CS, пересекающую касательную в точке S, то будет $CS = CA = a$. Точно так же, если из точки C провести линию, параллельную прямой FM до касательной, то она будет точно так же $= CA = a$. А так как $TM = \frac{y}{b^2x}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}$, то, поскольку $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$, будет

$$TM = \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}\,^{1)}.$$

Но $FT \cdot GT = \frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{x^2}$, откуда

$$TM = \frac{y}{b}\sqrt{FT \cdot GT}.$$

Поэтому, вследствие того, что $TG : TC = TM : TS$, будем иметь

$$TS = \frac{TM \cdot CT}{TG}$$

и, стало быть,

$$TS = \frac{y \cdot CT}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y \cdot CT \cdot FT}{b\sqrt{FT \cdot GT}} = \frac{y^2 \cdot CT \cdot FT}{b^2 \cdot TM}.$$

Затем имеем $PT = \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{CT \cdot y^2}{b^2}$, так что $TS = \frac{PT \cdot FT}{TM}$ и, следовательно,

$$TM : PT = FT : TS;$$

отсюда видно, что треугольники TMP и TFS подобны и, стало быть, прямая FS, проведенная из фокуса F к касательной, перпендикулярна последней. Конечно, будет также $SV = \frac{AF \cdot MV}{GM}$, что можно вывести из вышеприведенных выражений.

144. Следовательно, если из того или другого фокуса F провести к касательной перпендикуляр FS и если соединить точку S с центром C прямой CS, то эта линия CS всегда будет равна большей полуоси $AC = a$. А так как $TM : y = TF : FS$, то будет

$$FS = \frac{y \cdot TF}{TM} = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}};$$

стало быть,

$$GT : FT = GM : FM = CD^2 : FS^2;$$

перпендикуляр же, опущенный из другого фокуса на касательную, будет $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$. Следовательно, меньшая полуось $CD = b$ будет средней пропорциональной между этими перпендикулярами. Теперь опустим также перпендикуляр CQ из центра C на касательную.

---

1) В первом издании $\frac{y}{bx}\sqrt{(a^4 - x^2)(a^2 - b^2)}$. [*А. Ш.*]

Тогда $TF : FS = CT : CQ$; следовательно,

$$CQ = \frac{b \cdot CT}{\sqrt{FT \cdot GT}} = \frac{bx \cdot CT}{a\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}},$$

откуда

$$CQ - FS = \frac{b \cdot CF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = CX,$$

если провести линию FX параллельно касательной линии. Отсюда

$$CQ - CX = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}} \quad \text{и} \quad CQ + CX = \frac{b \cdot TG}{\sqrt{FT \cdot GT}},$$

так что

$$CQ^2 - CX^2 = b^2 \quad \text{и} \quad CX = \sqrt{CQ^2 - b^2}.$$

Следовательно, если дана меньшая ось, то на перпендикуляре CQ можно найти такую точку X, что если в ней восставить перпендикуляр к CQ, то он пройдет через фокус F.

145. Изложив эти свойства фокусов, рассмотрим теперь два каких-либо сопряженных диаметра. Пусть CM будет полудиаметром; сопряженный с ним диаметр можно найти, проведя из центра линию CK, параллельную касательной линии TM. Положим $CM = p$, $CK = q$ и угол $MCK = CMT = s$. Тогда, как мы видели выше, во-первых, $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$ и, во-вторых, $pq \sin s = ab$.

Но

$$p^2 = x^2 + y^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} \text{ и } q^2 = a^2 + b^2 - p^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} = FM \cdot GM$$

и точно так же $p^2 = FK \cdot GK$. Затем, так как $CQ = \dfrac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$, то

$$\sin CMQ = \sin s = \frac{ab}{p\sqrt{FM \cdot GM}}.$$

Наконец,

$$TM : TP = \frac{y}{b}\sqrt{FT \cdot GT} :{}^{1)}\ \frac{a^2y^2}{b^2x} = \sqrt{FM \cdot GM} :{}^{2)}\ \frac{ay}{b} = CK : CR,$$

откуда

$$CR = \frac{ay}{b} \quad \text{и} \quad KR = \frac{bx}{a},$$

и, следовательно,

$$CR \cdot KR = CP \cdot PM.$$

Наконец, будем иметь

$$\sin FMS = \frac{b}{\sqrt{GM \cdot FM}} = \frac{b}{q};$$

а так как, далее,

$$x = CP = \frac{a\sqrt{p^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{и} \quad y = \frac{b\sqrt{a^2 - p^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = PM,$$

---

[1]) В первом издании вместо знака деления (:) стояла запятая (,). [*А. Ш.*]

[2]) В первом издании вместо знака деления (:) стоял знак равенства (=). [*А. Ш.*]

а также

$$CR = \frac{a\sqrt{a^2-p^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{и} \quad KR = \frac{b\sqrt{p^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

то

$$\operatorname{tg} ACM = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 2ACM = \frac{2yx}{x^2-y^2} = \frac{2ab\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}}{(a^2+b^2)p^2-2a^2b^2}.$$

Но

$$ab = pq\cdot\sin s, \quad a^2+b^2 = p^2+q^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)} = -pq\cos s,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2ACM = \frac{-q^2\sin 2s}{p^2+q^2\cos 2s}\ ^{1)},$$

так как $\cos s$ отрицателен. Наконец, $CK^2 = MT\cdot Mt$. А из ранее изложенного следует, что

$$MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}} \quad \text{и} \quad AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}};$$

а отсюда

$$AV : MV = b : q = CE : CK.$$

Таким образом, если провести прямые AM и EK, то они будут параллельны друг другу [25].

146. Так как $pq\sin s = ab$, то pq больше, чем ab, а так как $p^2+q^2 = a^2+b^2$, то количества p и q ближе к равенству, чем a и b [2]), откуда следует, что среди всех сопряженных диаметров больше всего отличаются друг от друга ортогональные диаметры. Итак, пусть требуется найти два равных сопряженных друг с другом диаметра, для чего положим, что $q = p$. Тогда

$$2p^2 = a^2+b^2 \quad \text{и} \quad p = q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

а равно

$$\sin s = \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \cos s = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2},$$

откуда

$$\sin\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}, \quad \cos\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} CEB \quad \text{и} \quad MCK = 2CEB = AEB.$$

Далее,

$$CP = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad CM = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

стало быть, равные друг другу сопряженные полудиаметры CM и CK будут параллельны хордам AE и BE.

---

1) В первом издании: $\frac{-2q^2\cos s}{p^2\operatorname{tg}^2\cos 2s}$. [*А. Ш.*]

2) quantitates p et q magis ad rationem aequalitatis accedunt quam a et b.

147. Если абсциссы отсчитывать от вершины A и принять $AP=x$, $PM=y$, то тогда что прежде было x, становится $a-x$, и получается следующее уравнение:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2;$$

здесь ясно, что $\frac{2b^2}{a}$ является параметром или «прямым боком» эллипса. Положим, что полупараметр, т. е. ордината, в фокусе $=c$ и что расстояние фокуса от вершины $AF=d$; тогда

$$\frac{b^2}{a}=c \quad \text{и} \quad a-\sqrt{a^2-b^2}=d=a-\sqrt{a^2-ac},$$

откуда получаем

$$2ad-d^2=ac \quad \text{и} \quad a=\frac{d^2}{2d-c}.$$

Отсюда следует, что

$$y^2=2cx-\frac{c(2d-c)x^2}{d^2};$$

это — уравнение эллипса при прямоугольных координатах x и y, если отсчитывать абсциссы x на главной оси AB от вершины A, и оно получается по заданному расстоянию фокуса от вершины $AF=d$ и по полупараметру c. Здесь следует отметить, что $2d$ всегда должно быть больше c, так как

$$AC=a=\frac{d^2}{2d-c} \quad \text{и} \quad CD=b=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}.$$

148. Следовательно, в случае, если $2d=c$, у нас будет $y^2=2cx$, а это уравнение, как мы видели выше, является уравнением для параболы (рис. 32), так как ранее данное уравнение $y^2=\alpha+\beta x$ приводится к этому виду, если начало абсцисс сдвинуть на промежуток $=\frac{\alpha}{\beta}$. Итак, пусть MAN представляет собою параболу, природа которой выражается с помощью уравнения $y^2=2cx$ между абсциссой $AP=x$ и ординатой $PM=y$. Следовательно, расстояние фокуса от вершины $AF=$ $=d=\frac{1}{2}c$ и полупараметр $FH=c$, и повсюду на кривой будет $PM^2=2FH\cdot AP$. Отсюда следует, что если считать абсциссу AP бесконечной, то одновременно увеличиваются до бесконечности ординаты PM и PN и, стало быть, кривая по обе стороны от оси AP уходит в бесконечность. А если считать абсциссу x отрицательной, то ордината становится мнимой, следовательно, оси за точкой A по направлению к T уже не соответствует никакой участок кривой.

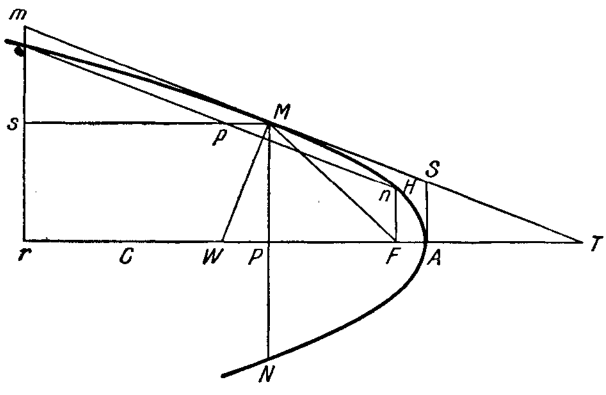

Рис. 32.

149. Так как уравнение эллипса переходит в параболу, если положить $2d=c$, то ясно, что парабола является не чем иным, как эллипсом, у которого полуось $a=\frac{d^2}{2d-c}$ стала бесконечной. Вследствие этого все свойства, которые мы нашли у эллипса, можно перенести и на параболу, если считать ось a бесконечной. И прежде всего, так как

$$AF=\frac{1}{2}c, \text{ то будет } FP=x-\frac{1}{2}c;$$

поэтому если из фокуса F проведем в точку M кривой прямую FM, то будет

$$FM^2=x^2-cx+\frac{1}{4}c^2+y^2=x^2+cx+\frac{1}{4}c^2$$

и, стало быть,

$$FM=x+\frac{1}{2}c=AP+AF,$$

что представляет собою главное свойство фокуса в параболе.

150. Так как парабола получается из эллипса при бесконечном увеличении большой оси, рассмотрим параболу, как если бы она была эллипсом, и пусть полуось последнего $AC=a$, где a представляет собою бесконечное количество, так что центр C бесконечно удален от вершины A. Проведем в точке M касательную MT к кривой, встречающую ось в T; так как

$$CP:CA=CA:CT, \quad \text{то} \quad CT=\frac{a^2}{a-x},$$

поскольку $CP=a-x$. Отсюда $AT=\frac{ax}{a-x}$. Но так как a — бесконечное количество, то абсцисса x по сравнению с ней исчезает, и получается $a-x=a$, стало быть, $AT=x=AP$. Это можно показать также следующим образом: так как $AT=\frac{ax}{a-x}$, то $AT=x+\frac{x^2}{a-x}$ и дробь в этом выражении исчезает, потому что ее знаменатель бесконечен, тогда как числитель конечен; поэтому $AT=AP=x$.

151. Следовательно, если из точки M провести в бесконечно далекий центр параболы линию MC, которая будет параллельна оси AC, то она также будет диаметром кривой, который делит пополам все хорды, параллельные касательной MT. Стало быть, если провести хорду или ординату mn, параллельную касательной MT, то диаметр Mp рассечет ее в p пополам. Следовательно, всякая прямая, проведенная в параболе параллельно оси AP, будет косоугольным диаметром. Чтобы выявить природу подобного рода диаметров, положим $Mp=t$, $pm=u$ и проведем из точки m перпендикуляр к оси msr. Тогда, поскольку $PT=2x$ и $MT=\sqrt{4x^2+2cx}$, будем иметь

$$\sqrt{4x^2+2cx}:2x:\sqrt{2cx}=pm:ps:ms,$$

а это дает

$$ps=\frac{2xu}{\sqrt{4x^2+2cx}}=u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} \text{ и } ms=u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}.$$

Стало быть,

$$Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} \quad \text{и} \quad mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}.$$

А так как $mr^2 = 2c \cdot Ar$, то будет

$$2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cu^2}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}},$$

и отсюда

$$u^2 = 2t(2x+c) = 4FM \cdot t, \quad \text{то есть} \quad pm^2 = 4FM \cdot Mp.$$

А для угла наклона mps будем иметь, что его

$$\sin = \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}, \quad \cos = \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}};$$

следовательно,

$$\sin 2mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x \pm c} = \frac{y}{FM} = \sin MFP$$

и, таким образом, угол $mps = MTP = \frac{1}{2}MFr$.

152. Так как $MF = AP + AF$, то в силу $AP = AT$ будет $FM = FT$; следовательно, треугольник MFT равнобедренный и угол $MFr = 2MTA$, как мы только что нашли. Далее, так как $MT = 2\sqrt{x\left(x + \frac{1}{2}c\right)}$, то MT будет $= 2\sqrt{AP \cdot FM}$. Следовательно, если из фокуса F опустить перпендикуляр FS на касательную, то

$$MS = TS = \sqrt{AP \cdot FM} = \sqrt{AT \cdot TF};$$

отсюда $AT : TS = TS : TF$. Из этой пропорции ясно, что точка S находится на прямой AS, перпендикулярной к оси в вершине A [26]. Но

$$AS = \frac{1}{2}PM \quad \text{и} \quad AS : TS = AF : FS;$$

стало быть, $FS = \sqrt{AF \cdot FM}$, и FS будет средней пропорциональной между AF и FM. Кроме того, будет

$$AS : MS = AS : TS = FS : FM = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}.$$

Если же провести к касательной M нормаль MW, пересекающую ось в точке W, то будет

$$PT : PM = PM : PW, \quad \text{то есть} \quad 2x : \sqrt{2cx} = \sqrt{2cx} : PW,$$

откуда получается, что $PW = c$. Стало быть, отрезок PW на оси, находящийся между ординатой PM и нормалью WM, имеет постоянную величину и равен полупараметру или ординате FH. Кроме того, будет

$$FW = FT = FM \text{ и } MW = 2\sqrt{AF \cdot FM}.$$

153. Перейдем теперь к гиперболе, природу которой выражает уравнение

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

если абсциссы откладывать на ортогональном диаметре. А если к тому же начало абсцисс перенести на расстояние $\frac{\beta}{2\gamma}$, то получится уравнение следующего вида: $y^2=\alpha+\gamma x^2$, в котором абсциссы отсчитываются от центра. При этом γ должно быть положительным количеством; а что касается α, то безразлично, будет ли оно положительным количеством или отрицательным, ибо если переставить координаты x и y, то положительность количества α сменится отрицательностью и наоборот[1]). Поэтому пусть α будет отрицательным количеством и $y^2=\gamma x^2-\alpha$; тогда

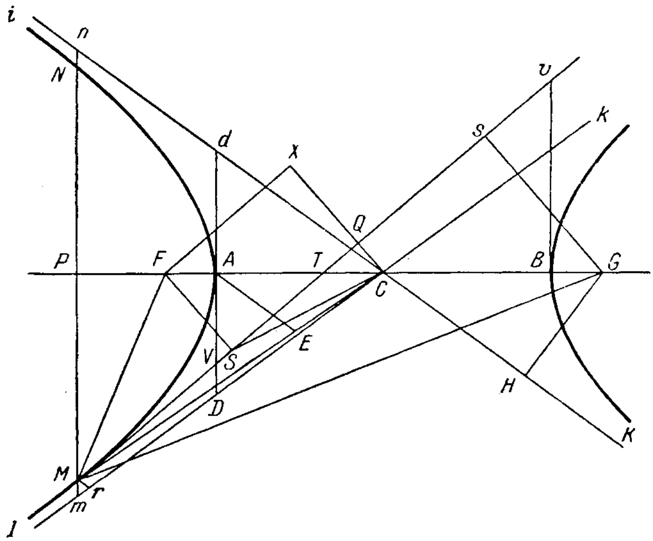

Рис. 33.

ясно, что ордината y будет дважды исчезать, а именно, когда будет

$$x=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad \text{и} \quad x=-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Следовательно, если обозначить (рис. 33) через C центр, то A и B будут теми точками, в которых кривая пересекает ось, и если положить полуось $CA=CB=a$, то будет $a=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ и $\alpha=\gamma a^2$, откуда

$$y^2=\gamma x^2-\gamma a^2.$$

Следовательно, до тех пор, пока x^2 меньше, чем a^2, ордината будет мнимой и, стало быть, всей оси AB не будет соответствовать какая бы то ни было часть кривой. А если мы будем брать $x^2>a^2$, то ординаты будут непрерывно возрастать и уйдут в бесконечность. Стало быть, гипербола будет иметь четыре ветви AI, Ai BK, Bk, которые уходят в бесконечность, подобны друг другу и равны между собою, что и является главным свойством гипербол.

154. Так как при $x=0$ получается $y^2=-\gamma a^2$, то гипербола, в отличие от эллипса, не имеет сопряженной оси, потому что в центре C ордината оказывается мнимой. Стало быть, и сопряженная ось будет

[1]) permutatis enim coordinatis x et y affirmatio quantitatis α in negationem mutatur et vicissim.

мнимой; но для того чтобы сохранить некоторое подобие эллипса, положим эту ось $= b\sqrt{-1}$, так что будем иметь $\gamma a^2 = b^2$ и $\gamma = \frac{b^2}{a^2}$. Следовательно, если обозначить абсциссу $CP = x$ и ординату $PM = y$, то будет

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

стало быть, рассмотренное раньше уравнение эллипса

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

переходит в уравнение гиперболы, если поставить $-b^2$ вместо b^2. Таким образом, благодаря этому сродству найденные раньше свойства эллипса могут быть легко перенесены на гиперболу. И прежде всего, конечно, так как у эллипса расстояние фокусов от центра было $= \sqrt{a^2 - b^2}$, то для гиперболы будет $CF = CG = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отсюда получится

$$FP = x - \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad GP = x + \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда, в силу того, что $y^2 = -b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$, будем иметь

$$FM = \sqrt{a^2 + x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - a$$

и

$$GM = \sqrt{a^2 + x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} + 2x\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} + a.$$

Следовательно, если из обоих фокусов провести в точку M кривой прямые FM и GM, то получится

$$FM + AC = \frac{CP \cdot CF}{CA} \quad \text{и} \quad GM - AC = \frac{CP \cdot CF}{CA}.$$

Следовательно, разность этих прямых линий $GM - FM$ равна $2AC$. Стало быть, подобно тому, как в эллипсе сумма этих двух линий равна главной оси AB, так в гиперболе разность этих линий равна главной оси AB.

155. Отсюда можно также определить положение касательной MT, ибо у линий второго порядка всегда имеет место $CP : CA = CA : CT$, откуда

$$CT = \frac{a^2}{x} \quad \text{и} \quad PT = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2y^2}{b^2x},$$

а отсюда

$$MT = \frac{y}{b^2x}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} = \frac{y}{bx}\sqrt{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}.$$

Но

$$FM \cdot GM = \frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{a^2};$$

следовательно, $MF = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM}$. Затем,

$$FT = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{x} \quad \text{и} \quad GT = \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{x};$$

стало быть,

$$FT:FM=a:x \quad \text{и} \quad GT:GM=a:x.$$

Отсюда следует, что $FT:GT=FM:GM$, и эта пропорция показывает, что касательная MT делит пополам угол FMG и что угол $FMT=$ $=$ углу GMT. А линия CM, будучи продолжена, окажется косоугольным диаметром, который делит пополам все ординаты, параллельные касательной MT.

156. Опустим из центра C на касательную перпендикуляр CQ; тогда будет

$$TM:PT:PM=CT:TQ:CQ$$

или

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM\cdot GM}:\frac{a^2y^2}{b^2x}:y=\frac{a^2}{x}:TQ:CQ;$$

откуда получается

$$TQ=\frac{a^3y}{bx\sqrt{FM\cdot GM}} \quad \text{и} \quad CQ=\frac{ab}{\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

Опустим таким же образом из фокуса F на касательную перпендикуляр FS; тогда будет

$$TM:PT:PM=FT:TS:FS$$

или

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM\cdot GM}:\frac{a^2y^2}{b^2x}:y=\frac{a\cdot FM}{x}:TS:FS,$$

откуда получается

$$TS=\frac{a^2y\cdot FM}{bx\sqrt{FM\cdot GM}} \quad \text{и} \quad FS=\frac{b\cdot FM}{\sqrt{FM\cdot GM}};$$

равным образом, если из другого фокуса G опустить на касательную перпендикуляр Gs, то получится

$$Ts=\frac{a^2y\cdot GM}{bx\sqrt{FM\cdot GM}} \quad \text{и} \quad Gs=\frac{b\cdot GM}{\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

Следовательно, отсюда получим

$$TS\cdot Ts=\frac{a^4y^2}{b^2x^2}=\frac{a^2(x^2-a^2)}{x^2}=CT\cdot PT \quad \text{и} \quad TS:CT=PT:Ts.$$

Затем получается, что $FS\cdot Gs=b^2$. А так как, далее, $QS=Qs$, то будет

$$QS=\frac{TS+Ts}{2}=\frac{a^2y(FM+GM)}{2bx\sqrt{FM\cdot GM}}=\frac{ay\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{FM\cdot GM}}=Qs,$$

откуда следует, что

$$CS^2=CQ^2+QS^2=\frac{a^2b^4+a^4y^2+a^2b^2y^2}{b^2\cdot FM\cdot GM}=\frac{a^2b^4(a^2+b^2)(b^2x^2-a^2b^2)}{b^2\cdot FM\cdot GM}=\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{FM\cdot GM}=a^2.$$

Стало быть, как и в эллипсе, прямая $CS=a=CA$. Затем

$$CQ+FS=\frac{bx\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{FM\cdot GM}}$$

и, стало быть,

$$(CQ+FS)^2-CQ^2=\frac{b^2x^2(a^2+b^2)-a^4b^2}{a^2\cdot FM\cdot GM}=b^2.$$

Следовательно, если из фокуса F параллельно касательной провести прямую FX, пересекающую перпендикуляр CQ, продолженный до X, то будет $CX=\sqrt{b^2+CQ^2}$: свойство, подобное тому, какое было найдено у эллипса.

157. Если в вершинах A и B провести перпендикуляры к оси до тех пор, пока они не пересекут касательную в точках V и v, то, поскольку

$$AT=\frac{a(x-a)}{x} \quad \text{и} \quad BT=\frac{a(x+a)}{x},$$

получим $PT:PM=AT:AV=BT:Bv$, откуда

$$AV=\frac{b^2(x-a)}{ay} \quad \text{и} \quad Bv=\frac{b^2(x+a)}{ay};$$

следовательно,

$$AV\cdot Bv=\frac{b^4(x^2-a^2)}{a^2y^2}=b^2,$$

то есть

$$AV\cdot Bv=FS\cdot Gs.$$

Затем $PT:TM=AT:TV=BT:Tv$; следовательно,

$$TV=\frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM\cdot GM} \quad \text{и} \quad Tv=\frac{b(x+a)}{xy}\sqrt{FM\cdot GM},$$

откуда получается

$$TV\cdot Tv=\frac{a^2}{x^2}FM\cdot GM=FT\cdot GT \quad [27].$$

Подобным же образом можно отсюда вывести еще много других следствий.

158. Так как $CT=\frac{a^2}{x}$, то ясно, что чем большей берут абсциссу $CP=x$, тем меньшим бывает промежуток CT; таким образом, касательная, которая соприкасается с кривой при продолжении в бесконечность, пройдет через самый центр C и тогда получится $CT=0$. А так как

$$\operatorname{tg} PTM=\frac{PM}{PT}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

то в случае удаления точки M в бесконечность, то есть если положить $x=\infty$, получится

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{bx}{a}$$

Таким образом, касательная к кривой, продолженной до бесконечности, пройдет через центр C и составит с осью угол ACD, тангенс которого $=\frac{b}{a}$. Стало быть, если через вершину A провести перпендикулярную к оси линию $AD=b$, то линия CD, будучи продолжена в обе стороны до бесконечности, никогда, конечно, не коснется кривой, но кривая будет все больше к ней приближаться и, наконец, на бесконечности сольется полностью с прямой CI. То же самое относится к части Ck, которая в конце концов сольется с ветвью Bk. А если с другой стороны провести под тем же углом прямую KCi, то она сольется с ветвями BK

и Ai, если их продолжить до бесконечности. А такого рода прямые, к которым какая-либо кривая постоянно все больше приближается и, наконец, на бесконечно большом расстоянии с ними соприкасается, называются *асимптотами*. Таким образом, прямые ICk и KCi являются двумя асимптотами гиперболы.

159. Итак, асимптоты взаимно пересекаются в центре C гиперболы и наклонены к оси под углом $ACD = ACd$, тангенс которого $= \frac{b}{a}$; тангенс же двойного угла $DCd = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. Отсюда ясно, что если будет $b = a$, то угол, под которыми асимптоты взаимно пересекаются, т. е. угол DCd равен прямому углу. В этом случае гиперболу называют *равнобочной*. Но когда $AC = a$ и $AD = b$, получается $CD = Cd = \sqrt{a^2 + b^2}$. Поэтому если из фокуса G опустить перпендикуляр GH на какую-либо из асимптот, то, поскольку $CG = \sqrt{a^2 + b^2} = CD$, будет

$$CH = AC = BC = a \quad \text{и} \quad CH = b.$$

160. Продолжим ординату $MPN = 2y$ в обе стороны до тех пор, пока она не пересечет асимптоты в точках m и n; тогда

$$Pm = Pn = \frac{bx}{a} \quad \text{и} \quad Cm = Cn = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = FM + AC = GM - AC.$$

Затем, конечно, будет

$$Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a} \quad \text{и} \quad Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a},$$

откуда

$$Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2} = b^2,$$

так как $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$; стало быть, повсюду будет

$$Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = Nn \cdot Nm = Nn \cdot Mn = b^2 = AD^2.$$

Проведем из M линию Mr, параллельную асимптоте Cd; тогда будет

$$2b : \sqrt{a^2 + b^2} = Mm : mr \, (Mr),$$

откуда

$$mr = Mr = \frac{(bx - ay)\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$$

и

$$Cm - mr = Cr = \frac{(bx + ay)\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}.$$

Следовательно, отсюда можно заключить, что

$$Mr \cdot Cr = \frac{(b^2x^2 - a^2y^2)(a^2 + b^2)}{4a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Или же если из A провести линию AE параллельно асимптоте Cd, то будет $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ и, значит,

$$Mr \cdot Cr = AE \cdot CE.$$

Последнее является основным свойством гиперболы, отнесенной к асимптотам.

161. Следовательно, если (рис. 34) откладывать абсциссы $CP = x$ на одной асимптоте от центра, а ординаты $PM = y$ проводить параллельно другой асимптоте, то будет $yx = \frac{a^2+b^2}{4}$, причем $AC = BC = a$ и $AD = Ad = b$; и если положить $AE = CE = h$, то будет $yx = h^2$ и $y = \frac{h^2}{x}$. Следовательно, если взять $x = 0$, то получится $y = \infty$, и наоборот, если

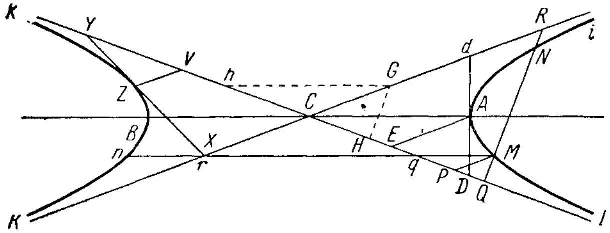

Рис. 34.

взять $x = \infty$, то получится $y = 0$. Проведем теперь через точку M кривой какую-нибудь прямую $QMNR$, которая пусть будет параллельна произвольно проведенной прямой GH, и пусть $CQ = t$ и $QM = u$; тогда будет

$$GH : CH : CG = u : PQ : PM;$$

стало быть,

$$PQ = \frac{CH}{GH}u, \qquad PM = \frac{CG}{GH}u,$$

откуда

$$y = \frac{CG}{GH}u \quad \text{и} \quad x = t - \frac{CH}{GH}u.$$

Если подставить эти значения, получим

$$\frac{CG}{GH}tu - \frac{CH \cdot CG}{GH^2} \cdot u^2 = h^2$$

или

$$u^2 - \frac{GH}{CH}tu + \frac{GH^2}{CH \cdot CG}h^2 = 0.$$

Стало быть, ордината u имеет два значения, а именно QM и QN, сумма которых равна $\frac{GH}{CH}t = QR$, а прямоугольник $QM \cdot QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG}h^2$.

162. Так как, стало быть, $QM + QN = QR$, то $QM = RN$ и $QN = RM$. Следовательно, если точки M и N совпадут, а в этом случае прямая QR касается кривой, то в точке касания она разделится на две равные части. Так, например, если прямая XY касается гиперболы, то точка касания Z находится посередине прямой XY. Поэтому если из Z провести линию ZV, параллельную другой асимптоте, то будет $CV = VY$; и это дает удобный способ проведения касательной в любой точке Z гиперболы. А именно, следует взять $VY = CV$, и тогда прямая, про-

веденная через точку Y и через точку Z кривой, будет касательной к гиперболе в указанной точке Z.

Так как, стало быть, $CV \cdot ZV = h^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, то

$$CX \cdot CY = a^2 + b^2 = CD^2 = CD \cdot Cd.$$

Поэтому, если провести прямые DX и dY, то они будут параллельны друг другу. Отсюда получается очень легкий способ проведения к кривой любого количества касательных.

163. Так как, далее, прямоугольник $QM \cdot QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} \cdot h^2$, то ясно, что где бы мы ни провели прямую линию QR параллельно HG, прямоугольник $QM \cdot QN$ будет всегда иметь одну и ту же величину. Следовательно, будет также

$$QM \cdot QN = QM \cdot MR = QN \cdot NR = \frac{CH^2}{CH \cdot CG} h^2.$$

Таким образом, если представить себе касательную, проведенную параллельно QR, то так как в точке касания между асимптотами она разделится на две равные части, всегда будет (если половину касательной обозначить через q)

$$QM \cdot QN = QM \cdot MR = RN \cdot RM = RN \cdot NQ = q^2.$$

Последнее представляет собою замечательное свойство гипербол, описанных между асимптотами.

164. Так как гипербола состоит из двух диаметрально противоположных друг другу частей IAi и KBk, то указанные свойства относятся не только к проведенным между асимптотами прямым, которые пересекают одну и ту же часть кривой в двух точках, но и к тем прямым, которые доходят до противолежащих частей кривой. Действительно, проведем через точку M прямую линию $Mqrn$ до противолежащей части и, параллельно ей, линию Gh и назовем $Cq = t$ и $qM = u$; тогда, ввиду подобия треугольников CGh и PMq, будет

$$PM = y = \frac{CG}{Gh} u \quad \text{и} \quad qP = x - t = \frac{Ch}{Gh} u,$$

откуда получается $x = t + \frac{Ch}{Gh} u$. Но так как $xy = h^2$, то будет

$$\frac{CG}{Gh} tu = \frac{CG \cdot Ch}{Gh^2} u^2 = h^2,$$

или

$$u^2 + \frac{Gh}{Ch} tu - \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} h^2 = 0.$$

165. Таким образом, ордината u будет иметь два значения, а именно qM и $-qn$; последнее значение $-qn$ отрицательно, так как оно лежит по другую сторону асимптоты CP, принятой здесь в качестве оси. Стало быть, сумма обоих этих корней

$$qM - qn \quad \text{будет} \quad = -\frac{Gh}{Ch} t = -qr$$

и, значит, $qn - qM = qr$, откуда $qM = rn$ и $qn = rM$. А затем из найденного уравнения ясно, что произведение корней

$$-qM \cdot qn = -\frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} h^2,$$

то есть

$$qM \cdot qn = qM \cdot rM = rn \cdot qu = rn \cdot rM = \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} h^2.$$

Следовательно, эти прямоугольники имеют всегда одну и ту же величину, как бы ни проводились прямые линии Mn, параллельные линии Gh.

Таковы основные свойства отдельных видов линий второго порядка. Если их присоединить к общим свойствам этих линий, получается почти бесконечно много замечательных свойств.

ГЛАВА VII

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЕТВЕЙ, УХОДЯЩИХ В БЕСКОНЕЧНОСТЬ

166. Если какая-нибудь кривая линия имеет ветвь или часть, уходящую в бесконечность, и если из бесконечно удаленной ее точки опустить на какую-нибудь ось перпендикуляр, то либо абсцисса x, либо ордината y, либо обе эти координаты окажутся тогда бесконечными. Ибо если бы какая-нибудь из координат или же обе координаты не были бесконечно большими, то расстояние рассматриваемой точки кривой от начала абсцисс было бы конечным, а именно $=\sqrt{x^2+y^2}$, что противоречит допущению. Вот почему, когда кривая имеет ветвь, уходящую в бесконечность, то либо какой-нибудь конечной абсциссе соответствует действительная бесконечная ордината, либо бесконечно большой абсциссе соответствует действительная ордината, конечная или бесконечно большая. Стало быть, исходя из этого начала, можно будет исследовать уходящие в бесконечность ветви кривых.

167. Пусть дано алгебраическое уравнение любого порядка, скажем, порядка n между координатами x и y; рассмотрим отдельно члены, в которых переменные x и y имеют n измерений, каковыми являются

$$\alpha y^n+\beta y^{n-1}x+\gamma y^{n-2}x^2+\delta y^{n-3}x^3+\ldots+\xi x^n;$$

а это выражение можно разложить на простые множители вида $Ay+Bx$, действительные или мнимые. При этом если оно будет иметь мнимые множители, то число последних будет четным, и если их соединить попарно, то они дадут двойной действительный множитель вида

$$A^2y^2-2ABxy\cdot\cos\varphi+B^2x^2.$$

А такого рода множитель (когда либо x, либо y, либо оба они принимаются бесконечными, $=\infty$) всегда получает бесконечное значение $=\infty^2$, так как член $2AByx\cos\varphi$ всегда меньше суммы двух остальных членов $A^2y^2+B^2x^2$ и так как ни A, ни B не могут быть $=0$. Стало быть, такого рода множитель

$$A^2y^2-2ABxy\cos\varphi+B^2x^2$$

в случае, когда либо x, либо y, либо оба они одновременно приняты бесконечными, не может быть равен ни нулю, ни конечному количеству, ни даже бесконечному количеству ∞, так как он $=\infty^2$, а это бесконечно больше, чем ∞.

168. Следовательно, если высшая часть уравнения

$$\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \ldots + \xi x^n$$

не содержит ни одного простого действительного множителя, что, конечно, не может случиться, если только n не будет четным числом, то она будет тогда состоять только из двойных множителей следующего вида:

$$A^2y^2 - 2ABxy\cos\varphi + B^2x^2.$$

Поэтому, если положить, что либо x, либо y [28], либо они оба бесконечны, то и все приведенное выше выражение получит бесконечное значение $=\infty^n$ и, стало быть, его нельзя будет приравнять какому-нибудь конечному количеству или же такому бесконечному количеству ∞^m, показатель которого m меньше n. Следовательно, остальные члены уравнения, в которых переменные x и y имеют более низкие измерения и которые дают бесконечности в степени более низкой, чем n, не могут сравниться с этой более высокой бесконечностью и поэтому уравнение не может оставаться в силе, если x или y, либо они оба принимаются бесконечными [29].

169. Отсюда следует, что кривая линия, которая выражается с помощью уравнения между координатами x и y, высший член которого не содержит в себе никакого простого действительного множителя, вовсе не имеет ветвей, которые простирались бы в бесконечность, и поэтому вся кривая помещается в конечном пространстве подобно эллипсу или окружности. Вот почему, если в общем уравнении второго порядка

$$\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$$

высший член $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$, в котором переменные x и y имеют два измерения, не имеет простых действительных множителей, а это получается, когда β^2 меньше $4\alpha\gamma$, то кривая не имеет ветви, которая уходила бы в бесконечность, и, значит, является эллипсом.

170. Для того чтобы можно было это яснее изложить, мы разобьем все предложенное уравнение между координатами x и y на группы таким образом, что в первую или высшую мы включим все члены уравнения, в которых переменные x и y имеют совместно одно и то же наивысшее измерение, показатель которого пусть будет n. Ко второй же группе я отношу все члены, в которых переменные имеют совместно измерение, равное $n-1$. Третья группа будет содержать те члены, в которых сумма измерений x и y составляет $n-2$, и так далее до тех пор, пока не дойдем до последней группы, которая уже не будет содержать в себе никакого измерения x и y и будет таким образом состоять только из постоянного количества. Обозначим через P первую или высшую группу, через Q — вторую группу, через R — третью группу, через S — четвертую группу и так далее.

171. Итак, поскольку в том случае, когда высшая группа P не содержит в себе простого действительного множителя, кривая линия, представляемая уравнением $P + Q + R + S +$ и т. д. $=0$, не может иметь ветви, уходящей в бесконечность, мы примем теперь, что высшая группа P содержит в себе единственный простой действительный множитель $ay - bx$,

так что $P=(ay-bx)M$, где M является функцией x и y измерения $n-1$, не содержащей в себе никаких простых действительных множителей. Следовательно, если положить, что x или y, или оба они бесконечны, то получится, что $M=\infty^{n-1}$. Конечно, Q может быть точно таким же бесконечным, а R, S и т. д. будут бесконечными количествами низших степеней. Следовательно, уравнение

$$P+Q+R+\ldots=0$$

может иметь место в том случае, если $ay-bx=$ конечному количеству или нулю [30] и при этом кривая простирается бесконечно далеко.

172. Итак, пусть $ay-bx=p$, где p представляет собою такое конечное количество, что когда кривая уходит в бесконечность, то

$$pM+Q+R+S+ \text{ и т. д. } =0,$$

то есть

$$p=\frac{-Q-R-S- \text{ и т. д.}}{M}.$$

Но так как M является бесконечным количеством более высокого порядка, чем R, S и т. д., то дроби $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ и т. д. $=0$ и, значит, $p=\frac{-Q}{M}$. Таким образом, дробь $\frac{-Q}{M}$ даст значение p, когда переменные x и y станут бесконечны. Но так как $ay-bx=p$, то будет $y=\frac{bx+p}{a}$ и $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}+\frac{p}{ax}=\frac{b}{a}$, в силу того, что $\frac{p}{ax}=0$, когда $x=\infty$. Таким образом, когда кривая уходит на бесконечность, $y=\frac{bx}{a}$.

173. Так как Q и M являются однородными функциями $n-1$ измерения, то $\frac{-Q}{M}$ является функцией нулевого измерения и, значит, она даст для p постоянное значение, если положить $y=\frac{bx}{a}$; или же так как функция $\frac{-Q}{M}$ становится определенной, как только определяется отношение между y и x, которое равно $b:a$, то можно получить значение p, если в выражении $\frac{-Q}{M}$ всюду вместо y поставить b и вместо x поставить a. После того как указанным выше путем будет определено p, получится уравнение $ay-bx=p$, которое содержится в самом предложенном уравнении $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$, когда кривая уходит в бесконечность.

174. Таким образом, та часть кривой, которая простирается в бесконечность, выражается уравнением $ay-bx=p$. Так как последнее представляет собою уравнение для прямой, то эта прямая, будучи продолжена бесконечно, в конце концов сольется с кривой линией. Следовательно, эта прямая линия будет асимптотой кривой, так как последняя, будучи продолжена бесконечно далеко, в конце концов сольется с прямой и, значит, она будет к ней все больше приближаться [31]. А так как предложенное уравнение $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$ при x или $y=\infty$ переходит в уравнение $ay-bx=p$, то одновременно

выясняется, что эта прямая линия, будучи бесконечно продолжена в обе стороны, в конце концов сольется с кривой. Таким образом, кривая линия будет иметь две уходящие в бесконечность и противоположно направленные ветви, из которых одна совпадет с указанной бесконечно продолженной прямой в одном направлении, а другая совпадет с нею в противоположном направлении.

175. Так как, следовательно, кривая линия, когда высший член P уравнения $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$ имеет единственный действительный множитель, обладает двумя ветвями, уходящими в бесконечность и приближающимися с двух сторон к одной и той же прямой, которую называют ее асимптотой, то мы предположим теперь, что высший член P уравнения имеет два простых действительных множителя $ay-bx$ и $cy-dx$, так что $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, где M будет однородной функцией $n-2$ измерений. Но в данном случае следует рассмотреть два случая, в зависимости от того, будут ли указанные выше два множителя равны между собою или же не равны.

176. Пусть эти множители не равны между собою. Тогда ясно, что уравнение

$$(ay-bx)(cy-dx)M+Q+R+S+ \text{ и т. д.}=0$$

может оставаться в силе при бесконечных абсциссах или ординатах в двух случаях, а именно, когда либо $ay-bx$, либо $cy-dx$ равно конечному количеству. Итак, пусть $ay-bx=p$, и так как p является конечным количеством, то на бесконечности будет $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, и подобно прежнему получится

$$p=\frac{-Q-R-S- \text{ и т. д.}}{(cy-dx)M}=\frac{-Q}{(cy-dx)M};$$

последнее выражение является функцией нулевого измерения от x и y. Поэтому, если положить $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$ или, что сводится к тому же, если всюду написать b вместо y и a вместо x, то получится истинное значение искомого постоянного p. Таким образом, будет

$$p=\frac{-Q}{(bc-ad)M},$$

и поскольку множители не равны между собою, то $bc-ad$ не будет $=0$, равно как и M, так как последнее не содержит в себе какого-либо простого действительного корня. Отсюда для p получается конечное значение или даже нулевое, что имеет место, когда член Q совершенно отсутствует или когда он содержит в себе множитель $ay-bx$.

177. Итак, благодаря простому действительному множителю $ay-bx$ члена P кривая, как и в первом случае, будет иметь одну асимптоту, положение которой будет определяться уравнением $ay-bx=p$. Равным образом, благодаря другому множителю, $cy-dx$, она будет иметь асимптоту, которая определяется уравнением $cy-dx=q$, где $q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, после того как вместо x и y всюду будут подставлены вышеуказанные определенные значения d и c. Таким образом, кривая линия всего будет иметь две асимптоты и, значит, четыре уходящие в бесконечность ветви,

которые в конце концов сливаются с указанными прямыми. Именно этот случай имел место выше у гиперболы. Следовательно, если в уравнении для линий второго порядка $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$ высший член $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$ содержит в себе два простых неравных действительных множителя, а это получается, когда β^2 больше, чем $4\alpha\gamma$, то кривая является гиперболой.

178. Пусть оба множителя $ay - bx$ и $cy - dx$ будут между собою равны, так что $P = (ay - bx)^2 M$. А так как $P + Q + R + S +$ и т. д. $= 0$, то будет

$$(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S - \text{ и т. д.}}{M}.$$

Поскольку же Q является функцией $n-1$ измерений, R — функцией $n-2$ измерений и S — функцией $n-3$ измерений, то ввиду того, что M — функция $n-2$ измерений, для бесконечных значений $\frac{S}{M} = 0$ и, следовательно,

$$(ay - bx)^2 = -\frac{Q}{M} - \frac{R}{M} = -\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}.$$

Но $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ и $\frac{R}{M}$ являются функциями нулевого измерения от x и y. Следовательно, так как в бесконечности $y : x = b : a$, то если подставить отношение $\frac{b}{a}$ вместо $\frac{y}{x}$, т. е. вместо y подставить b и вместо x подставить a, обе эти функции станут постоянными количествами.

179. После указанной подстановки положим

$$\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A \quad \text{и} \quad \frac{R}{M} = B;$$

тогда

$$(ay - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B \quad [32];$$

это — уравнение кривой линии, с которой сольется кривая линия, выражающаяся с помощью уравнения $P + Q + R + S +$ и т. д. $= 0$ при продолжении ее до бесконечности. А так как величины μ и ν являются произвольными, положим $\mu = b$ и $\nu = a$, а также, изменив координаты, примем

$$ay - bx = u\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad by + ax = t\sqrt{a^2 + b^2};$$

тогда для той же самой кривой получится уравнение

$$u^2 = \frac{At}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{B}{a^2 + b^2} = 0,$$

которое, очевидно, представляет собою уравнение для параболы. Следовательно, искомая кривая линия построена так, что если ее продолжить бесконечно далеко, то она сольется с параболой. Таким образом, она будет иметь лишь две ветви, уходящие в бесконечность, асимптотой которых будет не прямая линия, а парабола, выражающаяся приведенным выше уравнением [33].

180. Изложенное выше имеет место, когда A не равно нулю; если же $A = 0$ (что получается, когда второй член Q либо отсутствует, либо

делится на $ay-bx$), то в этом случае уравнение перестает быть уравнением для параболы и будет вида $u^2+\frac{B}{a^2+b^2}=0$. Здесь следует рассмотреть три случая. Во-первых, когда B представляет собою отрицательное количество, и тогда пусть $\frac{B}{a^2+b^2}=-f^2$. В этом случае уравнение $u^2-f^2=0$ содержит в себе два уравнения: $u-f=0$ и $u+f=0$, которые являются уравнениями для двух параллельных прямых. Каждая из прямых будет асимптотой кривой, как и в первом случае, и стало быть, кривая будет иметь четыре уходящие в бесконечность ветви, которые сольются с упомянутыми выше двумя прямыми.

181. Вторым является тот случай, когда B — положительное количество, скажем, $+f^2$. Так как в этом случае уравнение $u^2+f^2=0$ является невозможным, то кривая не будет иметь никаких уходящих в бесконечность ветвей и будет целиком помещаться в конечном пространстве. Следовательно, кривая, содержащаяся в уравнении $P+Q+$ $+R+S+$ и т. д. $=0$, не будет иметь ветви, уходящей в бесконечность, не только когда высший член P не имеет ни одного простого действительного множителя, но это может произойти, хотя бы P имел такие множители, как мы только что видели. В дальнейшем представится еще много подобных случаев.

182. Третий случай тот, когда $B=0$, и каждый из двух предшествующих может совпасть с ним, вследствие чего неясно, каким образом построена такая кривая. Поэтому для определения формы кривой следует рассмотреть следующие члены. Действительно, так как $P+Q+$ $+R+S+$ и т. д. $=0$ и $P=(ay-bx)^2M$, то на бесконечности будем иметь

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad (ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+\frac{T}{M}+ \text{ и т. д.}=0.$$

Положим, как и раньше производя подстановку,

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{q}, \qquad \frac{Q}{M}=A(by+ax), \qquad \frac{R}{M}=B;$$

тогда, конечно, так как S, T, V и т. д. являются функциями $(n-3)$, $(n-4)$ и т. д. измерений, в то время как M является функцией $(n-2)$ [1]) измерения,

$$\frac{S(by+ax)}{M}=C, \qquad \frac{T(by+ax)^2}{M}=D, \qquad \frac{V(by+ax)^3}{M}=E \text{ и т. д.},$$

и будем иметь

$$(ay-bx)^2+A(by+ax)+B+\frac{C}{by+ax}+\frac{D}{(by+ax)^2}+\frac{E}{(by+ax)^3}+\text{ и т. д.}=0\ [^{34}].$$

Таким образом, это уравнение выражает природу кривой линии, бесконечно удаленная часть которой, получаемая при допущении, что $by+ax$ бесконечно велико, сливается с кривой, которая содержится в уравнении $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$. Действительно, какое бы значение с удалением кривой на бесконечность ни принимало $(ay-bx)^2$, конечное или бесконечное, все-таки $by+ax$ будет иметь бесконечное значение (однако порядка ниже чем ∞^2).

---

[1]) В первом издании числа $n-3$, $n-4$ и $n-2$ увеличены на единицу. [*А. Ш.*]

183. Но изменим ось, к которой относим найденную выше асимптотическую линию, и положим при этом

$$\text{абсциссу } \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t \text{ и ординату } \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}=u,$$

и пусть для краткости $\sqrt{a^2+b^2}=g$; тогда получится уравнение

$$u^2+\frac{At}{g}+\frac{B}{g^2}+\frac{C}{g^3t}+\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+\text{и т. д.}=0.$$

Так как, стало быть, в том случае, который мы должны исследовать, $A=0$ и $B=0$, то получается

$$u^2+\frac{C}{g^3t}+\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+\text{и т. д.}=0.$$

Если C не будет $=0$, то, когда полагаем t бесконечным, члены $\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+$ и т. д. исчезают по сравнению с $\frac{C}{g^3t}$, и получаем

$$u^2+\frac{C}{g^3t}=0.$$

В этом уравнении заключается природа кривой линии, которая, если положить $t=\infty$, сливается с искомой кривой. Стало быть, так как отсюда получается $u=\pm\sqrt{\frac{-C}{g^3t}}$, кривая будет иметь две ветви, которые будут с обеих сторон сходиться к одной и той же части оси.

184. Если же сверх того будет $C=0$, то в этом случае следует взять уравнение

$$u^2+\frac{D}{g^4t^2}=0,$$

где снова имеют место три случая в зависимости от того, будет D количеством положительным, отрицательным или же нулем. В первом случае, так как уравнение становится невозможным, кривая вовсе не будет иметь ветви, уходящей в бесконечность, и будет целиком содержаться в ограниченном пространстве. Во втором случае, если $\frac{D}{g^4}=-f^2$, то, так как $u^2=\frac{f^2}{t^2}$, ордината u, положим ли мы $t=+\infty$, или $=-\infty$, принимает два исчезающих значения, положительное и отрицательное, и следовательно, кривая будет иметь четыре ветви, сходящиеся к оси в обоих направлениях и с обеих сторон. А в третьем случае, когда $D=0$, следует взять уравнение $u^2+\frac{E}{g^5t^3}=0$, к которому можно отнести то, что изложено в предыдущем параграфе. Указанным образом надлежит продолжать исследование и дальше, пока уравнение $P+Q+R+S+$ и т. д. даст следующие члены [35].

185. Предположим теперь, что высший член P уравнения

$$P+Q+R+S+\text{и т. д.}=0$$

имеет три простых действительных множителя. Тогда ясно, что если эти множители будут не равны между собою, то для каждого из них в силе то, что выше было сказано о единственном действительном множителе. Следовательно, в этом случае кривая будет иметь шесть уходящих в бесконечность ветвей, которые будут сходиться к трем прямым асимптотическим линиям. Если окажется два равных множителя, тогда в отношении третьего неравного остается в силе то, что изложено выше; в отношении же двух равных множителей следует также придерживаться тех указаний, которые даны раньше. Остается, таким образом, рассмотреть третий случай, когда все три множителя между собою равны. Итак, пусть $P=(ay-bx)^3 M$. Так как уравнение

$$P+Q+R+S+\text{и т. д.}=0$$

не может иметь места на бесконечности, если только $(ay-bx)^3$ не имеет конечного значения или же, хотя и имеет бесконечное значение, но порядка меньшего, чем ∞^3, так что степень бесконечного, которую получает высший член P, оказывается меньше ∞^n, то в бесконечности обязательно будет $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$.

186. Для исследования этого случая надо прежде всего рассмотреть второй член Q: имеет он тот же множитель $ay-bx$ или нет. Надо при этом заметить, что если этот член совершенно отсутствует, то это соответствует первой [возможности], так как нуль допускает любой множитель. Итак, во-первых, пусть Q не делится на $ay-bx$. Так как Q является функцией $n-1$ измерения, а M — функцией $n-3$ измерений, то $\frac{Q}{(ax+by)^2 M}$ будет функцией нулевого измерения; стало быть, если положить $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, то она перейдет в постоянное количество, которое пусть $=A$, и тогда получится $(ay-bx)^3+A(ax+by)^2=0$, ибо последующие члены дадут выражения, которые в бесконечности исчезают по сравнению с $A(ax+by)^2$.

187. Таким образом, кривая линия, которая выражается этим уравнением, построена так, что, будучи продолжена бесконечно, она совпадает с кривой линией, выражающейся уравнением

$$P+Q+R+S+\text{и т. д.}=0.$$

Для того чтобы ближе ознакомиться с этой линией, отнесем ее к другой оси, при которой пусть

$$\text{абсцисса } t=\frac{ax+by}{g} \text{ и ордината } u=\frac{ay-bx}{g},$$

где принято, что $\sqrt{a^2+b^2}=g$. Тогда будет

$$u^3+\frac{At^2}{g}=0;$$

а это уравнение, если положить $t=\infty$, даст ту часть искомой кривой

$$P+Q+R+\text{и т. д.}=0,$$

которая находится на бесконечности. Следовательно, если будет определен вид кривой $u^3+\frac{At^2}{g}=0$, то одновременно будет определен вид бесконечной части кривой $P+Q+R+\text{и т. д.}=0$. В следующей главе мы специально исследуем эти асимптотические кривые линии.

188. Если же второй член Q содержит в себе множитель $ay-bx$, то он либо одновременно делится на $(ay-bx)^2$, либо нет. Допустим, что он не делится на $(ay-bx)^2$ и возьмем следующую функцию нулевого измерения $\frac{Q}{(ay-bx)(ax+by)M}$, которая, если положить $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, даст постоянное количество A; тогда получится

$$(ay-bx)^3+A(ay-bx)(ax+by)+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+\text{и т. д.}=0.$$

Здесь $\frac{R}{M}$, если положить $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, станет либо $B(ay-bx)$, либо $B(ax+by)$, в зависимости от того, будет R делиться на $ay-bx$ или нет; но $\frac{S}{M}$ будет постоянным количеством C. Таким образом, если мы отнесем это уравнение к другой оси с координатами t и u, как мы это сделали раньше, то оно примет вид либо

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0,$$

либо

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0.$$

Но так как здесь речь идет только о том случае, когда $t=\infty$, то последние члены исчезают. Следовательно, в первом случае будет

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{g^2}=0,$$

что дает две асимптоты, а именно $u=0$ и $u^2+\frac{At}{g}=0$; первая является прямой, а вторая — параболой. Во втором случае, когда $t=\infty$, либо u будет иметь конечное значение, и тогда, поскольку конечные количества исчезают по сравнению с бесконечными, получится $\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0$ и, стало быть, $u=\frac{-B}{ag}$, что дает прямую линию. Но сверх того u может иметь бесконечное значение. Тогда, поскольку исчезает третий член, будем иметь

$$u^2+\frac{At}{g}=0$$

— уравнение параболы. Таким образом, в обоих случаях получаются две асимптоты, одна из которых парабола, а другая — прямая, в силу чего нет нужды различать эти случаи.

189. Пусть теперь Q делится и на $(ay-bx)^2$; тогда в зависимости от того, делится R на $(ay-bx)$ или нет, по выполнении тех же действий, что и раньше, получатся следующие уравнения между t и u:

$$\text{либо}\quad u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0,\quad\text{либо}\quad u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0.$$

Первый случай — это случай трех прямых, параллельных друг другу, конечно, если все корни уравнения

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$$

окажутся действительными, или же получится уравнение единственной асимптотической прямой, если два корня окажутся мнимыми. Но и здесь возникают различия в зависимости от того, совпадают из этих трех параллельных друг другу асимптот две асимптоты или же все. Последний же случай

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0,$$

если положить $t=\infty$, не может иметь места, если только u не бесконечно и, значит, член $\frac{Au^2}{g}$ исчезает по сравнению с первым членом u^3; тогда получается

$$u^3+\frac{Bt}{g^2}=0,$$

— уравнение криволинейной асимптоты третьего порядка.

190. Если же будет $A=0$, $B=0$ и $C=0$, то надо обратиться к следующим членам уравнения $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$, которые дадут уравнение такого вида:

$$u^3+\frac{D}{g^4t}+\frac{E}{g^5t^2}+\frac{F}{g^6t^3}+\text{и т. д.}=0,$$

в котором, если только D не будет $=0$, третий член вместе со следующими за ним исчезнет, так что получится $u^3+\frac{D}{g^4t}=0$. Если же и $D=0$, то получится $u^3+\frac{E}{g^5t^2}=0$, а если и E окажется $=0$, то будет $u^3+\frac{F}{g^6t^3}=0$ и т. д.; и эти уравнения определяют такие кривые линии, которые при $t=\infty$ совпадают с кривой, содержащейся в уравнении $P+Q+R+$ и т. д. $=0$. А эти уравнения, поскольку в их состав входит нечетная степень u^3, всегда действительны[1]) и, значит, всегда определенным образом выявляют существование ветвей, уходящих в бесконечность. При всем том прямая линия, выражаемая уравнением $u=0$, будет в этих случаях асимптотой, так как она является асимптотой кривых

$$u^3+\frac{D}{g^4t}=0, \qquad u^3+\frac{D}{g^5t^2}=0 \text{ и т. д.}$$

191. Итак, поскольку ветви кривых, которые сходятся к прямолинейной асимптоте, могут так сильно расходиться между собою, представляется уместным более внимательно рассмотреть эти различия, чего можно достичь, если определить наиболее простую кривую линию, которая, будучи отнесена к той же прямолинейной асимптоте, сливается с предложенной кривой. Так, хотя уравнение

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0,$$

если все его три корня действительны, дает три прямолинейные параллельные друг другу асимптоты, тем не менее еще не ясно, являются ли продолженные на бесконечность ветви этой кривой линии гиперболическими, т. е. выражаемыми с помощью уравнения $u=\frac{C}{t}$, или же линиями иного вида, например выражаемыми уравнением

[1]) Очевидно, в том смысле, что имеют по крайней мере один действительный корень.

$u=\frac{C}{t^2}$ или $\frac{C}{t^3}$, и т. д. Чтобы выяснить это, надо взять следующий ближайший член уравнения, а именно $\frac{D}{g^4t}$, или же, в случае его отсутствия, член $\frac{E}{g^5t^2}$, а в случае отсутствия этого члена, $\frac{F}{g^6t^3}$. Допустим, для общего решения вопроса, что следующим членом является $\frac{K}{t^k}$. Из природы уравнения

$$P+Q+R+\text{и т. д.}=0,$$

которое является уравнением степени n, ясно, что k не может быть числом, превышающим $n-3$. Пусть уравнение

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$$

имеет корни или множители $(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$; тогда будет

$$(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)-\frac{K}{t^k}=0.$$

Пусть $u-\alpha=\frac{I}{t^\mu}$, а это уравнение выражает природу одной асимптоты; тогда

$$\frac{I}{t^\mu}\left(\alpha-\beta+\frac{I}{t^\mu}\right)\left(\alpha-\gamma+\frac{I}{t^\mu}\right)=\frac{K}{t^k},$$

и полагая, что t бесконечно, получим

$$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)I}{t^\mu}=\frac{K}{t^k}.$$

192. Это уравнение имеет место тогда, когда корень α не равен остальным корням β и γ, и в этом случае будет

$$I=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \quad \text{и} \quad \mu=k,$$

стало быть, корень $u=\alpha$ даст следующую криволинейную асимптоту:

$$u-\alpha=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\,t^k}.$$

Итак, если все три корня окажутся не равными между собою, то каждый из них даст подобного рода асимптоту. Если же два корня окажутся не равными между собою, то каждый из них даст подобного рода асимптоту. Если же два корня окажутся равными между собою, например, если $\beta=\alpha$, то эти две асимптоты сольются в одну, и тогда будет

$$\frac{I^2(\alpha-\gamma)}{t^{2\mu}}=\frac{K}{t^k},$$

откуда получается

$$I^2=\frac{K}{\alpha-\gamma} \quad \text{и} \quad 2\mu=k.$$

Следовательно, природу этой двойной асимптоты выразит уравнение

$$(u-\alpha)^2=\frac{K}{(\alpha-\gamma)\,t^k}.$$

А если все три корня окажутся равными между собою и, следовательно, три асимптоты сольются в одну, то природу последней выразит уравнение

$$(u-\alpha)^3=\frac{K}{t^k}.$$

193. Когда высший член P уравнения $P+Q+R+S+$ и т. д. $=0$ содержит в себе четыре простых действительных множителя, то если все они не равны между собою или если они попарно равны или если три из них между собою равны, то можно судить о природе ветвей, уходящих в бесконечность, а также об асимптотах на основании сказанного выше. Таким образом, нуждается в разъяснении лишь один случай, когда все корни между собою равны. Итак, пусть $P=(ay-bx)^4M$, где M — функция $n-4$ измерений. Если в функциях нулевого измерения положить, как и раньше, $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, чтобы они давали постоянные количества, и вместе с тем положить, изменив ось,

$$t=\frac{ax+by}{g} \quad \text{и} \quad u=\frac{ay-bx}{g},$$

где $g=\sqrt{a^2+b^2}$, то получатся уравнения между t и u для асимптотических линий. А именно, во-первых, если Q не делится на $ay-bx$, будем иметь

$$u^4+\frac{At^3}{g}=0.$$

194. Затем, если Q хотя и делится на $ay-bx$, но не делится на $(ay-bx)^2$, то получится

$$u^4+\frac{At^2u}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0.$$

Когда положим здесь $t=\infty$, ордината u может оказаться конечной или бесконечной; стало быть, получаются две асимптоты: прямолинейная, $u+\frac{B}{gA}=0$, и криволинейная $u^3+\frac{At^2}{g}=0$. Что касается прямолинейной асимптоты, то для более внимательного ее изучения надлежит взять следующий ближайший член, который пусть будет $\frac{K}{t^k}$, и тогда мы получим

$$u+\frac{B}{gA}+\frac{gK}{At^{k+2}}=0;$$

это — уравнение кривой, у которой часть, соответствующая абсциссе $t=\infty$, сливается с искомой кривой.

195. Пусть теперь Q делится на $(ay-bx)^2$, но не на $(ay-bx)^3$; следует посмотреть, делится R на $ay-bx$ или же нет. В первом случае получается

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Btu}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

а во втором —

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0.$$

Первый случай дает два уравнения в зависимости от того, будет ли u конечным или бесконечным и, стало быть, приводит к двум следующим уравнениям:

$$u^2+\frac{Bu}{gA}+\frac{C}{g^2A}=0 \quad \text{и} \quad u^2+\frac{At}{g}=0.$$

Из них первое, если оба его корня действительны и не равны между собою, дает две параллельные прямые; если же его корни мнимы, то оно не дает никакой ветви, которая уходила бы в бесконечность. А уравнение $u^2+\frac{At}{g}=0$ дает, конечно, параболическую асимптоту.

Второе уравнение

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0$$

$\left(\text{так как } \frac{Ct}{g^3} \text{ исчезающе мало по сравнению с } \frac{Bt^2}{g^2}, \text{ если положить } t=\infty\right)$ содержит в себе два уравнения вида $u^2+\alpha t=0$, и следовательно, получаем две асимптотические параболы, когда A^2 больше, чем $4B$; они сливаются в одну, когда $A^2=4B$, и становятся мнимыми, когда A^2 меньше, чем $4B$; в последнем случае кривая линия не имеет никакой ветви, которая уходила бы в бесконечность.

196. Пусть теперь Q делится на $(ay-bx)^3$. Тогда в зависимости от того, делятся R и S на $ay-bx$ или не делятся, получатся следующие уравнения:

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Cu}{g^3}+\frac{D}{g^4}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{But}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0.$$

Первое из этих уравнений является уравнением для четырех параллельных друг другу прямых линий, если, конечно, все корни окажутся действительными и не равными между собою. Равные же корни сливают две или большее число этих линий в одну, а мнимые корни совершенно уничтожают две такие линии или же все. Во втором уравнении при $t=\infty$ ордината u не может не быть бесконечно большой и, стало быть, получается $u^4+\frac{Ct}{g^3}=0$ — асимптотическая кривая четвертого порядка. Из третьего уравнения может получиться конечное значение $u+\frac{C}{gB}=0$; сверх того, оно, конечно, имеет в качестве асимптоты $u^3+\frac{Bt}{g^2}=0$, т. е. линию третьего порядка. Наконец, четвертое уравнение, поскольку u бесконечно, когда $t=\infty$, переходит в $u^4+\frac{Bt}{g^2}=0$, а это уравнение невозможно, если B — положительное количество; если же B отрицательно, то оно определяет две противоположно направленные от вершины параболы, которые сливаются с кривой при продолжении на бесконечность.

197. Таким образом, из сказанного уже видно, по какому пути следует идти дальше, когда высший член P содержит в себе большее число простых равных между собою множителей. Ибо что касается неравных множителей, то их можно рассмотреть каждый в отдельности и определить прямолинейные асимптоты, которые они создают. Если же два множителя окажутся равными между собою, то свойства кривой можно определить с помощью того, что было изложено в § 178 и следующих. Аналогичным образом для случая трех равных множителей вопрос решается тем, что дано в § 185 и следующих. Точно так же случай, когда четыре множителя между собой равны, мы разобрали таким образом, что вместе с тем можно разобрать и случай большего количества равных множителей. Между прочим, отсюда можно усмотреть, сколь многообразными и разнообразными могут быть кривые линии в отношении ветвей, уходящих в бесконечность; а мы еще не коснулись здесь того разнообразия, которое может оказаться им присущим в конечном пространстве.

ГЛАВА VIII

ОБ АСИМПТОТАХ

198. В предыдущей главе мы видели, что существует множество различных видов асимптот. Действительно, помимо прямой линии, мы нашли еще много кривых асимптотических линий, которые выражаются уравнением $u^{\mu}=Ct^{\nu}$. Да и сама прямая приводит нас к другим криволинейным асимптотам, с которыми кривая линия сходится в большей мере, чем с прямой линией. Во всех же случаях, когда прямая линия оказывается асимптотой какой-нибудь кривой, можно указать кривую линию, для которой та же самая прямая является асимптотой и которая будет также асимптотой рассматриваемой кривой. Подобного рода криволинейная асимптота гораздо точнее выражает характер той кривой линии, асимптотой которой она является, так как она указывает одновременно число ветвей, которые сходятся с прямой линией, а также сторону, с которой они приближаются к прямой линии, т. е. приближаются ли они сверху или снизу, справа или слева.

199. Указанное выше бесконечное разнообразие асимптот удобнее всего привести в порядок, если пойти тем же путем, который привел нас к их открытию. Действительно, неравные множители первого высшего члена дают асимптоты одного вида, два равных множителя дают асимптоты другого вида, три равных множителя дают снова иные асимптоты, точно так же четыре равные множителя и так далее. Итак, пусть нам предложено уравнение какого-либо n-го порядка между координатами x и y, которое имеет вид

$$P+Q+R+S+\text{и т. д.}=0,$$

где P является высшим членом, содержащим в себе все члены n измерений, Q — вторым членом, содержащим члены $n-1$ измерений; аналогично этому R — третьим членом, S — четвертым членом и так далее.

200. Пусть теперь $ay-bx$ — простой множитель P, причем другого подобного ему не имеется, и положим $P=(ay-bx)M$; тогда M будет однородной функцией $n-1$ измерений, которая не делится на $ay-bx$. Пусть (рис. 35) AZ представляет собою ось, на которой абсцисса $AP=x$ и ордината $PM=y$. Для того чтобы короче представить множитель $ay-bx$, примем в качестве оси другую прямую линию AX, которая пересекает первую ось в начале абсцисс A и образует с ней угол XAZ,

тангенс которого $= \frac{b}{a}$ и, значит, синус $= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и косинус $= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

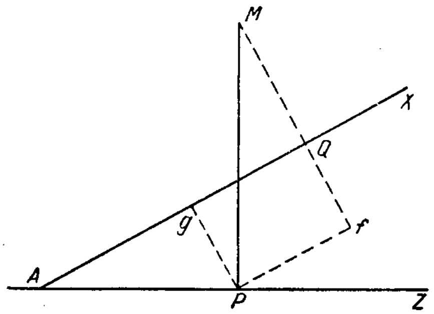

Рис. 35.

На этой оси возьмем абсциссу $AQ = t$ и ординату $QM = u$. Тогда, если провести Pg и Pf параллельно новым координатам, получим

$$Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Ag = \frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$Mf = \frac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

и, значит,

$$t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом, ордината u будет теперь множителем высшего члена P [36].

201. Обратно, из приведенных выше соотношений получаем

$$y = \frac{au+bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad x = \frac{at-bu}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

если эти значения подставить в уравнение $P+Q+R+$ и т. д. $=0$, то получится уравнение для той же кривой линии между t и u, отнесенное к оси AX. Но для того чтобы избежать слишком большого количества коэффициентов, подставим вместо них α, β, γ, δ и т. д. [37]. После всех подстановок отдельные буквы получат следующие значения:

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2}u + \alpha t^{n-3}u^2 + \text{и т. д.},$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \text{и т. д.},$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{и т. д.},$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{и т. д.},$$
$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \text{и т. д.}$$

и так далее.

Но так как для нахождения асимптоты следует принять абсциссу t бесконечной, то в каждом из приведенных выражений все члены исчезают по сравнению с первым. Поэтому если где-нибудь имеется первый член, то всеми остальными можно пренебречь; если же первый член отсутствует, надо взять второй, а если нет ни первого, ни второго, следует начинать с третьего.

202. Так как функция M не делится на u, то ее первый член не может отсутствовать. Следовательно, будет $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = 0$, откуда для u получается конечное значение, которое пусть $=c$. Это значит, что прямая, параллельная оси AX и отстоящая от нее на расстоянии c, будет асимптотой. Теперь, для того чтобы найти криволинейную асимптоту, которая в большей мере подходит к той же кривой, подставим всюду, кроме первого члена, $u = c$, и тогда получится следующее уравнение:

$$\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \text{ и т. д.} = 0,$$

или, так как $\alpha u + \beta = u - c$ [1]), будем иметь

$$(u-c)\,t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \text{ и т. д.} = 0.$$

Если второй член не отсутствует, можно пренебречь всеми следующими, и тогда

$$(u-c) + \frac{A}{t} = 0;$$

если же второй член отсутствует, берем третий и получаем

$$(u-c) + \frac{A}{t^2} = 0.$$

А если нет и третьего члена, то будет

$$(u-c) + \frac{A}{t^3} = 0,$$

и так далее. Если отсутствуют все члены, за исключением последнего постоянного, то будет

$$(u-c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0.$$

Наконец, если не будет ни одного члена, то все уравнение будет делиться на $u-c$, и, стало быть, тогда прямая линия $u-c=0$ окажется частью кривой.

203. Если положить $u-c=z$, т. е. если брать абсциссы на самой прямолинейной асимптоте, то все криволинейные асимптоты, которые

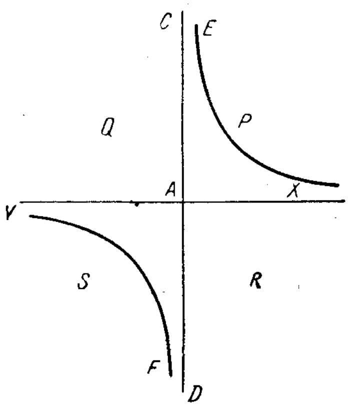

Рис. 36.

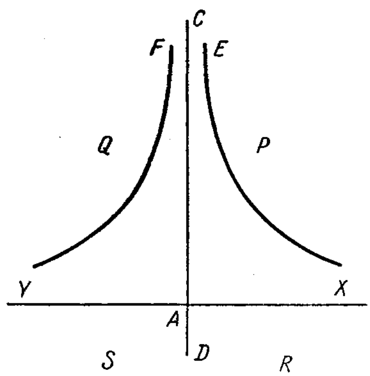

Рис. 37.

дает отдельный множитель высшего члена, будут заключаться в общем уравнении $z = \frac{C}{t^k}$, где k обозначает некоторое целое число, меньшее чем показатель n. Посмотрим теперь, какой вид имеют эти криволинейные асимптоты, если предположить, что абсцисса t бесконечна. Итак, пусть (рис. 36) XY будет прямолинейной асимптотой, которая взята в качестве оси, и A — начало координат. Если провести прямую линию CD, то получится четыре области, которые мы обозначим

[1]) Если опустить множитель α. [*А. Ш*].

буквами P, Q, R и S. Пусть теперь, во-первых, $z=\frac{C}{t}$; если взять t отрицательным, то и z будет отрицательным, поэтому кривая имеет в противолежащих областях P и S две ветви EX и FY, сходящиеся с прямой XY. То же самое происходит, если k будет любым нечетным числом. Но если $k=2$, то есть $z=\frac{C}{t^2}$, то так как z всегда остается положительным, независимо от того, будет t положительным или отрицательным, кривая будет состоять (рис. 37) из двух ветвей EX и FY, которые будут сходиться в областях P и Q к прямой XY. Все сводится к тому же, когда k является любым четным числом, с тем лишь отличием, что сближение происходит тем быстрее, чем больше показатель k.

204. Пусть высший член P содержит в себе два равных множителя $ay-bx$; тогда, отнеся, как и раньше, уравнения к другой оси, мы получим

$$\begin{aligned}
P &= \qquad\qquad\qquad\quad \alpha t^{n-2}u^2+\alpha t^{n-3}u^3+\text{ и т. д.,}\\
Q &= \beta t^{n-1}+\beta t^{n-2}u+\beta t^{n-3}u^2+\beta t^{n-4}u^3+\text{ и т. д.,}\\
R &= \gamma t^{n-2}+\gamma t^{n-3}u+\gamma t^{n-4}u^2+\gamma t^{n-5}u^3+\text{ и т. д.,}\\
S &= \delta t^{n-3}+\delta t^{n-4}u+\delta t^{n-5}u^2+\delta t^{n-6}u^3+\text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

и так далее.

Отсюда, в зависимости от того, будет ли налицо первый член выражения для Q, или же его не будет, получатся два уравнения:

$$\text{I. } \alpha t^{n-2}u^2+\beta t^{n-1}=0, \quad \text{то есть } \alpha u^2+\beta t=0.$$

$$\text{II. } \alpha t^{n-2}u^2+\beta t^{n-2}u+\gamma t^{n-2}=0, \quad \text{то есть } \alpha u^2+\beta u+\gamma=0.$$

Следовательно, в том случае, когда имеет место первое уравнение $\alpha u^2+\beta t=0$, асимптота становится параболой (рис. 38), с обеими ветвями которой две ветви кривой сливаются на бесконечности. Стало быть, кривая будет иметь в обеих областях P и R ветви, которые в конце концов совпадают с параболой EAF.

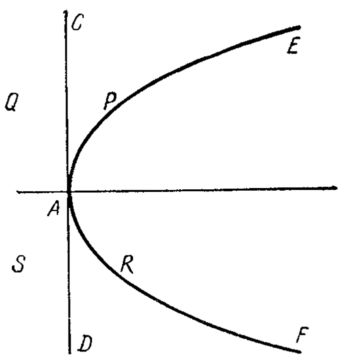

Рис. 38.

205. Если же приходим ко второму уравнению $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$, следует посмотреть, имеет оно два действительных корня или нет. В последнем случае это уравнение не указывает на существование каких бы то ни было ветвей, уходящих в бесконечность. А если есть два действительных и неравных корня: один $u=c$, а другой $u=d$, то кривая линия имеет две параллельные друг другу прямолинейные асимптоты. Исследуем, как и раньше, свойства каждой из этих линий. Конечно, поскольку

$$\alpha u^2+\beta u+\gamma=(u-c)(u-d),$$

мы положим повсюду $u=c$, за исключением множителя $u-c$; тогда получится

$$(c-d)\,t^{n-2}(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+$$
$$+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+\text{и т. д.}=0.$$

Стало быть, если только не исчезает второй член, все последующие члены при $t=\infty$ исчезнут и получится асимптота

$$(u-c)+\frac{A}{t}=0,$$

если же исчезает второй член, то получится

$$(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$$

и так далее. Если все члены, кроме последнего постоянного, окажутся $=0$, будем иметь

$$(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0;$$

фигуры всех этих кривых линий, если $t=\infty$, мы уже описали выше.

206. А если оба корня уравнения $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ окажутся равными, т. е. если будет $\alpha u^2+\beta u+\gamma=(u-c)^2$, то, поскольку $u=c$, подставляем это значение в остальные члены и получаем следующее уравнение:

$$t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$$
$$+\text{и т. д.}=0.$$

Отсюда, в соответствии с тем, имеется ли второй член, или, при его отсутствии, третий член, или, при отсутствии второго и третьего, четвертый и т. д., вытекают следующие уравнения для асимптот:

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^2}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0,$$

вплоть до

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0,$$

если отсутствуют все члены, кроме последнего постоянного. Конечно, если и последний член исчезает, то получится $(u-c)^2=0$ и, значит, сама прямая линия окажется частью кривой линии и, следовательно, последняя будет составной линией.

207. Хотя и создается впечатление, будто мы перебрали здесь все случаи, которые вызываются наличием двух равных множителей, тем не менее последнее уравнение может принять еще и иные формы, в результате чего получатся другие асимптоты. Последнее имеет место, когда множитель степени t^{n-3} делится на $u-c$; ибо тогда, как и в первом члене, оставим $u-c$ и прибавим ближайший член, который идет тотчас же вслед за ним. При этом возникают уравнения следующего

вида:

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^2}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$

до

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Если же второй член совершенно отсутствует или же если он делится на $(u-c)^2$, то надо рассмотреть третий член и, если он делится на $u-c$, оставить в нем $u-c$ и сверх того присоединить к нему ближайший следующий за ним член. В этом случае получатся следующего рода уравнения:

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^3}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^4}=0$$

до

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

А если и третий член отсутствует, а четвертый делится на $u-c$, либо если и четвертый член отсутствует, а пятый делится, и так далее, то для криволинейной асимптоты получается следующего рода уравнение:

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

в котором показатель p всегда меньше, чем q, и q меньше, чем $n-1$.

208. Предположим, что $u-c=z$. Тогда все приведенные выше уравнения содержатся в следующем выражении:

$$z^2-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0.$$

Для того чтобы его исследовать, следует рассмотреть три случая, в зависимости от того, будет ли q больше, чем $2p$, равно $2p$ или же меньше, чем $2p$.

В первом случае, когда q больше, чем $2p$, в нем содержатся два уравнения:

$$z-\frac{A}{t^p}=0 \quad \text{и} \quad Az-\frac{B}{t^{q-p}}=0,$$

так как оба они при $t=\infty$ удовлетворяются. Ибо если положить $z=\frac{A}{t^p}$, то первое из этих уравнений переходит в

$$\frac{A^2}{t^{2p}}-\frac{A^2}{t^{2p}}+\frac{B}{t^q} \quad \text{или в} \quad A^2-A^2+\frac{B}{t^{q-2p}}=0,$$

которое в силу того, что q больше, чем $2p$, верно, но p будет меньше, чем $\frac{n-2}{2}$.

А если $z=\frac{B}{At^{q-p}}$, то получится

$$\frac{B^2}{A^2t^{2q-2p}}-\frac{B}{t^q}+\frac{B}{t^q} \quad \text{или} \quad \frac{B^2}{A^2t^{q-2p}}-B+B=0,$$

что верно, так как первый член исчезает, если положить $t=\infty$. Следовательно, в этом случае, помимо той же прямолинейной асимптоты, имеются две криволинейные асимптоты и, стало быть, четыре уходящие в бесконечность ветви.

Второй случай, когда $q=2p$, дает уравнение

$$z^2-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^{2p}}=0,$$

которое либо является мнимым, когда A^2 меньше, чем $4B$, и в этом случае не существует никакой асимптоты, либо дает две подобные асимптоты $z=\frac{C}{t^p}$, когда A^2 больше, чем $4B$.

В третьем случае, когда q меньше, чем $2p$, средний член уравнения всегда исчезает, если положить $t=\infty$; следовательно, получается уравнение $z^2+\frac{B}{t^q}=0$ для одной асимптоты. Формы предшествующих асимптот мы уже указали; поэтому мы исследуем теперь те асимптоты, которые содержатся в уравнении

$$z^2=\frac{C}{t^k}.$$

209. Таким образом, если взять ось на прямолинейной асимптоте $u=c$ и обозначить ординату $u-c$ через z, то все указанные выше криволинейные асимптоты будут содержаться в уравнении $z^2=\frac{C}{t^k}$, где k обозначает целое число, меньшее чем $n-1$. А ветви этих кривых, уходящие в бесконечность, т. е. когда полагаем $t=\infty$, можно найти следующим образом. Если $k=1$, то есть $z^2=\frac{C}{t}$, то так как t не может быть отрицательным, кривая (рис. 39) будет иметь две ветви EX и FX, уходящие в бесконечность в областях P и R. Это же будет иметь место, если k будет любым нечетным числом. Если же k будет четным числом, например, если оно будет равно 2, т. е. если будет $z^2=\frac{C}{t^2}$, то надо будет прежде всего определить, является ли C отрицательным или же положительным количеством. В первом случае уравнение не может быть действительным и, следовательно, кривая не будет иметь никакой ветви, которая уходила бы в бесконечность. Во втором случае кривая (рис. 40) будет иметь

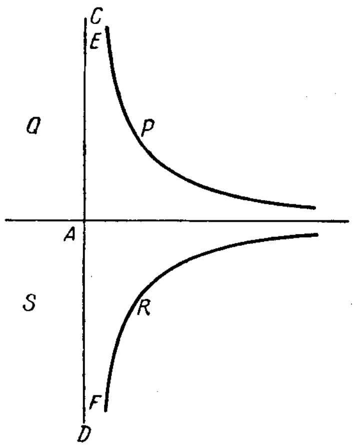

Рис. 39.

четыре ветви, уходящие в бесконечность и сливающиеся с асимптотой XY, а именно ветви EX, FX, GY и HY, во всех четырех областях P, R, Q и S.

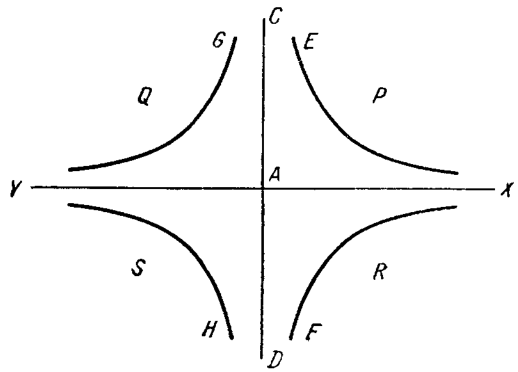

Рис. 40.

210. Допустим, что высший член уравнения P имеет три равных множителя. Приведем уравнение к координатам t и u таким образом, чтобы u было этим трехкратным множителем P; тогда будет

$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \text{и т. д.},$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \text{и т. д.},$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \text{и т. д.},$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \text{и т. д.}$$

и так далее.

Отсюда в соответствии с различной структурой членов Q и R получаются следующие уравнения:

$$\text{I.}\quad \alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-1} = 0.$$
$$\text{II.}\quad \alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0.$$
$$\text{III.}\quad \alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-2} = 0.$$
$$\text{IV.}\quad \alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-3} + \delta t^{n-3} = 0.$$

211. Первое уравнение переходит в $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$ и, следовательно, эта асимптота является линией третьего порядка (рис. 41), фигура которой такова, как показано, если абсциссы t отсчитывать на оси XY от точки A; очевидно, эта кривая будет иметь в областях P и Q две ветви E и F, уходящие в бесконечность.

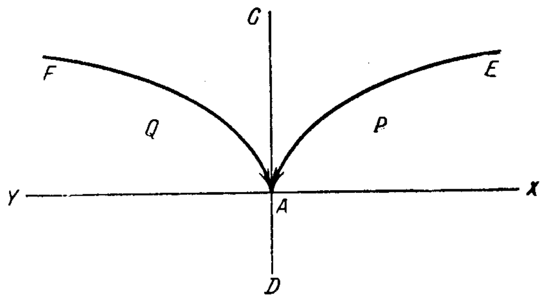

Рис. 41.

Второе уравнение сводится к $\alpha u^3 + \beta tu + \gamma t = 0$. Из этого уравнения, если положить $t = \infty$, для u можно получить два значения: одно конечное, другое бесконечное, и в соответствии с этим оно распадается на следующие два уравнения: $\beta u + \gamma = 0$ и $\alpha u^2 + \beta t = 0$. Последнее представляет собою уравнение для параболы, как мы видели раньше, и поэтому кривая будет иметь две ветви, простирающиеся в бесконечность и приближающиеся к параболе. Первое же уравнение дает $u-c=0$, что представляет собою уравнение для прямолинейной асимптоты, природу которой можно определить, если повсюду, за исключением лишь $\beta u+\gamma=u-c$, написать c вместо u. Таким образом, получится

$$t^{n-2}(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+ \\ +t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+\text{и т. д.}=0,$$

откуда, как и раньше, следует, что будет либо $(u-c)+\frac{A}{t}=0$, либо $(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$ и т. д. Конечно, последним уравнением, которое может при этом получиться, является $(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0$. Следовательно, в этом случае кривая будет иметь две асимптоты, одну прямолинейную — указанного здесь характера и другую параболическую.

212. Третье уравнение $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma t=0$, если положить $t=\infty$, не может иметь места, если только u не будет равно ∞. Следовательно, член βu^2 исчезает по сравнению с αu^3, и тогда получается уравнение третьего порядка $\alpha u^3+\gamma t=0$ для асимптоты, которая имеет вид, указанный на рис. 42, и которая обладает двумя ветвями AE и AF, уходящими в бесконечность в противоположных областях P и S.

А четвертое уравнение $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$ даст либо одну, либо три параллельные друг другу прямолинейные асимптоты, если только две из них, или же все они, не равны между собою. Для того чтобы узнать их природу, пусть, во-первых, $u=c$ представляет собою один корень уравнения, не имеющий себе одинакового, и пусть

$$\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=(u-c)(fu^2+gu+h).$$

Положим повсюду $u=c$, за исключением указанного множителя $u-c$; тогда получится следующее уравнение:

$$t^{n-3}(u-c)+At^{n-4}+Bt^{n-5}+Ct^{n-6}+\text{и т. д.}=0.$$

Отсюда находим асимптоту вида $u-c=\frac{K}{t^k}$, где k — число, меньшее чем $n-2$.

213. Когда два корня уравнения $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$ равны между собою, так что приведенное выше выражение принимает вид $(u-c)^2(fu+g)$, то, положив $u=c$, если только в каком-либо члене не окажется множителя $u-c$, придем к такого рода уравнению:

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

где q будет меньше, чем $n-2$, и p меньше, чем q, а этот случай мы уже разобрали раньше. Таким образом, остается лишь тот случай, когда уравнение $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$ имеет три равных корня, скажем $(u-c)^3$, и тогда получится следующего рода уравнение:

$$(u-c)^3t^{n-3}+Pt^{n-4}+Qt^{n-5}+Rt^{n-6}+St^{n-7}+\text{и т. д.}=0.$$

Если P не делится на $u-c$, положим $u=c$; тогда

$$(u-c)^3+\frac{A}{t}=0.$$

Но если P содержит в себе делитель $u-c$ один раз, следует повсюду, кроме этого множителя, положить $u=c$, и тогда получится уравнение такого вида:

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^q}=0,$$

где q — число, меньшее, чем $n-2$, а $\frac{B}{t^q}$ — ближайший следующий член, который не исчезает, если положить $u=c$. Если же P будет делиться и на $(u-c)^2$, а Q не будет содержать множителя $u-c$, то получится уравнение следующего вида:

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t}+\frac{B}{t^2}=0.$$

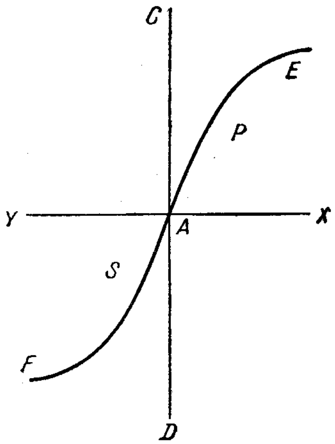

Рис. 42.

А если и второй член будет делиться на $(u-c)^3$, следует идти дальше по порядку, пока не придем к такому члену, который не делится на $(u-c)^3$; но если последний будет делиться на $u-c$, следует идти дальше, пока не придем к такому члену, который не делится на $u-c$. Если же указанный выше член делится на $(u-c)^2$, то следует идти дальше, пока мы не придем к такому члену, который или делится на $u-c$ или не делится на $u-c$. В первом случае уравнение определится, а во втором надлежит идти дальше, пока не придем, наконец, к такому члену, который не делится на $u-c$. Итак, указанным путем мы всегда получим уравнение, которое содержится в следующей общей форме:

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t^p}+\frac{B(u-c)}{t^q}+\frac{C}{t^r}=0,$$

где r будет меньше, чем $n-2$, q — меньше, чем r, и p — меньше, чем q.

214. В приведенном выше уравнении содержатся либо три уравнения вида $u-c=\frac{K}{t^k}$, либо одно такое уравнение и одно вида $(u-c)^2=\frac{K}{t^k}$, или же только одно уравнение вида $(u-c)^3=\frac{K}{t^k}$. Последнее может иметь место в том случае, если $3p$ будет больше, чем r, и $3q$ будет больше, чем $2r$. Но может также случиться, что оба уравнения окажутся мнимыми: следовательно, они укажут на то, что никакой асимптоты нет. Впрочем, формы этих асимптот мы уже разъяснили, за исключением последней, которая содержится в уравнении $(u-c)^3=\frac{K}{t^k}$. При k нечетном это уравнение дает кривую вида, показанного на рис. 36, с двумя ветвями EX и FY, уходящими в бесконечность в противолежащих областях P и S. Если же k — четное число, то получается кривая вида, показанного на рис. 37, где имеются две ветви EX и FY кривой линии, рас-

положенные по одну и ту же сторону от прямолинейной асимптоты XY, то есть уходящие бесконечно далеко в областях P и Q.

215. Так как из того, что было изложено выше, можно легко усмотреть, каким образом надлежит исследовать форму асимптот в том случае, когда четыре или большее число множителей в высшем члене уравнения равны между собою, я дальше в этом направлении не пойду, а закончу эту главу применением изложенных правил к одному примеру.

ПРИМЕР

Итак, пусть предложена кривая линия, которая выражается уравнением

$$y^3x^2(y-x)-xy(y^2+x^2)+1=0,$$

высший член которого $y^3x^2(y-x)$ содержит в себе один простой множитель $y-x$, два равных множителя x^2 и сверх того три равных множителя y^3.

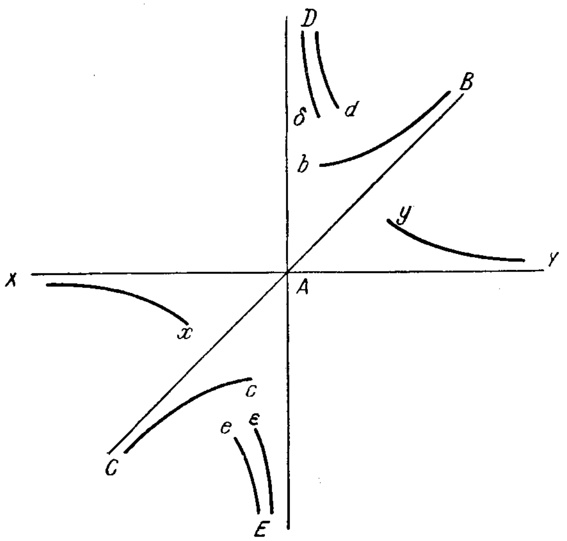

Рис. 43.

Рассмотрим первый простой множитель $y-x$; при этом, если положить $y=x$, получится $y-x-\frac{2}{x}=0$, а в силу $x=\infty$ будет $y-x=0$, что представляет собою уравнение (рис. 43) для прямолинейной асимптоты BAC, образующей полупрямой угол BAY с осью XY в начале абсцисс. К этой линии, как к оси, отнесем уравнение — это осуществляется, если положить $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ и $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$, — в результате чего приходим к следующему уравнению:

$$\frac{(u+t)(t^2-u^2)^2u}{4}-\frac{(t^2-u^2)(t^2+u^2)}{2}+1=0;$$

отсюда, после умножения на 4, получаем

$$\begin{aligned} 0 = t^5u + t^4u^2 &- 2t^3u^3 - 2t^2u^4 + tu^5 + u^6 \\ - 2t^4 & \qquad\quad + 2u^4 \\ + 4 & \qquad\quad + 2u^4 \end{aligned}$$

Из этого уравнения, если положить $t = \infty$, находим $u = 0$; стало быть, остальные члены, кроме двух: t^5u и $-2t^4$, исчезают. Отсюда для криволинейной асимптоты получится $u = \frac{2}{t}$. Таким образом, благодаря именно этому множителю искомая кривая будет иметь две ветви bB и cC, уходящие в бесконечность.

216. Возьмем теперь два равных множителя xx. Мы будем иметь

$$xx = \frac{xy(y^2+x^2)-1}{y^3(y-x)}.$$

Следовательно, если взять в качестве оси прямую линию AD, перпендикулярную к первоначальной оси XY, то получится $y = t$ и $x = u$, и в этом случае окончательно получаем уравнение

$$\begin{aligned} 0 = \quad & t^4u^2 - t^3u^3 \\ & t^3u \quad\; - tu^3 \\ & + 1, \end{aligned}$$

а последнее, если взять t бесконечным, перейдет в $t^4u^2 - t^3u + 1 = 0$; отсюда возникают два уравнения:

$$u = \frac{1}{t} \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{t^3}.$$

Таким образом, этот множитель дает четыре уходящие в бесконечность ветви, а именно, две ветви dD и eE из уравнения $u = \frac{1}{t}$ и две ветви, расположенные на их же стороне, δD и εE, из уравнения $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Три равных множителя y^3 отнесем к оси XY, и тогда $x = t$ и $y = u$, в результате чего будем иметь уравнение

$$0 = -t^3u^3 + t^2u^4 - t^3u - tu^3 + 1,$$

которое, если положить, что t бесконечно, дает $t^3u^3 + t^3u = 0$, то есть $u(u^2 + 1) = 0$. Отсюда, ввиду того, что $u^2 + 1 = 0$ является невозможным уравнением, получается единственная прямолинейная асимптота $u = 0$, которая совпадает с самой осью XY и природа которой выражается уравнением $t^3u = 1$ или $u = \frac{1}{t^3}$. Посему этот тройной множитель дает лишь две уходящие в бесконечность ветви yY и xX. Таким образом, рассматриваемая линия будет иметь всего восемь уходящих в бесконечность ветвей; а выяснять, каким образом эти последние сочетаются друг с другом на конечном пространстве, здесь неуместно.

218. Итак, из того, что было изложено в последней главе, а также в предшествующей, легко усматривается разнообразие ветвей, простирающихся в бесконечность. А именно, во-первых, эти ветви кривых либо приближаются к какой-нибудь прямой, как к асимптоте, что мы

видели у гиперболы, либо не имеют прямолинейной асимптоты, подобно параболе. В первом случае ветви кривых называются *гиперболическими*, во втором—*параболическими*. Есть бесконечно много видов линий того и другого класса. Виды гиперболических ветвей выражаются следующими уравнениями между координатами t и u, в которых координата t полагается бесконечной:

$$u=\frac{A}{t},\quad u=\frac{A}{t^2},\quad u=\frac{A}{t^3},\quad u=\frac{A}{t^4}\ \text{и т. д.,}$$
$$u^2=\frac{A}{t},\quad u^2=\frac{A}{t^2},\quad u^2=\frac{A}{t^3},\quad u^2=\frac{A}{t^4}\ \text{и т. д.,}$$
$$u^3=\frac{A}{t},\quad u^3=\frac{A}{t^2},\quad u^3=\frac{A}{t^3},\quad u^3=\frac{A}{t^4}\ \text{и т. д.}$$

и так далее.

А виды параболических ветвей определяются следующими уравнениями:

$$u^2=At,\quad u^3=At,\quad u^4=At,\quad u^5=At\ \text{и т. д.,}$$
$$u^3=At^2,\quad u^4=At^2,\quad u^5=At^2,\quad u^6=At^2\ \text{и т. д.,}$$
$$u^4=At^3,\quad u^5=At^3,\quad u^6=At^3,\quad u^7=At^3\ \text{и т. д.}$$

и так далее.

Каждое из приведенных уравнений дает по меньшей мере две уходящие в бесконечность ветви, если показатели t и u не будут оба четными числами. Если же каждый из этих показателей окажется четным числом, тогда либо не будет никаких ветвей, уходящих в бесконечность, либо будет четыре таких ветви. Первое имеет место, когда уравнение невозможно, а второе,— когда оно возможно.

ГЛАВА IX

О ПОДРАЗДЕЛЕНИИ ЛИНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ВИДЫ

219. С полным основанием считают, что природа и число простирающихся в бесконечность ветвей являются существенным отличием для кривых линий. Представляется весьма удобным из этого же источника извлечь основание для дальнейшего деления линий каждого порядка на различные виды. Действительно, отсюда получается то же самое деление линий второго порядка на виды, какое ранее дала нам сама природа вещей.

В самом деле, пусть нам дано общее уравнение линий второго порядка

$$\alpha y^2 + \beta yx + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0,$$

высший член которого $\alpha y^2 + \beta yx + \gamma x^2$ надлежит преимущественно проверить и посмотреть, содержит ли он в себе простые действительные множители или же нет. Если он лишен подобного рода множителей, то получается первый вид, который называют *эллипсом*; если же множители его действительны, то следует посмотреть, являются ли они неравными или же равными. В первом случае получается *гипербола*, а во втором *парабола*.

220. Таким образом, в том случае, когда множители высшего члена оказываются действительными и неравными, кривая имеет две прямолинейные асимптоты; для выяснения их природы положим, что

$$\alpha y^2 + \beta yx + \gamma x^2 = (ay - bx)(cy - dx),$$

так что получается

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Рассмотрим сначала множитель $ay - bx$, который на бесконечно большом расстоянии дает $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; тогда имеем

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0,$$

в силу чего уравнение

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} = 0$$

определяет положение одной прямолинейной асимптоты. Аналогично уравнение

$$cy - dx + \frac{\delta d + \varepsilon c}{ad - bc} = 0$$

дает вторую асимптоту.

221. Для исследования природы каждой из асимптот отнесем уравнение к другой оси, положив

$$y = \frac{au + bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad x = \frac{at - bu}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

и пусть $\sqrt{a^2 - b^2} = g$; тогда будет

$$u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u + (\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0$$

и, следовательно,

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)u^2 + (\delta b + \varepsilon a)t + (\delta a + \varepsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Отсюда, если в остальных членах положить

$$u = \frac{\delta b + \varepsilon a}{g(bc - ad)},$$

получится

$$(g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \varepsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} \frac{(\delta a - \varepsilon b)(\delta b + \varepsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$$

или

$$g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a + \frac{g(\delta b + \varepsilon c)(\delta b + \varepsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0.$$

Таким образом, получится гиперболическая асимптота рода $u = \frac{A}{t}$. Аналогичным путем можно будет, конечно, определить и другую асимтоту, получающуюся из множителя $cy - dx$. Стало быть, кривая будет иметь две пары простирающихся в бесконечность ветвей и каждая из этих пар будет выражаться с помощью уравнения вида $u = \frac{A}{t}$.

222. Пусть теперь оба корня равны между собою, т. е. пусть

$$\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 = (ay - bx)^2;$$

тогда, отнеся, как и раньше, уравнение к другой оси, для чего полагаем

$$y = \frac{au + bt}{g} \quad \text{и} \quad x = \frac{at - bu}{g},$$

будем иметь

$$g^2u^2 + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0;$$

приняв t бесконечным, получим

$$u^2 + \frac{(\delta b + \varepsilon a)}{g^2} = 0,$$

а это уравнение выявляет две параболические ветви вида $u^2 = At$, так как сама кривая оказывается параболой и своей собственной асимптотой. Если же будет $\delta b + \varepsilon a = 0$, то уравнение примет вид

$$g^2u^2 + \frac{\delta gu}{a} + \zeta = 0$$

и окажется уравнением двух прямых, параллельных друг другу. Это — случай, когда уравнение второго порядка может быть разложено на два простых множителя.

Стало быть, указанным путем мы нашли бы виды линий второго порядка, даже если бы раньше мы их еще не установили [38].

223. Тем же путем рассмотрим теперь линии третьего порядка, общее уравнение которых таково:

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y^2+\iota x+\varkappa=0.$$

Таким образом, высший член этого уравнения $\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^2$, так как он нечетного измерения, либо имеет один простой действительный множитель, либо все три его множителя являются действительными. Итак, надлежит исследовать следующие случаи:

I

Когда имеется лишь один простой действительный множитель.

II

Когда все три множителя являются действительными и не равны между собою.

III

Когда два множителя равны между собою.

IV

Когда все три множителя равны между собою.

Так как в каждом из этих случаев достаточно применить исчисление к одному лишь множителю, пусть этим множителем — содержится ли он в единственном числе или же сопровождается другими ему равными либо неравными множителями — будет $ay-bx$, то в соответствии с этим изменим положение оси так, как мы это делали раньше. После этого получится следующее уравнение, которым мы и воспользуемся вместо прежнего, так как оно столь же общо[1]):

$$\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3+\delta t^2+\varepsilon tu+\zeta u^2+\eta t+\theta u+\iota=0;$$

здесь высший член $\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3$ заведомо содержит один множитель u.

СЛУЧАЙ I

224. Итак, пусть высший член содержит в себе единственный действительный множитель u, что имеет место, когда β^2 меньше чем $4\alpha\gamma$. А если положить, что t бесконечно, то получится $\alpha u+\delta=0$, что является уравнением для прямолинейной асимптоты. Пусть это

1) aeque late patet.

уравнение дает значение $u=c$; тогда будет

$$\alpha t^2(u-c)+t(\beta c^2+\varepsilon c+\eta)+\gamma c^2+\zeta c^2+\theta c+\iota=0,$$

и это уравнение выражает природу асимптоты. Отсюда, в зависимости от того, будет $\beta c^2+\varepsilon c+\eta$ равняться 0 или не будет, получатся два вида асимптот, а именно:

$$\text{либо } u-c=\frac{A}{t}, \quad \text{либо } u-c=\frac{A}{t^2}.$$

Таким образом, получаются два первых вида линий третьего порядка, обладающие следующими свойствами:

1

Первый вид имеет единственную прямолинейную асимптоту вида

$$u=\frac{A}{t}.$$

2

Второй вид имеет единственную асимптоту вида

$$u=\frac{A}{t^2}.$$

СЛУЧАЙ II

225. Пусть три простых множителя высшего члена действительны и не равны между собою, а это имеет место, если в уравнении

$$\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3+\delta t^2+\varepsilon tu+\zeta u^2+\eta t+\theta u+\iota=0$$

β^2 окажется больше, чем $4\alpha\gamma$. Следовательно, в данном случае по отношению к каждому множителю остается в силе то, что выше изложено по отношению к одному множителю. Стало быть, каждый из этих множителей дает две гиперболические ветви либо вида $u=\frac{A}{t}$, либо вида $u=\frac{A}{t^2}$. Таким образом, данный случай содержит в себе четыре различных вида линий третьего порядка, которые обладают тремя прямолинейными асимптотами, любым образом наклоненными друг к другу. Эти виды таковы:

3

Третий вид имеет три асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$.

4

Четвертый вид имеет две асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$ и одну вида $u=\frac{A}{t^2}$.

Пятый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$ и две вида $u=\frac{A}{t^2}$[1].

Шестой вид имеет три асимптоты вида $u=\frac{A}{t^2}$.

[1]) См. ниже, § 227. [*А. Ш.*]

226. Но посмотрим, возможны ли все приведенные выше случаи. Для этой цели возьмем следующее наиболее общее уравнение[1]):

$$y(\alpha y-\beta x)(\gamma y-\delta x)+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x+\theta y+\iota=0,$$

высший член которого имеет три действительных множителя, ибо хотя член x^2 здесь опущен, однако из-за этого уравнение не является менее общим. А из того, что было изложено выше, ясно, что множитель y даст асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$, если не будет $\eta=0$. Посмотрим поэтому, какого рода асимптоту дает множитель $\alpha y-\beta x$. Для этой цели положим $y=\alpha u+\beta t$ и $x=\alpha t-\beta u$; и пусть для краткости $\alpha^2+\beta^2=1$, что всегда можно допустить. Тогда уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}\beta(\beta\gamma-\alpha\delta)t^2u+(2\alpha\beta\gamma-(\alpha^2-\beta^2)\delta)\,tu^2+\alpha(\alpha\gamma+\beta\delta)\,u^3&+\\+\beta(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)\,t^2+(2\alpha\beta\zeta+(\alpha^2-\beta^2)\,\varepsilon)\,tu+\alpha(\alpha\zeta-\beta\varepsilon)\,u^2&+\\+(\alpha\eta+\beta\theta)\,t\qquad\qquad+(\alpha\theta-\beta\eta)\,u&+\\+\iota&=0.\end{aligned}$$

Здесь множитель $\alpha y-\beta x$ переходит в u. Отсюда, если положить t бесконечным, получается, во-первых,

$$u=\frac{\alpha\varepsilon+\beta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}=c;$$

если это значение подставить вместо u во второй член, содержащий t, то выявляется, что из этого множителя u или из $\alpha y-\beta x$ получается асимптота вида $u=\frac{A}{t}$, если только не будет

$$\frac{\alpha\eta+\beta\theta}{\beta}+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)^2}=0.$$

Равным образом множитель $\gamma y-\delta x$ даст асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$, если только не будет

$$\frac{\gamma\eta+\delta\theta}{\delta}+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)^2}=0.$$

227. Из вышеизложенного явствует, конечно, и возможность того, что ни η, ни какое-либо другое из только что найденных выражений не получится равным нулю, так что окажется возможным и третий вид. Что касается четвертого вида, положим $\eta=0$, в результате чего получится одна асимптота вида $u=\frac{A}{t^2}$; тогда оба оставшихся выражения сольются в одно и, стало быть, остальные две асимптоты окажутся вида $u=\frac{A}{t}$, если только не будет

$$\theta+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}=0.$$

Стало быть, и четвертый вид возможен. Но если, помимо $\eta=0$, одно из двух других выражений станет равным 0, то одновременно и второе обратится в нуль. Поэтому не может случиться, чтобы две асимптоты оказались вида $u=\frac{A}{t^2}$ без того, чтобы третья асимптота одновременно получила тот же вид: следовательно, пятый вид невозможен. Но в силу

[1]) hanc aequationem latissime patentem.

того же возможен шестой вид, так как в случае, когда $\eta = 0$, получается

$$\theta = \frac{-(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}.$$

Таким образом, эти два случая дают только пять видов линий третьего порядка, в силу чего тот случай, который мы считали пятым, должен быть отброшен, и

5

Пятый вид имеет три асимптоты вида $u = \frac{A}{t^2}$.

СЛУЧАЙ III

228. Пусть высший член содержит в себе два равных множителя u, а это имеет место, когда в уравнении для предыдущего случая исчезает первый член $\alpha t^2 u$. Следовательно, общее уравнение, относящееся к данному случаю, будет следующего вида:

$$\alpha t u^2 - \beta u^3 + \gamma t^2 + \delta t u + \varepsilon u^2 + \zeta t + \eta u + \theta = 0;$$

стало быть, высший член содержит в себе два равных множителя u и третий множитель $(\alpha t - \beta u)$, не равный остальным. Этот третий множитель порождает асимптоту либо вида $\frac{A}{t}$, либо вида $\frac{A}{t^2}$, в зависимости от того, будет выражение[1])

$$(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta^2\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

не равно 0 или же равно 0.

229. Что касается двух равных друг другу множителей, то первый случай имеет место, когда γ не равно 0. Если в этом случае положить $t = \infty$, то получится $\alpha u^2 + \gamma t = 0$, что представляет собою уравнение для параболической асимптоты вида $u^2 = At$. Отсюда получается два новых вида линий третьего порядка, а именно

6

Шестой вид имеет одну асимптоту вида $u = \frac{A}{t}$ и одну асимптоту вида $u^2 = At$.

7

Седьмой вид имеет одну асимптоту вида $u = \frac{A}{t^2}$ и одну параболическую асимптоту вида $u^2 = At$.

230. Пусть теперь $\gamma = 0$; тогда третий множитель $\alpha t - \beta u$ даст асимптоту вида $u = \frac{A}{t^2}$, если будет

$$\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta);$$

---

[1]) Которое получается, если положить $t = \frac{\beta}{\alpha} u + a + \frac{b}{u}$ и принять коэффициенты при u^2 и u равными нулю. [*А. Ш.*]

если же это равенство не будет иметь места, то асимптота будет вида $u=\frac{A}{t}$. Таким образом, будем иметь следующее уравнение:

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha t u^2-\beta u^3 \\ +\delta t u+\varepsilon u^2 \\ +\zeta t+\eta u \\ +\theta \end{array}\right\}=0.$$

Если положить здесь $t=\infty$, получим $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$.

Пусть, во-первых, δ^2 меньше, чем $4\alpha\zeta$; тогда отсюда не получится никакой асимптоты. Следовательно, этот случай даст два вида:

8

Восьмой вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$.

9

Девятый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t^2}$.

231. Пусть оба корня уравнения $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$ будут действительны и не равны между собою, а именно пусть δ^2 больше, чем $4\alpha\zeta$; тогда отсюда получатся две прямолинейные, параллельные друг другу асимптоты, причем каждая из них вида $u=\frac{A}{t}$; следовательно, этот случай снова даст два вида:

10

Десятый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$ и две параллельные друг другу асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$.

11

Одиннадцатый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t^2}$ и две параллельные друг другу асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$.

232. Пусть оба корня уравнения $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$ между собою равны, т. е. пусть $\delta^2=4\alpha\zeta$, или $\alpha u^2+\delta u+\zeta=\alpha(u-c)^2$; тогда получится

$$\alpha t(u-c)^2=\beta c^3-\varepsilon c^2-\eta c-\theta,$$

откуда получается одна прямолинейная асимптота вида $u^2=\frac{A}{t}$. Следовательно, отсюда получаются два новых вида:

12

Двенадцатый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$ и одну вида $u^2=\frac{A}{t}$.

13

Тринадцатый вид имеет одну асимптоту вида $u=\frac{A}{t^2}$ и одну вида $u^2=\frac{A}{t}$.

СЛУЧАЙ IV

233. Если же все три множителя высшего члена окажутся равными между собою, то уравнение будет иметь следующий вид:

$$\alpha u^3+\beta t^2+\gamma tu+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0.$$

Здесь следует прежде всего посмотреть, имеется ли член βt^2; если он в наличии, то кривая будет иметь параболическую асимптоту вида $u^3=At^2$ [1]), и таким образом получится один вид:

14

Четырнадцатый вид имеет единственную параболическую асимптоту вида $u^3=At^2$.

234. Когда же член βt^2 отсутствует, имеем уравнение

$$\alpha u^3+\gamma tu+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0.$$

Если здесь положить t бесконечным, то получается $\alpha u^3+\gamma tu+\varepsilon t=0$, если только γ и ε не $=0$. Итак, пусть γ не $=0$; тогда в этом уравнении содержатся два уравнения $\alpha u^2+\gamma t=0$ и $\gamma u+\varepsilon=0$. Первое из них — уравнение параболической асимптоты вида $u^2=At$; второе же, если положить $\frac{-\varepsilon}{\gamma}=c$, даст следующее уравнение:

$$\gamma t(u-c)+\alpha c^2+\delta c^2+\zeta c+\eta=0$$

и, следовательно, это уравнение гиперболической асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$, откуда

15

Пятнадцатый вид имеет одну параболическую асимптоту вида $u^2=At$ и одну прямолинейную вида $u=\frac{A}{t}$, и ось параболы параллельна прямолинейной асимптоте.

235. Пусть также будет $\gamma=0$, так что получается уравнение

$$\alpha u^3+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0;$$

здесь ε не может исчезнуть, так как в противном случае данная линия перестанет быть кривой. А если t бесконечно, то и u должно обязательно быть бесконечным, откуда получается $\alpha u^3+\varepsilon t=0$, что дает последний вид:

16

Шестнадцатый вид имеет одну параболическую асимптоту вида $u^3=At$.

---

[1]) Асимптота имеет вид $u=c+A\sqrt[3]{t}+B\sqrt[3]{t^2}$; если здесь положить $\alpha=1$, то получится $B=-\sqrt[3]{\beta}$, $A=\frac{\gamma}{3\sqrt[3]{\beta}}$, $c=-\frac{\delta}{3}$. [*А. Ш.*]

236. Таким образом, мы свели линии третьего порядка к *шестнадцати видам*, в состав которых входят все те *семьдесят два вида*, на которые Ньютон разделил линии третьего порядка [39]. Неудивительно, конечно, что между этим нынешним нашим делением и ньютоновским существует столь большое различие, ибо мы судили здесь о различии видов, исходя лишь из свойства уходящих в бесконечность ветвей, между тем как Ньютон учитывал также свойство кривых в конечном пространстве и на этом последнем построил различие видов. Но хотя основание для такого рода деления представляется произвольным, тем не менее Ньютон, следуя своей идее, оказался в состоянии дать гораздо большее количество видов, а я, пользуясь своим методом, не могу открыть ни большего, ни меньшего количества видов, чем я их дал.

237. Для того чтобы можно было лучше разобраться в природе и структуре каждого вида, я приведу ниже общее уравнение для любого из них, причем дам его в простейшей форме, какую только можно допустить без нарушения общности. Вместе с тем при каждом виде я перечислю и входящие в его состав виды *Ньютона*.

ПЕРВЫЙ ВИД

$$y(x^2-2mxy+n^2y^2)+ay^2+bx+cy+d=0,$$

причем m^2 меньше[1]), чем n^2 и b не $=0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 33, 34, 35, 36, 37, 38.

ВТОРОЙ ВИД

$$y(x^2-2mxy+n^2y^2)+ay^2+cy+d=0,$$

причем m^2 меньше, чем n^2.

Сюда относятся виды *Ньютона* 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

ТРЕТИЙ ВИД

$$y(x-my)(x-ny)+ay^2+bx+cy+d=0,$$

где b не $=0$, $mb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2}$ не $=0$,

$$nb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2} \text{ не } =0 \text{ и } m \text{ не } =n.$$

Сюда относятся виды *Ньютона* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а также 24, 25, 26, 27, если $a=0$.

ЧЕТВЕРТЫЙ ВИД

$$y(x-my)(x-ny)+ay^2+cy+d=0,$$

где $c+\frac{a^2}{(m-n)^2}$ не $=0$ и m не $=n$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, а равно, если $a=0$, следующие: 28, 29, 30, 31.

---

1) В первом издании вместо «меньше» (minore) читаем «больше» (maiore). [*А. Ш.*]

ПЯТЫЙ ВИД

$$y\,(x-my)\,(x-ny)+ay^2-\frac{a^2y}{(m-n)^2}+d=0,$$

если m не $=n$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 22, 23 и 32.

ШЕСТОЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+ax^2+bx+cy+d=0,$$

если a не $=0$ и $2m^3a^2-mb-c$ не $=0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

СЕДЬМОЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+ax^2+bx+m\,(2m^2a^2-b)\,y+d=0,$$

если a не $=0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 53, 54, 55, 56.

ВОСЬМОЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+b^2x+cy+d=0,$$

если c не $=-mb^2$ и b не $=0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 61 и 62.

ДЕВЯТЫЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+b^2x-mb^2y+d=0,$$

если b не $=0$.

Сюда относится вид *Ньютона* 63.

ДЕСЯТЫЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)-b^2x+cy+d=0,$$

если c не $=mb^2$ и b не $=0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 57, 58, 59.

ОДИННАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)-b^2x+mb^2y+d=0,$$

если b не $=0$.

Сюда относится вид *Ньютона* 60.

ДВЕНАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+cy+d=0,$$

если c не $=0$.

Сюда относится вид *Ньютона* 64.

ТРИНАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^2\,(x-my)+d=0.$$

Сюда относится вид *Ньютона* 65.

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^3 + ax^2 + bxy + cy + d = 0,$$

если a не $= 0$.

Сюда относятся виды *Ньютона* 67, 68, 69, 70, 71.

ПЯТНАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^3 + bxy + cx + d = 0,$$

если b не $= 0$.

Сюда относится вид *Ньютона* 66.

ШЕСТНАДЦАТЫЙ ВИД

$$y^3 + ay + bx = 0,$$

если b не $= 0$.

Сюда относится вид *Ньютона* 72 [40].

238. Но вышеприведенные виды кривых линий обладают большей частью такой общностью, что в каждом из них содержатся достаточно заметные различия, если примем во внимание форму, какую эти кривые принимают в ограниченном пространстве. Поэтому-то *Ньютон* и увеличил количество видов с тем, чтобы отличить друг от друга те кривые, которые заметно разнятся между собою на ограниченном пространстве. Следовательно, было бы удобнее то, что мы выше назвали *видами*, назвать *родами*, а различия, которые охватываются каждым из последних, отнести к *видам*. Но особенно следовало бы придерживаться этого в том случае, если бы кто-нибудь пожелал аналогичным образом подразделить линии четвертого и более высокого порядка, так как там в каждом виде кривых, получаемом указанным путем, будет существовать гораздо большее разнообразие [41].

ГЛАВА X

ОБ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

239. Подобно тому, как раньше мы вывели основные свойства линий второго порядка из [их] общего уравнения, совершенно так же можно будет определить основные свойства линий третьего порядка, исходя из [их] общего уравнения и подобным же образом можно будет определить свойства линий четвертого и более высоких порядков. Поэтому рассмотрим самое общее уравнение для линий третьего порядка, которое имеет следующий вид:

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Это уравнение выражает природу всякой линии третьего порядка при координатах x и y, наклоненных под любым углом, и какая бы прямая ни была взята в качестве оси.

240. Следовательно, если только α не будет $=0$, каждой абсциссе будет соответствовать либо одна действительная ордината либо три. Допустим, что имеются три действительные ординаты. Тогда ясно, что их соотношение можно определить с помощью уравнения. Итак, если положить $\alpha=1$, получится следующее уравнение:

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon) y^2 + (\gamma x^2 - \zeta x + \theta) y + \delta x^3 + \eta x^2 + \iota x + \varkappa = 0,$$

и сумма трех ординат, которые соответствуют одной и той же абсциссе x, окажется $=-\beta x-\varepsilon$; сумма трех прямоугольников, составленных из ординат, взятых попарно, будет $=\gamma x^2 + \zeta x + \theta$, и, наконец, произведение их всех, или параллелепипед, составленный из них всех, будет $= -\delta x^3 - \eta x^2 - \iota x - \varkappa$. Если бы две ординаты оказались мнимыми, то сказанное выше осталось бы в силе, но не применительно к фигурам из линий, так как нельзя себе представить сумму или прямоугольник, составленные из двух мнимых ординат [42].

241. Итак, пусть (рис. 44) имеется какая-нибудь линия третьего порядка, отнесенная к оси AZ, а под заданным углом к последней проведены ординаты LMN, lmn, пересекающие кривую в трех точках. Следовательно, если положить абсциссу $AP=x$, то ордината y будет иметь три значения PL, PM и $-PN$, в силу чего

будет $PL+PM-PN=-\beta x-\varepsilon$. Поэтому, если взять

$$PO=z=\frac{PL+PM-PN}{3},$$

то точка O окажется расположенной посередине таким образом, что $LO=MO+NO$. Так как, стало быть, $z=-\frac{\beta x+\varepsilon}{3}$, то эта точка O будет находиться на прямой линии OZ; поэтому рассматриваемая прямая линия будет пересекать всякую ординату lmn, параллельную LMN в точке o таким образом, что будет $lo+mo=no$.

Это свойство аналогично свойству диаметров, которые имеются у линий второго порядка. Следовательно, если две ординаты, параллельные друг другу и пересекающие кривую в трех точках, рассечь

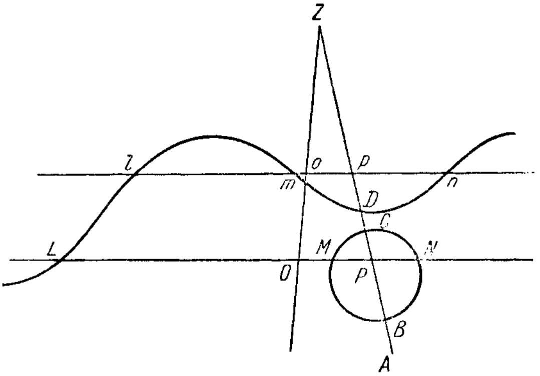

Рис. 44.

в точках O и o таким образом, чтобы сумма ординат, лежащих по одну сторону, была равна третьей ординате, расположенной по другую сторону, то прямая, проведенная через эти точки O и o, пересечет все остальные параллельные им ординаты подобным же образом и в силу этого она будет как бы диаметром линии третьего порядка.

242. Так как в линиях второго порядка все диаметры взаимно пересекаются в одной и той же точке, посмотрим, в каких взаимных отношениях находятся подобного рода диаметры линий третьего порядка. Итак, возьмем по отношению к той же оси AP ординаты под каким-нибудь другим углом и пусть абсцисса $=t$ и ордината $=u$. Тогда будет $y=nu$ и $x=t-mu$; а если эти значения подставить в общее уравнение

$$y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

то получится уравнение

$$\left.\begin{array}{llll}
+n^3u^3+\beta n^2u^2t+\gamma nut^2+\delta t^3+\varepsilon n^2u^2+\zeta nut+\eta t^2+\theta nu+\iota t+\varkappa \\
-\beta mn^2u^3-2\gamma mnu^2t-3\delta mut^2 & -\zeta mnu^2-2\eta mut & -\iota mu \\
+\gamma m^2nu^3+3\delta m^2u^2t & +\eta m^2u^2 \\
-\delta m^3u^3
\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда для той прямой линии, которая исполняет роль диаметра, если ее ординату, проведенную под тем же углом к абсциссе t, обозначить через v, получается

$$3v = \frac{-\beta n^2 t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2 t - \varepsilon n^2 + \zeta mn - \eta m^2}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3}.$$

243. Пусть O (рис. 45) будет точкой пересечения указанных двух диаметров. Из этой точки проведем прежде всего линию OP, параллельную прежним ординатам, а затем линию OQ, параллельную новым

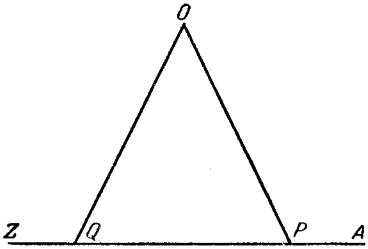

Рис. 45.

ординатам, и тогда будет $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$, $OQ = v$. Конечно, при этом будем иметь

$$z = nv \text{ и } x = t - mv$$

и, следовательно,

$$v = \frac{z}{n} \quad \text{и} \quad t = x + \frac{m}{n} z.$$

Итак, во-первых, имеем $3z = -\beta x - \varepsilon$ и, далее,

$$3v = -\frac{\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{и} \quad t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$$

Подставим эти значения в ранее найденные уравнения, что дает

$$\left.\begin{array}{l} -\beta n^2 x + \beta^2 mnx - \beta\gamma m^2 x + \dfrac{\beta\delta m^3 x}{n} \\ -\varepsilon n^2 + \beta\varepsilon mn - \gamma\varepsilon m^2 + \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} \\ +\beta n^2 x - \dfrac{\beta^2 mnx}{3} - \dfrac{\beta\varepsilon mn}{3} + \varepsilon n^2 \\ -2\gamma mnx + \dfrac{2\beta\gamma m^2 x}{3} + \dfrac{2\gamma\varepsilon m^2}{3} - \zeta mn \\ +3\delta m^2 x - \dfrac{\beta\delta m^3 x}{n} - \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} + \eta m^2 \end{array}\right\} = 0,$$

то есть

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}\beta^2 mnx - \dfrac{1}{3}\beta\gamma m^2 x - 2\gamma mnx + 3\delta m^2 x \\ +\dfrac{2}{3}\beta\varepsilon mn - \dfrac{1}{3}\gamma\varepsilon m^2 - \zeta mn + \eta m^2 \end{array}\right\} = 0.$$

244. Таким образом, пересечение диаметров O зависит от наклона ординат к оси, который определяется буквами m и n. Стало быть (если пересечение диаметров угодно будет называть центром), нельзя утверждать, что все линии третьего порядка обладают центром. Тем не менее могут представиться случаи, когда взаимное пересечение диаметров приходится на одну и ту же определенную точку. Разумеется, последнее имеет место в том случае, когда члены, в состав которых входит mn и m^2, каждый в отдельности, принимают равными нулю и получающиеся

отсюда значения x оказываются равными между собою. Но из этих двух равенств получается

$$x=\frac{3\zeta-2\beta\varepsilon}{2\beta^2-6\gamma}=\frac{3\eta-\gamma\varepsilon}{\beta\gamma-9\delta}.$$

Для того чтобы эти два значения совпали, необходимо, чтобы было

$$6\beta^2\eta-2\beta^2\gamma\varepsilon-18\gamma\eta+6\gamma^2\varepsilon=3\beta\gamma\zeta-2\beta^2\gamma\varepsilon-27\delta\zeta+18\beta\delta\varepsilon$$

или

$$\beta\gamma\zeta-2\beta^2\eta-9\delta\zeta+6\gamma\eta+6\beta\delta\varepsilon-2\gamma^2\varepsilon=0,$$

откуда получается

$$\eta=\frac{\beta\gamma\zeta-9\delta\zeta+6\beta\delta\varepsilon-2\gamma^2\varepsilon}{2\beta^2-6\gamma}.$$

Таким образом [всякий раз], как η принимает такое значение, все диаметры будут взаимно пересекаться в одной и той же точке. Следовательно, такие линии третьего порядка будут иметь центр, который находим, беря на оси

$$AP=\frac{3\zeta-2\beta\varepsilon}{2\beta^2-6\gamma} \quad \text{и} \quad PO=\frac{-\beta\zeta+2\gamma\varepsilon}{2\beta^2-6\gamma}\text{[1]}.$$

245. Центр, если таковой существует, определяется таким же образом и тогда, когда первый коэффициент α не принимают равным единице. Ибо если будет предложено в самом общем виде уравнение для линий третьего порядка

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta xy+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

то эти кривые будут иметь центр, если будет

$$\eta=\frac{\beta\gamma\zeta-9\alpha\delta\zeta+6\beta\delta\varepsilon-2\gamma^2\varepsilon}{2\beta^2-6\alpha\gamma}.$$

Этот центр будет находиться в O при условии, что

$$AP=\frac{3\alpha\zeta-2\beta\varepsilon}{2\beta^2-6\alpha\gamma} \quad \text{и} \quad PO=\frac{2\gamma\varepsilon-\beta\zeta}{2\beta^2-6\alpha\gamma}.$$

Следовательно, если какая-либо одна ордината, пересекающая кривую в трех точках, делится на части таким образом, что две части ее, расположенные по одну сторону, будут равны третьей ее части, находящейся по другую сторону, то прямая, проведенная через центр и через указанную точку деления, разделит аналогичным образом и все другие параллельные им ординаты.

246. Если изложенное выше применить к уравнениям перечисленных выше видов, то станет ясно, что первый, второй, третий, четвертый и пятый виды располагают центром, если только будет $a=0$, и что в этом случае центр расположен в начале абсцисс. Виды шестой и седьмой совершенно не имеют центра, так как коэффициент a не может отсутствовать. А виды восьмой, девятый, десятый, одиннадцатый, двенадцатый и тринадцатый имеют центр, который всегда расположен в начале абсцисс. У видов четырнадцатого, пятнадцатого и шестнадца-

[1] В первом издании $\dfrac{-3\beta\zeta+6\gamma\varepsilon}{2\beta^2-6\gamma}$. [*А. Ш.*]

того центр находится бесконечно далеко и, стало быть, все триаметры[1]) этих линий параллельны между собою.

247. Сказанное выше о сумме трех значений каждой ординаты мы дополним рассмотрением их произведения, так как в отношении суммы их прямоугольников мы не нашли ничего заслуживающего внимания. Итак, на основании общего уравнения § 239 получаем

$$-PM\cdot PL\cdot PN=-\delta x^3-\eta x^2-\iota x-\varkappa.$$

Для того чтобы истолковать это выражение, обратим внимание на то, что, если положить $y=0$, получается $\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\varkappa=0$; следовательно, корни этого уравнения дадут точки пересечения оси AZ с кривой. Если пересечения приходятся на точки B, C и D, то

$$\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\varkappa=\delta(x-AB)(x-AC)(x-AD),$$

вследствие чего

$$PL\cdot PM\cdot PN=\delta\cdot PB\cdot PC\cdot PD;$$

следовательно, если взять какую-нибудь другую ординату lmn, параллельную первой, то будет

$$PL\cdot PM\cdot PN:PB\cdot PC\cdot PD=pl\cdot pm\cdot pn:pB\cdot pC\cdot pD.$$

Это свойство совершенно сходно с тем, какое мы раньше нашли у линий второго порядка в отношении прямоугольников. Подобное же свойство присуще и линиям четвертого, пятого и более высоких порядков.

248. Пусть теперь линия третьего порядка имеет три прямолинейные асимптоты: FBf, GDg, HCh (рис. 46). Так как линия третьего по-

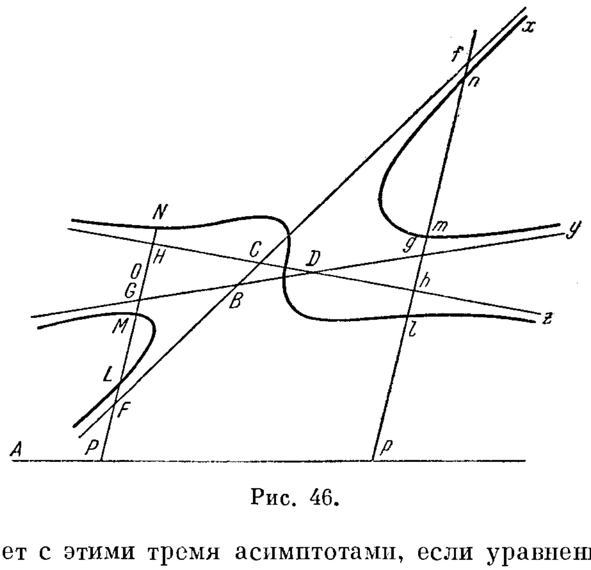

Рис. 46.

рядка совпадает с этими тремя асимптотами, если уравнение для кривой можно разложить на три простых множителя вида $py+qx+r$, можно для асимптот, рассматривая их как составную линию, дать особое уравнение, высший член которого совпадает с высшим членом для

[1]) Мы сохраняем введенный здесь (без оговорок) Эйлером термин «триаметр» вместо прежнего «как бы диаметр» или «диаметр линии третьего порядка».

кривой. Но далее, так как положение асимптот определяется с помощью второго члена уравнения, то уравнение для асимптот и уравнение для кривой должны иметь и одинаковые вторые члены. А поэтому если для кривой, отнесенной к оси AP, имеем уравнение между абсциссой $AP=x$ и ординатой $PM=y$ в виде

$$y^3+(\beta x+\varepsilon)y^2+(\gamma x^2+\zeta x+\theta)y+\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\varkappa=0,$$

то для асимптот, отнесенных к той же оси AP, будем иметь между абсциссой $AP=x$ и ординатой $PG=z$ уравнение вида

$$z^3+(\beta x+\varepsilon)z^2+(\gamma x^2+\zeta x+B)z+\delta x^3+\eta x^2+Cx+D=0,$$

где коэффициенты B, C, D[1]) таковы, что это уравнение оказывается разложимым на три простых множителя.

249. Следовательно, если провести какую-нибудь ординату PN, пересекающую кривую в трех точках L, M, N, и асимптоты в трех точках F, G, H, то из уравнения для кривой будем иметь

$$PL+PM+PN=-\beta x-\varepsilon,$$

а из уравнения для асимптот равным образом будет

$$PF+PG+PH=-\beta x-\varepsilon.$$

В силу этого получаем, что

$$PL+PM+PN=PF+PG+PH, \text{ то есть } FL-GM+HN=0.$$

Если же провести какую-нибудь другую ординату pf, то будет равным образом

$$fn-gm+hl=0.$$

Следовательно, если какая-нибудь прямая пересекает в трех точках как кривую, так и три асимптоты, то обе части линии, которые содержатся между асимптотами и кривой линией и обращены в одну и ту же сторону, равны [третьей] части, обращенной в противоположную сторону [43].

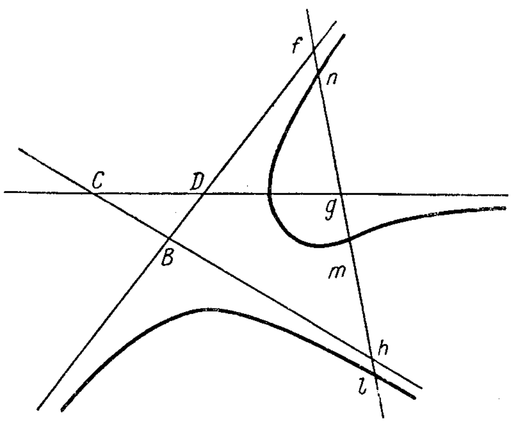

Рис. 47.

250. Стало быть, у линии третьего порядка, имеющей три прямолинейные асимптоты, три ветви, сходящиеся с этими асимптотами, не могут быть все расположены по одну и ту же сторону от асимптот, и если две из них находятся на одной и той же стороне, то третья обязательно должна быть обращена в противоположную. Поэтому невозможна такого рода линия третьего порядка, какая показана на рис. 47, так как прямая, пересекающая асимптоты в точках f, g, h, а кривую в точках l, m, n, дает

[1]) В первом издании коэффициенты ζ, B, C, D. [*А. Ш.*]

обращенные в одну и ту же сторону части fn, gm, hl, сумма которых не может быть равна нулю. Ибо части, обращенные в одну сторону, получают один и тот же знак, скажем $+$, а части, обращенные в противоположную сторону, получают знак $-$. Отсюда ясно, что сумма всех этих частей не может оказаться равной нулю, если только они не имеют противоположных знаков.

251. Из вышеизложенного ясно, почему у линий третьего порядка не может существовать двух прямолинейных асимптот вида $u=\frac{A}{t^2}$, в то время, когда третья асимптота вида $u=\frac{A}{t}$. Это происходит потому, что гиперболические ветви первого рода бесконечно больше приближаются к своим асимптотам, чем гиперболическая ветвь вида $u=\frac{A}{t}$. Действительно, если мы предположим, что прямая fl перемещается на бесконечность, то отрезки fn, gm, hl станут бесконечно малыми. А если предположить, что две ветви nx, my будут вида $u=\frac{A}{t^2}$, а третья ветвь lz — вида $u=\frac{A}{t}$, то отрезки fn и gm будут бесконечно меньше отрезка hl и, следовательно, невозможно, чтобы $gm=fn+hl$.

252. Таким образом, у линий высших порядков, у которых количество асимптот равно числу их измерений, не может быть единственной асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$, в то время как остальные асимптоты принадлежат к более высоким видам $u=\frac{A}{t^2}$, $u=\frac{A}{t^3}$ и т. д.; но если есть одна асимптота вида $u=\frac{A}{t}$, то обязательно должна быть еще одна подобная асимптота. По той же причине, если совершенно отсутствует асимптота вида $u=\frac{A}{t}$, то не может быть того, чтобы существовала лишь одна асимптота вида $u=\frac{A}{t^2}$, а должно быть по меньшей мере две такие асимптоты. Ибо гиперболические ветви видов $u=\frac{A}{t^3}$, $u=\frac{A}{t^4}$ и т. д. бесконечно ближе подходят к своим асимптотам, чем ветви вида $u=\frac{A}{t^2}$. Таким образом, при исчислении видов, которые заключаются в каком-либо высшем порядке, легко выяснить те случаи, которые должны быть отброшены, и избежать, таким образом, значительных трудностей вычисления.

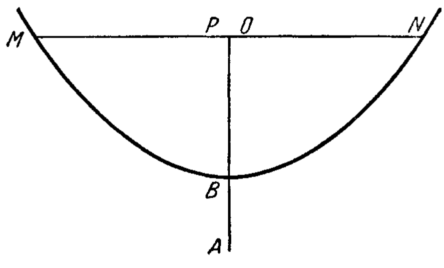

Рис. 48.

253. Предположим теперь, что линия третьего порядка пересекается некоторой прямой лишь в двух точках, а всеми другими прямыми, параллельными первой, пересекается либо тоже в двух точках, либо нигде [44]. Следовательно, если на какой-нибудь оси построить ординаты y

параллельные этой прямой, то уравнение будет такого вида:

$$y^2+\frac{(\gamma x^2+\zeta x+\theta)\,y}{\beta x+\varepsilon}+\frac{\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\varkappa}{\beta x+\varepsilon}=0.$$

Разумеется, если (рис. 48) абсциссу AP обозначить через x, то мы будем иметь две ординаты y, а именно PM и $-PN$. Но в силу природы уравнений будем иметь

$$PM-PN=\frac{-\gamma x^2-\zeta x-\theta}{\beta x+\varepsilon}.$$

Рассечем ординату MN пополам в точке O; тогда

$$PO=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma x^2+\zeta x+\theta}{\beta x+\varepsilon}\text{ [1]};$$

отсюда, если положить $PO=z$, получится

$$z(\beta x+\varepsilon)=\frac{1}{2}(\gamma x^2+\zeta x+\theta);$$

из последнего ясно, что все точки O, делящие пополам ординаты, параллельные MN, лежат на гиперболе, если только $\gamma x^2+\zeta x+\theta$ не делится на $\beta x+\varepsilon$, а в этом последнем случае точки O будут лежать на прямой.

254. Следовательно, если $\gamma x^2+\zeta x+\theta$ делится на $\beta x+\varepsilon$, то в этом случае у кривой будет диаметр, т. е. прямая линия, которая делит пополам все ординаты, параллельные MN. Это свойство присуще всем линиям второго порядка. Но если $\gamma x+\zeta x+\theta$ делится на $\beta x+\varepsilon$, то оно должно исчезать, если положить $x=\frac{-\varepsilon}{\beta}$. Поэтому, если будет $\gamma\varepsilon^2-\beta\varepsilon\zeta+\beta^2\theta=0$, то в этом случае линия третьего порядка будет иметь диаметр.

255. Таким образом, исходя из вышеизложенного, мы будем в состоянии в самом общем виде определить все случаи, когда линии третьего порядка имеют диаметры. Действительно, пусть дано общее уравнение

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

ординаты которого y не могут иметь диаметра, так как они имеют три значения или же одно. Проведем тогда под каким-нибудь другим углом к той же оси другие ординаты u, так что будет $y=nu$ и $x=t-mu$. После подстановки получаем

$$\left.\begin{aligned}
&+\alpha n^3u^3+\beta n^2u^2t+\gamma nut^2+\delta t^3+\varepsilon n^2u^2+\zeta nut+\theta nu+\iota t+\varkappa\\
&-\beta mn^2u^3-2\gamma mnu^2t-3\delta mut^2-\zeta mnu^2-2\eta mut-\iota mu\\
&+\gamma m^2nu^3+3\delta m^2u^2t\qquad\qquad +\eta m^2u^2\\
&-\delta m^3u^3
\end{aligned}\right\}=0.$$

Итак, прежде всего, для того чтобы эти новые ординаты оказались такими, для которых существует диаметр, необходимо, чтобы они могли иметь лишь два значения; стало быть, получается

$$\alpha n^3-\beta mn^2+\gamma m^2n-\delta m^3=0.$$

[1] В первом издании множитель $\frac{1}{2}$ опущен. [*А. Ш.*]

256. Но сверх того требуется, чтобы количество, на которое умножается u, а именно

$$(\gamma n - 3\delta m)\, t^2 + (\zeta n - 2\eta m)\, t + \theta n - \iota m,$$

делилось на то, на которое умножается u^2, а именно на

$$(\beta n^2 - 2\gamma mn + 3\delta m^2)\, t + \varepsilon n^2 - \zeta mn + \eta m^2,$$

то есть чтобы оно обращалось в нуль, если положить

$$t = \frac{-\varepsilon n^2 + \zeta mn - \eta m^2}{\beta n^2 - 2\gamma mn + 3\delta m^2}.$$

Следовательно, отсюда получаем

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\varepsilon n^2 - \zeta mn + \eta m^2)}{(\beta n^2 - 2\gamma mn + 3\delta m^2)\, m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\varepsilon n^2 - \zeta mn + \eta m^2)^2}{(\beta n^2 - 2\gamma mn + 3\delta m^2)^2\, m}.$$

257. Если сказанное выше применить к ранее перечисленным видам, то станет ясно, что первый вид совершенно не имеет диаметра. Что же касается второго вида, он имеет диаметр, делящий на две равные части хорды, параллельные оси, на которой отсчитываются абсциссы x. Третий вид совершенно не допускает диаметра. Четвертый вид всегда имеет один диаметр, который делит пополам хорды, параллельные асимптоте. Пятый вид имеет три диаметра, которые делят пополам хорды, параллельные каждой из асимптот. Шестой вид совершенно не может иметь диаметра. Седьмой вид всегда имеет один диаметр для хорд, параллельных асимптоте, получающейся из множителя $x-my$. Восьмой вид имеет один диаметр для хорд, параллельных оси. Девятый вид имеет два диаметра: один для хорд, параллельных оси, и другой для хорд, параллельных другой асимптоте. Десятый вид подобен по своей структуре восьмому, а одиннадцатый вид — девятому. Двенадцатый вид в отношении диаметров одинаков с восьмым видом, а тринадцатый — с девятым. Четырнадцатый вид имеет один диаметр для хорд, параллельных оси. Виды пятнадцатый и шестнадцатый совершенно не имеют хорд, которые пересекали бы кривую линию в двух точках и, стало быть, не могут иметь диаметра. Указанные выше свойства диаметров были надлежащим образом отмечены *Ньютоном*, в силу чего нам казалось уместным здесь о них упомянуть [45].

258. Хотя в тех уравнениях, которые мы дали выше для отдельных видов линий третьего порядка, мы предполагали, что x и y взаимно перпендикулярны, однако природа вида кривых не изменяется и в том случае, когда координаты наклонены друг к другу под любым углом. Ибо сколько бы ни дало уравнение ветвей, уходящих в бесконечность, при прямоугольных координатах, столько же ветвей даст то же самое уравнение и в том случае, когда ординаты будут наклонены к оси под любым углом. Не изменяется, конечно, и природа ветвей, уходящих в бесконечность, когда изменяется угол наклона координат, ибо те кривые линии, которые являются параболическими, останутся параболическими, а те кривые, которые являются гиперболическими, сохранят неизменной свою природу. И даже вид ветвей, как параболических, так и гиперболических, не изменяется. Таким образом, каждую кривую, которую на основании ее уравнения относят к первому виду, будут ли при этом координаты прямоугольными или косоугольными, придется всегда отнести к тому же самому первому виду. Совершенно так же будет обстоять дело со всеми другими видами кривых линий.

259. Следовательно, если допустить какой угодно угол наклона координат, то данные выше уравнения не претерпят никакого ограничения, если вместо y поставить νu и вместо x поставить $t - \mu u$, где $\mu^2 + \nu^2 = 1$. А избрав по своему желанию угол наклона, можно упростить приведенные выше уравнения. Таким образом, для отдельных видов получаются следующие простейшие уравнения между косоугольными координатами t и u:

ПЕРВЫЙ ВИД

$$u(t^2 + n^2u^2) + au^2 + bt + cu + d = 0,$$

причем ни n не $= 0$, ни b не $= 0$.

ВТОРОЙ ВИД

$$u(t^2 + n^2u^2) + au^2 + cu + d = 0,$$

причем n не $= 0$.

ТРЕТИЙ ВИД

$$u(t^2 - n^2u^2) + au^2 + bt + cu + d = 0,$$

причем n не $= 0$, b не $= 0$, $\pm nb + c + \frac{a^2}{4n^2}$ не $= 0$.

ЧЕТВЕРТЫЙ ВИД

$$u(t^2 - n^2u^2) + au^2 + cu + d = 0,$$

причем n не $= 0$, $c + \frac{a^2}{4n^2}$ не $= 0$.

ПЯТЫЙ ВИД

$$u(t^2 - n^2u^2) + au^2 - \frac{a^2u}{4n^2} + d = 0,$$

причем n не $= 0$.

ШЕСТОЙ ВИД

$$tu^2 + at^2 + bt + cu + d = 0,$$

причем a не $= 0$ и c не $= 0$.

СЕДЬМОЙ ВИД

$$tu^2 + at^2 + bt + d = 0,$$

причем a не $= 0$.

ВОСЬМОЙ ВИД

$$tu^2 + b^2t + cu + d = 0,$$

причем b не $= 0$ и c не $= 0$.

ДЕВЯТЫЙ ВИД

$$tu^2 + b^2t + d = 0,$$

причем b не $= 0$.

ДЕСЯТЫЙ ВИД

$$tu^2 - b^2t + cu + d = 0,$$

причем b не $=0$ и c не $=0$.

ОДИННАДЦАТЫЙ ВИД

$$tu^2 - b^2t + d = 0,$$

причем b не $=0$.

ДВЕНАДЦАТЫЙ ВИД

$$tu^2 + cu + d = 0,$$

причем c не $=0$.

ТРИНАДЦАТЫЙ ВИД

$$tu^2 + d = 0.$$

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ВИД

$$u^3 + at^2 + cu + d = 0.$$

ПЯТНАДЦАТЫЙ ВИД

$$u^3 + atu + bt + d = 0$$ [1]),

причем a не $=0$.

ШЕСТНАДЦАТЫЙ ВИД

$$u^3 + at = 0$$ [[46]].

[1]) Если вместо u подставить $u - \frac{b}{a}$, а вместо t подставить $t + \frac{3b}{a^2}u - \frac{3b^2}{a^3}$, то приведенное выше уравнение перейдет в следующее более простое: $u^3 + atu + e = 0$, где $e = d - \frac{b^3}{a^3}$. [*А. Ш.*]

ГЛАВА XI

О ЛИНИЯХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА [47]

260. Следующее уравнение для линий четвертого порядка является общим:

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x +$$
$$+ \theta y x^2 + \iota x^3 + \varkappa y^2 + \lambda y x + \mu x^2 + \nu y + \xi x + o = 0,$$

но его можно (изменяя как угол наклона координат, так и положение оси и начало координат) в различных случаях многими путями привести к более простому виду. Для того же, чтобы согласно изложенному выше методу перечислить все *виды* или, скорее, *роды* линий, которые содержат в себе этот порядок линий, надлежит принять во внимание высший член, в результате чего получаются следующие различные случаи.

I

Когда все четыре простых множителя высшего члена являются мнимыми.

II

Когда только два множителя являются действительными и не равными между собою.

III

Когда только два множителя являются действительными и равны между собою.

IV

Когда все четыре множителя являются действительными и не равны между собою.

V

Когда два множителя равны между собою, а другие два множителя не равны между собою.

VI

Когда помимо двух равных множителей остальные два тоже равны между собою.

VII

Когда три простых множителя равны между собою.

VIII

Когда все четыре множителя равны между собою.

СЛУЧАЙ I

261. Когда множители высшего члена являются мнимыми, то кривая линия совершенно не имеет уходящих в бесконечность ветвей; следовательно, так как мы строим различие родов кривых линий на различии бесконечных ветвей, то рассматриваемый случай дает нам один лишь род. Стало быть,

РОД I

это — род кривых линий, которые совершенно не имеют ветвей, уходящих в бесконечность; их природу выражает следующее простейшее уравнение:

$$(y^2+m^2x^2)(y^2-2pxy+q^2x^2)+ay^2x+byx^2+cy^2+$$
$$+dyx+ex^2+fy+gx+h=0,$$

причем p^2 здесь меньше, чем q^2. Действительно, так как члены y^4 и x^4 обязательно имеются в высшем члене, то путем увеличения или уменьшения координат x и y на определенное количество можно добиться того, чтобы члены y^3 и x^3 во втором члене исчезли.

СЛУЧАЙ II

262. Когда только два множителя высшего члена являются действительными и не равны между собою, можно путем изменения наклона координат и положения оси добиться того, чтобы один из них стал y, а другой x. Таким образом, уравнение примет следующий вид:

$$yx(y^2-2myx+n^2x^2)+ay^2x+byx^2+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0,$$

причем m^2 здесь меньше, чем n^2.

Действительно, так как в высшем члене выражения y^3x и yx^3 обязательно имеются, то во втором члене можно опустить выражения y^3 и x^3. Стало быть, кривая будет иметь две прямолинейные асимптоты, из которых одна выражается с помощью уравнения $y=0$, а другая с помощью уравнения $x=0$. Итак, свойства первой асимптоты выражаются уравнением

$$n^2yx^3+ex^2+gx+h=0,$$

свойства второй — уравнением

$$xy^3 + cy^2 + fy + h = 0\ ^{1)}$$

Таким образом, отсюда получаются:

РОД II,

имеющий две прямолинейные асимптоты, обе вида $u = \frac{A}{t}$, если ни c ни e не являются исчезающими количествами.

РОД III,

который имеет две прямолинейные асимптоты: одну вида $u = \frac{A}{t}$, другую вида $u = \frac{A}{t^2}$, и выражается уравнением

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + cy^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

причем c не $= 0$ и g не $= 0$.

РОД IV,

который имеет две прямолинейные асимптоты: одну вида $u = \frac{A}{t}$, другую вида $u = \frac{A}{t^3}$, и содержится в следующем уравнении:

$$yx(y^2 - 2myx - n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + cy^2 + dyx + fy + h = 0,$$

причем c не $= 0$.

РОД V,

который имеет две прямолинейные асимптоты, обе вида $u = \frac{A}{t^2}$, и содержится в уравнении

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

причем ни f ни g не $= 0$.

РОД VI,

который имеет две прямолинейные асимптоты: одну вида $u = \frac{A}{t^2}$ и другую вида $u = \frac{A}{t^3}$, и содержится в следующем уравнении:

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + dyx + fy + h = 0,$$

причем f не $= 0$. 168

---

1) Эти уравнения являются неполными по той причине, которая изложена в примечании к § 182 ([34]). Полные уравнения имеют следующий вид:

$$n^2yx^3 + ex^2 + \left(g - \frac{eb}{n^2}\right)x + \left(-2m\frac{e^2}{n^4} + \frac{b^2e}{n^4} + \frac{bg}{n^2} - \frac{de}{n^2} + h\right) = 0.$$

$$xy^3 + cy^2 + (f - ac)y + (-2mc^2 + a^2c - af - dc + h) = 0.$$ [*А. Ш.*]

РОД VII,

который имеет две прямолинейные асимптоты, обе вида $u=\frac{A}{t^3}$, и содержится в уравнении

$$yx(y^2-2myx+n^2x^2)+ay^2x+byx^2+dyx+h=0;$$

при этом повсюду n^2 больше, чем m^2.

СЛУЧАЙ III

263. Пусть же оба множителя высшего члена, которые одни лишь являются действительными, равны между собою; тогда уравнение принимает вид

$$y^2(y^2-2myx+n^2x^2)+ayx^2-bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0,$$

где снова n^2 больше, чем m^2. Это уравнение, если только не будет $b=0$, дает

РОД VIII,

имеющий одну параболическую асимптоту вида $u^2=At$. Но если $b=0$, то, положив $x=\infty$, получим

$$y^2+\frac{ay}{n^2}+\frac{e}{n^2}+\frac{g}{n^2x}+\frac{h}{n^2x^2}=0\ ^{1)}.$$

Отсюда, если a^2 окажется меньше, чем $4n^2e$, получается

РОД IX,

не имеющий ни одной простирающейся в бесконечность ветви.

Если окажется, что $b=0$ и a^2 больше, чем $4n^2e$ и если не будет $g=0$, то получится

РОД X,

имеющий две параллельные друг другу асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$.

[РОД X[a]

имеет две асимптоты, одну вида $u=\frac{A}{t}$ и другую вида $u=\frac{A}{t}$][2)].

Если будет и $b=0$ и $g=0$ и если a^2 будет больше, чем $4n^2e$, то получится

[1)] Двумя асимптотами будут $y=\alpha$ и $y=\beta$, где α и β суть корни уравнения $n^2y^2+ay+e=0$. Произведем преобразование координат $y=z+\alpha$ с тем, чтобы первая из асимптот стала осью x. Тогда из уравнения в начале настоящего параграфа получится новое уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен нулю, а коэффициент при x принимает вид $g(\alpha)=-2m\alpha^3+d\alpha+g$. Эти-то два выражения, т. е. $g(\alpha)$ и $g(\beta)$, и следует рассматривать вместо g. Род XI получится в том случае, когда оба эти выражения $=0$. Если же будет $g(\alpha)=0$ и $g(\beta)\neq 0$, то получится род X[a], который был пропущен Эйлером. [*А. Ш.*]

[2)] Т. е. две соприкасающиеся друг с другом асимптоты вида $u=\frac{B}{t}$. [*А. Ш.*]

РОД XI,

имеющий две параллельные друг другу асимптоты вида $u=\frac{A}{t^2}$.

Если будет $b=0$ и $a^2=4n^2e$, но не будет $g=0$, то получится

РОД XII,

имеющий асимптоту вида $u^2=\frac{A}{t}$.

Если будет $b=0$, $g=0$ и $a^2=4n^2e$ и если h будет отрицательным количеством, то получится

РОД XIII,

имеющий гиперболическую асимптоту вида $u^2=\frac{A}{t^2}$:

Но если $b=0$, $g=0$, $a^2=4n^2e$ и h — положительное количество, то получится

РОД XIV,

не имеющий никаких простирающихся в бесконечность ветвей.

СЛУЧАЙ IV

264. Пусть все четыре простых множителя высшего члена действительны и не равны друг другу. Тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$yx(y-mx)(y-nx)+ay^2x+byx^2+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

Стало быть, кривая будет иметь четыре прямолинейных асимптоты либо вида $u=\frac{A}{t}$, либо вида $u=\frac{A}{t^2}$, либо вида $u=\frac{A}{t^3}$. Отсюда, если принять во внимание указание, данное в § 251, получаем следующие роды:

РОД XV,

имеющий четыре гиперболические асимптоты, которые все будут вида $u=\frac{A}{t}$.

РОД XVI,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: три асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$ и одну вида $u=\frac{A}{t^2}$.

РОД XVII,

имеющий четыре гиперболические асимптоты, три из них — вида $u=\frac{A}{t}$ и одну вида $u=\frac{A}{t^3}$.

РОД XVIII,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: две вида $u=\frac{A}{t}$ и две вида $u=\frac{A}{t^2}$.

РОД XIX,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: две вида $u=\frac{A}{t}$, одну вида $u=\frac{A}{t^2}$ и одну вида $u=\frac{A}{t^3}$.

РОД XX,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: две вида $u=\frac{A}{t}$ и две вида $u=\frac{A}{t^3}$.

РОД XXI,

имеющий четыре гиперболические асимптоты, причем все они вида $u=\frac{A}{t^2}$.

РОД XXII,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: три асимптоты вида $u=\frac{A}{t^2}$ и одну вида $u=\frac{A}{t^3}$.

РОД XXIII,

имеющий четыре гиперболические асимптоты: две асимптоты вида $u=\frac{A}{t^2}$ и две вида $u=\frac{A}{t^3}$ [1]).

РОД XXIV,

имеющий четыре гиперболические асимптоты, причем все они вида $u=\frac{A}{t^3}$

СЛУЧАЙ V

265. Пусть два множителя высшего члена между собою равны, а остальные не равны; тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$y^2x\,(y+nx)+ayx^2+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

Здесь, прежде всего, если принять во внимание равные множители, получаются все те роды кривых линий, какие имеются в *случае* III, и каждый из них может сочетаться со столькими видоизменениями, сколько могут их дать неравные множители, т. е. сколько родов содержит в себе второй случай. Следовательно, из рассматриваемого здесь случая получается в общей сложности шестью семь, т. е. сорок два рода кривых линий [2]). Но среди них имеется два невозможных случая, а именно: если обе параллельные асимптоты будут вида $u=\frac{A}{t^2}$, тогда одна из остальных будет вида $u=\frac{A}{t}$, а другая либо вида $u=\frac{A}{t^2}$, либо вида

---

[1]) Этот род невозможен. [*А. Ш.*]

[2]) Случай II содержит в себе 6 родов II — VII, случай III дает 8 родов VIII — XIV, включая X^a. Отсюда получается 48 комбинаций, из которых 12 комбинаций невозможны, а именно VII с X, X^a, XII; VI с X^a, XI, XIII, XIV; V с X^a, XIII, XIV; IV с XI и III с XI. Число родов случая V составляет 36. [*А. Ш.*]

$u=\frac{A}{t^3}$. Таким образом, этот случай дает сорок [1]) родов, что вместе с предыдущими дает *шестьдесят четыре рода* [2]), которые было бы слишком долго описывать здесь каждый в отдельности. А так как мы не можем заняться рассмотрением в отдельности каждого из этих родов, нельзя с уверенностью утверждать, что все эти случаи являются действительными. Но если кто-нибудь пожелает осуществить это дело на основе изложенных указаний, то он в случае необходимости сократит и уточнит количество родов.

СЛУЧАЙ VI

266. Этот случай, когда имеются две пары равных множителей, содержится в уравнении

$$y^2x^2+ay^3+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

Но каждая пара равных множителей, рассматриваемая сама по себе, дает семь вариантов, вследствие чего обе пары дадут сорок девять вариантов [3]). Но так как h не может, конечно, одновременно быть положительным и отрицательным, то два рода становятся невозможными и, стало быть, из этого случая получается в общей сложности сорок семь [4]) родов, а это число все еще слишком велико, чтобы можно было перечислить здесь все случаи. Таким образом, до сих пор мы нашли *сто одиннадцать* родов [5]).

СЛУЧАЙ VII

267. Если три множителя между собою равны, то уравнение принимает вид

$$y^3x+ayx^2+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

Здесь множитель x дает асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$, если c не $=0$; а если $c=0$, но f не $=0$, то он дает асимптоту вида $u=\frac{A}{t^2}$; если же $c=0$ и $f=0$, то он дает асимптоту вида $u=\frac{A}{t^3}$. Затем множитель y^3, если только не будет $b=0$, дает параболическую асимптоту вида $u^3=At^2$. А если $b=0$, то, положив x бесконечным, получаем

$$y^3+ayx+dy+ex+g+\frac{cy^2+fy+h}{x}=0.$$

Здесь, если e не $=0$, получится $y^3+ayx+ex=0$, откуда, если a не $=0$, получится и $y^2+ax=0$ и $ay+e=0$. Таким образом, одновременно имеем

---

1) Точнее тридцать шесть. [*А. Ш.*]

2) Точнее шестьдесят. [*А. Ш.*]

3) Число родов в случае III составляет 8. Здесь следует рассматривать *различные* пары, число которых составляет 36. Но 6 из этих пар невозможны, а именно сочетания: XI с X^a, XIII, XIV; XIII с XIII и XIV; XIV с XIV. Таким образом, имеется 30 родов. [*А. Ш.*]

4) Более точное число — тридцать. [*А. Ш.*]

5) Более точное число — девяносто. [*А. Ш.*]

параболическую асимптоту вида $u^2 = At$ и гиперболическую асимптоту, которая выражается уравнением

$$(ay+e)\,x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} + g + \frac{ce^2 - afe + a^2h}{a^2x} = 0\ ^{1)}.$$

Следовательно, если только не имеем $e^3 + a^2de - a^3g = 0$, то эта асимптота будет вида $u = \frac{A}{t}$; в противном же случае она будет вида $u = \frac{A}{t^2}$. А если $a = 0$, причем e не $= 0$, то получится $y^3 + ex = 0$, что дает параболическую асимптоту вида $u^3 = At$. Если же будет $e = 0$ и $a = 0$, то получится $y^3 + dy + g = 0$, и это уравнение дает либо одну асимптоту вида $u = \frac{A}{t}$, либо три асимптоты того же вида, либо одну асимптоту вида $u = \frac{A}{t}$ и одну вида $u^2 = \frac{A}{t}$, либо одну асимптоту вида $u^3 = \frac{A}{t}$. Таким образом, в общей сложности получается восемь различных случаев, которые в сочетании с тремя случаями, порождаемыми множителем x, дают двадцать четыре рода. Следовательно, все рассмотренные до сих пор случаи дают сто тридцать пять родов [2]).

СЛУЧАЙ VIII

268. Если все множители будут между собою равны, будет иметь место следующее уравнение:

$$y^4 + ay^2x + byx^2 + kx^3 + cy^2 + dyx + ex^2 + fy + gx + h = 0.$$

Этот случай, если не будет $k = 0$, дает

РОД CXXXVI,

имеющий единственную параболическую асимптоту вида $u^4 = At^3$.

Пусть $k = 0$, но b не $= 0$; тогда получится $y^4 + byx^2 + ex^2 = 0$, откуда $y^3 + bx^2 = 0$ и $by + e = 0$. Отсюда для прямолинейной асимптоты $by + e = 0$ получится

$$(by+e)\,x^2 + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^2x}{b^2} + \frac{ce^2}{b^2} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0\ ^{3)};$$

следовательно, если только не будет $ae^2 - b\,de + b^2g = 0$, будем иметь

---

1) Полное уравнение имеет вид

$$(ay+e)\,x + \alpha + \frac{\beta}{x} = 0,$$

где

$$\alpha = -\frac{e^3}{a^3} - \frac{ed}{a} + g \quad \text{и} \quad \beta = \frac{ce^2 - aef + a^2h}{a^2} - \alpha\frac{3e^2 + da^2}{a^3}. \quad [А.\ Ш.]$$

2) Более точное число — сто четырнадцать. [*А. Ш.*]

3) Полное уравнение таково:

$$(by+e)\,x^2 + \frac{ae^2 - b\,de + gb^2}{b^2}\,x + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ce^2}{b^2} + h - \frac{ef}{b} + \frac{(ae^2 - b\,de + gb^2)\,(2ae - bd)}{b^4} = 0.$$

Оно получается, если в уравнении, приведенном в начале настоящего параграфа, положить $y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \ldots$ и приравнять коэффициенты при x^2, x, x^0 нулю. [*А. Ш.*]

асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$, а в противном случае вида $u=\frac{A}{t^2}$, откуда получаются

РОД CXXXVII,

который имеет одну параболическую асимптоту вида $u^3=At^2$ и одну гиперболическую вида $u=\frac{A}{t}$, а также

РОД CXXXVIII,

который имеет одну параболическую асимптоту вида $u^3=At^2$ и одну гиперболическую вида $u=\frac{A}{t^2}$.

269. Пусть теперь $k=0$ и $b=0$, так что будет

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

Если e не будет $=0$, то получится $y^4+ay^2x+ex^2=0$, а это уравнение в случае, если a^2 меньше, чем $4e$, невозможно; если же a^2 больше, чем $4e$, оно дает две параболические асимптоты, отнесенные к одной и той же оси, вида $u^2=At$. А если $a^2=4e$, то эти две параболы сливаются в одну[1]). Так получаются роды CXXXIX, CXL и CXLI.

А если $e=0$, то имеем уравнение

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+fy+gx+h=0;$$

последнее, если a не $=0$, принимает вид

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+gx=0.$$

Отсюда получаются уравнения: $y^2+ax=0$ и $ay^2+dy+g=0$. Последнее уравнение дает для y либо два действительных значения, равных друг другу или не равных, либо вовсе не дает действительного значения. В первом случае кривая линия, кроме одной параболической асимптоты, имеет две параллельные асимптоты вида $u=\frac{A}{t}$, во втором случае одну асимптоту вида $u^2=\frac{A}{t}$, а в третьем не имеет одной асимптоты, откуда снова получаются три рода, а именно роды CXLII, CXLIII и CXLIV.

270. Пусть теперь и $a=0$, так что будет

$$y^4+cy^2+dyx+fy+gx+h=0.$$

В данном случае, если не будет $d=0$, кривая имеет параболическую асимптоту вида $u^3=At$ и одну прямолинейную асимптоту вида $u=\frac{A}{t}$,

---

[1]) Эта асимптота имеет следующий вид:

$$y=\alpha x^{\frac{1}{2}}+\beta x^{\frac{1}{4}}+\gamma.$$

Так, например, $y=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$ дает уравнение

$$(y^2-x)^2-4xy-x=0. \text{ [А. Ш.]}$$

которая содержится в уравнении $dy+g=0$. Наконец, если будет $d=0$, то кривая будет иметь одну параболическую асимптоту вида $u^4=At$. Таким образом, у линий четвертого порядка установлено в общей сложности *сто сорок шесть* родов линий[1]). Но последние включают в себя большей частью много видов, которые значительно отличаются друг от друга.

271. Из сказанного уже ясно, в какой мере увеличивается число родов для линий пятого и более высокого порядка, так что перечисление, подобное тому, какое мы выполнили для линий третьего порядка, становится совершенно невозможным, разве если бы кто-нибудь пожелал отвести для этого целый том. Что же касается основных свойств линий четвертого или более высокого порядка, то они выводятся из общего уравнения таким же путем, каким мы воспользовались выше для линий третьего порядка; поэтому мы не будем здесь останавливаться на их изложении.

[1]) Более точное число родов составляет сто двадцать пять. Число родов, соответствующих восьми случаям, таково: 1, 6, 8, 9, 36, 30, 24, 11. Эйлер пришел бы, правда случайно, к тому же числу 125, если бы в § 266 он принял в расчет лишь различные комбинации, т. е. 28 комбинаций. [*А. Ш.*]

ГЛАВА XII

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ФОРМЫ КРИВЫХ ЛИНИЙ

272. То, что было изложено в предшествующих главах, служит для определения формы кривых линий, простирающихся бесконечно далеко. Но зачастую весьма трудно определить по уравнению, какую форму имеет та или иная кривая линия на конечном расстоянии. Ведь для этой цели нужно для каких-либо конечных абсцисс вычислить, пользуясь уравнением, все соответствующие ординаты и отличить действительные от мнимых. А эта задача во многих случаях превышает возможности известного нам анализа, если уравнение более высокой степени. Ведь если абсциссе приписать какое-нибудь определенное значение, то ордината будет играть роль неизвестной в уравнении. Таким образом, решение уравнения будет зависеть от числа измерений, какое имеет ордината. Но эту задачу можно значительно облегчить, приведя уравнение к более простому виду путем выбора наиболее подходящей оси и наиболее подходящего угла наклона координат. А затем еще, так как безразлично, какую из координат взять в качестве абсциссы, работа весьма облегчается, если в качестве ординаты взять ту из координат, которая входит в уравнение в менее высокой степени [48].

273. Так, например, если бы мы захотели исследовать форму линий третьего порядка, относящихся к первому виду, то мы взяли бы для этого вида простейшее уравнение, приведенное в § 259, и из координат t и u избрали бы первую t в качестве ординаты, а другую u в качестве абсциссы, так как t имеет лишь два измерения. Следовательно, мы получили бы в этом случае уравнение следующего вида:

$$y^2=\frac{2by+ax^2+cx+d-n^2x^3}{x},$$

которое после решения дает

$$y=\frac{b\pm\sqrt{b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4}}{x},$$

причем ни b, ни n не $=0$.

274. Таким образом, тем значениям x, которые придают функции $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$ положительное значение, соответствуют две ординаты, а в тех случаях, когда эта функция исчезает, абсциссе x соответствует единственная ордината y, т. е. обе ординаты оказываются рав-

ными между собою. Если же указанная функция принимает отрицательное значение, то никакая ордината не соответствует данной абсциссе. Но значения этой функции, если они были положительными, не могут перейти в отрицательные без того, чтобы стать равными нулю, т. е. без того, чтобы функция стала равной нулю. Таким образом, надлежит наиболее внимательно исследовать те случаи, когда функция b^2+dx+ $+cx^2+ax^3-n^2x^4$ становится $=0$, что, конечно, может иметь место в двух случаях, ибо если x превосходит определенный предел как положительный, так и отрицательный, то значение этой функции становится отрицательным. Таким образом, вся кривая будет соответствовать определенному участку абсциссы, за пределами которого все ординаты становятся мнимыми.

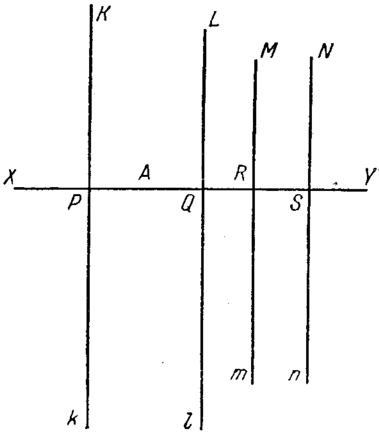

Рис. 49.

275. Предположим, что выражение $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$ имеет лишь два действительных множителя, т. е. что оно может исчезать лишь в двух случаях; последнее будет иметь место, если (рис. 49) взять абсциссу в точках P и S, в которых имеется лишь одна ордината. Следовательно, на всем протяжении PS ординаты будут двойными и действительными, а за пределами PS все ординаты будут мнимыми и, значит, вся кривая будет лежать между ординатами Kk и Nn. А ордината в начале абсцисс A будет асимптотой кривой линии, которая сверх того пересекает кривую в некоторой точке; ибо если положить $x=0$, то получится

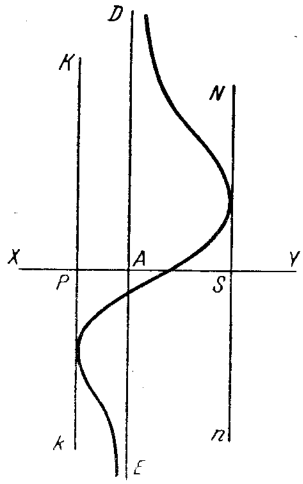

Рис. 50.

$$\sqrt{b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4}=b+\frac{dx}{2b}\ [49],$$

откуда

$$y=\frac{b\pm\left(b+\frac{dx}{2b}\right)}{x},$$

т. е. будет либо $y=\infty$, либо $y=-\frac{d}{2b}$. Следовательно, в этом случае кривая будет такой формы, как изображено на рис. 50.

276. Допустим, что выражение $b^2+dx+cx^2+$ $+ax^3-n^2x^4$ имеет четыре простых действительных не равных между собою множителя и что, стало быть, оно исчезает в четырех случаях. Следовательно, в таком же количестве мест P, Q, R и S ординаты коснутся этой кривой линии в одной точке. Стало быть, если для участка оси XP ординаты были мнимыми, то теперь на протяжении PQ они будут действительными; затем, конечно, на протяжении QR они будут снова мнимыми, а на протяжении RS снова станут действительными. Наконец, дальше S, по направлению к Y, они вновь

станут мнимыми. Таким образом, кривая будет состоять из двух отделенных друг от друга частей, из которых одна будет находиться между прямыми линиями Kk и Ll, а другая между прямыми линиями Mm и Nn. А так как в начале абсцисс A ординаты являются действительными, то необходимо, чтобы это начало находилось либо на отрезке оси PQ, либо на отрезке RS. Таким образом, в данном случае кривая линия будет иметь тот вид, который представлен на рис. 51, т. е. она будет состоять из овала, который отделен от остальной части кривой, связанной с асимптотой AD, и который называют *сопряженным*[1] *овалом.*

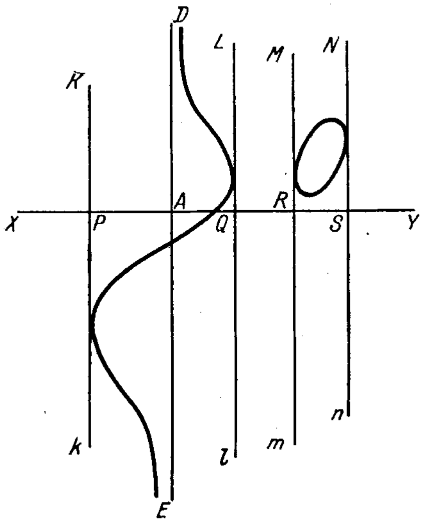

Рис. 51.

277. Если два корня становятся равными, то либо точки P и Q, либо точки Q и R, либо точки R и S совпадают друг с другом. Но если налицо первое, то, так как точка A лежит между P и Q, оба корня должны быть равны x, что однако не может иметь места, так как b не может отсутствовать. Если же совпадают точки R и S, то сопряженный овал станет бесконечно малым и превратится в *сопряженную точку*. А если сливаются точки Q и R, то овал соединится с остальной частью кривой линии таким образом, что получится *заузленная кривая*, показанная на

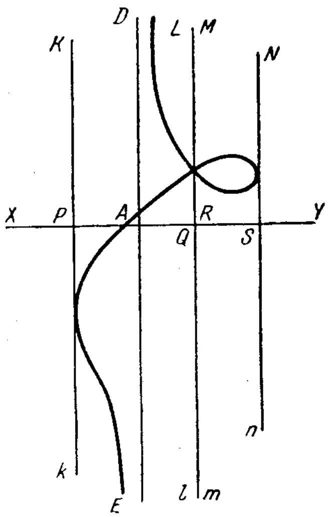

Рис. 52.

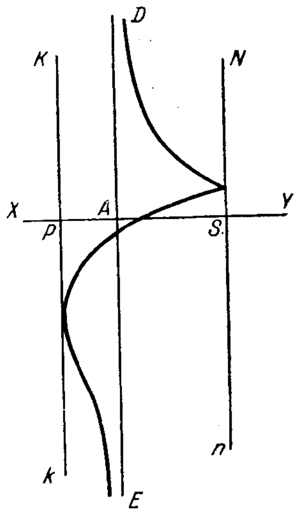

Рис. 53.

рис. 52. А когда совпадают три корня, т. е. когда сливаются точки Q, R и S, тогда узел, исчезая, обратится в тончайшее *острие*, какое показано

[1]) Или *присоединенным*.

на рис. 53. Стало быть, так получаются пять различных вариантов первого вида, из которых Ньютон составил такое же количество видов [50].

278. Аналогичным образом Ньютон провел подразделение остальных видов кривых линий, так как все уравнения составляются так, что одна из координат имеет не более двух измерений. Когда же одна из координат имеет одно измерение, то вид кривой линии очень легко определить. Действительно, уравнение имеет тогда вид $y=P$, где P представляет собою какую-нибудь рациональную функцию абсциссы x. Следовательно, какое бы значение мы ни присвоили x, ордината тоже всегда получит одно значение y, и, значит, кривая будет непрерывным движением сопровождать ось в обе стороны в бесконечность. Если функция P является дробной, то может случиться, что ордината в одном или нескольких местах станет бесконечной и таким образом представит собою асимптоту кривой. Последнее происходит в том случае, когда знаменатель функции P исчезает.

279. Итак, положим $y=\frac{P}{Q}$; тогда все действительные корни уравнения $Q=0$ дадут нам упомянутые бесконечные ординаты, ибо любой корень этого уравнения, скажем $x=f$, показывает, что если взять абсциссу $x=f$, то ордината y станет бесконечно большой, так как Q становится $=0$. Тогда, конечно, ясно, что если ординаты y положительны, пока x больше, чем f, то, если сделать x меньше, чем f, ординаты станут отрицательными, и, стало быть, ордината будет асимптотой вида $u=\frac{A}{t}$. То же самое следует полагать о всех неравных множителях. Когда же знаменатель Q имеет два равных множителя, например $(x-f)^2$, то, если ординаты положительны при f большем, чем x, они останутся положительными и при f меньшем, чем x, и тогда ордината y, если положить $x=f$, будет асимптотой вида $u^2=\frac{A}{t}$. Но если знаменатель Q имеет три равных множителя, например $(x-f)^3$, то ординаты, как предшествующие бесконечной, так и следующие за ней, будут иметь, как и в первом случае, различные знаки.

280. Вслед за приведенными уравнениями очень легко исследовать те уравнения, которые содержатся в выражении $y^2=\frac{2Py-R}{Q}$, где P, Q и R представляют собою любые целые функции абсциссы x. Ведь любой абсциссе соответствуют либо две ординаты, либо ни одна. А именно, две ординаты получаются, когда P^2 больше, чем QR, и нет ни одной ординаты, когда P^2 меньше, чем QR. Следовательно, на любой границе, которая отделяет действительные ординаты от мнимых или от нулевых, будет $P^2=QR$ и, значит, получится $y=\frac{P}{Q}$, т. е. эта ордината заденет кривую или коснется ее в одной только точке [1]). Таким образом, для определения формы кривой следует рассмотреть уравнение $P^2-QR=0$, все действительные корни которого дадут те места, где ординаты касаются кривой линии в единственной точке. Эти точки надо отметить на оси и, если все корни не равны между собою, то части оси, заключающиеся между этими точками, будут иметь попеременно две ординаты действительные и мнимые. Таким образом, кривая

[1]) Seu haec ordinata curvam in unico puncto stringet vel tanget.

линия будет состоять из стольких отделенных друг от друга частей, сколько будет этого рода чередований, — откуда берут свое начало сопряженные овалы.

281. Если два корня уравнения $P^2-QR=0$ окажутся равными между собою, то две из отмеченных выше точек на оси сольются, и тогда исчезает на оси одна часть, которая имела бы мнимые или действительные ординаты. В первом случае кривая станет узловой, как на рис. 52, во втором случае сопряженный овал перейдет в сопряженную точку. А если это уравнение будет иметь три равных корня, то узел станет бесконечно малым и превратится в острие, как на рис. 53. Если в уравнении окажутся четыре равных корня, то либо два отдельных овала сольются в точку, либо в острие окажется узел или будет два острия, направленных в противоположную от вершины сторону. Если же окажется пять равных корней, то уже почти не получаются новые формы; действительно, тогда образуется острие, в котором сольется в точку уже не один овал, как это было раньше, а сразу два, и даже еще большее количество равных корней не создает уже новых изменений в образующихся при этом фигурах.

282. Узел или пересечение двух ветвей кривой линии принято также называть *двойной точкой*, так как надо считать, что прямая, пересекающая кривую в этой точке, пересекает ее в двух точках. А если через узел проходит другая ветвь кривой, то в этом пересечении образуется *тройная* точка кривой. Когда сливаются две двойные точки, создается, конечно, *четверная* точка; отсюда можно понять происхождение и природу любых *многократных* точек. Стало быть, исчезающий овал или сопряженная точка будет также двойной точкой, равно как ею будет и острие, которое образуется от сопряженной точки, соединенной с остальной кривой [[51]].

283. Если уравнение, которым ордината y выражается с помощью абсциссы x, будет кубическим или же более высокой степени, так что y будет равняться многозначной функции от x, то в этом случае каждой абсциссе будет соответствовать либо столько ординат, сколько измерений имеет y в уравнении, либо число ординат окажется меньшим на две, или на четыре, или на шесть и т. д. Таким образом, всегда одновременно начинают становиться мнимыми две ординаты, а до того, как они становятся мнимыми, они оказываются равными. Таким образом, этот переход от мнимых значений к действительным является источником многочисленных вариантов, которые, однако, либо совпадают с только что изложенными случаями, либо состоят из этих последних. И если определить все значения ординаты для большого количества абсцисс, как положительных, так и отрицательных, то с помощью этих найденных точек можно будет легко вычертить кривую и определить ее форму.

284. Поясним сказанное на примере, в котором, хотя он имеет своим источником уравнение более высокой степени, ордината y выражается все-таки с помощью лишь квадратных корней. Итак, пусть

$$2y=\pm\sqrt{6x-x^2}\pm\sqrt{6x+x^2}\pm\sqrt{36-x^2}.$$

В данном уравнении каждому значению абсциссы соответствует восемь различных ординат. Но при этом ясно, что когда x берут отрицательным, то ордината становится мнимой. То же самое имеет место, когда абсциссу x берут большей чем 6. Отсюда следует, что вся эта кривая лежит в пределах от $x=0$ до $x=6$. Итак, придадим x последовательно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; получаем:

Если	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{6x-x^2}$	0,000	2,236	2,828	3,000	2,828	2,236	0,000
$\sqrt{6x+x^2}$	0,000	2,646	4,000	5,196	6,325	7,416	8,485
$\sqrt{36-x^2}$	6,000	5,916	5,657	5,196	4,472	3,317	0,000
Сумма	6,000	10,798	12,485	13,392	13,625	12,969	8,485
Отсюда y, если взять							
$+++$	3,000	5,399	6,242	6,696	6,812	6,484	4,242
$-++$	3,000	3,163	3,414	3,696	3,984	4,248	4,242
$+--$	3,000	2,754	2,242	1,500	0,487	0,932	—4,242
$++-$	—3,000	—0,517	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242 [1]

[1] Некоторые числа в этой таблице исправлены по сравнению с первым изданием в соответствии с Opera omnia. Исправления сделаны А. Шпайзером.

Для остальных четырех перестановок знаков чи́сла отличаются от вышеприведенных только знаками. Отсюда следует, что каждой абсциссе соответствует восемь ординат $\varkappa$; если представить их на рисунке (рис. 54)

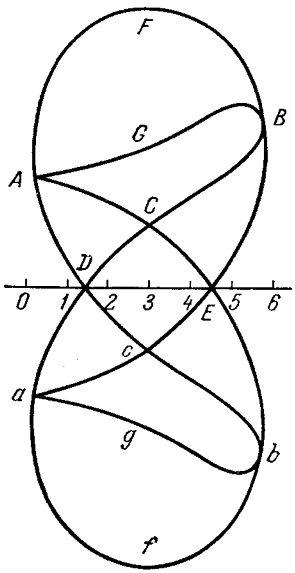

Рис. 54.

то получается кривая, состоящая из двух сплетений $AFBEcagbcDA$ и $afbECAGBCDa$ с двумя остриями в A и a и четырьмя двойными точками, то есть четырьмя пересечениями ветвей в точках D, E, C и c.

ГЛАВА XIII

О СВОЙСТВАХ КРИВЫХ ЛИНИЙ

285. Подобно тому как выше мы описывали свойства простирающихся в бесконечность ветвей, указывая прямую линию или более простую кривую, которая на бесконечности сливается с рассматриваемой кривой, так и в настоящей главе мы решили подвергнуть исследованию любую часть кривой в пределах ограниченного пространства, а именно найти прямую или более простую кривую, которая совпадала бы, хотя бы на очень малом протяжении, с некоторой частью нашей кривой. И прежде всего, конечно, ясно, что всякая прямая, которая касается кривой, в месте соприкосновения совпадает с ходом кривой, то есть имеет по меньшей мере две общие точки с этой линией. Но можно также указать и другие кривые линии, которые более точно совпадают с заданной частью кривой и как бы сливаются с ней. При этом весьма отчетливо выделяется строение кривой в любом месте и ее свойства.

286. Итак, пусть дано для какой-нибудь кривой некоторое уравнение между координатами x и y. Придадим абсциссе x (рис. 55) некоторое значение $AP=p$ и пусть требуется найти значения ординаты y, соответствующие этой абсциссе; а если будет несколько таких ординат, то возьмем какую-либо одну из них $PM=q$, и пусть M будет точкой на кривой, то есть точкой, через которую проходит кривая. Тогда, конечно, если в рассматриваемом уравнении между x и y вместо x поставить p и вместо y поставить q, то все члены уравнения взаимно уничтожаются, так что ничего в нем не останется. Теперь, чтобы исследовать природу той части кривой, которая проходит через точку M, проведем из M прямую Mq, параллельную оси AP, возьмем ее теперь в качестве оси и обозначим здесь новую абсциссу Mq через t и ординату qm через u. И так как точка m также находится на кривой, то, если mq продолжить до точки p на прежней оси и поставить $Ap=p+t$ вместо x и $pm=q+u$ вместо y, тоже должно получиться тождественное уравнение.

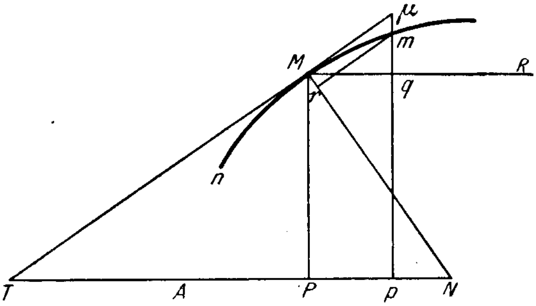

Рис. 55.

287. Но если сделать указанную подстановку в предложенном уравнении между x и y, то все члены, в состав которых не входят ни t ни u, взаимно уничтожаются, и останутся лишь члены, содержащие новые координаты t и u. Таким образом, получится следующего рода уравнение:

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Ft^2u + Htu^2 + \text{ и т. д.,}$$

где A, B, C, D и т. д. являются постоянными количествами, составленными из постоянных первого уравнения и из p и q, которые мы теперь рассматриваем как постоянные. Таким образом, это новое уравнение выражает природу той же самой кривой линии, но оно отнесено к оси Mq, на которой точка M принята в качестве начала абсцисс.

288. Прежде всего ясно, что если положить $Mq = t = 0$, то будет также $qm = u = 0$, так как точка m попадает в M. Далее, так как мы желаем исследовать лишь очень малую часть кривой, находящуюся возле M, то мы этого достигнем, если для t будем брать возможно меньшие значения. В этом случае и $qm = u$ будет иметь весьма малое значение, и действительно, мы хотим исследовать природу лишь почти исчезающей дуги Mm. Но разумеется, если для t и u взять возможно меньшие величины, то члены t^2, tu и u^2 будут еще значительно меньше, а дальнейшие t^3, t^2u, tu^2, u^3 и т. д. будут в свою очередь много меньше предыдущих, и т. д. В силу этого, так как очень малые члены можно опустить по сравнению с другими как бы бесконечно бо́льшими членами, останется лишь уравнение $0 = At + Bu$, что представляет собою уравнение для прямой $M\mu$, проходящей через точку M, и показывает, что когда точка m подходит очень близко к точке M, то эта прямая совпадает с кривой.

289. Таким образом, указанная прямая $M\mu$ будет касательной к кривой в M, и значит, отсюда можно вывести способ проведения касательной μMT в любой точке M кривой. Разумеется, так как из уравнения $At + Bu = 0$ получается

$$\frac{u}{t} = -\frac{A}{B} = \frac{q\mu}{Mq},$$

то будет

$$q\mu : Mq = MP : PT = -A : B.$$

Следовательно, так как $PM = q$, получится $PT = -\frac{Bq}{A}$. Эту часть оси PT обычно называют *подкасательной*. Из всего приведенного получается следующее

Правило для нахождения подкасательной

После того, как будет найдено, что абсциссе $x = p$ соответствует ордината $y = q$, следует в уравнении кривой положить $x = p + t$ и $y = q + u$ и из членов, которые будут получены в результате подстановки, следует сохранить лишь те, в которых t и u имеют первое измерение, а всеми остальными надо пренебречь. Так мы получим лишь два члена $At + Bu = 0$. Отсюда, зная A и B, находим подкасательную $PT = -\frac{Bq}{A}$.

ПРИМЕР I

Пусть предложенная кривая является параболой, природу которой выражает уравнение $y^2 = 2ax$, *причем* AP — *главная ось и* A — *вершина параболы.*

Положим $AP = p$; тогда, если обозначить PM через q, будем иметь $q^2 = 2ap$, то есть $q = \sqrt{2ap}$. Положим теперь $x = p + t$ и $y = q + u$; тогда будет

$$q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at.$$

Здесь, согласно правилу, следует сохранить лишь члены $2qu = 2at$, которые дают

$$at - qu = 0, \qquad \frac{u}{t} = \frac{a}{q} = -\frac{A}{B}.$$

Следовательно, подкасательная PT будет $= \frac{q^2}{a} = 2p$, так как $q^2 = 2ap$. Отсюда подкасательная линия PT оказывается равной удвоенной абсциссе AP.

ПРИМЕР II

Пусть кривая представляет собою описанный из центра A *эллипс, уравнением которого является*

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ или } a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Следовательно, если взять $AP = p$ и положить $PM = q$, то получится $a^2q^2 + b^2p^2 = a^2b^2$. Положим теперь $x = p + t$ и $y = q + u$. А так как следует сохранить лишь те члены, в которых t и u имеют первое измерение, можно тотчас же отбросить все остальные, и тогда получится

$$2a^2qu + 2b^2pt = 0,$$

откуда

$$\frac{u}{t} = -\frac{b^2p}{a^2q} = -\frac{A}{B}.$$

Таким образом, подкасательная

$$PT = -\frac{B}{A}q = -\frac{a^2q^2}{b^2p} = \frac{-a^2 + p^2}{p};$$

а это выражение, будучи отрицательным, показывает, что точка T лежит с противоположной стороны. Впрочем, это выражение отлично соответствует изложенному выше определению касательных эллипса.

ПРИМЕР III

Пусть дана линия третьего порядка седьмого вида

$$y^2x = ax^2 + bx + c.$$

Приняв, следовательно, $AP = p$ и положив $PM = q$, получим $pq^2 = ap^2 + bp + c$. Пусть теперь $x = p + t$ и $y = q + u$; тогда будет

$$(p + t)(q^2 + 2qu + u^2) = a(p^2 + 2pt + t^2) + b(p + t) + c.$$

После того как будут отброшены все излишние члены, получится $2pqu + q^2t = 2apt + bt$, откуда

$$\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - q^2}{2pq} = -\frac{A}{B}.$$

Следовательно, подкасательная

$$PT = -\frac{B}{A}q = \frac{2pq^2}{2ap + b - q^2} = \frac{2ap^2 + 2bp + 2c}{2ap + b - q^2} = \frac{2ap^3 + 2bp^2 + 2cp}{ap^2 - c}$$

или

$$PT = \frac{2p^2q^2}{ap^2 - c}.$$

290. Определив, стало быть, указанным образом касательную к кривой, мы вместе с тем узнаем направление, которому следует кривая в точке M. Но кривую линию удобнее всего можно рассматривать как путь, описываемый точкой, которая постоянно перемещается с непрерывно изменяющимся направлением движения. Следовательно, точка, описывающая своим движением в M кривую $M\mu$, движется по направлению касательной $M\mu$. Если бы она сохраняла это движение, то она описала бы прямую $M\mu$, но она тотчас же изменяет направление движения, так как описывает кривую. Поэтому, для того чтобы узнать ход кривой линии, следует в отдельных точках определить положение касательной, что можно легко выполнить изложенным здесь методом. При этом не возникнет никаких затруднений, если уравнение рассматриваемой кривой линии является рациональным и свободным от дробей. Но к такому виду можно всéгда привести все уравнения. Если же уравнение будет иррациональным или будет содержать в себе дроби и его нельзя будет привести к рациональному и целому виду, тогда можно воспользоваться тем же методом, но с некоторой его модификацией, той самой модификацией, которая положила начало *дифференциальному исчислению*. Поэтому метод нахождения касательных в том случае, когда уравнение рассматриваемой кривой линии не является рациональным и целым, мы отложим до дифференциального исчисления [52].

291. На основании изложенного выше определяется наклон касательной $M\mu$ к оси AP, или к параллельной ей линии Mq. Действительно, так как $q\mu : Mq = -A : B$, то, если координаты прямоугольны и, стало быть, угол $Mq\mu$ прямой, $-\frac{A}{B}$ будет тангенсом угла $qM\mu$. Если же координаты будут косоугольными, то по заданному углу $Mq\mu$ и отношению сторон Mq, $q\mu$, пользуясь тригонометрией, можно найти угол $qM\mu$. Но ясно, что если в результирующем уравнении $At + Bu = 0$ A окажется $= 0$, то угол $qM\mu$ исчезает и, следовательно, касательная $M\mu$ будет параллельна оси AP. Если же будет $B = 0$, то в этом случае касательная $M\mu$ будет параллельна ординатам PM, т. е. сама ордината PM будет касаться кривой в точке M.

292. Если после того, как определена касательная MT, провести в точке касания M нормаль MN, то эта линия окажется вместе с тем нормальной и к кривой, и ее положение легко находится в любом случае. Особенно удобно оно определяется, когда координаты AP и PM являются прямоугольными. Действительно, в этом случае треугольники $Mq\mu$

и MPN подобны и, значит,

$$Mq : q\mu = MP : PN \quad \text{или} \quad -B : A = q : PN,$$

откуда

$$PN = -\frac{Aq}{B}.$$

Эту часть оси PN, находящуюся между ординатой и нормалью MN, обычно называют *поднормалью*. Таким образом, эта поднормаль в случае, если координаты прямоугольны, определяется очень легко по найденной подкасательной PT, так как в этом случае будет

$$PT : PM = PM : PN \quad \text{или} \quad PN = \frac{PM^2}{PT}.$$

Сверх того, конечно, если угол APM будет прямым, будем иметь, что касательная

$$MT = \sqrt{PT^2 + PM^2},$$

а нормаль

$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2},$$

или, так как PT: $TM = PM : MN$, то будет

$$MN = \frac{PMTM}{PT} = \frac{PM}{PT}\sqrt{PT^2 + PM^2}.$$

293. Так как мы видели, что если в уравнении $At + Bu = 0$ будет либо $A = 0$, либо $B = 0$, то касательная будет параллельна либо оси, либо ординатам; остается еще рассмотреть тот случай, когда оба коэффициента A и B одновременно $= 0$. Если последнее будет иметь место, то в ранее (§ 286) найденном уравнении уже нельзя будет отбросить члены, в которых t и u имеют два измерения,— по сравнению с членами $At + Bu$ (которые сами исчезают). Вследствие этого придется рассмотреть уравнение $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, отбросив при этом дальнейшие члены, так как они исчезают по сравнению с оставленными, когда t и u становятся бесконечно малыми. А из приведенного выше уравнения, как и из общего, ясно, что если положить $t = 0$, то будет и $u = 0$, и, значит, M является точкой на кривой, что, конечно, находится в согласии с исходным допущением.

294. Итак, уравнение $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ показывает строение кривой возле точки M; но ясно, что если D^2 будет меньше, чем $4CE$, то в этом случае уравнение будет мнимым, если только t и u не будут $= 0$. Следовательно, в этом случае точка M будет, конечно, принадлежать кривой, но она будет отделена от остальной кривой и, значит, она будет сопряженным овалом, сократившимся до точки, какого рода случай мы отметили в предшествующей главе. В таком случае, конечно, неуместно даже помышлять о касательной, так как если касательная является прямой, имеющей две соседние точки общими с кривой линией, то прямая не может подобным образом соприкасаться с точкой. Итак, изложенным способом можно выявить сопряженную точку, если таковая имеется на какой-либо кривой, и ее можно отличить от остальных точек кривой линии.

295. Но если D^2 окажется больше, чем $4CE$, то уравнение $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ можно разбить на два уравнения вида $\alpha t + \beta u = 0$ (рис. 56), из которых каждое в равной мере связано с природой кривой. Так как, сле-

довательно, каждая из них дает положение касательной, т. е. направление кривой в точке M, то необходимо, чтобы две ветви кривой линии пересекались в точке M и образовывали здесь двойную точку. Следовательно, если взять $Mq=t$, допустим, что $q\mu$ и $q\nu$ являются двумя значениями u, которые получаются из указанного уравнения, а прямые $M\mu$ и $M\nu$ являются двумя касательными кривой в точке M. Таким образом, в точке M происходит пересечение двух ветвей кривой, из которых одна направлена по $M\mu$, а другая по $M\nu$. Так как, следовательно, сопряженную точку можно рассматривать так же, как двойную точку, то уравнение $Ct^2+Dtu+Eu^2=0$ всегда будет указывать на наличие двойной точки, подобно тому как уравнение $At+Bu=0$ всякий раз, когда оно имеет место, указывает на наличие только простой точки.

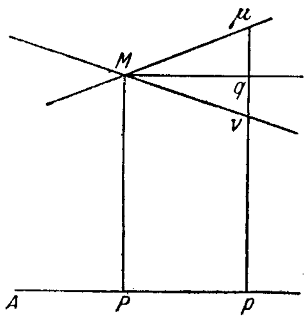

Рис. 56.

296. Но если будет $D^2=4CE$, то обе касательные $M\mu$ и $M\nu$ совпадут и угол $\mu M\nu$ исчезнет. Последнее показывает, что обе ветви[1]) кривой линии не только встречаются в точке M, но имеют здесь также одно и то же направление и, следовательно, соприкасаются друг с другом. В этом случае точка M будет тем не менее двойной точкой, так как следует считать, что прямая, проведенная через эту точку, пересекает кривую в двух точках. Таким образом, в тех случаях, когда в уравнении, полученном нами в § 286, исчезают оба первых коэффициента, следует считать, что кривая имеет в M двойную точку, которая может быть трех различных видов: либо овал, сводящийся к одной точке, т. е. сопряженная точка; либо взаимное пересечение двух ветвей, то есть узел, либо соприкосновение двух ветвей кривой. Эти три различных вида двойной точки определяются тремя вариантами уравнения $0=Ct^2+Dtu+Eu^2$.

297. Если сверх коэффициентов A и B исчезают также все три коэффициента C, D и E, то в этом случае следует взять те члены, в составе которых t и u имеют три измерения, и тогда получится $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=0$. Если это уравнение содержит единственный простой действительный множитель, то последний указывает на существование единственной ветви, проходящей через точку M, и одновременно указывает ее направление, то есть касательную, а два остальных мнимых множителя указывают на существование в той же точке M исчезающего овала. Но если все корни этого уравнения окажутся действительными, то отсюда заключаем, что три ветви кривой либо пересекаются, либо соприкасаются в одной и той же точке M, в зависимости от того, будут ли эти корни неравными или же равными между собою[2]). Но как бы ни обстояло дело с ними, кривая будет всегда иметь в M тройную точку, и следует считать, что прямая, проведенная через M, пересекает кривую сразу в трех точках.

298. Если, кроме всех предшествующих коэффициентов, исчезнут также четыре коэффициента F, G, H и I, то в этом случае для выяснения

[1]) Эти ветви могут быть и мнимыми, как в уравнении $x^2+y^4=0$. [*А. Ш.*]

[2]) В том случае, когда два корня равны между собою, две ветви могут оказаться мнимыми. [*А. Ш.*]

природы точки M кривой следует рассмотреть дальнейшие члены уравнения, в которых t и u имеют четыре измерения. Последнее будет указывать на то, что точка M является четверной. Действительно, либо в этой точке сливаются два сопряженных овала, что имеет место, когда все корни уравнения четвертой степени мнимы, либо же в точке M происходит пересечение или соприкосновение двух ветвей кривой линии с сопряженной точкой, что имеем, когда два корня уравнения оказываются действительными, а два других мнимыми. Наконец, в точке M произойдет пересечение четырех ветвей кривой, если все корни уравнения окажутся действительными; а пересечение двух или трех или же всех четырех ветвей перейдет в соприкосновение, если два, три или же все четыре корня окажутся равными между собою. Аналогичным образом следует рассуждать и дальше, если в случае обращения в нуль тех членов, в состав которых t и u входят в четвертом измерении, надо будет перейти к членам пяти или большего числа измерений.

299. Учтя вышеизложенное, легко найти уравнение для всех кривых, которые не только проходят через точку M, но и имеют в M точку простую, или двойную, или тройную, или же вообще какой угодно кратности. Действительно, если положить $AP=p$, $PM=q$ и обозначить через P, Q, R, S какие-нибудь функции координат x и y, то очевидно, что уравнение

$$P(x-p)+Q(y-q)=0$$

выразит кривую линию, проходящую через точку M. Ибо если положить $x=AP=p$, то получится $y=PM=q$, если только P не делится на $y-q$ и Q не делится на $x-p$, иначе, если только множители $x-p$ и $y-q$, от которых зависит прохождение кривой через точку M, не исключаются из уравнения путем деления. Ясно, что все кривые, которые должны пройти через точку M, содержатся в указанном уравнении $P(x-p)+Q(y-q)=0$; при этом точка M будет простой, если это уравнение не будет того вида, какой мы вскоре приведем для кратных точек.

300. Если точка M должна быть двойной, то уравнение для кривой линии будет содержаться в следующей общей форме:

$$P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+R(y-q)^2=0,$$

если только эта форма не нарушается в результате деления. Отсюда видно, что у линий второго порядка не может быть двойных точек, ибо для того, чтобы это уравнение было уравнением лишь второго порядка, необходимо, чтобы P, Q и R были постоянными количествами; но тогда это будет не уравнение для кривой, а уравнение для двух прямых. Если же P, Q, R суть функции первого порядка, как $\alpha x+\beta y+\gamma$, тогда у нас будут линии третьего порядка, имеющие в M двойную точку. А линия третьего порядка, если только она не состоит из трех прямых, не может иметь больше одной двойной точки. Действительно, предположим, что имеется две двойных точки и что через них проведена прямая линия. Эта прямая линия пересекла бы тогда кривую в четырех точках, что противоречит природе линий третьего порядка. Линия четвертого порядка будет иметь две двойные точки; линия пятого порядка не может иметь больше трех таких точек и т.д.[1]).

---

[1]) Максимальное число двойных точек кривой порядка n составляет $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, если только кривая является неприводимой, что можно найти уже в работе Маклорена «Geometria organica», 1720, с. 137. [*А. Ш*]

301. Пусть M представляет собою тройную точку кривой; тогда природа этой кривой линии выражается уравнением

$$P(x-p)^3+Q(x-p)^2(y-q)+R(x-p)(y-q)^2+S(y-q)^3=0.$$

Следовательно, это уравнение, если оно определяет кривую линию, будет порядка выше третьего, ибо если бы P, Q, R и S были постоянными, как этого требует природа линий третьего порядка, то данное уравнение имело бы три множителя вида $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$ и, значит, было бы уравнением для трех прямых. Таким образом, у кривых ниже четвертого порядка не может быть тройной точки, а линии пятого порядка не могут иметь более одной тройной точки, так как в противном случае существовала бы прямая, которая пересекала бы линию пятого порядка в шести точках. Но ничто не мешает тому, чтобы линия шестого порядка имела две тройные точки.

302. Если уравнение будет иметь такой вид:

$$P(x-p)^4+Q(x-p)^3(y-q)+R(x-p)^2(y-q)^2+S(x-p)(y-q)^3+T(y-q)^4=0,$$

то кривая будет иметь в M четверную точку. Следовательно, наиболее простая кривая, имеющая четверную точку, принадлежит к пятому порядку линий, а две четверные точки могут оказаться лишь у линий восьмого или более высокого порядка. Аналогичным образом можно вывести общие уравнения для линий, которые имеют в M пятерную точку или же точку любой иной кратности.

303. Но если точка M будет двойной, тройной или какой-либо иной кратности, то либо такое же количество ветвей кривой будет взаимно пересекаться или касаться в точке M, либо, если число взаимно пересекающихся ветвей окажется меньше, в той же точке M сольются одна или несколько сопряженных точек, и такой ход кривой можно определить на основании того, что было изложено выше. А именно, в функциях P, Q, R, S и т. д. следует всюду вместо x и y писать p и q и вместо множителей $x-p$ и $y-q$ писать t и u. Этим путем мы получим уравнения, с помощью которых можно будет определить строение кривой и касательные ветвей, пересекающихся в точке M.

ГЛАВА XIV

О КРИВИЗНЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ

304. Подобно тому как в предыдущей главе мы разыскивали прямые линии, которые в любой точке кривой линии указывают направление этой кривой, точно так же здесь мы исследуем более простые кривые линии, которые столь близко совпадают в любом месте с рассматриваемой кривой, что на очень малом протяжении они как бы сливаются с нею, ибо, зная природу более простой кривой, мы этим путем выявляем и природу рассматриваемой кривой. Таким образом, мы пользуемся здесь методом, аналогичным тому, какой мы применили раньше для исследования природы простирающихся в бесконечность ветвей. Это значит, что мы исследуем сначала прямую линию, которая касается кривой, а затем — более простую кривую, которая гораздо ближе сходится с рассматриваемой кривой и не только касается ее, но и как бы сливается с ней. Такого рода весьма тесное соприкосновение кривых линий обычно называют *оскуляцией*.

305. Итак, пусть дано некоторое уравнение между прямоугольными координатами x и y. Для исследования природы весьма малой части кривой Mm (рис. 55, стр. 158), расположенной около точки M, после того как определена абсцисса $AP=p$ и ордината $PM=q$, возьмем на оси MR очень малую абсциссу $Mq=t$ и ординату $q\mu=u$. Тогда мы будем иметь $x=p+t$ и $y=q+u$. Если эти значения подставить в уравнение, то мы придем к следующему уравнению:

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+ \text{ и т. д.},$$

которое выражает природу той же самой кривой, отнесенной к оси MR. А так как эти новые координаты t и u мы предполагаем весьма малыми, то дальнейшие члены будут как бы бесконечно меньше предыдущих членов и, следовательно, ими можно будет без погрешности пренебречь по сравнению с предыдущими.

306. Итак, если только оба первых коэффициента A и B одновременно не исчезают, то после того, как будут отброшены все последующие члены, уравнение $0=At+Bu$ даст нам прямую $M\mu$, которая касается кривой в точке M и имеет в этом месте общее направление с кривой. Таким образом, у нас будет $Mq : q\mu=B : -A$. Отсюда, поскольку количества A и B известны, определится положение касательной $M\mu$, и так как она соприкасается с кривой лишь в точке M, посмотрим теперь, насколько кривая Mm отходит от прямой $M\mu$, по крайнем мере на очень малом расстоянии.

С этой целью возьмем нормаль MN в качестве оси, и в соответствии с этим из точки m проведем прямоугольную ординату mr, и пусть $Mr=r$ и $rm=s$. Тогда будет

$$t=\frac{-Ar+Bs}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad u=\frac{-As-Br}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и

$$r=\frac{-At-Bu}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad s=\frac{Bt-Au}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отсюда следует, что, так как

$$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+\text{и т. д.},$$

r будет количеством бесконечно меньшим, чем t и u, вследствие чего r будет также количеством бесконечно меньшим, чем s; ибо s выражается через t и u, а r выражается через квадраты или более высокие степени тех же t и u.

307. Следовательно, мы гораздо ближе узнаем природу кривой Mm, если введем в расчет также члены $Ct^2+Dtu+Eu^2$ и отбросим лишь дальнейшие члены. Тогда мы получим следующее уравнение между t и u:

$$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2;$$

если в этом уравнении вместо t и u подставить найденные выше значения, то получим

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\frac{(A^2C+ABD+B^2E)\,r^2}{A^2+B^2}+$$
$$+\frac{(A^2D-B^2D-2ABC+2ABE)\,rs}{A^2+B^2}+\frac{(A^2E-ABD+B^2C)\,s^2}{A^2+B^2}.$$

Но так как r бесконечно меньше, чем s, то члены r^2 и rs по сравнению с s^2 исчезнут и тогда получится

$$s^2=\frac{(A^2+B^2)\,r\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C};$$

это уравнение выражает природу кривой линии, оскулирующей с рассматриваемой кривой в M.

308. Таким образом, весьма малая дуга Mm кривой совпадет с вершиной, описанной около оси MN параболы, у которой параметр

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}.$$

Отсюда следует, что кривизна рассматриваемой кривой в точке M будет такой же, как кривизна этой параболы в ее вершине. Но ввиду того, что ни у одной кривой кривизна не выявляется более ясно, чем у круга, так как кривизна последнего повсюду одинакова и она тем больше, чем меньше его радиус, то будет удобнее определять кривизну кривых с помощью круга одинаковой кривизны, который обычно называют *оскулирующим кругом*. Поэтому надо будет найти круг, кривизна которого совпадает с кривизной рассматриваемой параболы в ее вершине, с тем, чтобы после этого можно было взять этот круг вместо оскулирующей параболы.

309. Для того чтобы это выполнить, будем рассматривать кривизну круга как неизвестную и выразим ее изложенным выше образом через кривизну параболы, так как тогда можно будет обратно вместо оскулирующей параболы подставить оскулирующий круг. Итак, пусть рассматриваемая кривая Mm представляет собою круг, описанный радиусом $=a$, природу которого выражает уравнение $y^2=2ax-x^2$. Следовательно, если взять $AP=p$ и $PM=q$, будем иметь $q^2=2ap-p^2$. Положим теперь

$$x=p+t \quad \text{и} \quad y=q+u;$$

тогда получится уравнение

$$q^2+2qu+u^2=2ap+2at-p^2-2pt-t^2,$$

которое, поскольку $q^2=2ap-p^2$, приводится к такому виду:

$$0=2at-2pt-2qu-t^2-u^2.$$

Сопоставление этого вида с приведенным выше дает

$$A=2a-2p, \quad B=-2q, \quad C=-1, \quad D=0 \quad \text{и}\ E=-1,$$

откуда получается

$$A^2+B^2=4(a^2-2ap+p^2+q^2)=4a^2 \ \text{и}\ (A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}=8a^3,$$

а также

$$A^2E-ABD+B^2C=-A^2-B^2=-4a^2.$$

Отсюда следует, что круг, радиус которого $=a$, оскулирует в вершине параболу, природа которой выражается уравнением $s^2=2ar$, и, значит, обратно, кривую, которую оскулирует в вершине парабола $s^2=br$, будет равным образом оскулировать и круг, радиус которого $=\frac{1}{2}b$.

310. Так как выше мы нашли, что кривую оскулирует парабола, уравнением которой является

$$s^2=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C},$$

то ясно, что кривизна этой кривой линии в точке M совпадает с кривизной круга, радиус которого

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

Таким образом, это выражение дает радиус оскулирующего круга. Этот радиус обычно называют также *радиусом оскулирования*; зачастую его также называют *радиусом кривизны*. Стало быть, из уравнения между t и u, которое мы вывели из заданного уравнения между x и y, можно сразу определить радиус оскулирования кривой в точке M, то есть радиус круга, оскулирующего кривую в M. Действительно, если в уравнении между t и u отбросить члены, в состав которых t и u входят в степенях, превышающих вторую, то придем к уравнению следующего вида:

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2;$$

отсюда находим радиус оскулирования

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

311. Но ввиду двойственности знака радикала $\sqrt{A^2+B^2}$ неизвестно, является ли приведенное выражение положительным или отрицательным, т. е. обращена ли кривая к точке N своей выпуклостью или вогнутостью. Для того чтобы устранить это сомнение, надо выяснить, находится ли точка m кривой между касательной $M\mu$ и осью AN, или же она находится вне касательной. В первом случае кривая будет вогнутой по направлению к N и центр оскулирующего круга будет находиться на той части прямой MN, которая обращена к оси, во втором же случае на той части прямой MN, которая расположена за M. Таким образом, всякое сомнение исчезнет, если мы выясним, будет ли qm меньше или больше, чем $q\mu$, так как в первом случае кривая будет вогнутой по направлению к N, а во втором она будет выпуклой.

312. Но $q\mu=-\frac{At}{B}$ и $qm=u$, вследствие чего следует выяснить, будет ли $-\frac{At}{B}$ больше или меньше, чем u. А так как $m\mu$ является очень малой линией, положим $m\mu=w$, и тогда будет $u=-\frac{At}{B}-w$; следовательно, если произвести подстановку, получится

$$0=-Bw+Ct^2-\frac{ADt^2}{B}-Dtw+\frac{A^2Et^2}{B^2}+\frac{2AEtw}{B}+Ew^2.$$

В этом выражении, ввиду малости w по сравнению с t, члены tw и w^2 исчезают. Тогда получается

$$w=\frac{(B^2C-ABD+A^2E)\,t^2}{B^3}.$$

Следовательно, если w будет положительным количеством, что будет иметь место, когда

$$\frac{B^2C-ABD+A^2E}{B^3}, \quad \text{то есть} \quad \frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

будет положительным количеством, кривая будет вогнута по направлению к N; если же w будет отрицательным количеством, то к точке N будет обращена выпуклость кривой.

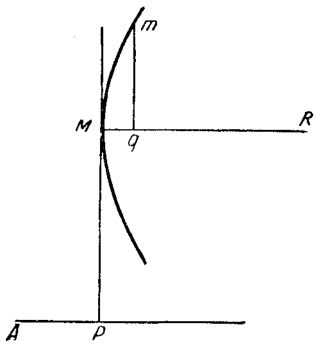

Рис. 57.

313. Для того чтобы сделать изложенное более ясным, следует отдельно рассмотреть различные случаи, какие могут здесь представиться (рис. 57). Итак, пусть, во-первых, $B=0$; в этом случае ордината PM будет касательной к кривой Mm и радиус оскулирования будет $=\frac{A}{2E}$. Из уравнения $0=At+Ct^2+$ $+Dtu+Eu^2$ можно определить, будет ли кривая вогнутой в сторону R, как показано на рисунке, или же выпуклой. Действительно, так как $Mq=t$ и $qm=u$, то ввиду того, что t бесконечно меньше, чем u, члены t^2 и tu исчезнут по сравнению с u^2, и тогда получится $At+Eu^2=0$. Из этого уравнения видно, что когда коэффициенты A и E имеют противоположные знаки, т. е. когда $\frac{E}{A}$ является отрицательным

количеством, кривая вогнута в направлении к R. Если же коэффициенты A и E имеют одинаковые знаки и $\frac{E}{A}$ является положительным количеством, то кривая расположена по другую сторону от касательной; ибо абсцисса Mq должна быть отрицательной, чтобы ей соответствовала действительная ордината qm.

314. Пусть теперь касательная $M\mu$ наклонена к оси AP или пусть она ей параллельна, так что угол $RM\mu$ будет острым и нормаль MN пересечет ось в точке N за точкой P (рис. 55, стр. 158). В этом случае абсциссам t будут соответствовать положительные ординаты u; вследствие этого коэффициенты A и B будут иметь различные знаки и дробь $\frac{A}{B}$ будет отрицательной. В данном случае, как мы уже это видели раньше, кривая будет вогнута в сторону N, если

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

будет положительным количеством, или же, так как $\frac{B}{A}$ — отрицательное количество, — если $\frac{A^2E-ABD+B^2C}{A}$ будет отрицательным количеством. Но если

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

будет положительным, то есть

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{A}$$

будет отрицательным количеством, то кривая будет обращена в сторону N своей выпуклой стороной. Однако в обоих случаях радиус оскулирования будет

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

315. Пусть теперь $A=0$. В этом случае (рис. 58) прямая линия MR будет параллельна оси и вместе с тем будет касательной к кривой, а u

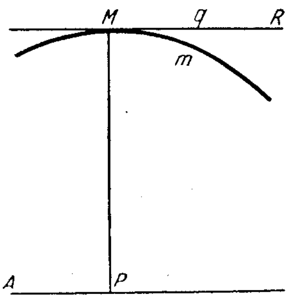

Рис. 58.

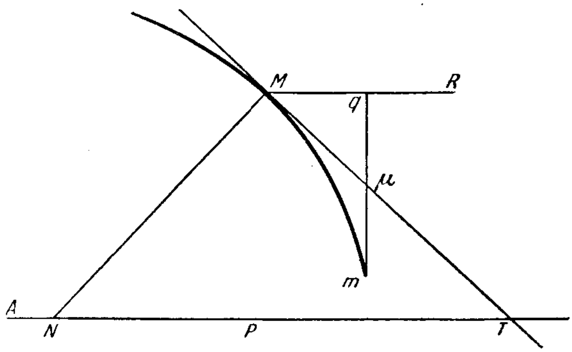

Рис. 59.

будет бесконечно меньше, чем t, вследствие чего получится $0=Bu+Ct^2$. Поэтому, когда B и C имеют одинаковые знаки, то есть когда BC является положительным количеством, u должно иметь отрицательное значение. Следовательно, кривая будет вогнутой в сторону точки P, с которой совпадает точка N, на что указывает и приведенное выше правило, если положить $A=0$. А радиус оскулирования будет в этом случае $=\frac{B}{2C}$. Изложенное выше правило остается в силе и тогда, когда (рис. 59) касательная MT проведена к точке кривой, лежащей на оси и совпадающей с точкой P. Ибо и в этом случае кривая будет точно так же вогнутой или выпуклой в сторону N в зависимости от того, будет выражение

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

положительным или отрицательным, и радиус оскулирования будет, как и раньше,

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

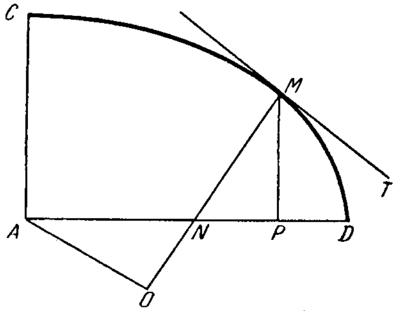

Рис. 60.

316. Пусть дан эллипс или хотя бы его квадрант (рис. 60), центром которого является A, одна поперечная полуось которого $AD=a$, другая сопряженная с ней полуось $AC=b$. Стало быть, если откладывать абсциссы x на оси AD от центра A, то получится следующее уравнение для эллипса:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Если взять теперь какую-нибудь абсциссу $AP=p$ и положить ординату $PM=q$, то получится

$$a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2.$$

Положим теперь $x=p+t$ и $y=q+u$; тогда будет

$$a^2q^2+2a^2qu+a^2u^2+b^2p^2+2b^2pt+b^2t^2=a^2b^2$$

или

$$2b^2pt+2a^2qu+b^2t^2+a^2u^2=0.$$

Следовательно, во-первых, поскольку коэффициенты при t и u [положительны], нормаль MN встретится с осью по эту сторону от P, и будем иметь

$$PM:PN=B:A=a^2q:b^2p \quad \text{и} \quad PN=\frac{b^2p}{a^2},$$

так как $A=2b^2p$ и $B=2a^2q$. Далее, так как $C=b^2$, $D=0$ и $E=a^2$, будет

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}=\frac{4a^2b^2(a^2q^2+b^2p^2)}{2a^2q}=\frac{4a^4b^4}{2a^2q},$$

то есть получится положительное количество, и это показывает, что кривая является вогнутой в направлении к N.

317. Для определения радиуса оскулирования мы имеем

$$A^2+B^2=4(a^4q^2+b^4p^2) \quad \text{и} \quad A^2E-ABD+B^2C=4a^4b^4;$$

отсюда радиус оскулирования $=\frac{(a^4q^2+b^4p^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. Но

$$MN=\sqrt{q^2+\frac{b^4p^2}{a^4}},$$

откуда

$$\sqrt{a^4q^2+b^4p^2}=a^2\cdot MN;$$

следовательно, радиус оскулирования $\frac{a^2\cdot MN^3}{b^4}$. Если на нормаль MN опустить из центра A перпендикуляр AO, то в силу того, что $AN=p-\frac{b^2p}{a^2}$, и вследствие подобия треугольников MNP и ANO будет

$$NO=\frac{a^2b^2p^2-b^4p^2}{a^4MN}$$

и

$$MO=NO+MN=\frac{a^2q^2+b^2p^2}{a^2MN}=\frac{b^2}{MN},$$

откуда $MN=\frac{b^2}{MO}$; а отсюда радиус оскулирования $=\frac{a^2b^2}{MO^3}$; в это выражение обе оси AD и AC входят одинаковым образом[1]).

318. После того как найден радиус оскулирования для любого места кривой, природа кривой становится в достаточной мере ясной. Действительно, если мы разделим часть кривой на очень большое количество возможно мелких частей, то каждую малую часть можно будет рассматривать как дугу окружности, радиусом которой будет радиус оскулирования в данном месте. Поэтому, конечно, и вычерчивание кривой линии по большому количеству точек выполняется гораздо точнее. Действительно, если отметить большое количество точек, через которые должна пройти линия, затем для каждой из этих точек найти, во-первых, касательные, а затем нормали и радиусы оскулирования, то малые части кривой, расположенные между найденными точками, можно будет вычертить с помощью циркуля. Этим путем можно тем точнее представить форму кривой, чем ближе друг к другу будут расположены первоначально взятые точки.

319. Так как, следовательно (рис. 55), очень малая часть кривой у точки M совпадает с маленькой дугой круга, описанного радиусом оскулирования, то не только элемент Mm, но и предшествующий ему элемент Mn, будет иметь одну и ту же кривизну. Действительно, так как природа очень малой доли кривой линии Mm выражается с помощью уравнения $s^2=\alpha r$, между координатами $Mr=r$ и $rm=s$, то каждой весьма малой абсциссе $Mr=r$ соответствуют, согласно уравнению, две ординаты: одна положительная и другая отрицательная; следовательно, кривая будет одинаково продолжаться как по направлению к n, так и по направлению к m [53]. Следовательно, всюду, где радиус оскулирования, который $=\frac{1}{2}\alpha$, имеет конечную величину, кривизна по обе стороны от одной и той же точки, во всяком случае на очень малом расстоянии, одинакова. Таким образом, в этих случаях ход кривой линии не будет изменяться внезапно, образуя острие; исключена также возможность изменения кривизны, чтобы часть

---

[1]) quae expressio ad utrumque axem AD et AC aeque est accomodata.

кривой Mn могла оказаться обращенной к точке N своей выпуклостью, а ее другая часть Mm своей вогнутостью. Подобного рода изменение кривизны обычно называют *перегибом*[1]) или *точкой обратного изгиба*[2]). Таким образом, во всех местах, где радиус оскулирования является конечным, не может быть ни острия, ни точки обратного изгиба[3]).

320. Стало быть, так как из уравнения между t и u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \text{и т. д.}$$

определяется радиус оскулирования

$$= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)},$$

то ясно, что если окажется $A^2E - ABD + B^2C = 0$, то радиус оскулирования будет бесконечно большим и, значит, круг оскулирования перейдет в прямую линию. Следовательно, там, где это имеет место, кривая теряет свою кривизну и два элемента этой кривой линии оказываются как бы расположенными на одной прямой. Для того же, чтобы в этих случаях более детально исследовать природу кривой, надлежит произвести подстановку

$$t = \frac{-Ar+Bs}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad u = \frac{-As-Br}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и в членах $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3$. Но так как по сравнению с первым членом, $r\sqrt{A^2+B^2}$, все дальнейшие члены, содержащие в себе r, исчезают, то, отбросив эти члены и произведя подстановку во всем уравнении, получим следующее уравнение:

$$r\sqrt{A^2+B^2} = \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \text{и т. д.}$$

321. Из этого уравнения можно тотчас же заключить, как и раньше, что радиус оскулирования $= \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2\alpha}$. Но если $\alpha = 0$, а в этом случае радиус оскулирования становится бесконечным, то для более точного выявления природы кривой надо взять следующий член βs^3, так что будет

$$r\sqrt{A^2+B^2} = \beta s^3;$$

ибо, если только не будет $\beta = 0$, то по сравнению с βs^3 все остальные члены γs^4, δs^5 и т. д. исчезнут. Следовательно, в этом случае (рис. 61) с кривой в точке M будет соприкасаться кривая, которая выражается уравнением

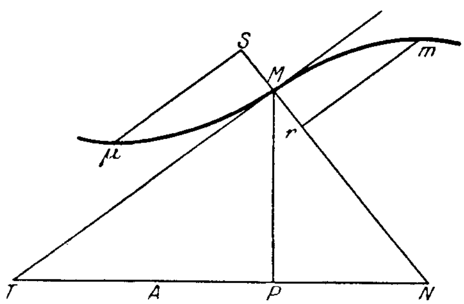

Рис. 61.

$$r\sqrt{A^2+B^2} = \beta s^3,$$

1) inflexio.

2) punctum flexus contrarii.

3) Это утверждение противоречит примеру, указанному Лопиталем. См. ниже, §333 и примечания к нему. [*А.Ш.*]

и по этому уравнению можно будет заодно определить форму кривой около точки M. А так как если взять абсциссу r отрицательной, ей соответствует отрицательное значение ординаты s, то кривая около точки M будет иметь змееобразную форму $mM\mu$ и, значит, в M она будет иметь точку обратного изгиба, т. е. перегиба.

322. Если же, кроме $\alpha=0$, будет также $\beta=0$, то (рис. 62) природа кривой около M будет выражаться уравнением

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\gamma s^4.$$

Так как в этом уравнении каждой абсциссе r соответствуют две ординаты s, одна положительная и другая отрицательная, и так как абсциссу r нельзя взять с одной и с другой стороны, то обе части кривой линии Mm и $M\mu$ будут расположены по одну сторону от касательной. Но если α, β и γ окажутся равными нулю и природа кривой около точки M будет выражаться уравнением

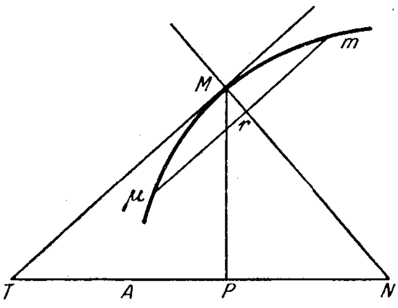

Рис. 62.

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\delta s^5,$$

то кривая снова будет иметь в M точку обратного изгиба, как на рис. 61. А если окажется и $\delta=0$, так что получится

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\varepsilon s^6,$$

то кривая вновь лишится точки обратного изгиба, как на рис. 62. И вообще, если показатель при s будет нечетным числом, то кривая будет иметь в M точку обратного изгиба; если же показатель при s будет четным числом, то кривая не будет иметь точки обратного изгиба, как на рис. 62.

323. Таковы, значит, свойства кривых, когда точка M является простой, то есть когда в уравнении

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+ \text{ и т. д.}$$

оба коэффициента A и B не исчезают одновременно. Если же окажется, что и $A=0$ и $B=0$, и кривая линия будет иметь (рис. 56) две или больше ветвей, пересекающихся в точке M, то надо будет отдельно исследовать кривизну и природу каждой ветви в M, как это было сделано раньше. Действительно, пусть в качестве касательной к какой-нибудь ветви имеем $mt+nu=0$ и требуется найти уравнение для этой ветви между координатами r и s, из которых первая r (рис. 55) пусть берется на перпендикуляре MN, так что r оказывается бесконечно меньше, чем s. Таким образом, надо будет положить

$$t=\frac{-mr+ns}{\sqrt{m^2+n^2}} \quad\text{и}\quad u=\frac{-ms-nr}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Если это проделать и пренебречь членами, которые ввиду их бесконечной малости исчезают по сравнению с остальными членами, то будем иметь, если M — двойная точка, следующее уравнение:

$$rs=\alpha s^3+\beta s^4+\gamma s^5+\delta s^6+ \text{ и т. д.};$$

если же M будет тройной точкой, то получится уравнение

$$rs^2 = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \text{ и т. д.}$$

и так далее. Все эти уравнения сводятся к следующему виду:

$$r = \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \text{ и т. д.}$$

324. Из последнего уравнения видно, что рассматриваемая нами ветвь кривой имеет в M радиус оскулирования $= \frac{1}{2\alpha}$, который в случае $\alpha = 0$ оказывается $= \infty$. При этом природа кривой выражается либо уравнением $r = \beta s^3$, либо уравнением $r = \gamma s^4$, либо уравнением $r = \gamma s^5$ и т. д. С помощью этих уравнений можно, как и раньше, определить, имеет ветвь кривой в M точку обратного изгиба или же не имеет. А именно, первое будет иметь место, когда показатель s будет нечетным числом, а второе, когда он будет четным числом. Совершенно так же надо будет судить в отдельности о каждой ветви, проходящей через точку M, когда будет найдена ее касательная и если последняя будет отличаться от касательных других ветвей, пересекающихся в той же точке M.

325. Но иначе надо будет рассуждать в том случае, если в точке M совпадут касательные двух или большего количества ветвей (рис. 55). Действительно, пусть при исчезающих A и B в уравнении

$$0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \text{ и т. д.}$$

оба простых множителя выражения $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ между собою равны, т. е. обе ветви, пересекающиеся в точке M, имеют общую касательную. Таким образом, пусть

$$Ct^2 + Dtu + Eu^2 = (mt + nu)^2,$$

а если преобразовать это уравнение к координатам $Mr = r$ и $rm = s$, положив

$$t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{m^2 + n^2}} \quad \text{и} \quad u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

то получится уравнение вида

$$r^2 = \alpha rs^2 + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 + \text{ и т. д.};$$

ибо члены, в которых r имеет два или больше измерений, исчезают по сравнению с первым членом r^2.

326. Здесь следует прежде всего рассмотреть член βs^3, ибо если последний налицо, то по сравнению с ним все прочие исчезают, так как r бесконечно меньше, чем s. Следовательно, если не будет $\beta = 0$, то природа кривой вблизи M будет выражаться с помощью уравнения $r^2 = \beta s^3$, из которого, так как $r = s\sqrt{\beta s} = s^2\sqrt{\frac{\beta}{s}}$, видно, что радиус оскулирования в $M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$, то есть, так как s исчезает в M, что радиус оскулирования тоже становится $= 0$. Таким образом, кривизна в M будет бесконечно большой, т. е. элемент кривой в M будет частью бесконечно малой окружности. Но так как, далее, ордината s сохраняет одно и то

же значение, берут ли абсциссу r положительной или отрицательной, то ясно (рис. 63), что кривая линия имеет в точке M острие и раздваивается на две ветви: Mm и $M\mu$, которые соприкасаются друг с другом в M и обращены своей выпуклостью к касательной Mt.

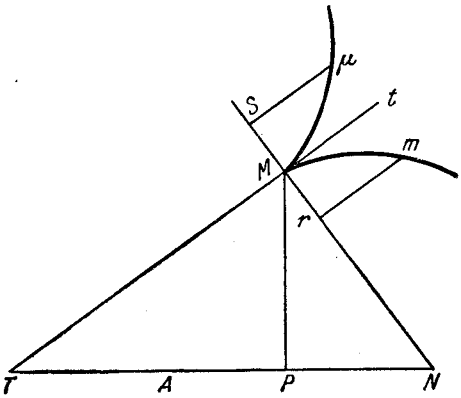

Рис. 63.

327. Если $\beta=0$, но в уравнении имеется член δs^4, по сравнению с которым член γrs^3 исчезает, то природа кривой около точки M выражается уравнением $r^2=\alpha rs^2+\delta s^4$. Если α^2 меньше, чем -4δ, то ввиду наличия мнимых множителей это укажет на существование в M сопряженной точки. Если же α^2 больше, чем -4δ, то предыдущее уравнение разлагается на два уравнения такого вида: $r=fs^2$ и $r=gs^2$. Таким образом, в M соприкасаются две ветви кривой, из которых одна имеет в M радиус оскулирования $=\frac{1}{2f}$, а другая — радиус оскулирования $=\frac{1}{2g}$. Следовательно, если (рис. 64) эти две ветви обращены своею вогнутостью

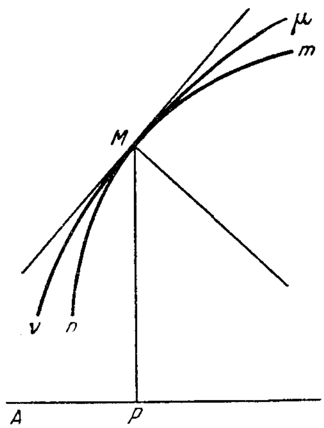

Рис. 64.

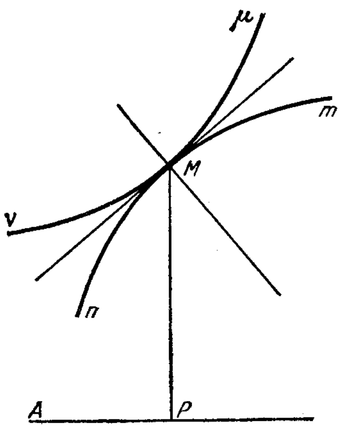

Рис. 65.

в одну и ту же сторону, то кривая имеет вид двух круговых дуг, соприкасающихся изнутри; если же (рис. 65) они обращены своею вогнутостью в противоположные стороны, то кривая имеет вид двух круговых дуг, соприкасающихся извне.

328. А если и δ отсутствует, то уравнение либо можно разложить на два уравнения, либо нельзя. В первом случае получаются две ветви, соприкасающиеся в точке M, причем природа каждой из них выражается уравнением вида $r=\alpha s^m$. Следовательно, в этом случае получится столько различных видов, сколько существует комбинаций по две ветви, образующих в M простую точку. Мы назовем их *ветвями первого порядка*; все они содержатся в уравнении $r=\alpha s^m$. А во втором случае, когда уравнение не может

быть разложено на два других уравнения, природа кривой линии выражается либо уравнением $r^2=\alpha s^5$, либо уравнением $r^2=\alpha s^7$, либо уравнением $r^2=\alpha s^9$ и т. д. Эти ветви вместе с найденною нами выше ветвью $r^2=\alpha s^3$ мы назовем *ветвями второго порядка*, так как такая ветвь заменяет две ветви первого порядка, соприкасающиеся в M. Все эти ветви (рис. 63) второго порядка имеют в M острие, как это показывает уравнение $r^2=\alpha s^3$, с тем, однако, различием, что в то время, как для уравнения $r^2=\alpha s^3$ радиус оскулирования бесконечно мал, для остальных уравнений он оказывается бесконечно большим. Действительно, так как из уравнения $r^2=\alpha s^5$ получается $r=s^2\sqrt{\alpha s}$, то радиус оскулирования в точке M равен $\frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, т. е. в силу $s=0$ он бесконечен.

329. Если совпадают три касательные ветвей, пересекающихся в точке M, то либо три ветви первого порядка касаются друг друга в одной и той же точке M, либо в M соприкасаются одна ветвь второго порядка с одной ветвью первого порядка, либо через точку M проходит лишь одна *ветвь третьего порядка*. Природа ветвей третьего порядка будет выражаться уравнениями вида $r^3=\alpha s^4$, $r^3=\alpha s^5$, $r^3=\alpha s^7$, $r^3=\alpha s^8$ и т. д., то есть следующим общим уравнением: $r^3=\alpha s^n$, где n представляет собою любое целое число, большее трех и не делящееся на тройку. А форма этих ветвей будет такова, что в M будет точка обратного изгиба, если n будет нечетным числом; но изгиб будет не обратным, а непрерывным (как на рис. 62), когда n является четным числом. Впрочем, радиус оскулирования в точке M у этих кривых будет бесконечно малым при n, меньшем шести, и бесконечно большим при n, большем шести.

330. Равным образом, если совпадут друг с другом четыре касательные к ветвям, пересекающимся в точке M, то в этом случае либо четыре ветви первого порядка, либо две ветви первого порядка и одна ветвь второго порядка, либо две ветви второго порядка, либо одна ветвь первого порядка и одна ветвь третьего порядка будут соприкасаться в одной и той же точке M, или же, наконец, через M пройдет одна лишь *ветвь четвертого порядка*. А природа ветвей четвертого порядка выражается общим уравнением $r^4=\alpha s^n$, где n представляет собою целое нечетное число, большее 4. Все эти уравнения дают острие, как ветви (рис. 63) второго порядка. А радиус оскулирования в M будет бесконечно малым, если n меньше чем 8, и бесконечно большим, если n больше чем 8.

331. Аналогичным образом раскрывается природа ветвей *пятого* и более высоких порядков; но в отношении формы ветви пятого, седьмого, девятого и всех других нечетных порядков схожи с ветвями первого порядка, которые дают два вида фигур: либо с точкой обратного изгиба, либо без нее. А ветви шестого, восьмого и вообще всех четных порядков в отношении формы совпадают с ветвями второго и четвертого порядков, т. е. они имеют острие в M, как это показывает рис. 63. Что касается радиуса оскулирования, то так как природа этих дуг выражается уравнением $r^m=\alpha s^n$, где n — число, большее, чем m, то ясно, что, когда n меньше, чем $2m$, радиус оскулирования бесконечно мал, в противном же случае, когда n больше, чем $2m$, радиус оскулирования бесконечно велик.

332. Таким образом, явления, которые можно наблюдать на любой кривой, сводятся к следующим трем видам. При первом из них кривая при продолжении обладает *непрерывной кривизной* и нигде не имеет ни точки

обратного изгиба, ни острия, т. е. точки отражения[1]). Это имеет место, прежде всего, в том случае, когда радиус оскулирования имеет повсюду конечную величину, хотя, правда, бывают и такие случаи, когда величина радиуса оскулирования, будет ли она бесконечно большой или же бесконечно малой, не влияет на постоянство хода кривой[2]). Последнее имеет место, когда природа кривой линии у точки M выражается уравнением $ar^m = s^n$, где m является нечетным числом, а n — четным числом, бо́льшим, чем m. Вторым видом является *точка обратного изгиба*, что, однако, не может иметь места, если только радиус оскулирования не окажется бесконечно большим или бесконечно малым. Его признаком является уравнение $ar^m = s^n$, если оба показателя m и n будут нечетными числами, причем n должно быть больше, чем m; а именно, радиус соприкосновения будет бесконечно большим, если n будет больше, чем $2m$, и бесконечно малым, если n будет меньше, чем $2m$. Третьим видом будет *точка отражения*, или *острие*, при котором как бы две ветви, обращенные выпуклостью друг к другу, сойдясь в одной точке, в ней соприкасаются и заканчиваются. На подобную точку указывает уравнение $ar^m = s^n$, когда m является четным, а n нечетным числом. Стало быть, в острие радиус соприкосновения всегда либо бесконечно мал, либо бесконечно велик[3]).

333. Поскольку, стало быть, в приведенных выше трех случаях содержится все многообразие кривых при их непрерывном продолжении, то, во-первых, ясно, что ветвь непрерывной кривой никогда не может дать

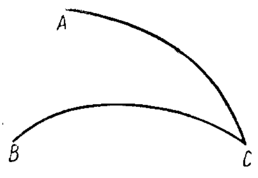

Рис. 66.

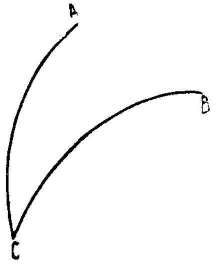

Рис. 67.

такой изгиб, чтобы (рис. 66) в C образовался конечный угол ACB. Далее, так как в точке отражения обе ветви обращены друг к другу своей выпуклостью, то в C не может быть точки отражения ACB такого рода, чтобы ветви AC и BC, хотя и имели бы в C общую касательную линию, но вогнутость одной из них была бы обращена к выпуклости другой[4]). Во всех случаях, когда кажется, что имеется точка отражения подобного рода, кривая оказывается не завершенной. Если же эту кривую дополнить на основе уравнения и, пользуясь последним, выразить все части этой кривой, то получится такая фигура, как показано на рис. 64. Правда, существуют методы описания кривых, при которых образуется такого рода острие ACB (рис. 67), каковое по этой причине *Лопиталь* назвал острием второго вида[5]). Но следует отметить, что механические описания не всегда воспроизводят всю кривую, которая содержится в уравнении,

[1]) neque cuspidem seu punctum reflexionis.

[2]) continuum tractum non perturbat.

[3]) См. сноску 3 к п. 319.

[4]) См. ниже последнюю сноску к этому параграфу. [*А. Ш.*]

[5]) См. L'H o s p i t a l, Analyse des infinements petits pour l'intelligence des lignes ourbes, Paris, 1696, art. 109, p. 102. [*А. Ш.*]

а зачастую дают только часть ее; одним этим замечанием устраняется спор, который возник по поводу указанного выше острия второго рода[1]).

334. Если (рис. 64, стр. 176) две ветви, которые в M имеют общую касательную и, следовательно, представлены четырьмя дугами, исходящими из M, а именно дугами Mm, $M\mu$, Mn, $M\nu$, выражаются разными уравнениями, то вполне ясно, какая из этих дуг для какой другой дуги является продолжением,— конечно, той, что содержится в одном с нею уравнении. Но если обе эти ветви выражаются одним и тем же уравнением, то в силу отсутствия основания[2]) дуга Mm в равной мере может иметь своим продолжением как дугу μM, так и дугу mM. А поскольку как дуга Mn, так и дуга $M\nu$ могут иметь своим продолжением дугу Mn, то одну из них можно принять за продолжение другой. Следовательно, надо считать, что дуги mM и $M\mu$ образуют непрерывную кривую, равно как и любые другие две дуги, так что в этом случае к (точке) M относятся[3]) два острия второго рода $mM\mu$ и $nM\nu$.

335. Однако эти рассуждения относятся не только к случаю двух ветвей, касающихся в точке M без перегиба и без образования острия и выражающихся одним и тем же уравнением. Каковы бы ни были взаимно касающиеся в M ветви, их можно считать на том же основании непрерывно продолжающими одна другую, лишь бы они имели общее уравнение. А это всегда имеет место, если для r и s получается уравнение

$$\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\beta r^m s^n + \beta^2 s^{2n} = 0,$$

так как тогда обе ветви выражаются одним и тем же уравнением $\alpha r^m = \beta s^n$ Стало быть, в этом случае любые две из четырех дуг, исходящих из точки M, можно считать непрерывной кривой, и таким образом получаются бесчисленные острия второго рода. Именно такие соображения о непрерывности лежат в основе того[4]), что некоторые механические описания и построения дают подчас острия второго рода. Однако это может получиться только при условии, что такое описание дает не всю содержащуюся в уравнении кривую, а только одну или некоторые из ее ветвей [55].

[1]) Несмотря на эти аргументы, в силу которых как будто исключается существование такого острия второго рода, есть бесконечно много алгебраических кривых, имеющих такое острие. Среди них имеется (habetur — это слово внесено мною по рукописи. [*А. Ш.*]) к тому же кривая четвертого порядка, содержащаяся в уравнении $y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 + x^2 = 0$ (член $+x^2$ внесен мною по рукописи. [*А. Ш.*]), которое получается из соотношения $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$. Хотя здесь первый член есть $\sqrt{x}$, но его знак вполне определен, ибо он необходимым образом должен быть $+$. Действительно, если ему приписать знак минус, то второй член $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{x\sqrt{x}}$ станет мнимым. Из этого примера отлично видно, каковы те ограничения, которые надо внести в приведенные выше соображения («соображения — argumenta — внесено мною по рукописи; в первом издании читаем: примеры — exempla. [*А. Ш.*]) (Это примечание принадлежит Эйлеру. В первом издании оно дано в тексте, о чем см. прим. [54].—*И. П.*)

[2]) ob cessantem rationem priorem.

[3]) se respicient.

[4]) haec autem ipsa continuitatis ratio in causa est.

ГЛАВА XV

О КРИВЫХ, ИМЕЮЩИХ ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО ДИАМЕТРОВ

336. Относительно линий второго порядка мы выше видели, что все они имеют по меньшей мере один ортогональный[1]) диаметр, который рассекает всю кривую на две подобные и равные части. Конечно, парабола имеет один такого рода диаметр и потому она состоит из двух равных и подобных частей. А эллипс и гипербола имеют два такого рода диаметра, которые пересекаются в центре под прямым углом; стало быть, у этих линий получается четыре дуги или ветви, равные и подобные друг другу. Окружность же, так как любая прямая, проведенная через центр, делит ее на две равные и подобные части, имеет бесчисленно много равных частей: ведь все дуги, которые стягиваются равными хордами, равны и подобны друг другу.

337. Итак, мы внимательно исследуем здесь подобие двух или большего числа частей одной и той же кривой линии и приведем общие уравнения для тех кривых, у которых две или большее число частей подобны друг другу [56]. Заметим прежде всего, что когда рассматривается уравнение между прямоугольными координатами x и y, причем все пространство разбито на четыре области, обозначенные (рис. 68) буквами Q, R, S, T прямыми линиями AB, EF, пересекающимися в C под прямым углом, то если взять x и y положительными, получится часть кривой, находящаяся в области Q; а если взять абсциссу x положительной, а ординату y отрицательной, то получится часть кривой, находящаяся в области R; если же возьмем x отрицательной, причем y будет оставаться положительной, то получится часть кривой, находящаяся в области S. Наконец, часть кривой линии, расположенная в области T, определится, если допустить, что обе координаты x и y являются отрицательными [57].

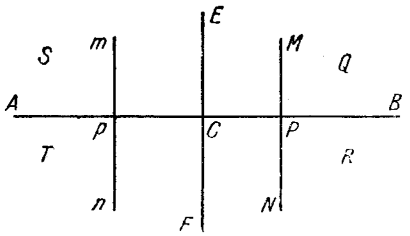

Рис. 68.

338. Таким образом, части, расположенные в областях Q и R, будут равны и подобны друг другу, когда уравнение будет иметь такую струк-

[1]) Подразумевается: к соответствующим хордам.

туру, что оно не претерпит изменения, если вместо y поставить $-y$. Стало быть, так как всякая степень четных показателей y обладает указанным выше свойством, то ясно, что если в уравнении кривой линии нет никаких нечетных показателей y, то части кривой линии, находящиеся в областях Q и R, будут равны и подобны друг другу и, следовательно, прямая AB, на которой откладываются абсциссы $CP=x$, будет диаметром этой кривой. Следовательно, все такого рода кривые, если только они алгебраические, будут содержаться в следующем общем уравнении:

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta y^2+\varepsilon x^3+\zeta xy^2+\eta x^4+\theta x^2y^2+\iota y^4+\text{и т. д.};$$

это выражение можно охарактеризовать как рациональную функцию x и y^2. Следовательно, если Z будет какой-нибудь рациональной функцией x и y^2, то уравнение $Z=0$ будет выражать кривую линию, которую прямая AB делит на две подобные и равные части. Следовательно, и те части, которые находятся в областях S и T, будут равны и подобны друг другу.

339. А части кривой в областях Q и S будут равны и подобны друг другу, если уравнение будет составлено так, что при подстановке $-x$ вместо x оно не изменяется. Следовательно, если Z будет какой-нибудь рациональной функцией x^2 и y, то уравнение $Z=0$ выражает такую кривую, которая делится прямой EF на две равные и подобные части. Следовательно, уравнение для такого рода кривых будет следующего вида:

$$0=\alpha+\beta y+\gamma x^2+\delta y^2+\varepsilon x^2y+\zeta y^3+\eta x^4+\theta x^2y^2+\iota y^4+\text{и т. д.}$$

Таким образом, согласно этому уравнению, часть кривой линии, расположенная в S, будет подобна и равна части кривой, находящейся в Q, и аналогично этому часть кривой в T будет равна и подобна части ее в R.

340. А части кривой в противолежащих областях Q и T или R и S будут подобны и равны друг другу в том случае, когда уравнение между координатами x и y составлено так, что оно не претерпевает никакого изменения, если взять как x, так и y отрицательными. Пусть $Z=0$ представляет собою уравнение для таких кривых. Прежде всего, очевидно, что если Z будет функцией x и y четных измерений или же будет представлять собою совокупность любого количества однородных функций четных измерений, то уравнение $Z=0$ будет обладать указанным выше свойством. Если же Z будет состоять из любого числа однородных функций нечетных измерений, то при x и y отрицательных Z перейдет в $-Z$ и, следовательно, если будет $Z=0$, то будет также $-Z=0$. Итак, отсюда, для кривых, имеющих равные и подобные части в противолежащих областях Q и T, а равно в R и S, получается два общих уравнения, а именно одно из них имеет вид

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma xy+\delta y^2+\varepsilon x^4+\zeta x^3y+\eta x^2y^2+\theta xy^3+\iota y^4+\varkappa x^6+\text{ и т. д.},$$

а другое имеет вид

$$0=\alpha x+\beta y+\gamma x^3+\delta x^2y+\varepsilon xy^2+\zeta y^3+\eta x^5+\theta x^4y+\iota x^3y^2+\text{ и т. д.}$$

341. Следовательно, существует два рода кривых, обладающих двумя подобными и равными частями: либо эти части расположены по обе стороны от прямой таким образом, что все ординаты, проведенные перпендикулярно к этой прямой, одновременно делятся ею пополам, и в этом случае такая прямая называется *ортогональным диаметром* кривой.

Сюда относятся уравнения, приведенные в §§ 338 и 339. Или же эти две подобные и равные части находятся в противолежащих областях Q и R или T и S, так что всякая прямая, проведенная через точку C, делит кривую на две попеременно[1]) равные части; подобного рода кривые содержатся в тех уравнениях, которые были приведены в предыдущем параграфе. Последнее, отличное от указанных выше положение равных частей мы опишем таким образом, что те положения, которые относятся к прежнему виду, мы будем называть *диаметрально равными*, а те положения, которые относятся к последнему виду, мы будем называть *попеременно равными*. А так как в последнем случае имеется такая точка C, что каждая прямая, проведенная через нее и продолженная в обе стороны до кривой, делится в ней на две равные части, то эту точку уместно назвать *центром*; так что о кривых, имеющих две попеременно равные части, говорят, что они *обладают центром*, а о кривых, у которых имеются две диаметрально равные части, говорят, что они *имеют диаметр*.

342. Так как уравнение $Z=0$ дает кривые, диаметром которых является прямая AB, когда координата y имеет в функции Z лишь четные измерения, а то же уравнение $Z=0$ указывает на прямую EF как на диаметр кривой, если другая координата x имеет повсюду четные показатели, то отсюда следует, что если Z такого рода функция x и y, что все показатели как x, так и y суть четные числа, то в этом случае обе прямые AB и EF будут прямоугольными диаметрами кривой и, стало быть, четыре части кривой, находящиеся в областях Q, R, S и T, будут равны и подобны друг другу. Следовательно, все такого рода линии будут содержаться в таком общем уравнении:

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma y^2+\delta x^4+\varepsilon x^2y^2+\zeta y^4+\eta x^6+\theta x^4y^2+\text{ и т. д.}$$

343. Таким образом, кривые, которые содержатся в этом уравнении, будут иметь два прямоугольных диаметра AB и EF, которые взаимно пересекаются под прямым углом в точке C. Итак, все эти кривые относятся ко второму или четвертому или шестому и т. д. порядку линий, так что ни в одном нечетном порядке линий не содержится какой-либо кривой линии, которая обладала бы двумя диаметрами, пересекающимися под прямым углом. Затем, так как это же уравнение содержится также в первом уравнении § 340, то эти кривые вместе с тем будут иметь центр в точке C, так что всякая прямая, проведенная через эту точку в обе стороны до кривой, будет делиться в ней на две равные части. Таким образом, уравнение $Z=0$ дает указанного рода кривые, обладающие двумя диаметрами, если только Z—какая-нибудь рациональная функция от x^2 и y^2.

344. Итак, поскольку указанным выше путем мы пришли к кривым линиям, которые обладают двумя диаметрами, исследуем теперь уравнения для кривых линий, у которых имеется большее количество диаметров. И прежде всего, конечно, легко показать, что если какая-нибудь кривая имеет только два диаметра, то они должны быть взаимно перпендикулярны, так что не существует кривой, обладающей лишь двумя диаметрами, которая не содержалась бы в найденном только что уравнении. Действительно, предположим (рис. 69), что у какой-нибудь кривой линии имеется два диаметра AB и EF, которые в точке C пересекаются не под прямым углом. А так как EC является диаметром, то кривая будет совершенно

[1]) alternatim; см. ниже, в § 346, аналогичное использование этого слова.

одинакова по обе стороны от него. Следовательно, так как одна часть ее имеет в качестве диаметра прямую AC, то и другая ее часть будет иметь в качестве диаметра линию GC, которая образует в точке C с EC угол GCE = углу ACE. Равным образом, так как GC является диаметром, то и прямая IC при условии, что $GCI = GCE$, должна быть диаметром того же характера, что и EC. Далее, диаметром будет и прямая LC, если взять угол $ICL = ICG$. Продолжая таким образом, мы постоянно будем находить новые диаметры, пока не вернемся к первому диаметру AC. Последнее будет иметь место, когда угол ACE будет находиться в рациональном отношении к прямому углу.

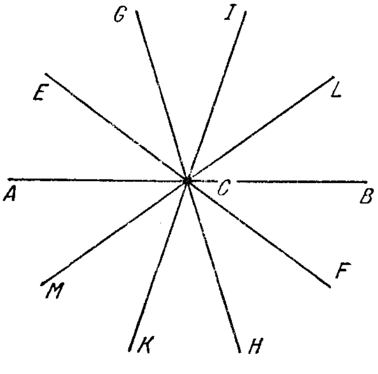

Рис. 69.

345. Таким образом, если только угол ACE не находится в рациональном отношении к прямому углу, число диаметров будет бесконечным, и в этом случае кривая будет окружностью, так как в последней всякая прямая, проведенная через центр, является ортогональным диаметром; мы применяем здесь название диаметров по отношению к прямоугольным диаметрам, так как лишь последние делят кривую линию на две подобные и равные части [58]. Из вышесказанного ясно, что никакая алгебраическая кривая не может иметь два параллельных друг другу диаметра. Действительно, в силу изложенных соображений, если бы такая кривая имела два параллельных друг другу диаметра, то она должна была бы иметь бесконечно много параллельных и равноудаленных друг от друга диаметров, и, значит, прямая линия могла бы ее пересекать в бесконечно многих точках, а таким свойством алгебраические кривые не обладают [59].

346. Следовательно, когда какая-нибудь кривая линия имеет несколько диаметров, последние все будут взаимно пересекаться в одной и той же точке C и будут образовывать друг с другом равные углы. Эти диаметры будут двух родов, которые будут попеременно чередоваться; ибо диаметр CG будет иметь те же свойства, что и диаметр CA, а также уравнение для кривой, если принять диаметр CG в качестве оси, совпадет с уравнением для кривой, которое получится, если принять в качестве оси диаметр CA. Таким образом, диаметры CA, CG, CL и т. д., взятые через один, будут одинаково расположены по отношению к кривой, и точно так же диаметры CE, CI и т. д. будут в одинаковом отношении к кривой линии. Поэтому если число диаметров конечно, то угол ACG будет аликвотной частью четырех прямых углов, то есть угол ACE будет аликвотной частью угла в 180 градусов или полуокружности, которую мы обозначим $= \pi$.

347. Если (рис. 70) угол $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, то перед нами рассмотренный уже ранее случай, когда кривая имеет два взаимно перпендикулярных диаметра. Исследуем заново этого рода кривые, но методом, который отличается от прежнего и который равным образом можно приспособить для нахождения большего числа диаметров. Итак, пусть имеется кривая, обладающая двумя диаметрами AB и EF. Возьмем на ней какую-нибудь

точку M, проведем из центра C прямую CM и положим $CM=z$ и угол $ACM=s$. Требуется найти уравнение между z и s. Прежде всего, конечно, ясно, что так как прямая AC — диаметр, то z должен быть такой функцией s, которая не изменяется, если вместо s поставить $-s$; ибо если взять угол ACm, отрицательный по отношению к углу $ACM=s$, то прямая Cm должна быть $=CM$. Но $\cos s$ является такой функцией s, что она остается без изменений, если в ней взять $-s$ вместо s. В силу этого выставленное выше требование будет удовлетворено, если z будет какой-нибудь рациональной функцией от $\cos s$.

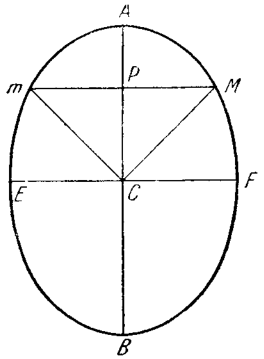

Рис. 70.

348. Положим абсциссу $CP=x$ и ординату $PM=y$; тогда

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \cos s=\frac{x}{z};$$

и пусть $Z=0$ будет уравнением кривой, диаметром которой является прямая CA. Тогда Z должно быть рациональной функцией величин z и $\frac{x}{z}$, или величин z и x, или же, в силу рациональности, величин x^2+y^2 и x. Но если Z будет функцией x^2+y^2 и x, то Z будет также функцией от y^2 и x. Действительно, пусть $x^2+y^2=u$. Так как Z должно быть функцией x и u, то если положить $u=t+x^2$, так что $t=y^2$, то Z станет функцией t и x, то есть функцией y^2 и x. Стало быть, во всех случаях, когда Z будет рациональной функцией y^2 и x, прямая линия CA будет диаметром кривой,— а это и есть найденное нами выше свойство кривых, обладающих одним диаметром.

349. Но искомая кривая линия должна иметь два диаметра AB и EF; следовательно, CB будет диаметром того же характера, что и AC. Поэтому, если прямую линию $CM=z$ отнести к диаметру CB, то в силу того, что угол $BCM=\pi-s$, необходимо, чтобы z было такого рода функцией s, которая не изменится, если вместо s поставить $\pi-s$. Такого рода функцией был бы конечно $\sin s$, так как $\sin s=\sin(\pi-s)$, но при этой подстановке не выполняется поставленное выше условие. Следовательно, необходимо найти такого рода выражение, которое находится в одинаковом отношении к углам s, $-s$ и $\pi-s$. Подобным выражением является $\cos 2s$, ибо

$$\cos 2s=\cos(-2s)=\cos 2(\pi-s).$$

Таким образом, уравнение $Z=0$ будет уравнением для кривой, имеющей два диаметра AB и EF, если Z будет рациональной функцией z и $\cos 2s$. Но $\cos 2s=\frac{x^2-y^2}{z^2}$. Следовательно, z должен быть функцией величин x^2+y^2 и x^2-y^2, или же величин x^2 и y^2, как мы это уже нашли выше.

350. Перейдем теперь (рис. 71) к рассмотрению кривых, обладающих тремя диаметрами: AB, EF и GH. Эти диаметры будут взаимно пересекаться в одной и той же точке C под углами ACE, ECG, GCB, равными $60°=\pi/3$ и если их брать попеременно, то диаметры CA, CG, CF будут иметь одинаковые свойства. Поэтому если положить $CM=z$

и угол $ACM = s$, то, поскольку $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, уравнение кривой $Z = 0$ должно быть таким, чтобы Z было рациональной функцией z и некоторой величины w, которая должна зависеть от s таким образом, что она останется неизменной, если вместо s поставить $-s$ или же $\frac{2}{3}\pi - s$. Таким образом, будет $w = \cos 3s$, ибо

$$\cos 3s = \cos(-3s) = \cos(2\pi - 3s).$$

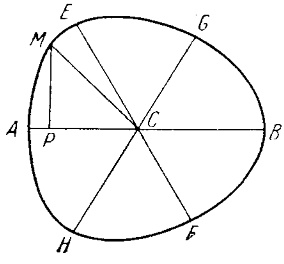

Рис. 71.

А если положить координаты $CP = x$, $PM = y$, то получится

$$\cos 3s = \frac{x^3 - 3xy^2}{z^3};$$

стало быть, Z должно быть рациональной функцией от $x^2 + y^2$ и $x^3 - 3xy^2$.

351. Следовательно, если положить $x^2 + y^2 = t$ и $x^3 - 3xy^2 = u$, то общее уравнение для кривых, имеющих три диаметра, будет таково:

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta t^2 + \varepsilon tu + \zeta u^2 + \eta t^3 + \text{ и т. д.},$$

а это последнее дает следующее уравнение между x и y:

$$0 = \alpha + \beta(x^2 + y^2) + \gamma x(x^2 - 3y^2) + \delta(x^2 + y^2)^2 + \text{ и т. д.}$$

Так как, стало быть, уравнение $0 = \alpha + \beta x^2 + \beta y^2$ является уравнением для круга, который, обладая бесконечно многими диаметрами, удовлетворяет и задаче о трех диаметрах, то простейшей кривой, имеющей три диаметра, будет линия третьего порядка, выражаемая следующим уравнением:

$$x^3 - 3xy^2 = ax^2 + ay^2 + b^3;$$

она имеет три асимптоты, составляющие равносторонний треугольник, в центре которого находится точка C. Все эти асимптоты относятся к виду $u = \frac{A}{t^2}$. Стало быть, эти кривые относятся к пятому виду, согласно тому перечню, который был нами приведен выше.

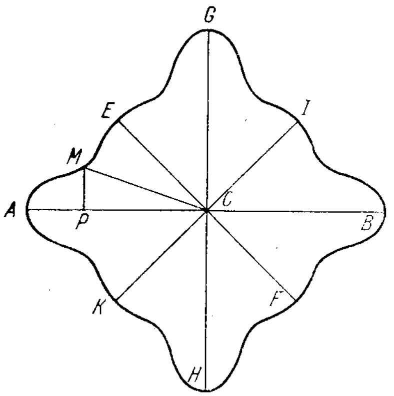

Рис. 72.

352. Если кривая (рис. 72) имеет четыре диаметра: AB, EF, GH и IK, которые взаимно пересекаются в точке C под полупрямым углом $= \frac{1}{4}\pi$, то диаметры CA, CG, CB и CH будут одинаковой природы. Стало быть, положив $CM = z$ и угол $ACM = s$, определим некую функцию от s, которая не изменяется, если вместо s подставить $-s$ или $\frac{2}{4}\pi - s$. Такой функцией является $\cos 4s$. Следовательно, если Z будет функцией z и $\cos 4s$, или, что то же, функцией от $x^2 + y^2$ и $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, то уравнение $Z = 0$ даст кривую, обладающую четырьмя диаметрами. Следовательно, Z будет функцией t и u, если положить

$$t = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Но положим $v=t^2-u$; тогда Z будет функцией t и v, т. е. функцией от x^2+y^2 и x^2y^2. Или же Z можно определить таким образом, что Z будет функцией следующих двух количеств: x^2+y^2 и x^4+y^4.

353. Для того чтобы кривая, выражаемая уравнением $Z=0$, имела пять диаметров, необходимо, чтобы Z было функцией z и $\cos 5s$. Следовательно, если взять прямоугольные координаты x и y, то вследствие того, что

$$\cos 5s = \frac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{z^5},$$

Z должно быть рациональной функцией выражений

$$x^2+y^2 \quad \text{и} \quad x^5-10x^3y^2+5xy^4.$$

Стало быть, простейшей кривой (помимо окружности), которая имеет пять диаметров, является линия пятого порядка и она выражается следующим уравнением:

$$x^5-10x^3y^2+5xy^4=a(x^2+y^2)^2+b(x^2+y^2)+c.$$

Стало быть, эта кривая, так как все множители высшего члена являются действительными, будет иметь пять асимптот, которые, пересекаясь, образуют правильный пятиугольник, посередине которого находится центр C.

354. Из вышеизложенного уже ясно, что вообще кривая линия выражаемая уравнением $Z=0$, должна иметь n диаметров, из которых каждые два соседних образуют угол $=\frac{\pi}{n}$, если Z является функцией z и $\cos ns$, или же, при прямоугольных координатах, некоторой рациональной функцией выражений x^2+y^2 и

$$x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\text{и т. д.}$$

Или же кривую линию, имеющую n диаметров, дает следующее уравнение:

$$0=\alpha+\beta t+\gamma u+\delta t^2+\varepsilon tu+\zeta u^2+\eta t^3+\theta t^2+\text{и т. д.},$$

если положить $t=x^2+y^2$ и

$$u=x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\text{и т. д.}$$

Итак, из последнего выражения можно определить кривые линии, которые обладают каким угодно количеством диаметров, взаимно пересекающихся под одинаковыми углами в одной и той же точке C. Вместе с тем, конечно, эти уравнения содержат в себе решительно все алгебраические кривые, у которых имеется заданное число диаметров.

355. Те виды кривых линий, которые обладают несколькими диаметрами, содержат в себе вдвое большее количество подобных и равных частей. Так, например, кривая (рис. 70, стр. 184), имеющая два диаметра, содержит в себе четыре подобных и равных части AE, BE, AF и BF. А кривая (рис. 71, стр. 185), имеющая три диаметра, содержит в себе шесть подобных и равных частей AE, GE, GB, FB, FH и AH, тогда как кривая, имеющая четыре диаметра (рис. 72), содержит в себе восемь

подобных и равных частей: AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF и HK. В соответствии с этим число равных частей всегда вдвое больше числа диаметров. Но выше [§ 341] мы видели, что существуют кривые, которые имеют две подобные части, но не имеют диаметра, и точно так же найдется много кривых, имеющих подобные и равные части и все-таки не обладающих диаметрами.

356. Начнем (рис. 73) с двух равных друг другу частей, AME и BKF, расположенных в противоположных областях, — случай, который мы уже рассматривали раньше. Если кривая должна иметь лишь две равные части, то последние необходимо должны быть расположены противоположно друг другу, что станет яснее, если мы рассмотрим большее количество равных частей. Итак, положим, как и раньше, $CM = z$ и угол $ACM = s$; тогда очевидно, что углам s и $\pi + s$ должно соответствовать одно и то же значение z; ибо если взять угол $ACM = \pi + s$, то получится $z = CK$; но должно быть $CK = CM$. Стало быть, требуется найти выражение, общее для углов s и $\pi + s$. Подобным выражением будет $\operatorname{tg} s$, ибо $\operatorname{tg} s = \operatorname{tg}(\pi + s)$. Стало быть, уравнение $Z = 0$ будет подходить для такой кривой, какую мы ищем, если Z будет функцией z и $\operatorname{tg} s$, т. е. функцией $x^2 + y^2$ и $\frac{x}{y}$. Положим $\frac{x}{y} = t$; тогда будет $x^2 + y^2 = y^2(1 + t^2)$. Стало быть, Z должно быть функцией t и $y^2(1 + t^2)$, т. е. t и y^2, в результате чего получаются те же уравнения, которые мы нашли выше.

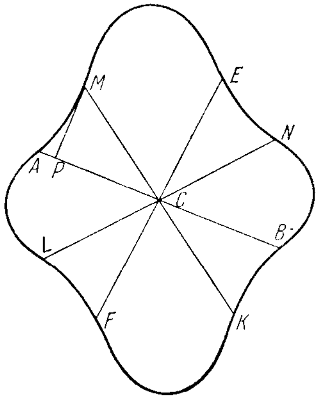

Рис. 73.

357. Но чтобы избежать дробей, из-за которых обременительны тангенсы, мы можем выполнить ту же задачу с помощью синуса и косинуса. Действительно, так как

$$\sin 2s = \sin 2(\pi + s) \quad \text{и} \quad \cos 2s = \cos 2(\pi + s),$$

то мы получим искомое, если примем в качестве Z какую-либо рациональную функцию от таких трех выражений: Z, $\sin 2s$ и $\cos 2s$, т. е. от $x^2 + y^2$, $2xy$ и $x^2 - y^2$. Здесь следует отметить, что если одно из выражений $\sin 2s$ и $\cos 2x$ опустить, то кривая будет к тому же иметь диаметр. Стало быть, решение задачи сводится к тому, чтобы z взять в виде рациональной функции x^2, y^2 и xy, в результате чего получается уравнение следующего вида:

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + \iota y^4 + \text{и т. д.}$$

Если же отсутствуют члены, в состав которых не входит x, то можно все уравнение разделить на x, и тогда получится

$$0 = \beta x + \gamma y + \varepsilon x^3 + \zeta x^2 y + \eta xy^2 + \theta y^3 + \varkappa x^5 + \text{и т. д.}$$

Последние два уравнения — те же, которые мы нашли выше.

358. Пусть теперь требуется найти кривую (рис. 74), которая содержит в себе лишь три подобные и равные части AM, BN и DL. Стало

быть, кривая будет такова, что если из средней точки C провести три прямые CM, CN и CL под равными углами, то они всегда будут между собою равны. Следовательно, если положить, что угол $ACM = s$ и прямая $CM = z$, то прямая z определяется через s так, что трем углам

$$s,\quad \frac{2}{3}\pi + s \quad \text{и} \quad \frac{4}{3}\pi + s$$

будет соответствовать одно и то же значение z, потому что ведь $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Общими же для этих трех углов будут выражения $\sin 3s$ и $\cos 3s$. Поэтому, если Z будет рациональной функцией следующих трех количеств: $x^2 + y^2$, $3x^2y - y^3$ и $x^3 - 3xy^2$, то уравнение $Z = 0$ даст все искомые кривые. Стало быть, получится общее уравнение такого вида:

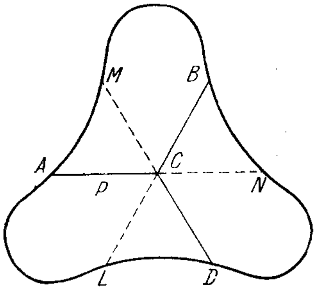

Рис. 74.

$$0 = \alpha + \beta(x^2 + y^2) + \gamma(3x^2y - y^3) + \delta(x^3 - 3xy^2) + \varepsilon(x^2 + y^2)^2 +$$
$$+ \zeta(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) + \eta(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) + \text{ и т. д.}$$

Итак, линии третьего порядка, обладающие указанным свойством, содержатся в следующем уравнении:

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \beta y^2 + \delta x^3 + 3\gamma x^2 y - 3\delta xy^2 - \gamma y^3.$$

359. Пусть кривая (рис. 73) должна иметь четыре равные друг другу части AM, EN, BK и FL, так что если из средней точки C провести четыре какие-нибудь прямые CM, CN, CK и CL под равными углами, то они окажутся равными друг другу; положим угол $AMC = s$ и прямую $CM = z$. А ввиду того, что

$$\text{угол } MCN = NCK = KCL = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi,$$

прямую z следует определить через угол s таким образом, чтобы углам

$$s,\quad \frac{1}{2}\pi + s,\quad \pi + s,\quad \frac{3}{2}\pi + s$$

соответствовало бы одно и то же значение. А этим свойством обладают выражения $\sin 4s$ и $\cos 4s$. Стало быть, уравнение $Z = 0$ даст кривую, обладающую такими четырьмя равными частями, если Z будет какой-нибудь рациональной функцией следующих трех количеств:

$$x^2 + y^2, \qquad 4x^3y - 4xy^3 \qquad \text{и} \qquad x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Следовательно, общим уравнением для подобного рода кривых будет

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \beta y^2 + \gamma x^4 + \delta x^3 y + \varepsilon x^2 y^2 - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \text{ и т. д.}$$

360. Подобным же образом оказывается, что если требуется найти не имеющую диаметров кривую, которая, однако, содержит в себе пять равных и подобных частей, то Z в уравнении $Z = 0$ должно быть рациональной функцией следующих трех количеств:

$$x^2y^2, \qquad 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \qquad \text{и } x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4.$$

Если же число одинаковых частей должно быть $= n$, то Z должно быть рациональной функцией следующих трех выражений:

$$x^2+y^2,$$

$$nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^{n-5}y^5-\text{ и т. д.}$$

и

$$x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{n-4}y^4-\text{ и т. д.}$$

Если же одно из последних двух выражений не входит в уравнение, то кривая будет иметь столько диаметров, сколько единиц содержится в числе n.

361. Этот двойной перечень кривых, имеющих некоторое количество равных частей, а именно кривых, обладающих диаметрами и лишенных диаметров, охватывает решительно все алгебраические линии, которые содержат две или большее число подобных и равных частей. Для того чтобы пояснить сказанное, допустим, что непрерывная кривая (рис. 75) содержит в себе две подобные и равные части OAa, OBb [1]). Соединим A и B линией AB и на последней, как на основании, построим равнобедренный треугольник ABC, угол которого C будет равен углу O. Так как OAC и OBC равны между собою, то и части кривой CAa и CBb будут подобны друг другу и равны, а также, в силу закона непрерывности, если взять углы BCD, DCE и т. д., из которых каждый в отдельности равен углу ACB и $CD=CE=CA=CB$, то кривая будет иметь сверх этого части Dd, Ee и т. д., пдобные и равные частям Aa, Bb. Таким образом, если только отношение угла ACB к $360°$ не будет иррациональным, число равных частей будет конечным, а в противном случае бесконечным и, стало быть, рассматриваемая кривая не будет принадлежать к алгебраическим. Таким образом, такая кривая всегда относится к числу тех ранее рассмотренных нами линий, у которых нет диаметров.

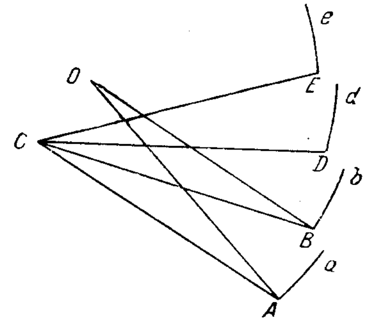

Рис. 75.

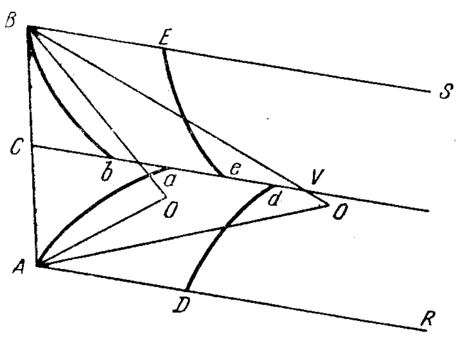

Рис. 76.

362. Если же (рис. 76) две подобные и равные части идут в противоположных направлениях по отношению к прямым линиям AO и BO, так что часть OAa [2]) подобна и равна части OBb, следует с обеих сторон

[1]) Т. е. дуга Aa = дуге Bb и угол OAa = углу OBb, но, вообще говоря, OA отличается по длине от OB. [*А. Ш.*]

[2]) В первом издании AOa. [*А. Ш.*]

провести прямые линии AR и BS, чтобы получилось

$$\text{угол } OAR = \text{углу } OBS = \frac{1}{2} \text{ угла } AOB;$$

и тогда прямые линии AR и BS будут параллельны друг другу. Проведем линию AB и через середину ее C проведем линию CV, параллельную линиям AR и BS; тогда части aA и bB будут подобны и равны друг другу по отношению к прямой линии CV. Следовательно, если только ba не будет $=0$, то при продвижении из b в a дуге Bb соответствует с другой стороны подобная и равная ей дуга aA, а этой последней при дальнейшем продвижении от a до e на расстоянии $ae=ba$ будет соответствовать с другой стороны подобная ей и равная дуга eE, а этой последней дальше дуга dD, так что эта кривая линия будет иметь бесконечное количество подобных и равных частей, которые будут расположены с обеих сторон около прямой CV. Значит, такого рода кривая не может быть алгебраической линией.

363. Так обстоит дело, когда прямая AB является наклонной к параллельным AR и BS или (что то же) когда в треугольнике AOB стороны AO и BO не равны. Если же будет $AO=BO$, тогда прямая AB будет перпендикулярна к параллельным AR и BS, а также к CV, которая вместе с тем будет проходить через O. Стало быть, в этом случае точки a и b совпадут. А так как отрезки aA и bB не только будут равны и подобны, но будут также располагаться одинаково по обеим сторонам прямой CV, то эта прямая CV будет диаметром кривой. Эти случаи относятся к рассмотренным нами ранее кривым, имеющим диаметр. Поэтому к числу случаев, рассмотренных в настоящей главе, можно отнести решительно все алгебраические кривые, у которых имеется две или большее число подобных и равных частей.

ГЛАВА XVI

О НАХОЖДЕНИИ КРИВЫХ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ОРДИНАТ

364. Пусть P и Q — две какие-нибудь рациональные функции абсциссы x, и пусть природа кривой выражается уравнением $y^2-Py+Q=0$. Отсюда, стало быть, следует, что каждой абсциссе x либо не соответствует ни одна ордината, либо соответствуют две; сумма же этих двух ординат $=P$, а произведение $=Q$. Следовательно, если P будет постоянным количеством, то сумма обеих ординат, соответствующих отдельным абсциссам, будет постоянной и, значит, кривая будет иметь диаметр. То же самое будет и в том случае, когда $P=a+nx$; ибо тогда прямая, содержащаяся в уравнении $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}nx$, будет диаметром, если взять это наименование в более широком смысле, так что не исключается и косоугольность координат. Если же Q представляет собою постоянное количество, то прямоугольник, составленный из обеих ординат, будет повсюду постоянным; стало быть, ось нигде не может быть пересечена кривой. Но если будет $Q=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ и если это выражение будет иметь два действительных множителя, то кривая будет пересекать ось в двух точках и Q будет кратным прямоугольника, составленного из частей оси, и, стало быть, прямоугольник из ординат будет находиться в постоянном отношении к прямоугольнику из частей оси.

365. Таким образом, те свойства, которые, как мы видели выше, присущи коническим сечениям, встречаются у бесчисленных других кривых линий [60]. Так, например, постоянство величины прямоугольников, составленных из двух ординат, соответствующих одной и той же абсциссе, которое, как мы видели, свойственно гиперболе, отнесенной к асимптотам, является у нее общим со всеми кривыми, содержащимися в уравнении $y^2-Py\pm a^2=0$. Далее, если взять в качестве оси прямую EF (рис. 19, стр. 53), пересекающую кривую в двух точках E и F, то так как в конических сечениях прямоугольник $PM\cdot PN$ находится в постоянном отношении к прямоугольнику $PE\cdot PF$, то это свойство является у конических сечений общим со всеми кривыми, содержащимися в уравнении

$$y^2-Py+ax-nx^2=0.$$

Мы имеем ведь $PM\cdot PN=PE\cdot PF$ или $pm\cdot pn=Ep\cdot pF$, если $y^2-Py=ax-x^2$. Таким образом, это свойство, которое, как известно из элементов, присуще окружности, является у последней не только общим с бесчисленными кривыми высших порядков, но присуще и остальным коническим сечениям. Действительно, пусть $P=b+nx$; тогда уравнение

$$y^2-nxy+x^2=ax+by,$$

которое представляет собою уравнение для окружности, когда $n=0$ и угол EPM прямой, охватывает также эллипс, когда n^2 меньше 4, гиперболу, когда n^2 больше 4, а также параболу, когда $n^2=4$.

366. Отсюда мы заключаем, что если в любом коническом сечении $AEBF$, осями или главными диаметрами которого являются AB, EF, провести две какие-либо прямые pq и mn (рис. 77), которые наклонены к главным осям под полупрямым углом, то они пересекутся в точке таким образом, что будет $mh \cdot nh=ph \cdot qh$. Это, конечно, очевидно на основании известных свойств: действительно, если через центр C провести прямые PQ и MN под полупрямыми углами к главным осям, то они будут между собою равны и, стало быть, будет $MC \cdot NC=PC \cdot QC \cdot A$ так как все прямые, им параллельные, пересекают друг друга согласно тому же закону, то будет также $mh \cdot nh=ph \cdot qh$. Поэтому понятно также, что если только провести прямые MN и PQ так, чтобы они были одинаково наклонены к одной и той же главной оси, то есть чтобы было $PCA=NCA$, то, поскольку $CP=CN$, все параллельные им прямые будут пересекаться таким образом, что прямоугольники, составленные из их частей, будут между собою равны, то есть будет $mh \cdot hn=ph \cdot hq$.

367. Перейдем теперь к другим вопросам, которые касаются двух ординат, соответствующих каждой абсциссе согласно уравнению y^2-Py+ $+Q=0$. Пусть P (рис. 78) представляет собою абсциссу $=x$, которой соответствуют две ординаты PM и PN. Прежде всего мы хотим найти все кривые, которые

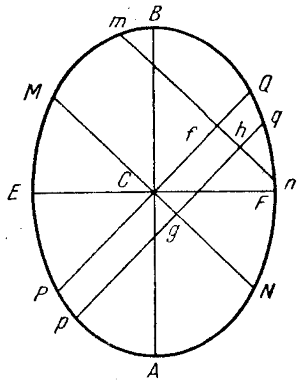

Рис. 77.

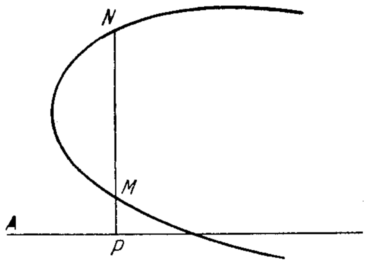

Рис. 78.

обладают тем свойством, что PM^2+PN^2 является постоянным количеством $=a^2$. Так как

$$PM+PN=P \quad \text{и} \quad PM \cdot PN=Q,$$

то будет

$$PM^2+PN^2=P^2-2Q$$

и мы удовлетворим требованию, если будет

$$P^2-2Q=a^2, \qquad \text{то есть} \qquad Q=\frac{P^2-a^2}{2};$$

отсюда для искомых кривых получится следующее уравнение:

$$y^2 - Py + \frac{P^2 - a^2}{2} = 0.$$

Если положить $P = 2nx$, то получится коническое сечение, обладающее требуемым свойством:

$$y^2 - 2nxy + 2n^2x^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0;$$

это — уравнение эллипса, причем абсциссы отсчитываются от центра.

368. Отсюда вытекает следующее не лишенное изящества свойство эллипсов. Если (рис. 79) описать около эллипса на двух сопряженных диаметрах AB и EF параллелограмм $IGHK$, стороны которого будут касаться эллипса в точках A, B, E, F, то диагонали этого параллелограмма GK и HI пересекут все хорды MN, параллельные одному из диаметров EF, в точках P и p таким образом, что сумма квадратов $PM^2 + PN^2$ или $pM^2 + pN^2$ будет всегда постоянной, а именно, она будет равна $2CE^2$. Если провести подобным же образом хорду RS, параллельную другому диаметру AB, то будет

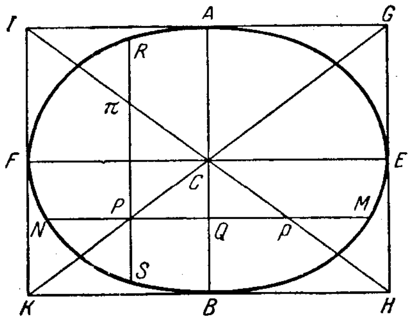

Рис. 79.

$$PR^2 + PS^2 = \pi R^2 + \pi S^2 = 2CA^2.$$

Ибо если положить $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, то будет

$$a^2u^2 + b^2t^2 = a^2b^2.$$

Но $a : b = CQ\,(t) : PQ$, и CP находится к CQ в определенном отношении, скажем как $m : 1$. Поэтому, если положить $CP = x$, $PM = y$, то будет

$$x = mt \quad \text{и} \quad y = u + \frac{bt}{a}$$

или

$$t = \frac{x}{m} \quad \text{и} \quad u = y - \frac{bx}{ma}.$$

После подстановки этих значений получается уравнение

$$a^2y^2 - \frac{2abxy}{m} + \frac{2b^2x^2}{m^2} = a^2b^2.$$

Пусть $\frac{b}{ma} = n$; тогда

$$y^2 - 2nxy + 2n^2x^2 = b^2,$$

а это — ранее найденное уравнение, которое показывает, что $PM^2 + PN^2$ имеет постоянную величину.

369. Пусть теперь требуется найти кривые, у которых сумма кубов $PM^3 + PN^3$ всегда есть постоянное количество (рис. 78, стр. 192). Так как $PM + PN = P$, то будет

$$PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ;$$

поэтому, если положить $PM^3+PN^3=a^3$, то будет $Q=\frac{P^3-a^3}{3P}$ и, стало быть, для этих кривых общим уравнением будет

$$y^2-Py+\frac{1}{3}P^2-\frac{a^3}{3P}=0,$$

в котором в качестве P можно взять любую рациональную функцию от x. Стало быть, простейшей линией, обладающей таким свойством, будет линия третьего порядка, которая, если положить $P=3nx$ и $a=3nb$, выразится следующим уравнением:

$$xy^2-3nx^2y+3n^2x^3-3n^2b^3=0,$$

и она, согласно ранее сделанному перечню, относится ко второму виду.

370. Равным образом, если требуется, чтобы PM^4+PN^4 было постоянным, то, так как

$$PM^4+PN^4=P^4-4P^2Q+2Q^2,$$

количество Q следует определить через P таким образом, чтобы было

$$P^4-4P^2Q+2Q^2=a^4, \quad \text{то есть} \quad Q=P^2+\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4}.$$

А так как и P и Q должны быть рациональными, значит, однозначными функциями x, то, чтобы y не могло иметь больше двух значений при любой абсциссе x, количество $\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4}$ должно быть рациональным. Но поскольку это невозможно[1]), то функция Q всегда будет двузначной и, стало быть, ордината y будет функцией четырехзначной. Из уравнения $y^2-Py+Q=0$ получается

$$y=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{-\frac{3}{4}P^2\pm\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4}},$$

откуда ясно, что ордината y не может быть действительной, если $\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4}$ не будет взят с положительным знаком. Таким образом, хотя функция Q двузначна, ордината y никогда не будет иметь больше чем два значения, сумма квадратов которых будет постоянной, как этого требует природа данного вопроса.

371. Но если дальше искать такого рода кривую, чтобы пятые степени двух значений y, соответствующих каждой абсциссе x, давали постоянную сумму, т. е. чтобы было $PM^5+PN^5=a^5$, то должно иметь место

$$P^5-5P^3Q+PQ^2=a^5.$$

[1]) Эта замечательная теорема, а именно, что уравнение $f(x^4)+g(x^4)=h^2(x)$ не может быть разрешено с помощью целых рациональных функций, доказывается тем же методом, как и теорема Ферма, что уравнение $a^4+b^4=c^2$, где a, b, c — целые числа $\neq 0$, является невозможным. См. Leonhardi Euleri, Opera omnia т. 1, 2, стр. 42. Другое доказательство этой теоремы вытекает из теории аналитических функций. А именно, $\sqrt{z^4+1}$ представляет собою функцию, род которой по Риману $=1$, так что ее невозможно сделать рациональной с помощью подстановки $z=r(u)$, где r является рациональной функцией u. [*А. Ш.*]

Стало быть, поскольку из уравнения для кривой $y^2-Py+Q=0$ получается $Q=-y^2+Py$, будем иметь

$$P^5-5P^4y+10P^3y^2-10P^2y^3+5Py^4=a^5,$$

или

$$(P-y)^5+y^5=a^5.$$

Тем же путем будет найдено, если должно быть $PM^6+PN^6=a^6$, следующее уравнение:

$$(P-y)^6+y^6=a^6.$$

И вообще, если надо найти кривую, для которой должно иметь место $PM^n+PN^n=a^n$, то получается уравнение

$$(P-y)^n+y^n=a^n,$$

где в качестве P можно взять по желанию какую угодно однозначную функцию от x. А смысл этого уравнения очевиден. Действительно, так как сумма обеих ординат $=P$, то если одна из них $=y$, то другая будет $=P-y$, откуда сразу получается

$$(P-y)^n+y^n=a^n.$$

372. Если же вместо Q исключать P, подставляя с этой целью $P=y^2+Q$ в уравнения, в которых содержится соответствие между P и Q, то при $PM^n+PN^n=a^n$ получается следующее уравнение:

$$y^n+\frac{Q^n}{y^n}=a^n.$$

Действительно, так как произведение ординат $=Q$, то если одну из ординат положить $=y$, другая будет $=\frac{Q}{y}$, откуда сразу вытекает найденное уравнение. Стало быть, для кривых, в которых $PM^n+PN^n=a^n$, мы нашли два общих уравнения:

$$\text{одно } (P-y)^n+y^n=a^n, \quad \text{и другое } y^n+\frac{Q^n}{y^n}=a^n;$$

из второго уравнения следует, что

$$y^{2n}=a^ny^n-Q^n \quad \text{и} \quad y^n=\frac{1}{2}a^n\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^{2n}-Q^n},$$

так что

$$y=\sqrt[n]{\frac{1}{2}a^n\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^{2n}-Q^n}};$$

последнее представляет собою только двузначную функцию[1]) и при любой абсциссе не даст больше двух ординат, если только Q^n является рациональной, значит, однозначной функцией x. А первое уравнение $y^n+(P-y)^n=a^n$ обладает тем преимуществом, что число измерений у него меньше.

373. Эти уравнения разрешают вопрос не только тогда, когда n является целым положительным числом, но и в том случае, когда оно является отрицательным или дробным.

[1]) Или же, когда n является четным числом, четырехзначную. [*А. Ш.*]

Если должно быть	то получится уравнение:
$\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}=\frac{1}{a}$	$aP=Py-y^2$ или $aQ+ay^2=Qy$
$\frac{1}{PM^2}+\frac{1}{PN^2}=\frac{1}{a^2}$	$a^2y^2+a^2(P-y)^2=y^2(P-y)^2$ или $a^2Q^2+a^2y^4=Q^2y^2$
$\frac{1}{PM^3}+\frac{1}{PN^3}=\frac{1}{a^3}$	$a^3y^3+a^3(P-y)^3=y^3(P-y)^3$ или $a^3Q^3+a^3y^6=Q^3y^3$

и т. д.

Что же касается дробных показателей, то дело обстоит следующим образом.

Если должно быть	то получится уравнение
$\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$	$\sqrt{y}+\sqrt{P-y}=\sqrt{a}$ или $y=\sqrt{ay}+\sqrt{Q}$, что после приведения к рациональному виду дает $y^2-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$ или $y^2-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$
$\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{P-y}=\sqrt[3]{a}$ или $y^2-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$ либо $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$ или $y^2-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$

и т. д.

Стало быть, указанным выше путем можно все алгебраические кривые, в которых повсюду

$$PM^n+PN^n=a^n,$$

охватить единым общим уравнением, будет ли n целым числом, положительным или отрицательным или дробным.

374. То, что выше было изложено относительно двух ординат, соответствующих одной и той же абсциссе x, можно, пользуясь тем же методом, перенести и на три ординаты, соответствующие одной и той же абсциссе. Общим уравнением для кривых, которые пересекаются каждой ординатой в трех точках, является следующее уравнение:

$$y^3 - Py^3 + Qy - R = 0,$$

где буквы P, Q и R обозначают какие-нибудь однозначные функции от x. Пусть p, q, r суть три ординаты, соответствующие абсциссе x, из которых, конечно, одна всегда действительна, но мы рассмотрим здесь в основном те места кривой линии, в которых все три ординаты будут действительными. В силу природы уравнений будем иметь

$$P = p + q + r, \quad Q = pq + pr + qr \text{ и } R = pqr.$$

Стало быть, если требуется найти кривую линию, для которой либо $p + q + r$, либо $pq + pr + qr$, либо pqr является постоянным количеством, то не надо ничего иного делать, как приравнять постоянному количеству либо P, либо Q, либо R, оставляя остальные два произвольными.

375. Тем же путем можно найти и кривые линии, у которых $p^n + q^n + r^n$ будет повсюду постоянным количеством; ибо согласно тому, что было изложено в предыдущей книге [61],

$$\begin{aligned}
p + q + r &= P,\\
p^2 + q^2 + r^2 &= P^2 - 2Q,\\
p^3 + q^3 + r^3 &= P^3 - 3PQ + 3R,\\
p^4 + q^4 + r^4 &= P^4 - 4P^2Q + 2Q^2 + 4PR,\\
p^5 + q^5 + r^5 &= P^5 - 5P^3Q + 5PQ + 5P^2R - 5QR
\end{aligned}$$

и т. д.

Затем, если n является отрицательным числом, следует положить $z = \dfrac{1}{y}$; тогда будет

$$z^3 - \frac{Q^2}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0,$$

и тремя корнями этого уравнения являются величины $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{q}$, $\dfrac{1}{r}$. Отсюда аналогичным путем получится

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{Q}{R},\\
\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{Q^2 - 2PR}{R^2},\\
\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} &= \frac{Q^3 - 3PQR + 3R^2}{R^3},\\
\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} &= \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QR^2 + 2P^2R^2}{R^4}
\end{aligned}$$

и т. д.

Стало быть, такого рода выражение, будучи приравнено постоянному количеству, даст удобное соотношение между функциями P, Q и R. И если с помощью этого уравнения мы исключим из уравнения $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ одну из функций P, Q или R, то получим уравнение для искомой кривой. Так, если требуется найти кривую, для которой $p^3+q^3+r^3=a^3$, то получится $P^3-3PQ+3R=a^3$ и в силу $R=y^3-Py^2+Qy$ будем иметь уравнение

$$3y^3-3Py^2+3Qy+P^3-3PQ=a^3$$

для кривых, удовлетворяющих поставленному требованию.

376. Таким образом, будет ли n положительным или отрицательным целым числом, мы легко получаем решение уравнения с помощью выведенных формул. Но бо́льшая трудность возникает в том случае, когда n является дробным числом. Пусть предложено найти кривую линию, в которой

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=\sqrt{a}.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат; тогда, поскольку $p+q+r=P$, мы получим

$$P+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}=a$$

или

$$\frac{a-P}{2}=\sqrt{pq}+\sqrt{pr}+\sqrt{qr}.$$

Возведем снова обе части в квадрат; так как $pq+pr+qr=Q$, то будет

$$\frac{(a-P)^2}{4}=Q+2\sqrt{p^2qr}+2\sqrt{pq^2r}+2\sqrt{pqr^2}=$$

$$=Q+2(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\sqrt{pqr}=2\sqrt{aR}+Q,$$

откуда получается

$$(a-P)^2=4Q+8\sqrt{aR},$$

то есть

$$Q=\frac{(a-P)^2}{4}-2\sqrt{aR}.$$

Стало быть, искомые кривые будут содержаться в следующем уравнении:

$$y^3-Py^2+\left(\frac{1}{4}(a-P)^2-2\sqrt{aR}\right)y-R=0,$$

то есть (если освободиться от иррациональности, так как

$$R=\frac{(a^2-2aP+P^2-4Q)^2}{64a}\Big),$$

в уравнении

$$y^3-Py^2+Qy-\frac{(a^2-2aP+P^2-4Q)^2}{64a}=0.$$

377. Однако такой процесс становится весьма тягостным, когда заданы корни более высоких степеней. В этих случаях надо, стало быть, пойти иным путем, который можно усмотреть из нижеприведенного примера. Итак, пусть требуется найти кривую линию, для которой

$$\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{r}=\sqrt[3]{a}.$$

Положим

$$\sqrt[3]{pq}+\sqrt{pr}+\sqrt[3]{qr}=v$$

и, так как $\sqrt[3]{pqr}=\sqrt[3]{R}$, будем иметь

$$\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{r^2}=\sqrt[3]{a^2}-2v$$

и

$$p+q+r=a-3v\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{R}=P.$$

Затем

$$\sqrt[3]{p^2q^2}+\sqrt[3]{p^2r^2}+\sqrt[3]{q^2r^2}=v^2-2\sqrt[3]{aR}$$

и

$$pq+pr+qr=Q=v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt{R^2}.$$

После того, как для P и Q будут найдены удобные значения, полагая v равным некоторой функции x, получим для искомых кривых следующее уравнение:

$$y^3-(a-3v\sqrt{a}+3\sqrt[3]{R})\,y^2+(v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt[3]{R^2})\,y-R=0.$$

378. Тем не менее, несмотря на указанные трудности, можно добиться общего решения этого уравнения. Действительно, так как в уравнении $y^3-Py^2+Qy-R=0$ функция y обозначает три ординаты: p, q и r, положим $p=y$, и тогда будет

$$P=y+q+r \quad \text{и} \quad Q=qy+ry+qr,$$

или

$$q+r=P-y \quad \text{и} \quad qr=Q-y\,(q+r)=Q-Py+y^2.$$

Отсюда получается

$$q-r=\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}$$

и, стало быть,

$$q=\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}$$

и

$$r=\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}.$$

Стало быть, если требуется найти кривую, для которой $p^n+q^n+r^n=a^n$, то этому требованию удовлетворяет уравнение

$$y^n+\left[\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}\right]^n+$$
$$+\left[\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}\right]^n=a^n,$$

которое заодно дает ответ на вопрос, будет n целым числом или дробным [62].

379. Пользуясь тем же методом, можно разрешить бесчисленное множество других вопросов, касающихся положения указанных трех ординат. Так, например, можно для a^n взять какую-нибудь функцию x; затем, конечно, кроме суммы каких-нибудь степеней можно предложить другие функции p, q и r, если только эти величины представлены одинаково, так что их взаимное перемещение не вызывает никакого изменения. Так, например, упомянутые выше три ординаты p, q и r, соответствующие одной и той же абсциссе, можно определить таким

образом, чтобы составленный из них треугольник имел постоянную площадь. Действительно, площадь этого треугольника будет равна

$$\frac{1}{4}\sqrt{2p^2q^2+2p^2r^2+2q^2r^2-p^4-q^4-r^4};$$

положим ее равной a^2. Так как, стало быть,

$$p^4+q^4+r^4=P^4-4P^2Q+4PR+2Q^2$$

и

$$p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2=Q^2-2PR,$$

то будет

$$16a^4=4P^2Q-8PR-P^4 \text{ и } R=\frac{1}{2}PQ-\frac{1}{8}P^3-\frac{2a^4}{P};$$

и, следовательно, получится такое уравнение:

$$y^3-Py^2+Qy-\frac{1}{2}PQ+\frac{1}{8}P^3+\frac{2a^4}{P}=0.$$

Если P берется постоянным $=2b$, то сверх того получается, что периметр всех этих треугольников является постоянным. Поэтому если взять $Q=mx^2+nbx+ka^2$, то получится линия третьего порядка, которая выражается уравнением

$$y^3+mx^2y-2by^2+nbxy-mbx^2+ka^2y-nb^2x+\frac{a^4}{b}-ka^2b+b^3=0$$

и обладает тем свойством, что, во-первых, сумма трех ординат p, q и r, соответствующих отдельным абсциссам, является постоянной, равной $2b$, а затем, конечно, что площадь треугольника, составленного из сторон p, q и r, повсюду одна и та же и равна a^2.

380. Пользуясь тем же методом, можно разрешить подобные же вопросы, касающиеся четырех или большего количества ординат, соответствующих одной и той же абсциссе. Так как эта работа не связана с какими-либо дальнейшими затруднениями, мы перейдем к другим вопросам, где речь идет о сравнении ординат, относящихся не к одной и той же абсциссе, а к различным абсциссам. Пусть, значит, дано некоторое соотношение между ординатами PM и QN (рис. 80), из которых первая соответствует абсциссе $AP=+x$, а вторая — абсциссе $AQ=-x$. Пусть $y=X$ будет уравнением для этой кривой, где X представляет собою какую-нибудь функцию x, и эта функция X дает ординату PM; если же повсюду вместо $+x$ подставить $-x$, то эта же функция X даст другую ординату QN. Стало быть, если X будет четной функцией x, скажем, $=P$, то будет $QN=PM$, а если X будет нечетной функцией x, скажем, $=Q$, то будет $QN=-PM$. А также если P и R обозначают четные функции, а Q и S — нечетные функции x и если уравнением кривой будет $y=\frac{P+Q}{R+S}$, то будем иметь

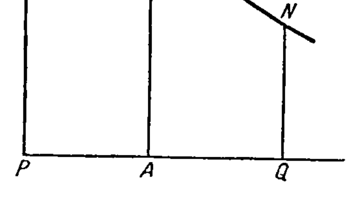

Рис. 80.

$$PM=\frac{P+Q}{R+S} \quad \text{и} \quad QN=\frac{R-Q}{R-S}.$$

381. Пусть требуется найти такую кривую, чтобы $PM+QN$ было постоянным количеством, а именно $=2AB=2a$. Тогда ясно, что этому требованию удовлетворяет уравнение $y=a+Q$, где Q является нечетной функцией x; ибо мы будем иметь $PM=a+Q$ и $QN=a-Q$ и, значит, будет $PM+$ $+QN=2a$, — как это и требуется. Следовательно, если положить $y-a=u$, то будет $u=Q$, а это будет уравнение для той же кривой, если взять прямую Bp в качестве оси и точку B в качестве начала абсцисс, так что получится $Bp=x$ и $pM=u$. А уравнение $u=Q$ указывает на то, что кривая состоит из равных частей, расположенных с одной и другой стороны вокруг центра B и чередующихся друг с другом[1]). Следовательно, если описать какую-нибудь подобного рода кривую MBN и взять в качестве оси какую-нибудь прямую PQ, то можно удовлетворить поставленному требованию, опустив на ось из центра B перпендикуляр BA и отложив с обеих сторон равные абсциссы $AP=AQ$; тогда сумма $PM-QN$ будет всегда постоянной, равной $2AB$.

382. А для кривых линий, у которых имеются две равные части, расположенные одна за другой около центра B, мы выше нашли два уравнения, которые при координатах x и u имеют следующий вид:

I

$$0=\alpha x+\beta u+\gamma x^3+\delta x^2u+\varepsilon xu^2+\zeta u^3+\eta x^5+\theta x^4u+\text{и т. д.}$$

II

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma xu+\delta u^2+\varepsilon x^4+\zeta x^3u+\eta x^2u^2+\theta xu^3+\text{и т. д.}$$

Следовательно, если в каждом из этих уравнений положить $u=y-a$, то получится два общих уравнения в координатах x и y для алгебраических кривых, удовлетворяющих поставленному требованию. Таким образом, последнему удовлетворяет, во-первых, всякая прямая, проведенная через точку B, а затем и всякое коническое сечение, имеющее центр в точке B, точно так же является решением. А так как в этом последнем случае каждой абсциссе AP и AQ соответствует двойная ордината (если только кривая линия не является гиперболой и ординаты не параллельны другой асимптоте), то мы будем иметь две пары равных ординат, дающие одну и ту же сумму.

383. Если требуется определить кривую MBN, в которой постоянной должна быть не сумма ординат PM и QN, а сумма каких-либо их степеней, то решение осуществляется подобным же путем. Действительно, пусть требуется, чтобы было $PM^n+QM^n=2a^n$; тогда ясно, что этому требованию можно удовлетворить уравнением $y^n=a^n+Q$, где Q является какой-нибудь нечетной функцией x. Действительно, мы будем иметь

$$PM^n=a^n+Q \quad \text{и} \quad QN^n=a^n-Q,$$

и, значит, $PM^n+QN^n=2a^n$. Положим $y^n-a^n=u$; тогда уравнение $u=Q$ выразит в координатах x и y природу кривой, состоящей из двух равных частей, попеременно расположенных около центра B. Следовательно, если в уравнениях, данных в предшествующем параграфе, повсюду вместо

[1]) Aequatio autem $u=0$ indicat curvam partibus aequalibus utrinque circa centrum B alternatim dispositis praeditam.

и написать $y^n - a^n$, то получатся общие уравнения для кривых, которые удовлетворяют поставленному условию.

384. Так как, стало быть, подобные вопросы не вызывают никаких затруднений, поставим вопрос о нахождении такого рода кривой MBN, что если на оси от определенной точки A отложить в обе стороны равные абсциссы AP и AQ, то прямоугольник $PM \cdot QN$, составленный из ординат, будет иметь постоянную величину, скажем, $=a^2$. Можно дать много частных решений этой задачи, и мы приведем здесь важнейшие из них раньше, чем займемся общим решением [63]. Пусть P будет четной функцией и Q нечетной функцией абсциссы $AP=x$ и положим ординату $PM=y=$ $=P+Q$; из последней, если взять x отрицательным, получится $QN=P-Q$. Следовательно, должно быть

$$PM \cdot QN = P^2 - Q^2 = a \quad \text{или} \quad P = \sqrt{a^2+Q^2},$$

а это выражение $\sqrt{a^2+Q^2}$, так как Q^2 является четной функцией x и поэтому само по себе представляет четную функцию, дает подходящее значение для P. Отсюда мы будем иметь для искомой кривой уравнение $y = Q + \sqrt{a^2+Q^2}$, взяв при этом для Q какую-нибудь нечетную функцию x.

385. Но так как знак радикала сам по себе вносит двойственность, то каждой абсциссе x будут соответствовать две ординаты, одна положительная и другая отрицательная. Так, абсциссе AP будут отвечать ординаты

$$Q+\sqrt{a^2+Q^2} \quad \text{и} \quad Q-\sqrt{a^2+Q^2},$$

а абсциссе AQ будут соответствовать ординаты

$$-Q+\sqrt{a^2+Q^2} \quad \text{и} \quad -Q-\sqrt{a^2-Q^2},$$

и, стало быть, кривая будет иметь равные части, которые попеременно расположатся вокруг точки A как около центра. Эту двойственность, вызываемую знаком, нельзя, конечно, устранить, взяв для Q какую-нибудь нечетную функцию, например $\frac{a^2}{4x} - x$, при которой a^2+Q^2 оказывается квадратом; ибо тогда получилось бы $\sqrt{a^2+Q^2} = \frac{a^2}{4x} + x$, т. е. получилась бы нечетная функция, которую нельзя подставить вместо P. Стало быть, для Q надо брать такую нечетную функцию от x, чтобы a^2+Q^2 не стало квадратом.

386. Аналогично, если положить $y=(P+Q)^n$, то получится, что $QN=(P-Q)^n$, и, значит, тогда должно было бы быть $(P^2-Q^2)^n = a^2$. Отсюда получится

$$P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2 \quad \text{и} \quad P = \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2},$$

и это количество, если только оно будет иррациональным, можно принять в качестве P. Поэтому, для кривой, удовлетворяющей поставленному требованию, получится следующее уравнение:

$$y = \left(Q + \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2}\right)^n.$$

Построить же эти кривые легко: следует описать какую-нибудь кривую, у которой имеются две подобные и равные части, расположенные попеременно вокруг центра A, и ординату этой кривой, соответствующую абсциссе $AP = x$, положить $= z$; тогда z будет нечетной функцией x и, стало быть, его можно будет подставить вместо Q. А из найденного уравнения получается

$$y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2}$$

и, стало быть,

$$Q = z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}.$$

Положим $\frac{1}{n} = m$; тогда, если в заданном уравнении между z и x повсюду подставить $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$, то получится уравнение между x и y для искомой кривой. Так как, стало быть, мы нашли два уравнения между z и x, а именно либо

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xz + \delta z^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta xz^3 + \text{и т. д.},$$

либо

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \text{и т. д.},$$

то если в этих уравнениях положить $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (делителем 2 мы пренебрегаем, так как для Q можно взять любое кратное z), то получится два общих уравнения для кривых, удовлетворяющих поставленному выше условию.

387. Пусть, кроме P, будет четной функцией также и R, а также пусть, кроме Q, будет нечетной функцией x и S; и пусть для рассматриваемых кривых получается следующее уравнение

$$y = \frac{P+Q}{R+S} = PM;$$

следовательно, будет $QN = \frac{P-Q}{R-S}$ и получится $\frac{P^2-Q^2}{R^2-S^2} = a^2$, а этому условию легко удовлетворить, положив $y = \frac{P+Q}{R-S}a$, или также приняв $y = \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n a$. Этим путем можно избежать прежнего неудобства, состоящего в том, что каждой абсциссе соответствовали две или большее число ординат, и могут быть найдены такого рода кривые, чтобы каждой абсциссе соответствовала лишь одна ордината. Тогда простейшей линией, соответствующей условию, будет линия второго порядка, содержащаяся в уравнении $y = \frac{b+x}{b-x}$, следовательно, это будет гипербола. А гипербола удовлетворяет и ранее найденному уравнению $y = Q + \sqrt{a^2 + Q^2}$, если положить $Q = nx$, ибо тогда получится $y^2 - 2nxy = a^2$. Таким образом, данную задачу можно разрешить с помощью гиперболы двояким образом.

388. Из вышесказанного ясно, что уравнение для искомой кривой линии должно быть составлено так, чтобы оно не претерпело никаких изменений, если в нем вместо x подставить $-x$ и вместо y подставить $\frac{a^2}{y}$. Подобного рода выражениями являются

$$\left(y^n+\frac{a^{2n}}{y^n}\right)P \quad \text{и} \quad \left(y^n-\frac{a^{2n}}{y^n}\right)Q,$$

если только P обозначает четную и Q—нечетную функцию x. Следовательно, если образовать уравнение, которое будет составлено из какого угодно числа подобного рода выражений, то оно будет уравнением кривой, удовлетворяющей поставленному требованию. Стало быть, если M, P, R, T и т. д. обозначают какие-нибудь четные функции x, а N, Q, S, V и т. д. — нечетные функции, то будем иметь следующее общее уравнение:

$$0=M+\left(\frac{y}{a}+\frac{a}{y}\right)P+\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{a^2}{y^2}\right)R+\left(\frac{y^3}{a^3}+\frac{a^3}{y^3}\right)T+\text{и т. д.}+$$
$$+\left(\frac{y}{a}-\frac{a}{y}\right)Q+\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{a^2}{y^2}\right)S+\left(\frac{y^3}{a^3}-\frac{a^3}{y^3}\right)V+\text{и т. д.};$$

а если это уравнение умножить на нечетную функцию x, то четные функции превратятся в нечетные, и обратно, следовательно, будет удовлетворять условию и такого рода уравнение:

$$0=N+\left(\frac{y}{a}+\frac{a}{y}\right)Q+\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{a^2}{y^2}\right)S+\left(\frac{y^3}{a^3}+\frac{a^3}{y^3}\right)V+\text{и т. д.}+$$
$$+\left(\frac{y}{a}-\frac{a}{y}\right)P+\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{a^2}{y^2}\right)R+\left(\frac{y^3}{a^3}-\frac{a^3}{y^3}\right)T+\text{и т. д.}$$

Эти уравнения, будучи освобождены от дробей, дадут следующие рациональные уравнения неопределенного порядка n:

I

$$0=a^ny^nM+a^{n-1}y^{n+1}(P+Q)+a^{n-2}y^{n+2}(R+S)+a^{n-3}y^{n+3}(T+V)+\text{и т. д.}+$$
$$+a^{n+1}y^{n-1}(P-Q)+a^{n+2}y^{n-2}(R-S)+a^{n+3}y^{n-3}(T-V)+\text{и т. д.}$$

II

$$0=a^ny^nN+a^{n-1}y^{n+1}(P+Q)+a^{n-2}y^{n+2}(R+S)+a^{n-3}y^{n+3}(T+V)+\text{и т. д.}-$$
$$-a^{n+1}y^{n-1}(P-Q)-a^{n+2}y^{n-2}(R-S)-a^{n+3}y^{n-3}(T-V)-\text{и т. д.}$$

389. А в формулах

$$\left(y^n+\frac{a^{2n}}{y^n}\right)P \quad \text{и} \quad \left(y^n-\frac{a^{2n}}{y^n}\right)Q$$

можно вместо n писать также и дробные числа. Таким образом, если вместо n напишут числа $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ и т. п., то из общих уравнений, которые при этом получатся, иррациональность сама собою исчезнет. Действительно, будем иметь

$$0=\frac{y+a}{\sqrt{ay}}P+\frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}R+\frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T+\text{и т. д.}$$
$$+\frac{y-a}{\sqrt{ay}}Q+\frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}S+\frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V+\text{и т. д.}$$

или такое уравнение:

$$0 = +\frac{y+a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \text{и т. д.}$$
$$+\frac{y-a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \text{и т. д.}$$

Эти уравнения, будучи освобождены от дробей, перейдут в следующие уравнения:

III

$$0 = +a^ny^{n+1}(P+Q) + a^{n-1}y^{n+2}(R+S) + a^{n-2}y^{n+3}(T+V) + \text{и т. д.}$$
$$+a^{n+1}y^n(P-Q) + a^{n+2}y^{n-1}(R-S) + a^{n+3}y^{n-2}(T-V) + \text{и т. д.}$$

и

IV

$$0 = +a^ny^{n+1}(P+Q) + a^{n-1}y^{n+2}(R+S) + a^{n-2}y^{n+3}(T+V) + \text{и т. д.}$$
$$-a^{n+1}y^n(P-Q) - a^{n+2}y^{n-1}(R-S) - a^{n+3}y^{n-2}(T-V) - \text{и т. д.}$$

390. Пользуясь приведенными выше четырьмя уравнениями, можно легко найти в каждом из порядков те линии, которые решают поставленную задачу. И прежде всего, конечно, из первого порядка задаче удовлетворяет прямая линия, параллельная оси AP и проходящая через точку B. Из второго порядка первые два уравнения, если положить $n=1$, дают $\alpha axy + y^2 - a^2 = 0$, которое получается из второго уравнения, если положить $N = \alpha x$ и $P = 1$ и $Q = 0$, ибо первое уравнение не дает никакой кривой линии. Два дальнейших уравнения дают, если положить $n=0$,

$$y(\alpha+\beta x) \pm a(\alpha-\beta x) = 0.$$

Из третьего порядка два первых уравнения дают, если положить

$$n=1,$$
$$0 = ay(\alpha+\beta x^2) + y^2(\gamma+\delta x) + a^2(\gamma-\delta x)$$

и

$$0 = \alpha ayx + y^2(\gamma+\delta x) - a^2(\gamma-\delta x),$$

а два следующих уравнения, если положить $n=0$ и $n=1$, дают

$$0 = y(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \pm (\alpha-\delta x+\gamma x^2)$$

и

$$0 = ay^2(\alpha+\beta x) + y^3 \pm a^2y(\alpha-\beta x) \pm a^3;$$

аналогичным путем из дальнейших порядков можно найти все линии, которые удовлетворяют поставленному требованию.

ГЛАВА XVII

О НАХОЖДЕНИИ КРИВЫХ ПО ДРУГИМ СВОЙСТВАМ

391. Вопросы, которые мы разрешили в предыдущей главе, были по своему характеру таковы, что их было легко свести к уравнениям между прямоугольными или косоугольными координатами. Теперь же мы будем рассматривать такого рода свойства, которые не требуют прямо, чтобы ординаты были параллельны друг другу, например, когда ставится вопрос о каких-либо свойствах прямых линий, проведенных из какой-нибудь заданной точки к кривой (рис. 81). Пусть C будет точкой, из которой к кривой проводятся прямые линии CM, CA, и пусть предложено какое-либо свойство, касающееся этих прямых. Тогда представляется целесообразным видоизменить применявшийся выше метод — выражать природу кривых с помощью координат таким образом, чтобы указанные прямые можно было ввести в уравнение.

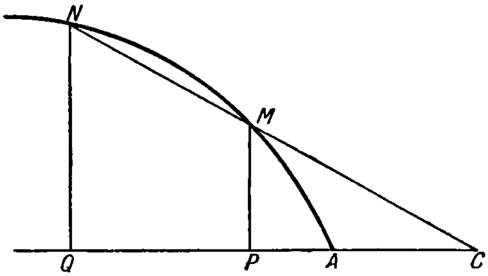

Рис. 81.

392. А так как имеется много других приемов для выражения природы линий с помощью уравнений между двумя переменными величинами, то в настоящем исследовании количество, измеряющее прямую CM, проведенную из заданной точки C к кривой, займет место одного из переменных. Тогда, конечно, потребуется другое переменное количество, с помощью которого будет определяться положение прямой CM. С этой целью примем какую-нибудь прямую CA, проведенную через точку C, за ось. а угол ACM или же количество, зависящее от этого угла, отличным образом будет играть роль второго переменного. Итак, пусть прямая $CM = z$ и пусть угол ACM, синус или тангенс которого войдет в уравнение, равен φ. Тогда ясно, что если будет дано какое-нибудь уравнение между z и $\sin\varphi$ или $\operatorname{tg}\varphi$, то оно определит природу кривой AMN; ибо при любом угле ACM определится длина прямой CM, и таким путем определится точка M кривой [64].

393. Но рассмотрим более внимательно этот способ выражения кривых линий, и, прежде всего, пусть расстояние z будет равно какой-нибудь

функции синуса угла φ. Если эта функция будет однозначной, то это покажет, что прямая CM встречает кривую в единственной точке M, так как углу $ACM=\varphi$ соответствует единственное значение прямой CM. Но если угол φ увеличить на два прямых угла, то останется то же положение прямой CM, проведенной через точку C, но с тем лишь отличием, что ее надо будет проводить в противоположном направлении. Этим путем будет получено и другое пересечение той же прямой CM с кривой линией, хотя бы z было равно однозначной функции синуса угла φ. Так, например, пусть P представляет эту функцию синуса угла φ, так что $z=P$, откуда получается (рис. 82) точка M кривой; увеличим теперь угол φ на два прямых, т. е. синус этого угла станет отрицательным, в результате чего P перейдет в Q, так что получится $z=Q$. Отсюда, стало быть, получится новое пересечение m той же продолженной прямой линии CM с кривой, если взять $Cm=Q$.

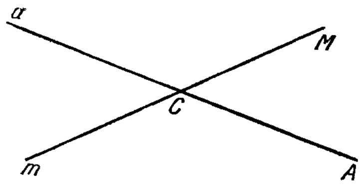

Рис. 82.

394. Таким образом, хотя бы P и было однозначной функцией синуса угла φ, тем не менее прямая CM, проведенная под заданным углом $ACM=\varphi$ через точку C, встретит кривую в двух точках M и m, если только не будет $Q=-P$. Следовательно, если каждая прямая CM должна встретиться с кривой лишь в одной точке, то указанное количество P должно быть нечетной функцией синуса угла φ. То же самое имеет место в том случае, когда P является нечетной функцией косинуса угла φ. Поэтому все кривые линии, которые пересекаются в единственной точке каждой прямой, проведенной из C, содержатся в уравнении $z=P$, если, конечно, P будет нечетной функцией синуса или же косинуса угла $ACM=\varphi$ [65].

395. Итак, поскольку кривые (рис. 81), которые пересекаются прямыми, проведенными из точки C, только в одной точке, содержатся в уравнении $z=P$, где P является нечетной функцией синуса и косинуса угла φ, то есть такого рода функцией, которая принимает отрицательное значение, если взять отрицательными синус и косинус угла φ, то для этого рода кривых линий легко найти уравнение в прямоугольных координатах. А именно, если из точки M опустить на ось CA перпендикуляр MP и принять $CP=x$, $PM=y$, то получится $\frac{y}{z}=\sin\varphi$ и $\frac{x}{z}=\cos\varphi$, откуда, если P будет нечетной функцией величин $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, получаем, что все такие кривые будут содержаться в уравнении $z=P$. Следовательно, если начать с простейших уравнений, то будем иметь

$$z=\frac{\alpha x}{z}+\frac{\beta y}{z}+\frac{\gamma z}{x}+\frac{\delta z}{y},$$

а если мы перейдем к более высоким степеням, то будет

$$z=\frac{\alpha x}{z}+\frac{\beta y}{z}+\frac{\gamma z}{x}+\frac{\delta z}{y}+\frac{\varepsilon x^3}{z^3}+\frac{\xi x^2 y}{z^3}+\frac{\eta x y^2}{z^3}+\frac{\theta y^3}{z^3}+\frac{\iota x^2}{yz}+\frac{\varkappa y^2}{xz}+\frac{\lambda yz}{x^2}+\text{и т. д.}$$

396. Если это уравнение разделить на z, то повсюду окажутся лишь четные степени z и, стало быть, ввиду того, что $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если исключить z, то в уравнении не останется никакой иррациональности

и получится рациональное уравнение между x и y. Следовательно, это уравнение будет таково, что единица или постоянное количество c будет равняться функции 1-го измерения от x и y. Если P будет такого рода функцией, то будет $c=P$ и, значит, $\frac{1}{c}=\frac{1}{P}$; но $\frac{1}{P}$ будет функцией первого измерения количеств x и y. Отсюда следует, что если какую-нибудь функцию от x и y первого измерения приравнять постоянному количеству, то получится уравнение для кривой линии, которую прямые, проведенные через точку C, пересекают каждая в одной точке.

397. Пусть P будет функцией n-го измерения x и y и Q функцией $n+1$ измерения; тогда $\frac{Q}{P}$ будет функцией первого измерения и, значит, все кривые, которые мы здесь рассматриваем, будут содержаться в уравнении $\frac{Q}{P}=c$ или $Q=cP$. Следовательно, если n обозначает какое-нибудь число, то общим уравнением для этих кривых будет

$$\alpha x^{n+1}+\beta x^{n}y+\gamma x^{n-1}y^{2}+\delta x^{n-2}y^{3}+\varepsilon x^{n-3}y^{4}+\text{и т. д.}=$$
$$=c\,(Ax^{n}+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^{2}+Dx^{n-3}y^{3}+\text{и т. д.}).$$

Поэтому линии отдельных порядков, которые пересекаются каждой прямой, проведенной из точки C в одной лишь точке, содержатся в следующих уравнениях:

I

$$\alpha x+\beta y=c$$

II

$$\alpha x^{2}+\beta xy+\gamma y^{2}=c\,(Ax+By)$$

III

$$\alpha x^{3}+\beta x^{2}y+\gamma xy^{2}+\delta y^{3}=c\,(Ax^{2}+Bxy+Cy^{2})$$

IV

$$\alpha x^{4}+\beta x^{3}y+\gamma x^{2}y^{2}+\delta xy^{3}+\varepsilon y^{4}=c\,(Ax^{3}+Bx^{2}y+Cxy^{2}+Dy^{2})$$

и т. д.

398. Таким образом, поставленному условию удовлетворяет, во-первых, прямая линия, которую, очевидно, каждая другая прямая, проведенная из данной точки, может пересекать лишь в одной точке. Второе уравнение является общим уравнением для конических сечений, если только коническое сечение проходит через точку C; так как это пересечение [конического сечения с рассматриваемыми прямыми в точке C] является общим для всех прямых, проходящих через точку C, то его не принимают в расчет; поскольку же конические сечения могут быть пересечены любой прямой только в двух точках, то всякая прямая, проведенная через произвольно избранную на кривой точку C, дает лишь одно пересечение. Но кривые следующих порядков все проходят через ту же точку C, и это пересечение, общее для всех прямых, проведенных через точку C, равным образом не принимается в расчет. Поэтому из более высоких порядков линий в приведенных выше уравнениях содержатся

лишь те линии, которые пересекаются в одной лишь точке прямыми, проведенными через точку C. Следовательно, этим путем мы полностью учтем все алгебраические кривые, которые пересекаются прямыми, проведенными через точку C, лишь в одной точке.

399. Перейдем теперь к исследованию тех кривых, которые каждой прямой, проведенной через точку C, пересекаются либо в двух точках, либо ни в одной, так что корни уравнения, определяющего двойное пересечение, становятся мнимыми. Итак, поскольку при любом угле $ACM=\varphi$ прямая $CM=z$ должна иметь два значения, то она определится с помощью квадратного уравнения. Стало быть, пусть

$$z^2-Pz+Q=0,$$

где P и Q являются функциями угла φ или его синуса либо косинуса. Но так как прямая CM должна пересечь кривую линию лишь в двух точках: M и N, то не только P и Q должны быть однозначными функциями угла φ, но если увеличить угол φ на два прямых угла, то не должно получиться никаких новых пересечений, и дело будет так обстоять, если P будет нечетной функцией синуса и косинуса угла φ, то есть будет принимать отрицательное значение, когда синус и косинус принимаются отрицательными[1]; но в этом случае Q должно быть четной функцией того же синуса и косинуса.

400. Если же положить прямоугольные координаты $CP=x$ и $PM=y$, то будет

$$\frac{y}{z}=\sin\varphi \quad \text{и} \quad \frac{x}{z}=\cos\varphi;$$

следовательно, P будет нечетной функцией $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, а Q будет четной функцией тех же количеств $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$. Отсюда следует, что $\frac{P}{z}$ будет рациональной функцией x и y и к тому же однородной функцией 1-го измерения. Аналогично $\frac{Q}{z^2}$ будет рациональной функцией x и y и однородной функцией 2-го измерения. Следовательно, если L будет однородной функцией $n+2$ измерений, M — однородной функцией $n+1$ измерений и N — какой-нибудь однородной функцией n измерений от x и y, то дробь $\frac{M}{L}$ даст подходящую функцию для $\frac{P}{z}$ и $\frac{N}{z}$ — подходящую функцию для $\frac{Q}{z^2}$. Поэтому, так как $z^2-Pz+Q=0$, то будет $1-\frac{P}{z}+\frac{Q}{z^2}=0$, в результате чего общим уравнением для кривых, которые пересекаются в двух точках прямыми, проведенными через точку C, будет

$$1-\frac{M}{L}+\frac{N}{L}=0 \quad \text{или} \quad L-M+N=0,$$

где

$$P=\frac{Mz}{L} \quad \text{и} \quad Q=\frac{Nz^2}{L}=\frac{N(x^2+y^2)}{L};$$

[1]) Следует добавить случай исчезающего P, так как Эйлер придает z и отрицательные значения. [*А. Ш.*]

к тому же P[1]) будет иррациональной функцией x и y ввиду того, что $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а Q является рациональной функцией нулевого измерения.

401. Теперь будет легко из линий любого порядка выделить те, которые пересекаются в двух точках или нигде не пересекаются прямыми, проведенными через заданную точку C. Например, для линий второго порядка следует положить $n=0$; тогда получится общее уравнение конических сечений

$$\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2-\delta x-\varepsilon y+\zeta=0.$$

Следовательно, если взять где-нибудь точку C, то всякая прямая, проведенная через эту точку, либо пересечет коническое сечение в двух точках, либо нигде его не пересечет. Тем не менее может случиться, что какая-нибудь прямая линия пересечет кривую лишь в одной точке. Но так как среди бесчисленного множества прямых, проведенных через точку C, это может случиться лишь у одной или двух линий, то указанное выше исключение не имеет никакого значения. Этот парадокс можно даже объяснить таким образом, что другое пересечение уходит на бесконечность. Поэтому можно считать, что указанное выше исключение нисколько не влияет на общность нашего утверждения.

402. Но для того, чтобы выявить, в каких случаях может иметь место подобное исключение, мы сведем уравнение между x и y к уравнению между z и углом $ACM=\varphi$. Наше уравнение, поскольку $y=z\sin\varphi$ и $x=z\cos\varphi$, перейдет в следующее:

$$z^2(\alpha(\cos\varphi)^2+\beta\sin\varphi\cos\varphi+\gamma(\sin\varphi)^2)-z(\delta\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)+\zeta=0.$$

Отсюда видно, что если коэффициент z^2 будет равен нулю, то будет иметь место лишь одно пересечение; следовательно, последнее будет в том случае, когда

$$\alpha+\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi+\gamma\,\mathrm{tg}^2\varphi=0.$$

Итак, если это уравнение имеет два действительных корня, то в двух случаях прямая, проведенная через точку C, пересечет кривую в одной лишь точке. Но так как корни того же уравнения определяют асимптоты кривой, то ясно, что гиперболы пересекаются прямыми, параллельными одной из асимптот, лишь в одной точке, а такого рода прямых, проходящих через точку C, имеем лишь две. В параболе это исключение дает лишь одна прямая, параллельная оси. Но если коническое сечение представляет собою эллипс, то где бы мы ни взяли точку C, всякая проведенная через нее прямая либо нигде не пересечет эллипса, либо пересечет его в двух точках[2]).

403. Линии третьего порядка, обладающие указанным выше свойством, если положить $n=1$, содержатся в следующем уравнении:

$$\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3+\varepsilon x^2+\zeta xy-\eta y^2+\theta x+\iota y=0.$$

Последнее содержит в себе все линии третьего порядка, которые, стало быть, все относятся сюда, если точку C брать на самой кривой. Ведь если

[1]) За исключением случая $P=M=0$. См. § 410. [*А. Ш.*]

[2]) В случае эллипса уравнение имеет два корня, которые однако могут быть равны между собою. [*А. Ш.*]

положить $x=0$, то и y получает исчезающее значение. Равным образом, у кривых четвертого порядка, удовлетворяющих рассматриваемому условию, не только точка C должна быть на кривой, но она должна быть и двойной точкой этой линии; таким образом, всякая линия четвертого порядка, обладающая двойной точкой, удовлетворит требуемому условию, если только точку C поместить в двойной точке. Но если, сверх того, C будет тройной точкой кривой, то в этом случае всякая проведенная через нее прямая пересечет кривую в одной лишь точке, и, стало быть, это будет относиться к тому случаю, который мы рассматривали первым. Равным образом линии пятого порядка удовлетворят рассматриваемому условию, если точка C будет помещена в тройной их точке, и так далее. Но всегда надо иметь в виду, что если прямая, проведенная через точку C, окажется параллельной какой-нибудь прямолинейной асимптоте или оси параболической асимптоты, то в этих случаях всегда имеет место одно лишь пересечение, другое же пересечение уходит в бесконечность.

404. Сказанное выше находится в прекрасном согласии с природой линий каждого отдельного порядка. Действительно, так как линия каждого порядка может быть пересечена прямой в стольких точках, сколько показатель порядка содержит в себе единиц (и действительно бывает пересечена в стольких точках, если только некоторые пересечения не оказываются мнимыми или же удаляются на бесконечность) и так как в данном случае мы одинаково принимаем в расчет все пересечения, будут ли они действительными или же будут происходить бесконечно далеко, или будут мнимыми, и исключаем лишь те, которые происходят в самой точке C, то ясно, что когда линию n-го порядка пересекает в n точках какая-нибудь прямая, то точка C должна быть помещена в точке столь большой кратности, сколько число $n-2$ содержит в себе единиц, дабы получилось двойное пересечение.

405. После того, что отмечено выше, легко будет либо разрешить те задачи, которые обычно ставятся в связи с зависимостью между какими-нибудь двумя значениями CM и CN количества z, либо доказать их несообразность. Действительно, так как два значения CM и CN количества z являются корнями уравнения $z^2-Pz+Q=0$, то их сумма будет $=P$ и составленный из них прямоугольник $CM \cdot CN$ будет $=Q$. Следовательно, во-первых, если искать такого рода кривые, чтобы у них повсюду сумма $CM+CN$ была постоянной, то функция P должна быть постоянным количеством. Но так как, по сути вопроса, каждая прямая, проведенная через C, должна пересечь кривую лишь в двух точках, то необходимо, чтобы было [§ 400]

$$P=\frac{Mz}{L}=\frac{M\sqrt{x^2+y^2}}{L},$$

а это количество, в составе которого имеется иррациональность, никогда не может быть постоянным[1]). Стало быть, не существует такой кривой, которая собственно удовлетворяла бы поставленному требованию.

406. Но если отказаться от условия, что у каждой прямой, проведенной через C, имеется лишь два пересечения с кривой, и искать

[1]) Если только постоянное не будет $=0$. В этом случае окажется $M=0$, и тогда получаются кривые, обладающие центром, например круг. Ср. § 414. [*А. Ш.*]

такого рода кривые линии, у которых, правда, имеется больше чем два пересечения, но в числе последних имеются два — M и N — такого рода, что $CM+CN$ является постоянным количеством, то таких кривых можно указать бесчисленное множество, если положить, что $P=$ указанному постоянному количеству $CM+CN=a$. Ибо будет $z^2-az+Q=0$, где Q обозначает функцию $\frac{Nz^2}{L}$; а так как в это уравнение все еще входит иррациональность, то по устранении последней получится

$$a^2z^2=(z^2+Q)^2 \quad \text{или} \quad a^2=z^2\left(1+\frac{N}{L}\right)^2$$

или

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(L^2+2LN+N^2);$$

в последнем выражении L будет однородной функцией $n+2$ измерений, а N будет однородной функцией n измерений от x и y. Стало быть, простейшую кривую, решающую задачу в указанном выше смысле, мы получим, если положим

$$L=x^2+y^2 \quad \text{и} \quad N=\pm b^2,$$

и тогда будет

$$a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2\pm b^2)^2;$$

это является уравнением для составной линии четвертого порядка, ибо оно содержит два круга, имеющих общий центр в точке C. А наиболее простыми непрерывными линиями, удовлетворяющими поставленному требованию, окажутся линии шестого порядка, если положить

$$L=\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2 \quad \text{и} \quad N=\pm b^2,$$

откуда для этих кривых получается уравнение

$$a^2(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)^2=(x^2+y^2)(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2\pm b^2)^2.$$

Пусть $\alpha=1$, $\beta=0$ и $\gamma=0$; тогда будет

$$y^2+x^2=\frac{a^2x^4}{x^4\pm 2b^2x^2+b^4}$$

или

$$y=\frac{x\sqrt{a^2x^2-x^4\mp 2b^2x^2-b^4}}{x^2\pm b^2}.$$

407. Но если отбросить решения, при которых предполагается, что прямые, проведенные через C, пересекают кривую более чем в двух точках, а этого условия требует, по-видимому, характер вопроса, то уже нельзя будет утверждать, что существуют какие-нибудь кривые линии, которые удовлетворяли бы указанному выше требованию, и, значит, не существует какой бы то ни было непрерывной линии, которая пересекалась бы прямыми, проведенными через точку C, в двух точках M и N таким образом, чтобы сумма $CM+CN$ была постоянной. Но если бы потребовалось, чтобы эти пересечения обладали тем свойством, что прямоугольник $CM\cdot CN$ будет постоянным, — а в круге это свойство до такой степени осуществимо, что оно выполняется, где бы мы ни взяли точку C, — то можно найти бесчисленное множество других кривых линий, которые обладают таким свойством. Действительно, для этого Q должно быть постоянным количеством, т. е. должно быть равно указанному прямоугольнику $CM\cdot CN$, который пусть $=a^2$. Такое допу-

щение не содержит в себе противоречия, так как $Q=\frac{Nz^2}{L}$ и, следовательно, является рациональной функцией x и y.

408. Итак, пусть $\frac{Nz^2}{L}=a^2$ или $L=\frac{Nz^2}{a^2}=\frac{N(x^2+y^2)}{a^2}$; тогда все кривые, удовлетворяющие поставленному условию, будут содержаться в уравнении

$$\frac{N(x^2+y^2)}{a^2}-M+N=0 \quad \text{или} \quad Ma^2=N(x^2+y^2+a^2),$$

где M обозначает какую-нибудь однородную функцию $n+1$ измерений, а N — однородную функцию n измерений от x и y, так что

$$\frac{M}{N}=\frac{x^2+y^2+a^2}{a^2}$$

будет функцией одного измерения количеств x и y. Следовательно, это уравнение содержит в себе все кривые, которые пересекаются лишь в двух точках M и N прямыми, проведенными через C, таким образом, чтобы прямоугольник $CM \cdot CN$ был повсюду постоянным $=a^2$.

409. Так как, следовательно, $\frac{M}{N}$ является однородной функцией одного измерения количеств x и y, то мы будем иметь наиболее простой случай, если положим $\frac{M}{L}=\frac{\alpha x+\beta y}{a}$, откуда получается уравнение

$$x^2+y^2-a(\alpha x+\beta y)+a^2=0,$$

которое всегда является уравнением для окружности, и так как оно является общим уравнением окружности при прямоугольных координатах, то ясно, что окружность удовлетворяет поставленному условию, где бы мы ни взяли точку C, как это, впрочем, очевидно из элементарной геометрии. Таким образом, из конических сечений, помимо окружности, никакая иная кривая не удовлетворяет этому требованию. Но среди линий следующих порядков можно указать бесчисленное множество линий, которые удовлетворяют указанному требованию, и притом все линии из каждого порядка, которые ему удовлетворяют. Так, линии третьего порядка, обладающие указанным свойством, содержатся в уравнении

$$\frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{a(\delta x+\varepsilon y)}=\frac{x^2+y^2+a^2}{a^2}$$

или

$$(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)-a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)+a^2(\delta x+\varepsilon y)=0.$$

Аналогичным образом можно и из всех дальнейших порядков линий выделить те линии, которые удовлетворяют указанному выше требованию.

410. Пусть теперь поставлен следующий вопрос: среди всех кривых, которые пересекаются в двух точках прямыми, проходящими через точку C, определить те, у которых сумма квадратов CM^2+CN^2 является постоянным количеством, скажем, $=2a^2$ [1]). Но так как $CM+CN=P$

[1]) В первом издании a^2. [*А. Ш.*]

и $CM \cdot CN = Q$, то будет $CM^2 + CN^2 = P^2 - 2Q$; следовательно, должно быть

$$P^2 - 2Q = 2a^2 \quad \text{или} \quad Q = \frac{P^2 - 2a^2}{2}.$$

Стало быть, в силу того, что $P = \frac{Mz}{L}$ и $Q = \frac{Nz^2}{L}$, будет $\frac{2Nz^2}{L} = \frac{M^2z^2}{L^2} - 2a^2$ и, следовательно, $N = \frac{M^2}{2L} - \frac{a^2L}{z^2}$; а это уравнение не создает никаких затруднений, так как L является функцией $n+2$ измерений, M — функцией $n+1$ измерений и N — функцией n измерений от x и y. Следовательно, если взять для L и M такого рода функции, то получится

$$N = \frac{M^2}{2L} - \frac{a^2L}{z^2},$$

откуда для кривых, являющихся искомыми, получается следующее общее уравнение:

$$L - M + \frac{M^2}{2L} - \frac{a^2L}{z^2} = 0$$

или

$$2L^2(x^2+y^2) - 2LM(x^2+y^2) + M^2(x^2+y^2) - 2a^2L^2 = 0.$$

Это уравнение, когда $M = 0$, дает окружность, центр которой находится в C и которая, как это само по себе очевидно, удовлетворяет поставленному требованию.

411. Положим $n+1=0$, так что M — постоянное количество $= 2b$ и $L = \alpha x + \beta y$; тогда получится линия четвертого порядка, содержащаяся в следующем уравнении:

$$(\alpha x + \beta y)^2(x^2+y^2-a^2) - 2b(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2) + 2b^2(x^2+y^2) = 0.$$

Другое уравнение четвертого порядка получится, если положить

$$L = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad M = 2(\alpha x + \beta y)a,$$

ибо тогда уравнение после деления на $2x^2 + 2y^2$ даст

$$(x^2+y^2)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2) + 2a^2(\alpha x+\beta y)^2 - a^2(x^2+y^2) = 0.$$

Если же не удастся разделить это уравнение на x^2+y^2, то найденное уравнение (если поставить $2M$ вместо M), которое имеет вид

$$L^2(x^2+y^2) - 2LM(x^2+y^2) + 2M^2(x^2+y^2) - a^2L^2 = 0,$$

будет всегда уравнением порядка $2n+6$, и значит, при любом четном порядке получится уравнение для кривой, которая удовлетворяет поставленному условию. Сверх того, если L будет делиться на x^2+y^2, то есть если будет $L = (x^2+y^2)N$, где N обозначает какую-нибудь однородную функцию x и y n измерений, то получится другое общее уравнение, а именно:

$$N^2(x^2+y^2)^2 - 2MN(x^2+y^2) + 2M^2 - a^2N^2(x^2+y^2) = 0,$$

которое будет порядка $2n+4$, так что для каждого четного порядка получается два уравнения для кривых линий, обладающих требуемым свойством. Так, из шестого порядка этому удовлетворят кривые, содержащиеся в двух следующих уравнениях:

$$(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)^2(x^2+y^2-a^2)-2a(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)[\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2-a(\delta x+\varepsilon y)]=0$$ [1]

и [2]

$$(\delta x+\varepsilon y)^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)=2a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)((\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)-a(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma y^2).$$

Но ни в каком нечетном порядке линий не существует такой линии, которая разрешала бы этот вопрос.

412. Если же требуется найти не такого рода кривые, у которых сумма квадратов CM^2+CN^2 является постоянной, а такие кривые, у которых

$$CM^2+CM\cdot CN+CN^2$$

или, более общим образом,

$$CM^2+n\cdot CM\cdot CN+CN^2$$

является постоянным количеством, то эта задача может быть разрешена аналогичным путем. Действительно, так как

$$CM^2+nCM\cdot CN+CN^2=P^2+(n-2)Q,$$

положим $P^2+(n-2)Q=a^2$; тогда будет $Q=\frac{a^2-P^2}{n-2}$, а это уравнение не создает никаких затруднений. Так как

$$P=\frac{Mz}{L}\quad\text{и}\quad Q=\frac{Nz^2}{L},$$

то будет

$$\frac{M^2z^2}{L^2}+\frac{(n-2)Nz^2}{L}=a^2$$

и, следовательно,

$$N=\frac{a^2L}{(n-2)z^2}-\frac{M^2}{(n-2)L}.$$

Поэтому, так как уравнением для кривой является $L-M+N=0$, то при том условии, что $CM^2+nCM\cdot CN+CN^2$ должно быть постоянной величины $=a^2$, будем иметь следующее уравнение:

$$(n-2)L^2z^2-(n-2)LMz^2+a^2L^2-M^2z^2=0,$$

или же, в силу того, что $z^2=x^2+y^2$, будет

$$a^2L^2+(x^2+y^2)[(n-2)L^2-(n-2)LM-M^2]=0,$$

где L является функцией $m+2$ измерений, а M — функцией $m+1$ измерений количеств x и y. Пусть N является какой-нибудь однородной функцией m измерений и положим $L=(x^2+y^2)N$; тогда получится другое общее уравнение, а именно:

$$a^2(x^2+y^2)N^2+(n-2)(x^2+y^2)N^2-(n-2)(x^2+y^2)MN-M^2=0.$$

---

[1] Если положить $N=\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2$ и $M=a(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)$. [*А. Ш.*]

[2] Если положить $N=\delta x+\varepsilon y$ и $M=a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)$. [*А. Ш.*]

413. Если положить $n=2$, так что будет $(CM+CN)^2=a^2$, то получится

$$\text{либо } a^2L^2=(x^2+y^2)M^2, \text{ либо } M^2=a^2(x^2+y^2)N^2.$$

Но оба эти уравнения, будучи однородными, содержат в себе два или большее число уравнений вида $\alpha y=\beta x$. Следовательно, настоящий вопрос нельзя будет разрешить иначе, как с помощью двух или большего числа прямых, которые надо будет провести через точку C. Но так как этим путем задача не будет разрешена в том смысле, как она поставлена, то ясно, что эта задача, как мы это уже отметили раньше, не допускает никакого решения, ибо требовалось, чтобы $CM+CN$ было равно постоянному количеству a. А если принять $n=-2$, так что квадрат разности $(CN-CM)^2$ и, стало быть, сама разность MN должны быть постоянными, то получатся следующие два уравнения:

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(2L-M)^2$$

и

$$a^2(x^2+y^2)N^2=[2(x^2+y^2)N-M]^2.$$

Простейшее решение получится здесь, если положить $N=1$ и $M=2bx$; действительно, тогда будет

$$a^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2-bx)^2,$$

или, если положить $a^2=8c^2$, то получится

$$(x^2+y^2)^2=2(c^2+bx)(x^2+y^2)-b^2x^2.$$

Следовательно,

$$x^2+y^2=c^2+bx\pm c\sqrt{c^2+2bx},$$

а также

$$y=\sqrt{c^2+bx+x^2\pm c\sqrt{c^2+2bx}}.$$

414. Существует, следовательно, бесконечно много кривых, которые пересекаются прямыми, проведенными через точку C, в двух точках M и N таким образом, что отрезок MN всегда оказывается постоянным. И, прежде всего, конечно, ясно, что указанному выше условию удовлетворяет окружность, имеющая центр в точке C, ибо в этом случае всегда отрезок MN будет равен диаметру окружности. Последняя получается и из общих уравнений, если положить $M=0$. Затем, конечно, указанному выше условию вслед за окружностью удовлетворяют и линии четвертого порядка, содержащиеся в уравнении

$$a^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2-bx)^2,$$

а также в следующем:

$$a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2.$$

Для исследования формы этих линий следует вернуться к уравнению между z и углом φ. Так как, стало быть, $x^2+y^2=z^2$ и $x=z\cos\varphi$ и $y=z\sin\varphi$, то, если положить $a=2c$, будем иметь прежде всего

$$c^2z^2=(z^2-bz\cos\varphi)^2 \quad \text{или} \quad b\cos\varphi\pm c=z,$$

а затем

$$c^2(\cos\varphi)^2 = (z\cos\varphi - b)^2 \quad \text{или} \quad z = \frac{b}{\cos\varphi} \pm c\,[1].$$

С помощью этих выражений легко получается построение этих кривых.

415. Действительно, для того чтобы построить кривую, содержащуюся в уравнении $z = b\cos\varphi \pm c$ (рис. 83, 84, 85), следует через точку C провести прямую ACB, на ней взять $CD = b$ и из D отложить в обе стороны $DA = DB = c$; тогда прежде всего точки A и B окажутся на искомой кривой. Затем, проведя какую-нибудь прямую NCM через точку C, опустим на нее из точки D перпендикуляр DL и от точки L в обе стороны отложим $LM = LN = c$; тогда точки M и N будут лежать на искомой кривой и, значит, отрезок MN всегда будет $= 2c$, как это требуется в данном вопросе.

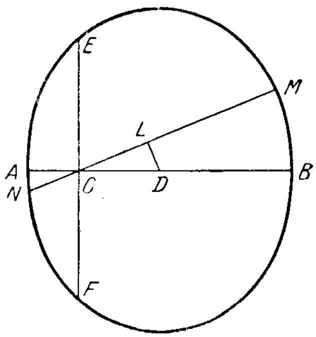

Рис. 83.

Здесь следует отметить, что если окажется, что $CD = b$ меньше, чем c, то кривая (рис. 83) будет иметь в C сопряженную точку [§ 277].

Если же будет $b = c$, то кривая (рис. 84) будет иметь в C острие, причем отрезок AC исчезнет.

Наконец, если b будет больше [2] c, то точка A (рис. 85) окажется между точками C и B и кривая линия будет иметь в C узел, или двойную

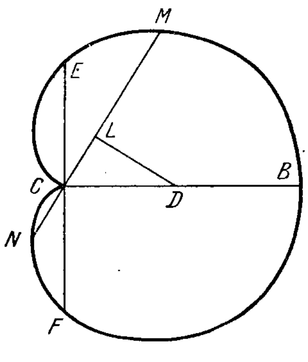

Рис. 84.

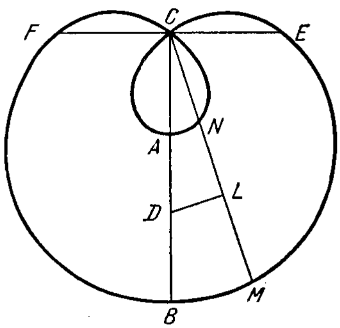

Рис. 85.

точку. А диаметром этих кривых линий будет прямая ACB, перпендикулярная же к последней линии ECF будет $= 2c$.

416. Кроме приведенных выше самозамыкающихся [3] кривых, из линий четвертого порядка указанному условию удовлетворяют другие уходящие в бесконечность линии, которые содержатся в уравнении $z = \frac{b}{\cos\varphi} \pm c$.

---

[1] В первом издании $z = \frac{b}{\cos\varphi}$. [*А. Ш.*]

[2] В первом издании: меньше (minor). [*А. Ш.*]

[3] in se redeuntes.

Построение этих линий получается следующим образом. Проведя (рис. 86) через точку C основную прямую CAB, следует взять $CD=b$ и отложить $DA=DB=c$; тогда точки A и B будут находиться на кривой линии. Затем через точку D проводим перпендикуляр EDF. Если провести какую-нибудь прямую CL, то будет $CL=\frac{b}{\cos\varphi}$, если угол DCL обозначить через φ. Затем следует продолжать откладывать $LM=LN=c$ и тогда точки M и N

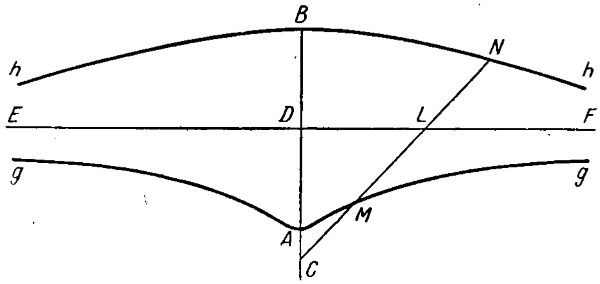

Рис. 86.

определят искомую кривую. А из приведенного выше построения видно, что описанная указанным образом кривая линия является *конхоидой* древних, имеющей полюсом точку C и асимптотой прямую EF, с которой на бесконечно большом расстоянии сливаются четыре ветви этой кривой. Часть ее hBh называется *внешней конхоидой*, а часть gAg — *внутренней конхоидой*; кроме этих частей, в C находится сопряженная точка [66].

417. Таковы кривые линии четвертого порядка, которые удовлетворяют поставленному условию. Но можно указать сколько угодно кривых более высоких порядков, которые обладают тем же свойством. Ибо если P будет нечетной функцией синуса и косинуса угла φ, то уравнение $z=bP\pm c$ даст непрерывную кривую, которую все прямые линии, проведенные через точку C, будут пересекать в двух точках M и N таким образом, что отрезок MN будет постоянно равен $2c$. Все эти линии можно отнести к роду конхоидальных, причем вместо прямолинейной директрисы EF берется какая-нибудь кривая, содержащаяся в уравнении $z=bP$. Но мы видели выше, что это уравнение содержит в себе кривые линии, которые пересекаются прямыми линиями, проведенными через точку C, лишь в одной точке. Поэтому, поскольку промежуток c является произвольным, можно с помощью любой кривой $z=bP$ описать бесчисленное множество кривых линий, которые будут обладать рассматриваемым свойством.

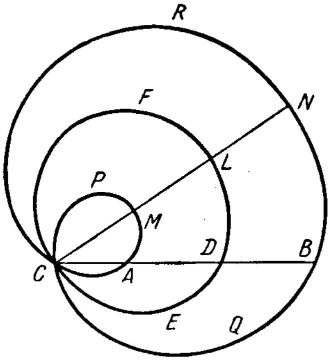

Рис. 87.

418. Итак, возьмем произвольно какую-нибудь кривую $CEDLF$ (рис. 87), которую все прямые линии, проходящие через точку C, будут пересекать каждая в одной лишь точке D, L. Затем на каждой из этих прямых CL, CD, продолжив их дальше, отложим в обе стороны отрезки $LM=LN=c$. Тогда точки M и N будут лежать на искомой кривой линии. Следовательно, мож-

но будет непрерывным движением описать кривую линию $AMPCQBNRC$, которую каждая прямая, проведенная через C, будет пересекать в двух точках M и N таким образом, что отрезок MN будет постоянно $=2c$. Здесь следует отметить, что если кривая $CEDF$ будет окружностью, проведенной через точку C, то в этом случае вычерченная кривая линия будет той линией четвертого порядка, которую мы впервые нашли в § 414.

419. Изложенным выше путем мы ответили, следовательно, на вопрос, согласно которому требовалось найти кривые AMN, которые должны пересекаться прямыми, проведенными через точку C, в двух точках M и N таким образом, чтобы $CN—CM$ или $CM^2—2CM\cdot CN+CN^2$ было всегда постоянным количеством. Рассмотрим еще вкратце случай (см. стр. 199, рис. 81), когда $CM^2+CM\cdot CN+CN^2$ должно быть постоянным количеством. Следовательно, в § 412 надо положить $n=1$, и тогда получится уравнение

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(L^2-LM+M^2),$$

где L является функцией $m+1$ измерений, а M — функцией m измерений x и y, или же получится другое уравнение:

$$a^2(x^2+y^2)N^2=(x^2+y^2)^2N^2-(x^2+y^2)MN+M^2,$$

где M представляет собою однородную функцию, у которой измерение x и y на единицу больше, чем у функции N.

420. Прежде всего, конечно, ясно, что если положить $M=0$, то получится окружность, центр которой будет находиться в точке C. Так как в данном случае все прямые, проведенные из точки C до кривой, равны между собою, то ясно, что она удовлетворяет и всем этого рода требованиям. А простейшие после окружности кривые в рассматриваемом случае можно получить, если в первом уравнении положить $M=b$ и $L=x$. Тогда получится

$$a^2x^2=(x^2+y^2)(x^2-bx+b^2)$$

или

$$y^2=\frac{x^2(a^2-b^2+bx-x^2)}{b^2-bx+x^2}.$$

Если же в другом уравнении положить $N=1$ и $M=bx$, то тоже получится линия четвертого порядка

$$a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2-bx(x^2+y^2)+b^2x^2$$

или

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}a^2\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2bx-\frac{3}{4}b^2x^2},$$

которая в такой же мере отвечает на поставленный вопрос, как и первая.

421. После разрешения приведенных выше вопросов рассмотрим более высокие степени тех двух значений z, что получаются из уравнения $z^2-Pz+Q=0$ при

$$P=\frac{Mz}{L} \quad \text{и} \quad Q=\frac{Nz^2}{L},$$

где L обозначает однородную функцию $n+2$ измерений, M — такую же функцию $n+1$ измерений и N — такую же функцию n измерений от x и y; при этом x = абсциссе CP и y = ординате PM. Таким образом, ставится вопрос о нахождении двух такого рода пересечений M и N, чтобы было $CM^3+CN^3=a^3$. Так как, согласно природе уравнения $z^2-Pz+Q=0$, мы имеем $CM^3+CN^3=P^3-3PQ$, то должно быть $P^3-3PQ=a^3$, а это равенство, ввиду того, что P^3 и PQ являются иррациональными количествами, не может иметь места. Таким образом, строго говоря, поставленному выше требованию нельзя удовлетворить. Но если не принимать во внимание числа пересечений, хотя бы последних было больше, чем два, то тогда, конечно, можно бесчисленными путями найти удовлетворяющие поставленному требованию кривые, положив $Q=\frac{P^3-a^3}{3P}$ и взяв для P какую угодно функцию синуса и косинуса угла $ACM=\varphi$.

422. Если же требуется найти кривые линии, у которых
$$CM^4+CN^4=a^4,$$
тогда надо будет положить
$$P^4-4P^2Q+2Q^2=a^4;$$
а это уравнение, поскольку в нем нет иррациональности, не содержит в себе противоречия. Стало быть, должно получиться
$$Q=P^2+\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4},$$
а эту функцию, несмотря на наличие в ней знака корня, можно рассматривать как однозначную, ибо если бы $\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{4}a^4}$ был взят со знаком плюс[1]), то для z получились бы мнимые значения. Таким образом, будет
$$\frac{Nz^2}{L}=\frac{M^2z^2}{L^2}-\sqrt{\frac{M^4z^4}{2L^4}+\frac{1}{2}a^4},$$
и, так как для кривой $L-M+N=0$ или
$$z^2-\frac{Mz^2}{L}+\frac{Nz^2}{L}=0,$$
то будет
$$z^2-\frac{Mz^2}{L^2}+\frac{M^2z^2}{L^2}-{}^{2)}\sqrt{\frac{M^4z^4}{2L^4}+\frac{1}{2}a^4}=0.$$
Следовательно, после уничтожения иррациональности будет
$$\frac{z^4}{L^4}(L^2-LM+M^2)^2=\frac{M^4z^4}{2L^4}+\frac{1}{2}a^4$$
или
$$(x^2+y^2)^2(2(L^2-LM+M^2)^2-M^4)=a^4L^4.$$
В последнем выражении содержатся все кривые, удовлетворяющие поставленному вопросу.

---

[1]) В первом издании со знаком минус (negative). [*А. Ш.*]
[2]) В первом издании $+$. [*А. Ш.*]

423. Эти и подобные им вопросы могут быть разрешены и другим более легким путем, как это сделано выше в § 372. Действительно, так как $CM \cdot CN = Q$, то если одно из количеств CM и CN обозначить через z, то другое будет $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, так как $Q = \frac{Nz^2}{L}$. Следовательно, если должно быть

$$CM^n + CN^n = a^n,$$

то получится

$$z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n \quad \text{и, значит,} \quad z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n},$$

а это уравнение, если n — число четное, является уже рациональным и, следовательно, удовлетворяет поставленному условию. Если же n — нечетное число, то для уничтожения иррациональности следует взять квадраты. В результате этого количество пересечений увеличивается вдвое и, таким образом, получается кривая, которая отвечает на вопрос не в том смысле, в каком это необходимо. Так, например, если должно быть

$$CM^2 + CN^2 = a^2,$$

то получается

$$z^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 L^2}{L^2 + N^2},$$

что находится в соответствии с ранее (§ 410[1]) найденным выражением

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 L^2}{(L-M)^2 + L^2},$$

ввиду того, что $L - M + N = 0$. Следовательно, вообще если должно быть $CM^n + CN^n = a^n$ и если n — четное число, то получится уравнение

$$z^n = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n},$$

где L — функция $m+2$ измерений, M — функция $m+1$ измерений и N — функция m измерений количеств x и y.

424. То же самое решение получается и из рассмотрения суммы $CM + CN = P$. Действительно, если одно из количеств CM и CN положить $= z$, то другое будет $= P - z$. Следовательно, если $CM^n + CN^n$ должно быть постоянным, то будет $z^n + (P-z)^n = a^n$. Но мы видели, что должно быть

$$P = \frac{Mz}{L} \quad \text{и} \quad Q = \frac{Nz^2}{L},$$

так что получается $L - M + N = 0$; а отсюда следует, что

$$z^n + \frac{z^n (M-L)^n}{L^n} = a^n,$$

то есть

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n} \quad \text{или} \quad z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n},$$

[1]) Вместо $2a^2$ в § 410 следует положить a^2. [*А. Ш.*]

или после исключения L получим

$$z^n = \frac{a^n (M-N)^n}{(M-N)^n + N^n}.$$

Если n будет четным числом, то приведенные выше уравнения вполне удовлетворят поставленному условию. Если же n будет нечетным числом, то будет, конечно, два пересечения: M и N, так что будет $CM^n + CN^n = a^n$. Но кроме двух этих пересечений будет еще два других пересечения, которые будут обладать тем же свойством, так что всякая прямая, проведенная через точку C, будет вдвойне обладать требуемым свойством.

425. После того, что изложено выше, легко будет разрешить другие весьма трудные вопросы; а именно пусть, скажем, требуется найти кривую, которую каждая прямая, проведенная через точку C, пересекает в двух точках M и N таким образом, что

$$CM^n + CN^n + \alpha CM \cdot CN\,(CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \\ + \beta CM^2 \cdot CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4}) + \text{и т. д.}$$

является постоянным количеством $= a^n$. Пусть одно из этих значений $CM = z$; тогда другое будет

$$CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}.$$

Если подставить эти значения, то получится следующее уравнение, выражающее природу кривой:

$$z^n (L^n + N^n + \alpha LN\,(L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \text{ и т. д.}) = a^n L^n.$$

Но $L - M \mp N = 0$ и L, M и N, как мы раньше указывали, являются однородными функциями от x и y, имеющими размерности $m+2$, $m+1$ и m; отсюда либо $L = M - N$, либо $N = M - L$; таким образом, в данном случае можно получить бесконечно много решений.

426. Перейдем теперь к рассмотрению кривых, которые пересекаются в трех точках каждой прямой, проведенной через неподвижную точку C. Стало быть, природу этого рода кривых выразит следующее общее уравнение:

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0.$$

Здесь z обозначает расстояние любой точки кривой от A, а P, Q, R являются функциями угла $ACM = \varphi$, или же его синуса либо косинуса. В силу тех же соображений, которые мы изложили выше, ясно, что для того, чтобы получилось не более трех пересечений, P и R должны быть нечетными функциями $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а Q должно быть четной их функцией. Следовательно, если допустить, что прямоугольные координаты $CP = x$ и $PM = y$, так что будет $x^2 + y^2 = z^2$ и если K, L, M и N обозначают однородные функции $n+3$, $n+2$, $n+1$ и n измерений от x и y, то будет

$$P = \frac{Lz}{K}, \quad Q = \frac{Mz^2}{K} \quad \text{и} \quad R = \frac{Nz^3}{K}$$

и, таким образом, для такого рода кривых получается следующее общее уравнение:

$$K-L+M-N=0.$$

Отсюда ясно, что C будет для кривой точкой такой кратности, сколько в показателе n будет содержаться единиц.

427. Таким образом, сюда прежде всего относятся все линии третьего порядка, где бы мы ни взяли точку C вне кривой. Затем в этом уравнении содержатся все линии четвертого порядка, если только точку C берут на самой кривой. В-третьих, сюда надо будет отнести все линии пятого порядка, у которых имеется двойная точка, если только точку C поместить в их двойной точке. Равным образом и линии более высоких порядков будут удовлетворять этому условию, если только они будут обладать кратными точками с таким показателем кратности, сколько n содержит единиц, если $n+3$ обозначает тот порядок, к которому относится рассматриваемое уравнение.

428. Пусть p, q, r будут те три значения z, которые получаются из уравнения

$$z^3-Pz^2+Qz-R=0$$

для всякого значения угла $CAM=\varphi$. Тогда в силу природы уравнений будет

$$P=p+q+r, \quad Q=pq+pr+qr \quad \text{и} \quad R=pqr.$$

Так как P и Q нельзя выразить рационально через x и y, то ясно, что невозможно указать такие кривые, у которых $p+q+r$ или pqr были бы постоянными количествами и к тому же нельзя положить равной постоянному количеству никакую нечетную функцию от p, q и r. Но их четным функциям можно придавать постоянное значение без всяких затруднений. Так, если потребовать, чтобы было

$$pq+pr+qr=a^2,$$

то будет

$$Q=\frac{Mz^2}{K}=a^2$$

и, значит, $M(x^2+y^2)=a^2K$. Если это значение подставить в уравнение $K-L+M-N=0$, то получится общее уравнение, которое содержит все кривые, обладающие указанным свойством:

$$M(x^2+y^2)-a^2L+a^2M-a^2N=0$$

или, если исключить M, такое:

$$(x^2+y^2)K-(x^2+y^2)L+a^2K-(x^2+y^2)N=0.$$

429. Равным образом легко разрешаются и другие подобные вопросы. Так, например, пусть требуется найти кривую, которая прямыми, проведенными через C, делится в трех точках на части так, что

$$p^2+q^2+r^2=a^2.$$

Действительно, так как

$$p^2+q^2+r^2=P^2-2Q \quad \text{и} \quad P=\frac{Lz}{K},$$

а также

$$Q = \frac{Mz^2}{K},$$

то получается

$$\frac{L^2z^2}{K^2} - \frac{2Mz^2}{K} = a^2,$$

то есть

$$(x^2+y^2)L^2 - 2(x^2+y^2)KM = a^2K^2.$$

Но для кривых, допускающих три пересечения, имеется общее уравнение $K - L + M - N = 0$, сущность которого состоит в том, что наибольшее число измерений x и y на три единицы превышает наименьшее их число. Следовательно, для того чтобы получить подобного рода уравнение и чтобы одновременно было

$$(x^2+y^2)L^2 - 2(x^2+y^2)KM = a^2K^2,$$

следует умножить первое уравнение на $2(x^2+y^2)K$, чтобы можно было исключить M, и тогда получится следующее общее уравнение, удовлетворяющее поставленному требованию:

$$2(x^2+y^2)K^2 - 2(x^2+y^2)KL + (x^2+y^2)L^2 - a^2K^2 - 2(x^2+y^2)KN = 0.$$

Действительно, членом, в состав которого входят наибольшие размерности, является $2(x^2+y^2)K^2$, который содержит в себе $2n+8$ размерностей x и y; низшим же членом является $2(x^2+y^2)KN$, и он содержит в себе $2n+5$ размерностей, как этого требует существо дела.

430. Так как, значит, ни высший, ни низший члены не могут исчезнуть, предположим, для того чтобы найти простейшую кривую, $n=0$; тогда будет $N=b^3$, $K=x(x^2+y^2)$ и $L=0$ и получится уравнение

$$2(x^2+y^2)^3x^2 - a^2x^2(x^2+y^2)^2 - 2b^3x(x^2+y^2)^2 = 0,$$

а последнее после разделения на $2x(x^2+y^2)^2$ даст уравнение

$$x(x^2+y^2) - \frac{1}{2}a^2x - b^3 = 0,$$

которое принадлежит к третьему порядку. Если же будет не $L=0$, а

$$L = 2c(x^2+y^2),$$

то получится уравнение четвертого порядка

$$x^2(x^2+y^2) - 2cx(x^2+y^2) + 2c^2(x^2+y^2) - \frac{1}{2}a^2x^2 - b^3x = 0$$

или

$$x^2(x^2+y^2) + (2c-x)^2(x^2+y^2) = a^2x^2 + 2b^3x.$$

Аналогичным путем можно и для более высоких порядков получить много других кривых, удовлетворяющих условию.

431. Далее, можно также получить кривые линии, у которых $p^4 + q^4 + r^4$ является постоянным количеством. Действительно, так как

$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 + 4P^2Q + 2Q^2 + 4PR,$$

следует положить

$$P^4 - 4P^2Q + 2Q^2 + 4PR = c^4.$$

Таким образом, будет

$$z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^4K^4$$

и, стало быть,

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2);$$

если отсюда значение N подставить в уравнение $K - L + M - N = 0$, то получится общее уравнение для кривых линий, удовлетворяющих поставленному условию.

432. Но можно одновременно удовлетворить условию $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ и прежнему условию $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Действительно, для этого должно быть

$$z^2L^2 - 2z^2KM = a^2K^2,$$

откуда получается

$$2z^2KM = z^2L^2 - a^2K^2.$$

Затем; так как

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4,$$

то будет

$$4K^2Lz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2a^2K^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

и

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lz^2.$$

Подставим эти значения вместо M и N в уравнение $K - L + M - N = 0$, то есть в уравнение

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0,$$

и тогда получится для кривой следующее уравнение:

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lz^2 - c^4K^4 - \\ - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

Но в силу того, что

$$KMz^2 = \frac{1}{2}L^2z^2 - \frac{1}{2}a^2K^2,$$

будем иметь

$$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - a^2K^2L^2z^2 + \frac{1}{2}a^4K^4.$$

Значит, для искомых кривых получится следующее общее уравнение:

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lz^2 - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + a^4K^4 = 0.$$

433. Так как K должно быть однородной функцией количеств x и y размерности на одну единицу выше, чем L, то простейшая кривая, для которой три пересечения одновременно дадут $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ и $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, получится, если положить $K = z^2$ и $L = bx$. Итак,

будет

$$8bxz^6 - 8b^2x^2z^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0;$$

последнее уравнение, поскольку $z^2 = x^2 + y^2$, является рациональным и дает линию седьмого порядка, у которой C является четверной точкой. Но можно получить и другую линию седьмого порядка, которая удовлетворяет условию, если положить $K = x$ и $L = b$. Действительно, тогда будет

$$8bx^3z^4 - 8b^2x^2z^4 + 4b^3xz^4 - 4a^2bx^3z^2 - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4x^4 = 0,$$

то есть

$$z^4 = \frac{4a^2bx^3z^2 - 2a^2b^2x^2z^2 + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8b^2x^2 + 4b^3x - b^4}.$$

Отсюда получаем

$$z^2 = \frac{2a^2bx^3 - a^2b^2x^2 \pm x^2\sqrt{(2bx - b^2)\,[2c^4(b^2 - 2bx + 4x^2) - 2a^4(b^2 - 2bx + 2x^2)]}}{b(2x - b)(4x^2 - 2bx + b^2)}.$$

434. Дальше можно было бы перейти к кривым, которые пересекаются в четырех точках прямыми, проведенными через точку C, и найти те линии, которые обладают определенными свойствами. Но если мы примем во внимание сделанные раньше указания, то здесь не встретится никаких затруднений, и все, чего можно пожелать в этом роде, либо будет достигнуто почти без всякого усилия, либо, если поставленный вопрос не допускает действительного решения, выясняется сразу. Поэтому я на этом предмете больше не задерживаюсь и перейду к другой теме, относящейся к исследованию кривых линий.

ГЛАВА XVIII

О ПОДОБИИ И АФФИННОСТИ[1] КРИВЫХ ЛИНИЙ

435. В состав каждого уравнения для кривой, помимо прямоугольных координат x и y, должны входить постоянные количества, либо одно, либо несколько, как, например, a, b, c и т. д., которые обозначают постояннные линии и которые совместно с переменными x и y повсюду создают одинаковое число измерений. Ибо если в одном члене имеется произведение n линий, которые умножены друг на друга, то необходимо, чтобы во всех остальных членах было умножено друг на друга такое же количество линий, так как в противном случае должны были приравниваться друг к другу разнородные количества, что не может получиться. Поэтому в каждом уравнении для кривой линии постоянные линии a, b, c и т. д. вместе с переменными x и y повсюду составляют одинаковое число измерений, разве только, может быть, какая-нибудь постоянная линия выражается в виде единицы или же какого-нибудь другого абсолютного числа. Из сказанного следует, что если в уравнении нет никаких постоянных линий, то одни лишь переменные x и y должны повсюду давать одно и то же число измерений и, стало быть, должны составлять однородную функцию. Но раньше мы уже видели, что подобного рода уравнения относятся не к кривым линиям, а представляют несколько прямых, которые взаимно пересекаются в одной и той же точке.

436. Итак, рассмотрим уравнение, в состав которого, кроме двух переменных x и y, входит одна постоянная линия a, так что эти три линии a, x и y всюду в уравнении образуют одно и то же число измерений. Стало быть, такого рода уравнение, по мере того как постоянной линии a придаются все новые и новые значения, даст бесконечно много кривых линий, которые будут отличаться друг от друга лишь количественно[2], а в остальном будут совершенно подобны друг другу. Следовательно, все кривые линии, которые указанным образом содержатся в одном и том же уравнении, с полным основанием относят к одному и тому же роду линий и считают подобными друг другу, и различие между ними усматривают не больше того, какое существует между кругами различного размера.

437. Для того чтобы лучше воспринять такое подобие, рассмотрим вполне определенное уравнение, которое, помимо переменных x и y,

[1] affinitas.

[2] quae tantum quantitate a se invicem discriparent.

содержит единственную постоянную линию, обычно называемую *параметром*:

$$y^3 - 2x^3 + ay^2 - a^2x + 2a^2y = 0.$$

Пусть (рис. 88) AC будет значением параметра a, и пусть при $AC = a$ AMB будет той кривой линией, которая содержится в приведенном выше уравнении, причем прямая AB взята в качестве оси и координаты обозначены $AP = x$ и $PM = y$. Придадим теперь параметру a какое-нибудь другое значение ac (рис. 89), и пусть amb будет та кривая

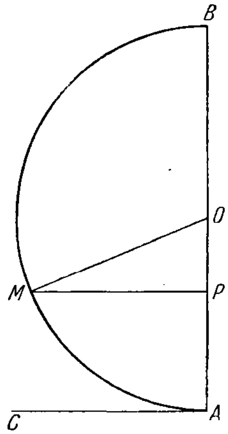

Рис. 88.

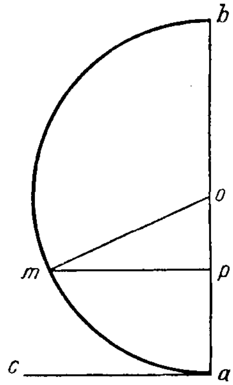

Рис. 89.

линия, которую представляет теперь это уравнение. Тогда эти линии AMB и amb будут подобны друг другу. Действительно, если остается $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, и если будет $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$, то мы возьмем, конечно, $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, и тогда будет $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; ибо если вместо a, x и y написать соответственно $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$ и $\frac{y}{n}$, то уравнение останется неизменным, так как все члены его будут разделены на n^3.

438. Таким образом, подобные кривые обладают тем свойством, — из которого еще лучше выявляется природа подобия, — что если взять абсциссы AP, ap в отношении параметров AC и ac, то ординаты PM и pm будут находиться в том же отношении друг к другу, то есть если взять

$$AP : ap = AC : ac,$$

то будет

$$PM : pm = AC : ac.$$

Так как при этом

$$AP : PM = ap : pm,$$

то эти кривые будут в геометрическом смысле подобны друг другу и, за вычетом количественных отношений [1]), будут обладать совершенно одинаковыми свойствами. Так, например, если взять абсциссы Ap, ap гомологичными, то есть пропорциональными параметрам AC и ac, то не только ординаты PM и pm будут в том же отношении, что и параметры, но в этом отношении будут и все другие линии, проведенные аналогичным образом, так что и дуги AM и am кривых линий будут относиться друг к другу, как AC и ac. Тогда, конечно, подобные площади APM и apm будут находиться в удвоенном отношении друг к другу, т. е. в отношении AC^2 к ac^2. А если взять какие-нибудь две гомологичные точки O и o, так что $AO : ao = AC : ac$, и из этих точек провести под одинаковыми углами AOM, aom к кривым прямые OM и om, то будет также

$$OM : om = AC : ac.$$

Наконец, вследствие подобия касательные линии в гомологичных точках M и m будут также одинаково наклонены и, стало быть, радиусы соприкосновения будут находиться друг к другу в отношении параметров AC и ac.

439. Отсюда ясно, что все круги представляют собою подобные фигуры, которые выражаются уравнением $y^2=2ax-x^2$. Равным образом и все кривые, которые содержатся в уравнении $y^2=ax$, т. е. все параболы, являются подобными друг другу фигурами. А так как в уравнениях такого рода, что в них содержатся подобные линии, координаты x и y вместе с параметром a дают во всех членах одинаковое число измерений, то при определении из этих уравнений значения y окажется, что оно равно однородной функции одного измерения количеств a и x. Следовательно, и обратно, если P обозначает однородную функцию одного измерения количеств a и x, то уравнение $y=P$ будет содержать в себе бесконечно много подобных друг другу кривых линий, которые будут получаться, если параметру a последовательно придавать все новые и новые значения. Совершенно так же из уравнений такого рода для подобных кривых абсцисса x получится равной функции одного измерения от a и y, а самый параметр a окажется равным функции одного измерения от x и y.

440. А если дана какая-нибудь кривая AMB, то практически легко вычертить бесконечно много других линий amb, подобных заданной. А именно, следует взять какое-нибудь определенное отношение, в каком должны находиться между собою гомологичные дуги [2]) заданной и описываемой кривой,— пусть это отношение будет равно $1:n$,— и тогда, отнеся заданную кривую AMB к оси AB с помощью ортогональных координат AP и PM, возьмем на подобной оси ab абсциссу ap таким образом, чтобы было $AP : ap=1 : n$, и из p проведем под прямым углом ординату pm, чтобы было точно так же $PM : pm=1 : n$; тогда получится точка m на подобной кривой amb, так что точки M и m окажутся гомологичными. Кривую можно также вычертить, исходя из какой-нибудь определенной точки O. Действительно, если на кривой, которую надлежит описать, также взять определенную точку o, затем брать угол aom всегда равным AOM и откладывать отрезок om так, чтобы было

$$OM : om = 1 : n,$$

[1]) quantitate excepta.
[2]) latera homologa.

то точка m опять окажется на подобной кривой amb. Таким способом можно вычертить подобную кривую, взяв любое, какое пожелаем, отношение $1:n$. Обычно для этой цели устраивают механические инструменты, с помощью которых можно вычертить фигуры любой величины, подобные заданной.

441. Таким образом, когда природа заданной кривой AM выражается каким-нибудь уравнением между координатами $AP=x$ и $PM=y$, то без труда можно получить уравнение для подобной ей кривой am. Действительно, пусть подобная абсцисса $ap=X$ и ордината $pm=Y$. Тогда по построению будет $x:X=1:n$ и $y:Y=1:n$, откуда получается

$$x=\frac{X}{n} \quad \text{и} \quad y=\frac{Y}{n}.$$

Следовательно, если эти значения подставить в заданное уравнение между x и y, то получится уравнение между X и Y для подобных кривых. Поэтому, если считать, что в этом новом уравнении только координаты X и Y с буквой n создают размерности, то число размерностей будет повсюду равно нулю; или же если уравнение для освобождения от дробей умножить на какую-нибудь степень n, то получится уравнение, в котором количества X, Y и n повсюду дадут одинаковое число измерений. Но раньше мы видели, что в каждом уравнении для подобных кривых обе координаты повсюду образуют одно и то же число измерений вместе с той постоянной, при изменении которой получаются подобные кривые, так что это является критерием для уравнений, которые содержат в себе подобные кривые.

442. В соответствии с тем, как у подобных кривых гомологичные абсциссы и ординаты либо увеличиваются, либо уменьшаются в одном и том же отношении, в том случае, когда абсциссы следуют одному отношению, а ординаты другому, кривые уже не будут подобными. Но так как возникающие при этом кривые находятся между собою в некоторой связи, то мы назовем эти кривые линии *аффинными*. Таким образом, аффинность содержит в себе подобие в качестве особого вида, так как аффинные линии переходят в подобные, когда те два отношения, которым следуют отдельно абсциссы и ординаты, становятся равными между собою. Стало быть, если дана какая-нибудь кривая линия AMB, то можно получить бесчисленные аффинные кривые (рис. 88 и 89) amb следующим способом: надо взять абсциссу ap таким образом, чтобы было $AP:ap=1:m$; затем провести ординату pm таким образом, чтобы было $PM:pm=1:n$. Указанным путем, изменяя оба эти отношения $1:m$ и $1:n$ или же одно из них, можно получить бесчисленные кривые, которые будут аффинными по отношению к первой кривой AMB [67].

443. Пусть природа заданной кривой AMB выражается каким-нибудь уравнением между прямоугольными координатами $AP=x$ и $PM=y$ и пусть на аффинной кривой amb, описанной, как изложено выше, взята абсцисса $ap=X$ и ордината $pm=Y$; так как

$$x:X=1:m \text{ и } y:Y=1:n,$$

будем иметь

$$x=\frac{X}{m} \quad \text{и} \quad y=\frac{Y}{n}.$$

Следовательно, если эти значения подставить в заданное уравнение между x и y, то получится общее уравнение между X и Y для аффинных линий. Для того чтобы более глубоко выявить природу этого уравнения, предположим, что уравнение для заданной кривой AMB образовано так, что ордината y равняется некоторой функции x, которая пусть $= P$, т. е. что $y = P$. Следовательно, если в P вместо x подставить $\frac{X}{m}$, то P будет функцией нулевого измерения от X и m и, значит, общее уравнение для аффинных кривых будет иметь такую структуру, что $\frac{Y}{n}$ будет равно функции нулевого измерения количеств x и m, или, что сводится к тому же, функция нулевого измерения количеств Y и n будет равняться функции нулевого измерения количеств X и m.

444. Но различие между подобными кривыми линиями и аффинными состоит главным образом в том, что кривые, которые являются подобными по отношению к некоторой оси или по отношению к неподвижной точке, остаются подобными и по отношению к любым другим гомологичным осям или точкам. А кривые, которые являются лишь аффинными, оказываются таковыми только по отношению к тем осям, к которым их относят, и нельзя произвольно выбрать другие оси или другие гомологичные точки, к которым можно было бы отнести аффинность. Впрочем, следует отметить, что аналогично тому, как все подобные кривые линии относятся к одному и тому же порядку линий и даже к одному и тому же роду линий, аффинные линии всегда относятся к одному и тому же порядку и к одному и тому же роду. Для того чтобы это стало более ясным, следует проиллюстрировать подобие и аффинность на нескольких примерах, беря более известные кривые.

445. Итак, пусть заданная кривая представляет собою отнесенную к диаметру окружность, природа которой выражается уравнением $y^2 = 2cx - x^2$. Положим

$$x = \frac{X}{n} \quad \text{и} \quad y = \frac{Y}{n};$$

тогда получающееся уравнение между X и Y охватит все подобные кривые. Мы будем тогда иметь

$$\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{X^2}{n^2},$$

то есть

$$Y^2 = 2ncX - X^2.$$

Отсюда ясно, что все кривые, подобные окружности, также являются окружностями, у которых диаметры $2nc$ разнятся между собою как угодно. А для того чтобы найти кривые, аффинные окружности, положим

$$x = \frac{X}{m} \quad \text{и} \quad y = \frac{Y}{n};$$

тогда получится

$$\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{m} - \frac{X^2}{m^2}$$

или

$$m^2Y^2 = 2mn^2cX - n^2X^2;$$

последнее представляет собою общее уравнение эллипса, отнесенное к одной из его главных осей. Отсюда понятно, что все эллипсы являются кривыми линиями, аффинными окружности. Стало быть, все эллипсы являются также линиями, аффинными друг другу. Равным образом можно также понять, что все гиперболы являются аффинными друг другу кривыми. Но эллипсы, а также гиперболы, у которых одинаково отношение между двумя главными осями, являются подобными друг другу кривыми.

446. Что касается параболы, которая выражается с помощью уравнения $y^2=cx$, то, конечно, ясно, что все подобные ей кривые тоже являются параболами, и к тому же все параболы суть кривые, подобные друг другу. Но если мы будем искать кривые, аффинные параболе, и положим

$$y=\frac{Y}{n} \quad \text{и} \quad x=\frac{X}{m},$$

то получится уравнение $Y^2=\frac{n^2c}{m}X$; так как это последнее также является уравнением для параболы, то ясно, что те кривые, которые аффинны по отношению к параболе, одновременно подобны параболе. Таким образом, в данном случае подобие обладает столь же широким охватом, как и аффинность. То же самое имеет место у всех кривых линий, природа которых выражается с помощью уравнения, состоящего лишь из двух членов, как, например, $y^3=c^2x$, $y^3=cx^2$, $y^2x=c^3$ и т. д. Таким образом, те кривые, которые обладают аффинностью то ли по отношению к параболическим, то ли по отношению к гиперболическим кривым, вместе с тем подобны этим линиям. Такого рода совпадения нет у кривых другого рода, как мы уже отметили это выше по отношению к окружности и эллипсу.

447. Как из заданного уравнения между x и y, сколько бы в него ни входило постоянных количеств a, b, c и т. д., получается одна определенная кривая линия, если каждому постоянному придать определенное значение, так в том случае, когда одно из постоянных, скажем a, принимаем изменяющимся и приписываем ему последовательно все новые и новые значения, для каждого отдельного значения получается особая кривая и в целом получится бесконечно много кривых, подобных друг другу, если помимо a в состав уравнения не входят какие бы то ни было другие постоянные линии, и не подобных в противном случае. А если кроме a будет изменяться и постоянное b, то в результате изменения этого последнего для каждого отдельного значения a получится бесконечно много кривых линий и, таким образом, в общем итоге в результате изменения двух постоянных a и b получится бесконечно много различных кривых линий. Если, сверх того, допустить, что имеется еще третье изменяющееся постоянное c, то получится еще в бесконечное число раз большее количество различных кривых линий. Таким образом, чем больше число постоянных, которые становятся изменяющимися, тем большей степенью бесконечности выразится число кривых, которые при этом получаются.

448. Но рассмотрим несколько более внимательно то бесконечное количество кривых линий, которое получается из одного уравнения, если считать изменяющейся лишь одну из постоянных линий. А подобного рода уравнение, если оставить неизменными ось и начало абсцисс, не только дает бесконечно много этих кривых, но и указывает их положение, так что эти бесчисленные кривые заполняют некоторое пространство, и в послед-

нем нельзя указать точки, через которую не проходила бы какая-нибудь из этих бесчисленных кривых. Следовательно, в зависимости от того, какова будет структура уравнения, эти бесчисленные кривые будут или не будут подобны друг другу, как об этом можно судить на основании вышесказанного. Может даже случиться, что все эти кривые будут не только подобны, но и равны друг другу, а отличаться будут друг от друга лишь своим положением. Так, например, уравнение

$$y = a + \sqrt{2cx - x^2},$$

если считать a изменяющимся, даст бесчисленное множество равных окружностей радиуса $= c$, центры которых расположены на прямой, нормальной к оси.

449. Отсюда и, наоборот, когда одну и ту же кривую линию описывают на плоскости в бесконечном множестве различных положений, следуя определенному закону, можно указать уравнение, которое путем изменения одного лишь постоянного дает сразу всю эту бесконечность равных между собою кривых. Пусть кривой, представленной в бесконечно многих положениях, будет окружность (рис. 90), радиус которой $= c$, и пусть ее описывают бесконечно много раз таким образом, что вершины A, a образуют заданную кривую, которую назовем *директрисой*. При этом диаметры ab пусть все время остаются параллельными оси AB. Итак, для того чтобы найти уравнение для этого бесконечного множества окружностей, возьмем какую-нибудь точку a директрисы и опустим из нее перпендикуляр aK на главную ось. Положим $AK = a$, и так как директриса дана, мы будем иметь Ka через a. Пусть, следовательно, $Ka = A$, и тогда A будет некоторой определенной функцией a. Затем из точки a проведем линию ab, параллельную главной оси, которая будет диаметром окружности, имеющей вершину в точке a директрисы, и из какой-нибудь точки m окружности проведем ординату $mP = y$, соответствующую абсциссе $AP = x$. Таким образом, получим

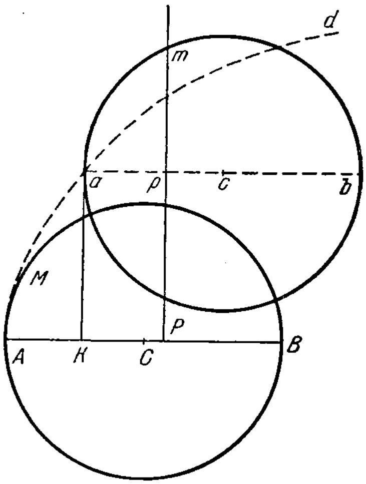

Рис. 90.

$$ap = x - a \quad \text{и} \quad pm = y - A.$$

А если положить $ap = t$ и $pm = u$, то в силу природы окружности $u^2 = 2ct - t^2$; а так как $t = x - a$ и $u = y - A$, то будет

$$(y - A)^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2,$$

и это будет общим уравнением, охватывающим все окружности, расположенные на директрисе Aad описанным способом. Следовательно, если изменять линию a, от которой зависит и значение A, то все эти окружности получатся из найденного выше уравнения.

450. Точно так же, если вместо окружности перемещать вдоль вычерченной директрисы Aad какую-нибудь другую кривую линию amb таким образом, чтобы ее вершина или начало абсцисс a всегда находились на

директрисе и чтобы ось ab оставалась все время параллельной самой себе, то получится та же самая кривая линия, описанная бесконечно много раз, и можно будет найти уравнение, которое будет охватывать одновременно все эти линии. Пусть природа этой передвигающейся линии задана с помощью уравнения между координатами $ap=t$ и $pm=u$ и примем в качестве главной оси, к которой будем относить все рассматриваемые кривые, прямую AB, параллельную осям ab, которая одновременно является осью директрисы Aad. Если затем положить, как раньше, $AK=a$ и $Ka=A$, так что A будет некоторой функцией a, и обозначить абсциссу AP через x, а ординату Pm через y, то получим $t=x-a$ и $u=y-A$. Следовательно, если эти значения подставить вместо t и u в заданное уравнение между t и u, то получится общее уравнение, охватывающее сразу все кривые amb. Ибо, какое бы мы ни сообщили определенное значение количеству a, в результате получится одна какая-нибудь кривая amb из бесконечного множества кривых, которые описываются указанным выше уравнением. Так, например, если кривая amb будет параболой, выражаемой уравнением $u^2=ct$, то в этом случае бесчисленные равные друг другу параболы, вершины которых расположены по директрисе Aad, а оси параллельны прямой линии AB, будут содержаться в следующем уравнении:

$$(y-A)^2=c(x-a).$$

451. Выше мы допустили, что вершина кривой A перемещается по заданной криволинейной директрисе таким образом, что ось кривой все время остается параллельной самой себе; однако пока вершина перемещается по заданной кривой, положение оси кривой ab также может изменяться любым образом, и таким способом можно в гораздо более общем виде получить уравнение для одной и той же кривой, описанной бесконечное число раз на заданной плоскости, согласно какому-нибудь закону. Для того чтобы изложить это яснее, допустим, во-первых (рис. 91), что вершина A кривой движется по окружности Aa таким образом, что ось кривой линии ab всегда направлена к центру O круга. Таким образом, осуществив вращательное движение кривой AMB вместе с осью BAO вокруг точки O, мы покажем все бесконечно многие различные положения кривой AMB, и все эти положения нужно охватить одним уравнением, имеющим в своем составе некоторое постоянное, которое способно изменяться.

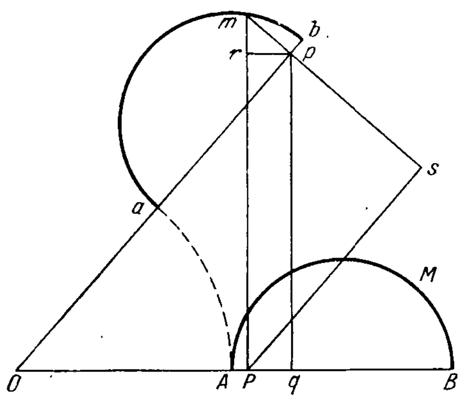

Рис. 91.

452. Пусть неизменный радиус $AO=aO=c$, и пусть угол $AOa=\alpha$; последний, согласно допущению, может изменяться. Из какой-нибудь точки m кривой, взятой в некотором положении amb, опустим на прямую OAB, взятую в качестве главной оси, ординату mP, и тогда будет $OP=x$ и $Pm=y$. Затем из точки m опустим также на собственную ось ab кривой amb перпендикуляр mp. Если обозначить $ap=t$ и $pm=u$, то получится неиз-

меняющееся уравнение между t и u, которое выражает природу кривой amb. Из точки P проведем параллельно Ob линию Ps, которую ордината mp, будучи продолжена, пересечет в точке s, и тогда будем иметь

$$ps = x\sin\alpha, \qquad Op - Ps = x\cos\alpha;$$

а затем, ввиду того, что

$$\text{угол } Pms = AOa = \alpha,$$

получаем

$$Ps = y\sin\alpha \quad \text{и} \quad ms = y\cos\alpha.$$

Отсюда

$$Op = c + t = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad \text{и} \quad mp = u = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Таким образом, в заданное уравнение между t и u следует подставить

$$t = x\cos\alpha + y\sin\alpha - c \quad \text{и} \quad u = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

и тогда получится общее уравнение между координатами x и y, в котором, если допустить, что угол α меняется, содержатся все кривые amb.

453. Пусть теперь вершина кривой AMB (рис. 92) перемещается по какой угодно директрисе AaL; при этом положение оси ab будет, конечно, постоянно изменяться так, что угол AOa будет некоторым образом зависеть от точки a. Так, например, пусть, когда вершина находится в a, $AK = a$ и $Ka = A$, а также пусть угол $AOa = \alpha$. Так как директриса задана, то A будет некоторой известной функцией a; равным образом синус и косинус угла α будут какими-то функциями a. При этих обозначениях имеем

$$KO = \frac{A}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{и} \quad Oa = \frac{A}{\sin\alpha}.$$

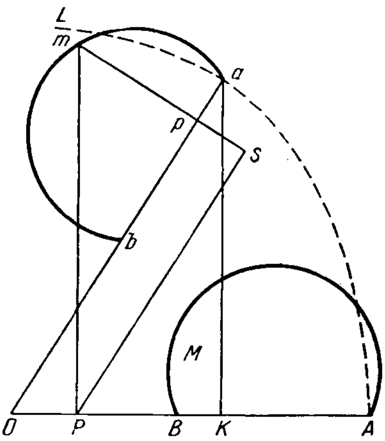

Рис. 92.

Прежде всего из какой-нибудь точки m кривой amb опустим перпендикуляр mP на главную ось AO, а затем на собственную ось кривой опустим перпендикуляр mp, и пусть $AP = x$, $Pm = y$ и $ap = t$, $pm = u$; тогда получится неизменное уравнение между x и y, из которого можно определить изменяющееся уравнение между x и y, охватывающее все кривые линии amb.

454. С этой целью опустим из P на продолжение линии mp перпендикуляр Ps, который будет параллелен оси abO кривой. Тогда, поскольку угол $Pms = AOa = \alpha$, будем иметь

$$Ps = y\sin\alpha \quad \text{и} \quad ms = y\cos\alpha.$$

Затем, в силу того, что

$$OP = a + \frac{A}{\operatorname{tg}\alpha} - x,$$

будет

$$ps = a\sin\alpha + A\cos\alpha - x\sin\alpha$$

и

$$Op - Ps = a\cos\alpha + \frac{A\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - x\cos\alpha.$$

Отсюда получаем

$$Op = a\cos\alpha + \frac{A\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{A}{\sin\alpha} - t$$

и, значит,

$$t = A\sin\alpha - a\cos\alpha + x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

и

$$u = -a\sin\alpha - A\cos\alpha + x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

В силу изложенного, если в заданное уравнение между t и u подставить

$$t = (x - a)\cos\alpha - (y - A)\sin\alpha$$

и

$$u = (x - a)\sin\alpha + (y - A)\cos\alpha,$$

то получится искомое уравнение между x и y. Следовательно, по какому бы закону ни описывалась на плоскости бесконечное число раз кривая amb, по изложенному способу можно найти общее уравнение, которое содержит в себе одновременно все эти кривые.

455. Итак, указанным путем мы охватим одним уравнением бесконечно много одинаковых кривых, когда они отличаются друг от друга лишь своим положением, если только полученное уравнение между t и u является неизменным и совершенно не заключает в себе какого бы то ни было постоянного a, которое можно было бы изменять. Но если в уравнение между t и u войдут одно или несколько постоянных, которые можно считать зависящими от a, то мы получаем бесконечно много различных кривых, подобных или не подобных друг другу, которые содержатся в одном и том же уравнении. Эти кривые будут подобны друг другу в том случае, когда уравнение между t и u таково, что u равняется какой-нибудь однородной функции первого измерения от t и f, где f есть количество, как угодно зависящее от a. В противном случае кривые не будут подобны друг другу.

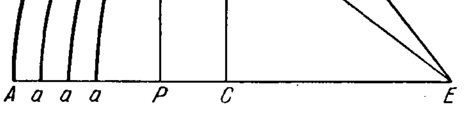

Рис. 93.

456. Для того чтобы пояснить сказанное выше на примере, представим себе (рис. 93) бесконечно много окружностей AB, aB, amB, проходящих через заданную точку B, причем центры всех этих окружностей расположены на прямой AE; подобного рода окружностями обычно представляют меридианы на географических картах. Опустим из точки B перпендикуляр на прямую линию AC, и пусть $BC = c$; этот отрезок является неизменным. Рассмотрим теперь какую-нибудь одну из бесчисленных окружностей amB. Если опустим здесь

ординату mP, то будет $CP=x$ и $Pm=y$ и, далее, хотя радиус этой окружности по отношению к одной и той же окружности является постоянным, но по отношению ко всем окружностям он является переменным: положим $aE = BE = a$. Тогда будет

$$CE=\sqrt{a^2-c^2} \quad \text{и} \quad PE=x+\sqrt{a^2-c^2}.$$

Так как, стало быть, $PE^2+Pm^2=a^2$, то

$$y^2+x^2+2x\sqrt{a^2-c^2}+a^2-c^2=a^2,$$

то есть

$$y^2=c^2-2x\sqrt{a^2-c^2}-x^2;$$

а если вместо подлежащего изменению постоянного ввести в уравнение отрезок $CE=a$, то получится несколько более простое уравнение

$$y^2=c^2-2ax-x^2,$$

которое в силу изменчивости a представит решительно все окружности, проходящие через точку B и имеющие центры на прямой линии AE. Аналогичным образом можно с помощью одного уравнения представить бесконечное множество любых кривых, подчиняющихся какому-нибудь определенному закону, если только надлежащим образом проводить различие между постоянными, которые можно изменять, и собственно неизменными количествами.

ГЛАВА XIX

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ КРИВЫХ ЛИНИЙ [68]

457. В предыдущих главах мы уже неоднократно видели, каким образом кривые линии пересекаются прямыми, и мы показали там, что линии второго порядка не могут быть пересечены прямыми более чем в двух точках, линии третьего порядка—более чем в трех точках, линии же четвертого порядка допускают не больше четырех пересечений, и так далее. А так как в настоящей главе я поставил себе целью определить количество взаимных пересечений, которые получаются у двух каких-нибудь кривых, то это исследование надо будет начать с прямых и определить те точки, в которых любая прямая может пересечь данную кривую. Этим мы подготовим путь для определения взаимных пересечений кривых линий, а этот предмет обычно весьма широко применяется при построении уравнений [69] высших степеней, о чем я буду пространнее говорить в следующей главе.

458. Итак, пусть предложена (рис. 94) какая-нибудь кривая AMm, природа которой задана с помощью уравнения между прямоугольными координатами $AP=x$, $PM=y$. Проведем какую-нибудь прямую BMm; требуется определить, в скольких и каких именно точках она пересечет кривую AMm. С этой целью следует найти уравнение прямой при тех же прямоугольных координатах x и y, отнесенное к той же оси AP и к тому же началу абсцисс A. Стало быть, уравнение для прямой линии будет иметь следующий вид: $\alpha x+\beta y=\gamma$. Из последнего видно, что если положить $x=0$, то получится $y=AD=\frac{\gamma}{\beta}$, а

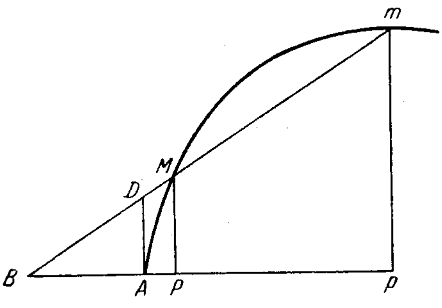

Рис. 94.

если положить $y=0$, то получится $-AB=\frac{\gamma}{\alpha}$, откуда выявляется точка пересечения B этой прямой линии с осью, а также значение угла у точки B, тангенс которого $=\frac{AD}{AB}=-\frac{\alpha}{\beta}$. Указанным путем как кривая, так и рассматриваемая здесь прямая линия выражаются с помощью уравнений между одними и теми же координатами x и y.

459. Если в обоих приведенных выше уравнениях мы будем все время брать абсциссы x одинаковыми, то ординаты y, если они будут различными, покажут, на каком расстоянии друг от друга находятся точки кривой и прямой, соответствующие одной и той же абсциссе. Следовательно, если из обоих уравнений получится одинаковое значение ординаты y, то, значит, в этом месте кривая и прямая имеют общую точку и, стало быть, в этом месте происходит пересечение. Следовательно, для того чтобы найти эти пересечения, следует допустить, что и в том и в другом уравнении, помимо абсцисс x, равны между собою и ординаты y, так что получаем два уравнения, содержащих в себе два неизвестных количества x и y, и в результате решения этих уравнений определяются либо абсциссы x, которым соответствуют эти пересечения, либо же ординаты y. Так вот, если из указанных выше двух уравнений исключить неизвестное y, то получится уравнение, которое будет содержать в себе лишь одно неизвестное x, значения которого дадут абсциссы AP, Ap; отсюда надо будет провести ординаты PM, pm, которые пройдут через точки пересечения M и m.

460. Так как уравнением для прямой BMm является $\alpha x+\beta y=\gamma$, то из последнего получается $y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$. Если это значение подставить вместо y в уравнение для кривой, то получится уравнение, содержащее в себе лишь x, действительные корни которого дадут все абсциссы, которым соответствуют пересечения и, стало быть, можно будет судить о количестве пересечений на основании числа действительных корней для x, которое дает найденное уравнение. А так как в выражение для $y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$ неизвестное x входит в первом измерении, то после подстановки получится уравнение, в котором x будет иметь не больше измерений, чем раньше в уравнении для кривой имели совместно x и y. Следовательно, x будет иметь такое же число измерений или же меньшее, если, конечно, в результате подстановки исчезнут более высокие степени x.

461. После того как указанным путем найдены абсциссы AP, Ap, соответствующие пересечениям, с их помощью легко найти точки пересечений M и m. Действительно, так как ординаты, восстановленные в точках P и p, проходят через точки пересечения, то следует лишь отметить те точки, где эти ординаты пересекают прямую BMm. Можно было бы отметить и точки, в которых ординаты пересекают кривую AMm; но так как зачастую одна ордината пересекает кривую в нескольких точках, то было бы неизвестно, какая, собственно, точка кривой дает в то же время точку пересечения. Это неудобство отпадает, если пересечения отмечаются на прямой BMm, так как последняя может быть пересечена любой ординатой лишь в одной точке. Но если бы случилось, что два значения x окажутся равными друг другу, то в этом случае две точки пересечения M и m сольются в одну точку. Стало быть, в этом случае либо прямая линия BM окажется касательной к кривой, либо же пересечет ее в двойной точке.

462. Если после исключения неизвестного y получающееся уравнение, которое должно определить x, не имеет никакого действительного корня, то это служит свидетельством того, что прямая BMm нигде не пересекает и не касается кривой линии. Действительные же корни этого уравнения

(сколько бы их ни было) указывают на существование такого же числа пересечений, так как каждой действительной абсциссе соответствует одна действительная ордината прямой BMm; и так как ордината кривой линии ей равна, то невозможно, чтобы здесь не было никакого пересечения. Здесь будет уместно отметить, что при пересечении кривых линий не всегда все корни дают такое же количество пересечений. Причина этого станет понятна в скором времени, когда мы рассмотрим две кривые и исследуем их пересечения.

463. Итак, пусть описаны (рис. 95) две какие-либо кривые MEm и MFm, которые взаимно пересекаются. Для того чтобы определить их пересечения, выразим природу каждой из этих линий с помощью уравнения в прямоугольных координатах x и y, отнесенных к одной и той же общей оси AB и к одному и тому же началу координат A. Стало быть, если взять для обеих кривых равные абсциссы x, то там, где происходят пересечения, совпадут и ординаты y. Поэтому, когда из обоих предложенных уравнений кривых после исключения y образуется новое уравнение, в которое в качестве неизвестного войдет только x, то все пересечения M, m, m, каково бы ни было их число, будут выявлены с помощью действительных корней этого уравнения. Это значит, что абсциссы AP, Ap, Ap и т. д., которые соответствуют пересечениям M, m, m и т. д., представляют собою значения x, удовлетворяющие этому уравнению.

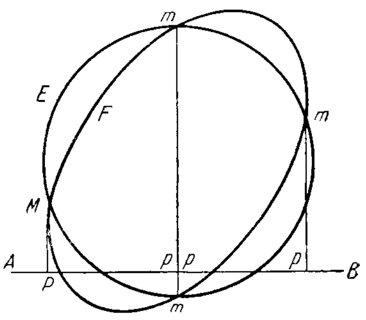

Рис. 95.

464. Однако после того, как будут найдены упомянутые абсциссы AP, Ap и т. д., которые соответствуют пересечениям, не столь легко будет найти самые точки пересечений. Действительно, если у каждой из этих кривых одной и той же абсциссе AP соответствует несколько ординат, что имеет место, когда для этих кривых y будет многозначной функцией x, то надо будет из этого множества ординат выбрать те ординаты, которые равны между собою. Это исследование тем более утомительно, чем большее число значений принимает ордината той и другой кривой. Но это затруднение можно легко обойти, если при исключении ординаты y из двух предложенных уравнений воспользоваться тем уравнением, которое определяет y через x; ибо из этого уравнения для каждого найденного значения x может быть определена величина ординаты, проведенной от точки P до точки пересечения, и для этого не потребуется исследовать природу той или иной из кривых, или же обеих кривых.

465. Пусть одна из этих кривых будет параболой, природа которой выражается уравнением

$$y^2-2xy+x^2-2ax=0,$$

а другая кривая пусть будет окружностью, которая выражается уравнением

$$y^2+x^2-c^2=0.$$

Для исключения y вычтем первое уравнение из второго, и тогда в итоге остается

$$2xy+2ax-c^2=0, \quad \text{откуда} \quad y=\frac{c^2-2ax}{2x};$$

из последнего уже видно, что какие бы [действительные] значения ни получались для x, для y соответственно всегда будут получаться действительные значения. Подставим значение, найденное для y, во второе уравнение, и тогда получится

$$c^4-4ac^2x+4(a^2-c^2)x^2+4x^4=0.$$

Каждый действительный корень этого уравнения даст фактическое пересечение. Положим $c=2a$ и, стало быть,

$$4a^4-4a^3x-3a^2x^2+x^4=0;$$

одним из корней этого уравнения является $x=2a$; после исключения последнего останется уравнение

$$x^3+2ax^2+a^2x-2a^3=0,$$

которое дает еще один действительный корень. Ординаты, соответствующие как первому, так и второму корню, получаем из уравнения $y=\frac{2a^2-ax}{x}$. Первому корню, то есть $x=2a$, будет соответствовать $y=0$, так что пересечение произойдет на самой оси.

466. Отсюда понятно, что во всех случаях, когда оба уравнения между x и y таковы, что в результате исключения y получается рациональная функция x, которая равна y, каждый действительный корень x, который получается из последнего уравнения (после того как y полностью исключен), даст действительное пересечение. Но если при исключении не находим никакой рациональной функции x, которая оказалась бы равной y, то может случиться, что не все действительные корни, полученные из окончательного уравнения, дадут настоящие пересечения. Действительно, при этом может получиться такое значение для x, что последнему ни на какой кривой не будет соответствовать действительная ордината; тем не менее в данном случае не следует думать, что в вычисление вкралась ошибка. В самом деле, так как подобного рода абсциссе у обеих кривых соответствуют мнимые ординаты, а для мнимостей равенство и неравенство могут иметь место совершенно так же, как у действительных количеств, то нет никаких препятствий, чтобы такие мнимые ординаты были равны друг другу и, таким образом, создавали видимость пересечения[1]).

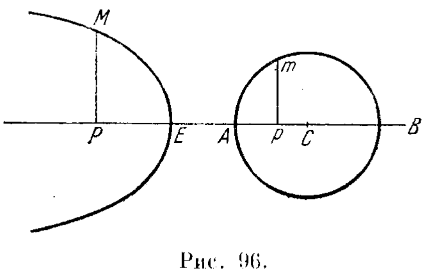

Рис. 96.

467. Для того чтобы это яснее показать (рис. 96), вычертим на одной и той же оси BAE параболу EM с параметром $=2a$ и вне ее окружность AmB радиуса $=c$, с промежутками между ними $AE=b$, так, чтобы была полная уверенность в том, что они никак не пересекаются. Возьмем A в качестве начала абсцисс, которые по направлению к E пусть будут положи-

[1]) ideoque intersectionem mentiantur.

тельными, а в обратном направлении к B — отрицательными. Для параболы у нас будет уравнение $y^2=2ax-2ab$, а для окружности — уравнение $y^2=-2cx-x^2$. Если теперь мы исключим из обоих этих уравнений y, как если бы мы хотели найти пересечение этих кривых, то мы сразу получим

$$x^2+2(a+c)x-2ab=0,$$

из которого для x получается два действительных значения, а именно:

$$x=-a-c\pm\sqrt{(a+c)^2+2ab};$$

одно из этих значений является положительным, а другое отрицательным, хотя никакого пересечения фактически не существует. Следовательно, для этих двух абсцисс как парабола, так и окружность дадут мнимые ординаты, которые, хотя и будучи мнимыми, окажутся равными между собою. Подставив приведенное выше значение x, мы получим

$$y=\sqrt{-2a^2-2ac-2ab\pm 2a\sqrt{a^2+2ac+c^2+2ab}},$$

и это выражение, конечно, является мнимым.

468. Из приведенного выше примера понятно, что существуют и мнимые пересечения кривых, которые, хотя фактически пересечения здесь нет [1]), из вычислений определяются так, как если бы они были действительными. Поэтому не всегда по числу действительных корней для x, какое содержит в себе окончательное уравнение, можно сделать правильное заключение о числе пересечений. Ведь может случиться, что имеется больше действительных корней, чем пересечений, или что вообще нет ни одного пересечения, хотя и получается два или большее число действительных корней x. Однако каждое действительное пересечение всегда предполагает наличие действительного корня в окончательном уравнении, и значит, действительных корней x будет по меньшей мере столько, сколько имеется пересечений, хотя иногда бывает и большее количество действительных корней. А соответствует ли каждому действительному корню для x фактическое пересечение, это легко узнать, определив соответствующее значение y. Если это значение будет действительным, то пересечение имеет место, а если оно будет мнимым, то и пересечение тоже будет мнимым, т. е. его не будет.

469. Таким образом, приведенная выше оговорка, т. е. это различие между числом действительных корней x и числом пересечений, имеет место лишь в том случае, когда в обоих уравнениях ордината y имеет повсюду четные измерения и, следовательно, главная ось является диаметром обеих кривых или же когда оба уравнения имеют такую структуру, что при исключении y^2 одновременно выпадает и y, так что y не может быть выражен рациональной функцией x. Так, например, если одним из уравнений будет

$$y^2-xy=a^2,$$

а другим

$$y^4-2xy^3+x^3y=b^2x^2,$$

то, так как из первого уравнения получается

$$(y^2-xy)^2=a^4 \quad \text{или} \quad y^4-2xy^3=a^4-x^2y^2,$$

[1]) etiamsi sint nullae.

при подстановке этого значения во второе уравнение будем иметь

$$a^4 - x^2y^2 + x^3y = b^2x^2 \quad \text{или} \quad y^2 - xy = \frac{a^4 - b^2x^2}{x^2} = a^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$$

и, значит,

$$x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, создается впечатление, что в данном случае имеем два пересечения. Но о том, являются ли оба эти пересечения действительными, следует судить по значению y, какое оно получит из уравнения $y^2 - xy = a^2$. Следовательно, будем иметь

$$y^2 = \frac{\pm a^2 y}{\sqrt{a^2 + b^2}} + a^2,$$

и так как все корни здесь действительны, то ясно, что есть четыре пересечения и каждой из абсцисс

$$x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

соответствуют два действительных пересечения.

470. Но в тех случаях, когда ось не является одновременно диаметром обеих кривых и когда при исключении более высоких степеней y его первая степень не исключается полностью из уравнения, то, так как мы при этом получаем y в виде рациональной функции x, каждый действительный корень окончательного уравнения указывает на наличие действительного пересечения, и в этих случаях нет надобности в каких-либо оговорках. Таково положение, когда одна из кривых заменяется прямой линией, как мы это видели выше, или когда ее ордината выражается однозначной функцией x, ибо тогда ни одной абсциссе не будет соответствовать мнимая ордината и, значит, каждый корень x даст действительное пересечение. И в большинстве случаев, хотя бы значение y в каждое из уравнений входило в измерении выше первого, тем не менее при исключении y обычно приходят к уравнению, из которого значение y получается в виде рациональной, т. е. однозначной, функции x.

471. Случаи, когда некоторые из пересечений, которые получаются в результате расчета, оказываются мнимыми, бывают не только тогда, когда ни одна из кривых не имеет действительной ординаты, которая соответствовала бы найденной абсциссе, что имело место в приведенном выше примере окружности и параболы. Могут представиться и такого рода случаи, когда одна из кривых для всех абсцисс дает действительные ординаты и тем не менее не каждому действительному корню x соответствует пересечение. Такого рода пример дает линия третьего порядка, которая выражается уравнением

$$y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0;$$

последнее для всех абсцисс дает действительные ординаты, и даже по три, если x меньше чем $\frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Если же совместно с этой кривой линией взять параболу, которая содержится в уравнении $y^2-2ax=0$, то последняя не будет иметь действительной ординаты, которая соответствовала бы отрицательным x. Следовательно, отрицательным абсциссам x не может соответствовать какое-либо пересечение.

472. Исключим теперь y. Так как из последнего уравнения имеем $y^2=2ax$, то первое уравнение перейдет в следующее:

$$2axy-6a^2x+2a^2y-6ax^2=0;$$

отсюда получаем

$$y=\frac{6a^2x+6ax^2}{2a^2+2ax}=3x.$$

А так как это уравнение делится на $y-3x$, то выполним деление, после чего получится свободное от y уравнение $2a^2+2ax=0$, из которого находим $x=-a$. Таким образом, должно было бы иметь место пересечение кривых, соответствующее абсциссе $x=-a$, которой в параболе не соответствует какая-либо действительная ордината; а на другой линии третьего порядка, если положить $x=-a$, мы имеем

$$y^3-3ay^2+2a^2y-6a^3=0,$$

откуда получается одна действительная ордината $y=3a$; остальные же два значения y, содержащиеся в уравнении $y^2+2a^2=0$, оказываются мнимыми. Стало быть, в этом месте последние две мнимые ординаты становятся ра́вными мнимым ординатам параболы и, таким образом, в этом месте получаются два мнимых пересечения. Но из множителя $y-3x=0$ первого из наших уравнений получаются еще два действительных пересечения, так как, если его подставить, будем иметь $9x^2-2ax=0$. Таким образом, во-первых, имеем пересечение в начале абсцисс, где $x=0$ и одновременно $y=0$. Второе пересечение соответствует абсциссе $x=\frac{2a}{9}$, где $y=3x=\frac{2a}{3}$.

473. Таким образом, в приведенном выше случае мы дошли до мнимых пересечений, хотя при операции исключения y получилось уравнение

$$2axy-6a^2x+2a^2y-6ax^2=0,$$

в котором y имеет лишь одно измерение, так что отсюда, казалось бы, y может быть выражен с помощью рациональной функции x, что раньше мы признали как бы критерием того, что мнимые пересечения отсутствуют. И действительно, если бы это уравнение не имело никаких делителей, то никакие мнимые пересечения не могли бы получиться. Но так как в данном случае путем деления приходим к уравнению, которое уже не содержит в себе ординаты y, то получается совершенно так, как если бы y нельзя было выразить с помощью рациональной функции x. Таким образом, в тех случаях, когда подобного рода уравнение можно разложить на множители, следует судить отдельно о каждом множителе, в результате чего получается, что, в то время как один множитель совершенно несовместим с мнимыми пересечениями, другой множитель их допускает.

474. Приняв это во внимание, покажем теперь несколько более подробно, каким образом при задании двух кривых следует определять их пересечения. А так как это исследование связано с исключением одной из координат y, то следует учитывать только число измерений, которые

имеет эта последняя в обоих уравнениях. Ибо это исключение будет выполняться одним и тем же путем, каким бы образом другая координата x ни входила в то или другое уравнение. Итак, пусть P, Q, R, S, T и т. д., а также p, q, r, s, t и т. д. суть какие-нибудь рациональные функции от x. Прежде всего предположим, что две кривые, пересечения которых требуется определить, выражаются следующими уравнениями:

I

$$P+Qy=0,$$

II

$$p+qy=0.$$

Умножим первое уравнение на p, а второе на P. Тогда эти уравнения, будучи вычтены одно из другого, сводятся к уравнению, совершенно свободному от y,

$$pQ-Pq=0.$$

Таким образом, все действительные корни x этого уравнения, в состав которого, помимо постоянных, входит лишь одно неизвестное x, дадут те точки на оси, над которыми происходят пересечения. Для любого найденного таким образом значения x получится действительное значение y с помощью любого из двух уравнений

$$y=-\frac{p}{q}=-\frac{P}{Q},$$

и это значение будет определять пересечение. Отсюда следует, что если ордината y той и другой кривой выражается рациональной, то есть однозначной, функцией x, то никаких мнимых пересечений не имеется.

475. Пусть теперь ордината y одной кривой линии выражается, как раньше, однозначной функцией x, а другая — двузначной функцией, так что имеем:

I

$$P+Qy=0,$$

II

$$p+qy+ry^2=0.$$

Умножим первое уравнение на p, второе на P и вычтем одно из другого; после деления на y получится

III

$$pQ-Pq-Pry=0 \qquad \text{или} \qquad (Pq-pQ)+Pry=0.$$

Умножим теперь первое уравнение на Pr и третье на Q; тогда после вычитания получится следующее уравнение, свободное от y:

$$P^2r-PQq+pQ^2=0.$$

Стало быть, каждый корень этого уравнения даст абсциссу, соответствующую пересечению. Так как этим абсциссам отвечают действительные ординаты

$$y = -\frac{P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr},$$

то пересечения будут действительными.

476. Пусть, как и раньше, ордината одной из кривых равна однозначной функции x, а ордината другой кривой выражается с помощью кубического уравнения, т. е. пусть она будет трехзначной функцией x, так что оба рассматриваемых уравнения имеют следующий вид:

I

$$P + Qy = 0,$$

II

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на p, а второе на P; тогда после вычитания одного уравнения из другого и после деления на y получится

III

$$(Pq - pQ) + Pry + Psy^2 = 0.$$

Отсюда, если вместо y подставить его значение из первого уравнения: $y = -\frac{P}{Q}$, и освободиться от дробей, получится уравнение

$$PQ^2q - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0$$

или

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

которое можно получить сразу, если во втором уравнении вместо y подставить его значение из первого уравнения $-\frac{P}{Q}$. Стало быть, все действительные корни x последнего уравнения, поскольку, согласно первому уравнению $y = -\frac{P}{Q}$, им всем соответствуют действительные ординаты, дадут такое же количество действительных пересечений.

477. Точно так же неизвестную y легко исключить в том случае, когда ордината y одной из кривых выражается с помощью уравнения четырех или больше измерений, в то время как ордината другой кривой остается однозначной, то есть рациональной, функцией x. Действительно, пусть предложены два следующих уравнения:

I

$$P + Qy = 0,$$

II

$$p+qy+ry^2+sy^3+ty^4=0.$$

Тогда, так как из первого уравнения $y=-\frac{P}{Q}$, то, если это значение подставить во второе, получится уравнение, в которое входят только x и известные количества

$$Q^4p-PQ^3q+P^2Q^2r-P^3Qs+P^4t=0.$$

Следовательно, все действительные корни x этого уравнения дадут такое же количество фактических пересечений, так как для каждой абсциссы x из первого уравнения может быть получена одна действительная ордината, а именно $y=-\frac{P}{Q}$.

478. Пусть теперь ордината каждой из кривых линий выражается с помощью квадратного уравнения и пусть сначала последнее будет чистым [70], так что оба уравнения будут иметь следующий вид:

I

$$P+Ry^2=0,$$

II

$$p+ry^2=0.$$

После исключения из этих уравнений y^2 сразу получим уравнение

$$Pr-Rp=0.$$

Любой действительный корень этого уравнения указывает на настоящее пересечение линий в том случае, когда найденные значения x таковы, что $-\frac{P}{R}$ и $-\frac{p}{r}$ будут положительными количествами. Действительно, тогда, поскольку $y^2=-\frac{P}{R}=-\frac{p}{r}$, ордината y будет иметь два действительных значения: одно положительное и другое отрицательное, и, следовательно, каждому значению x, найденному из уравнения $Pr-Rp=0$, будут соответствовать два пересечения, одинаково отстоящие с обеих сторон от оси, как и должно быть, потому что ось является диаметром обеих кривых. Но если при каком-нибудь значении x, полученном из уравнения $Pr-Rp=0$, выражения $-\frac{P}{R}=-\frac{p}{r}$ принимают отрицательные значение, то ввиду того, что y оказывается мнимым, пересечения также будут мнимыми.

479. Пусть теперь в обоих предложенных квадратных уравнениях имеется еще второй член, содержащий в себе y. Тогда эти уравнения будут иметь следующий вид:

I

$$P+Qy+Ry^2=0,$$

II

$$p+qy+ry^2=0.$$

Для того чтобы из этих уравнений исключить неизвестное y, умножим первое из них на p, а второе на P. Тогда после вычитания и деления на y получим

III

$$(Pq-Qp)+(Pr-Rp)\,y=0.$$

Затем умножим первое уравнение на r, а второе на R; вычтя затем одно уравнение из другого, получим

IV

$$(Pr-Rp)+(Qr-Rq)\,y=0.$$

Так как из последних двух уравнений получается

$$y=\frac{Qp-Pq}{Pr-Rp}=\frac{Rp-Pr}{Qr-Rq},$$

то будет

$$(Qp-Pq)\,(Qr-Rq)+(Pr-Rp)^2=0,$$

или

$$P^2r^2-2PRpr+R^2p^2+Q^2pr-PQqr-QRpq+PRq^2=0.$$

Все действительные корни этого уравнения дадут такое же количество действительных пересечений, если только каждому значению x будет соответствовать действительное значение y из уравнения III или IV. Но может случиться, что пересечения окажутся мнимыми, и последнее имеет место в том случае, когда уравнения III и IV содержат в себе множители, так что благодаря им в результате деления можно получить уравнение, свободное от y. В таком случае следует это уравнение поставить вместо последнего и для полученных отсюда значений x найти с помощью первых уравнений соответствующие значения y. Если эти значения окажутся мнимыми, то это будет указанием на то, что и пересечения являются мнимыми.

480. Пусть, далее, на одной кривой линии y будет двузначной функцией x, а на другой — трехзначной его функцией, т. е. пусть два предложенных уравнения кривых будут таковы:

I

$$P+Qy+Ry^2=0,$$

II

$$p+qy+ry^2+sy^3=0.$$

Умножим первое из этих уравнений на p, а второе на P; тогда, вычтя одно уравнение из другого, мы будем иметь

III

$$(Pq-Qp)+(Pr-Rp)y+Psy^2=0.$$

Последнее уравнение, взятое совместно с первым, дает тот случай, который рассмотрен в предыдущем параграфе, а именно, те величины, которые раньше были обозначены через p, q, r, теперь имеют вид $Pq-Qp$, $Pr-Rp$ и Ps. Следовательно, в данном случае мы находим

$$y=\frac{PQq-Q^2p-P^2r+PRp}{P^2s-PRq+QRp}$$

и

$$y=\frac{PRq-QRp-P^2s}{PQs-PRr+R^2p},$$

откуда получается

$$0=(PRq-QRp-P^2s)^2+(PQs-PRr+R^2p)(PQq-Q^2p-P^2r+PRp),$$

а это уравнение в развернутом виде дает

$$\left.\begin{aligned}P^4s^2-2P^3Rqs+3P^2QRps-PQR^2pq+Q^2R^2p^2&\\ -P^3Qrs+P^2R^2q^2-PQ^3ps-Q^2R^2p^2&\\ +P^3Rr^2+P^2Q^2qs+PQ^2Rpr&\\ -P^2QRqr+PR^3p^2&\\ -2P^2R^2pr&\end{aligned}\right|=0.$$

Так как вследствие исчезновения последнего члена это уравнение делится на P, то получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}P^3s^2-2P^2Rqs-P^2Qrs+P^2Rr^2+3PQRps+PR^2q^2+PQ^2qs-&\\ -PQRqr-2PR^2pr-QR^2pq-Q^3ps+Q^2Rpr+R^3p^2=0.&\end{aligned}$$

По действительным корням этого уравнения можно определить пересечения, если только соответствующие значения для y получаются действительные.

481. Пусть теперь каждая из ординат выражается с помощью кубического уравнения, и пусть два рассматриваемых уравнения имеют следующий вид:

I

$$P+Qy+Ry^2+Sy^3=0,$$

II

$$p+qy+ry^2+sy^3=0.$$

Умножим первое из этих уравнений на p, а второе на P; тогда после вычитания одного из другого останется

III

$$(Pq-Qp)+(Pr-Rp)y+(Ps-Sp)y^2=0.$$

Умножим затем первое уравнение на s, а второе на S. После того как мы вычтем одно из другого, останется

IV

$$(Sp-Ps)+(Sq-Qs)y+(Sr-Rs)y^2=0.$$

Если приведенные выше уравнения III и IV сравнить с теми уравнениями, которые были рассмотрены в § 479, то получим, что

$$\left.\begin{aligned} P&=Pp-Qp,\\ Q&=Pr-Rp,\\ R&=Ps-Sp,\end{aligned}\right|\begin{aligned} p&=Sp-Ps,\\ q&=Sq-Qs,\\ r&=Sr-Rs.\end{aligned}$$

Если эти выражения подставить в окончательное уравнение, то найдем уравнение

$$\begin{aligned}(Pq-Qp)^2(Sr-Rs)^2-2(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sr-Rs)+\\ +(Ps-Sp)^2(Sp-Ps)^2+(Pr-Rp)^2(Sp-Ps)(Sr-Rs)-\\ -(Pq-Qp)(Pr-Rp)(Sq-Qs)(Sr-Rs)-\\ -(Pr-Rp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sq-Qs)+(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sq-Qs)^2=0.\end{aligned}$$

В этом уравнении имеется семь членов, которые все делятся на $Sp-Ps$, за исключением первого и пятого; но если последние соединить, то они будут иметь два множителя, одним из которых будет $(Pq-Qp)(Sr-Rs)$, а другим

$$(Pq-Qp)(Sr-Rs)-(Pr-Rp)(Sq-Qs).$$

Если в последнем раскрыть скобки, то он окажется равным

$$PQrs+RSpq-PRqs-QSpr,$$

то есть $=(Sp-Ps)(Rq-Qr)$, и стало быть, члены I и V после их соединения получаются в виде

$$(Pq-Qp)(Sr-Rs)(Sp-Ps)(Rq-Qr),$$

а это выражение тоже делится на $Sp-Ps$. Таким образом, в результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned}0=(Pq-Qp)(Sr-Rs)(Rq-Qr)+2(Pq-Qp)(Sp-Ps)(Sr-Rs)+\\ +(Sp-Ps)^3+(Pr-Rp)^2(Sr-Rs)+(Pr-Rp)(Sp-Ps)(Sq-Qs)-\\ -(Pq-Qp)(Sq-Qs)^2;\end{aligned}$$

а если последнее развернуть, то получится:

$$\begin{aligned}S^3p^3-3PS^2p^2s+P^2Sr^3+2PR^2prs-P^2Rr^2s+P^2Qrs^2+\\ +PRSq^2r-P^3s^3+3P^2Sps^2-R^3p^2s-2PRSpr^2+\\ +R^2Sp^2r-RS^2p^2q-Q^2Rprs-PR^2q^2s-PQSqr^2+\\ +PQRqrs+3PS^2pqr-3P^2Sqrs+PQSprs+Q^2Spr^2+\\ +QR^2pqs-QRSpqr-3PQRps^2+3QRSp^2s-PRSpqs+\\ +2P^2Rqs^2+2PQSq^2s-PS^2q^3-PQ^2qs^2-2QS^2p^2r-2Q^2Spqs+\\ +Q^3ps^2+QS^2pq^2=0.\end{aligned}$$

482. Для того чтобы легче было понять этот метод исключения y из двух уравнений высших степеней, предположим, что оба рассматриваемых уравнения являются уравнениями четвертого порядка:

$$\text{I}$$

$$P+Qy+Ry^2+Sy^3+Ty^4=0,$$

$$\text{II}$$

$$p+qy+ry^2+sy^3+ty^4=0.$$

Умножим первое из этих уравнений на p, а второе на P; тогда после вычитания останется

$$\text{III}$$

$$(Pq-Qp)+(Pr-Rp)\,y+(Ps-Sp)\,y^2+(Pt-Tp)\,y^3=0.$$

Умножим затем уравнение I на t, а уравнение II на T; тогда после вычитания останется

$$\text{IV}$$

$$(Pt-Tp)+(Qt-Tq)+(Rt-Tr)\,y^2+(St-Ts)\,y^3=0.$$

Положим теперь для краткости

$$\begin{array}{l|l|l} Pq-Qp=A, & Pt-Tp=a, & Sq-Qs=\alpha, \\ Pr-Rp=B, & Qt-Tq=b, & Rq-Qr=\beta. \\ Ps-Sp=C, & Rt-Tr=c, & \\ Pt-Tp=D, & St-Ts=d, & \end{array}$$

Здесь следует отметить, что не только $a=D$, но что имеем также

$$Ad-Cb=(Pt-Tp)\,(Sq-Qs)=D\alpha,$$
$$Ac-Bc=(Pt-Tp)\,(Rq-Qr)=D\beta.$$

Следовательно, если произвести эти подстановки в уравнениях III и IV, то последние примут следующий вид:

$$\text{III}$$

$$A+By+Cy^2+Dy^3=0,$$

$$\text{IV}$$

$$a+by+cy^2+dy^3=0.$$

Теперь умножим эти уравнения соответственно на d и D и вычтем одно из другого; тогда получится

$$\text{V}$$

$$(Ad-Da)+(Bd-Db)\,y+(Cd-Dc)\,y^2=0.$$

Затем те же уравнения умножим на a и A; тогда после вычитания останется

VI

$$(Ab-Ba)+(Ac-Ca)\,y+(Ad-Da)\,y^2=0.$$

Теперь снова для краткости положим 128

$$\left.\begin{array}{l} Ab-Ba=E,\\ Ac-Ca=F,\\ Ad-Da=G, \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} Ad-Da=e,\\ Bd-Db=f,\\ Cd-Dc=g, \end{array}\right| \; Cb-Bc=\xi;$$

тогда будет $G=e$ и $Eg-Ff=G\xi$, так что и $Eg-Ff$ будет делиться на G. Отсюда получим следующие уравнения:

V

$$E+Fy+Gy^2=0,$$

VI

$$e+fy+gy^2=0.$$

Из этих уравнений с помощью такой же, как и выше, операции получатся следующие:

VII

$$(Ef-Fe)+(Eg-Ge)\,y=0,$$

VIII

$$(Eg-Ge)+(Fg-Gf)\,y=0.$$

Наконец, положим еще раз для краткости

$$Ef-Fe=H,\qquad Eg-Ge=h,$$
$$Eg-Ge=I,\qquad Fg-Gf=i,$$

так что будет $I=h$, и тогда будем иметь:

VII′

$$H+Iy=0,$$

VIII′

$$h+iy=0,$$

из которых, наконец, получается следующее уравнение, свободное от y:

$$Hi-Ih=0.$$

Если в последнее последовательно подставить приведенные выше значения, то получится уравнение, в которое войдут только функции P, Q, R и т. д., p, q, r и т. д. из первых уравнений. Но уравнения между E, F, G, e, f, g будут делиться на $G=e$, а также, если дойти до букв A, B, C, D, a, b, c, d, то уравнение, которое тогда получится, будет делиться на $D^2=a^2$, так что в окончательном уравнении каждый член будет содержать в себе лишь восемь букв, четыре прописных и столько же строчных. Идя этим путем, можно вообще всегда, каково бы ни было измерение y в обоих предложенных уравнениях, исключить неизвестное y и найти уравнение, в состав которого входит лишь одно неизвестное x [71].

483. Хотя применение изложенного выше метода исключения одного неизвестного из двух уравнений представляется вполне общим, тем не менее я изложу здесь еще один метод, который не требует столь многих повторных подстановок. Итак, пусть предложены два уравнения каких-либо измерений:

I

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \text{ и т. д.} = 0,$$

II

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \text{ и т. д.} = 0,$$

и из них следует получить одно уравнение, в которое уже не входит y. Для этого умножим второе уравнение на такое количество

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \text{ и т. д.},$$

в состав которого входят $k-n$ произвольных букв A, B, C и т. д. А первое уравнение умножим на такое количество

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \text{ и т. д.},$$

в состав которого входят $k-m$ произвольных букв a, b, c и т. д. После этого следует оба эти произведения приравнять друг к другу таким образом, чтобы все члены, содержащие с себе степени y, взаимно уничтожались, и тогда последние члены, в состав которых не входит y, дадут искомое уравнение. Но высшие степени сами собою уничтожатся, так как высшим членом в каждом произведении будет Ppy^k. Таким образом, остается еще $k-1$ членов, которые должны уничтожиться, и для этой цели надо будет определить такое же количество произвольных букв. Но число произвольных букв, которые мы таким образом вводим, составляет $2k-m-n$, и так как последнее должно равняться $k-1$, то получится $k=m+n-1$.

484. В силу сказанного выше умножим первое уравнение на неопределенное количество

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

а второе уравнение умножим на такое количество:

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \text{ и т. д.}$$

Если мы приравняем друг к другу все члены, в состав которых входят одинаковые степени y, то придем к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered} Pp = Pp, \\ Pa + Qp = pA + qP, \\ Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP, \\ Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP \\ \text{и т. д.} \end{gathered}$$

Такого рода уравнений, если включить в них число и первое уравнение $Pp = Pp$, будет в общей сложности $m+n$. Если из них определить произвольные буквы A, B, C и т. д., a, b, c и т. д., то последнее уравнение будет содержать в себе только заданные буквы P, Q, R и т. д.,

p, q, r и т. д., и стало быть, оно будет отвечать на поставленный вопрос.

485. Но это определение произвольных букв осуществляется с большей легкостью, если члены каждого уравнения приравнять к новым неопределенным количествам α, β, γ и т. д., что станет яснее из следующего примера.

Пусть даны следующие два уравнения:

I

$$Py^2+Qy+R=0,$$

II

$$py^3+qy^2+ry+s=0;$$

умножим, стало быть, первое уравнение на py^2+ay+b, а второе на $Py+A$, и тогда получатся такие уравнения:

$$\begin{aligned}
Pp&=Pp,\\
Pa+Qp&=pA+qP=\alpha,\\
Pb+Qa+Rp&=qA+rP=\beta,\\
Qb+Ra&=rA+sP,\\
Rb&=sA.
\end{aligned}$$

Опустив первое тождественное уравнение, из второго находим

$$a=\frac{\alpha-Qp}{P},$$

$$A=\frac{\alpha-qP}{p}.$$

А из третьего получим

$$b=\frac{\beta}{P}-\frac{Qa}{P}-\frac{Rp}{P}=\frac{\beta}{P}-\frac{\alpha Q}{P^2}+\frac{Q^2p}{P^2}-\frac{Rp}{P}$$

и

$$\beta=\frac{\alpha q}{p}-\frac{q^2P}{p}+rP;$$

если же подставить это значение β, то будем иметь

$$b=\frac{\alpha q}{Pp}-\frac{q^2}{p}+r-\frac{\alpha Q}{P^2}+\frac{Q^2p}{P^2}-\frac{Rp}{P}$$

или

$$b=\frac{\alpha(Pq-Qp)}{P^2p}+\frac{Q^2p^2-P^2q^2}{P^2p}+\frac{Pr-Rp}{P}.$$

Подстановка этого значения в четвертое [из приведенных выше] уравнений дает

$$\frac{\alpha Q(Pq-Qp)}{P^2p}-\frac{Q(Pq-Qp)(Qp+Pq)}{P^2p}+\frac{Q(Pr-Rp)}{P}+\frac{\alpha R}{P}-\frac{RQp}{P}=\frac{r(\alpha-qP)}{p}+sP$$

или, после умножения на P^2p,

$$\alpha Q(Pq-Qp)+\alpha P(Rp-Pr)-Q(Pq-Qp)(Pq+Qp)+$$
$$+PQp(Pr-2Rp)+P^3qr-P^3ps=0.$$

Стало быть, получится

$$\alpha=\frac{P^2Qq^2-Q^3p^2-P^2Qpr+2PQRp^2-P^3qr+P^3ps}{PQq-Q^2p+PRp-P^2r}.$$

А последнее уравнение даст

$$\frac{\alpha R\,(Pq-Qp)}{P^2p}-\frac{R\,(P^2q^2-Q^2p^2)}{P^2p}+\frac{R\,(Pr-Rp)}{P}=\frac{\alpha s}{p}-\frac{Pqs}{p},$$

из которого также получается

$$\alpha=\frac{P^2Rq^2-Q^2Rp^2-P^2Rpr+PR^2p^2-P^3qs}{PRq-QRp-P^2s}.$$

Эти два значения α дадут искомое уравнение, которое в конце концов будет приведено к тому же виду, какой мы нашли для того же случая выше, в § 480.

ГЛАВА XX

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ [72]

486. То, что было изложено в предыдущей главе о пересечении кривых, обычно относят преимущественно к построению уравнений высших степеней. Действительно, если по заданным двум кривым мы находим уравнение, корни которого указывают, где эти линии пересекаются, то и, наоборот, пересечения двух кривых могут служить для определения корней уравнений. Этот метод особенно полезен в тех случаях, когда корни какого-нибудь уравнения должны быть выражены с помощью линий. Ибо, если начертить две подходящие для этой цели кривые, легко будет отметить их пересечения, и если из этих мест опустить перпендикуляры на ось, то абсциссы дадут подлинные корни уравнения. Если же имеет место то неудобство, о котором мы упомянули выше, то все же найденные указанным образом абсциссы дадут корни, но при этом может случиться, что рассматриваемое уравнение содержит в себе больше корней, чем будет найдено с помощью подобного построения.

487. Стало быть, если предложено алгебраическое уравнение, которое содержит в себе неизвестное количество x и корни которого следует определить, то надо найти две кривые линии или два уравнения между переменными x и y, которые должны быть построены таким образом, что, если из них исключить ординату y, получится искомое уравнение. После этого следует обе эти кривые провести над общей осью, равно как при одном и том же начале абсцисс, и отметить точки, в которых эти кривые взаимно пересекаются. После этого из указанных точек пересечения надо провести под прямым углом к оси ординаты, которые дадут на оси абсциссы, равные отдельным корням предложенного уравнения. Следовательно, указанным выше путем будут определены истинные значения каждого из искомых корней, если только, быть может, не окажется, что уравнение содержит в себе больше корней, чем получается из пересечений.

488. Но раньше, чем изложить способ нахождения тех двух кривых, которые должны послужить для построения рассматриваемого уравнения, рассмотрим a posteriori те уравнения, решение которых зависит от заданных двух кривых линий. И, прежде всего, пусть двумя решающими вопрос линиями будут прямые EM и FM, пересекающиеся в точке M (рис. 97). Возьмем прямую EF в качестве оси и на ней точку A в качестве начала абсцисс, и пусть проведенная отсюда нормаль ABC пересекает первую пря-

мую в точке B, а вторую — в C. Пусть $AE=a$, $AF=b$, $AB=c$, $AC=d$. Затем положим абсциссу $AP=x$, ординату $PM=y$. Тогда для первой прямой EM будет $a:c=(a+x):y$ или $ay=c(a+x)$, а для второй $b:d=(b-x):y$ или $by=d(b-x)$. Если из приведенных выше уравнений исключить y, то получится

$$bc(a+x)=ad(b-x)$$

или

$$x=\frac{abd-abc}{bc+ad}=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}.$$

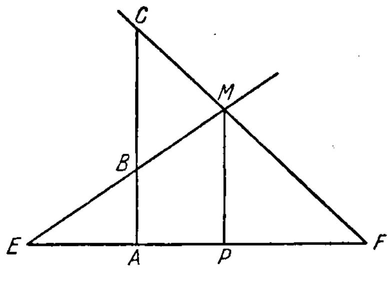

Рис. 97.

Таким образом, с помощью пересечения двух прямых можно построить простое уравнение

$$x=\frac{ab(d-c)}{bc+ad},$$

и к этому виду можно привести решительно все простые уравнения.

489. Вслед за прямыми линиями по легкости вычерчивания идет окружность; поэтому посмотрим, какого рода уравнения могут быть построены путем пересечения прямой окружностью. Итак, пусть (рис. 98) при AP, взятой в качестве оси, и A, взятой в качестве начала абсцисс, проведена прямая линия EM и принято, что $AE=a$, $AB=b$ и что координаты $AP=x$ и $PM=y$. Тогда будет $a:b=(a+x):y$ и, значит, $ay=b(a+x)$, что представляет собою уравнение прямой линии. Пусть, далее, радиус окружности $CM=c$ и, опустив из ее центра C на ось перпендикуляр CD, назовем $AD=f$ и $CD=g$. Тогда будет $DP=x-f$ и $PM-CD=y-g$. Далее, так как в силу природы окружности

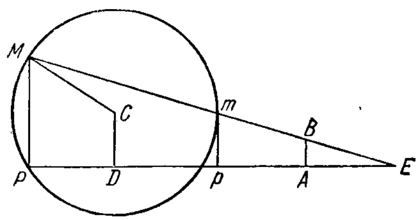

Рис. 98.

$$CM^2=DP^2+(PM-CD)^2,$$

получим для окружности уравнение

$$c^2=x^2-2fx+f^2+y^2-2gy+g^2=(x-f)^2+(y-g)^2.$$

Но уравнение прямой дает $y=\frac{ab+bx}{a}$, откуда получается

$$y-g=\frac{a(b-g)+bx}{a}=b-g+\frac{bx}{a};$$

а если полученное отсюда значение y подставить в другое уравнение, то найдем, что

$$c^2=x^2-2fx+f^2+(b-g)^2+\frac{2b(b-g)x}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2},$$

то есть

$$a^2x^2+2ab(b-g)x+a^2(b-g)^2+b^2x^2-2a^2fx+a^2f^2-a^2c^2=0.$$

Итак, корни этого уравнения находятся с помощью пересечений прямой с окружностью таким образом, что если из точек пересечений M и m опустить на ось перпендикуляры MP и mp, то значения y окажутся равными AP и Ap.

490. Так как в приведенном выше уравнении содержатся все квадратные уравнения, то из вышеизложенного можно вывести общее построение квадратных уравнений. Действительно, пусть дано следующее квадратное уравнение:

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Приведем его прежде всего к указанному выше виду таким образом, чтобы левые их части совпали. С этой целью умножим его на $\frac{a^2+b^2}{A}$:

$$(a^2+b^2)\,x^2+\frac{B\,(a^2+b^2)\,x}{A}+\frac{C\,(a^2+b^2)}{A}=0.$$

А приравнивание друг другу остальных членов даст

$$2Aab\,(b-g)-2Aa^2f=B\,(a^2+b^2)$$

и, значит, будет

$$af=b\,(b-g)-\frac{B\,(a^2+b^2)}{2Aa}\,.$$

Отсюда, так как

$$a^2\,(b-g)^2+a^2f^2-a^2c^2=\frac{C\,(a^2+b^2)}{A}\,,$$

получится

$$(a^2+b^2)\,(b-g)^2-\frac{Bb\,(b-g)\,(a^2+b^2)}{Aa}+\frac{B^2\,(a^2+b^2)}{4A^2a^2}-a^2c^2=\frac{C\,(a^2+b^2)}{A}$$

и, следовательно,

$$(b-g)^2=\frac{Bb\,(b-g)}{Aa}-\frac{B^2}{4A^2a^2}+\frac{a^2c^2}{a^2+b^2}+\frac{C}{A}\,;$$

значит,

$$b-g=\frac{Bb}{2Aa}\pm\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{B^2b^2}{4A^2a^2}}\,.$$

Остаются, таким образом, три количества a, b и c, которые до сих пор еще не определены, но их следует взять таким образом, чтобы

$$\frac{a^2c^2}{a^2+b^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{B^2b^2}{4A^2a^2}$$

оказалось положительным количеством, так как в противном случае $b-g$, а значит и CD, окажется мнимым количеством.

491. Таким образом, ничто не мешает нам положить $b=0$. Тогда находим

$$g=\sqrt{c^2+\frac{-B^2+4AC}{4A^2}}\quad \text{и} \quad f=-\frac{B}{2A}\,.$$

Но, далее, так как предложенное нам уравнение $Ax^2+Bx+C=0$ не имеет действительных корней, если только B^2 не будет больше, чем $4AC$, то в этом случае $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ будет положительным количеством. Если последнее положить равным c^2, так что

$$c=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,,$$

то получится точно так же $g=0$ и a полностью выпадет из расчета. Следовательно, прямая линия EM совпадет с осью AP и центр окружности C совпадет с точкой D при условии, что

$$AD=-\frac{B}{2A}.$$

А если из этого центра описать окружность радиусом

$$c=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

то пересечения последней с осью указывают нам корни рассматриваемого уравнения. Но для того чтобы при этом построении не иметь дела с иррациональной формулой, положим $g=c-\frac{k}{2A}$, так что получится

$$c^2-\frac{2ck}{2A}+\frac{k^2}{4A^2}=c^2+\frac{-B^2+4AC}{4A^2},$$

и тогда будет

$$c=\frac{k^2+B^2-4AC}{4kA} \quad \text{и} \quad g=\frac{B^2-4AC-k^2}{4kA}.$$

Таким образом, определение количества k остается в нашем произволе. Какое бы значение для него мы ни брали, в силу того, что прямая CM лежит на самой оси, окружность следует описать таким образом. Возьмем $AD=-\frac{B}{2A}$ и перпендикуляр $CD=\frac{B^2-4AC-k^2}{4Ak}$, и из центра C опишем окружность, радиус которой $=\frac{B^2-4AC+k^2}{4Ak}$; пересечения этой окружности с осью дадут корни рассматриваемого уравнения. Следовательно, если положить $k=-B$, приняв $AD=-\frac{B}{2A}$, то будем иметь $CD=\frac{C}{B}$, и радиус окружности, которая должна быть описана из центра C, будет

$$=\frac{-B^2+2AC}{2AB}=-\frac{B}{2A}+\frac{C}{B},$$

следовательно, радиус окружности будет $=AD+CD$. Приведенное выше построение представляется весьма удобным на практике.

492. Рассмотрим теперь (рис. 99) две взаимно пересекающиеся окружности, и пусть для первой из них $AD=a$, $CD=b$ и ее радиус $CM=c$. Тогда, если положить $AP=x$ и $PM=y$, будет

$$DP=a-x, \quad CD-PM=b-y;$$

стало быть, в силу природы окружности будет

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=c^2.$$

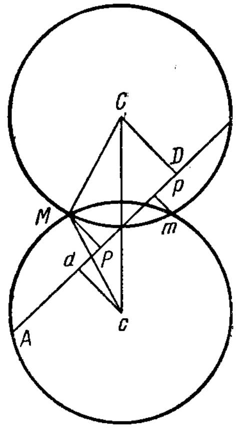

Рис. 99.

Подобно этому пусть для другой окружности $Ad=f$, $dc=g$ и ее радиус $cM=h$; тогда

$$x^2-2fx+f^2+y^2+2gy+g^2=h^2.$$

Если эти два уравнения вычесть одно из другого, то останется

$$2(f-a)x+a^2-f^2-2(b+g)y+b^2-g^2=c^2-h^2;$$

следовательно,

$$y=\frac{a^2+b^2-f^2-g^2-c^2+h^2-2(a-f)x}{2(b+g)},$$

а отсюда

$$b-y=\frac{b^2+2bg-a^2+f^2+g^2+c^2-h^2+2(a-f)x}{2(b+g)}$$

и

$$a-x=\frac{2a(b+g)-2(b+g)x}{2(b+g)}.$$

А так как $(a-x)^2+(b-y)^2=c^2$, то, если произвести подстановку, получится

$$+4(a-f)^2x^2-4(a+f)(b+g)^2x+(b+g)^4+2(a^2-c^2)(b+g)^2+$$
$$+4(b+g)^2-4(a-f)(a^2-f^2)+2(f^2-h^2)(b+g)^2+$$
$$+4(a-f)(c^2-h^2)+(a^2-c^2-f^2+h^2)^2=0.$$

Таким образом, с помощью приведенного выше уравнения можно бесконечным числом способов построить уравнение

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Но вместе с тем, конечно, понятно, что уравнения более высокой степени, чем второй, нельзя построить с помощью пересечения двух окружностей, так как две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках. Стало быть, одно и то же уравнение можно построить путем пересечения прямой линии и окружности, и это последнее построение с полным основанием предпочитают тому, при котором требуется применение двух окружностей, если только случайно в каких-либо отдельных случаях не оказалось бы, что несложное определение линий a, b, f, g, c и h получается сразу.

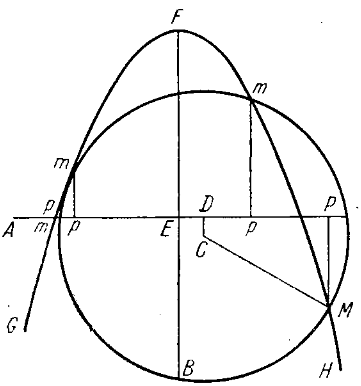

Рис. 100.

493. Пусть теперь (рис. 100) окружность пересекается параболой. Опустим из центра окружности C на ось AP перпендикуляр CD и пусть $AD=a$, $CD=b$ и радиус окружности $CM=c$. Тогда при прямоугольных координатах $AP=x$, $PM=y$ уравнением для окружности будет $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$. А ось параболы FB пусть будет перпендикулярна к принятой здесь оси AP и пусть $AE=f$, $EF=g$ и параметр параболы $=2h$. Тогда в силу природы параболы будет $EP^2=2h(EF+PM)$, или в символах $(x-f)^2=2h(g+y)$, откуда

$$y=\frac{(x-f)^2}{2h}-g \quad \text{и} \quad y-b=\frac{(x-f)^2}{2h}-(b+g).$$

Если это значение подставить в первое уравнение, то y исключится, и мы будем иметь

$$\frac{(x-f)^4}{4h^2}-\frac{(b+g)(x-f)^2}{h}+(b+g)^2+(x-a)^2=c^2$$

или

$$\begin{array}{llll} x^4-4fx^3+6f^2x^2 & -4f^3x & +f^4 & =0. \\ \quad -4h(b+g) & +8fh(b+g) & -4f^2h(b+g) & \\ \quad +4h^2 & -8ah^2 & +4h^2(b+g)^2 & \\ & & +4a^2h^2 & \\ & & -4c^2h^2 & \end{array}$$

Корнями этого уравнения будут абсциссы AP, Ap, Ap и Ap, откуда ординаты проходят через точки пересечений M, m, m, m.

494. В состав приведенного выше уравнения входят шесть постоянных: a, b, c, f, g и h, из которых, правда, два $b+g$ нужно рассматривать как одно, так что, положив $b+g=k$, следует считать, что здесь имеется только пять постоянных. Итак, если положить $CD+EF=$ $=b+g=k$, то получится следующее уравнение:

$$\left.\begin{array}{r} x^4-4fx^3+6f^2x^2-4f^3x+f^4 \\ -4hk+8fhk-4f^2hk \\ +4h^2-8ah^2+4h^2k^2 \\ +4a^2h^2 \\ -4c^2h^2 \end{array}\right\}=0.$$

Но к этому виду можно привести всякое уравнение четвертой степени. Действительно, пусть дано следующее уравнение:

$$x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0;$$

тогда путем сопоставления получим

$$4f=A, \quad \text{то есть} \quad f=\frac{1}{4}A,$$

$$6f^2-4hk+4h^2=B, \quad \text{то есть} \quad \frac{3}{8}A^2-4hk+4h^2=B,$$

откуда

$$k=\frac{3A^2}{32h}+h-\frac{B}{4h},$$

$$4f^3-8fhk+8ah^2=C,$$

или

$$\frac{1}{16}A^3-\frac{3}{16}A^3-Ah^2+\frac{1}{2}AB+8ah^2=C;$$

следовательно,

$$a=\frac{A^3}{64h^2}+\frac{A}{4}-\frac{AB}{16h^2}+\frac{C}{8h^2}.$$

Наконец,

$$(f^2-2hk)^2+4a^2h^2-4c^2h^2=D.$$

Но

$$f^2-2hk=\frac{B}{2}-2h^2-\frac{A^2}{8}$$

и

$$2ah=\frac{A^3}{32h}+\frac{Ah}{2}-\frac{AB}{8A}+\frac{C}{4h}\ ;$$

если подставить эти значения, то получится уравнение, в состав которого войдут c и h. Последние количества будет очень удобно определить из приведенного выше уравнения, конечно, таким образом, чтобы оба они принимали действительное значение.

495. Но так как в каждом биквадратном уравнении легко избавиться от второго члена, предположим, что этого члена уже не существует и что надлежит построить уравнение

$$x^4 * + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Таким образом, во-первых, будет $f=0$, во-вторых, $k=h-\frac{B}{2h}$, в-третьих, $a=\frac{C}{8h^2}$, а в силу того, что

$$2hk-f^2=2h^2-\frac{B}{2} \quad \text{и} \quad 2ah=\frac{C}{4h},$$

то, в-четвертых,

$$4h^4-2Bh^2+\frac{1}{4}B^2+\frac{C^2}{16h^2}-4c^2h^2=D,$$

откуда находим

$$64c^2h^4=C^2+4B^2h^2-32Bh^4+64h^6-16Dh^2$$

и, стало быть,

$$8ch^2=\sqrt{4h^2(B-4h^2)^4+C^2-16Dh^2}.$$

Но так как прежде всего надо обеспечить, чтобы как c, так и h принимали действительные значения, положим $c=h-\frac{B+q}{4h}$, и тогда будет

$$C^2-16Dh^2-8Bh^2q+32h^4q-4h^2q^2=0.$$

Таким образом, для того чтобы удовлетворить поставленному требованию, необходимо различать два случая: один, когда D является отрицательным количеством, и другой, когда D является положительным количеством. Итак, пусть

I

D будет положительным количеством $=+E^2$, так что надлежит построить следующее уравнение:

$$x^4+Bx^2-Cx+E^2=0.$$

С этой целью положим $q=0$, так что будем иметь $c=\frac{4h^2-B}{4h}$, и тогда

$$h^2=\frac{C^2}{16E^2} \quad \text{и} \quad h=\frac{C}{4E},$$

откуда получается

$$c=\frac{C^2-4BE}{4CE}$$

и затем

$$k=c=\frac{C^2-4BE}{4CE}, \qquad a=\frac{2E^2}{C} \qquad \text{и} \qquad f=0.$$

II

Если же D будет отрицательным количеством, положим $D=-E^2$, так что надо построить уравнение

$$x^4+Bx^2-Cx-E^2=0,$$

то будем иметь

$$64c^2h^4=C^2+4h^2(4h^2-B)^2+16E^2h^2,$$

а это уравнение дает для c действительное значение, каково бы ни было значение h, ибо мы имеем

$$c=\frac{\sqrt{C^2+4h^2(4h^2-B)^2+16E^2h^2}}{8h^2}$$

и, следовательно, h можно взять каким угодно. Таким образом, в каждом отдельном случае надлежит взять его так, чтобы для c получалось наиболее легкое построение.

Когда это сделано, будем иметь, как и раньше,

$$AE=f=0, \qquad CD+EF=k=\frac{4h^2-B}{4h}$$

и

$$AD=a=\frac{C}{8h^2}.$$

Если положить $E=0$, получается построение кубического уравнения

$$x^3 * +Bx-C=0.$$

На этом построении основано хорошо известное правило Бэкера [1]).

496. Возьмем две какие-нибудь линии второго порядка, то есть два конических сечения, уравнения которых отнесены к общей оси и к одному и тому же началу абсцисс:

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

и

$$\alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0.$$

Если, пользуясь изложенным выше методом, исключить из этих уравнений y, что осуществляется путем сопоставления этих уравнений с уравнениями, рассмотренными в § 479, а именно с уравнениями

$$P+Qy+Ry^2=0$$

и

$$p+qy+ry^2=0,$$

[1]) Thomas Baker (1625—1689): Clavis geometrica catholica: Sive Janua aequationum reserata, etc. The geometrical Key: or the gate of equations unlo ck'd etc. (Latine et anglice), London, 1684. Ср. также J. C. Wolff, Elementa Matheseos universal; elementa Analyseos Cap VIII, de Constructione aequationum, где рассматривается указанное выше «центральное правило» (regula centralis). [*А. Ш.*]

то P и p окажутся функциями второго порядка от x; Q и q будут функциями первого порядка, а R и r будут постоянными. Отсюда заключаем, что результирующее уравнение будет биквадратным. Таким образом, с помощью пересечений двух каких-нибудь конических сечений нельзя построить уравнения более высокой степени, чем биквадратные, которые, как мы видели, можно построить с помощью окружности и параболы. К тому же заключению можно прийти, если исходить из природы линий второго порядка, которые могут быть пересечены прямой линией в двух точках. Отсюда следует, что две прямые линии могут дать четыре пересечения, и значит, две прямые линии, рассматриваемые совместно, образуют некоторый вид линий второго порядка. Отсюда ясно, что две линии второго порядка могут взаимно пересекаться в четырех точках.

497. Допустим, что для получения пересечений применяются две линии, одна второго, а другая третьего порядка, которые выражаются следующими уравнениями:

$$P + Qy + Ry^2 = 0$$

и

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

Таким образом, P будет функцией двух измерений от x, Q — функцией одного измерения и R — постоянным количеством; вместе с тем p будет функцией трех измерений, q — двух измерений, r — одного измерения и s — постоянным количеством. Если эти соотношения принять во внимание в уравнении, которое получится после исключения y (§ 480), то станет ясно, что это уравнение будет шестого порядка. Таким образом, с помощью пересечения линий третьего порядка с коническим сечением нельзя построить уравнений порядка выше шестого, что также следует из природы линий того и другого порядка. Действительно, так как линии третьего порядка пересекаются прямой линией в трех точках, то двумя прямыми линиями, которые, будучи взяты совместно, представляют собою некий вид линий второго порядка, они будут пересекаться в шести точках.

498. Если мы применим к более высоким порядкам линий как изложенный выше метод исключения, так и приведенное соображение о пересечении прямых линий, то станет ясно, что с помощью пересечений двух линий третьего порядка можно построить уравнения девятой степени, а с помощью пересечений двух линий четвертого порядка можно построить уравнения степеней не выше шестнадцатой. И вообще с помощью пересечения двух кривых линий, из которых одна будет порядка m, а другая порядка n, можно построить все уравнения, степени которых не превышают mn. Так, например, для того чтобы построить уравнение сотой степени, потребуются либо две линии десятого порядка, либо две линии, из которых одна будет пятого порядка, а другая двадцатого порядка и т. д., разлагая 100 на два множителя. Если же высшая степень того уравнения, которое надлежит построить, выражается простым числом или каким-либо иным числом, не дающим удобных множителей, то вместо него следует взять другое большее число, имеющее удобные множители; ибо если с помощью каких-либо двух кривых линий можно построить уравнения более высоких степеней, то с их помощью можно составить уравнения любой более низкой степени. Так, например, для уравнения тридцать девятой степени можно применить две кривые, одну шестого и другую седьмого порядка, так как с помощью этих двух кривых можно построить

уравнение сорок второй степени, а этого рода построение следует признать более простым, чем если бы одна кривая была третьего порядка, а другая тринадцатого порядка.

499. Таким образом, из того, что было изложено выше, ясно, что всякое уравнение можно многими путями, и даже бесчисленным множеством путей построить с помощью пересечения двух кривых линий таким образом, что выявятся его действительные корни. Но из этого бесчисленного множества путей следует избрать тот, который осуществляется с помощью наиболее простых и наиболее легко описываемых кривых. И прежде всего, конечно, следует стремиться к тому, чтобы путем пересечений были выявлены все действительные корни; а последнее достигается в том случае, если берут такого рода кривые, у которых не существует мнимых пересечений. А раньше мы видели, что для подобного рода пересечений совершенно не остается места, если в уравнении для одной из кривых линий ордината y равна однозначной функции x. В самом деле, в этом случае, так как упомянутая выше кривая не имеет совершенно мнимых ординат, не могут иметь место мнимые пересечения, каково бы ни было число мнимых ординат, которые может содержать в себе другая кривая. При этом процессе построения мы одну из кривых линий будем всегда брать таким образом, чтобы ее уравнение имело вид $P+Qy=0$, где P и Q обозначают некоторые функции x.

500. Таким образом, если предложено уравнение, следует выбрать какую-нибудь подходящую кривую, содержащуюся в уравнении $P+Qy=0$. А так как уравнение для другой кривой должно быть составлено так, чтобы при подстановке в него $-\frac{P}{Q}$ вместо y получалось предложенное уравнение, то, обратно, из предложенного уравнения можно составить уравнение для другой кривой, если вместо $-\frac{P}{Q}$ подставить y. Так, например, если будет дано уравнение

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

то в качестве одной из двух кривых примем параболу, содержащуюся в уравнении $ay=x^2+bx$. Так как отсюда получается $x^2=ay-bx$, то будем подставлять это значение в предложенное уравнение столько раз, сколько захотим. Получим

$$x^4=a^2y^2-2abxy+b^2x^2,$$
$$Ax^3= \qquad +Aaxy-Abx^2$$

и, значит, мы придем к следующему уравнению второго порядка:

$$a^2y^2+a(A-2b)xy+(B-Ab+b^2)x^2+Cx+D=0,$$

и пересечения этой линии с кривой $ay=x^2+bx$ укажут корни рассматриваемого уравнения.

501. Подобно тому как обе указанные кривые можно варьировать на бесчисленное множество ладов, давая произвольные значения постоянным a и b, совершенно так же можно внести еще большее разнообразие. Действительно, так как из первого уравнения имеем $x^2-ay+bx=0$, то будет также $acx^2-a^2cy+abcx=0$, и если это уравнение прибавить к последнему, то получится гораздо более общее уравнение для линии

второго порядка, пересечения которой с первой линией равным образом укажут корни предложенного уравнения. Таким образом, обе эти кривые, которые служат для построения, будут:

I

$$ay = x^2 + bx,$$

II

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2 + ac)x^2 - a^2cy + (C + abc)x + D = 0.$$

Это последнее уравнение может быть приспособлено таким образом, что оно будет содержать в себе любое коническое сечение. Следует, разумеется, учитывать количество

$$A^2 - 4B - 4ac,$$

и если оно окажется положительным, то кривая будет гиперболой; если оно будет $= 0$, то кривая будет параболой; если же оно будет отрицательным, то кривая будет эллипсом. А окружностью окажется эта кривая в том случае, если будет

$$b = \frac{1}{2}A \text{ и } a^2 = B - \frac{1}{4}A^2 + ac,$$

то есть

$$c = a + \frac{A^2}{4a} - \frac{B}{a}.$$

Действительно, в этом случае уравнением кривой будет

$$a^2y^2 + a^2x^2 - \left(a^3 + \frac{A^2a}{4} - Ba\right)y + \left(C + \frac{A^2a}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2}\right)x + D = 0,$$

то есть

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{A}{8} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{C}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a}{2} + \frac{A}{8} - \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(\frac{C}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 - \frac{D}{a^2},$$

в котором правая часть является квадратом радиуса окружности.

502. Итак, указанным выше образом можно с помощью одних конических сечений получить бесчисленное множество кривых линий, которые, будучи начерчены вместе с параболой $ay = x^2 + bx$, представят своими пересечениями корни предложенного уравнения. Таким образом, какие бы из этих кривых мы ни взяли, парабола будет всегда пересечена в одних и тех же точках и, значит, все упомянутые выше линии будут всегда взаимно пересекаться в одних и тех же точках. В силу сказанного можно из ранее указанных бесчисленных кривых взять произвольно две какие-либо кривые (за исключением взятой ранее параболы), которые, будучи описаны около общей оси, своими пересечениями всегда укажут корни предложенного уравнения. Этим именно путем можно построить указанное уравнение либо с помощью окружности и параболы, как мы это видели раньше, либо с помощью двух парабол, либо с помощью параболы и эллипса или гиперболы, либо с помощью двух эллипсов или с помощью эллипса и параболы. Многообразие этих построений увеличится еще в гораздо большей степени, если с этой целью пожелать использовать и кривые более высоких порядков.

503. Подобным же образом можно построить уравнения более высоких степеней, беря в качестве одной из кривых линию параболического рода, выражаемую уравнением $y = P$. Так, например, если будет предложено построить уравнение

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0,$$

возьмем параболическое уравнение четвертого порядка $x^4 = a^3y$, и так как, значит, $x^{12} = a^9y^3$, то после подстановки этого члена получится уравнение для линии третьего порядка

$$a^9y^3 - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0;$$

из этого уравнения, если к нему прибавить какое-нибудь кратное первоначального уравнения $x^4 - a^3y = 0$, можно получить бесчисленное множество линий четвертого порядка, из которых любые две, взятые совместно, дают построение искомого уравнения.

504. Но если случится так, что изложенный выше метод не дает достаточно удобного построения для уравнения, которое надо построить, то в этом случае предложенное уравнение следует умножить на x или на x^2, или на x^3, или на какую-нибудь более высокую степень x, так что к его корням прибавится еще некоторое количество исчезающих корней, на которые укажут пересечения в самом начале абсцисс и, стало быть, можно будет легко отличить их от остальных подлинных корней предложенного уравнения. Таким образом степень предложенного уравнения повышается, тем не менее при этом зачастую получается более удобное построение. Так, например, когда предложено кубическое уравнение

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

то, если положить $x^2 = ay$, так что одна из кривых, которые мы строим, будет параболой, другая кривая будет всегда гиперболой. Действительно, если вместо x^2 подставить ay, то получится следующее уравнение:

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

если же к последнему прибавить прежнее уравнение $cx^2 - acy = 0$, то получится следующее более общее уравнение:

$$axy + cx^2 + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

которое тоже всегда является уравнением гиперболы. Следовательно, если бы представлялось более удобным воспользоваться окружностью, эллипсом или параболой, то в этом случае надо было бы умножить предложенное уравнение на x, и тогда получится уравнение

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0.$$

Если это уравнение сравнить с построенным выше биквадратным уравнением, то получится $D = 0$, а это уравнение можно всегда построить с помощью окружности и параболы.

505. Так как, следовательно, всякое уравнение любой степени может быть построено путем пересечения двух алгебраических кривых, причем бесконечно многими путями, то можно будет подставить любую линию вместо другой кривой линии, и тогда возникает вопрос, каким образом заданное уравнение может быть построено с помощью заданной кривой.

Здесь прежде всего следует указать на то, что заданная кривая должна принадлежать к такому роду кривых, чтобы ее ордината выражалась однозначной функцией x, дабы мнимые пересечения не нарушили построения. Действительно, не было бы достаточно того, чтобы кривая или только часть рассматриваемой кривой имела абсциссы, равные одному корню уравнения, каковое условие обычно добавляют, когда нужен только один корень предложенного уравнения. Ибо может случиться, что данная дуга кривой линии не допускает никакого пересечения, хотя абсцисса, соответствующая какой-либо точке этой кривой линии, является подлинным корнем, так как этот корень может получаться в результате мнимого пересечения или же пересечения другой ветви, соответствующего той же абсциссе. Поэтому я не останавливаюсь дольше на этом вопросе, который является скорее любопытным, чем полезным, поскольку я достаточно подробно выяснил истинные основания всех подобного рода построений.

ГЛАВА XXI
О ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КРИВЫХ ЛИНИЯХ

506. До сих пор мы имели дело с алгебраическими кривыми, которые имеют такую структуру, что если взять на какой-нибудь оси абсциссы, то соответствующие ординаты выразятся алгебраическими функциями абсцисс, или, что то же, у которых соотношение между абсциссами и ординатами может быть выражено алгебраическим уравнением. Отсюда также следует, что если значение ординаты не может быть выражено алгебраической функцией абсциссы, то эту кривую нельзя отнести к числу алгебраических. А те кривые, которые не являются алгебраическими, принято называть *трансцендентными*. Итак, трансцендентная линия определяется как такая кривая, у которой соотношение между абсциссами и ординатами не может быть выражено алгебраически. Таким образом, во всех случаях, когда ордината y равна трансцендентной функции x, кривая должна быть отнесена к роду трансцендентных.

507. В предыдущей части [1]) мы были заняты главным образом двумя видами трансцендентных количеств; в состав одного из них входили логарифмы, а в состав второго — дуги окружности или углы. Следовательно, в тех случаях, когда ордината y равна логарифму абсциссы x или дуге круга, синус или косинус или тангенс которой выражаются с помощью абсциссы x, так что $y = lx$, или $y = \arcsin x$, или $y = \arccos x$, или $y = \operatorname{arctg} x$ [2]), или же если только такого рода значения входят в состав уравнения между x и y, то в этих случаях кривая будет трансцендентной. Однако такие кривые представляют собою лишь отдельные виды трансцендентных линий, потому что помимо них имеется бесчисленное множество трансцендентных выражений, происхождение которых более детально излагается в анализе бесконечных, так что число трансцендентных кривых во много раз превышает число алгебраических кривых.

508. Всякая функция, не являющаяся алгебраической, представляет собою трансцендентную функцию и, значит, делает трансцендентной кривую, в уравнение которой она входит. А алгебраическое уравнение либо является рациональным и не содержит в себе никаких показателей, помимо целых чисел, либо является иррациональным и содержит в себе дробные показатели; но в последнем случае его всегда можно привести к рацио-

---

[1]) То есть в первом томе «Введения».
У Эйлера применяются обозначения: $A \sin x, \ldots$ См. первый том, § 140.

нальному виду. Таким образом, всякая кривая, уравнение которой, выражающее соотношение между координатами x и y, не является рациональным и не может быть приведено к рациональному виду, всегда является трансцендентной линией. Следовательно, если в уравнении имеются такого рода степени, что показатели их не являются ни целыми числами, ни дробными, то их никакими средствами нельзя привести к рациональному виду и, стало быть, кривые, содержащиеся в этого рода уравнениях, будут всегда трансцендентными. Отсюда получается первый и как бы простейший вид трансцендентных кривых линий, в уравнениях которых имеются иррациональные показатели. Так как в состав этих уравнений не входят ни логарифмы, ни дуги окружности, и они возникают только из понятия иррациональных чисел, то они кажутся как бы в большей мере относящимися к обычной геометрии и в силу этого Лейбниц назвал их *интерсцендентными* [1]), как если бы они занимали промежуточное положение между алгебраическими и трансцендентными линиями.

509. Следовательно, такого рода интерсцендентной кривой линией будет та, которая содержится в уравнении $y = x^{\sqrt{2}}$, ибо в какие бы степени мы ни возводили это уравнение, его никогда нельзя будет привести к рациональному виду. Подобного уравнения нельзя построить и какими бы то ни было геометрическими средствами. Ведь геометрически нельзя построить никаких иных степеней, кроме тех, показателями которых являются рациональные числа, и в силу этого подобного рода кривые весьма значительно отличаются от алгебраических. Действительно, если бы мы захотели взять лишь приближенное значение $\sqrt{2}$ и поставили вместо последнего какую-нибудь из нижеприведенных дробей:

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \ldots$$

которые приближенно выражают значение $\sqrt{2}$, то получили бы, конечно, алгебраические кривые, которые близко подходят [2]) к искомой линии, но они были бы либо третьего порядка, либо седьмого, либо семнадцатого, либо сорок первого и т. д. Следовательно, так как $\sqrt{2}$ можно рационально выразить лишь с помощью такой дроби, у которой числитель и знаменатель являются бесконечно большими числами, то эту кривую надо будет признать кривой бесконечно большого порядка и, значит, ее нельзя будет считать алгебраической. К этому прибавляется еще и то обстоятельство, что $\sqrt{2}$ содержит в себе два значения; одно положительное и другое отрицательное, в результате чего и для y всегда получаются два значения и, стало быть, получаются две кривые.

510. Далее, конечно, если бы мы пожелали точно построить эту кривую, то мы не могли бы этого сделать без помощи логарифмов. Действительно, так как $y = x^{\sqrt{2}}$, то, взяв логарифмы, мы получим $ly = \sqrt{2}\, lx$. Таким образом, логарифм каждой абсциссы, будучи умножен на $\sqrt{2}$, даст логарифм ординаты; стало быть, для каждого значения абсциссы x соответствующее значение y определится с помощью таблицы

[1]) Ср. письмо Лейбница Валлису от 28 мая 1697 г. (Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Band IV, p. 28), а также Iohannis Wallis operum mathematicorum volumen tertium, p. 680, Oxoniae, 1699. [*А. Ш.*]

[2]) proxime accedentes.

логарифмов. Так, например, если будет $x=0$, то получится $y=0$, при $x=1$ будет $y=1$, и эти значения очень легко вытекают из уравнения; но если будет $x=2$, то получится $ly=\sqrt{2}\cdot l2=\sqrt{2}\cdot 0{,}3010300$ и в силу того, что $\sqrt{2}=1{,}41421356$, получится, что $ly=0{,}4257207$ и, значит, приближенно будет $y=2{,}665144$, а при $x=10$ получится $ly=1{,}41421356$ и отсюда $y=25{,}954554$[1]. Таким образом, указанным путем можно будет для каждой абсциссы вычислить ординаты и построить саму кривую, если только абсциссе x будем придавать положительные значения. Но если абсцисса x будет получать отрицательные значения, то в этом случае будет трудно сказать, окажутся ли значения y действительными или мнимыми. Действительно, пусть $x=-1$; тогда невозможно определить, что представляет собою $(x-1)^{\sqrt{2}}$, так как приближения к значению $\sqrt{2}$ не могут в данном случае ничем помочь.

511. Гораздо меньше приходится сомневаться в том, что уравнения, в которых находятся к тому же мнимые показатели, должны быть отнесены к роду трансцендентных. Но, конечно, может случиться, что выражение, содержащее в себе мнимые показатели, представляет действительное и определенное значение. Примеры этого встречались уже выше, поэтому достаточно будет привести здесь еще один пример, а именно

$$2y=x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}},$$

в котором, хотя оба члена $x^{+\sqrt{-1}}$ и $x^{-\sqrt{-1}}$ являются мнимыми количествами, сумма их имеет действительное значение. Действительно, пусть $lx=v$; если e взять в качестве числа, гиперболический логарифм которого $=1$, то будет $x=e^v$, и если это значение подставить вместо x, то будет

$$2y=e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}.$$

Но в § 138 первой части мы видели, что

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}=\cos v\,^{2}),$$

откуда получается

$$y=\cos v=\cos lx.$$

Таким образом, если дается какое-нибудь численное значение x, следует взять гиперболический логарифм этого числа, затем на окружности, радиус которой $=1$, отсечь дугу, равную этому логарифму; тогда косинус этой дуги даст значение ординаты y. Так, например, если взять $x=2$, так что будет

$$2y=2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}},$$

то получится

$$y=\cos A\cdot\log 2=\cos A\cdot 0{,}6931471805599.$$

Но эта дуга, равная $\log 2$, ввиду того, что дуга, которая $=3{,}1415926535$ и т. д., содержит в себе 180°, будучи вычислена согласно золотому пра-

[1]) Некоторые из приведенных в этом параграфе чисел исправлены по сравнению с первым изданием в соответствии с Opera omnia.

[2]) У Эйлера применяется запись $y=\cos A\cdot v$. См. первый том, § 126.

вилу, окажется равной 39°41′51″52‴8⁗, косинус же ее равен 0,76923890136400[1]), и это число дает значение ординаты y, соответствующее абсциссе $x=2$. А так как в состав этого рода выражений входят и логарифмы, и дуги окружности, то их с полным основанием относят к трансцендентным.

512. Таким образом, среди трансцендентных кривых первое место занимают те линии, уравнения которых, кроме алгебраических величин, содержат в себе логарифмы, и простейшей из них будет та линия, которая содержится в уравнении

$$l\frac{y}{a}=\frac{x}{b} \quad \text{или} \quad x=bl\frac{y}{a};$$

при этом безразлично, какого рода логарифмы берут, так как путем умножения на постоянную b все системы логарифмов можно привести к одной и той же системе. Итак, пусть буква l обозначает гиперболические логарифмы; тогда кривая, содержащаяся в уравнении $x=bl\frac{y}{a}$, обычно называется *логарифмической*. Пусть e представляет собою число, логарифм которого $=1$, так что $e=2{,}71828182845904523536028$; тогда

$$e^{x:b}=\frac{y}{a} \quad \text{или} \quad y=ae^{x:b},$$

а из этого уравнения легче всего познается природа логарифмической кривой. Действительно, если вместо x последовательно подставлять значения, идущие в арифметической прогрессии, то ординаты y будут получать значения, следующие в геометрической прогрессии. Для того чтобы это было легче применить для построения, положим

$$e=m^n \quad \text{и} \quad b=nc,$$

и тогда будет

$$y=am^{x:c},$$

где m может обозначать любое положительное число, большее единицы. Следовательно, если будет

$$x=0,\quad c,\quad 2c,\quad 3c,\quad 4c,\quad 5c,\quad 6c \text{ и т. д.},$$

то получится

$$y=a,\quad am,\quad am^2,\quad am^3,\quad am^4,\quad am^5,\quad am^6 \text{ и т. д.},$$

а если придавать количеству x отрицательные значения, положив

$$x=-c,\quad -2c,\quad -3c,\quad -4c,\quad -5c \text{ и т. д.},$$

то будет

$$y=\frac{a}{m},\quad \frac{a}{m^2},\quad \frac{a}{m^3},\quad \frac{a}{m^4},\quad \frac{a}{m^5} \text{ и т. д.}$$

513. Отсюда ясно (рис. 101)[2]), что ординаты y имеют всюду положительные значения и притом возрастающие до бесконечности, если

[1]) Последние два числа даны, в соответствии с Opera omnia, с исправлениями по отношению к первому изданию.

[2]) На этом рисунке ось абсцисс размещена так, как сейчас обычно размещают ось ординат.

увеличивать абсциссы x до бесконечности в положительном направлении; а на другой стороне оси они убывают до бесконечности, так что здесь ось становится асимптотой Ap кривой линии. Стало быть, если взять A в качестве начала абсцисс, то в этом месте ордината будет $AB=a$, а если взять абсциссу $AP=x$, то ордината будет

$$PM=y=am^{x:c}=ae^{x:b}$$

и, следовательно,

$$l\frac{y}{a}=\frac{x}{b}.$$

Отсюда следует, что абсцисса AP, разделенная на постоянное b, выражает логарифм отношения $\frac{PM}{AB}$. Если начало абсцисс избрать в какой-либо иной точке оси a, то уравнение останется таким же. Действительно, пусть $Aa=f$; тогда, положив $aP=t$, мы, поскольку $x=t-f$, будем иметь

$$y=ae^{(t-f):b}=ae^{t:b}:e^{f:b}.$$

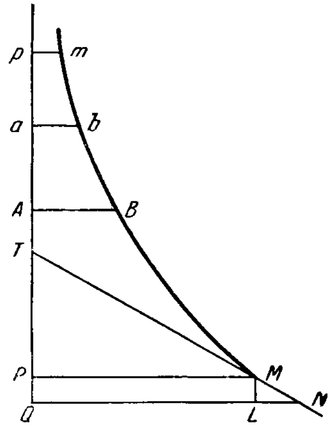

Рис. 101.

Обозначим постоянное $a:e^{f:b}$ через g; тогда будет $y=ge^{t:b}$. Понятно, что отсюда, в силу того, что $ab=g$, получается

$$\frac{aP}{b}=l\frac{PM}{ab},$$

и, следовательно, если провести две какие-либо ординаты PM и pm, расстояния между которыми равно Pp, то будет

$$\frac{Pp}{b}=l\frac{PM}{pm},$$

и тогда постоянная b, от которой зависит приведенное выше соотношение, будет наподобие логарифмического параметра.

514. Легко также определить касательную к этой логарифмической кривой в любой точке M. Действительно, если положить $AP=x$, то получается $PM=ae^{x:b}$; проведем какую-нибудь другую ординату QN, находящуюся от первой ординаты на расстоянии $PQ=u$; тогда будет

$$QN=ae^{(x+u):b}=ae^{x:b}\cdot e^{u:b},$$

и если провести линию ML параллельно оси, то будет

$$LN=(QN-PM)=ae^{x:b}(e^{u:b}-1).$$

Через точки N и M проведем прямую линию NMT, которая пересекает ось в точке T, и тогда будет

$$LN:ML=PM:PT,$$

а отсюда

$$PT=u:(e^{u:b}-1).$$

Но, как мы показали в предыдущей части, в виде бесконечного ряда

$$e^{u:b}=1+\frac{u}{b}+\frac{u^2}{2b^2}+\frac{u^3}{6b^3}+\text{ и т. д.}$$

следовательно,

$$PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{u^2}{6b^3} + \text{и т. д.}}.$$

Пусть теперь промежуток $PQ = u$ исчезает. Тогда, поскольку точки M и N совпадают друг с другом, прямая NMT станет касательной к кривой линии, а подкасательная PT будет $= b$, т. е. будет постоянной, что является замечательным свойством логарифмической кривой. Таким образом, параметр b логарифмической кривой линии оказывается одновременно ее подкасательной линией, имеющей повсюду одну и ту же величину [73].

515. Здесь возникает вопрос, описывается ли изложенным выше путем вся логарифмическая кривая линия и не имеет ли она, помимо описанной выше ветви MBm, уходящей с обеих сторон в бесконечность, еще каких-нибудь иных частей. Ведь раньше мы видели, что не существует асимптоты, к которой не сходились бы две ветви. Поэтому некоторые и утверждали, что логарифмическая кривая линия состоит из двух подобных частей, расположенных по обе стороны от оси, так что асимптота одновременно является диаметром. Однако уравнение $y = ae^{x:b}$ ни в какой мере на это не указывает, так как во всех случаях, когда $\frac{x}{b}$ является целым числом или же дробью, знаменатель которой является нечетным числом, y имеет одно действительное значение и притом положительное. Но когда дробь $\frac{x}{b}$ имеет четный знаменатель, то в этих случаях ордината y имеет два значения: одно положительное, другое отрицательное, и последнее дает точку кривой, расположенную по другую сторону от асимптоты. Отсюда следует, что логарифмическая кривая будет иметь по другую сторону от асимптоты бесчисленное множество отдельных точек, которые не образуют непрерывной кривой, хотя благодаря бесконечной малости промежутков между этими точками создается впечатление непрерывности линии [1]). Это парадокс, который совершенно не имеет места у алгебраических кривых линий. Но здесь получается другой, еще гораздо более удивительный парадокс. А именно, так как логарифмы отрицательных чисел являются мнимыми числами (что и само по себе очевидно, и становится понятным в силу того, что $l(-1)$ находится в конечном отношении к $\sqrt{-1}$ [2])), то $l(-n)$ будет мнимым количеством, которое пусть $= i$. А так как логарифм квадрата равен удвоенному логарифму корня, то будет $l(-n)^2 = ln^2 = 2i$. Но ln^2 является действительным количеством $= 2ln$, откуда следует, что и действительное количество ln, и мнимое количество i составляют половину одного и того же действительного количества ln^2. Отсюда далее вытекало бы, что каждое число имеет два вида половин, одну действительную, а другую мнимую, что точно так же каждое число имеет три различных трети,

[1]) etiamsi ob intervalla infinite parva curvam continuam mentiantur.

[2]) Равенство $\log\sqrt{-1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ было доказано Иоганном Бернулли (Joh. Bernoulli, Opera omnia t. 1, p. 399, Problema I, Corollarium $\left(\text{Est } \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dt}{2ti} \text{ posito } z = \frac{it+1}{t+1}\right)$. [*A. III.*]

четыре различных четверти и так далее, из которых, однако, лишь одна часть была бы действительной, и неясно, каким образом это можно было бы согласовать с обычным представлением о числе [74].

516. Следовательно, если согласиться с тем, что мы изложили, то половина числа a будет равна $\frac{a}{2}+l(-1)$ и $\frac{a}{2}$, так как удвоенное первое значение равно

$$a+2l\sqrt{-1}=a+l(-1)^2=a+l1=a.$$

Здесь следует отметить, что

$$+l(-1)=-l(-1),$$

хотя $l(-1)\neq 0$. Действительно, так как $-1=\frac{+1}{-1}$, то

$$l(-1)=l(+1)-l(-1)=-l(-1).$$

Равным образом, так как $\sqrt[3]{1}$ есть не только 1, но и $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, то будет

$$3l\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=l1=0,$$

и, стало быть, три вида третей одной и той же величины a составят

$$\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}+l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a}{3}+l\frac{-1-\sqrt{3}}{2},$$

так как утроение каждого из этих выражений дает одно и то же количество a. Для того чтобы устранить сомнения, поскольку эти утверждения представляются неприемлемыми, следует установить другое парадоксальное положение, а именно, что каждое число имеет бесконечно много логарифмов, среди которых лишь один является действительным. Так, например, хотя логарифм единицы $=0$, однако, кроме того, имеется бесконечно много других мнимых логарифмов единицы, а именно

$$2l(-1),\quad 3l\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\quad 4l(-1) \quad \text{и} \quad 4l(\pm\sqrt{-1}),$$

и бесчисленное множество других, на которые указывает извлечение корней. Это суждение представляется гораздо более правдоподобным, чем то, которое было приведено выше. Действительно, если положить $x=la$, то будет $a=e^x$ и, следовательно,

$$a=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}+\text{и т. д.},$$

а так как это уравнение имеет бесконечно большое измерение, то неудивительно, что x имеет бесконечно много корней. Но хотя этим путем мы и разрешили последний парадокс, тем не менее сохраняет свою силу первый парадокс, который, как мы выше показали, связан с допущением существования бесчисленного множества дискретных точек логарифмической линии, расположенных ниже оси.

517. Но гораздо нагляднее можно показать существование подобного рода бесчисленного множества отдельных точек с помощью уравнения $y=(-1)^x$. Действительно, во всех случаях, когда x является целым четным

числом или же дробью, числитель которой — четное число, y будет $=1$; если же x будет целым нечетным числом или дробью, у которой как числитель, так и знаменатель — нечетные числа, y будет $=-1$. Во всех остальных случаях, когда x является либо дробью, имеющей четный знаменатель, либо даже иррациональным числом, y будет иметь мнимое значение. Таким образом, уравнение $y=(-1)^x$ даст бесчисленное множество отдельных точек, расположенных по ту и другую сторону оси на расстоянии $=1$, причем никакие две из этих точек не окажутся смежными. Тем не менее какие-нибудь две точки, расположенные по одну и ту же сторону от оси, будут настолько близки друг к другу, что промежуток между ними будет меньше любого заданного количества. Ведь между двумя значениями абсциссы, как бы они ни были близки друг к другу, можно вставить не только одну дробь, но и бесконечно много дробей, знаменатели которых являются нечетными числами, и каждая из этих дробей дает точку, относящуюся к рассматриваемому уравнению. Таким образом, эти точки создают видимость двух прямых линий, параллельных оси и отстоящих от нее на расстоянии $=1$. Ведь на этих линиях нельзя указать какой-либо промежуток, на котором нельзя было бы отметить не то что одну точку, а бесконечно много точек, содержащихся в уравнении $y=(-1)^x$. Та же самая аномалия присуща и уравнению $y=(-a)^x$, и другим подобным ему уравнениям, в которых отрицательное количество возводится в неопределенную степень. Таким образом, надо было здесь указать на парадоксы, которые могут иметь место лишь у трансцендентных кривых.

518. К рассматриваемому ряду кривых, зависящих от логарифмов, относятся все уравнения, в которых встречаются не только логарифмы, но и переменные показатели, а именно те уравнения, которые получаются в результате перехода от логарифмов к числам, вследствие чего эти кривые линии обычно называют также *показательными*. Стало быть, подобного рода кривой будет линия, которая содержится в уравнении $y=x^x$, то есть $ly=x\,lx$. Следовательно, если положить $x=0$, то будет $y=1$; при $x=1$ будет $y=1$, при $x=2$ будет $y=4$, при $x=3$ будет $y=27$ и т. д. Отсюда следует (рис. 102), что если BDM представляет форму этой кривой, отнесенной к оси AP, то если взять $AC=1$, будет $AB=CD=1$. А в промежутке A и C ординаты будут меньше единицы; действительно, если взять $x=\frac{1}{2}$, то получится

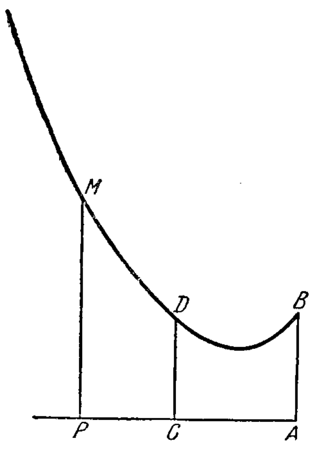

Рис. 102.

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071068;$$

ордината будет минимальной, если взять абсциссу

$$x=\frac{1}{e}=0{,}36787944;$$

в этом случае ордината $y=0{,}6922005$, как это будет показано в дальнейшем. Для того чтобы увидеть, какова структура этой кривой по ту сторону точки B, следует x сделать отрицательным, и тогда получится $y = \frac{1}{(-x)^x}$ откуда следует, что эта часть кривой будет состоять только из ряда дискретных точек, сходящихся к оси как к асимптоте. При этом указанные точки приходятся на ту или другую сторону от оси, в зависимости от того, будет ли x четным или нечетным числом. Больше того, бесконечно много подобных точек попадет ниже оси AP, если для x взять дробь, у которой знаменатель является четным числом. Действительно, если положить $x = \frac{1}{2}$, то будет и $y = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, непрерывная кривая линия MDB в точке B, в противоположность свойствам алгебраических линий, внезапно заканчивается и вместо продолжения имеет упомянутые выше дискретные точки. Отсюда тем яснее выявляется реальность существования указанных выше как бы сопряженных точек. Ведь если бы мы не согласились с их существованием, то пришлось бы допустить, что вся кривая линия внезапно прекращается в точке B, что противоречило бы закону непрерывности и, значит, было бы абсурдным [[75]].

519. Среди бесконечно многих других кривых этого рода, которые могут быть построены с помощью логарифмов, имеются и такого рода кривые, построение которых представляется не столь легким, но тем не менее может быть осуществлено с помощью удобной подстановки. Такова кривая, содержащаяся в уравнении

$$x^y = y^x.$$

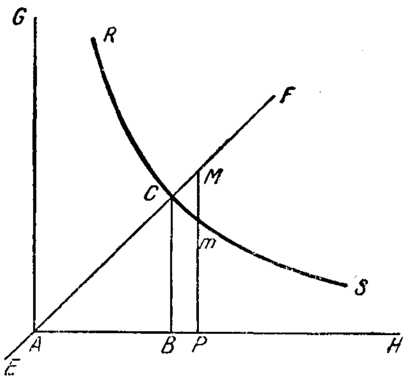

Рис. 103.

Из последнего, конечно, сразу видно, что ордината y постоянно равна абсциссе x, так что прямая линия, наклоненная под полупрямым углом, всегда удовлетворит этому уравнению. В то же время однако ясно, что это уравнение является более общим, чем уравнение для прямой $y = x$, и что, значит, последнее не может исчерпать уравнения $x^y = y^x$. Ведь это последнее уравнение может быть удовлетворено и в том случае, когда не будет $x = y$, так как при $x = 2$ может также быть $y = 4$. Следовательно, кроме прямой линии EAF, рассматриваемое уравнение содержит в себе и другие части. Для того чтобы их найти и таким образом представить всю линию (рис. 103), содержащуюся в данном уравнении, положим $y = tx$, так что будет $x^{tx} = t^x x^x$, откуда после извлечения корня степени x получится

$$x^t = tx \quad \text{и} \quad x^{i-1} = t$$

и, значит, будет

$$x = t^{\frac{1}{t-1}} \quad \text{и} \quad y = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

Или, если положить $t - 1 = \frac{1}{u}$, получится

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \quad \text{и} \quad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

Таким образом, данная кривая, помимо прямой EAF, будет иметь ветвь RS, сходящуюся с прямыми AG и AH как с асимптотами, для которой прямая AF будет диаметром. Кривая пересечет при этом прямую AF в точке C, так что будет $AB = BC = e$, где e обозначает число, логарифм которого равняется единице. А сверх того рассматриваемое уравнение содержит в себе бесчисленное множество отдельных точек, которые вместе с прямой EF и кривой линией RCS исчерпывают рассматриваемое уравнение. Таким образом, можно указать бесчисленно много таких пар чисел x и y, которые дают $x^y = y^x$. Действительно, среди рациональных такими числами будут

$$\begin{array}{ll} x = 2, & y = 4, \\ x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}, & y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}, \\ x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}, & y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}, \\ x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} & y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024} \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.} \end{array}$$

И, конечно, каждое из чисел таких пар, будучи возведено в степень, равную второму числу этой пары, дает одно и то же количество. Так, например,

$$2^4 = 4^2 = 16,$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}},$$

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$

и т. д.

520. Хотя в приведенных выше, а также в другух подобных им кривых, можно алгебраическим путем определить бесконечно много точек, но их менее всего можно отнести к алгебраическим кривым, так как налицо имеется бесконечно много других точек, которые совершенно невозможно представить алгебраически. Перейдем, стало быть, к другому роду трансцендентных кривых, для которого требуются круговые дуги. А для того чтобы не осложнять вычисление большим количеством знаков, я буду здесь постоянно обозначать единицей радиус окружности, дуги которой входят в построение. Легко можно показать, что кривые, относящиеся к этому роду, не являются алгебраическими, хотя невозможность квадратуры круга еще до сих пор не доказана. Действительно, рассмотрим только простейшее уравнение этого рода $\frac{y}{a} = \arcsin\frac{x}{c}$, так что ордината y пропорциональна дуге круга, синусом которой является $\frac{x}{c}$. Но так как одному и тому же синусу $\frac{x}{c}$ соответствует бесчисленное множество дуг, то ордината y будет бесконечнозначной и, следовательно, как данная прямая, так и другие прямые будут пересекать эту кривую в бесконечно многих точках, и это свойство резко[1]) отличает рассматриваемую кривую от алгебраических.

[1]) clarissime.

Пусть s будет наименьшей дугой, которая соответствует синусу $\frac{x}{c}$, и пусть π обозначает полуокружность круга; тогда $\frac{y}{a}$ будет иметь следующие значения:

$$s,\ \pi - s,\ 2\pi + s,\ 3\pi - s,\ 4\pi + s,\ 5\pi - s \text{ и т. д.}$$

$$-\pi - s,\ -2\pi + s,\ -3\pi - s,\ -4\pi + s,\ -5\pi - s \text{ и т. д.}$$

Следовательно, если взять (рис. 104) прямую CAB в качестве оси и точку A в качестве начала абсцисс, то прежде всего при $x = 0$ получатся ординаты $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$ и т. д. Также и по другую сторону $AA^{-1} = +\pi a$, $AA^{-2} = +2\pi a$, $AA^{-3} = +3\pi a$ и т. д. и кривая пройдет через все эти точки. А если взять абсциссу $AP = x$, то ордината пересечет кривую в бесконечно многих точках M, и тогда будет $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\pi - s)$, $PM^3 = a(2\pi - s)$ и т. д. Таким образом, кривая будет состоять из бесчисленного множества подобных частей AE^1A^1, $A^1F^1A^2$, $A^2E^2A^3$, $A^3F^2A^4$ и т. д., так что все прямые, параллельные оси BC и проходящие через точки E и F, будут диаметрами этой кривой. При этом, конечно, будет $AC = AB = c$ и все отрезки E^1E^2, E^2E^3, E^1E^{-1}, $E^{-1}E^{-2}$, а равно F^1F^1, F^1F^{-2}, $F^{-1}F^{-2}$ будут равны $2a\pi$. Эту кривую Лейбниц назвал *линией синусов*, так как с ее помощью легко найти синус любой дуги. Действительно, так как

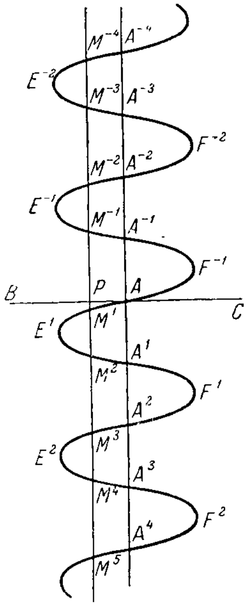

Рис. 104.

$$\frac{y}{a} = \arcsin \frac{x}{c},$$

то, обратно,

$$\frac{x}{c} = \sin \frac{y}{a}.$$

Если положить

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{z}{a},$$

то будет

$$\frac{x}{c} = \cos \frac{z}{a},$$

так что одновременно получается *линия косинусов*

521. Аналогичным образом в результате подобного же рассуждения получается *линия тангенсов*, уравнение которой будет $y = \operatorname{arctg} x$, если для краткости положить $a = 1$ и $c = 1$. Следовательно, отсюда получается обратно

$$x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y};$$

о форме этой кривой линии легко сделать заключение, исходя из природы тангенсов. Она будет иметь бесчисленное множество параллельных друг другу асимптот. Равным образом можно описать *линию секансов*, исходя из уравнения

$$y = \operatorname{arcsec} x, \text{ то есть } x = \sec y = \frac{1}{\cos y},$$

которое также имеет бесконечно много ветвей, уходящих в бесконечность. Из такого рода кривых линий весьма известна *циклоида* или *трохоида*, которую описывает точка окружности, катящейся по прямой линии и уравнение которой в прямоугольных координатах таково:

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x.$$

Эта кривая весьма достойна внимания как потому, что ее легко вычертить, так и потому, что ей присущи многочисленные замечательные свойства. Но так как большинство этих свойств не может быть изложено без анализа бесконечно малых, то мы рассмотрим здесь вкратце лишь главные из этих свойств, которые непосредственно вытекают из определения этой кривой [76].

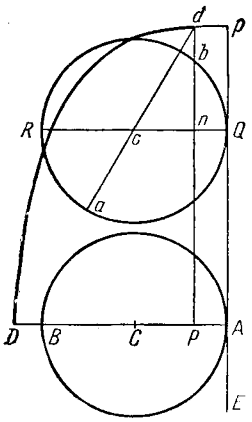

Рис. 105.

522. Итак, пусть (рис. 105) окружность ACB катится по прямой линии EA, а для того чтобы настоящее исследование было более общим, будем считать, что не точка окружности B, а какая-нибудь точка D продолженного диаметра описывает кривую линию Dd. Пусть радиус круга $CA=CB=a$, расстояние $CD=b$, и пусть в этом именно месте точка D занимает наиболее высокое положение. Пусть при вращении круг пришел в положение $aQbR$. Если положить расстояние $AQ=z$, то будет дуга $aQ=z$, и если эту дугу разделить на радиус a, то получится, что угол $acQ=\frac{z}{a}$, а точка, описывающая кривую, окажется в d, так что будет $cd=b$,

$$\text{угол } dcQ=\pi-\frac{z}{a}$$

и d будет точкой на искомой кривой. Опустим из точки d, во-первых, перпендикуляр dp на прямую AQ, а затем перпендикуляр dn на прямую QR. Тогда

$$dn=b\sin\frac{z}{a} \quad \text{и} \quad cn=-b\cos\frac{z}{a};$$

следовательно,

$$Qn=dp=a+b\cos\frac{z}{a}.$$

Продолжим линию dn, пока она не пересечет прямую AD в точке P и обозначим координаты

$$DP=x, \quad Pd=y;$$

тогда будет

$$x=b+cn, \quad \text{то есть} \quad x=b-b\cos\frac{z}{a}$$

и

$$y=AQ+dn=z+b\sin\frac{z}{a}.$$

Так как, стало быть,

$$b\cos\frac{z}{a}=b-x,$$

то будет

$$b \sin \frac{z}{a} = \sqrt{2bx - x^2}$$

и

$$z = a \arccos\left(1 - \frac{x}{b}\right) = a \arcsin \frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}.$$

Если подставить оба эти значения, то получится

$$y = \sqrt{2bx - x^2} + a \arcsin \frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}.$$

Если же отсчитывать абсциссы на оси AD от центра и обозначить $b - x$ через t, то

$$\sqrt{2bx - x^2} = \sqrt{b^2 - t^2},$$

и тогда получится следующее уравнение между t и y:

$$y = \sqrt{b^2 - t^2} + a \arccos \frac{t}{b}.$$

Это уравнение дает *обыкновенную* циклоиду, если $b = a$. Если же b будет больше, чем a или же меньше последнего, то циклоида называется *укороченной* или же *удлиненной*. Но y будет всегда бесконечнозначной [1]) функцией величин x и t, т. е. всякая прямая, параллельная основанию AQ, пересечет кривую в бесконечно многих точках, если только расстояние x или t не будет таким, что $\sqrt{2bx - x^2}$ или $\sqrt{b^2 - t^2}$ становится мнимым количеством.

523. К числу кривых этого рода, которые впервые были рассмотрены, следует отнести *эпициклоиды и гипоциклоиды* (рис. 106), которые получаются, когда круг ACB катится по окружности другого круга OAQ и в это время *какая-нибудь* точка D, взятая вне или внутри движущегося круга, описывает кривую Dd. Положим радиус неподвижного круга $OA = c$, радиус движущегося круга $CA = CB = a$ и расстояние точки, описывающей кривую $CD = b$. Примем при этом прямую OD в качестве оси искомой кривой Dd. Из этого начального положения, при котором точки O, C, D лежат на одной прямой, подвижной круг переместится в положение QcR, описав дугу $AQ = z$, так что угол $AOQ = \frac{z}{c}$. В таком случае мы будем иметь, что дуга $Qa = AQ = z$, и значит,

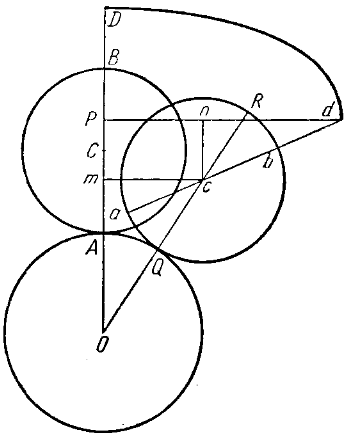

Рис. 106.

$$\text{угол } acQ = \frac{z}{a} = Rcd$$

и если взять прямую $cd = CD = b$, то d будет точкой на кривой Dd. Из этой точки опустим на ось перпендикуляр dP и проведем также из c линию cm перпендикулярно и линию cn

[1]) infinitplex.

параллельно оси OD. В силу того, что угол

$$Rcn = AOQ = \frac{z}{c},$$

получим, что угол

$$dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}.$$

Отсюда мы получим

$$dn = b \sin \frac{(a+c)z}{ac}$$

и

$$cn = b \cos \frac{(a+c)z}{ac}.$$

Затем, в силу того, что $OC = Oc = a + c$, будет

$$cm = (a+c) \sin \frac{z}{c}$$

и

$$Om = (a+c) \cos \frac{z}{c}.$$

Следовательно, если обозначить координаты $OP = x$ и $Pd = y$, то будет

$$x = (a+c) \cos \frac{z}{c} + b \cos \frac{(a+c)z}{ac}$$

и

$$y = (a+c) \sin \frac{z}{c} + b \sin \frac{(a+c)z}{ac}.$$

Отсюда ясно, что если $\frac{a+c}{a}$ будет рациональным числом, то в силу того, что углы $\frac{z}{c}$ и $\frac{(a+c)z}{ac}$ соизмеримы, можно исключить неизвестное z и таким образом найти алгебраическое уравнение между x и y. В остальных же случаях описанная вышеуказанным образом кривая будет трансцендентной.

Кроме того, здесь следует отметить, что если a взять отрицательным, то в этом случае получится гипоциклоида, так как движущийся круг окажется внутри неподвижного. Обычно b берут равным радиусу a, и тогда получаются те кривые, которые, собственно, и называются эпициклоидами и гипоциклоидами. Таким образом, найденные здесь кривые являются более общими и, так как уравнения не оказываются из-за этого более трудными, то представляется уместным ввести принятое выше условие. Если сложить квадраты x^2 и y^2, то получится

$$x^2 + y^2 = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c) \cos \frac{z}{a}.$$

С помощью этого уравнения исключение z можно произвести еще легче, конечно, в тех случаях, когда количества a и c соизмеримы.

524. Помимо случаев, когда радиусы a и c обоих кругов соизмеримы друг с другом и кривые становятся алгебраическими, следует отметить тот случай когда $b = -a - c$, т. е. когда точка D кривой оказывается в центре O неподвижного круга. Итак, пусть $b = -a - c$; тогда будет

$$x^2 + y^2 = 2(a+c)^2 \left(1 - \cos \frac{z}{a}\right) = 4(a+c)^2 \cos^2 \frac{z}{2a},$$

откуда получается

$$\cos\frac{z}{2a}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2(a+c)}\,.$$

Далее, так как

$$x=(a+c)\left(\cos\frac{z}{c}-\cos\frac{(a+c)z}{ac}\right)\quad\text{и}\quad y=(a+c)\left(\sin\frac{z}{c}-\sin\frac{(a+c)z}{ac}\right),$$

будет

$$\frac{x}{y}=-\operatorname{tg}\frac{(2a+c)z}{2ac}\quad\text{и}\quad\sin\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

а также

$$\cos\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Следовательно, так как

$$\sqrt{x^2+y^2}=2(a+c)\cos\frac{z}{za}\,,$$

получается

$$x=2(a+c)\cos\frac{z}{2a}\sin\frac{(2a+c)z}{2ac}$$

и

$$y=-2(a+c)\cos\frac{z}{2a}\cos\frac{(2a+c)z}{2ac}\,.$$

Так, например, пусть $c=2a$; тогда

$$x=6a\cos\frac{z}{2a}\sin\frac{z}{a}\,,\qquad y=-6a\cos\frac{z}{2a}\cos\frac{z}{a}$$

и

$$\sqrt{x^2+y^2}=6a\cos\frac{z}{2a}\,.$$

Положим

$$\cos\frac{z}{2a}=q;$$

тогда

$$\sin\frac{z}{2a}=\sqrt{1-q^2}\quad\text{и}\quad\sin\frac{z}{a}=2q\sqrt{1-q^2},\ \text{а также}\ \cos\frac{z}{a}=2q^2-1,$$

откуда получается

$$q=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{6a}$$

и

$$y=-6aq(2q^2-1)=(1-2q^2)\sqrt{x^2+y^2}=\left(1-\frac{x^2+y^2}{18a^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

то есть

$$18a^2y=(18a^2-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Положим $18a^2=f^2$ и возведем все в квадрат; тогда получится следующее уравнение шестого порядка:

$$(x^2+y^2)^3-2f^2(x^2+y^2)^2+f^4x^2=0.$$

Но так как в данном случае наша цель заключается в исследовании не алгебраических кривых линий, а трансцендентных, то мы оставим первые и перейдем к тем видам кривых линий, построение которых требует одновременно как логарифмов, так и круговых дуг.

525. Выше мы нашли уже такого рода кривую линию (рис. 107) из уравнения

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

которое мы преобразовали в уравнение $y = \arccos lx$. А это последнее уравнение переходит в такое:

$$\arccos y = lx \quad \text{и} \quad x = e^{\arccos y}.$$

Следовательно, если взять прямую AP в качестве оси и на последней точку A в качестве начала абсцисс, то, прежде всего, ясно, что позади точки A в области отрицательных абсцисс кривая не будет иметь никакой непрерывной части, но ось AP будет пересекаться кривой в бесконечно многих точках D, причем расстояния этих точек от A составят геометрическую прогрессию, т. е. будет

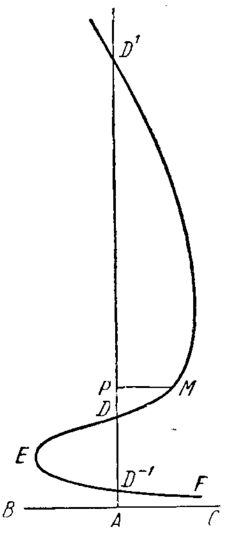

Рис. 107.

$$AD = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}, \quad AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}, \quad AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}} \text{ и т. д.},$$

но будет также бесконечно много пересечений, которые будут все больше приближаться к точке A:

$$AD^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad AD^{-2} = e^{-\frac{3\pi}{2}}, \quad AD^{-3} = e^{-\frac{5\pi}{2}} \text{ и т. д.}$$

Кроме того, рассматриваемая кривая отходит от оси по обе стороны на расстояния $AB = AC = 1$, где она касается прямых, параллельных оси, в бесконечно многих точках E и F, расстояния которых от B и C равным образом составляют геометрическую прогрессию. Таким образом, эта кривая будет приближаться к прямой BC, делая бесконечно много изгибов, и в конце концов полностью с ней сольется. Стало быть, особое свойство этой кривой состоит в том, что ее асимптотой является не бесконечная прямая, а конечная прямая BC, чем рассматриваемая линия весьма отличается от алгебраических кривых.

526. К числу кривых трансцендентных, построение которых требует одних лишь углов или же углов в соединении с логарифмами, следует также отнести бесчисленные виды *спиралей*. Спирали связаны с какой-нибудь определенной точкой C, как бы с центром (рис. 108), вокруг которого они делают большей частью бесконечно много витков. Природу этих кривых линий очень удобно передать с помощью уравнения между расстоянием CM произвольной точки M кривой от центра C и углом ACM, который эта прямая CM образует с прямой CA заданного положения. Итак, пусть угол $ACM = s$, т. е. пусть s будет той дугой окружности, описанной радиусом $= 1$, которая служит мерой угла ACM, и положим, что прямая $CM = z$. Если теперь будет дано какое-нибудь уравнение между переменными s и z, то получится спиральная линия. Действительно, угол ACM помимо s можно выразить бесконечно многими способами, так как углы $2\pi + s$, $4\pi + s$, $6\pi + s$ и т. д., равно как $-2\pi + s$, $-4\pi + s$ и т. д. приводят к одному и тому же положению прямой CM.

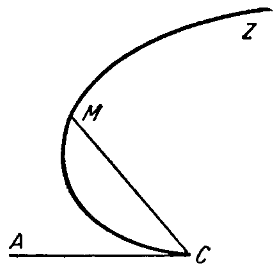

Рис. 108.

Поэтому если эти значения подставить вместо s в уравнение, расстояние CM будет принимать бесконечно много различных значений и, значит, прямая CM при продолжении пересечет кривую в бесконечно многих точках, если только при этих значениях количество z не становится мнимым. Итак, начнем с простейшего случая, когда $z=as$. В данном случае для одного и того же положения прямой CM получатся следующие значения z: $a(2\pi+s)$, $a(4\pi+s)$, $a(6\pi+s)$ и т. д., а также $-a(2\pi-s)$, $-a(4\pi-s)$, $-a(6\pi-s)$ и т. д. Больше того, если вместо s взять $\pi+s$, то положение прямой линии CM останется неизменным, но только значение величины z надо будет взять отрицательным, и тогда к указанным выше значениям z надо будет прибавить следующие: $-a(\pi+s)$, $-a(3\pi+s)$, $-a(5\pi+s)$ и т. д., и, сверх того, $a(\pi-s)$, $a(3\pi-s)$, $a(5\pi-s)$ и т. д. Таким образом, эта линия (рис. 109) будет иметь ту форму, какая показана на приведенном рисунке. А именно, кривая касается прямой AC в точке C и отсюда уходит в обе стороны на бесконечность двумя ветвями, которые обходят центр C, совершая бесконечно много оборотов, и всякий раз взаимно пересекаются на прямой BC, перпендикулярной к AC; так что прямая линия BCB будет диаметром этой кривой. Такую кривую линию обычно называют *архимедовой спиралью*; если она один раз точно вычерчена, то она может служить для того, чтобы поделить любой угол на какое угодно число частей, как это сразу видно из ее уравнения $z=as$ [77].

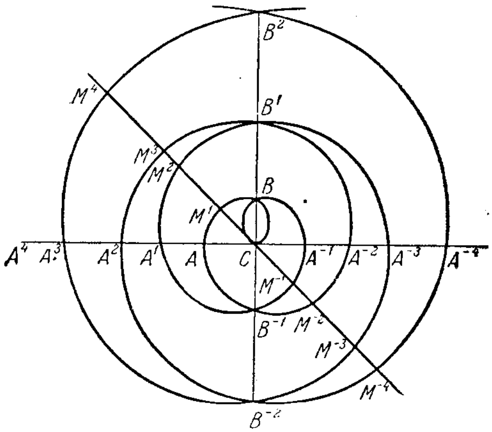

Рис. 109.

527. Подобно тому, как уравнение $z=as$ (если бы z и s были прямоугольными координатами, оно служило бы уравнением прямой линии) дало спираль Архимеда, совершенно так же, если брать другие алгебраические уравнения между z и s, получается бесконечно много спиралей, если только соответствующее уравнение составлено так, что каждому значению s отвечают действительные значения z. Так, например, уравнение $z=\frac{a}{s}$, которое подобно уравнению гиперболы, отнесенной к своим асимптотам, дает спираль. Прославленный Иоганн Бернулли назвал ее *гиперболической спиралью*. Совершив по выходе из центра C бесчисленное множество оборотов, она лишь на бесконечно большом расстоянии приближается, наконец, к прямой AA как к асимптоте. А в случае, когда предложено уравнение $z=\sqrt{s}$, если углы s взяты отрицательными, им не будет соответствовать какое бы то ни было действительное расстояние,

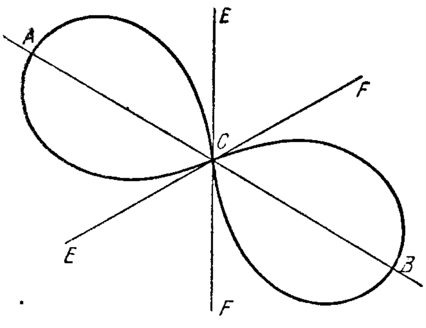

Рис. 110

но всем положительным значениям s будут соответствовать два значения z, одно положительное и другое отрицательное, и кривая линия совершит около точки C бесконечно много оборотов. Если же уравнение между z и s будет вида $z=a\sqrt{n^2-s^2}$, то переменная z не будет принимать никакого действительного значения, если только s не будет находиться в пределах $+n$ и $-n$, и в этом последнем случае кривая будет конечной. Так вот, если (рис. 110) через центр C провести по обе стороны оси ACB прямые EF, EF, образующие с осью угол $=n$, то эти линии будут касательными к кривой, которая самопересекается в точке C, а сама кривая будет иметь форму *лемнискаты* $ACBCA$. Таким же путем можно получить бесчисленные другие формы трансцендентных линий, но говорить о них было бы слишком долго.

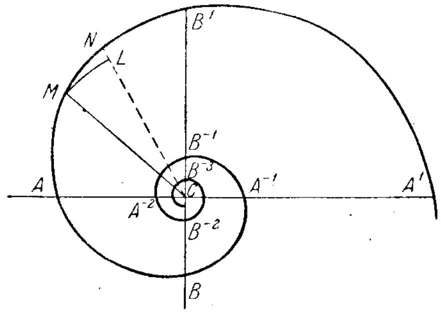

Рис. 111.

528. Настоящее исследование можно было бы расширять далее до бесконечности, если взять не только алгебраические уравнения между z и s, но и трансцендентные. Из такого рода линий следует прежде всего отметить ту кривую, которая выражается уравнением $s=nl\frac{z}{a}$, в котором углы s пропорциональны логарифмам расстояний z. По этой именно причине такая кривая линия называется *логарифмической спиралью*. Последняя широко известна благодаря многим своим замечательным свойствам. Основное свойство этой кривой (рис. 111) состоит в том, что все прямые, проведенные из центра C, пересекают эту линию под равными углами. Для того чтобы вывести это свойство из уравнения, положим угол $ACM=s$ и прямую $CM=z$. Тогда будет $s=nl\frac{z}{a}$ и $z=ae^{\frac{s}{n}}$. Возьмем затем больший угол $ACN=s+v$; тогда прямая $CN=ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$ и, значит, если из центра C описать дугу ML, которая была бы равна v, то получится $LN=ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}}-1)=ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n}+\frac{v^2}{2n^2}+\frac{v^3}{6n^3}+\text{и т. д.}\right)$. Отсюда следует, что

$$\frac{ML}{LN}=\frac{v}{\frac{v}{n}+\frac{v^2}{2n^2}+\frac{v^3}{6n^3}+\text{и т. д.}}=\frac{n}{1+\frac{v}{2n}+\frac{v^2}{6n^2}+\text{и т. д.}}$$

Когда же разность углов $MCN=v$ исчезает, $\frac{ML}{LN}$ становится тангенсом угла, который составляет с кривой радиус CM. Отсюда, если положить $v=0$, тангенс угла AMC получается $=n$, и стало быть, этот угол является постоянным. Если окажется, что $n=1$, то указанный угол будет полупрямым, и в этом случае логарифмическая спираль называется полупрямоугольной [78].

ГЛАВА XXII

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, ОТНОСЯЩИХСЯ К КРУГУ

529. Раньше мы видели, что если положить радиус круга $= 1$, то полуокружность π или дуга в 180 градусов будет

$$= 3{,}14159265358979323846264338,$$

и десятичный или обыкновенный логарифм этого числа равен

$$0{,}49714987269413385435126828 8;$$

если последнее число умножить на 2,30258 и т. д., то получится гиперболический логарифм того же числа, который будет

$$= 1{,}14472988584940017414342 37.$$

Так как длина дуги в 180 градусов известна, можно отсюда определить длину любой дуги, заданной в градусах. Действительно, пусть дана дуга в n градусов, искомая длина которой пусть $= z$. Тогда будет $180 : n = \pi : z$, и, значит, $z = \frac{\pi n}{180}$. Отсюда можно найти логарифм числа z, если из логарифма числа n вычесть логарифм, равный

$$1{,}7581226324091722154525264 13.$$

Если же рассматриваемая дуга задается в минутах, так что она равна n', то из логарифма n нужно вычесть логарифм, равный

$$3{,}5362738827928158479612932 11.$$

Если же рассматриваемая дуга задается в секундах, так что она $= n''$, то в этом случае логарифм дуги этой длины можно будет определить, вычитая из логарифма числа n логарифм, равный

$$5{,}3144251331764594804700600 09,$$

или же прибавляя к логарифму числа n

$$4{,}6855748668235405195299399 90$$

и вычитая из характеристики суммы 10.

530. Пользуясь вышеизложенным, можно, обратно, радиус и любые его части, каковыми являются синусы, тангенсы и секансы, обратить

в дуги и выразить последние обычным образом в градусах, минутах и секундах. Пусть z будет подобного рода линией, выраженной через радиус, равный 1, и его десятичные части. Тогда следует взять логарифм этого числа и увеличить его характеристику на десять единиц, подобно тому, как обычно в таблицах дают логарифмы синусов, тангенсов и секансов. После этого следует или вычесть из этого логарифма

$$4{,}6855748668235405195299939990$$

или прибавить к этому логарифму

$$5{,}3144251331764594804700060009;$$

в обоих случаях получится логарифм, соответствующее которому число даст выраженную в секундах дугу. Конечно, в последнем случае следует характеристику уменьшить на десять. А если потребуется определить дугу, длина которой равна радиусу, то ее легче будет определить без логарифмов, пользуясь золотым правилом [79], так как π относится к 180°, как 1 относится к дуге, длина которой равна радиусу; этим путем устанавливается, что такая дуга, выраженная в градусах, составляет

$$57^\circ{,}2957795130823208767 98;$$

та же дуга, выраженная в минутах, равна

$$3737'{,}7467707849392526078 8;$$

а в секундах та же дуга

$$= 206264''{,}8062470963551564728.$$

Если же ее выразить обычным образом, эта дуга составит

$$57^\circ 17' 44'' 48''' 22'''' 29''''' 22''''''.$$

С помощью рядов, указанных в первой части, устанавливается, что у рассматриваемой дуги

$$\text{синус} = 0{,}84147098480789$$

и

$$\text{косинус} = 0{,}54030230586814;$$

если первое из этих чисел разделить на второе, то получится тангенс угла, равного

$$57^\circ 17' 44'' 48''' 22'''' 29''''' 22'''''' \text{ и т. д.}^{1)}.$$

531. С помощью изложенных выше предварительных соображений, которые дают возможность сравнить круговые дуги с синусами и тангенсами, мы сможем разрешить очень много вопросов, касающихся природы круга. И прежде всего, конечно, ясно, что всякая дуга больше своего синуса, если только она не исчезает. Но иначе обстоит дело с отношением косинуса к дуге, поскольку косинус исчезающего угла $=1$ и, значит, он больше дуги, а косинус прямого угла $=0$ и, значит, он меньше дуги. Из этого ясно, что между 0° и 90° имеется какая-то дуга, которая равна своему косинусу; и эту дугу мы определим в следующей задаче.

1) Несколько чисел в этом параграфе даны в исправленном виде, согласно Opera omnia.

ЗАДАЧА I

Найти дугу круга, равную своему косинусу.

РЕШЕНИЕ

Пусть s будет искомой дугой; тогда будет $s = \cos s$. Из этого уравнения едва ли можно определить значение s более удобным путем, чем с помощью так называемого правила *ложного положения* [1]). Но для этой цели следует знать приблизительное значение s, которое можно получить путем простой догадки; если же отсюда оно не выявляется, следует поставить вместо s три или большее число значений, относя при этом косинус к одной и той же единице. Положим $s = 30°$ и сведем эту дугу к частям радиуса, согласно изложенному выше

$$\begin{array}{r} l30 = 1{,}4771213 \\ \text{вычти } \underline{1{,}7581226} \\ l \text{ дуги } 30° = 9{,}7189987. \end{array}$$

Но

$$l \cos 30° = 9{,}9375306,$$

откуда ясно, что $\cos 30°$ гораздо больше дуги и, стало быть, искомая дуга больше 30°. Стало быть, предположим, что

$$s = 40°;$$

тогда будет

$$\begin{array}{r} l\,40 = 1{,}6020600 \\ \text{вычти } \underline{1{,}7581226} \\ l \text{ дуги } 40° = 9{,}8439374; \end{array}$$

но

$$l \cos 40° = 9{,}8842540.$$

Поэтому становится ясным, что искомая дуга несколько больше 40°, в силу чего мы предположим, что $s = 45°$. Тогда будет

$$\begin{array}{r} l\,45 = 1{,}6532125 \\ \text{вычти } \underline{1{,}7581226} \\ l \text{ дуги } 45° = 9{,}8950899; \end{array}$$

но

$$l \cos 45° = 9{,}8494850;$$

стало быть, искомый угол находится между 40° и 45°; поэтому теперь его можно будет определить точнее. Действительно, если положить $s = 40°$, то

$$\text{ошибка составляет } +403\,166,$$

а если положить $s = 45°$, то

$$\text{ошибка составляет } -456\,049$$

$$\text{и разность } = 859\,215.$$

Таким образом, разность принятых величин в 5° относится к превышению искомой дуги над 40°, как 859 215 относится к 403 166, в результате чего искомая дуга оказывается больше 42°, так как принятые

[1]) per regulam falsi.

выше пределы слишком далеки друг от друга, чтобы можно было получить более точное значение. Возьмем, стало быть, более узкие пределы

	$s=42°$	$s=43°$
$ls=$	1,6232493	1,6334685
вычти	1,7581226	1,7581226
ls	9,8651267	9,8753459
	а мы имеем	а мы имеем
$l\cos s=$	9,8710735	9,8641275
	$+59468$	-112184
	112184	

$$171652:59468=1°:20'47''.$$

Таким образом, мы получили весьма близкие пределы 42°20′ и 42°21′, в которых находится истинное значение s. Теперь выразим приведенные выше углы в минутах

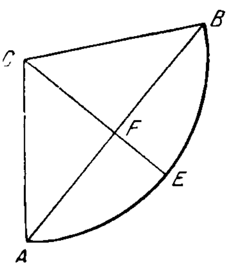

Рис. 112.

	$s=2540'$	$s=2541'$
$ls=$	3,4048337	3,4050047
вычти	3,5362739	3,5362739
$ls=$	9,8685598	9,8687308
$l\cos s=$	9,8687851	9,8686700
	$+2253$	-608
	608	

$$2861:2253=1'47''15'''$$ [1].

Отсюда заключаем, что искомая дуга, которая равна своему косинусу, $=42°20'47''15'''$, а ее косинус или длина этой дуги будет $=0{,}7390850$, что и требовалось найти.

532. Сектор круга (рис. 112) ACB рассекается хордой AB на две части, сегмент AEB и треугольник ACB, из которых первый меньше второго, когда угол ACB очень мал, и больше второго, когда угол ACB является очень тупым углом. Таким образом, существует положение, при котором сектор ACB делится хордой AB на две равные части. Отсюда возникает

ЗАДАЧА II

Найти сектор круга ACB, который делится хордой AB на две равные части, так что треугольник ACB оказывается равным сегменту AEB.

РЕШЕНИЕ

Положив радиус $AC=1$, примем, что искомая дуга $AEB=2s$ и, следовательно, ее половины $AE=EB=s$. Значит, если провести радиус CE, то будет $AF=\sin s$ и $CF=\cos s$. Отсюда следует, что треугольник $ACB=\sin s\cos s=$ $=\frac{1}{2}\sin 2s$, а площадь сектора $ACB=s$. Так как последний должен равняться удвоенному треугольнику, то мы будем иметь $s=\sin 2s$. Таким образом, требуется найти дугу, которая была бы равна синусу удвоенного угла

[1]) Это число дается в исправленном виде, согласно Opera omnia.

Но прежде всего, конечно, ясно, что угол ACB должен быть больше прямого угла и, следовательно, s должно быть больше 45°, вследствие чего мы сделаем следующие предположения:

	$s = 50°$	$s = 55°$	$s = 54°$
$ls =$	1,6989700	1,7403627	1,7323938
вычти	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	9,9408474	9,9822401	9,9742712
$l \sin 2s =$	9,9933515	9,9729858	9,9782063
+	525041	− 92543	+ 39351
	92543		

$$617584 : 525041 = 5° : 4°15'.$$

Таким образом, получается почти 54°17′54″ [1]), вследствие чего прибавим к прежним допущение, что $s = 54°$; исходя из величины ошибок, придем к выводу, что $s = 54°17'54''$, и это значение отличается от истинного менее чем на одну минуту. Поэтому сделаем нижеследующие предположения, которые отличаются друг от друга только на одну минуту:

$s = 54°17'$	$s = 54°18'$	$s = 54°19'$
то есть	то есть	то есть
$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
и	и	и
$2s = 108°34'$	$2s = 108°36'$	$2s = 108°38'$
дополн. $= 71°26'$	дополн. $= 71°24'$	дополн. $= 71°22'$
$ls = 3{,}5128178$	$= 3{,}5129511$	$= 3{,}5130844$
вычти 3,5362739	3,5362739	3,5362739
$ls = 9{,}9765439$	$= 9{,}9766772$	$= 9{,}9768105$
$l \sin 2s = 9{,}9767872$	$= 9{,}9767022$	$= 9{,}9766171$
+ 2433	+ 250	− 1934
	1934	
	2184	

Таким образом, получается $2184 : 250 = 1' : 6''52'''$. Отсюда следует, что $s = 54°18'6''52'''$. Если мы захотим более точно определить этот угол, нам придется воспользоваться более полными таблицами. При этом сделаем следующие предположения, которые отличаются друг от друга на 10″:

	$s = 54°18'0''$	$s = 54°18'10''$
	то есть	то есть
	$s = 195480''$	$s = 195490''$
	$2s = 108°36'0''$	$2s = 108°36'20''$
дополн.	$= 71°24'0''$	$= 71°23'40''$
	$ls = 5{,}2911023304$	$= 5{,}2911245466$
вычти	5,3144251332	$= 5{,}3144251332$
	9,9766771972	9,9766994134
$l \sin 2s =$	9,9767022291	9,9766880552
	+ 250319	− 113582
	113582	

$$363901 : 250319 = 10'' : 6''52'''43''''33'''''.$$

[1]) 54°17′54″ приблизительно соответствует радиану.

Таким образом, $s = 54°18'6''52'''43''''33'''''$; следовательно, угол $ACB = 108°36'13''45'''27''''6'''''$, дополнительный к нему угол $= 71°23'46''14'''32''''54'''''$; логарифм синуса этого угла, то есть

$$l \sin 2s = 9{,}9766924791,$$

$$\text{а самый синус} = 0{,}9477470.$$

Далее будет

$$\sin s = AF = BF = 0{,}8121029$$

и, значит, удвоенное его значение или

$$\text{хорда } AB = 1{,}6242058.$$

Кроме того, конечно, будет

$$\cos s = CF = 0{,}5835143.$$

Таким образом можно очень точно построить искомый сектор, что и требовалось найти.

533. Подобным же образом можно определить и синус, рассекающий на две равные части квадрант круга.

ЗАДАЧА III

В квадранте круга (рис. 113) ACB провести синус DE, который рассечет площадь квадранта на две равные части.

РЕШЕНИЕ

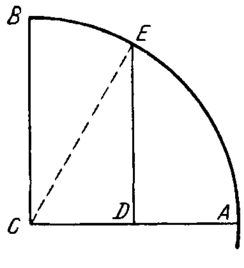

Рис. 113.

Пусть дуга $AE = s$; тогда будет $BE = \frac{\pi}{2} - s$, так как $AEB = \frac{\pi}{2}$, и площадь квадранта $= \frac{1}{4}\pi$. А площадь сектора $ACE = \frac{1}{2}s$, и если из нее вычесть площадь треугольника

$$CDE = \frac{1}{2}\sin s \cos s,$$

то останется площадь

$$ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s \cos s,$$

удвоенная величина которой должна дать квадрант. Таким образом, будет

$$\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}\sin 2s; \text{ следовательно, } s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sin 2s.$$

Положим угол

$$s - \frac{1}{4}\pi = s - 45° = u;$$

тогда будет $2s = 90° + 2u$ и, значит, должно быть

$$u = \frac{1}{2}\cos 2u \text{ и } 2u = \cos 2u.$$

Таким образом, требуется найти угол, который равен своему косинусу, а мы уже нашли в первой задаче, что этот угол

$$2u = 42°20'47''15''' \text{ и } u = 21°10'23''37'''.$$

Следовательно, получится, что

$$\textit{дуга } AE = s = 66°10'23''37''' \text{ и } \textit{дуга } BE = 23°49'36''23'''.$$

Отсюда следует, что часть радиуса

$$CD = 0{,}4039718 \text{ и } AD = 0{,}5960281,$$

$$\text{а } \sin DE = 0{,}9147711.$$

Следовательно, тем же путем, каким квадрант круга делится на две равные части, весь круг разделится на восемь равных частей, что и требовалось доказать.

534. Подобно тому, как всякая прямая, проведенная через центр круга, делит его на две равные части, точно так из любой точки окружности можно провести прямые линии, которые разделят круг на три или большее число равных частей. Исследуем деление на четыре части и решим

ЗАДАЧУ IV

Пусть дан полукруг $ACDB$ (рис. 114); провести из точки A хорду AD, которая разделит площадь полукруга на две равные части.

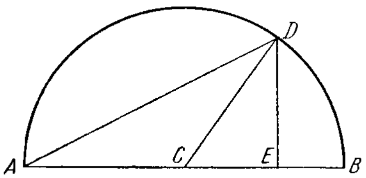

Рис. 114.

РЕШЕНИЕ

Пусть искомая дуга $AD = s$. Если провести радиус CD, то будет

$$\text{площадь сектора } ACD = \frac{1}{2}s;$$

если из последнего вычесть площадь треугольника

$$ACD = \frac{1}{2}AC \cdot DE = \frac{1}{2}\sin s,$$

то останется сегмент

$$AD = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s,$$

который должен быть равен половине полукруга ADB. Но площадь полукруга $=\frac{1}{2}\pi$; следовательно, будет

$$s-\sin s=\frac{1}{2}\pi=90^\circ \text{ и, значит, } s-90^\circ=\sin s.$$

Положим $s-90^\circ=u$. Тогда будет $\sin s=\cos u$ и в силу этого $u=\cos u$. Таким образом, согласно первой задаче, будет

$$u=42^\circ 20' 47'' 14''',$$

и, следовательно,

$$s=\text{углу } ACD=132^\circ 20' 47'' 14''' \text{ и угол } BCD=47^\circ 39' 12'' 46'''.$$

А хорда AD будет $=1{,}8295422$, что и требовалось найти.

535. Указанным выше образом можно отделить в круге сегмент, площадь которого составит четвертую часть всего круга. А сегментом, равным половине круга, будет самый полукруг и хорда последнего будет диаметром. Аналогичным образом можно найти сегмент, который составит третью часть всего круга. Этот вопрос мы рассмотрим в следующей задаче.

ЗАДАЧА V

Из точки окружности A (рис. 115) провести две хорды AB и AC, которые делят площадь круга на три равные части.

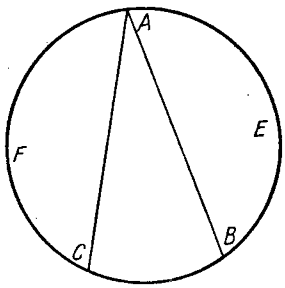

Рис. 115.

РЕШЕНИЕ

Приняв радиус круга $=1$ и полуокружность $=\pi$, положим дугу AB или $AC=s$. Тогда площадь сегмента AEB или AFC будет равна

$$\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s;$$

а так как площадь круга $=\pi$, площадь же сегмента должна быть одной третью площади круга, то

$$\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s=\frac{\pi}{3}=60^\circ \text{ или } s-\sin s=120^\circ$$

и, следовательно,

$$s-120^\circ=\sin s.$$

Пусть $s - 120° = u$; тогда будет $u = \sin(u + 120°) = \sin(60° - u)$. Таким образом, следует найти дугу u, которая равна синусу угла $60° - u$. Следовательно, u будет меньше $60°$. Для того, чтобы найти эту дугу, сделаем следующие предположения:

$u = 20°$	$u = 30°$	$u = 40°$
$60° - u = 40°$	$60° - u = 30°$	$60° - u = 20°$
$lu = 1{,}3010300$	$1{,}4771213$	$1{,}6020600$
вычти $1{,}7581226$	$1{,}7581226$	$1{,}7581226$
$lu = 9{,}5429074$	$9{,}7189987$	$9{,}8439374$
$l \sin(60° - u) = 9{,}8080675$	$9{,}6989700$	$9{,}5340517$
$+2651601$	-200287	$-3098857.$

Таким образом, ясно, что угол u должен быть несколько меньше $30°$, а согласно приведенному ниже расчету он должен быть больше чем $29°$. Итак, пусть

$$\begin{aligned} u &= 29° \\ 60° - u &= 31° \\ lu &= 1{,}4623980 \\ \text{вычти} &= 1{,}7581226 \\ \hline lu &= 9{,}7042754 \\ l \sin(60° - u) &= 9{,}7118393 \\ \hline & + 75639 \\ & - 200287 \\ \hline & 275926 : 75639 = 1° : 16'26''. \end{aligned}$$

Таким образом, угол u должен быть $= 29°16'26''$. Для того чтобы точнее определить этот угол, прибегнем к следующим двум допущениям, которые отличаются друг от друга лишь на одну минуту:

$u = 29°16'$	$u = 29°17'$
то есть	то есть
$u = 1756'$	$u = 1757'$
$60° - u = 30°44'$	$60° - u = 30°43'$
$lu = 3{,}2445245$	$3{,}2447718$
вычти $3{,}5362739$	$3{,}5362739$
$lu = 9{,}7082506$	$9{,}7084979$
$l \sin(60° - u) = 9{,}7084575$	$9{,}7082450$
$+ \ 2069$	$- \ 2529$
2529	
$4598 : 2069 = 1' : 27''0'''.$	

Таким образом, фактически будет $u = 29°16'27''0'''$, а отсюда

$$\text{дуга } s = AEB = 149°16'27''0''' = AFC.$$

Из этого вытекает, что

$$\text{дуга } BC = 61°27'6''0''',$$

а хорда $AB = AC = 1{,}9\,285\,340$, что и требовалось определить.

536. К приведенным выше задачам, в которых требуется найти какую-нибудь дугу, равную заданному синусу или косинусу, прибавим следующую задачу, в которой предлагается подобный же вопрос, но встречается больше затруднений.

ЗАДАЧА VI

В полукруге (рис. 116) AEB отделить дугу AE таким образом, чтобы после проведения ее синуса ED дуга AE оказалась равной сумме прямых $AD + DE$.

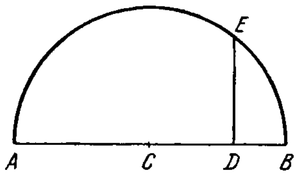

Рис. 116.

РЕШЕНИЕ

Так как сразу ясно, что эта дуга больше квадранта, определим ее дополнение BE и обозначим дугу BE через s, так что дуга $AE = 180° - s$; имеем также, ввиду того, что $AC = 1$, $CD = \cos s$, $DE = \sin s$, и $180° - s = 1 + \cos s + \sin s$. Но

$$\sin s = 2 \sin \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} s$$

и

$$1 + \cos s = 2 \cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} s,$$

а отсюда получается

$$180° - s = 2 \cos \frac{1}{2} s \left(\sin \frac{1}{2} s + \cos \frac{1}{2} s \right).$$

Но

$$\cos \left(45° - \frac{1}{2} s \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{2};$$

следовательно,

$$\sin \frac{1}{2} s + \cos \frac{1}{2} s = \sqrt{2} \cos \left(45° - \frac{1}{2} s \right),$$

откуда получается, что

$$180° - s = 2 \sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \cos \left(45° - \frac{1}{2} s \right).$$

После этих преобразований сделаем следующие предположения:

	$\frac{1}{2}s = 20°$	$\frac{1}{2}s = 21°$
	$45° - \frac{1}{2}s = 25°$	$45° - \frac{1}{2}s = 24°$
	$180° - s = 140°$	$180° - s = 138°$
$l(180° - s) =$	2,1461280	2,1398791
вычти .	1,7581226	1,7581226
$l(180° - s) =$	0,3880054	0,3817565
$l\cos\frac{1}{2}s =$	9,9729858	9,9701517
$l\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right) =$	9,9572757	9,9607302
$l2\sqrt{2} =$	0,4515450	0,4515450
	0,3818065	0,3824269
Ошибка	+ 61989	− 6704
	6704	

$$68693 : 61989 = 1° : 54''.$$

Таким образом, значение $\frac{1}{2}s$ находится в пределах $20°54'$ и $20°55'$ и, значит, прибегнем к следующим предположениям:

	$\frac{1}{2}s = 20°54'$	$\frac{1}{2}s = 20°55'$
	$45° - \frac{1}{2}s = 24°6'$	$45° - \frac{1}{2}s = 24°5'$
	$s = 41°48'$	$s = 41°50'$
	$180° - s = 138°12'$	$180° - s = 138°10'$
	или	или
	$180° - s = 8292'$	$180° - s = 8290'$
$l(180° - s) =$	3,9186593	$l(180° - s) =$ 3,9185545
вычти	3,5362739	3,5362739
	0,3823854	0,3822806
$l\cos\frac{1}{2}s =$	9,9704419	9,9703937
$l\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right) =$	9,9603919	9,9604484
$l2\sqrt{2} =$	0,4515450	0,4515450
	0,3823788	0,3823871
Ошибка	+ 66	− 1065
	1065	

$$1131 : 66 = 1' : 3''30'''.$$

Таким образом, будет $\frac{1}{2}s = 20°54'3''30'''$, откуда

$$s = 41°48'7''0''' = BE;$$

следовательно, искомая дуга

$$AE = 138°11'53''0'''.$$

При этом мы будем иметь линии

$$DE = 0{,}6665578 \quad \text{и} \quad AD = 1{,}7454535,$$

что и требовалось выполнить.

537. Сравним теперь дуги с их тангенсами. Так как в первом квадранте тангенсы больше своих дуг[1]), найдем дугу, которая равна половине своего тангенса. Тем самым будет разрешена

ЗАДАЧА VII

Найти сектор ACD (рис. 117), равный половине треугольника ACE, образуемого радиусом AC, касательной AE и секущей CE.

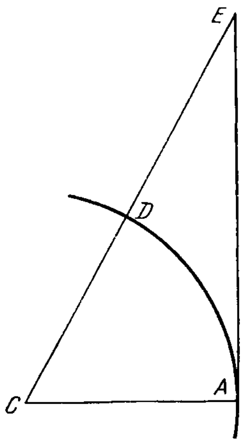

Рис. 117.

РЕШЕНИЕ

Если положить дугу $AD = c$, то площадь сектора ACD будет $\frac{1}{2}s$, а площадь треугольника ACE будет $\frac{1}{2}\operatorname{tg} s$. Таким образом, должно быть $s = \frac{1}{2}\operatorname{tg} s$ или $2s = \operatorname{tg} s$. Итак, сделаем следующие допущения:

$s = 60°$	$s = 70°$	$s = 66°$	$s = 67°$
$l2s = 2{,}0791812$	2,1461280	2,1205739	2,1271048
1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l2s = 0{,}3210586$	0,3880054	0,3624513	0,3689822
$l\operatorname{tg} s = 0{,}2385606$	0,4389341	0,3514169	0,3721481
$+824980$	-509287	$+110344$	-31659

[1]) В тексте Opera omnia осталась неисправленной описка Эйлера из первого издания; cum in primo quadrante tangentes sint arcubus *minores* (меньше).

Отсюда определяются более тесные пределы для s : 66°46′ и 66°47′; поэтому мы положим:

$s = 66°46'$	$s = 66°47'$
то есть	то есть
$s = 4006'$	$s = 4007'$
$2s = 8012$	$2s = 8014$
$l2s = 3{,}9037409$	$3{,}9038493$
$3{,}5362739$	$3{,}5362739$
$l2s = 0{,}3674670$	$0{,}3675754$
$l\operatorname{tg} s = 0{,}3672499$	$0{,}3675985$
Ошибка $+$ 2171	$-$ 231
231	
$2402 : 2171 = 1' : 54''14'''$.	

Отсюда получается, что

$$\text{дуга } s = AD = 66°46'54''14''',$$

следовательно, тангенс $AE = 2{,}3311220$, что и требовалось определить.

538. Пусть теперь предложена следующая

ЗАДАЧА VIII

При заданном квадранте круга ABC (рис. 118) найти дугу AE, которая равна своей хорде AE, продолженной до точки пересечения F.

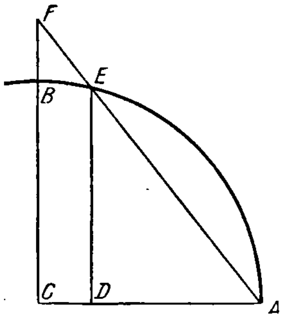

Рис. 118.

РЕШЕНИЕ

Пусть дуга $AE = s$, тогда ее хорда AE будет $= 2\sin\frac{1}{2}s$, синус-версус $AD = 1 - \cos s = 2\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s}{2}$; вследствие чего подобные треугольники ADE и ACF дадут

$$2\sin\frac{1}{2}s\cdot\sin\frac{1}{2}s : 2\sin\frac{1}{2}s = 1 : s;$$

таким образом, получится $s\cdot\sin\frac{1}{2}s = 1$. Сделаем следующие предположения:

$s=70°$	$s=80°$	$s=84°$	$s=85°$
$ls=1,8450980$	1,9030900	1,9242793	1,9294189
вычти 1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,1712963
$l\sin\frac{1}{2}s=9,7585913$	9,8080675	9,8255109	9,8296833
9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,0009796
Ошибка $+0,1544332$	0,0469650	$+83223$	-9796

Отсюда видно, что s находится в пределах $84°53'$ и $84°54'$. Следовательно, пусть

$s=84°53'$	$s=84°54'$
то есть	то есть
$s=5093'$	$s=5094'$
$\frac{1}{2}s=42°26\frac{1'}{2}$	$\frac{1}{2}s=42°27'$
$ls=3,7069737$	3,7070589
3,5362739	3,5362739
0,1706998	0,1707850
$l\sin\frac{1}{2}s=9,8292003$	9,8292694
0,9999001	0,0000544
Ошибка $+$ 998	$-$ 544

Отсюда получается, что

$$\text{дуга } s=AE=84°53'38''51'''$$

и

$$\text{дуга } BE=5°6'21''9''',$$ что и требовалось найти.

539. Хотя в первом квадранте все дуги меньше своих тангенсов, однако в следующих квадрантах существуют такого рода дуги, которые равны своим тангенсам. В следующей задаче мы их исследуем, пользуясь методом, заимствованным из учения о рядах.

ЗАДАЧА IX

Найти все дуги, которые равны своим тангенсам.

РЕШЕНИЕ

Первой дугой, обладающей рассматриваемым здесь свойством, является бесконечно малая дуга. Затем, во втором квадранте, так как здесь касательные отрицательны, совершенно не имеется подобных дуг.

В третьем квадранте имеется одна подобная дуга, несколько меньшая 270°. Далее подобного рода дуги имеются в пятом, седьмом и других квадрантах. Пусть четверть окружности $=q$, и пусть искомые дуги содержатся в выражении $(2n+1)q-s$, так что будет

$$(2n+1)q-s=\operatorname{ctg} s=\frac{1}{\operatorname{tg} s}.$$

Пусть $\operatorname{tg} s=x$, тогда

$$s=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+ \text{ и т. д.}$$

и, следовательно,

$$(2n+1)q=\frac{1}{x}+x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\text{и т. д.}$$

Но ясно, что так как s будет тем меньшей дугой, чем больше число n, то x будет очень малым количеством и, стало быть, приблизительно

$$x=\frac{1}{(2n+1)q}, \quad \text{то есть} \quad \frac{1}{x}=(2n+1)q;$$

а более точно можно получить

$$\frac{1}{x}=(2n+1)q-s=(2n+1)q-\frac{1}{(2n+1)q}-\frac{2}{3(2n+1)^3q^3}-$$
$$-\frac{13}{15(2n+1)^5q^5}-\frac{146}{105(2n+1)^7q^7}-\frac{2343}{945(2n+1)^9q^9}-\text{ и т. д.}$$

Стало быть, так как $q=\frac{\pi}{2}=1{,}5707963267948$, то искомая дуга будет

$$=(2n+1)\,1{,}57079632679-\frac{1}{2n+1}0{,}63661977-$$
$$-\frac{0{,}17200818}{(2n+1)^3}-\frac{0{,}09062598}{(2n+1)^5}-\frac{0{,}05892837}{(2n+1)^7}-\frac{0{,}04258548}{(2n+1)^9}-\text{ и т. д.}$$

А если приведенные слагаемые, которые выражены в частях радиуса, выразить в мерах дуг, то искомая дуга, если ее представить в общем виде, будет

$$=(2n+1)\,90°-\frac{131313''}{2n+1}-\frac{35479''}{(2n+1)^3}-\frac{18693''}{(2n+1)^5}-\frac{12155''}{(2n+1)^7}-\frac{8784''}{(2n+1)^9}.$$

Таким образом, дугами, удовлетворяющими поставленному вопросу, будут в порядке следования:

I	1.	$90°-90°$,
II	3.	$90°-12°32'48''$,
III	5.	$90°-7°22'32''$,
IV	7.	$90°-5°14'22''$,
V	9.	$90°-4°3'59''$,
VI	11.	$90°-3°19'24''$,
VII	13.	$90°-2°48'37''$,
VIII	15.	$90°-2°26'5''$,
IX	17.	$90°-2°8'51''$,
X	19.	$90°-1°55'16''$ [1]).

---

[1]) Некоторые числа в этом параграфе исправлены по сравнению с первым изданием в соответствии с Opera omnia.

540. Я не ставлю больше подобного рода вопросов, так как метод их разрешения можно легко усмотреть из приведенных выше примеров. Впрочем, эти задачи придуманы главным образом для того, чтобы более близко ознакомиться с природой круга, квадратуру которого при всех примененных до сих пор средствах тщетно пытались осуществить. Ведь если бы случилось, что при решении какой-либо задачи дуга оказалась бы соизмеримой со всей окружностью, либо синус или тангенс ее можно было бы построить с помощью радиуса, тогда, конечно, мы получили бы некоторый вид квадратуры круга. Так, если бы при решении задачи VI синус DE (рис. 116, стр. 296), который получился $= 0{,}6665578$, оказался равным $0{,}6666666 = \frac{2}{3}$, то, конечно, было бы открыто изящное свойство окружности, так как тогда можно было бы построить дугу AE, равную прямой линии

$$AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}\,.$$

Впрочем, до сих пор еще не существует доказательства того, что подобного рода квадратура круга совершенно невозможна, а если она возможна, то, по-видимому, никакой иной путь не является более пригодным для исследования этого вопроса, чем тот, который мы показали в настоящей главе [80].

КОНЕЦ ВТОРОЙ КНИГИ

ПРИЛОЖЕНИЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ

ГЛАВА I
О ПОВЕРХНОСТЯХ ТЕЛ ВООБЩЕ

1. То, что было изложено в предыдущем разделе о кривых линиях и о способе их представления с помощью уравнений, имеет, конечно, весьма большую общность и относится ко всем кривым линиям, точки которых лежат в одной и той же плоскости. Но когда не вся кривая линия лежит в одной и той же плоскости, изложенные выше правила оказываются недостаточными для установления свойств кривых такого вида. Подобного рода кривые имеют двоякую кривизну и превосходный трактат под этим названием написал о них проницательнейший геометр Клеро [[81]]. Но так как этот предмет теснейшим образом связан с природой поверхностей, которой я решил заняться в этом разделе, то я не буду трактовать его отдельно, а объединю его исследование с нижеследующим учением о поверхностях.

2. Подобно тому как линии бывают либо прямыми, либо кривыми, так и поверхности бывают либо плоскими, либо неплоскими. Неплоскими я называю те поверхности, которые выпуклы или вогнуты или же обладают и тем и другим свойством. Так, например, внешняя поверхность шара, цилиндра и конуса, если исключить основание последних, является выпуклой, а внутренняя поверхность чаши является вогнутой. Далее, подобно тому, как прямой является та линия, у которой любые три точки дают одно и то же направление [1]), так и плоской поверхностью является такая поверхность, на которой любые четыре точки лежат в одной и той же плоскости. Из последнего ясно, что поверхность бывает неплоской, то есть либо выпуклой, либо вогнутой, в том случае, когда не всякие ее четыре точки расположены в одной и той же плоскости.

3. Какова же неплоская поверхность, очень легко узнать, если нам будет известно для каждого места, насколько она отклоняется от плоской поверхности. Стало быть, тем же самым путем, каким мы судим о свойствах кривых линий по расстояниям, на которые любые их точки отстоят от прямой, взятой в качестве оси, так и о природе поверхностей принято судить по расстояниям каждой из их точек от произвольно взятой плоской поверхности. Таким образом, когда предложена какая-нибудь поверхность, свойства которой надлежит определить, следует взять произвольно какую-

[1]) Linea recta est, cuius terna quaeque puncta in directum sunt posita.

нибудь плоскую поверхность и представить себе, что на последнюю опущены перпендикуляры из всех точек рассматриваемой поверхности. После этого, если можно определить длину каждого из перпендикуляров с помощью уравнения, будем считать, что природа поверхности выражается этим уравнением. Ведь с помощью этого уравнения можно будет, наоборот, указать все точки поверхности и, следовательно, этим путем определится самая поверхность.

4. Пусть (рис. 119) плоскость доски представляет собою ту плоскую поверхность, к которой мы будем относить все точки всякой рассматриваемой поверхности. Пусть M — какая-нибудь точка этой поверхности, расположенная вне плоскости доски, и пусть из этой точки опускают перпендикуляр MQ, встречающий плоскость доски в точке Q. Далее, для того чтобы определить с помощью чисел положение точки Q, возьмем в плоскости доски какую-нибудь прямую AB в качестве оси, на которую из точки Q опускаем перпендикуляр QP. Наконец, на оси AB возьмем какую-нибудь точку A в качестве начала абсцисс. После того как все это сделано, положение точки M будет известно, если будем знать длины указанных трех линий AP, PQ и QM. Таким образом, с помощью трех взаимно перпендикулярных координат положение всякой точки M поверхности определяется аналогично тому, как обычно представляют положение всех точек кривых, расположенных на плоскости, с помощью двух взаимно перпендикулярных координат.

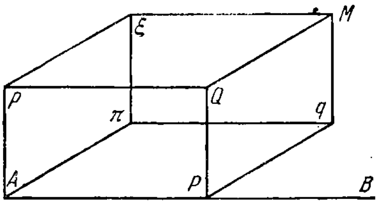

Рис. 119.

5. Итак, поскольку имеем три координаты AP, PQ и QM, — положим $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, — с их помощью мы определим природу рассматриваемой поверхности, если, взяв произвольно две из этих координат x и y, мы будем знать, каковой окажется третья координата z; действительно, таким образом мы будем в состоянии определить все точки M поверхности. Следовательно, природа каждой поверхности выражается с помощью уравнения, которое определяет координату z через две другие координаты x и y и постоянные. Стало быть, для всякой заданной поверхности переменное z будет равно некоторой функции двух переменных x и y. И наоборот, если z равно какой-нибудь функции от x и y, то данное уравнение представит некоторую поверхность, природа которой может быть выявлена из этого уравнения. Действительно, если вместо x и y подставить все значения, какие они могут принять, как положительные, так и отрицательные, то мы получим все точки Q выбранной плоскости. Затем по уравнению, выражающему z через x и y, везде устанавливается длина перпендикуляра $QM=z$ до его пересечения с заданной поверхностью. Если значение z окажется положительным, точка поверхности M будет расположена выше плоскости APQ, а если оно окажется отрицательным, то точка M будет расположена ниже этой плоскости; если же оно исчезает, то точка M попадает на ту самую плоскость. А когда z окажется мнимым, тогда точке Q не будет соответствовать какая бы то ни было точка M на поверхности. А если случится, что z будет иметь несколько действительных значений, то в этом случае прямая, проведенная перпендикулярно к плоскости через точку Q, пересечет поверхность в нескольких точках M.

6. Таким образом, что касается природы различных поверхностей, то здесь сразу напрашивается разделение их на непрерывные, или правильные, и на прерывные, или неправильные. А именно, непрерывной будет такая поверхность, у которой все точки выражаются с помощью одного и того же уравнения между z и x и y, то есть где z является одной и той же функцией x и y для всех точек поверхности. А неправильной является такая поверхность, у которой отдельные части выражаются с помощью различных функций, как, например, когда предложена поверхность, которая в одном месте является сферической, а в другом конической или цилиндрической или плоской. Но здесь мы совершенно исключаем неправильные поверхности и будем рассматривать лишь правильные, природа которых выражается лишь каким-нибудь одним неизменным уравнением. А после исследования этих поверхностей легко будет рассматривать и неправильные, так как последние состоят из частей различных правильных поверхностей.

7. Правильные поверхности делят прежде всего на алгебраические поверхности и трансцендентные. Алгебраической называют такую поверхность, природа которой выражается с помощью алгебраического уравнения между координатами x, y и z или когда z равно алгебраической функции x и y. Следовательно, в противном случае, если z не является алгебраической функцией x и y, то есть в состав уравнения между x, y и z входят трансцендентные количества, например, зависящие от логарифмов и от круговых дуг, то в этом случае поверхность, природа которой выражается подобного рода уравнением, будет трансцендентной. Подобной будет поверхность, когда $z=xly$ или $z=y^x$ или $z=y\sin x$. Как легко понять, сначала следует рассмотреть алгебраические поверхности и уже после этого перейти к трансцендентным.

8. Далее, для того чтобы определить природу поверхности, следует прежде всего принять во внимание, какого рода функцией x и y будет z с точки зрения количества значений, которые она принимает. Таким образом, прежде всего мы встречаем такие поверхности, для которых z равно какой-нибудь однозначной функции величин x и y. Пусть P будет такого рода однозначной или рациональной функцией величин x и y. Тогда, если будем иметь $z=P$, то каждой точке плоскости Q будет соответствовать только одна точка поверхности, или же любая прямая, перпендикулярная к плоскости APQ, пересечет поверхность в одной лишь точке. В этом случае никакое значение прямой QM не может стать мнимым и все подобного рода прямые дадут действительные точки поверхности. Однако это различие функций не вызывает существенного различия между поверхностями, так как оно зависит от положения плоскости APQ, которое, как и положение оси, произвольно, так что если ту же самую поверхность отнести к другой плоскости, то функция z, которая была однозначной, может стать многозначной.

9. Пусть P и Q — какие-нибудь однозначные функции x и y. Тогда, если будет $z^2-Pz+Q=0$, прямые, проходящие нормально через отдельные точки плоскости, пересекут поверхность либо в двух точках, либо нигде не пересекут, ибо z будет иметь два значения, которые будут либо оба действительными, либо оба мнимыми. Аналогично, если будет z^3-Pz^2+ $+Qz-R=0$, где P, Q и R обозначают некоторые однозначные функции x и y, то в этом случае z будет трехзначной функцией и всякая прямая QM

пересечет поверхность либо в трех точках, если все корни уравнения окажутся действительными, или только в одной точке, разумеется, если два корня окажутся мнимыми. Аналогичным образом надо будет рассуждать и в том случае, когда z определяется уравнением с бóльшим числом измерений. Сколь многозначной будет функция z, очень легко определить, если заданное уравнение между x и y и z привести к рациональному виду.

10. Впрочем, подобно тому как в уравнениях для кривых линий две координаты могут быть переставлены между собою, так и во всяком уравнении для поверхности три координаты x, y и z можно поменять местами. Действительно, прежде всего, если в плоскости APQ взять в качестве оси другую прямую Ap, перпендикулярную к AP, то будем иметь $Ap=y$ и $pQ=x$, и таким образом переменные x и y обменяются местами. Можно составить себе представление о всех остальных перестановках, если достроить прямоугольный параллелепипед $ApQM\xi\pi qPA$. В последнем следует прежде всего рассмотреть три определенных взаимно перпендикулярных плоскости $APQp$, $APq\pi$ и $Ap\xi\pi$; как бы ни относить к ним предложенную поверхность, которой принадлежит точка M, будет получаться одно и то же уравнение между x, y и z. В каждой плоскости имеется две оси, из которых каждая берет свое начало в точке A, в результате чего получается шесть различных отношений между тремя координатами.

Координаты будут:

для плоскости $APQp$:

либо $AP=x,\quad PQ=y,\quad QM=z,$

либо $Ap=y,\quad pQ=x,\quad QM=z;$

для плоскости $APq\pi$:

либо $AP=x,\quad Pq=z,\quad qM=y,$

либо $A\pi=z,\quad \pi q=x,\quad qM=y;$

для плоскости $Ap\xi\pi$:

либо $Ap=y,\quad p\xi=z,\quad \xi M=x,$

либо $A\pi=z,\quad \pi\xi=y,\quad \xi M=x.$

А если из фиксированной точки A провести к точке M поверхности прямую AM, то она будет $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

11. Таким образом, одно и то же уравнение между координатами x, y и z даст возможность ознакомиться с поверхностью в трех плоскостях, которые перпендикулярны друг к другу и взаимно пересекаются в точке A. Действительно, подобно тому как переменное z дает расстояние каждой точки M поверхности от плоскости APQ, так и переменное y дает расстояние той же точки M от плоскости APq, а переменное x дает ее расстояние от плоскости $Ap\xi$. А если мы знаем, на каких расстояниях от каждой из этих плоскостей находится точка M, то ясно, что мы тогда знаем ее истинное положение. Таким образом, следует прежде всего отметить те три плоскости, к которым относят какую-нибудь поверхность с помощью уравнения между тремя переменными x, y и z. Если одна из них, например APQ, будет горизонтальной, то две другие будут вертикальными, а именно: одна из них будет направлена вертикально по прямой AP, а другая — по прямой Ap.

12. Установив, таким образом, те три взаимно перпендикулярные плоскости, к которым относят рассматриваемую поверхность, следует из всех ее точек M опустить на упомянутые плоскости APQ, APq и $A\pi\xi$ перпендикуляры QM, Mq и $M\xi$, которые будут $MQ=z$, $Mq=y$ и $M\xi=x$. Если затем дополнить до параллелепипеда, то мы получим три прямые, равные указанным, которые будут исходить из определенной точки A, а именно $AP=x$, $Ap=y$ и $A\pi=z$; зная эти прямые, можно будет определить положение точки M. При этом ясно, что если указанные переменные x, y и z считаются положительными, когда они направлены так, как указано на рисунке, то их следует считать отрицательными, если они обращены в противоположные стороны.

13. Если в уравнении между тремя переменными x, y и z то переменное, которое перпендикулярно к плоскости APQ, т. е. z, имеет повсюду четное измерение, то оно будет иметь по два равных значения, одно положительное и другое отрицательное. Стало быть, эта поверхность построена таким образом, что обе части ее, расположенные по обе стороны от плоскости APQ, будут подобны друг другу и равны между собой и, значит, тело, которое ограничивается этой поверхностью, при разрезе его плоскостью APQ разделится на две подобные и равные части. Таким образом, подобно тому как у плоских фигур та прямая линия, которая делит фигуру на две подобные равные и части, называется диаметром, так у твердых тел ту плоскость, которая делит тело на две равные и подобные части, мы называем *диаметральной*. Поэтому если переменное z имеет в уравнении повсюду четные измерения, то плоскость APQ является диаметральной.

14. Точно так же понятно, что если в уравнении для поверхности переменное y, которое направлено перпендикулярно к плоскости APq, имеет повсюду четные измерения, то плоскость APq будет диаметральной. Если же переменное x имеет повсюду четные измерения, то в этом случае плоскость $Ap\xi$ является диаметральной. Таким образом, из заданного уравнения для любой поверхности между тремя переменными x, y и z сразу можно видеть, является ли какая-нибудь из плоскостей APQ, APq, $Ap\xi$ диаметральной или же нет. Но может случиться, что две или даже все три плоскости окажутся диаметральными. Так, например, для шара, центр которого находится в A, — в силу того, что радиус его $AM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$, будем иметь $x^2+y^2+z^2=a^2$, откуда следует, что каждая из указанных плоскостей делит шар на две подобные и равные части.

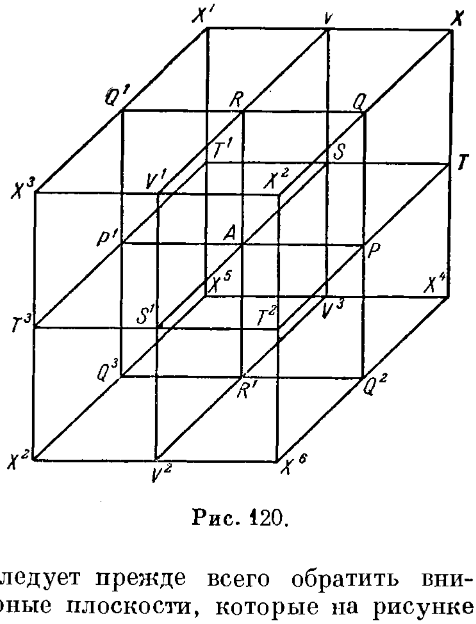

Рис. 120.

15. Для того чтобы узнать форму поверхности (рис. 120), которая содержится в заданном уравнении, следует прежде всего обратить внимание на три взаимно перпендикулярные плоскости, которые на рисунке

	третья III	четвертая IV
	PqR	pQR
между координатами	$\left\{\begin{array}{l} AP=+x \\ Aq=-y \\ AR=+z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap=-x \\ AQ=+y \\ AR=+z \end{array}\right\}$
	пятая V	шестая VI
	Pqr	pQr
между координатами	$\left\{\begin{array}{l} AP=+x \\ Aq=-y \\ Ar=-z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap=-x \\ AQ=+y \\ Ar=-z \end{array}\right\}$
	седьмая VII	восьмая VIII
	pqR	pqr
между координатами	$\left\{\begin{array}{l} Ap=-x \\ Aq=-y \\ AR=+z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap=-x \\ Aq=-y \\ Ar=-z \end{array}\right\}$

17. Указанные области в большей или меньшей степени отличаются друг от друга. Прежде всего, конечно, существуют такие пары областей, у которых две координаты являются общими и одна координата отличная. Таким образом, эти области соприкасаются по плоскости, и мы их назовем *соединенными*. Далее, когда две области имеют две различные координаты и одну общую, то они соприкасаются только по прямой линии, и мы назовем их *разъединенными*. В-третьих, когда все координаты отличаются своими знаками, области соприкасаются друг с другом лишь в точке A, и мы назовем их *противолежащими*. А какие области по отношению к каким являются соединенными, разъединенными или противолежащими, — это покажет нижеследующая таблица.

Область	Соединенные			Разъединенные			Противолежащие
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqr VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V

Продолжение таблицы

Область	Соединенные			Разъединенные			Противолежащие
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	PqR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PqR III	PQr II	PQR I

18. Таким образом, ясно, что по отношению к каждой области существует три соединенных, столько же разъединенных и одна противолежащая; из приведенной выше таблицы можно сразу увидеть, в каком отношении находится какая-либо область к любой другой. Заслуживает при этом внимания порядок, в каком в этой таблице идут числа, обозначающие области. Для того чтобы сделать этот порядок более наглядным, я те же самые числа в том же порядке поместил в следующем квадрате:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Весьма нетрудно усмотреть природу и свойства приведенной выше таблицы; применение же ее будет более полно выяснено в дальнейшем изложении [83].

19. Раньше мы уже отметили, что если переменное z имеет всюду в уравнении четные измерения, то поверхность в этом случае состоит из двух подобных и равных частей, а именно часть ее, расположенная в первой области, равна части, расположенной во второй, и точно так же существует равенство между областями третьей и пятой, между четвертой и шестой и, наконец, между седьмой и восьмой, как это видно по двум рядам в квадрате, начинающимся с 1 и 2. Если же переменное количество y имеет повсюду в уравнении четные измерения, то в этом случае совпадают друг с другом области первая и третья, вторая и пятая, четвертая и седьмая, а также шестая и восьмая. А если x имеет во всех членах уравнения четные измерения, то первая область совпадает с четвертой, вторая с шестой, третья с седьмой и пятая с восьмой. Таким образом,

если в уравнении повсюду имеет четные измерения переменное

z, то совпадают области	y, то совпадают области	x, то совпадают области
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

20. Для того чтобы части поверхности, расположенные в разъединенных областях первой и пятой, были между собою равны, уравнение должно быть составлено так, чтобы оно оставалось неизменным, хотя бы оба переменных y и z были взяты отрицательными. Таким образом, это будет иметь место в том случае, если как y, так и z образуют в каждом члене уравнения либо четные измерения, либо там, где они входят совместно, нечетные. А если первая область совпадает с пятой, то вторая область совпадет с третьей, четвертая с восьмой и шестая с седьмой. Равным образом, если в уравнении поверхности оба переменных x и z образуют повсюду либо четное число измерений, либо нечетное, то в этом случае первая область совпадет с шестой, вторая совпадет с четвертой, третья с восьмой и пятая с седьмой. Таким образом,

Если в уравнении поверхности каждый член дает повсюду только четные или только нечетные измерения для переменных

y и z, то совпадают области	x и z, то совпадают области	x и y, то совпадают области
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Но если все три переменных x, y и z, рассматриваемые совместно, образуют повсюду либо четные, либо нечетные измерения, то в этом случае совпадают противолежащие области

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Если окажется, что два или три из указанных выше условий имеют место одновременно в уравнении, то в этом случае либо четыре

области, либо все восемь областей будут содержать в себе подобные и равные части поверхности. Таким образом,

Если x и y, рассматриваемые отдельно, имеют повсюду четные измерения, то в этом случае следующие области, взятые по четыре, совпадают друг с другом:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6,

4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5,

7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

Если и x и z, рассматриваемые отдельно, имеют повсюду четные измерения, то в этом случае следующие области, взятые по четыре, совпадают друг с другом:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7,

4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5,

6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Если переменные y и z, рассматриваемые отдельно, имеют четные измерения, то в этом случае следующие области, взятые по четыре, совпадают друг с другом:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7,

3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6,

5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4.

22. Если одно из переменных имеет повсюду четные измерения, а остальные два, взятые совместно, образуют всюду либо четные, либо нечетные измерения, то в этом случае также имеется по четыре совпадающие друг с другом области, как это видно из нижеследующего.

Если z имеет повсюду четные измерения, а x и y образуют повсюду либо четные, либо нечетные измерения, то в этом случае совпадают друг с другом следующие, взятые по четыре, области:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7,

7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2,

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Если y имеет повсюду четные измерения и если x и z, рассматриваемые совместно, образуют повсюду либо четные, либо нечетные измерения, то в этом случае совпадают друг с другом следующие, взятые *по четыре, области:*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6,
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3,
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Если x имеет повсюду четные измерения и если y и z, рассматриваемые совместно, образуют повсюду или четные, или нечетные измерения, то в этом случае совпадают друг с другом следующие, взятые по четыре, области:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5,
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4,
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Таким образом, в приведенных выше трех случаях все три переменных x, y и z, будучи рассматриваемы совместно, образуют всюду либо четные, либо нечетные измерения.

23. Остается еще рассмотреть следующие случаи, при которых четыре области равны между собою.

Если x и y и y и z образуют повсюду либо четные, либо нечетные измерения, то в этих случаях следующие области, взятые по четыре, равны между собою:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4,
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2,
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Следовательно, получатся те же подобия, если сверх того два других переменных x и z образуют во всех членах или четные, или нечетные измерения; таким образом, это условие содержится уже в предложенном. Таким образом, части поверхности, расположенные в четырех разобщенных друг от друга областях, будут между собой равны, если в уравнении любые два переменных, рассматриваемые совместно, дают повсюду либо четные, либо нечетные измерения. Но так как в данном случае имеются три различные комбинации, то следует отметить, что если две комбинации обладают рассматриваемым свойством, то третья комбинация будет им точно так же обладать.

24. Если к тем условиям, которые сделают подобными и равными друг другу сразу по четыре области, прибавляется еще новое, не входившее в их состав и которое само дает равенство областей попарно, тогда все решительно области становятся равными между собою и поверхность будет состоять из восьми равных друг другу и подобных частей. Таким образом, уравнение для этого рода поверхностей будет обладать всеми до сих пор упомянутыми свойствами в их совокупности, т. е. все переменные x, y, z, рассматриваемые порознь, будут повсюду иметь четные измерения, а отсюда уже следует, что любые два из них, будучи рассматриваемы

совместно, или даже все три, взятые вместе, будут повсюду создавать четные размерности.

25. Обладает ли предложенное уравнение между тремя переменными одним, двумя или даже тремя из числа указанных свойств, можно легко разобраться, если дело касается четных размерностей того или иного переменного. Не труднее выяснить, образуют ли повсюду все переменные, если их рассматривать совместно, четные или нечетные размерности. Но будут ли они обладать этим свойством, если их взять лишь по два, — это будет труднее проверить. Для этого следует положить в уравнении либо $x=nz$, либо $y=nz$, либо $x=ny$, и посмотреть, получается ли в том или другом случае такое уравнение, в котором переменное z (в первых двух случаях) или y (в последнем случае) имеет повсюду четные измерения. Если последнее имеет место, то отсюда необходимо следует, что оба переменных, взятые совместно, образуют повсюду или четные, или нечетные измерения, и следовательно, поверхность будет иметь по меньшей мере две подобные друг другу и равные части.

ГЛАВА II

О СЕЧЕНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КАКИМИ-ЛИБО ПЛОСКОСТЯМИ

26. Подобно тому как пересечениями линий являются точки, так пересечениями поверхностей являются линии, прямые или же кривые. Пересечением двух плоскостей, как это известно из элементарной геометрии, является прямая линия. А в результате пересечения шара плоскостью получается круг. Можно было бы извлечь очень много для изучения поверхности, если бы мы знали те линии, по которым поверхность пересекается заданными плоскостями. Ведь этим путем можно сразу выявить бесчисленное множество точек поверхности, между тем как при указанном выше способе отдельные значения одного переменного дают только отдельные точки поверхности.

27. А так как мы относим поверхности к трем взаимно перпендикулярным плоскостям, то прежде надлежит исследовать пересечения поверхности с этими плоскостями. Итак, если взять (рис. 121, стр. 310) прежде всего плоскость APQ, которая определяется переменными $AP=x$, $AQ=y$ (так как третье переменное z обозначает расстояние любой точки поверхности от этой плоскости), то очевидно, что если положить $z=0$, мы найдем те точки поверхности, которые лежат на самой плоскости APQ и, значит, получающееся уравнение между x и y даст линию, по которой поверхность пересекается плоскостью APQ. Аналогично, если положить $y=0$, то уравнение между x и z выразит пересечение поверхности плоскостью APR, а если положить $x=0$, то уравнение между y и z даст пересечение поверхности с плоскостью AQR.

28. Выше мы уже отметили, что поверхность шара, имеющего центр в точке A, радиус которого $=a$, выражается уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$. Этим примером я и воспользуюсь для иллюстрации упомянутых выше пересечений. Итак, пусть $z=0$, значит, уравнение $x^2+y^2=a^2$ представляет сечение шара, произведенное плоскостью APQ, которое, очевидно, должно быть окружностью, имеющей центр A и радиус $=a$. Равным образом, если положить $y=0$, то сечением шара плоскостью APR будет окружность, содержащаяся в уравнении $x^2+z^2=a^2$. Точно так же, если положить $x=0$, то уравнение $y^2+z^2=a^2$ даст такую же по величине окружность для сечения плоскостью AQR. Вышеизложенное, конечно, достаточно хорошо известно, так как все сечения шара плоскостями, проходящими через его

центр, представляют собою большие круги, то есть имеющие такой же радиус, как и шар.

29. Не труднее будет определить сечения поверхности другими плоскостями, параллельными одной из указанных выше главных плоскостей. Допустим, что какая-нибудь плоскость параллельна плоскости APQ и находится от нее на расстоянии $=h$; следовательно, все точки поверхности, расстояние которых от той же плоскости APQ, выражаемое переменным $z=h$, будут все расположены на этой параллельной плоскости и, стало быть, образуют рассматриваемое сечение. Следовательно, мы получим уравнение для этого сечения, если в уравнении для поверхности положим $z=h$. Действительно, тогда у нас будет уравнение между двумя прямоугольными координатами x и y, которые будут выражать природу этого сечения. Этим же путем можно определить сечения, которые производятся плоскостями, параллельными либо APR, либо AQR, поэтому было бы излишне повторять по отношению к остальным то, что сказано выше.

30. Таким образом, когда в уравнении для поверхности между координатами x, y и z одну из них z принимают постоянной $=h$, то в этом случае образуется сечение этой поверхности плоскостью, параллельной плоскости APQ и отстоящей от нее на расстоянии h. Следовательно, если этой букве h последовательно придавать все возможные значения, как положительные, так и отрицательные, то получатся все сечения поверхности, образуемые плоскостями, параллельными плоскости APQ, а также, ввиду того, что подобными параллельными плоскостями вся поверхность может быть рассечена на бесконечное число параллельных частей, с помощью всех этих сечений можно определить всю поверхность. Итак, эти сечения выражаются единым уравнением между координатами x и y, содержащим в себе некоторую неопределенную постоянную h, в силу чего все эти сечения будут либо подобными, либо по крайней мере аффинными [гл. XVIII][1]), содержащимися в одном уравнении [83 bis].

31. Таким образом, все сечения поверхности, параллельные плоскости APQ, будут между собою равны и будут одинаковым образом пересекаться плоскостями APR, AQR, в том случае, когда уравнение между x и y составлено так, что оно остается неизменным, какое бы значение ни приписывали количеству h. Но последнее не может иметь места, если только переменное z, вместо которого подставляем h, вовсе не входит в уравнение для поверхности. Поэтому в том случае, когда третье переменное z совсем не входит в уравнение поверхности, все сечения, параллельные плоскости APQ, будут между собою равны и их природа будет выражаться самим уравнением поверхности, так как в состав его будут входить только два переменных x и y. Равным образом, конечно, если в уравнении поверхности отсутствует или переменное x или y, то все сечения, параллельные плоскости AQR или же плоскости APR, будут совпадать друг с другом.

32. Следовательно, подобного рода поверхность не только легко себе представить, но ее легко построить и изготовить из данного материала. Действительно, предположим, что в уравнении отсутствует переменное z, так что имеется лишь уравнение (рис. 122) между координатами $AP=x$

[1]) Affines; определение фигур, которые Эйлер называет аффинными, см. ниже, § 42.

и $AQ=PM=y$. Пользуясь последним, опишем в плоскости APQ кривую линию BMD. После этого вообразим себе бесконечную прямую линию, которая, оставаясь все время нормальной к плоскости [чертежа], перемещается по этой кривой BMD; тогда эта прямая своим движением воспроизведет или осуществит ту поверхность, которую представляет указанное уравнение. Отсюда ясно, что если линия BMD будет окружностью, то возникшая из нее поверхность будет цилиндром; если же линия BMD, будет эллипсом, то в этом случае получится поверхность сжатого цилиндра[1]). Если же линия BMD не будет непрерывной линией, а будет состоять из нескольких соединенных друг с другом прямых, образуя прямолинейную фигуру, то в этом случае получится призматическая поверхность.

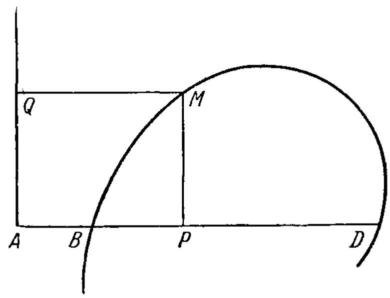

Рис. 122.

33. Так как этот род поверхностей включает цилиндры и все призмы, то для всего этого рода поверхностей подходящим является название *цилиндрический* или *призматический*, а отдельные виды, содержащиеся в этом роде, определяются той плоской фигурой BMD, из которой они возникают описанным выше образом. Сама же фигура BMD называется *основанием* [2]). Таким образом, во всех случаях, когда в уравнении для поверхности отсутствует одно из трех переменных x, y, z, поверхность, содержащаяся в этом уравнении, будет цилиндрической или призматической. А если будут отсутствовать одновременно два переменных x и y, то в силу $x=$постоянному, линия BMD перейдет в прямую, перпендикулярную к оси AD, и вследствие этого поверхность превратится в плоскость, перпендикулярную к плоскости APQ.

34. После описанного заслуживает наибольшего внимания тот вид поверхностей, который получается из однородного уравнения между тремя переменными x, y и z, т. е. из уравнения, в котором эти три переменные дают повсюду одно и то же число измерений, каковым, например, является уравнение $z^2=mxz+x^2+y^2$. Действительно, в данном случае все сечения, которые получаются с помощью плоскостей, параллельных одной из трех главных, являются подобными друг другу фигурами. А именно, если приписать z некоторое постоянное значение h, то ясно, что уравнение

$$h^2=mhx+x^2+y^2$$

в случае, если для h последовательно будут брать все новые и новые значения, будет содержать в себе бесконечно много подобных друг другу фигур, параметры которых равны или пропорциональны h. Так как, значит, эти сечения не только подобны друг другу, но и увеличиваются в отношении расстояний от плоскости APQ, то линии, которые проведем из точки A через гомологичные [гл. XVIII, § 438] точки отдельных сечений, будут прямыми.

35. Итак, если предложено такого типа однородное уравнение между тремя переменными x, y и z, придадим z (рис. 123) заданное значение $AR=h$

[1]) superficiem cylindri scaleni generari.
[2]) basis.

и пусть $TSsMm$ будет фигурой в плоскости, которая параллельна APQ и проведена через точку R, определяемой уравнением между x и y, так что будем иметь $RV=x$ и $VM=y$. Итак, когда вычерчено это сечение $TSsMm$, представим себе, что его периметр обходит бесконечная прямая линия, проходящая все время через точку A. Тогда эта прямая при своем движении опишет ту поверхность, которая содержится в заданном уравнении. Конечно, ясно, что если фигура $TSsMm$ будет кругом, имеющим центр в точке R, то в этом случае получится прямой конус; если же R не будет центром, то получится наклонный конус. А если указанная фигура будет прямолинейной, то получатся всякого рода пирамиды. Поэтому поверхности, содержащиеся в указанном выше роде уравнений, будем здесь называть *коническими* или *пирамидальными*.

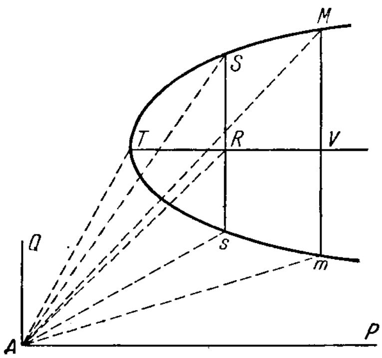

Рис. 123.

36. Из изложенного ясно, что если уравнение между тремя переменными величинами x, y и z будет однородным и, следовательно, рассматриваемая поверхность будет конической или пирамидальной, то в этом случае не только все ее сечения, параллельные одной главной плоскости APQ, будут подобными друг другу фигурами, параметры которых пропорциональны расстояниям сечений от вершины A, но в силу тех же соображений понятно, что и все сечения, параллельные плоскости APR или же плоскости AQR, будут обладать тем же свойством и, следовательно, будут подобными друг другу фигурами, соответствующие стороны которых будут находиться между собою в отношениях, пропорциональных расстоянию от A. А ниже будет показано, что у такого рода тел решительно все сечения, которые параллельны друг другу, то есть параллельны какой-либо плоскости, проведенной через вершину A, будут точно так же подобны друг другу и их параметры будут пропорциональны их расстоянию от вершины.

37. Более общим является тот род поверхностей, к которому я сейчас перейду. Пусть Z представляет собою некоторую функцию z и пусть предложено некоторое однородное уравнение между тремя переменными x, y и Z. Пусть $Z=H$, когда $z=h$, и так как в этом случае получается однородное уравнение между x, y и H, то все сечения, параллельные плоскости APQ, будут подобными друг другу фигурами, но параметры их будут пропорциональны не расстояниям h, а их функциям H. Отсюда следует, что линии, проведенные через гомологичные точки этих сечений, не будут прямыми линиями, а будут кривыми, зависящими от характера функции Z. Но, конечно, отсюда не следует, что сечения, параллельные какой-либо другой плоскости, подобны друг другу.

38. В последнем роде содержатся оба предшествующих. Действительно, если будет $Z=z$ или $Z=\alpha z$, то ввиду однородности уравнения между x, y и z получатся конические поверхности. То же самое будет иметь место, если $Z=\alpha+\beta z$, с тем лишь отличием, что вершина конуса не придется на точку A; а именно, если будет $Z=\frac{b-z}{b}$, вершина конуса будет находиться

от точки A на расстоянии b. А если положить дальше $b=\infty$, то коническая форма перейдет в цилиндрическую, и тогда будет $Z=1$. Отсюда следует, что уравнение для цилиндрических поверхностей по своей природе таково, что в нем переменные x и y вместе с постоянной единица повсюду дают одно и то же число измерений. Но каково бы ни было уравнение между x и y, если в его состав не входит третье переменное z, можно всегда его сделать однородным, вводя [множитель] единицу; отсюда, как мы это уже показали выше, следует, что всякое уравнение, в котором нет одного переменного, выражает цилиндрическую поверхность.

39. Среди тех тел, у которых все сечения, параллельные одной главной плоскости APQ, являются подобными фигурами, заслуживают особого внимания те, у которых эти сечения представляют собой круги, центры которых расположены на одной и той же прямой AR, перпендикулярной к плоскости APQ. Подобного рода тела получаются в результате вращения и потому называются *телами вращения*. Таким образом, общим уравнением для этого рода тел будет $Z^2=x^2+y^2$. Действительно, какое бы значение ни было придано z, так, чтоб получилось $Z=H$, для сечения, параллельного плоскости APQ, будем иметь уравнение $H^2=x^2+y^2$, которое является уравнением круга, имеющего радиус$=H$ и центр на прямой линии AR. Если будет $Z^2=z^2$, то получится прямой конус; если будет $Z^2=a^2$, то получится цилиндр, а если будет $Z^2=a^2-Z^2$, то получится шар. Таковы главные виды тел вращения.

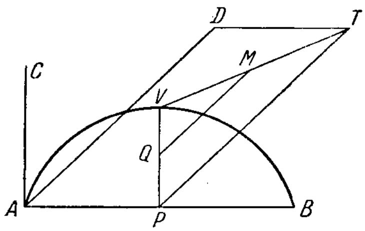

Рис. 124.

40. Рассмотрим теперь такого рода тела (рис. 124), у которых все сечения PTV, перпендикулярные к оси AP, суть треугольники, вершины которых T лежат на прямой линии DT, параллельной оси AP. Пусть AVB представляет собою основание этого тела, то есть его сечение плоскостью APQ, которое пусть будет любой кривой. Пусть расстояние прямой линии DT от оси AB, а именно $AD=c$. Если ввести, как раньше, три переменных $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, то PV будет некоторой функцией x. Пусть эта функция $PV=P$; тогда ввиду подобия треугольников VQM и VPT будет

$$P:c=(P-y):z \quad \text{или} \quad z=c-\frac{cy}{P}.$$

Таким образом, у подобного рода тел $\frac{c-z}{y}$ равняется некоторой функции от x. Таким образом, эти тела отличаются от конических тем, что они заканчиваются прямолинейным острием DT, между тем, как конические тела заканчиваются острием [точкой]. Если принять, что основание AVB представляет собою круг, то получающееся при этом тело представляет собою то тело, которое было детально рассмотрено *Валлисом* и названо им конус-клин (cono-cuneus) [84].

41. Пусть (рис. 125), как в предыдущем параграфе, все сечения PTV, перпендикулярные к оси AB, представляют собою треугольники, имеющие прямой угол в точке P, но их вершины T пусть образуют некоторую кривую AT; основанием же является фигура AVB. Если обозначить три переменных $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, то вдоль кривой AVB прямая PV будет

некоторой функцией x, которая пусть $=P$; тогда PT будет также функцией x, которая пусть $=Q$. При этом будет

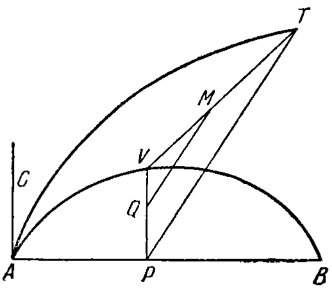

Рис. 125.

$P:Q=(P-y):z$ и, следовательно, $z=Q-\frac{Qy}{P}$, то есть $Pz+Qy=PQ$ или $\frac{z}{Q}+\frac{y}{P}=1$ или $=$ постоянной.

Следовательно, если в уравнении оба переменных y и z нигде не имеют размерности выше первой, то в этом случае тело относится к тому роду, который мы здесь описали.

42. Так как мы уже рассмотрели тела, у которых все сечения, параллельные главной плоскости, подобны друг другу, мы рассмотрим теперь те тела, у которых все подобного рода сечения являются лишь аффинными фигурами, то есть у которых, если взять гомологичные абсциссы, ординаты друг другу пропорциональны. Итак, пусть (рис. 126) для тела такого рода основными сечениями будут сечения ABC, ACD, и ABD, причем все сечения, параллельные сечению ACD, должны быть аффинными фигурами. Положим в сечении ACD основание $AC=a$ и высоту $AD=b$; если взять координаты $Aq=p$ и $qm=q$, то q будет некоторой функцией p. Представим себе теперь какое-нибудь параллельное сечение PTV, причем $AP=x$. Тогда основание PV будет $=$ функции от x, которая пусть $=P$, а высота PT будет $=$ функции от x, которая пусть $=Q$. Обозначим теперь $PQ=y$ и $QM=z$. Тогда в силу закона аффинности будет

$a:p=P:y$ и $b:q=Q:z$, то есть $y=\frac{Pp}{a}$ и $z=\frac{Qq}{b}$.

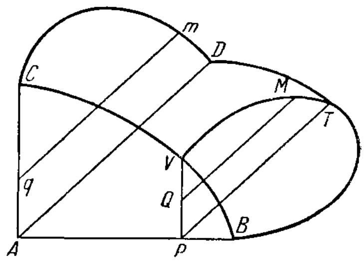

Рис. 126.

43. Таким образом, если будут даны все три главных сечения тела ABC, ACD и ABD, можно будет определить природу тела, у которого все сечения параллельны ACD и одновременно аффинны последнему. Действительно, во-первых, P и Q являются функциями x; затем, конечно, q является функцией p; отсюда с помощью двух переменных x и p будут определены оба переменных y и z. А если бы мы пожелали найти уравнение между тремя координатами x, y и z, то так как q является функцией p, то есть так как имеется уравнение между p и q, можно в этом уравнении подставить $p=\frac{ay}{P}$ и $q=\frac{bz}{Q}$ и, таким образом, поскольку P и Q суть функции от x, получится уравнение между тремя координатами x, y и z, которым выражается природа тел, относящихся к данному роду. Ясно также, что если положить $x=0$, то должно получиться $P=a$ и $Q=b$.

44. Если в уравнении поверхности два переменных y и z дают повсюду одинаковое число измерений, то в этом случае все сечения, перпендикулярные к оси AP, будут прямолинейными фигурами. Действительно, если для x взять какое-нибудь постоянное значение, то получится однородное уравнение между y и z, которое указывает на существование одной или не-

скольких прямых линий. Так как, стало быть, число измерений, которое образуют совместно y и z, повсюду одинаково, то оно будет либо четным, либо нечетным. Поэтому, как было показано выше, в § 20 подобные тела имеют по две равные между собою части. Это значит, что части, расположенные в первой и пятой областях, будут подобны друг другу; то же самое будет в областях второй и третьей, а также в других, как это видно из таблицы, приведенной в указанном месте.

45. Мы рассмотрели здесь уже много видов тел, у которых имеется бесчисленное множество прямолинейных сечений, вроде того тела, которое мы рассматривали только что, а также тел цилиндрических и конических. Правда, последние по своей природе таковы, что сечения, проходящие через ось AP, являются прямолинейными. Но первый род поверхностей является более общим. Действительно, пусть (рис. 127) $AKMP$ представляет собою сечение тела, проходящее через ось AP под углом $MPV=\varphi$. Положив $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, будем иметь, что тангенс угла $\varphi=\frac{z}{y}$ и что прямая $PM=\frac{z}{\sin\varphi}$. Теперь, чтобы KM была прямой, должно быть $\frac{z}{\sin\varphi}=\alpha x+\beta$, где α и β являются постоянными, зависящими от угла φ и, значит, они будут функциями y и z нулевого измерения. Пусть R и S—такого рода функции; тогда $x=Rz+S$ или $x=Ry+S$. Или же если T обозначает функцию первого измерения и S обозначает функцию нулевого измерения от y и z, то все указанного вида тела будут содержаться в следующем общем уравнении: $x=T+S$.

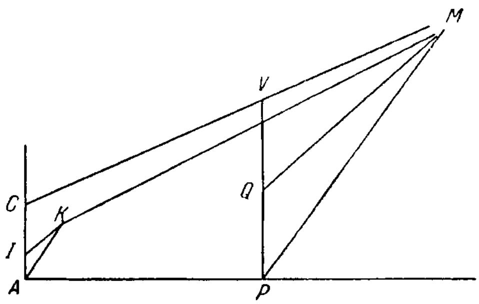

Рис. 127.

46. Но какова бы ни была предложенная поверхность, природа которой выражается с помощью уравнения между тремя переменными x, y и z, легко будет определить ее сечение, проходящее через ось AP. Действительно, пусть угол VPM, под которым это сечение $AKMP$ наклонено к плоскости $ACVP=\varphi$, и пусть прямая $PM=v$; последняя будет ординатой искомого сечения. Тогда мы будем иметь $QM=z=v\sin\varphi$ и $PQ=y=v\cos\varphi$. Следовательно, если в уравнении для поверхности вместо переменных y и z подставить их значения $v\cos\varphi$ и $v\sin\varphi$, получится уравнение между двумя переменными x и v, которое и будет выражать природу сечения $AKMP$. Подобным же образом можно будет найти и все сечения, которые проходят через одну из двух остальных главных осей (рис. 121, стр. 310), AQ или AR. Ибо эти оси AP, AQ и AR, от которых зависят три переменных x, y и z, можно так менять местами, что всякое положение, относящееся к одной из них, можно всегда применить к остальным двум.

47. Следовательно, если взять плоскость APQ в качестве нормальной, к которой мы будем относить все сечения поверхности, то всякое сечение какой-нибудь плоскостью будет либо параллельно этой плоскости, либо наклонено к ней. В последнем случае плоскость сечения при продолжении пересечет где-нибудь плоскость APQ и пересечением этих

плоскостей будет прямая линия. В первом же случае, когда плоскость сечения параллельна плоскости APQ, природу сечения можно будет выявить, придавая количеству z постоянное значение. Во втором же случае, когда плоскость сечения наклонена под каким-нибудь углом к плоскости APQ, мы в состоянии определить природу сечения, если пересечением секущей плоскости с плоскостью APQ является либо прямая AP, либо прямая AQ. Таким образом, для того чтобы найти все сечения, нам следует рассмотреть любые другие возможные пересечения этих двух плоскостей.

48. Пусть прямая ES (рис. 128), параллельная оси AP, будет пересечением секущей плоскости с плоскостью APQ и положим, что угол QSM, под которым секущая плоскость ESM наклонена к плоскости APQ, $=\varphi$, и пусть расстояние $AE=f$. Так как $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, то будет $ES=x$ и $QS=y+f$. Следовательно, если мы отнесем сечение к прямой ES, как к оси, то абсцисса ES будет $=x$, ординату же SM положим $=v$. Отсюда, ввиду того, что угол $QSM=\varphi$, получим $QM=z=v\sin\varphi$ и $SQ=y+f=v\cos\varphi$, следовательно, $y=v\cos\varphi-f$. Поэтому если в уравнении поверхности между x, y и z подставить

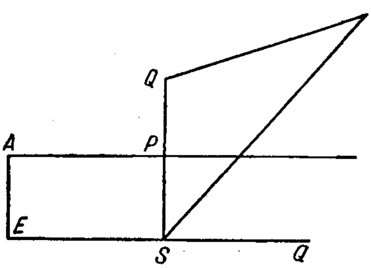

Рис. 128.

$$y=v\cos\varphi-f \quad \text{и} \quad z=v\sin\varphi,$$

то получится уравнение между координатами x и y искомого сечения ESM. Если пересечение ES перпендикулярно к оси AP, то в этом случае, так как оно окажется параллельным другой главной оси, находящейся в плоскости APQ, мы, поменяв местами переменные x и y, найдем это сечение тем же способом.

49. Пусть теперь (рис. 129) пересечение ES занимает в плоскости APQ какое угодно положение, и пусть прямая AE, перпендикулярная к оси AP, встречает его в точке E. Проведем тогда прямую ETX параллельно оси AP и положим $AE=f$ и угол $TES=\theta$. Взяв затем три переменные величины $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, проведем из Q к ES нормальную QS, а также проведем прямую MS. Тогда угол QSM будет углом наклона секущей плоскости к плоскости APQ, и пусть он $=\varphi$. Пусть затем координаты искомого сечения $ES=t$ и $SM=v$. Из точки S опустим на EX и на продолжение QP перпендикуляры ST и SV. Тогда будет

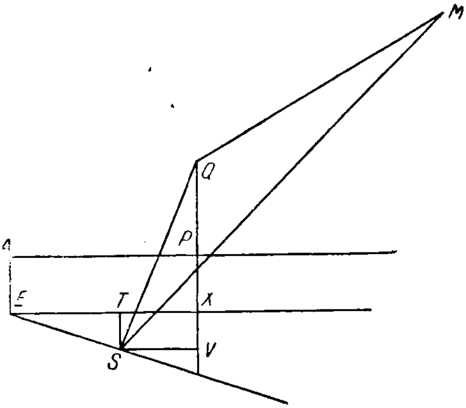

Рис. 129.

$$QM=z=v\sin\varphi, \quad QS=v\cos\varphi, \quad SV=v\cos\varphi\sin\theta$$

и

$$QV=v\cos\varphi\cos\theta.$$

Далее будет

$$ST = VX = t \sin\theta \quad \text{и} \quad ET = t\cos\theta.$$

Из приведенных выше выражений, наконец, получаем

$$AP = x = t\cos\theta + v\cos\varphi\sin\theta \ \text{ и } \ PQ = y = v\cos\varphi\cos\theta - t\sin\theta - f.$$

Если эти выражения подставить вместо x, y и z, они дадут уравнение искомого сечения.

50. Таким образом, если дано уравнение для какого-нибудь тела, то из него можно легко вывести уравнение для любого плоского его сечения. И прежде всего, конечно, ясно, что если уравнение между тремя координатами x, y и z для тела будет алгебраическим, то в этом случае и все его сечения будут алгебраическими кривыми. И далее, так как уравнение между координатами сечения t и v мы получаем, положив в уравнении для тела

$$z = v\sin\varphi, \quad x = t\cos\theta + v\cos\varphi\sin\theta$$

и

$$y = v\cos\varphi\cos\theta - t\sin\theta - f,$$

то очевидно, что в уравнении для любого сечения координаты t и v не могут иметь размерностей больше тех, какие образуют три координаты в уравнении тела. Иной раз может, однако, случиться, что уравнение сечения окажется более низкого порядка, а именно, если после подстановки члены высших порядков взаимно уничтожаются [84 bis].

51. Следовательно, если в уравнении поверхности три переменных x, y и z образуют лишь единичное измерение, так что это уравнение имеет следующий вид:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a,$$

то в этом случае все сечения этой поверхности будут прямыми линиями. Но в таком случае поверхность будет плоской, что легко установить при внимательном его рассмотрении и что более ясно будет показано ниже; да из элементарной геометрии известно, что две плоскости должны взаимно пересекаться по прямой линии. Равным образом отсюда понятно, что у всех тел, природа которых выражается следующим общим уравнением:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \xi yz + ax + by + cz + e^2 = 0,$$

все сечения, если только они не являются прямыми линиями, должны быть линиями второго порядка и что не существует такого сечения, природу которого нельзя было бы выразить с помощью уравнения второй степени.

ГЛАВА III

О СЕЧЕНИЯХ ЦИЛИНДРА, КОНУСА И ШАРА

52. Так как названные выше тела [85] обычно рассматривают в элементарной стереометрии, представляется более целесообразным рассмотреть здесь их сечения прежде, чем мы перейдем к другим менее известным телам. Прежде всего в элементарной геометрии встречается два вида цилиндров, а именно *прямые* и *наклонные*. *Прямым* цилиндром называется такой цилиндр, у которого все перпендикулярные к оси сечения представляют собою круги, равные между собою и имеющие центры, расположенные на одной и той же прямой линии. А *наклонный* цилиндр имеет круговые сечения не нормальные к оси, а наклоненные к ней под заданным углом. Последнее свойство удобнее будет выразить, если скажем, что косым или наклонным является такой цилиндр, у которого все перпендикулярные к оси сечения суть равные эллипсы, центры которых расположены на одной и той же прямой линии, которую называют осью цилиндра [86].

53. Итак, пусть имеется (рис. 130) цилиндр, прямой или наклонный, ось которого перпендикулярна к плоскости доски, и пусть его основание $AEBF$, т. е. сечение, образуемое плоскостью доски, представляет собою

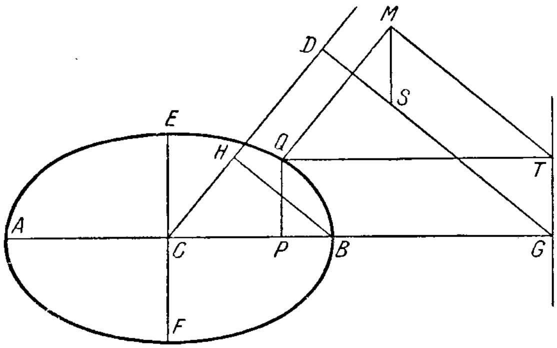

Рис. 130.

окружность или эллипс. Я допускаю, что это основание является некоторым эллипсом, имеющим центр в точке C и сопряженные оси AB и EF, так как все то, что будет сказано о наклонном цилиндре, очень легко применить к прямому. Предположим, стало быть, что одна полуось $AC=BC=a$, а другая $CE=CF=c$. Если теперь положить, что три координаты $CP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, то в силу природы эллипса будет $a^2c^2=a^2y^2+c^2x^2$. Это же уравнение выразит природу цилиндра, так как третье переменное z, ввиду того, что все сечения, параллельные плоскости CPQ, равны друг другу, не входит в состав уравнения.

54. Таким образом, все параллельные основанию сечения этого цилиндра будут подобны и равны этому основанию, т. е. они будут кругами в прямом цилиндре и эллипсами в наклонном. А те сечения цилиндра, которые получаются в плоскостях, перпендикулярных к APQ, представляют собою две прямые, параллельные друг другу, которые в том случае, когда плоскость касается цилиндра, сливаются в одну линию и даже становятся мнимыми, когда плоскость вовсе не встречается с цилиндром. Сказанное выше вытекает само собою из уравнения: ведь если принять в качестве постоянных x или y или $x\pm\alpha y$ для того, чтобы определить пересечение секущей плоскости с основанием, то в этом случае уравнение будет иметь два простых корня. Таким образом мы определили все сечения, которые производятся плоскостями, параллельными одной из трех основных плоскостей.

55. Для определения природы остальных сечений предположим, что секущая плоскость в пересечении с плоскостью основания образует прямую линию GT, которая сначала пусть будет параллельной одной из сопряженных осей EF или перпендикулярной к другой оси AB, продолженной до G. Пусть в этих условиях расстояние $CG=f$ и наклон секущей плоскости GTM к основанию пусть измеряется углом $=\varphi$. Пусть секущая плоскость GTM пересекает ось цилиндра в D. Проведя прямую DG, будем иметь $DGC=\varphi$ и, следовательно,

$$DG=\frac{f}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad CD=\frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Из какой-нибудь точки M искомого сечения проведем линию MT параллельно DG; тогда в силу того, что $TQ=f-x$ и угол $QTM=\varphi$, будет

$$TM=\frac{f-x}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad QM=\frac{(f-x)\sin\varphi}{\cos\varphi}=z.$$

Проведем линию MS параллельно линии TG и, стало быть, перпендикулярно к DG; тогда

$$MS=TG=PQ=y \quad \text{и} \quad DS=\frac{x}{\cos\varphi}.$$

56. Возьмем теперь прямые DS и SM в качестве координат искомого сечения, и пусть $DS=t$ и $SM=u$. Отсюда получаем $y=u$, $x=t\cos\varphi$ и, поскольку $z=\frac{(f-x)\sin\varphi}{\cos\varphi}$, будем иметь $z=f\operatorname{tg}\varphi-t\sin\varphi$. Подставим эти значения в уравнение цилиндра $a^2c^2=a^2y^2+c^2x^2$; тогда для искомого сечения получится следующее уравнение:

$$a^2c^2=a^2u^2+c^2t^2\cos^2\varphi.$$

Это уравнение показывает, что сечение будет представлять собою эллипс, который имеет центр в точке D и у которого одна из главных осей лежит на прямой линии DG, а другая ось перпендикулярна к первой. А полуось, лежащая на прямой линии DG (если положить $u=0) = \frac{a}{\cos\varphi}$. Или же, если провести прямую линию BH параллельно линии GD, то $BH = \frac{a}{\cos\varphi}$ окажется одной из полуосей рассматриваемого сечения, а другая, сопряженная с ней полуось будет $=c=CE$.

57. Следовательно, полученное указанным выше путем сечение цилиндра будет представлять собою эллипс, сопряженные полуоси которого равны $\frac{a}{\cos\varphi}$ и c. Следовательно, если в основании $AEBF$ $AC=a$ будет бо́льшей полуосью, то в этом случае, в силу того, что $\frac{a}{\cos\varphi}$ больше, чем a, получатся эллипсы более удлиненные, чем основание. А если c будет больше, чем a, то есть если пересечение GT окажется параллельным бо́льшей оси основания, тогда может случиться, что в сечении обе оси окажутся равными между собою и, следовательно, сечение будет представлять собою окружность. Последнее произойдет в том случае, когда будет $\frac{a}{\cos\varphi}=c$, то есть $\cos\varphi=\frac{a}{c}$. Следовательно, если в треугольнике BCH[1]) с прямым углом C угол $CBH=\varphi$, то будет

$$\cos\varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}.$$

Поэтому если взять $BH=CE$, то сечения будут кругами; а так как последнее может быть осуществлено двумя способами, а именно, если отложить прямую $BH=CE$ вверх или же вниз, то получается два ряда круговых сечений, которые расположены наклонно к оси CD. В силу этого подобного рода цилиндры называются косыми.

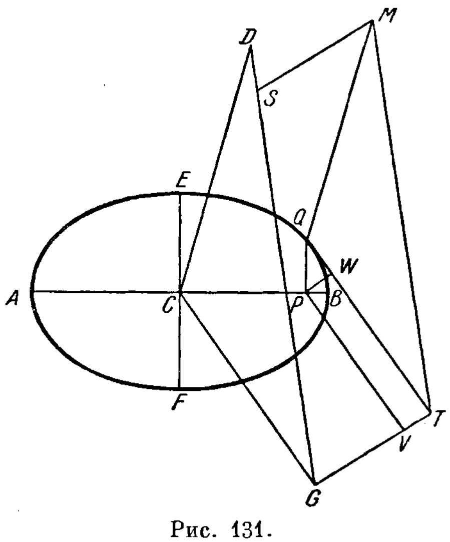

Рис. 131.

58. Пусть теперь (рис. 131) прямая GT, имеющая любой угол наклона, представляет собою пересечение секущей плоскости с основанием, и на нее из центра основания C опускают перпендикуляр $GC=f$; пусть угол $BCG=\theta$ и угол наклона $CGD=\varphi$. Последнему будет равен угол QTM, если проведем QT перпендикулярно к GT. Таким образом, будет

$$DG=\frac{f}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad CD=\frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Пусть M будет точкой искомого сечения, из которой проводим перпендикуляр MQ к основанию, а отсюда далее к оси перпендикуляр QP так, что если обозначить $CP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, получим $a^2c^2=a^2y^2+c^2x^2$. Далее, восставим к линии пересечения GT

---

[1]) На рис. 130, ввиду того, что a больше, чем c, HB никогда не может оказаться равным CE. [*А. Ш.*]

перпендикуляры PV и QT; тогда

$$GV = x\sin\theta, \quad PV = f - x\cos\theta,$$

и в силу того, что угол $QPW = \theta$, получим

$$QW = y\sin\theta, \quad PW = VT = y\cos\theta \quad \text{и} \quad QT = f - x\cos\theta + y\sin\theta.$$

Наконец, если провести линию MT, то, поскольку угол $MTQ = \varphi$, будет

$$TM = \frac{z}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad QT = \frac{z\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

59. Достроим прямоугольный параллелограм $GSMT$ и обозначим $DS = t$, $SM = GT = u$; тогда

$$u = GV + VT = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Но в силу того, что

$$QT = f - x\cos\theta + y\sin\theta,$$

будет

$$QT - CG = y\sin\theta - x\cos\theta,$$

откуда

$$DS = TM - DG = \frac{y\sin\theta - x\cos\theta}{\cos\varphi} = t.$$

Следовательно, так как

$$x\sin\theta + y\cos\theta = u \quad \text{и} \quad y\sin\theta - x\cos\theta = t\cos\varphi,$$

будем иметь

$$y = u\cos\theta + t\sin\theta\cos\varphi \quad \text{и} \quad x = u\sin\theta - t\cos\theta\cos\varphi.$$

Если эти значения подставить вместо x и y в уравнение $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$, получим

$$a^2c^2 = a^2u^2\cos^2\theta + 2a^2ut\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + a^2t^2\sin^2\theta\cos^2\varphi +$$
$$+ c^2u^2\sin^2\theta - 2c^2ut\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + c^2t^2\cos^2\theta\cos\varphi.$$

Последнее, очевидно, представляет собою уравнение для эллипса, центр которого находится в D; но координаты DS и SM не перпендикулярны к главным осям, если только не будет $a = c$, т. е. если цилиндр не будет прямым.

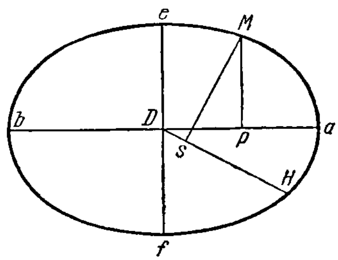

Рис. 132.

60. Для того чтобы более тщательно исследовать указанное выше сечение (рисунок 132), допустим, что $aMebf$ представляет собою кривую, уравнение которой при координатах $DS = t$ и $MS = u$ мы нашли, и пусть для краткости это уравнение записано в виде $a^2c^2 = \alpha u^2 + 2\beta tu + \gamma t^2$, так что в данном случае будем иметь

$$\alpha = a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta$$

и

$$\beta = (a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,$$

а также

$$\gamma = a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\cos^2\varphi.$$

Пусть ab и ef будут главными сопряженными осями этого сечения. Опустив на одну из них перпендикуляр Mp, обозначим $Dp = p$, $Mp = q$ и положим угол $aDH = \zeta$. Тогда

$$u = p\sin\zeta + q\cos\zeta \quad \text{и} \quad t = p\cos\zeta - q\sin\zeta;$$

если подставить эти значения, получим

$$\begin{array}{llll} a^2c^2 = & +\alpha\sin^2\zeta p^2 & +2\alpha\sin\zeta\cos\zeta pq & +\alpha\cos^2\zeta q^2 \\ & +2\beta\sin\zeta\cos\zeta & +2\beta(\cos^2\zeta-\sin^2\zeta) & -2\beta\sin\zeta\cos\zeta \\ & +\gamma\cos^2\zeta & -2\gamma\sin\zeta\cos\zeta & +\gamma\sin^2\zeta. \end{array}$$

61. Так как теперь уравнение отнесено уже к прямоугольному диаметру, то коэффициент при pq должен быть $=0$; поэтому, поскольку

$$2\sin\zeta\cos\zeta = \sin 2\zeta \quad \text{и} \quad \cos^2\zeta - \sin^2\zeta = \cos 2\zeta,$$

получится

$(\alpha-\gamma)\sin 2\zeta + 2\beta\cos 2\zeta = 0$ и, значит, $\operatorname{tg} 2\zeta = \dfrac{2\beta}{\gamma-\alpha}$, что определяет угол aDH и, следовательно, положение главных диаметров. Отсюда, далее определяются нижеследующим образом и полуоси:

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{\alpha\sin^2\zeta + 2\beta\sin\zeta\cos\zeta + \gamma\cos^2\zeta}}$$

и

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{\alpha\cos^2\zeta - 2\beta\sin\zeta\cos\zeta + \gamma\sin^2\zeta}}.$$

62. Так как

$$2\beta = \frac{2(\gamma-\alpha)\sin\zeta\cos\zeta}{\cos^2\zeta - \sin^2\zeta},$$

то если это значение подставить в найденные выше выражения, получим

$$aD = \frac{ac\sqrt{\cos^2\zeta-\sin^2\zeta}}{\sqrt{\gamma\cos^2\zeta-\alpha\sin^2\zeta}} = \frac{ac\sqrt{2\cos 2\zeta}}{\sqrt{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta-\alpha+\gamma}}$$

и

$$eD = \frac{ac\sqrt{\cos^2\zeta-\sin^2\zeta}}{\sqrt{\alpha\cos^2\zeta-\gamma\sin^2\zeta}} = \frac{ac\sqrt{2\cos 2\zeta}}{\sqrt{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta+\alpha-\gamma}}.$$

Следовательно, произведение этих полуосей

$$aD\cdot eD = \frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{\sqrt{2\alpha\gamma(1+\cos^2 2\zeta)-(\alpha^2+\gamma^2)\sin^2 2\zeta}}.$$

Но так как

$$(\gamma-\alpha)\sin 2\zeta = 2\beta\cos 2\zeta,$$

то будет

$$(\alpha^2+\gamma^2)\sin^2 2\zeta = 4\beta^2\cos^2 2\zeta + 2\alpha\gamma\sin^2 2\zeta$$

и, значит,

$$aD\cdot eD = \frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{\sqrt{4\alpha\gamma\cos^2 2\zeta-4\beta^2\cos^2 2\zeta}} = \frac{a^2c^2}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}} = \frac{ac}{\cos\varphi}.$$

63. Равным образом, так как квадраты

$$aD^2 = \frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta-\alpha+\gamma}$$

и

$$eD^2 = \frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta + \alpha - \gamma},$$

то

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4a^2c^2(\alpha+\gamma)\cos^2 2\zeta}{4\alpha\gamma\cos 2\zeta - 4\beta^2\cos^2 2\zeta} = \frac{(\alpha+\gamma)a^2c^2}{\alpha\gamma-\beta^2}.$$

А отсюда получается, что

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{\alpha+\gamma+2\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}$$

и

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{\alpha+\gamma-2\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}.$$

Таким образом, полуоси aD и eD будут корнями уравнения

$$(\alpha\gamma-\beta^2)x^4 - (\alpha+\gamma)a^2c^2x^2 + a^4c^4 = 0,$$

и мы имеем

$$\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2} = ac\cos\varphi.$$

64. Так как $aD\cdot eD = \frac{ac}{\cos\varphi}$ и φ представляет собою угол, который секущая плоскость образует с плоскостью основания, то мы получаем отсюда следующую изящную теорему.

ТЕОРЕМА

Если любой цилиндр пересекается любой плоскостью, то прямоугольник, составленный из осей сечения, относится к прямоугольнику, составленному из осей основания цилиндра, как секанс угла,

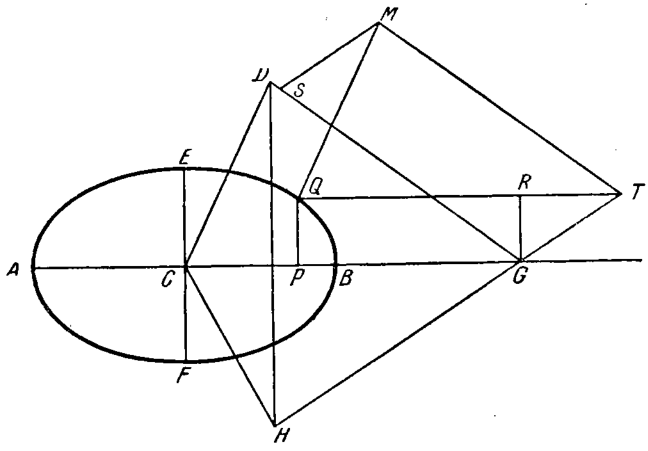

Рис. 133.

который плоскость сечения составляет с плоскостью основания, относится к полному синусу [87].

Таким образом, так как все параллелограммы, построенные на сопряженных диаметрах, равны прямоугольникам, составленным из осей, то и параллелограммы, построенные на основании и на любом сечении цилиндра, остаются в том же отношении.

65. Природу этого вида косых сечений цилиндра можно удобнее определить следующим образом. Если основанием цилиндра является эллипс (рис. 133) $AEBF$, полуоси которого $AC=BC=a$, $EC=CF=c$, и если прямая CD, перпендикулярная к основанию цилиндра в точке C, является осью этого цилиндра, сечем этот цилиндр некоторой плоскостью, пересечением которой с плоскостью основания пусть будет прямая TH, образующая любой угол с продолжением оси AB, и опустим на эту прямую из C перпендикуляр CH. Пусть угол $GCH=\theta$ и пусть секущая плоскость проходит через точку D оси цилиндра; тогда, если провести DH, угол CHD будет углом наклона секущей плоскости к плоскости основания, и мы обозначим этот угол через φ. Следовательно, если положить $CG=f$, то будет

$$GH=f\sin\theta,\quad CH=f\cos\theta,\quad DH=\frac{f\cos\theta}{\cos\varphi}\quad \text{и}\quad CD=\frac{f\cos\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Отсюда, ввиду того, что треугольник DCG имеет в точке C прямой угол, будет

$DG=\dfrac{f\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$ [1] и синус угла $DGH=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}$, его косинус $=\dfrac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}$ и его тангенс $=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\varphi}$.

66. Опустим теперь из какой-нибудь точки M искомого сечения на основание перпендикуляр MQ и проведем ординату QP; обозначим $CP=x$, $PQ=y$. Тогда будет $a^2c^2=a^2y^2+c^2x^2$. Проведем теперь линию QT, параллельную CG, и на нее опустим из точки G перпендикуляр GR. Тогда $GR=y$ и $QR=f-x$. Так как, значит, угол $TGR=GCH=\theta$, будем иметь

$$GT=\frac{y}{\cos\theta}\quad \text{и}\quad TR=\frac{y\sin\theta}{\cos\theta},$$

откуда

$$QT=f-x+\frac{y\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Следовательно, ввиду подобия треугольников CDG и QMT, будет

$$CG:DG=QT:MT\quad \text{и}\quad CG\,(CG-QT)=DG:DS,$$

если провести MS параллельно GT. Отсюда получим

$$DS=\frac{(x\cos\theta-y\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\theta\cos\varphi}.$$

Следовательно, если положить $DS=t$ и $MS=u$, получится

$$x\cos\theta-x\sin\theta=\frac{t\cos\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},\quad y=u\cos\theta;$$

отсюда можно вывести уравнение между t и u, которое будет еще достаточно сложным.

[1] В первом издании здесь и везде в §§ 65—67 под знаком корня вместо минуса плюс. [*А. Ш.*]

67. Но теперь возьмем вместо главных осей основания диаметр EF (рис. 133а)[1]), параллельный линии пересечения TH, и сопряженный с ним диаметр AB, который при продолжении пересечет TH в G, причем остаются без изменения, как принято нами ранее,

$$CG = f,\ GCH = \theta,\ CHD = \varphi,$$
$$CA = CB = m,\ CE = CF = n.$$

Тогда, если провести QP параллельно диаметру EF и положить

$$CP = x, \quad PQ = y,$$

так что $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, то будем иметь

$$GT = MS = y \text{ и } DS = x\frac{DG}{CG} = \frac{x\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

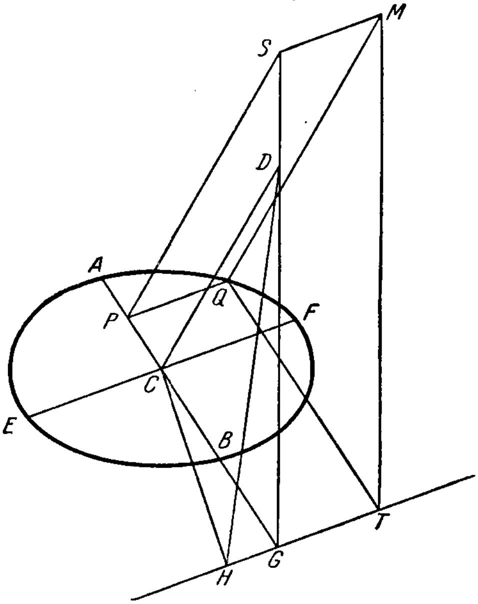

Рис. 133а.

Стало быть, если положить $DS = t$ и $MS = u$, то получится

$$x = \frac{t\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad y = u,$$

и мы будем иметь $\frac{CG}{DG}$ — значение косинуса угла CGD. Отсюда, если обозначить угол CGD через η, получим $x = t\cos\eta$; и, следовательно, для искомого сечения будем иметь

$$m^2n^2 = m^2u^2 + n^2t^2\cos^2\eta, —$$

[уравнение эллипса, отнесенное][2]) к сопряженным диаметрам, причем центр находится в D; полудиаметр в направлении DS будет $= \frac{m}{\cos\eta}$, а другой $= n$. А тангенс угла GSM, под которым эти диаметры наклонены друг к другу, будет $= \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\varphi}$, косинус этого угла $= \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} = \sin\theta\cos\eta$. Таким образом, природа сечения выявляется весьма легко.

68. Теперь, рассмотрев сечения цилиндра, мы перейдем к конусу, прямому или наклонному. Я смотрю на дело так, что наклонный конус отличается от прямого лишь тем, что в наклонном конусе сечения, перпендикулярные к оси, являются эллипсами, имеющими свои центры на оси, между тем как в прямом эти сечения суть круги. Итак, пусть (рис. 134) $OaebfO$ представляет собою какой-нибудь конус, имеющий вершину в O и ось Oc, которую я принимаю нормальной к плоскости рисунка, так что последняя представляет собою плоскость, проведенную через вершину конуса O и перпендикулярную к оси конуса Oc. Проведем через точку O в плоскости рисунка прямые AB, EF, параллельные осям ab и ef некоторого сечения, перпендикулярного к оси.

[1]) Рисунок 133а добавлен мною. [*А. Ш.*]

[2]) Слова в квадратных скобках вставлены в издании Opera omnia.

Следовательно, если из какой-нибудь точки M сечения $aebf$ опустить на плоскость рисунка перпендикуляр MQ, а из точки Q опустить на AB перпендикуляр PQ, и если положить $OP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, то абсцисса

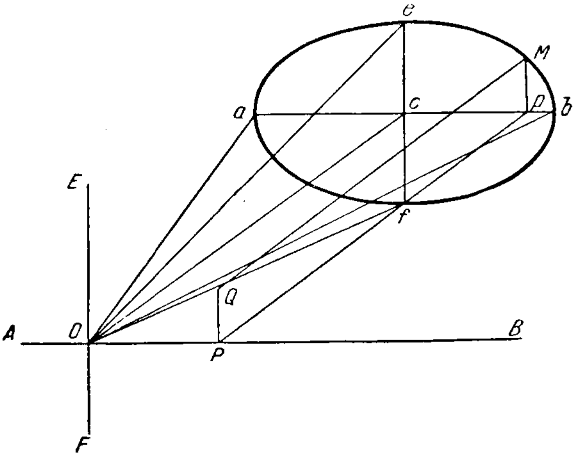

Рис. 134.

сечения $cp=x$, ордината $pM=y$; в силу этого, так как оси ab, ef находятся в постоянном отношении к $Oc=QM=z$, если положить $ac=bc=mz$ и $ce=fc=nz$, будем иметь

$$m^2n^2z^2=m^2y^2+n^2x^2;$$

а последнее представляет собою уравнение между тремя переменными x, y и z, выражающее природу конической поверхности.

69. Так как, стало быть, все сечения, перпендикулярные к оси Oc, являются эллипсами, как это следует из уравнения $m^2n^2z^2=m^2y^2+n^2x^2$ (если придать z постоянное значение), то подобным же образом легко определить сечения, которые перпендикулярны к прямой AB или к прямой EF. Действительно, если наш конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к AB и проходящей через точку P, то если положить $OP=a$, получим для сечения уравнение $m^2n^2z^2=m^2y^2+n^2a^2$ между координатами $Pp=z$ и $pM=y$. Последнее, очевидно, представляет собою гиперболу, имеющую центр в точке P, у которой поперечная полуось $=\frac{a}{m}$, а сопряженная с ней полуось $=\frac{na}{m}$. Равным образом, если положить y постоянным, то ясно, что сечение, перпендикулярное к прямой EF, будет гиперболой, центр которой находится на той же прямой EF.

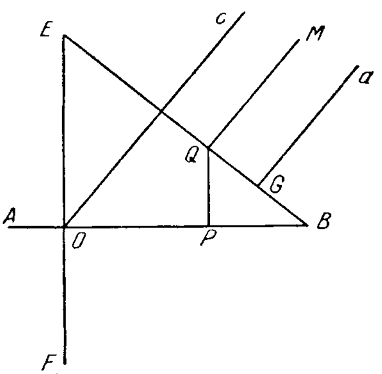

Рис. 135.

70. Если плоскость (рис. 135), пересекающая конус, перпендикулярна и к плоскости $AEBF$, но не перпендикулярна ни к одной из линий AB, EF, то сечение конуса также легко определить.

Действительно, пусть эта плоскость пересекает основание $AEBF$ по прямой BE; обозначим $OB = a$, $OF = b$. Далее, из какой-либо точки сечения M опустим перпендикуляр MQ и из точки Q проведем ординату QP, так что получится $OP = x$, $PQ = y$ и $QM = z$, а в силу природы конуса будет

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2.$$

Таким образом, будет

$$a : b = (a - x) : y \quad \text{или} \quad y = b - \frac{bx}{a}.$$

Обозначим координаты сечения $BQ = t$ и $QM = z$; тогда

$$b : \sqrt{a^2 + b^2} = y : t$$

и, стало быть

$$y = \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad a - x = \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть $\sqrt{a^2+b^2} = c$; будем иметь

$$y = \frac{bt}{c}, \qquad x = a - \frac{at}{c},$$

и получится следующее уравнение между t и z:

$$m^2n^2c^2z^2 = m^2b^2t^2 + n^2a^2c^2 - 2n^2a^2ct + n^2a^2t^2.$$

Пусть $t - \frac{n^2a^2c}{m^2b^2+n^2a^2} = GQ = u$, причем $BG = \frac{n^2a^2c}{m^2b^2+n^2a^2}$, тогда

$$m^2n^2c^2z^2 = (m^2b^2 + n^2a^2)\, u^2 + \frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2+n^2a^2}.$$

71. Таким образом, указанное сечение конуса будет гиперболой, у которой центр находится в точке G, и у которой поперечная полуось

$$Ga = \frac{ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}},$$

а сопряженная с последней полуось $= \frac{mnabc}{m^2b^2+n^2a^2}$. Асимптоты же этой гиперболы, которые пересекут ось Ga в центре G, образуют с осью Ga угол, тангенс которого $= \frac{mnc}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}}$. Следовательно, для того, чтобы это сечение было равнобочной гиперболой, должно иметь место

$$m^2n^2a^2 + m^2n^2b^2 = m^2b^2 + n^2a^2$$

или

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} OBE = \frac{n\sqrt{m^2-1}}{m\sqrt{1-n^2}}.$$

Таким образом, если только $\frac{m^2-1}{1-n^2}$ не окажется больше нуля, равнобочную гиперболу нельзя получить указанным выше путем. А в прямом конусе, где $m = n$, тангенс угла, образуемого асимптотами с осью сечения, $= n$ и самый угол $=$ углу aOc.

72. Пусть теперь (рис. 136) имеется косое сечение, но такое, что при пересечении его с плоскостью $AEBF$ получается прямая BT,

перпендикулярная к AB. Положим $OB = f$ и пусть угол наклона секущей плоскости к плоскости основания, т. е. угол $OBC = \varphi$, так что секущая плоскость пересекает ось конуса OC в точке C.
Тогда будет

$$BC = \frac{f}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad OC = \frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Из какой-нибудь точки M искомого сечения опустим на BT перпендикуляр MT, а затем опустим на плоскость основания перпендикуляр MQ, и из точки Q проведем к OB перпендикуляр QP, так что если положить $OP = x$, $PQ = y$ и $QM = z$, мы получим $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Возьмем для сечения координаты $BT = t$ и $TM = u$; тогда, в силу того, что угол $QTM = \varphi$, $QM = z = u\sin\varphi$, будет

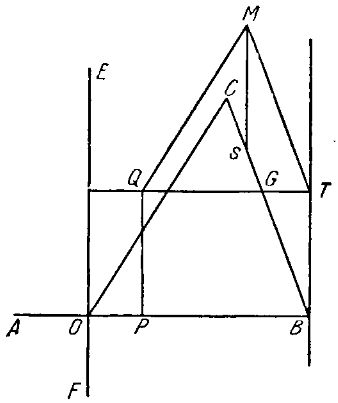

Рис. 136.

$$TQ = u\cos\varphi = f - x,$$

откуда получается

$$y = t,\quad z = u\sin\varphi \quad \text{и} \quad x = f - u\cos\varphi$$

и, значит,

$$m^2n^2u^2\sin^2\varphi = m^2t^2 + n^2(f - u\cos\varphi)^2.$$

73. Положим $BC = \frac{f}{\cos\varphi} = g$, что дает $f = g\cos\varphi$; тогда

$$x = (g - u)\cos\varphi,$$

и для сечения получим [уравнение]

$$m^2n^2u^2\sin^2\varphi = m^2t^2 + n^2g^2\cos^2\varphi - 2n^2gu\cos^2\varphi + n^2u^2\cos^2\varphi.$$

Проведя MS параллельно BT и взяв

$$BG = \frac{f}{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi} = \frac{g\cos\varphi}{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi} = \frac{g\cos\varphi}{1-(1+m^2)\sin^2\varphi},$$

находим

$$u - \frac{g\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi} = SG = s,$$

так что координатами будут $GS = s$ и $SM = t$, и тогда приходим к уравнению

$$m^2t^2 + n^2(\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi)s^2 - \frac{m^2n^2f^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi} = 0.$$

Таким образом, кривая будет коническим сечением, имеющим центр в точке G. Значит, она будет параболой, если центр ее G уйдет в бесконечность, что имеет место в том случае, когда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{m}$, т. е. когда прямая BC параллельна стороне Oa (рис. 134) конуса. В этом случае будет

$$m^2t^2 + n^2f^2 - 2n^2fu\cos\varphi = 0.$$

Вершина параболы будет в G при $BG = \frac{f}{2\cos\varphi}$, а ее параметр (рис. 136) $= \frac{2n^2f\cos\varphi}{m^2}$.

74. Так как сечение представляет собою параболу, когда $\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi = 0$, то ясно, что оно будет эллипсом, когда $\cos^2\varphi$ будет больше, чем $m^2\sin^2\varphi$, то есть, когда $\operatorname{tg}\varphi$ будет меньше[1]), чем $\frac{1}{m}$, а в этом случае прямая BC встретится с противоположной стороной Oa конуса сверху. Так как, стало быть,

$$BG = \frac{g}{1 - m^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

то BG будет больше, чем BC, причем G является центром искомого сечения. Таким образом, полуось этого сечения, направленная по BC, будет

$$= \frac{mf\sin\varphi}{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi},$$

другая сопряженная с нею полуось будет

$$= \frac{nf\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi}},$$

а параметр будет

$$= \frac{n^2}{m} f\sin\varphi.$$

Отсюда следует, что сечение будет кругом, если

$$m = n\sqrt{\cos^2\varphi - m^2\sin^2\varphi}, \quad \text{то есть} \quad m^2 = n^2 - n^2(1+m^2)\sin^2\varphi;$$

отсюда получаем, что

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n\sqrt{1+m^2}} = \sin OBC \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{m\sqrt{1+n^2}}{n\sqrt{1+m^2}}.$$

Таким образом, если только n не будет больше, чем m, ни одно сечение подобного рода не может быть кругом.

75. Если $m^2\sin^2\varphi$ больше, чем $\cos^2\varphi$, то есть если $\operatorname{tg}\varphi$ больше, чем $\frac{1}{m}$, так что прямая BC расходится с противолежащей стороной конуса Oa сверху, то сечение является гиперболой, у которой поперечная полуось

$$= \frac{mf\sin\varphi}{-\cos^2\varphi + m^2\sin^2\varphi},$$

сопряженная с нею полуось

$$= \frac{nf\sin\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}},$$

и параметр

$$= \frac{n^2}{m} f\sin\varphi,$$

а тангенс угла, под которым асимптоты пересекают ось в центре G, будет

$$= \frac{n}{m}\sqrt{m^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}.$$

---

[1]) В первом издании и в Opera omnia в этом месте читаем: «больше».

Поэтому рассматриваемая гипербола будет равнобочной в том случае, когда

$$m^2n^2\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi = m^2 = (m^2+1)\,n^2\sin^2\varphi - n^2 = m^2,$$

то есть, когда

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n\sqrt{1+m^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{m\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{1+m^2}}.$$

Таким образом, для этого необходимо, чтобы n было больше единицы: в противном случае при подобного рода сечении нельзя получить равнобочную гиперболу.

76. Когда конус прямой, то есть когда $m=n$, тогда все сечения можно свести к тем, которые были рассмотрены выше, так как положе-

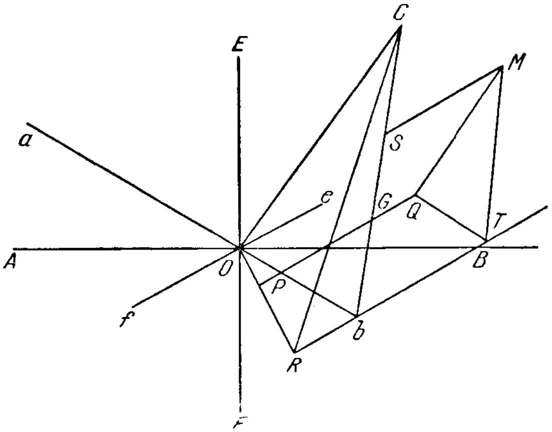

Рис. 137.

ние прямой AB зависит от нашего выбора. Но для наклонного конуса остается еще исследовать сечения, которые производит плоскость, наклоненная под каким угодно углом к прямой AB. Итак, пусть (рис. 137) BR является пересечением секущей плоскости с плоскостью основания $AEBF$. Положим $OB=f$, угол $OBR=\theta$ и угол наклона секущей к основанию $=\varphi$. Тогда, опустив из O перпендикуляр OR на BR, будем иметь $OR=f\sin\theta$ и $BR=f\cos\theta$. Затем, проведя в секущей плоскости прямую RC, мы, в силу того, что угол $ORC=\varphi$, будем иметь

$$RC = \frac{f\sin\theta}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad OC = \frac{f\sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Если теперь проектировать на площадь основания сечение, перпендикулярное к оси конуса OC, то его главные оси расположатся по линиям AB и EF и будут относиться одна к другой, как m к n.

77. В указанном проектируемом сечении проведем диаметр ef, параллельный BR. Тогда угол BOe будет $=\theta$. Пусть aOb будет положением сопряженного с ним диаметра. Положим полудиаметр $Oa=\mu z$, $Oe=\nu z$; тогда

$$\mu = \frac{\sqrt{m^4\sin^2\theta + n^4\cos^2\theta}}{\sqrt{m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}}$$

и

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}},$$

а также

$$\operatorname{tg} BOb = \frac{n^2 \cos \theta}{m^2 \sin \theta}, \qquad [\S\ 141];$$

поэтому у рассматриваемого угла

$$\text{синус будет} = \frac{n^2 \cos \theta}{\sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}$$

и

$$\text{косинус будет} = \frac{m^2 \sin \theta}{\sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}.$$

Но угол $ObR = \theta + BOb$; следовательно,

$$\sin ObR = \frac{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}$$

и

$$\cos ObR = \frac{(m^2 - n^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}.$$

Но мы имеем

$$\mu\nu = \frac{mn \sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}.$$

78. Так как $OR = f \sin \theta$, то, следовательно,

$$Ob = \frac{OR}{\sin ObR} = \frac{f \sin \theta \sqrt{m^4 \sin^2 \theta + n^4 \cos^2 \theta}}{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}$$

и

$$Rb = \frac{(m^2 - n^2) f \sin \theta \cos \theta}{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}.$$

Отсюда из треугольника RbC, который имеет в R прямой угол, получится, что тангенс угла $CbR = \frac{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}{(m^2 - n^2) \cos \theta \cos \varphi}$; таким образом, угол CbR будет известен. Далее, из какой-нибудь точки M сечения проведем до встречи с прямой RT прямую MT, параллельную Cb, а из M проведем до встречи с Cb прямую MS, параллельную RT, и обозначим $bT = MS = t$, $bS = TM = u$, и будем считать их как бы косоугольными координатами искомого сечения, причем тангенс угла $bSM\ [= CbR] = \frac{m^2 \sin^2 \theta + n^2 \cos^2 \theta}{(m^2 - n^2) \cos \theta \cos \varphi}$ [1]. Стало быть, ясно, что в прямом конусе эти координаты становятся прямоугольными, так как там имеем $m = n$.

79. Из точки M сечения опустим на плоскость $AEBF$ перпендикуляр MQ; если провести прямую TQ, она окажется параллельной диаметру ab. Затем из точки Q проведем ординату QP параллельно другому

[1]) В первом издании в знаменателе имеется множитель $\sin \theta$. [*А. Ш.*]

диаметру ef. Введя обозначения $OP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$, в силу природы конуса будем иметь

$$\mu^2\nu^2z^2=\mu^2y^2+\nu^2x^2.$$

Действительно, если представить себе, что через точку M проходит сечение, параллельное основанию, то μz и νz будут его полудиаметрами, параллельными прямым ab и ef. А так как стороны OC и Ob прямоугольного треугольника COb уже определены, имеем для гипотенузы

$$Cb=\frac{f\sin\theta\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta-(m^2-n^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi}}{(m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta)\cos\varphi},$$

и вследствие подобия треугольников TQM и bCO будет

$$TM\,(=u):TQ\,(=Ob-x):QM\,(=z)=bC:Ob:OC;$$

следовательно, $x=Ob-\frac{Obu}{Cb}$, $z=\frac{OCu}{Cb}$ и $y=t$ и, значит,

$$\mu^2\nu^2OC^2u^2=\mu^2Cb^2t^2+\nu^2Ob^2\,(Cb-u)^2.$$

80. Если приведенное выше уравнение развернуть, то оно даст следующее:

$$0=\mu^2Cb^2t^2+\nu^2\,(Ob^2-\mu^2OC^2)\,u^2-2\nu^2Ob^2Cbu+\nu^2Ob^2Cb^2;$$

если в последнем положить $u-\frac{Ob^2\cdot Cb}{Ob^2-\mu^2OC^2}=s$ или если взять

$$bG=\frac{Ob^2\cdot Cb}{Ob^2-\mu^2OC^2}=\frac{Cb}{1-(m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta)\operatorname{tg}2\varphi}$$

и обозначить GS через s, то G будет центром конического сечения, уравнением которого между координатами t и s будет следующее:

$$\mu^2\cdot Cb^2\cdot t^2+\nu^2\,(Ob^2-\mu^2OC^2)\,s^2=\frac{\mu^2\cdot\nu^2\cdot Ob^2\cdot OC^2\cdot Cb^2}{Ob^2-\mu^2\cdot OC^2};$$

$$\text{его поперечный полудиаметр}=\frac{\mu\cdot Ob\cdot OC\cdot Cb}{Ob^2-\mu^2\cdot OC^2},$$

$$\text{а сопряженный полудиаметр}=\frac{\nu\cdot Ob\cdot OC}{\sqrt{Ob^2-\mu^2OC^2}}$$

$$\text{и параметр}=\frac{\nu^2\cdot Ob\cdot OC}{\mu\cdot Cb}.$$

Но вообще ясно, что если $\operatorname{tg}\varphi$ меньше чем $\frac{1}{\sqrt{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}}$, то есть $\operatorname{tg}\varphi$ меньше чем $\frac{\nu}{mn}$, то кривая будет эллипсом; если $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\nu}{mn}$, она будет параболой, а если $\operatorname{tg}\varphi$ больше чем $\frac{\nu}{mn}$, то она будет гиперболой.

81. Третьим телом, сечения которого плоскостью мы решили здесь рассмотреть, является шар, у которого все плоские сечения являются, конечно, кругами, как это хорошо известно из элементарной геометрии. Тем не менее, для того чтобы лучше выявить тот метод, пользуясь которым можно, исходя из заданного уравнения для какого-нибудь тела, определить различные сечения последнего, я исследую здесь аналити-

чески тот вопрос, который обычно излагают синтетически. Итак, пусть (рис. 138) C будет центром шара, через который, как мы себе представляем, проходит плоскость чертежа, так что сечение, образуемое этой плоскостью, представляет собою большой круг, радиус которого $CA = CB$ мы положим $= a$, что является вместе с тем и радиусом шара. Пусть, далее, прямая DT будет пересечением секущей площади с плоскостью чертежа и пусть на нее из точки C опущен перпендикуляр CD, который пусть $= f$, а угол наклона пусть $= \varphi$.

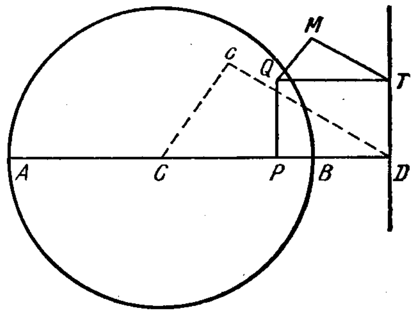

Рис. 138.

82. Пусть M — какая-нибудь точка искомого сечения; из последней на плоскость чертежа опустим перпендикуляр MQ, а отсюда на прямую CD, которую мы приняли в качестве оси, — перпендикуляр QP. Если мы обозначим координаты $CP = x$, $PQ = y$ и $QM = z$, то в силу природы шара будет $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Проведем также из M перпендикуляр MT к прямой DT и соединим точки Q и T; тогда, ввиду того, что как QT, так и MT перпендикулярны к DT, угол MTQ послужит мерой наклона секущей плоскости к плоскости основания, и этот наклон пусть $= \varphi$. Следовательно, если рассматривать DT и MT как координаты искомого сечения и обозначить $DT = t$, $TM = u$, мы получим

$$MQ = u \sin \varphi \quad \text{и} \quad TQ = u \cos \varphi.$$

Итак, будем иметь

$$CP = x = f - u \cos \varphi, \quad PQ = y = t \quad \text{и} \quad QM = z = u \sin \varphi.$$

Если подставить эти значения, то получится следующее уравнение для искомого сечения шара:

$$f^2 - 2fu \cos \varphi + u^2 + t^2 = a^2.$$

83. Ясно, что это — уравнение круга. Действительно, если положить $u - f \cos \varphi = s$, то получится

$$f^2 \sin^2 \varphi + s^2 + t^2 = a^2,$$

откуда следует, что радиус сечения $= \sqrt{a^2 - f^2 \sin^2 \varphi}$. Поэтому, если из точки D провести Dc параллельно ординате TM и опустить на нее из центра перпендикуляр Cc, то поскольку $CD = f$ и угол $CDc = \varphi$, будем иметь $Dc = f \cos \varphi$ и $Cc = f \sin \varphi$. Отсюда следует, что если координаты s и t отнести к центру, точка c окажется центром сечения и $\sqrt{CB^2 - Cc^2}$ будет радиусом этого круга, — как это ясно из элементарной геометрии. Аналогичным образом можно исследовать любые сечения плоскостями всех других тел, если только природа последних выражена с помощью уравнения между тремя переменными.

84. Для того чтобы лучше разобраться во всех изложенных выше операциях, представим себе (рис. 139) некоторое тело, природа которого выражена уравнением между тремя координатами $AP = x$, $PQ = y$ и $QM = z$, из которых первые две лежат в плоскости чертежа, а последняя z перпендикулярна к этой плоскости. Пересечем это тело какой-нибудь

плоскостью и пусть линией пересечения этой плоскости с плоскостью чертежа будет прямая DT, а угол наклона $= \varphi$. Положим, что прямая $AD = f$, угол $ADE = \theta$; тогда, опустив из точки A на DE перпендикуляр AE, будем иметь

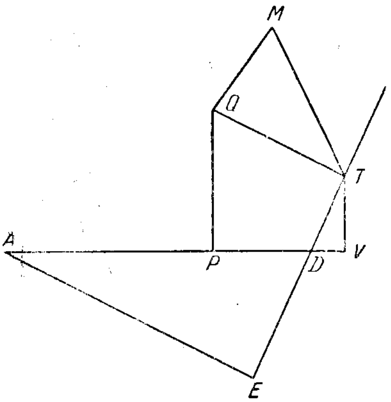

Рис. 139.

$$AE = f \sin \theta \quad \text{и} \quad DE = f \cos \theta.$$

Затем из точки M искомого сечения опустим на DT перпендикуляр MT. Если мы затем проведем прямую QT, то угол MTQ будет равен данному углу наклона φ. Следовательно, если взять DT и TM в качестве координат искомого сечения и обозначить $DT = t$, $TM = u$, будем иметь

$$QM = u \sin \varphi \quad \text{и} \quad TQ = u \cos \varphi.$$

85. Опустим из T на ось AD перпендикуляр TV; тогда, так как угол $TDV = \theta$, будет $TV = t \sin \theta$ и $DV = t \cos \theta$. Далее, так как угол $TQP = \theta$, будем иметь

$$PV = u \sin \theta \cos \varphi \text{ и } PQ - TV = u \cos \theta \cos \varphi.$$

Из этих последних выражений координаты x, y и z выражаются следующим образом через t и u:

$$AP = x = f + t \cos \theta - u \sin \theta \cos \varphi$$

и

$$PQ = y = t \sin \theta + u \cos \theta \cos \varphi,$$

а также

$$QM = z = u \sin \varphi.$$

Следовательно, если эти выражения подставить в заданное уравнение между x, y и z для тела, то получится уравнение между t и u, т. е. между координатами искомого сечения, и таким образом выявится природа последнего. Этот метод почти совпадает с тем, которым мы воспользовались выше, в п. 50.

ГЛАВА IV
ОБ ИЗМЕНЕНИИ КООРДИНАТ [88]

86. Подобно тому, как уравнения для кривых линий, находящихся в одной и той же плоскости, можно преобразовать на бесчисленное множество ладов, изменяя начало координат или положение оси, или же и то и другое, так в данном случае возможно еще гораздо большее разнообразие. Действительно, во-первых, в той плоскости, в которой находятся две координаты, последние можно менять бесконечно многими способами. Затем, конечно, можно изменять плоскость, в которой лежат эти две координаты, и этим путем указанное выше разнообразие можно умножить до бесконечности. Следовательно, если задано уравнение между тремя взаимно-перпендикулярными координатами, можно всегда найти другое уравнение между какими-нибудь тремя другими, точно также взаимно перпендикулярными, координатами, положение которых по сравнению с первоначальными можно варьировать в бесконечно большей мере, чем в случае лишь двух координат, как это имеет место для уравнений кривых линий.

87. Допустим сначала, что изменяется лишь начало абсцисс x на оси, так что две другие координаты y и z остаются без изменения, а новая абсцисса отличается от x постоянным количеством. Итак, пусть новая абсцисса $= t$; тогда будет $x = t \pm a$. Если это значение подставить в уравнение для поверхности, то получится уравнение между тремя координатами t, y и z, которое, хотя отлично от первого, будет все же уравнением для той же поверхности. Таким же образом можно и другие координаты y и z увеличить или уменьшить на постоянные количества, и если положить $x = t \pm a$, $y = u \pm b$ и $z = v \pm c$, можно получить уравнение между тремя переменными величинами t, u и v той же поверхности. При этом новые координаты будут параллельны первоначальным. Все же полученное этим путем уравнение поверхности хотя и является более общим, однако не очень сильно отличается от первоначального.

88. Так как три прямоугольные координаты, уравнение между которыми выражает природу поверхности, относят к трем взаимно перпендикулярным плоскостям, мы допустим (рис. 140), что одна плоскость, в которой откладываются две координаты x и y, остается без изменения, но только в ней в качестве оси берут какую-нибудь другую линию CT вместо линии AP. Так как, значит, прежде при оси AP координатами были $AP = x$,

$PQ=y, QM=z$, то при новой оси CT координата $QM=z$ останется прежней, но двумя остальными будут $CT=t$ и $TQ=u$, если провести QT перпендикулярно к новой оси CT. Следовательно, для того чтобы найти уравнение между этими новыми координатами t, u и z, проведем CR параллельно прежней оси AP, затем из точки C опустим на нее перпендикуляр CB и положим $AB=a$, $BC=b$ и угол $RCT=\zeta$. Наконец, проведем TR перпендикулярно к CR, а также из точки T проведем перпендикуляр TS на продолжение QP.

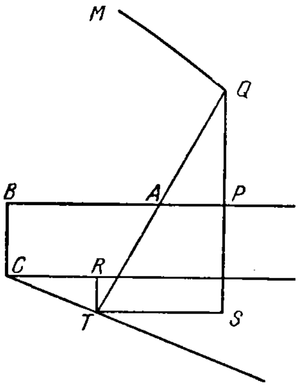

Рис. 140.

89. После всего этого в треугольнике TCR будет $TR=t\sin\zeta$, $CR=t\cos\zeta$, а в треугольнике QTS, в котором угол у точки Q будет точно так же $=\zeta$, получится $TS=u\sin\zeta$ и $QS=u\cos\zeta$. Отсюда получаем

$$AP=x=CR+TS-AB=t\cos\zeta+u\sin\zeta-a,$$

$$QP=QS-TR-BC=y=u\cos\zeta-t\sin\zeta-b.$$

Следовательно, если подставить эти значения вместо x и y в предложенное уравнение поверхности, получится уравнение между тремя новыми координатами t, u и z, которое будет выражать природу той же поверхности. Но это новое уравнение будет гораздо более общим по своему виду, так как в него входят три новые произвольные постоянные a, b и ζ, которые не входили в состав первоначального уравнения. Оно будет общим уравнением, если только остается неизменной плоскость, в которой находятся две координаты x и y.

90. Пусть теперь изменяется и плоскость, в которой были взяты две первоначальные координаты x и y, прежде всего таким образом (рис. 141), что новая плоскость пересекается с прежней плоскостью APQ по той прямой AP, которую мы будем рассматривать в качестве оси для новых координат. Итак, пусть APT будет этой новой плоскостью, а ее углом наклона к прежней плоскости APQ пусть будет угол QPT, который обозначим через η. Из точки M проведем к PT нормаль MT, которая одновременно будет перпендикулярна к новой плоскости и сыграет роль третьей координаты. Обозначим, стало быть, три новые координаты $AP=x$, $PT=u$ и $TM=v$. Если проведем TR перпендикулярно к PQ и TS перпендикулярно к QM, то будем иметь

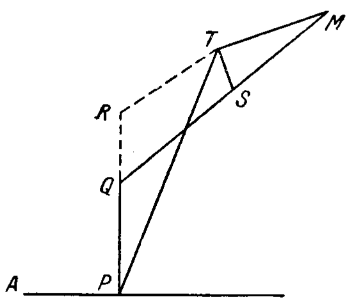

Рис. 141.

$$TR=u\sin\eta,\quad PR=u\cos\eta,\quad TS=v\sin\eta \quad\text{и}\quad MS=v\cos\eta.$$

Отсюда следует, что

$$PQ=y=u\cos\eta-v\sin\eta \quad\text{и}\quad QM=z=v\cos\eta+u\sin\eta.$$

Если эти значения подставить в заданное уравнение вместо y и z, то получится уравнение между тремя новыми координатами x, u и v, которое выразит природу той же самой поверхности.

91. Предположим теперь (см. рис. 140, стр. 344), что пересечение новой секущей плоскости с плоскостью APQ происходит по некоторой прямой CT и пусть η будет углом наклона указанных плоскостей; мы примем эту прямую CT в качестве оси на новой плоскости. Найдем прежде всего уравнение между координатами в плоскости APQ, отнесенным к оси CT. Согласно тому, что изложено выше, его можно найти следующим образом. Положим $AB=a$, $BC=b$, угол $TCR=\zeta$ и координаты $CT=p$, $TQ=q$ и $QM=r$, так что

$$x=p\cos\zeta+q\sin\zeta-a,\quad y=q\cos\zeta-p\sin\zeta-b \quad \text{и} \quad z=r.$$

А теперь, согласно предыдущему параграфу, если взять новые координаты t, u и v, получится

$$p=t,\quad q=u\cos\eta-v\sin\eta \quad \text{и} \quad r=v\cos\eta+u\sin\eta.$$

Если подставить эти значения, то первоначальные координаты x, y, z выразятся через новые таким образом, что получится

$$x=t\cos\zeta+u\sin\zeta\cos\eta-v\sin\zeta\sin\eta-a$$

и

$$y=t\sin\zeta+u\cos\zeta\cos\eta-v\cos\zeta\sin\eta-b,$$

а также

$$z=u\sin\eta+v\cos\eta.$$

92. Возьмем теперь (см. рис. 140) в той новой плоскости, в которой находятся координаты t и u, в качестве оси какую-нибудь новую линию, и тогда получится наиболее общее уравнение для рассматриваемой поверхности. Пусть для этой цели AP, PQ, QM будут координатами t, u и v, которые мы только что нашли, так что AP представляет собою пересечение упомянутой выше плоскости с плоскостью, в которой, как мы себе представляем, взяты первоначальные координаты x и y. Пусть прямая CT будет новой осью, к которой мы относим искомые новые наиболее общие координаты; обозначим их $CT=p$, $TQ=q$ и $QM=r$. Кроме того, AB и BC — постоянные отрезки, а угол CTR пусть $=\theta$. Тогда, согласно § 89, будет

$$t=p\cos\theta+q\sin\theta-AB$$

и

$$u=-p\sin\theta+q\cos\theta-BC,$$

а также

$$v=r.$$

Если эти значения подставить в выражения, приведенные в предшествующем параграфе, то получится

$$x=p(\cos\zeta\cos\theta-\sin\zeta\cos\eta\sin\theta)+$$
$$+q(\cos\zeta\sin\theta+\sin\zeta\cos\eta\cos\theta)-r\sin\zeta\sin\eta+f$$

и

$$y=-p(\sin\zeta\cos\theta+\cos\zeta\cos\eta\sin\theta)-$$
$$-q(\sin\zeta\sin\theta-\cos\zeta\cos\eta\cos\theta)-r\cos\zeta\sin\eta+g,$$

а также

$$z=-p\sin\eta\sin\theta+q\sin\eta\cos\theta+r\cos\eta+h,$$

где f, g и h представляют собою постоянные отрезки, образованные теми отрезками, которые были сначала введены в расчет.

93. Таким образом ясно, что наиболее общее уравнение для любой поверхности содержит шесть произвольных постоянных и что как бы последние ни были определены, уравнение всегда выражает природу одной и той же поверхности. И сколь бы простым и сжатым ни было уравнение для поверхности между координатами x, y, z, если из него составить наиболее общее уравнение между p, q и r, то вследствие большого количества произвольных постоянных это уравнение будет по необходимости очень сложным, в особенности если в нем добавятся более высокие измерения количеств x, y и z. Таким образом, едва ли может представиться случай, когда следовало бы прибегнуть к наиболее общему уравнению. Действительно, хотя его полезность можно усмотреть в том, что из него путем подходящего подбора подлежащих определению постоянных получается простейшее уравнение, но эта работа из-за пространности выкладок оказывается большей частью весьма утомительной. Тем не менее в дальнейшем указанный метод составления наиболее общих уравнений не останется без применения, так как с его помощью можно выявить и доказать замечательные свойства.

94. Хотя наиболее общее уравнение бывает зачастую очень сложным, тем не менее, если учитывать измерения, которые образуют взятые совместно координаты, то их число всегда окажется равным числу измерений, которые давали первоначальные координаты x, y и z. Например, так как уравнение шара $x^2+y^2+z^2=a^2$ является уравнением двух измерений, то и самое общее уравнение для него будет содержать не более двух измерений координат p, q и r. Поэтому число измерений, которые образуют координаты в каком-либо уравнении поверхности, дает нам существенную особенность этой поверхности, ибо как бы мы ни изменяли положение координат, всегда получится одинаковое число измерений. Таким образом, по отношению к поверхностям применимы те же соображения, которые раньше мы применили к кривым линиям и в силу которых мы разделили их на определенные порядки. Таким образом, представляется целесообразным распределить поверхности на порядки соответственно размерности их координат, и тогда поверхностью первого порядка будет такая поверхность, которая содержит в себе лишь первое измерение. Ко второму порядку мы отнесем поверхность, в уравнении которой число измерений координат увеличивается до двух. Так и дальше, в соответствии с числом измерений, образуются следующие порядки поверхностей.

95. Если с тем, что мы только что сказали, сопоставить то, что выше изложено о нахождении плоских сечений любой поверхности, то мы заметим, что порядок сечений всегда совпадает с порядком, к которому принадлежит поверхность. Действительно, пусть для какой-нибудь поверхности дано уравнение между координатами x, y и z, принадлежащее к n-му порядку, и пусть ортогональными координатами какого-либо из ее сечений будут t и u. Выше в § 85 мы видели, что можно найти уравнение между t и u, если в уравнении для поверхности подставить следующие значения:

$$x = f + t\cos\theta - u\sin\theta\cos\varphi$$

и

$$y = t\sin\theta + u\cos\theta\cos\varphi,$$

а также

$$z = u \sin \varphi.$$

Итак, очевидно, что уравнение сечения не может содержать большего числа измерений, чем уравнение между x, y и t, и оно всегда дает такое же точно число измерений.

96. Таким образом, поверхности первого порядка при пересечении их плоскостью могут дать лишь линии первого порядка т. е. прямые. Затем при пересечении поверхности второго порядка плоскостью получаются лишь линии второго порядка, или конические сечения; ибо коническая поверхность — тоже поверхность второго порядка, уравнением которой является

$$z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Аналогичным образом из поверхности третьего порядка с помощью плоских сечений получаются линии третьего порядка и так далее. Но иной раз может случиться, что уравнение какого-либо сечения допускает делители, и в этом случае сечение будет состоять из двух или большего числа линий низших порядков. Так, например, сечение конуса через его вершину будет состоять из двух прямых линий, которые, однако, будучи взяты совместно, создают видимость линии второго порядка, как мы уже отмечали выше.

97. Установив таким образом классификацию порядков, мы рассмотрим прежде всего те поверхности, которые относятся к первому порядку. Итак, уравнением, выражающим их природу, будет

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a.$$

Так как все сечения этих поверхностей плоскостью суть прямые линии, то ясно, что эти поверхности не могут не быть плоскими; ибо если бы они имели выпуклость или вогнутость, то обязательно получилось бы криволинейное сечение. Действительно, хотя среди других порядков существуют такого рода поверхности, у которых некоторые сечения представляют собою прямые линии (как мы это видели, например, у цилиндра, конуса и других), однако у этих поверхностей не исключается возможность криволинейных сечений. Таким образом, мы встречаемся здесь с тем же положением, какое мы наблюдали у линий, а именно: подобно тому как линия, которая никак не может быть пересечена прямой линией более чем в одной точке, является обязательно прямой, так и поверхность, которая, будучи пересечена плоскостью, всегда дает прямую линию, должна обязательно быть сама плоскостью.

98. Указанное свойство можно самым ясным образом доказать, исходя из наиболее общего уравнения. Действительно, составим из уравнения $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ наиболее общее уравнение при координатах p, q и r согласно § 92. Хотя мы вводим шесть новых произвольных постоянных, ничто не мешает нам определить их таким образом, чтобы коэффициенты при двух координатах p и q исчезали, следовательно, чтобы осталось уравнение вида $r = f$, выражающее природу той же самой поверхности. А это уравнение $r = f$ показывает, что рассматриваемая поверхность параллельна плоскости, в которой находятся координаты p и q и, стало быть, что она является плоскостью. Можно сделать и так, чтобы было $r = 0$, и тогда станет очевидно, что плоскость, в которой берут p и q, является искомой поверхностью.

99. Поскольку, таким образом, установлено, что поверхность, выражаемая уравнением $\alpha x+\beta y+\gamma z=a$, является плоскостью, следует определить ее положение по отношению к той плоскости, в которой берутся координаты x и y. Итак, пусть (рис. 142) M будет какой-нибудь точкой этой поверхности и пусть имеем три координаты $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$. Положим, во-первых, $z=0$. Тогда получится уравнение $\alpha x+\beta y=a$, выражающее пересечение искомой поверхности с плоскостью APQ; этим пересечением будет, очевидно, прямая линия BCR, положение которой относительно оси AP таково, что прямая AB, перпендикулярная к оси AP в плоскости APQ, будет $=\frac{a}{\beta}$, а $AC=\frac{a}{\alpha}$. Отсюда следует,

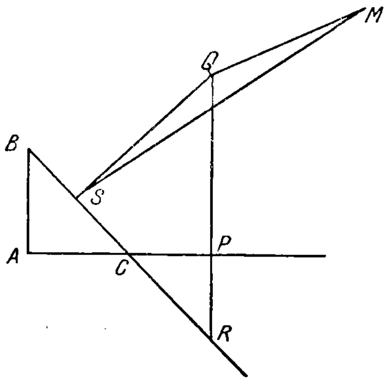

Рис. 142.

что тангенс угла ACB будет $=\frac{\alpha}{\beta}$ и, стало быть, его синус $=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ и косинус $=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Продолжим затем линию QP до пересечения ее с прямой BC в R; тогда, так как $CP=x-\frac{a}{\alpha}$,

$$CR=\frac{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}-\frac{a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad PR=\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{a}{\beta}.$$

100. Опустим из точки Q на BC перпендикуляр QS и проведем линию MS; тогда будет ясно, что угол MSQ дает меру наклона рассматриваемой поверхности к плоскости APQ. Так как, стало быть, $PR=\frac{\alpha x-a}{\beta}$, то будет $QR=\frac{\alpha x+\beta y-a}{\beta}=-\frac{\gamma z}{\beta}$, и в силу того, что угол $RQS=ACB$, будет $QS=-\frac{\gamma z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Отсюда получается, что у угла QSM

тангенс $=\frac{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma}$ и, значит, косинус $=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$.

Таким образом, искомая поверхность наклонена к плоскости, в которой лежат x и y,

$$\text{под углом, тангенс которого} = -\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma}.$$

Равным образом та же поверхность будет наклонена к плоскости координат x и z

$$\text{под углом, тангенс которого} = -\frac{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}{\beta},$$

а также к плоскости координат y и z

$$\text{под углом, тангенс которого} = -\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}.$$

ГЛАВА V

О ПОВЕРХНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА [89]

101. Так как порядки поверхностей установлены в соответствии с числом измерений, которое составляют в уравнении совместно взятые степени x, y и z, то в случае, если для какой-нибудь поверхности дается алгебраическое уравнение, можно тотчас же указать, к какому порядку следует отнести эту поверхность. А так как выше было показано, что всякая поверхность первого порядка представляет собою плоскость, то в настоящей главе я подвергну исследованию поверхности второго порядка. Среди последних сразу же выявляется бо́льшее разнообразие, чем среди линий второго порядка, что, конечно, легко обнаружить всякому, кто обратит на это внимание. Итак, я постараюсь отчетливо описать эти различные роды. А у поверхностей более высоких порядков количество их родов возрастает в такой мере, что мы вынуждены полностью отказаться от их рассмотрения.

102. Так как природа поверхностей второго порядка выражается уравнением, в котором измерение переменных x, y и z доходит до двух, то цилиндр и конус как прямой, так и наклонный, а также шар, свойства которых мы уже описали, входят в состав этого второго порядка. Все же поверхности, относящиеся к этому порядку, содержатся в следующем общем уравнении:

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Ибо как бы мы ни взяли три координаты, уравнение всегда будет такой формы. Следовательно, различные роды относящихся сюда поверхностей будут зависеть от различных взаимоотношений коэффициентов, что дает бесконечное множество различных поверхностей, хотя одна и та же поверхность выражается бесконечно многими уравнениями.

103. Подобно тому, как мы подразделяли плоские кривые, исходя из того, уходят ли они на бесконечность или размещаются в конечном пространстве, точно так же мы разделим все поверхности, относящиеся к тому или иному порядку, на два класса: к одному из них мы отнесем те, которые уходят на бесконечность, а ко второму — те, которые содержатся в конечном пространстве. Таким образом, цилиндр и конус будут причислены к первому классу, а шар — ко второму. Конечно, нет ни одной поверхности второго класса, принадлежащей к нечетным порядкам. Действительно, так как любая поверхность нечетного порядка имеет плоские сечения того

же порядка, а кривые нечетных порядков все уходят на бесконечность, то необходимо, чтобы и самые поверхности этих порядков тоже простирались на бесконечность.

104. Но всякий раз, когда та или иная поверхность простирается на бесконечность, необходимо, чтобы, по крайней мере, одно из трех переменных x, y и z уходило на бесконечность. А так как безразлично, какое из этих переменных предполагается бесконечным, положим, что бесконечным становится z, если только поверхность простирается на бесконечность. Итак, для того чтобы исследовать природу той части поверхности, которая уходит на бесконечность, предположим, что $z=\infty$, и тогда прежде всего следует рассмотреть первый член αz^2, имеется ли он налицо или же отсутствует. Если этот член имеется в уравнении и, стало быть, по сравнению с ним исчезают члены ηz и R, то будем иметь для той части, которая уходит на бесконечность, уравнение вида

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\theta y+\iota x=0.$$

Затем из этого уравнения устраняются все члены, которые не бесконечны или же которые только бесконечно меньше чем αz^2.

105. Положим, что [в уравнении] имеются все члены, в которых переменные обладают двумя измерениями. Действительно, какова бы ни была поверхность, в самое общее ее уравнение всегда будут входить все члены высших измерений [1]), и поэтому предположение, согласно которому мы допустили, что присутствуют все члены двух измерений, никоим образом не ослабляет общность решения. Но когда имеются члены yz и xz, то, по сравнению с ними, члены θy и ιx исчезают, и остается уравнение

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0,$$

из которого получаем, что

$$z=\frac{-\beta y-\gamma x\pm\sqrt{(\beta^2-4\alpha\delta)\,y^2+(2\beta\gamma-4\alpha\varepsilon)\,xy+(\gamma^2-4\alpha\zeta)\,x^2}}{2\alpha}.$$

Итак, природа части поверхности, простирающейся в бесконечность, выражается этим уравнением.

106. Итак, если поверхность имеет какую-то часть, простирающуюся в бесконечность, эта часть совпадает с бесконечной частью такой поверхности, которая выражается уравнением

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0,$$

так что последняя поверхность является как бы асимптотой для той поверхности, что выражена общим уравнением. А так как в этом уравнении три переменные везде имеют два измерения, то оно является уравнением конической поверхности, имеющей вершину в начале координат, где все переменные одновременно исчезают. Итак, всегда можно указать коническую поверхность, которая является асимптотой предложенной поверхности, если только последняя простирается на бесконечность. Иначе говоря, бесконечная часть этой конической поверхности либо полностью сливается с предложенной поверхностью, либо отклоняется от нее только на конечном промежутке [2]).

[1]) Только если допускаются и косоугольные координаты. [*А. Ш.*]

[2]) Это утверждение допускает исключения, например $z=x^2+y^2$. [*А. Ш.*]

Итак, подобно тому как мы различали ветви кривых, уходящие в бесконечность, с помощью прямолинейных асимптот, так и уходящие на бесконечность части поверхностей можно различать с помощью асимптотических поверхностей.

107. Следовательно, всякий раз как коническая асимптотическая поверхность будет действительной, исходная поверхность сама будет простираться на бесконечность и притом так, что бесконечные части обеих поверхностей будут сливаться. Так по природе асимптотической поверхности можно будет определять природу заданной поверхности. Если же асимптотическая поверхность будет мнимой, то исходная поверхность не будет иметь никакой уходящей в бесконечность части, а вся будет заключена в конечном пространстве. Итак, для того чтобы исследовать поверхности второго порядка, которые содержатся в конечном пространстве, нужно только выяснить, в каких случаях уравнение для асимптотической поверхности становится мнимым. А это будет иметь место, если вся такая поверхность исчезает, обращаясь в одну точку [1]. Действительно, если бы она имела какое-либо протяжение или какую-либо точку, расположенную вне вершины, то она обязательно должна была бы простираться на бесконечность, потому что, как мы выше показали, всякая прямая, которая проходит через вершину и еще одну точку поверхности, расположена на поверхности.

108. Итак, когда асимптотическая коническая поверхность, которая выражается уравнением

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0,$$

сводится к одной точке, то все ее сечения, проходящие через вершину, равным образом должны исчезать, обращаясь в ту же точку. Стало быть, когда положим, во-первых, $z=0$, уравнение $\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$ должно быть невозможным (если только не имеем $x=0$ и $y=0$), что получается, если $4\delta\zeta$ больше, чем ε^2. Затем, то же самое должно получиться, если положим либо $x=0$, либо $y=0$; следовательно, $4\alpha\delta$ будет больше, чем β^2 и $4\alpha\zeta$ — больше, чем γ^2. Итак, если только в уравнении для поверхности второго порядка

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\varkappa=0$$

$4\delta\zeta$ не будет больше, чем ε^2, $4\alpha\zeta$ — больше, чем γ^2, $4\alpha\delta$ больше, чем β^2, то поверхность заведомо будет иметь простирающиеся в бесконечность части.

109. Но эти три условия все же недостаточны для того, чтобы поверхность была заключена в конечном пространстве; сверх того требуется, чтобы то значение для z, которое мы получаем из приведенного выше асимптотического уравнения, было мнимым; а это будет иметь место, если выражение

$$(\beta^2-4\alpha\delta)\,y^2+2\,(\beta\gamma-2\alpha\varepsilon)\,xy+(\gamma^2-4\alpha\zeta)\,x^2$$

постоянно имеет отрицательное значение, когда мы подставляем вместо обоих переменных x и y любые значения, за исключением 0. Последнее же будет иметь место (поскольку $\beta^2-4\alpha\delta$ и $\gamma^2-4\alpha\zeta$ отрицательные

[1]) in punctum unum evanescit.

количества), если $(\beta\gamma-2\alpha\varepsilon)^2$ меньше, чем $(\beta^2-4\alpha\delta)(\gamma^2-4\alpha\zeta)$, то есть если $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2$ будет меньше, чем $\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$, при условии, что α принимает положительное значение, потому что мы разделили предыдущее уравнение[1]) на α. Но если α имеет положительное значение, то в силу приведенных выше уравнений ($4\alpha\zeta$ больше, чем γ^2, $4\alpha\delta$ больше, чем β^2 и $4\delta\zeta$ больше, чем ε^2) коэффициенты δ и ζ будут положительными.

110. Итак, поверхность второго порядка будет заключаться в конечном пространстве, если в ее уравнении соблюдаются следующие четыре условия, а именно, если $4\alpha\zeta$ больше, чем γ^2, $4\alpha\delta$ больше, чем β^2, $4\delta\zeta$ больше, чем ε^2 и $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2$ меньше, чем $\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$ [2]). В силу этого мы определим первый род поверхностей второго порядка как такой, к которому относятся все их виды, не уходящие в бесконечность, а заключенные в конечном пространстве. Следовательно, к этому роду относится шар, уравнение которого

$$z^2+y^2+x^2=a^2,$$

так как здесь будет $\alpha=1$, $\delta=1$, $\zeta=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\varepsilon=0$, и все четыре найденные условия удовлетворяются. Более общим образом сюда относится и уравнение

$$\alpha z^2+\delta y^2+\zeta x^2=a^2,$$

которое, если α, δ, ζ являются положительными количествами, всегда будет уравнением замкнутой поверхности, если только не исчезают один или два из коэффициентов [[90]].

111. Учитывая эти четыре условия, в силу которых поверхность располагается в конечном пространстве, можно сразу решить, когда предложено какое-то определенное уравнение второго порядка, имеет ли поверхность, выражаемая этим уравнением, простирающиеся в бесконечность части или нет. Действительно, если хотя бы одно из этих четырех условий не соблюдается, поверхность заведомо простирается на бесконечность. Но в этом случае нужно произвести еще некоторые подразделения, к которым приводит разнообразие простирающихся в бесконечность частей. И первым подразделением будет то, когда $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2$ больше, чем $\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$. В этом случае поверхность простирается на бесконечность и имеет в качестве асимптоты коническую поверхность, как это показано выше. Такой случай диаметрально противоположен предыдущему, когда вся поверхность заключена в конечном пространстве.

112. Кроме этого, имеются еще некоторые промежуточные случаи. Хотя при этом поверхность уходит в бесконечность, однако они заключаются между двумя предыдущими, подобно тому как парабола заклю-

---

[1]) В переводе сохранен здесь и в следующей фразе эйлеровский неточный термин aequatio.

[2]) Эти четыре выражения легко получаются из определителя

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 2\delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & 2\zeta \end{vmatrix}. \quad [\textit{А. Ш.}]$$

чена между эллипсом и гиперболой. Такой случай получаем, если будет

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

а кроме того будет также

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta} + x\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\zeta}.$$

Следовательно, асимптотическое уравнение

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 = 0$$

будет иметь два простых множителя, которые будут либо действительными, либо мнимыми, либо равными между собой. Такие три различия дают, следовательно, три рода поверхностей, простирающихся в бесконечность, так что всего мы допускаем пять родов поверхностей второго порядка, которые мы сейчас тщательнее рассмотрим [91].

113. Так как общее уравнение можно привести к более простому виду, меняя положение трех осей, которым параллельны координаты, то мы воспользуемся этим приведением для того, чтобы общее уравнение поверхностей второго порядка свести к простейшей форме, в которой, однако, как и в общей, будут содержаться все виды. Итак, поскольку общим уравнением для поверхности второго порядка является

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

то мы будем искать уравнение между тремя другими координатами p, q и r, которые, впрочем, пересекаются взаимно в той же точке, что и первые три. С этой целью, в соответствии с § 92, мы положим

$$x = p(\cos k \cos m - \sin k \sin m \cos n) + \\ + q(\cos k \sin m + \sin k \cos m \cos n) - r \sin k \sin n$$

и

$$y = -p(\sin k \cos m + \cos k \sin m \cos n) - \\ - q(\sin k \sin m - \cos k \cos m \cos n) - r \cos k \sin n$$

а также

$$z = -p \sin m \sin n + q \cos m \sin n + r \cos n,$$

откуда получается следующее уравнение:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Произвольные углы k, m и n можно определить так, чтобы исчезали три коэффициента D, E и F. Хотя те вычисления, с помощью которых можно действительно показать, как определяются указанные углы, не являются слишком обширными, однако если кто-либо усомнится, всегда ли такое исключение приводит к действительным значениям углов, он все же безусловно должен будет признать, что два коэффициента D и E можно сделать равными нулю. Но если это будет выполнено, то легко так изменить положение третьей оси в плоскости, перпендикулярной к координатам p, оси которой параллельны координате r, чтобы исчезал также коэффициент F. Действительно, положим

$$q = t \sin i + u \cos i \quad \text{и} \quad r = t \cos i - u \sin i,$$

так что вместо члена qr будет входить новый член tu, коэффициент при котором с помощью угла i может быть сделан равным нулю. Стало быть, таким образом, общее уравнение для поверхностей второго порядка приводится к следующему виду:

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

115. Кроме того, можно теперь так увеличить или уменьшить координаты p, q, r на определенные количества, чтобы исчезали коэффициенты G, H и I[1]); а это осуществляется изменением только той точки, в которой имеют свое начало все координаты. Но таким образом все поверхности второго порядка охватываются уравнением

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+K=0.$$

Из этого уравнения видно, что любая из трех главных плоскостей, проходящих через начало координат, делит поверхность на две подобные и равные части. Следовательно, всякая поверхность второго порядка имеет не одну только диаметральную плоскость, а три, которые взаимно пересекаются в одной и той же точке под прямым углом, и такая точка в силу этого является центром поверхности, хотя в некоторых случаях этот центр отстоит бесконечно далеко. Действительно, таким же образом все конические сечения рассматриваются как обладающие центром, хотя в параболе центр бесконечно отодвигается от вершины [92].

116. После приведения уравнения, которое охватывает все поверхности второго порядка, к простейшему виду, мы представим первый род этих поверхностей уравнением

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=a^2,$$

если только все три коэффициента A, B и C принимают положительные значения.

Итак, поверхности, относящиеся к этому первому роду, не только целиком содержатся в конечном пространстве, но все они также имеют центр, в котором взаимно пересекаются под прямыми углами три диаметральные плоскости. Пусть (рис. 143) C — центр этой фигуры, а CA, CB, CD — ее главные и взаимно перпендикулярные оси, которым параллельны координаты p, q, r; тогда тремя диаметральными плоскостями будут $ABab$, ADa и BDb. Этими плоскостями тело одинаковым образом рассекается на две равные части.

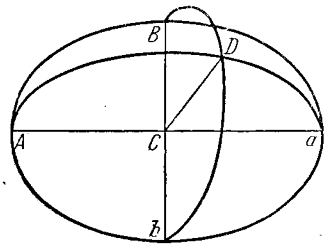

Рис. 143.

117. Положим $r=0$; тогда уравнение $Ap^2+Bq^2=a^2$ будет выражать природу главного сечения $ABab$; следовательно, это сечение будет эллипсом, центр которого находится в C, а полуосями его будут

$$CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}} \quad \text{и} \quad CB=Cb=\frac{a}{\sqrt{B}}.$$

Если положить $q=0$, получаем уравнение $Ap^2+Cr^2=a^2$ для главного сечения ADa, которое также будет эллипсом с центром в C, а его полуосями будут

$$CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}} \quad \text{и} \quad CD=\frac{a}{\sqrt{C}}.$$

[1]) См. § 123. [*А. Ш.*]

Если положим $p=0$, то получим для третьего главного сечения BDb уравнение $Bq^2+Cr^2=a^2$, которое также дает эллипс с центром в C и с полуосями

$$CB=Cb=\frac{a}{\sqrt{B}} \quad \text{и} \quad CD=\frac{a}{\sqrt{C}}.$$

Но когда мы знаем три главные сечения тела, или только их полуоси

$$CA=\frac{a}{\sqrt{A}}, \quad CB=\frac{a}{\sqrt{B}} \quad \text{и} \quad CD=\frac{a}{\sqrt{C}},$$

то тем самым мы определяем природу этого тела. В соответствии с этим первый род поверхностей второго порядка надлежит назвать *эллипсоидами* [93], так как три главные сечения суть эллипсы.

118. В этом роде содержатся три вида, которые заслуживают внимания. Мы получаем первый вид, если все три главные оси CA, CB и CD равны между собою, и в этом случае три главные сечения переходят в круги, а само тело становится шаром, уравнение которого, как мы выше видели, будет

$$p^2+q^2+r^2=a^2.$$

Второй вид составляют те случаи, когда только две главные оси равны между собой. Пусть, скажем, $CD=CB$ или $C=B$. Тогда сечение BDb будет кругом, а из уравнения

$$Ap^2+B(q^2+r^2)=a^2$$

мы усматриваем, что все параллельные ему сечения также будут кругами. Таким образом, это тело будет сфероидом, либо удлиненным, если AC больше, чем BC, либо сжатым, если AC меньше, чем BC. Наконец, третий вид образован теми телами, для которых коэффициенты A, B, C не равны и для которых, таким образом, остается общее наименование — *эллипсоиды*.

119. Последующие роды поверхности второго порядка содержатся в уравнении

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=a^2$$

прежде всего, при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не отсутствует, но либо один, либо два из них принимают отрицательное значение. Пусть только один коэффициент отрицателен, так что будем рассматривать уравнение

$$Ap^2+Bq^2-Cr^2=a^2,$$

в котором мы обозначаем через A, B, C уже положительные числа. Что касается центра такого тела и его диаметральных плоскостей, то все это остается в таком же виде, как и раньше. Действительно, ясно (рис. 144), что первым главным сечением этого тела $ABab$ будет эллипс, полуось которого $AC=\frac{a}{\sqrt{A}}$, а другая полуось $BC=\frac{a}{\sqrt{B}}$. Два остальные главные сечения Aq, BS будут гиперболами с центром в C, и они имеют сопряженную полуось $=\frac{a}{\sqrt{C}}$.

120. Таким образом, эта поверхность представляет собой нечто вроде воронки, расходящейся вдоль гипербол вверх и вниз. Следовательно, эта поверхность будет иметь в качестве асимптоты конус, который выражается уравнением $Ap^2+Bq^2-Cr^2=0$, у которого вершина в центре C, а боковая поверхность образуется асимптотами гипербол. Этот асимптотический конус располагается внутри поверхности и он будет прямым, если $A=B$, и наклонным, если A не равняется B. Осью же конуса будет прямая CD, перпендикулярная к плоскости ABa. Как бы то ни было, все сечения, перпендикулярные к оси, будут эллипсами, подобными эллипсу $ABab$, а сечения, перпендикулярные плоскости $ABab$, все будут гиперболами. Поэтому уместно называть такие поверхности *эллиптико-гиперболическими*, описанными около своего асимптотического конуса. Итак, эти поверхности составляют для нас второй род.

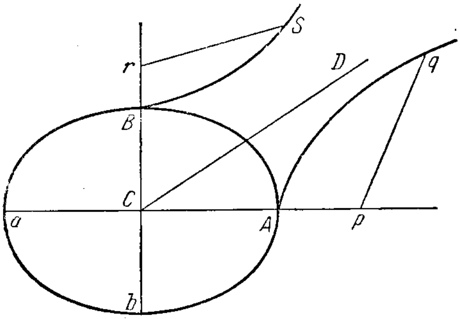

Рис. 144.

121. В этом роде тоже можно указать три вида, первый из которых получается, если $a=0$, и в этом случае эллипс $ABab$ исчезает, обращаясь в точку, а гиперболы переходят в прямые линии, сама же поверхность полностью сливается со своей асимптотой, так что этот первый вид охватывает все конусы, как прямые, так и наклонные; последнее может служить основанием для нового подразделения. Второй вид получаем, когда $A=B$, и в этом случае эллипс $ABab$ превращается в круг, а сама поверхность становится поверхностью вращения. Разумеется, такая поверхность получается тогда, когда та или иная гипербола вращается вокруг сопряженной оси. Третий вид совпадает с самим рассматриваемым родом поверхности.

122. Мы определим третий род, приняв, что два коэффициента при членах p^2, q^2 и r^2 отрицательны; следовательно, уравнением этого рода будет

$$Ap^2-Bq^2-Cr^2=a^2.$$

Итак, положив $r=0$ (рис. 145), будем иметь в качестве первого главного

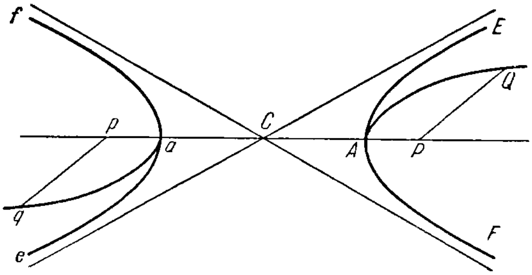

Рис. 145.

сечения гиперболу $EAFeaf$ с центром в C, поперечная полуось которой будет равна $\frac{a}{\sqrt{A}}$, и сопряженная полуось будет равна $\frac{a}{\sqrt{B}}$. Другое главное сечение, когда полагаем $q=0$, также будет гиперболой AQ, aq, имеющей ту же самую поперечную полуось, а ее сопряженная полуось будет равна $\frac{a}{\sqrt{C}}$. Третье главное сечение будет мнимым. Наконец, вся эта поверхность будет размещаться внутри асимптотической конической поверхности, почему этот род можно назвать *гиперболо-гиперболическим*, вписанным в асимптотический конус. Если $B=C$, поверхность будет поверхностью вращения, образуемой вращением гиперболы вокруг своей поперечной оси, и этот случай может образовать особый вид. Если же положить также $a=0$, получается коническая поверхность, которую мы уже рассматривали как вид предыдущего рода.

123. Для определения следующих родов рассмотрим случай, когда один из коэффициентов A, B, C исчезает. Итак, пусть будет $C=0$. Тогда общее уравнение, найденное в § 114, будет

$$Ap^2+Bq^2+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

В этом уравнении, уменьшая или увеличивая координаты p и q, можно уничтожить члены Gp и Hq, но не Ir. Итак, в уравнении остается член Ir, и с его помощью можно уничтожить последний член K, так что будем иметь уравнение вида

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

Здесь надо рассмотреть два случая: первый, когда оба коэффициента A и B положительны, и второй — когда один из них отрицателен. Но как в том, так и в другом случае центр поверхности расположен на оси CD, но отодвинут на бесконечное расстояние.

124. Пусть, во-первых, оба коэффициента A и B положительны. В этом случае получается четвертый род, который содержится в уравнении

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

Итак, первое главное сечение (рис. 146), которое получаем, когда положим $r=0$, исчезает, обращаясь в точку. Второе же главное сечение, которое получаем, положив $q=0$, и третье, которое получаем, положив $r=0$, будут параболами, а именно MAm и NAn. Так как все сечения этой поверхности, перпендикулярные к оси AD, являются эллипсами, а сечения, проведенные через эту ось, суть параболы, мы будем называть тела этого рода *эллиптико-параболическими*. Следует отметить два вида этого рода: один, когда $A=B$, и в этом случае получается тело вращения, которое называют *параболическим коноидом*; другой — когда $a=0$, так что получается

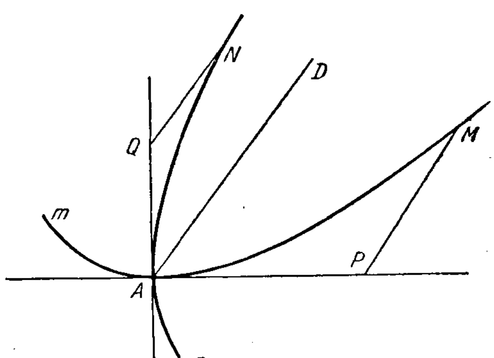

Рис. 146.

$$Ap^2+Bq^2=b^2,$$

что дает *цилиндры* как *прямые*, если $A=B$, так и *наклонные*, если A и B не равны [94].

125. Пятый род содержится в уравнении

$$Ap^2-Bq^2=ar.$$

Его первое главное сечение в виде двух прямых линий Ee, Ff (рис. 147), пересекающихся в точке A, мы получим, положив $r=0$. А все сечения, параллельные этому главному сечению, будут гиперболами, которые имеют центры на оси AD и заключены между прямолинейными асимптотами Ee и Ff. Таким образом, те две плоскости, которые пересекаются с плоскостью

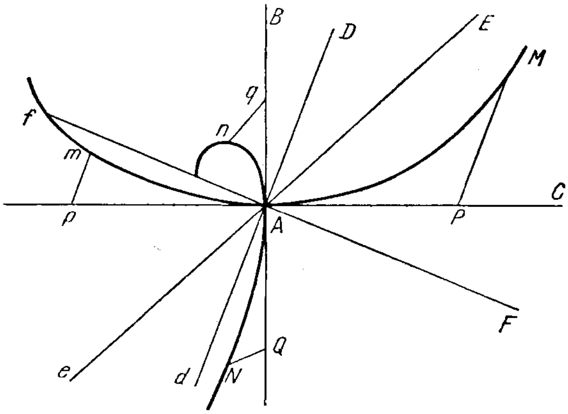

Рис. 147.

ABC по прямым Ee и Ff под прямым углом, сливаются на бесконечности с предложенной поверхностью, и, стало быть, для этой поверхности асимптотой являются две взаимно пересекающиеся плоскости. Остальные главные сечения, образуемые плоскостями ACD и ABd, являются параболами, и поэтому мы будем называть относящиеся к указанному роду поверхности *параболически-гиперболическими*. В качестве асимптот они имеют две плоскости. Видом этого рода

$$(\text{если } a=0, \text{ так что } Ap^2-Bq^2=b^2)$$

является гиперболический цилиндр, все сечения которого, перпендикулярные к оси AD, суть равные между собою гиперболы. Если, кроме того, взять $b=0$, то получаются те же две асимптотические плоскости [95].

126. Наконец, шестой род поверхности второго порядка [96] получаем из уравнения

$$Ap^2=aq;$$

это *параболический цилиндр*, все сечения которого, перпендикулярные к оси AD, суть подобные и равные параболы, так что вершины каждой из них попадают на прямую AD, а их оси параллельны одна другой.

Итак, все поверхности второго порядка могут быть приведены к указанным шести родам, так что нельзя указать ни одной поверхности, которая бы ни содержалась в одном из этих родов. Впрочем, если в последнем роде положить $a=0$ (так что получается $Ap^2=b^2$) [1]), то такое уравнение даст две параллельные друг другу плоскости, которые образуют как бы вид этого рода. Очевидно, здесь имеется сходство с линиями второго порядка, где, как мы видели, две пересекающиеся прямые образуют как бы вид гиперболы, а две параллельные прямые — вид параболы.

127. Хотя мы образовали эти шесть родов по простейшему уравнению, к которому можно привести уравнение поверхности второго порядка, теперь легко будет определять род, к которому относится поверхность, если предложено какое угодно уравнение второго порядка. Действительно, пусть будет предложено уравнение

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\varkappa=0.$$

Прежде всего можно сделать заключение уже по высшим членам, в которые переменные входят во втором измерении. А именно, надо рассмотреть следующие члены:

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2.$$

Если мы получаем здесь, что $4\alpha\zeta$ больше, чем γ^2, $4\alpha\delta$ больше, чем β^2, $4\delta\zeta$ больше, чем ε^2, и $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2$ меньше, чем $\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет замкнутой и будет принадлежать к первому роду, который мы назвали эллипсоидным.

128. Если нет одного или нескольких из этих условий и если, вместе с тем, нет [равенства] $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2=\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет относиться либо ко второму, либо к третьему роду, и она будет гиперболическим телом, обладающим асимптотическим конусом, причем в случае второго рода этот конус описан вокруг нее, в случае третьего рода — вписан в нее. Если же будем иметь

$$a\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2=\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta,$$

а в этом случае выражение

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2$$

может быть разложено на два простых множителя, либо мнимых, либо действительных, то в первом случае поверхность будет принадлежать четвертому роду, во втором случае — пятому. Если же, наконец, это выражение имеет два равных множителя, то есть является квадратом, то получается шестой род. Так что легко сразу заключить, к какому роду относится любое предложенное уравнение; трудно только различить второй и третий роды, так как они оба могут слиться в один.

129. Таким же образом можно рассматривать поверхности третьего и следующих порядков и делить их на роды. Очевидно, надо будет рассматривать только высшие члены в общем уравнении, то есть для поверхностей третьего порядка — те, в которых координаты имеют три измерения:

$$\alpha z^3+\beta yz^2+\gamma y^2z+\delta x^2z+\varepsilon xz^2+\zeta xyz+\ \text{и т. д.}$$

Прежде всего выясняют, можно ли разложить на простые множители эти члены, совместно взятые (то есть высшую часть уравнения), или же

[1]) Имеется в виду, что при отсутствии члена с первой степенью q нельзя избавиться от свободного члена.

нельзя. Если разложение на множители не удается, то поверхность будет иметь в качестве асимптоты конус третьего порядка. А так как природа этого конуса выражается высшей частью уравнения, если ее приравнять нулю, то получится несколько конусов третьего порядка такого рода, и в соответствии с их разнообразием получаются несколько родов поверхностей. Действительно, тогда как все конусы второго порядка сводятся к одному роду, поскольку они либо прямые, либо наклонные, для третьего порядка имеет место значительно большее разнообразие.

130. Когда же исследованы эти роды, надлежит рассмотреть те случаи, когда высшая часть уравнения может быть разложена на простые множители, действительные или мнимые. Пусть, во-первых, имеется один простой множитель, который является действительным; вследствие этого поверхность будет иметь асимптотическую плоскость. Если приравнять какой-либо другой множитель нулю, то либо получится возможное уравнение, либо нет. Если получится невозможное уравнение (когда не все координаты исчезают), то будет единственная асимптотическая плоскость, если же такое уравнение не будет невозможным, то поверхность будет иметь две асимптоты, одну плоскую, другую — конус второго порядка. Если же будут три простых множителя, то, так как один из них всегда действителен, получается два новых рода, когда два остальных либо мнимые, либо действительные. Наконец, если все три простых множителя действительные, то в соответствии с тем, будут ли равны между собою два из них или все, можно получить сверх того два рода. Однако нет ни одной поверхности этого порядка, которая бы не простиралась на бесконечность.

ГЛАВА VI

О ВЗАИМНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

131. Выше уже был изложен метод исследования природы такого сечения, которое получается при пересечении любой поверхности с плоскостью. А поскольку кривая линия, образуемая сечением, вся расположена в одной плоскости, с помощью которой сечение получено, то мы брали две координаты, соотношение между которыми обычно выражает природу таких кривых линий, в той же плоскости, так что исследование сводилось к обычным рассуждениям. Но если секущая поверхность не будет плоскостью, то, так как сечение тогда не будет лежать в одной плоскости, нельзя будет охарактеризовать его природу с помощью двух координат; вследствие этого надо воспользоваться другим способом, чтобы охватить подобного рода сечения уравнениями, которые правильно указывают положение любой точки.

132. Но положение точек, не находящихся на одной и той же плоскости, можно определить, если воспользоваться тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, и для любой точки указать те три расстояния, на которые она удалена от каждой из плоскостей. Таким образом, потребуются три переменные для того, чтобы выразить природу кривой линии, не находящейся в одной и той же плоскости, и притом так, что когда одно из переменных задается произвольно, значения двух других определяются с его помощью. Следовательно, для такой цели недостаточно одного уравнения между тремя координатами, хотя оно определяет свойство любой поверхности. Поэтому необходимы два уравнения, и с их помощью, если одному из переменных придается заданное значение, сразу определяются значения двух остальных.

133. Итак, природа любой кривой, которая не находится в одной и той же плоскости, наиболее удобным образом выражается двумя уравнениями между тремя переменными, скажем, x, y, z, которые представляют собою взаимно перпендикулярные координаты. Итак, с помощью двух таких уравнений можно определить два переменных через третье; например, как y, так и z будут равняться некоторой функции от x. Но можно также исключить какое-либо одно переменное, так что будут получаться три уравнения, содержащие только два переменных: одно, содержащее x и y, другое — x и z, третье — y и z. Впрочем, какое угодно из этих трех уравнений определяется через два остальных, так что если имеем уравнения между x и y и между x и z, то по ним находим третье уравнение, исключая x.

134. Итак, пусть предложена (рис. 148) какая угодно кривая, не расположенная в одной и той же плоскости, и пусть M — одна какая-либо из ее точек. Выберем произвольно три взаимно перпендикулярные оси AB, AC и AD, которые определяют три взаимно перпендикулярные плоскости BAC, BAD и CAD. Из точки M кривой опустим на плоскость BAC перпендикуляр MQ, а из точки Q проведем перпендикуляр QP к оси AB. Тогда AP, PQ и QM будут теми тремя координатами, два уравнения между которыми определяют природу кривой. Итак, обозначим $AP = x$, $PQ = y$ и $QM = z$, и из заданных двух уравнений между x, y и z исключим z, чтобы образовать уравнение, содержащее только два переменных x и y и определяющее положение точки Q на плоскости BAC. Следовательно, точки Q, получающиеся из соответствующих точек M, образуют кривую EQF, природа которой выражается найденным уравнением между x и y.

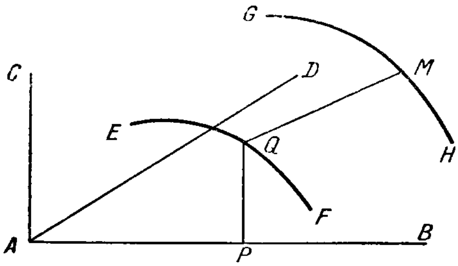

Рис. 148.

135. Таким образом, с помощью двух уравнений между тремя координатами легко найти природу кривой EQF, которая образуется, когда мы опускаем из каждой точки M кривой, подлежащей исследованию, перпендикуляр MQ на плоскость BAC. А эта кривая EQF называется *проекцией* кривой GMH на плоскость BAC. Подобно же тому, как проекция на плоскость BAC определяется с помощью исключения переменного z, так проекция той же кривой на плоскость BAD или на плоскость CAD получается, если исключить либо переменное y, либо x. Но одной проекции EQF недостаточно для определения кривой GMH, если же для каждой точки Q будет известен перпендикуляр $QM = z$, то по проекции EQF легко построить саму кривую GMH. Следовательно, для этого нужно, чтобы, кроме уравнения между x и y, которым выражается природа проекции, имелось уравнение между z и x, или же между z и y, или даже между z, x, y, из которого узнаем длину перпендикуляра $QM = z$ для любой точки Q.

136. Поскольку же уравнение между z и x выражает проекцию кривой GMH на плоскость BAD, а уравнение между z и y дает проекцию на плоскость CAD, тогда как уравнение между тремя переменными z, y и x выражает поверхность, на которой находится кривая GMH, то очевидно, что по двум проекциям одной и той же кривой GMH на две плоскости определяется сама кривая GMH. Вместе с тем мы усматриваем, что если задается поверхность, на которой находится кривая GMH и, кроме этого, проекция кривой на некоторую плоскость, то этим рассматриваемая кривая также определяется. Действительно, из каждой точки проекции восставляем перпендикуляры QM, и их пересечение с поверхностью определяет искомую кривую GMH [[97]].

137. Теперь, когда мы изложили то, что относится к исследованию свойств любой кривой, расположенной не в одной и той же плоскости, нетрудно будет определить пересечение каких угодно двух поверхностей. Действительно, подобно тому как пересечением двух плоскостей является прямая линия, так пересечением двух каких угодно поверхностей будет линия либо прямая, либо кривая, и она будет расположена либо в одной

и той же плоскости, либо нет. Однако, как бы она ни была построена, каждая ее точка принадлежит как одной, так и другой поверхности и, следовательно, содержится в уравнении каждой из них. Следовательно, если эти две поверхности выражаются уравнениями между тремя координатами, которые отнесены к одним и тем же трем взаимно перпендикулярным главным плоскостям или к одним и тем же трем взаимно перпендикулярным осям AB, AC и AD, оба эти уравнения, совместно взятые, выражают природу пересечения.

138. Итак, когда даны две взаимно пересекающиеся поверхности, то природа каждой из них должна выражаться уравнением между тремя координатами, отнесенными к одним и тем же осям, так что будем иметь два уравнения между тремя координатами x, y и z, и когда мы исключим одну из них из этих уравнений, уравнение между двумя оставшимися даст проекцию пересечения на плоскость, образуемую этими двумя координатами. Стало быть, можно исследовать таким способом и пересечение какой угодно поверхности с плоскостью. Действительно, поскольку общим уравнением плоскости является $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$, то если в уравнении поверхности подставить вместо z его значение, получаемое из указанного уравнения, а именно $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$, получится уравнение для проекции пересечения на плоскость координат x и y. И вместе с тем уравнение $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$ дает для любой точки Q проекции величину перпендикуляра QM, восставленного до пересечения.

139. Если же окажется, что уравнение для проекции является невозможным, как, например, если бы получилось $x^2+y^2+a^2=0$, то это указывало бы на то, что наши две поверхности нигде не пересекаются. Если же уравнение проекции дает лишь одну точку, то есть если проекция исчезает, обращаясь в точку, то тогда пересечение также будет точкой и, следовательно, поверхности соприкасаются в этой точке; такое соприкосновение можно также определить по уравнению. Кроме того, бывает также линейное соприкосновение, когда две поверхности соприкасаются в бесконечном числе точек, а линия соприкосновения является либо прямой, либо кривой. Например, она будет прямой, если плоскость касается цилиндра или конуса, а прямой конус соприкасается с вписанным шаром по окружности круга. Такое соприкосновение мы находим по уравнению, если для проекции получается такое уравнение, которое имеет два равных множителя, вследствие чего это соприкосновение является не чем иным, как слиянием двух пересечений.

140. Для того чтобы это яснее представить, допустим, что шар пересекается какой-либо плоскостью. Возьмем уравнение, отнесенное к центру шара,

$$z^2+y^2+x^2=a^2.$$

Для плоскости же в каком угодно положении будем иметь уравнение

$$\alpha z+\beta y+\gamma x=f.$$

Таким образом, поскольку $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$, получается для проекции следующее уравнение между x и y:

$$0=f^2-\alpha^2a^2-2\beta fy-2\gamma fx+(\alpha^2+\beta^2)\,y^2+2\beta\gamma xy+(\alpha^2+\gamma^2)\,x^2.$$

И очевидно, что это эллипс, если только уравнение будет действительным; если же оно будет мнимым, то шар нигде не соприкасается с плоскостью; если же эллипс исчезает, обращаясь в точку, то плоскость и шар касаются друг друга. Чтобы получить эти случаи, найдем

$$y=\frac{\beta f-\beta\gamma x+\alpha\sqrt{a^2(\alpha^2+\beta^2)-f^2+2\gamma fx-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,x}}{\alpha^2+\beta^2},$$

и если здесь f имеет такое значение, что радикал никак не может быть действительным, то не будет ни соприкосновения, ни пересечения.

141. Положим, что $f=a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Тогда

$$y=\frac{\beta f-\beta\gamma x\pm\alpha x\sqrt{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\mp\alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

И этому уравнению не могут удовлетворять действительные значения, если не будем иметь

$$x=\frac{\gamma a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\quad\text{и}\quad y=\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Поэтому, если $f=a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, то плоскость, которая выражается уравнением $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$, касается шара, а точку соприкосновения мы получим, если возьмем

$$x=\frac{\gamma a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\qquad y=\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\quad\text{и}\quad z=\frac{\alpha a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Правильность этих значений можно проверить с помощью элементарной геометрии, где изучается соприкосновение шара с плоскостью.

142. Стало быть, отсюда выводится общее правило, с помощью которого можно выяснить, касается ли некоторой поверхности плоскость или другая поверхность. Действительно, исключив из двух уравнений одно переменное, выясним, можно ли разложить получившееся уравнение на простые множители или нельзя. Если будем иметь два простых мнимых множителя, получится соприкосновение в точке, которая определяется, если положить тот или иной множитель $=0$. Если же будем иметь два действительных простых множителя, к тому же равных между собой, то поверхности касаются друг друга по прямой. Если же это уравнение имеет два равных и не простых множителя, то есть если оно делится на квадрат, тогда корень квадратный из него, будучи приравнен нулю, дает проекцию той линии, которая получается при соприкосновении. Отсюда также ясно, что если наше уравнение имеет четыре мнимых множителя, то поверхности соприкасаются в двух точках.

143. Для того чтобы это разъяснить более полным образом, исследуем соприкосновение конуса и шара, центр которого расположен на оси конуса. Уравнением шара будет $z^2+y^2+x^2=a^2$, для конуса уравнением будет $(f-z)^2=mx^2+ny^2$, причем мы считаем, что вершина конуса удалена на расстояние f от центра шара. Исключая отсюда переменное y, получим

$$(f-z)^2=na^2-nz^2+(m-n)\,x^2$$

— уравнение проекции пересечения на плоскость координат x и z. Пусть имеем сначала прямой конус, то есть пусть $m=n$; тогда

$$z=\frac{f\pm\sqrt{n(1+n)a^2-nf^2}}{1+n}.$$

Поэтому, если будет $f=a\sqrt{1+n}$, то получим двойное значение $z=\frac{a}{\sqrt{1+n}}$, и поэтому соприкосновение будет линейным, конечно, по кругу, проекция которого на плоскость, проходящую через ось, является прямой, нормальной к оси.

144. Что касается наклонного конуса, когда m и n не равны, то мы видим, что найденное уравнение всегда дает пересечение, несмотря на то, что чаще всего никакого пересечения не существует. Действительно, всегда, если только m превосходит n, получается действительное уравнение для проекции пересечения, и следует отметить, что действительность проекции не всегда указывает на действительное пересечение. Для того чтобы само пересечение было действительным, недостаточно, чтобы только проекция была действительна: необходимо, чтобы перпендикуляры, проведенные от проекции к пересечению, тоже были действительными. Стало быть, хотя всякая действительная кривая имеет действительные проекции, однако нельзя заключить, что, наоборот, если проекция действительна, то действительна сама искомая кривая [98]. Такие предосторожности всегда надо тщательно соблюдать для того, чтобы не впасть в ошибку из-за действительности уравнений, которые мы находим для проекций.

145. Мы избегнем указанных неудобств, если будем искать проекцию в плоскости координат x и y, так как ведь в этой плоскости нет ни одной точки, которой бы не отвечала точка на поверхности конуса; если проекция на эту плоскость будет действительной, то и само пересечение будет действительным. А так как имеем $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, то получаем из второго уравнения

$$f-\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{mx^2+ny^2},$$

то есть

$$a^2+f^2-(1+m)x^2-(1+n)y^2=2f\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

и далее

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-f^2)^2-\left.\begin{array}{r}2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)m\end{array}\right\}x^2\quad\left.\begin{array}{r}-2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)n\end{array}\right\}y^2+\\+(1+m)^2x^4+2(1+m)(1+n)x^2y^2+(1+n)^2y^4\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда получаем

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2-f^2+n(a^2+f^2)-(1+m)(1+n)x^2}{(1+n)^2}\pm\\\pm\dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{n(1+n)a^2-nf^2+(m-n)(1+n)x^2}\end{array}\right\}=y^2$$

и

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2-f^2+m(a^2+f^2)-(1+m)(1+n)y^2}{(1+m)^2}\pm\\\pm\dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{m(1+m)a^2-mf^2+(n-m)(1+m)y^2}\end{array}\right\}=x^2.$$

146. Итак, для того чтобы найденное уравнение имело множители, должно быть либо $f^2=(1+n)a^2$, либо $f^2=(1+m)a^2$. В первом случае будем иметь

$$y^2=\frac{na^2-(1+m)x^2}{1+n}\pm\frac{2fx\sqrt{m-n}}{(1+n)\sqrt{1+n}},$$

откуда, если m меньше чем n, с необходимостью следует, что должно быть

$$x=0 \quad \text{и} \quad y=\pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}, \quad \text{а} \quad z=\frac{a}{\sqrt{1+n}}.$$

Итак, получаются две точки соприкосновения, одинаково удаленные от оси конуса. Если же m будет больше, чем n, то надо принять другое уравнение

$$x^2=\frac{ma^2-(1+n)y^2}{1+m}\pm\frac{2fy\sqrt{n-m}}{(1+m)\sqrt{1+m}},$$

которое не может быть действительным, если только не имеем $y=0$. В этом случае

$$x=\pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}} \quad \text{и} \quad z=\frac{a}{\sqrt{1+m}}.$$

Следовательно, получаем в этом случае две другие точки соприкосновения, и оно имеет место в той части конуса, где он наиболее узок. Подобным же образом можно исследовать соприкосновение в любом случае.

147. Однако значительно более легкий способ определения касательных плоскостей каких угодно поверхностей можно вывести из метода для нахождения касательных к кривым, который изложен выше. Пусть (рис. 149) природа поверхности, касательные плоскости к которой мы ищем, выражается уравнением между тремя координатами $AP=x$, $PQ=y$ и $QM=z$. С помощью этого уравнения надо определить положение плоскости, касающейся поверхности в точке M. Итак, прежде всего мы рассмотрим касательную в точке M к сечению, которое получается при пересечении поверхности некоторой плоскостью, проходящей через точку M, и которое расположено в касательной плоскости. Поэтому если мы найдем касательные в точке M к двум такого рода сечениям, то плоскость, которая определяется этими двумя прямолинейными касательными, будет соприкасаться с поверхностью в точке M.

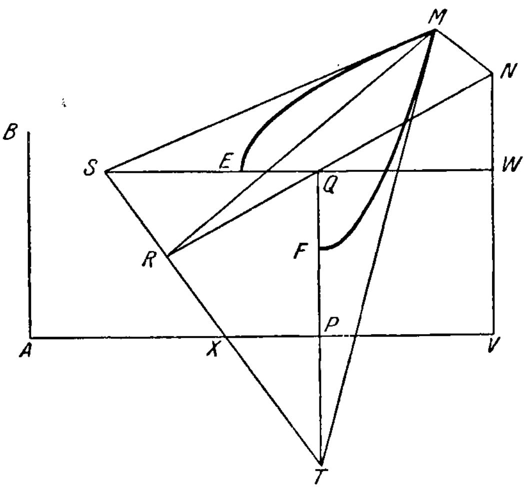

Рис. 149.

148. Итак, прежде всего пересечем поверхность плоскостью, нормальной к плоскости APQ, по прямой QS, параллельной оси AP. Затем таким же

образом проведем через точку M сечение, также перпендикулярное к плоскости APQ, но по прямой QP, нормальной к оси AP; таким образом, первое сечение будет нормально к оси AB, а второе — к оси AP. Пусть получаем в первом сечении кривую EM; мы определим касательную к ней MS, встречающую прямую QS в точке S, так что QS будет подкасательной. Пусть второе сечение — это кривая FM, касательной к которой будет прямая MT, а подкасательной — QT. Когда это найдено, плоскость SMT будет касательной к поверхности в точке M. Итак, проведя ST, получим пересечение касательной плоскости с плоскостью APQ; а если из Q проведем к ST перпендикуляр QR, то QR [1]) будет так относиться к QM, как полный синус к тангенсу [2]) угла MRQ, который касательная плоскость образует с плоскостью APQ.

149. Положим, что с помощью вышеизложенного метода касательных мы нашли подкасательные $QS = s$ и $QT = t$; тогда

$$PT = t - y \quad \text{и} \quad PX = s - \frac{sy}{t},$$

откуда следует, что

$$AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

Таким образом, будет известна точка X, в которой прямая ST пересекает ось AP, и так как угол $AXS = TSQ$, то тангенс этого угла $= \frac{t}{s}$, откуда узнаем положение пересечения касательной плоскости с плоскостью APQ. Затем, поскольку $ST = \sqrt{s^2 + t^2}$, будем иметь

$$QR = \frac{st}{\sqrt{s^2+t^2}}.$$

Если разделить на это выражение длину QM, получим

$$\text{тангенс угла наклона } MRQ = \frac{z\sqrt{s^2+t^2}}{st}.$$

Если затем провести к MR перпендикуляр MN, он будет перпендикуляром как к касательной плоскости, так и к самой поверхности в точке M. Следовательно, его положение будет определяться из равенства

$$QN = \frac{z^2\sqrt{s^2+t^2}}{st}.$$

А когда мы проведем из N перпендикуляр NV к оси AP, то, поскольку угол $QNV = QST$, будем иметь

$$PV = \frac{z^2}{s} = QW \quad \text{и} \quad NW = \frac{z^2}{t}.$$

Поэтому, если положение точки N в плоскости APQ определить указанным образом, прямая NM будет нормалью к поверхности.

150. Выше мы уже показали, каким образом надо исследовать пересечение двух поверхностей с помощью проекций. Выясним теперь, какого порядка будет проекция в соответствии с порядком, к которому отно-

---

1) В первом издании QS. [*А. Ш.*]

2) «Полный синус к тангенсу» — это то же самое, что котангенс. [*А. Ш.*]

сится поверхность. Прежде всего, две поверхности первого порядка, то есть плоскости, в качестве пересечения и его проекции дают линию первого порядка. Затем мы видели также, что такая проекция не может быть выше второго порядка, если одна из поверхностей первого порядка, а другая — второго. Подобным же образом очевидно, что если одна поверхность будет третьего порядка, а другая — первого, то проекция не может превысить третий порядок, и т. д. Если же взаимно пересекаются две поверхности[1]) второго порядка, то проекция пересечения будет либо четвертого порядка, либо низшего; и вообще, если одна поверхность будет порядка m, а другая — порядка n, то проекция пересечения никогда не будет относиться к порядку более высокому, чем тот, который определяется числом mn.

151. Когда ни одна из взаимно пересекающихся поверхностей не является плоскостью, их пересечение большей частью будет кривой, не расположенной в одной и той же плоскости. Тем не менее может получиться так, что все сечение находится в одной и той же плоскости, и это имеет место, если уравнения обеих поверхностей, как одно, так и другое, содержат в себе уравнение вида $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$. Но имеет ли место то или другое? Из обоих уравнений следует определить два переменных z и y через третье x, так что будет $z=P$ и $y=Q$, где P и Q суть функции от x. Затем надо выяснить, имеется ли такое число n, что в выражении $P+nQ$ все степени x, кроме низшей и постоянных членов, взаимно уничтожаются. Если это имеет место, так что $P+nQ=$ $=mx+k$, сечение будет находиться в одной и той же плоскости, и эта плоскость определяется уравнением $z+ny=mx+k$.

152. Пусть, к примеру, предложены следующие два уравнения второго порядка: одно — для прямого конуса

$$z^2=x^2+y^2,$$

другое — для поверхности второго рода *эллиптико-гиперболической*

$$z^2=x^2+2y^2-2ax-a^2.$$

Так как отсюда следует, что

$$x^2+2y^2-2ax-a^2=x^2+y^2,$$

то получаем

$$y=\sqrt{2ax+a^2} \quad \text{и} \quad z=x+a\ ^2),$$

и это последнее уравнение указывает на то, что все сечение расположено в одной и той же плоскости, положение которой определяется уравнением $z=x+a$. Итак, с помощью таких соображений можно решать многие вопросы, относящиеся к поверхностям. Те же, кто пойдут дальше изложенного здесь метода, будут нуждаться в анализе бесконечно малых, и то, что изложено в этих книгах, пролагает путь к этой науке [[99]].

[1]) В тексте Opera omnia здесь осталась неисправленной описка Эйлера в первом издании: вместо «поверхности» (superficies) напечатано «линии» (linea).

[2]) Или $z=-x-a$. [*А. Ш.*]

ПРИМЕЧАНИЯ

[1], стр. 19. Эйлер исходит здесь из того определения переменного количества, которое дано им в первом томе Введения (гл. I, § 2).

[2], стр. 20. Даже этот скромный параграф с его более чем обычным для современного читателя содержанием — один из итогов целого этапа в развитии аналитической геометрии. Декарт, Ферма и многие более поздние математики XVII в. не вводили отрицательных абсцисс. Пользовался ими Валлис, систематически рассматривал геометрические образы во всех четырех квадрантах Ньютон. С начала XVIII в. это становится преобладающей практикой.

[3], стр. 20. Читатель, конечно, заметил отсутствие оси ординат на рис. 2. Эйлер, как правило, не вычерчивает второй оси. Лишь со второй половины XVIII в. постепенно входит в обычай в аналитической геометрии на плоскости указывать обе оси. Впервые, по-видимому, ось ординат была введена в Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes Клода Рабюеля, изд. в 1730 г.

[4], стр. 20. У Эйлера читаем здесь не ордината, а аппликата (recta applicata — приложенная прямая, собственно, приложенный отрезок). Терминов абсцисса и ордината у Декарта и Ферма не было, их ввел Лейбниц. Первый из них Эйлер применяет систематически, второй же чаще всего заменяет словом аппликата.

[5], стр. 21. Изложенный в этом параграфе взгляд на кривые линии как на «порожденные функциями», здесь впервые сформулирован в такой общности и с такой определенностью. Что же касается самого понятия функции, непрерывной и прерывной, то Эйлер пользуется им в соответствии с определениями первого тома Введения, что надо постоянно иметь в виду. См. в связи с этим следующий параграф.

[6], стр. 26. Разумеется, все эти выводы сделаны в том же предположении, что и в § 21, — рассматривается алгебраическая кривая (вещественная).

[7], стр. 27. Говоря «все уравнения», Эйлер имеет в виду уравнения в декартовых координатах. См. ниже, §§ 35, 42.

[8], стр. 30. «...если принять единицу в качестве полного синуса» — эта терминология исходит из представления синуса как линии в круге. Тогда

24*

наибольшее значение синуса совпадает с радиусом круга, и если принять этот радиус равным единице, получаем обычные числовые значения тригонометрических функций. Эйлер пользуется этой терминологией и ниже, пользовался ею и в первом томе (см. там § 126), хотя именно благодаря Эйлеру определение тригонометрических функций как отношений линий стало общепринятым.

[9], стр. 34. Собственно, это утверждение еще надо оправдать, то есть доказать, что любое уравнение первой степени в декартовых координатах представляет прямую. Этим и занимается Эйлер в следующих двух параграфах. В § 41 он не рассматривает случая, когда свободный член в уравнении прямой равен нулю, а коэффициенты при координатах от нуля отличны; впрочем при этих предположениях соображения § 40 остаются в силе.

Заметим еще, что к геометрии прямой Эйлер обращается в дальнейшем лишь в следующей главе, где он показывает, что вид уравнения прямой не изменяется при переходе к косоугольным координатам. Таким образом, вся «аналитика» прямой сводится к выводу ее уравнения («общего») и указанию некоторых его частных видов. В этом отношении Эйлер не отходит от своих предшественников. Декарт в «Геометрии» совсем не занимается прямой линией, Ферма в своем «Введении...» показывает лишь то, что всякое уравнение первой степени представляет прямую (в печати первым высказал такое утверждение комментатор «Геометрии» Декарта Дебон в 1649 г.). Позднейшие авторы, вплоть до Эйлера, да и позже его, ограничиваются составлением уравнения прямой, как это сделано в тексте. Это неудивительно, потому что новый метод аналитической геометрии применяли к более трудным и новым вопросам, а то, что относилось к элементарной математике, оставляли в стороне. Только в конце XVIII в. разрабатываются и входят в учебники разделы о прямых и плоскостях. Этому способствовали запросы технических наук и технического образования, с одной стороны, стремление изложить всю геометрию чисто аналитически — с другой. Сказанное относится также к учению об окружности и сфере.

[10], стр. 35. Косоугольные координаты почти не используются в дальнейшем изложении. В этом отношении Введение Эйлера тоже отмечает определенный этап. Декарт и Ферма начинают с косоугольных координат; в первые десятилетия аналитической геометрии такими координатами пользовались чаще, чем прямоугольными.

[11], стр. 41. Здесь ссылка на «Перечисление линий третьего порядка» Ньютона, которое увидело свет в качестве приложения в его «Оптике» (Opticѕ, L, 1704, стр. 138—211 второй пагинации). Русский перевод «Перечисления» — в сборнике «Математические работы» Ньютона, ред. Д. Д. Мордухай-Болтовского, М. — Л., 1937.

Классификация кривых (алгебраических) по их порядкам могла быть введена лишь с созданием аналитической геометрии, и она действительно восходит к Декарту. Декарт объединял в одном n-м роде кривые с уравнениями степени $2n-1$ и $2n$. Классификация Декарта связана, возможно, с задачей «на места к прямым», на которой он в «Геометрии» показывает преимущества своего метода. А. П. Юшкевич высказал весьма вероятное предположение, что основанием для такой классификации у Декарта могло быть предположение, что уравнение степени $2n$ в общем случае сводится к уравнению степени $2n-1$, подобно тому как уравнение 4-й степени сводится к уравнению 3-й степени. Так или иначе, объединение кривых порядка $2n$ и $2n-1$ оказалось лишенным основания. Классификация кривых по их порядкам вполне четко дана у Ньютона, но у него она дана в геометрическом виде (по числу точек пересечения кривой линии с прямой), у Эйлера — в алгебраическом. Кроме того, Ньютон чаще называет кривые $(n+1)$-го порядка кривыми n-го рода.

[12], стр. 41. Здесь Эйлер указывает на терминологию Ньютона, у которого, впрочем, в таких случаях речь идет не о порядке (ordo), а о роде (genus). См. предыдущее примечание.

[13], стр. 41. Треугольные числа — частный случай так называемых фигурных чисел (или k-угольных; все эти термины сейчас редко используются). По определению, k-угольное число n-го порядка $N_n^{(k)} = n+(k-2)\,\frac{n(n-1)}{2}$. Это — сумма n первых членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и с разностью $k-2$. Для треугольных чисел соответствующей прогрессией является натуральный ряд. Название этих чисел связано с некоторыми геометрическими построениями.

[14], стр. 48. Последнее утверждение требует оговорок: могут быть заданы точки в соответствующем числе (например, для кривой второго порядка — 5 точек), однако кривая данного порядка не определяется этим однозначно.

Вероятно, Эйлер только из технических и, может быть, методических соображений оставил это место при печатании книги без изменений. Уже к концу года, когда было закончено «Введение», и задолго до выхода книги из печати его внимание было привлечено к тому обстоятельству, что могут быть исключительные расположения точек, не определяющие однозначно проходящую через них кривую. Более того, он уже тогда мог разъяснить связанный с этим так называемый парадокс Крамера (название, как и многие другие, не оправданное, так как до Крамера он был указан Маклореном). Парадокс состоит в следующем. В общее уравнение кривой третьего порядка входят 10 коэффициентов, стало быть, поскольку они определены с точностью до постоянного множителя, такая кривая, говоря языком Эйлера, допускает девять определений, то есть девять точек определяют единственным образом кривую. С другой стороны, две кривые третьего порядка пересекаются в $3 \cdot 3 = 9$ точках, следовательно, через такие девять точек проходят две кривые. Более того, легко показать, что в этом случае через девять точек проходит бесконечно много линий третьего порядка.

Крамер (Габриель, 1704—1752) переписывался с Эйлером. В письме от 30.9.1744 г. он просил Эйлера, «умеющего так хорошо углубляться в вопросы», дать «хорошее объяснение этой трудности». Крамер при этом указывал, что такие же затруднения имеют место и для линий высших порядков.

Мы не располагаем ответным письмом Эйлера, но в письме от 11.11. 1744 г. к нему Крамер сообщает, что считает указания Эйлера по затронутому вопросу вполне правильными и что они совпадают с его собственными выводами.

В печати по этому вопросу Эйлер выступил с работой, представленной в 1748 г. Берлинской академии: «Об одном кажущемся противоречии в теории кривых линий» [1]). Сущность его разъяснений состоит в следующем. Если мы имеем n^2 точек пересечения двух кривых порядка n, то эти точки, говоря современным языком, не находятся «в общем положении», поэтому их недостаточно для того, чтобы однозначно определить кривую порядка n, хотя для этого требуется, вообще говоря, лишь $\frac{n(n+3)}{2}$ «определений», и это число, начиная с $n=3$, $\leqslant n^2$.

[15], стр. 51. В своей работе о парадоксе Крамера (см. предыдущее примечание) Эйлер в виде примера разбирает тот же вопрос, что в тексте: определение линии второго порядка по пяти точкам. Выкладку он начинает так же, как и во «Введении», но, дойдя до системы двух уравнений для коэффициентов δ, ε, ζ, он учитывает возможность того, что эта система не определяет однозначно отношений двух из этих коэффициентов к третьему. А именно, он указывает, что такая неопределенность действительно имеет место тогда, когда эти два уравнения равносильны. При таком допущении два значения ε, определяемые этими уравнениями, должны совпадать при любых δ и ζ. Следовательно, имеем

$$\varepsilon=\frac{\delta c\,(a-c)+\zeta d\,(c-d)}{cd}=\frac{\delta e\,(a-e)+\zeta f\,(b-f)}{ef},$$

откуда следует, что

$$\frac{a-c}{d}=\frac{a-e}{f} \quad \text{и} \quad \frac{c-d}{c}=\frac{b-f}{e}.$$

Геометрический смысл этих равенств ясен: если они соблюдены, то четыре из пяти заданных точек лежат на одной прямой. Кривая второго порядка в этом случае представляет совокупность двух прямых, из которых одна проходит через указанные четыре точки, а вторая — любая прямая, проходящая через пятую точку. Так Эйлер показывает, что парадокс Крамера может иметь место и для кривых второго порядка.

[16], стр. 52. К последней фразе необходимо сделать две оговорки. Заявление, что в дальнейшем будут рассмотрены свойства конических сечений, «которые получаются из их уравнения без иных вспомогательных средств», не совсем точно: Эйлер не раз обращается к чертежу и использует некоторые геометрические построения. Вместе с тем, вряд ли надо понимать заявление, что «эти свойства не могут быть полностью выведены из единого начала» в абсолютном смысле. Весь контекст показывает, что здесь имеется в виду лишь степень целесообразности применения тех или иных методов. Как в пятой, так и в шестой главе Эйлер выводит те свойства конических сечений, которые достаточно удобно получаются преимущественно алгебраическими средствами «из их уравнения». При этом Эйлер добился таких результатов, которые вполне оправдывают следующую оценку: Лопиталем и Эйлером «алгебраическое изучение конических сечений было продвинуто настолько далеко, насколько это возможно без применения какого-либо нового метода» [2]) (что произошло в XIX в. —

[1]) Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, Histoire de l'Académie des Sciences de Berlin, Année 1748, т. 4, 219—233=Opera omnia, сер. 1, т. 26, 37—49. См. Б. Н. Делоне, Эйлер как геометр (в сб. «Леонард Эйлер», М., 1958, 145—150).

[2]) J. L. Coolidge, A History of conic curves and quadric surfaces, Oxford, 1945, стр. 82.

метод сокращенных обозначений, обобщенные координаты, инварианты и т. д.).

Главы о конических сечениях у Эйлера имеют и некоторую полемическую направленность. Значительное место в них занимает вывод ряда теорем, которые мы находим в «Началах» Ньютона. Там эти теоремы получены геометрическими средствами, и у Ньютона сказывается тенденция ставить геометрические рассуждения выше аналитических. В противовес этому изложение Эйлера должно было показать тому, кто читал «Начала», большие возможности алгебраического метода, метода Декарта и Ферма.

[17], стр. 52. Это утверждение и то, что читаем ниже, в § 131, которым начинается гл. VI, может внушить читателю, что результаты настоящей главы остаются в силе для любой кривой второго порядка. Однако некоторые выводы в гл. V таковы, что они опираются на более узкие допущения, и надо иметь в виду, что кое-где парабола, например, исключается из рассмотрения. Но Эйлер вводит «подразделение кривых второго порядка на роды» лишь в следующей главе, поэтому здесь ему трудно оговаривать особые случаи. Возвращаться же потом к уже разобранным вопросам он не стал.

[18], стр. 54. Ниже, в § 101, Эйлер простейшим образом получает уравнение диаметра, откуда он мог бы сразу получить результаты предыдущего параграфа.

[19], стр. 55. Называя произведение двух отрезков прямоугольником (построенным на этих отрезках), Эйлер использует терминологию, которую можно было считать архаичной и в его время.

[20], стр. 58. Слово «трапеция» употреблено здесь в смысле «четырехугольник»; параллельность двух каких-либо сторон фигуры не предполагается.

[21], стр. 58. См. примечание [19].

[22], стр. 68. Эйлер здесь пользуется терминологией, которая восходит к «Началам» Евклида, а в XVII и XVIII вв. еще сохранялась в математическом обиходе. Если исходная пропорция есть $a:b=c:d$, то переход к различным производным от нее пропорциям обозначался специальными терминами, преимущественно латинскими, например componendo («объединяя») означало пропорцию $(a+b):b=(c+d):d$, convertendo («обращая») означало пропорцию $b:a=d:c$ и т. д.

[23], стр. 71. Результаты Ньютона изложены в Отделах IV и V его «Начал» (русский перевод А. Н. Крылова см. в т. VII Собрания трудов академика А. Н. Крылова, М.—Л., 1936). Метод изложения у Ньютона чисто геометрический. См. выше, [16].

[24], стр. 77. Классификация Эйлера не включает случаев вырождения, хотя он явно указывает на них в предыдущем изложении. Это естественно при его трактовке понятия непрерывной функции, соответственно, непрерывной кривой.

[25], стр. 81. Доказанная здесь теорема (*прямая, соединяющая данную точку на эллипсе с концом большой оси, параллельна прямой, проведенной через конец малой оси и конец диаметра, сопряженного с диаметром, исходящим из данной точки*), по-видимому, принадлежит Эйлеру.

[26], стр. 84. В упомянутой выше книге Кулидж пишет по поводу доказанного положения, что оно «как будто ошибочно» (it seems to be erroneous statement), так как оно высказано для любого конического сечения, тогда как оно имеет место лишь для параболы. Этот упрек лишен основания, потому что, начиная с § 148, Эйлер явно занимается именно параболой.

[27], стр. 88. Теорема, которая выражается этим равенством, по-видимому, принадлежит Эйлеру.

[28], стр. 94. Слова «либо x, либо y...» могут вызвать представление, будто возможно в данном случае обращение в бесконечность одной координаты без обращения в бесконечность другой. Однако из допущения, что простые действительные множители не входят в состав формы, образованной членами высшего измерения в уравнении кривой, следует, что постоянные коэффициенты при $x^n(\xi)$ и при $y^n(\alpha)$ оба отличны от нуля. Поэтому при всяком конечном значении x все соответствующие значения y конечны, и при всяком конечном значении y конечны все соответствующие значения x.

[29], стр. 94. Рассуждения этого и предыдущего параграфов типичны для всей гл. VII. Нетрудно усмотреть слабое место такой методики исследования бесконечных ветвей (хотя она проста и наглядна): без дополнительного исследования не выявляется порядок бесконечности (или малости) отдельных слагаемых, поэтому при разложении в ряд для искомой ветви функции необходимо применяться в каждом случае к особенностям данной задачи. Эйлер сначала не принимал этого во внимание, поэтому в гл. VII у него встречаются погрешности. Они выявлены А. Шпайзером и указаны в дальнейших примечаниях. В следующей главе при исследовании асимптот применяются приемы, равносильные использованию диаграммы Ньютона, и там все в порядке. Эйлер, несомненно, заметил допущенные им в гл. VII ошибки. Рукопись «Введения» около трех лет пролежала у издателя, так что Эйлер мог внести исправления. Почему он этого не сделал? Объяснение могут дать те его высказывания, которые приведены (по поводу другой его ошибки) в примечании [54].

[30], стр. 95. У Эйлера не раз встречается такое выражение: «конечная величина или нуль». Оно, вероятно, обусловлено его трактовкой бесконечно малых как нулей.

[31], стр. 95. Определения асимптоты Эйлер не дает. Дальше он вводит в рассмотрение и криволинейные асимптоты. Если сопоставить все то, что сказано об асимптотах во «Введении», то придем к такому определению: пусть $y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\ldots$ есть уравнение ветви алгебраической кривой в окрестности $x=\infty$ $(\alpha>\beta>\ldots)$; тогда $y=Ax^{\alpha}$, $y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}$, ... суть асимптоты кривой.

[32], стр. 97. При выводе этого разложения допущена ошибка, и оно не является полным. Если придерживаться основного метода Эйлера,

то применительно к рассматриваемому случаю его надо видоизменить следующим образом. Из соотношения, полученного в § 178 частичным, так сказать, переходом к пределу $\left(\frac{S}{M}, \frac{T}{M}, \ldots\right.$ уже отброшены при $x=\infty$, $y=\infty$, но в остальных членах мы еще не положили при этом $\left.\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\right)$, видно, что порядок $ay-bx$ по отношению к «главной» величине $\mu y+\nu x$ (по ней ведется разложение) равен $^1/_2$. Поэтому, если мы хотим разложить правую часть по убывающим степеням до постоянного слагаемого включительно, надо представить разложение $\frac{Q}{M(\mu y+\nu x)}$ по $ay-bx$ (это, собственно, надо иметь в виду, когда Эйлер говорит о замене в этой дроби x на a, y на b) полнее, а именно, в виде

$$A+C(\mu y+\nu x)^{-\frac{1}{2}}+D(\mu y+\nu x)^{-1}+\ldots$$

Отсюда получаем искомое разложение в виде

$$-A(\mu y+\nu x)-C\sqrt{\mu y+\nu x}-(B+D)+\ldots$$

В тексте, следовательно, отсутствует слагаемое $C\sqrt{\mu y+\nu x}$ и неверно указан способ определения постоянного слагаемого.

Эйлер уже вскоре после отсылки рукописи «Введения» издателю заметил ошибки, допущенные им при исследовании бесконечных ветвей кривых (они указаны, кроме настоящего примечания, в трех следующих; все эти дефектные места выявлены А. Шпайзером при переиздании «Введения» в Полном собрании сочинений Эйлера). Он писал об этом Г. Крамеру (15 октября 1750 г.), объясняя заодно причину своих ошибок[1]):

«...я не принял всех предосторожностей, которые необходимы, чтобы как следует разобрать вопрос о бесконечных ветвях и... следуя моему методу, я часто даже мог ошибиться в вопросе о существовании таких ветвей. Причина заключается в том, что я не принимал во внимание последующие члены в уравнениях, которые выражают природу бесконечных ветвей или кратных точек [по последнему вопросу см. примечание [54] — *И. П.*]. Я рассматривал эти члены как исчезающие по сравнению с первыми, каковы они в действительности, но я при этом не заметил, что иной раз они могут становиться мнимыми. Верно то, что я заметил мою ошибку еще до опубликования моей книги, где я даже пытался внести исправление в связи с вопросом о точках возврата типа клюва, но это вовсе не оправдывает моего метода (mais cela ne sert rien à justifier ma méthode)». Заключительное замечание Эйлера нельзя принимать в буквальном смысле, как видно из вышеизложенного. Что же касается сути объяснений Эйлера, то есть ссылки на появление мнимостей в последующих членах его разложений, см. ниже примечание [54].

[33], стр. 97. Согласно тому, что указано в предыдущем примечании, действительно получаем асимптоту в виде параболы, но параболы, смещенной параллельно параболе, указанной в тексте.

---

1) Редактор настоящего издания имел возможность познакомиться с неопубликованными письмами Эйлера к Г. Крамеру (на франц. языке) по фотокопиям, любезно предоставленным ему А. П. Юшкевичем.

[34], стр. 98. Здесь при определении коэффициентов разложения по степеням $ay+bx$ надо внести поправки, аналогичные тем, которые надо сделать в § 179 (см. [32]).

[35], стр. 99. Несмотря на допущенные погрешности, общие выводы Эйлера здесь и дальше в этой главе остаются в силе; надо только определять вид разложений и коэффициенты в них, учитывая сказанное в примечании [32].

[36], стр. 108. Здесь подробно разъясняется замена координат, которая была уже использована в предыдущей главе (см. § 183). Это — крайне редкое у Эйлера нарушение методичности изложения. Оно является дополнительным доказательством того, что Введение писалось почти без отделки.

[37], стр. 108. Как видно из нижеследующей записи, это означает, что в выражении функции M все коэффициенты (которые, разумеется, не предполагаются равными между собою) обозначены одной и той же буквой α, все коэффициенты в Q обозначены одной и той же буквой β и т. д. Эйлер еще не пользуется индексами при буквах, поэтому ему приходится прибегать к таким приемам.

[38], стр. 122. Таким образом, показано, что развитый в предыдущих главах метод исследования бесконечных ветвей дает в применении к коническим сечениям классификацию Аполлония. Это дает основание для использования того же метода, чтобы получить классификацию кривых третьего порядка.

[39], стр. 128. См. примечание [11]. Классификация Ньютона была пополнена Стирлингом (1717 г.) и Стоном (1740 г.), которые, руководствуясь теми же принципами, что и Ньютон, довели число видов кривых третьего порядка до 78. Дополнительные шесть видов, указанные ими, Эйлер не принимает во внимание.

[40], стр. 130. В следующей главе Эйлер дает несколько упрощенные уравнения своих 16 видов, переходя к косоугольным координатам.

[41], стр. 130. Теория кривых третьего порядка, которую начал разрабатывать Ньютон, была предметом ряда работ еще до того, как ею занялся Эйлер. Важнейшие результаты, в том числе доказательство всех утверждений Ньютона (в его «Перечислении» доказательства не приводятся), принадлежат Стирлингу, Маклорену, Николю, Клеро, Гюа де Мальву, Стону. В книге Г. Крамера «Введение в анализ алгебраических кривых» (1750 г.), напечатанной двумя годами позже «Введения», классификация кривых третьего (и высшего) порядка основана на том же принципе, что и у Эйлера. Крамер выделяет те же четыре основных случая, какие указаны Эйлером в § 223, и подразделяет их затем не на 16, а на 14 видов. Вообще надо согласиться с оценкой Д. Д. Мордухай-Болтовского, что как Эйлер, так и Крамер не уходят далеко от Ньютона. Все же следует указать, что классификация Эйлера — это классификация кривых по их поведению относительно произвольной прямой с точки зрения проективной геометрии, и она проведена вполне последовательно.

Принципиально новый шаг был сделан лишь в тридцатых годах XIX в. Плюккером, который ввел классификацию алгебраических кривых по их особенностям, используя открытые им соотношения. К тому же Плюккер мог применить более сильные алгебраические средства, чем те, которые были в распоряжении Эйлера.

Теории кривых третьего порядка в XIX столетии было посвящено огромное количество работ, причем были введены новые принципы классификации таких кривых. Общее представление об этих работах можно получить по немецкой «Энциклопедии математических наук» и по книге Лориа (Spezielle algebraische und transzendenton Curven). И до сих пор изредка появляются работы на эту тему.

Мы хотим еще обратить внимание читателя на последнюю фразу в § 238. Ясно, что, заканчивая гл. IX, Эйлер еще не имел в виду включить в книгу исследование кривых четвертого порядка, что составило гл. XI.

[42], стр. 131. Эйлер приступает здесь к исследованию кривых третьего порядка по тому же плану, которому он следовал в теории кривых второго порядка. При этом естественным образом обобщаются такие введенные для конических сечений понятия, как диаметр, центр кривой и т. п. Все это идет от Ньютона (см. вступительную статью). Для Эйлера характерно то, как он систематически извлекает геометрические следствия из зависимостей между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения.

[43], стр. 136. Это свойство, использованное далее в связи с классификацией кривых третьего порядка, указано Ньютоном в «Перечислении...». Из него можно получить ряд важных следствий, например теорему, что прямая, проходящая через две точки перегиба кривой третьего порядка, проходит через третью точку перегиба кривой. Эта теорема, которая имеется у Гюа де Мальва, неявно содержится в выводах § 251. Аналогичное свойство имеет место для кривых высших порядков.

[44], стр. 137. Кажется, Эйлер уловил то свойство кривых, которое в общей форме было указано в следующем столетии Мебиусом и Штаудтом: всякая ветвь алгебраической кривой либо четная, либо нечетная, то есть число точек пересечения такой ветви с любой прямой имеет одну и ту же четность.

[45], стр. 139. Имеется в виду все то же «Перечисление...». В данной там классификации Ньютон каждый раз отмечает наличие или отсутствие диаметра у рассматриваемых им видов.

[46], стр. 141. Как указал А. Шпайзер, то, что изложено в § 259, было отправным для некоторых исследований Плюккера, изложенных последним в книге Theorie der algebraischen Curven, 1839.

[47], стр. 142. Как указано выше, в первоначальный план Эйлера исследование кривых четвертого порядка не входило. До него этим вопросом в общем виде занимался Бражелонь (1688—1744), работы которого появились в 1730—1732 гг. Единой систематизации кривых четвертого порядка у этого автора нет. Эйлер вряд ли был знаком с результатами Бражелоня, когда писал Введение. Во всяком случае, гл. XI целиком оригинальна по результатам. Метод — тот же, что и в предыдущей главе. На той же основе построена классификация кривых четвертого порядка у Крамера,

который пошел и дальше, рассмотрев также кривые пятого порядка. Классификацию, сходную с эйлеровой, дал для кривых четвертого порядка Плюккер в указанной выше (примечание [46]) книге. А. Шпайзер проверил данную Эйлером классификацию по старшему члену соответствующих разложений и внес в нее ряд поправок, указанных в тексте.

[48], стр. 152. В этом параграфе Эйлер сформулировал задачу, которой он занимается в настоящей главе, — исследование формы кривых на конечном расстоянии. Он разбирает следующие случаи: (некоторые) кривые третьего порядка; кривые, в уравнение которых одна из координат входит только в первой степени; кривые, в уравнение которых одна из координат входит во второй степени.

[49], стр. 153. Здесь и ниже равенства являются приближенными: отбрасываются высшие степени малой величины x и $\sqrt{b^2+\alpha}$ при малом α заменяется выражением $b+\frac{\alpha}{2}$.

[50], стр. 155. Все в том же «Перечислении...».

[51], стр. 156. Здесь Эйлер говорит об острие как о двойной точке, что согласуется с современной классификацией особых точек алгебраической кривой. С этим не вполне согласуется сказанное об острие в § 277.

[52], стр. 161. Здесь впервые в этой книге мы встречаем прямую отсылку к той части курса анализа бесконечных, введением к которой должен был быть данный том. Это должна была быть третья часть «Дифференциального исчисления» Эйлера — геометрические приложения. Работа над ней была начата, но вскоре прервана, и закончить ее Эйлер уже не смог. То, что было им написано, впервые увидело свет в 1862 г., когда Петербургская академия издала его Opera posthuma.

[53], стр. 172. Предполагается, что уже проделан переход от координат t, u к координатам r, s по формулам, которые указаны в следующем параграфе. Если отбросить в уравнении кривой члены степени выше второй, записав его в виде

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2,$$

то в координатах r, s получаем уравнение

$$0=-\sqrt{A^2+B^2}\,r+\frac{EB^2+DAB+CA^2}{A^2+B^2}r^2+$$
$$+\frac{2EAB+DA^2-DB^2-2CAB}{A^2+B^2}rs+\frac{EA^2-DAB+CB^2}{A^2+B^2}s^2.$$

Отсюда следует, что r высшего порядка малости по сравнению с s, и это позволяет пренебречь членами с r^2 и rs. Поэтому уравнению кривой можно придать вид $s^2=\alpha r$, где

$$\alpha=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+CB^2}$$

равно удвоенному радиусу кривизны.

Последующие рассуждения до конца параграфа воспроизводят ход мыслей Гюа де Мальва. См. в связи с этим следующее примечание.

[54], стр. 179. Вопрос об острие типа птичьего клюва, как тогда выражались (точка возврата второго рода), к тому времени, когда им занялся Эйлер, имел следующую историю. Лопиталь в своем «Анализе бесконечно малых» [1]) указал на существование такой особенности у кривых и показал, как она может быть образована. Эйлер описывает построение Лопиталя в § 333, где характеризует его как механическое. Гюа де Мальв [2]) выступил с возражениями не против соображений Лопиталя, а против их применимости к алгебраическим кривым. Как формулировал в другом месте Эйлер, Гюа считает непозволительным «судить о непрерывности кривой на основании непрерывности ее описания. Гюа признает только аналитическое уравнение (для картезианца Гюа это означает алгебраическое уравнение — применительно к кривой. — *И. П.*), из которого можно извлечь точные сведения о форме кривой, о числе ее ветвей и об их непрерывности» [3]). А исходя из уравнения кривой, Гюа рассуждает следующим образом. Выберем в качестве оси абсцисс касательную к кривой в исследуемой точке и поместим в этой точке начало координат. Тогда разложение ординаты y по степеням абсциссы x будет вида $y=\frac{x^2}{2a}\pm Ax^m\pm Bx^n\pm\ldots$, где $m, n, \ldots$ — числа целые или дробные, причем $2<m<n\ldots$ Здесь a — радиус кривизны в начале координат (он предполагается конечным). При малых x можно приближенно принять $y=\frac{x^2}{2a}$, так что $y(-x)=y(x)$. Таким образом, при конечном радиусе кривизны точка возврата второго рода исключается.

Когда Эйлер писал гл. XIV, он не сомневался в правильности рассуждений Гюа де Мальва, и его высказывания в §§ 319—333 достаточно полно отражают взгляды этого автора.

Эйлер заметил свою ошибку вскоре после отсылки «Введения» в Женеву издателю Буске. Уже в письме к Г. Крамеру от 15 декабря 1744 г. [4]) он сообщил текст примечания к § 333, в котором дается пример, опровергающий выводы Гюа де Мальва. Эйлер писал: «Так как в тексте ничего нельзя изменить без полной переделки этого места (sans renverser cet endroit tout à fait), я прошу только добавить на полях или подстрочно примечание, выраженное примерно так...». Но Буске почему-то вставил это примечание в основной текст, в заключение § 333 (в Opera omnia и в нашем издании размещение материала соответствует указаниям Эйлера). Позже Эйлер писал Даламберу по этому поводу, что он просил поместить примечание подстрочно и что он очень раздосадован введением примечания в текст, где оно в резком противоречии как с тем, что предшествует, так и с тем, что следует за ним.

Когда Даламбер в 1748 г. получил от Эйлера в подарок «Введение», он ответил ему письмом, в котором высказал сомнения по поводу убедительности приведенного Эйлером примера. Дальше Даламбер писал, что он выяснил тот же вопрос с помощью примера $y=x^2+x^2\sqrt{x}$, и этот пример

---

[1]) Analyse des infiniments petits pour l'intillegeance des lignes courbes, P., 1696.

[2]) Usage de l'analyse de Descartes pour de'couvrir, sans le secour du calcul differentiel, les propriétés... des lignes géométriques de tous les ordres, P., 1740.

[3]) E u l e r, Opera omnia, ser. I, vol. XXVII, стр. 237, в работе Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de d'Hopital.

[4]) Цитируем по фотокопии этого неопубликованного письма. См. выше, примечание [32].

уже не может дать повода для возражений. Ссылался Даламбер на свою статью De l'intégration des fonctions rationnelles, помещенную в Histoire de l'Académie de Berlin, (за 1746 г.).

Ответное письмо Эйлера весьма любопытно. По сути вопроса он сообщил, что в свое время он «сильно сомневался, существуют ли точки возврата второго рода», и даже пришел к отрицательному выводу. «Когде же я полностью уяснил себе этот вопрос, — продолжает Эйлер, — я послал господину Буске следующее примечание, в котором я показал, что такие точки существуют, на примере кривой четвертого порядка $y=\sqrt{x}+\sqrt{x\sqrt{x}}$ (относительно чего у Вас не будет никаких сомнений, когда Вы представите ее в рациональном виде, приведя [ее уравнение] к $0=y^4-2xy^2+4x^2y+$ $+x^2-x^3$.»...

Характерно для Эйлера то, что он заявляет дальше (в том же письме): «Я предпочел бы оставить изложение этого вопроса в моем произведении неисправленным, чем вносить поправки, которые я нашел только некоторое время спустя, тем более, что я мог воспользоваться Вашими разъяснениями, — из опасения создать впечатление, что я хочу присвоить открытия, которые не я первый сделал»[1]. Нет сомнения, что А. Шпайзер прав, считая последнее заявление вызванным тем, что в письме Даламбера Эйлер усмотрел притязания на приоритет, а ко всяким спорам такого рода Эйлер питал отвращение. Но вместе с тем оно, независимо от адресата, для которого предназначалось, является точным выражением взглядов Эйлера. Он никогда не старался скрыть путь, приведший его к тем или иным выводам, рассказывал и о тупиках, в какие ему случалось попадать, если это представлялось поучительным. Так было и в нашем вопросе. Ведь Эйлер послал свое дополнительное примечание Буске до переписки с Даламбером, а если бы он желал утаить свою ошибку, ему надо было только переделать или просто опустить несколько страниц и подробнее разъяснить свой пример, опровергающий выводы Гюа де Мальва.

В уже цитированной нами работе Эйлер показывает, в чем заключается ошибочность рассуждений Гюа де Мальва. По Эйлеру дело в том, что Гюа не учитывает мнимостей. Например, $y=x+x^2\sqrt{-1}$ при вещественных значениях координат дает точку (0, 0), но если отбросить высшую степень x, получим прямую. Если $y=x+x\sqrt{x}$, то, оставляя низшую степень x, снова получим прямую $y=x$, а это вовсе не передает хода кривой вблизи начала координат, где она имеет точку возврата первого рода. Так Эйлер показывает, что отбрасывание членов высших степеней в разложении может повести к совершенно неправильным заключениям о виде кривой.

Эйлер обобщает приведенный выше пример, исследуя вблизи начала координат ход кривых с уравнением вида $y=\alpha x+\beta x^{1+\frac{m}{n}}$, где m — нечетное, n—четное число. Затем такому же исследованию подвергаются кривые $y=\alpha x^2+\beta x^2\sqrt{x}$ (в порядке обобщения), $y=\alpha x^2+\beta x^{2+\frac{m}{n}}$, $y=\alpha x^k+\beta x^{k+\frac{m}{n}}$ (дальнейшее обобщение: k, m, n — целые числа). В § 19 работы появляется пример, данный во «Введении» в виде $y=\alpha\sqrt{x}+\beta\sqrt{x\sqrt{x}}$. Эйлер говорит, что это кривая четвертого порядка, которая, видимо, является наиболее простой кривой, обладающей точкой возврата второго рода. Отчасти это подтверждается результатом следующего параграфа, что кри-

[1]) См. Henry, Lettres inédites d'Euler à d'Alembert, 1886, p. 12 (также в Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze mat. e fis., t. XIX, 1886).

вые третьего порядка не могут иметь такой точки возврата. Затем Эйлер переходит к обобщению своего примера и рассматривает кривые $y = \alpha x^{\frac{1}{k}} + \beta x^{\frac{m+n}{nk}}$. Работа заканчивается общими замечаниями о способах выявления точек возврата второго рода, выводом условий того, чтобы кривая четвертого порядка имела такую точку, затем, как пример той же методики, дан вывод аналогичных условий для кривой пятого порядка.

Разумеется, эта работа Эйлера не исчерпывает вопроса. Все обстоятельства дела можно выяснить, если обратиться к общим методам разложения алгебраической функции в окрестности особой точки — разложениям по дробным степеням независимого переменного, что содержится в любом современном курсе алгебраической геометрии. Но то, что, собственно, было предметом спора, было исчерпывающим образом разъяснено.

[55], стр. 179. Последние два параграфа являются развитием тех взглядов, об отказе от которых Эйлер заявил в своем примечании к § 333 (см. примечание [54]).

[56], стр. 180. Здесь Эйлер говорит о подобных частях линии в том же смысле, в каком выше и ниже говорит о «равных и подобных».

[57], стр. 180. Ниже (§ 341) Эйлер вводит специальные термины для обозначения симметрии относительно оси и относительно центра.

[58], стр. 183. Эйлер применял термин «диаметр» в более общем смысле— для обозначения прямых, делящих пополам все параллельные между собою хорды и встречающих эти хорды под одним и тем же, вообще отличным от прямого, углом — не только в теории конических сечений. Такими косоугольными диаметрами он занимается в работе «О некоторых свойствах конических сечений, которые присущи бесконечно многим другим кривым» [1]) (1745 г.). К этой работе примыкает содержание ряда параграфов следующей главы.

[59], стр. 183. Такими же соображениями Эйлер пользуется в работе, указанной в предыдущем примечании.

[60], стр. 191. См. примечание [58].

[61], стр. 197. См. в первой части «Введения» гл. X, § 166, где эти формулы (Ньютона) даны для общего случая в несколько отличном виде: сумма вторых степеней корней (s_2) выражена через сумму первых степеней (s_1) и коэффициенты уравнения, s_3 — через s_2, s_1 и коэффициенты и т. д.

[62], стр. 199. Казалось бы, составлением этого уравнения нельзя ограничиться: поскольку y обозначает здесь корень исходного уравнения третьей степени, надо еще обратиться к результанту этих двух уравнений. Однако А. Шпайзер показал, что Эйлер вполне прав, заканчивая на этом

---

[1]) Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes, Opera omnia, ser. I, vol. XXVII, 51—73.

изложение: можно строго доказать, что заключительное уравнение § 378 есть уравнение степени, кратной трем, его корни распадаются на группы по три корня в каждой, и для каждой такой группы сумма n-х степеней равна a^n.

[63], стр. 202. Отсюда и до конца главы Эйлер занимается решениями функционального уравнения $f(x)f(-x) = a^2$, соответствующими в поставленной им задаче алгебраическим кривым.

[64], стр. 206. Итак, Эйлер здесь отчетливо выразил ту мысль, что «имеется много других приемов для выражения природы кривых линий», кроме декартовых координат, и переходит к полярным координатам. Содержание настоящей главы и состоит в основном в рассмотрении в полярных координатах задач, аналогичных разобранным в гл. XVI. Эти координаты и тогда уже имели долгую историю: в сущности, их применял уже Архимед. В XVII в. ими пользовались достаточно широко. Однако систематическое применение их для изучения класса кривых, отличных от спиралей, впервые находим в эйлеровом «Введении».

[65], стр. 207. Эйлер считает, что радиус-вектор изменяет знак при изменении его направления на противоположное.

[66], стр. 218. «Конхоида древних» была изобретена Никомедом для решения задачи о трисекции угла (методом «вставок»). Никомед дал также прибор для механического описывания конхоиды. После древнегреческих математиков конхоидой много занимались, начиная с XVII в. Декарт дал способ построения нормали к этой кривой, Роберваль решил вопрос о ее квадратуре и применил к ней свой способ проведения касательных, Ньютон в «Универсальной арифметике» использовал конхоиду для графического решения алгебраических уравнений.

[67], стр. 230. Термин «аффинный» здесь использован впервые. Аффинное преобразование у Эйлера — частный случай аффинных преобразований, согласно современному определению, введенному Мебиусом (в «Барицентрическом исчислении»). В названии главы и ниже Эйлер говорит об affinitas кривых, и это слово можно было бы вполне точно перевести как свойство, менее точно — как сродство или родство.

[68], стр. 238. В этой главе исследуется в общем виде вопрос о числе точек пересечения двух плоских алгебраических кривых, то есть о числе решений системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Методом исследования является исключение одного из неизвестных из рассматриваемой системы. Таким образом, глава относится к теории элиминации. У Эйлера было мало предшественников в этой области, и можно встретиться с мнением, что только он начал ею заниматься. Это с точки зрения историка не верно. В том, что Ньютон занимался такими вопросами, можно не сомневаться, но такое заключение делается лишь на основании «косвенных улик». Однако Гюа де Мальв в книге, на которую мы уже ссылались, дал метод для решения того же вопроса, которым занимается в настоящей главе Эйлер, за восемь лет до напечатания «Введения». Результаты, полученные Эйлером во Введении и в работе 1748 г. по тому же вопросу (см. вводную статью), можно сказать, вытеснили метод Гюа де Мальва из науки.

[69], стр. 238. Построение уравнения в XVII и XVIII вв. означало решение уравнения с помощью построения соответствующих кривых. При этом построение кривых мыслилось не как более или менее точное вычерчивание по точкам, а как указание некоторого регулярного приема, ведущего к цели, примером чего может служить вычерчивание эллипса с помощью нити, закрепленной в фокусах и натягиваемой чертящим острием.

[70], стр. 247. «Чистое уравнение» (встречается и у других авторов XVIII в.)—двучленное уравнение.

[71], стр. 262. Метод исключения, показанный в последних параграфах, изложен с полной отчетливостью, и у читателя не остается никаких сомнений в его общности. Но Эйлер не представляет этот метод в общем виде не потому или не только потому, что это методически излишне. Можно думать, что причиной тому была недостаточная разработанность языка математических обозначений. Индексацией коэффициентов уравнений Эйлер не пользуется, и у него не было аппарата определителей. Для сопоставления напомним, что результат исключения y из двух уравнений третьей степени, приведенный в § 481, компактно записывается в виде

$$\begin{vmatrix} P & Q & R & S & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & R & S & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 \\ 0 & 0 & P & Q & R & S \\ 0 & 0 & p & q & r & s \end{vmatrix} = 0.$$

[72], стр. 256. См. примечание [69]. Построение уравнений под влиянием Декарта долгое время считалось едва ли не главной задачей новой геометрии. У Эйлера построение уравнений занимает вполне второстепенное положение, и это — знамение новой эпохи в развитии аналитической геометрии.

[73], стр. 274. Название «логарифмическая кривая» введено Гюйгенсом (в работе «О причине тяжести»), и Гюйгенс пишет при этом, что такая кривая уже рассматривалась ранее другими авторами. По Вилейтнеру, она появилась около 1640 г. Остается неизвестным, кто ее ввел первым, но после Гюйгенса эта кривая встречается систематически.

[74], стр. 275. Как показывает следующий параграф, Эйлер, когда писал «Введение», был уже близок к тому, чтобы разрешить ряд противоречий и неувязок, которые возникали при попытках расширить область определения логарифмической функции. Полностью он разъяснил для себя вопрос несколько позже — в 1747 г. Его решение изложено в двух работах, из которых одна была напечатана тогда же (De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1749; Opera omnia, ser. I, vol. 17, p. 195), а другая появилась в печати только в 1862 г. (Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, Opera posthuma I, Petropoli, 1862; Opera omnia, ser. I, vol. 19, p. 417).

[75], стр. 277. На закон непрерывности (lex continuitatis) систематически ссылался Лейбниц. Здесь Эйлер, следуя Лейбницу, обращается к этому «закону», чтобы оправдать неверное утверждение о невозможности точек остановки или прекращения у «непрерывных кривых». Такое утверждение неверно и для непрерывных в эйлеровом смысле, то есть для аналитических кривых. А. Шпайзер приводит следующий простой пример. Возьмем аналитическую функцию, которая отображает единичный круг на область, ограниченную простой жордановой кривой, не имеющей касательной, причем область симметрична относительно вещественной оси и содержит ее отрезок от точки a до точки b. Степенной ряд $P(x)$, представляющий такую функцию, имеет вещественные коэффициенты и его нельзя продолжить за единичную окружность. Когда x изменяется от -1 до $+1$, $P(x)$ изменяется от a до b. Следовательно, график $y=P(x)$ начинается в точке $(-1, a)$ и заканчивается в точке $(+1, b)$.

Теперь вернемся к Эйлеру. Позже он обнаружил свою ошибку и в работе Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur, Opera omnia, ser. I, vol. 21, p. 78 он приводит пример кривой линии, заканчивающейся в некоторой точке. От закона непрерывности Лейбница Эйлер тоже отказался.

[76], стр. 280. Трудно указать, кто первый начал рассматривать графики тригонометрических функций. Не как самостоятельный предмет, а попутно они возникали у многих. Например, Роберваль, занимаясь в 30-х гг. XVII в. задачей о циклоиде, пришел к построению кривой, являющейся не чем иным, как синусоидой. Графики обратных тригонометрических функций ввели Лейбниц и старшие Бернулли. Циклоиду впервые находят у мало известного автора де Бувелля (1503 г.), но начал ее изучать Галилей и, независимо от него, французские математики Роберваль и другие. Во Франции ее и называли трохоидой. Эпициклоиды, о которых идет речь ниже, в § 523, известны, собственно, со времен Гиппарха и Птолемея, в астрономической системе которого они служат для объяснения движения планет. В XVII в., когда была подвергнута тщательному исследованию циклоида, началось заодно систематическое изучение эпициклоид и гипоциклоид (Лагир, ссылавшийся на Дезарга, как на своего предшественника, Гюйгенс и др.).

[77], стр. 285. Эйлер первый ввел в рассмотрение вторую ветвь архимедовой спирали, соответствующую отрицательным значениям радиуса вектора. Не все последующие авторы следуют за ним в этом вопросе.

[78], стр. 286. Гиперболическая спираль, по Вилейтнеру, была введена впервые Вариньоном в 1704 г. Логарифмическую спираль ввели первоначально на основе геометрических свойств, не пользуясь понятием логарифма. Ею занимались в XVII в. Торричелли, Декарт, Роберваль, Якоб Бернулли и др.

[79], стр. 288. Золотое правило — не что иное, как определение одного из членов геометрической пропорции по трем остальным.

[80], стр. 301. Эйлер не раз высказывал мнение, что квадратура круга невозможна. Он писал, например, что «длина окружности — трансцендентная величина такого рода, что она не сравнима ни с какими другими величинами, будь то корни или другие трансцендентные». О значении

работ Эйлера для выяснения природы числа π см.: Ф. Рудио, Обзор истории задачи о квадратуре круга (2-е изд. русского перевода С. Н. Бернштейна, М.—Л., 1934, 66—74), статью А. П. Юшкевича «Леонард Эйлер о квадратуре круга», Историко-математические исследования, вып. X, М., 1957, 159—210, а также E. Beutel, Die Quadratur des Kreises, L.—B., 1913.

[81], стр. 305. Здесь дана ссылка на «Разыскания о кривых двоякой кривизны» Клеро (1713—1765), произведение шестнадцатилетнего автора, в котором, как характеризует его А. П. Юшкевич, были заложены настоящие основы трехмерной аналитической и отчасти дифференциальной геометрии. Ни Декарт, ни Ферма не занялись применением метода координат к пространственным задачам. В течение XVII в. мы встречаем использование пространственных координат и составление уравнений простейших поверхностей только эпизодически. В своих ранних работах Эйлер свободно оперирует пространственными координатами, и это неудивительно для ученика Иоганна Бернулли.

Первым систематически исследовал пространственные кривые Клеро. В «Приложении о поверхностях» впервые систематически изложены основы аналитической геометрии в пространстве и общая теория поверхностей второго порядка.

[82], стр. 310. «Параллелепипед, образованный тремя прямыми...» звучит весьма необычно. Имелось в виду, должно быть, то, что этими прямыми определяются соответствующие плоскости, как указано в предыдущей фразе.

[83], стр. 312. В следующих параграфах этой главы Эйлер исследует различные возможные симметрии относительно координатных плоскостей. Все это, вместе взятое, вряд ли можно назвать «первой работой по теории групп», как это делает А. Шпайзер. Но если пользоваться современной терминологией, то таблица подстановок, приведенная в § 18, есть таблица Кэли (для группы восьмого порядка).

[83 bis], стр. 318. Утверждения, содержащиеся в этом параграфе, высказаны в весьма общей форме и нуждаются в более строгом обосновании. Вполне четкое изложение было дано Монжем и Ашеттом (G. Monge et J. N. P. Hachette, Applications d'algèbre à la géométrie, Journal de l'École Polyt., Cahier 11, 1802).

[84], стр. 321. Валлис называл это тело также круговым клином (circular wedge). Он писал об этом теле R. Moray в письме, которое в латинском переводе вошло в Собрание трудов Валлиса (Johannis Wallisii Opera mathematica, Oxoniae, 1693, II, p. 679). Валлис исследовал свой «конусклин» отчасти аналитически, отчасти геометрически. Вывел уравнение этой поверхности и Я. Герман в работе «О поверхностях, выраженных с помощью уравнений, и о различных их свойствах» (De superficiebus ad aequationes locales revocatis variisque earum affectionibus), напечатанной в Commentarii Academiae Petropolitanae за 1732—1733 гг.

[84 bis], стр. 325. Здесь Эйлером введен прием исследования плоских сечений поверхности путем перехода к новой системе координат, в которой плоскость сечения параллельна одной из координатных плоскостей.

Этим приемом Эйлер пользуется и в дальнейшем изложении. Формальное изложение приема улучшено Коши (C a u c h y, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, t. I, 1826). Хессе изложил этот прием в однородных координатах (O. H e s s e, Vorlesungen über analytische Geometrie, 1861).

[85], стр. 326. В дальнейшем все чаще вместо слова поверхность употребляется термин «тело» (corpus, иной раз — solidum), что не отражено в переводе.

[86], стр. 326. Как видно из определения и дальнейшего изложения, Эйлер берет в случае наклонного цилиндра новую плоскость основания, перпендикулярную к оси цилиндра. Его наклонный круговой цилиндр, конечно, является вместе с тем прямым эллиптическим цилиндром, и так он, собственно, и рассматривается. Аналогично этому ставится вопрос о наклонном конусе. Ниже (§ 68) Эйлер пишет: «Я смотрю на дело так, что наклонный конус отличается от прямого лишь тем, что в наклонном сечения, перпендикулярные к оси, являются эллипсами, между тем как в прямом конусе эти сечения суть круги».

[87], стр. 331. Полный синус $= 1$. Разумеется, эта теорема Эйлера сразу получается из общей теоремы о зависимости между площадью плоской фигуры и площадью ее проекции. В дальнейшем изложении Эйлер близок к такому подходу.

[88], стр. 342. В оригинале: De immutatione coordinatarum. Слово immutatio означает изменение, замену. Имеется в виду вопрос о преобразовании ортогональных декартовых координат в пространстве, что впервые обстоятельно было рассмотрено Эйлером. Этим преобразованием здесь нужно заняться, чтобы воспользоваться им в следующей главе при исследовании поверхностей второго порядка. С этим же вопросом Эйлер встретился в своих исследованиях по механике. Представление общего ортогонального преобразования в пространстве с помощью трех углов («углов Эйлера») там оказалось весьма существенным.

[89], стр. 349. В этой главе впервые дано изложение теории поверхностей второго порядка на основе их общего уравнения (случаи вырождения в систему двух плоскостей не рассматриваются по тем же причинам, по каким подобные случаи не рассматривались для кривых второго порядка). См. также вводную статью.

[90], стр. 352. Выведенные условия для того, чтобы вся поверхность находилась на конечном расстоянии, являются условиями положительной определенности соответствующей квадратичной формы.

[91], стр. 353. Проведенная здесь (впервые) классификация поверхностей второго порядка является, собственно, проективной классификацией — по кривой пересечения поверхности с бесконечно удаленной плоскостью. Подразумевается, конечно, что все коэффициенты в уравнении поверхности являются вещественными. Вполне последовательно такая классификация могла быть проведена только после введения Понселе понятия бесконечно удаленной плоскости, и это было сделано Плюккером (J. P l ü c k e r, System der analytischen Geometrie des Raumes, 1846). У Плюккера,

согласно этой классификации, шесть родов поверхностей второго порядка: поверхность пересекается с бесконечно удаленной плоскостью 1) по мнимому коническому сечению; 2) по собственно вещественному коническому сечению; 3) по двум мнимым прямым; 4) по двум вещественным прямым; 5) по двойной прямой; 6) поверхность содержит всю бесконечно удаленную плоскость. Первые пять родов указаны у Эйлера, а шестой, когда мы не имеем собственно поверхности второго порядка, он опускает.

[92], стр. 354. Начиная с этого пункта, Эйлер применяет к классификации поверхностей второго порядка новый принцип — по знакам различных слагаемых, входящих в уравнение поверхности после приведения его левой части к сумме квадратов. Вполне естественно при такой классификации пользоваться однородными координатами. Полностью такая классификация приведена у Плюккера в его System (см. [91]). В зависимости от знаков и числа квадратов, входящих в каноническое представление поверхности, получаются восемь различных случаев, например (в условной записи): $++++$; $++--$; $+++$; $+-$ и т. д. В сочетании с классификацией, указанной в [91], это дает не $6\times8=48$, а только 19 различных родов поверхностей второго порядка, так как некоторые из условий, накладываемых обеими классификациями, оказываются несовместимыми. Те шесть родов поверхностей, к которым в итоге применения обеих классификаций приходит Эйлер (см. ниже, §§ 126, 127), вместе с указанными им попутно «видами» исчерпывают все случаи, когда имеем вещественную поверхность, не вырождающуюся в систему двух плоскостей.

[93], стр. 355. В оригинале — «эллиптоидальный». «Эллиптоид» вместо эллипсоид встречается у Валлиса.

[94], стр. 357. См. соответствующее определение в § 52 Приложения.

[95], стр. 357. До сих пор, насколько нам известно, не было указаний на какого-либо автора, который рассматривал бы гиперболический параболоид до Эйлера. Надо полагать, что этот вид поверхностей второго порядка впервые описан во «Введении».

[96], стр. 357. Здесь идет речь уже о шести родах поверхностей второго порядка, что находится только в формальном противоречии с тем, что сказано в § 112. См. примечание [92].

[97], стр. 362. Об аналитическом определении пространственной кривой с помощью двух поверхностей до сих пор в учебниках пишут примерно то же, что мы читаем у Эйлера. Между тем это изложение нельзя признать исчерпывающим. В сущности, таким образом можно решать вопрос об определении пространственной кривой лишь в достаточно малой области. Задавая уравнение двух поверхностей «в целом», можно получить в качестве их пересечения кроме интересующей нас кривой другие геометрические места. Проблема точного определения пространственной кривой с помощью поверхностей применительно к алгебраическим кривым (тогда и поверхности вводятся только алгебраические) была впервые поставлена и решена Кэли (A. C a y l e y, Considérations générales sur les courbes en éspace, Comptes Rendus, т. 74, 1862), позже и независимо от Кэли — Кронекером (L. K r o n e c k e r, Grundzüge einer arithmetischen Theorie

der algebraischen Grössen, Crelle, т. 92, 1882). Оказалось, что в общем случае нужны четыре уравнения в трех координатах, чтобы в трехмерном пространстве определить алгебраическую кривую и только ее.

[98], стр. 365. Это обстоятельство впервые подмечено Эйлером. Нельзя сказать, что оно отмечено во всех современных курсах аналитической геометрии.

[99], стр. 368. Первый том «Введения» нашел свое естественное продолжение в «Дифференциальном исчислении» Эйлера, состоящем из двух частей. Третья часть «Дифференциального исчисления», посвященная геометрическим применениям, была начата Эйлером, но работу над нею он вскоре прекратил. Оставленная им незаконченная рукопись впервые была опубликована в 1862 г. в L. Euleri, Opera posthuma, т. I, стр. 342—402. Она воспроизведена в 29 т. 1-й серии Opera omnia, стр. 334—429. Изложение начинается следующим заявлением: «Хотя в предыдущей книге (т. е. в «Дифференциальном исчислении».— *И. П.*) показаны замечательные применения дифференциального исчисления в самом анализе, но его мощь особенно проявляется в учении о кривых линиях. Ибо это учение настолько расширилось после изобретения дифференциального исчисления, что ранее сделанные в нем открытия стали почти незаметны. Правда, во «Введении в анализ бесконечных» многие свойства кривых линий, которые обычно устанавливаются с помощью дифференциального исчисления, я изложил пользуясь только правилами конечного анализа. Но и там в иных местах довольно ясно ощущается анализ бесконечных, да из самого исследования видно, что если бы те же результаты не были заранее найдены другим методом, то вряд ли их можно было бы обнаружить таким путем».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ГЛАВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ ВО ВТОРОМ ТОМЕ

ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

КНИГА ВТОРАЯ,

в которой содержится теория кривых линий, а также добавление о поверхностях

ПРИЛОЖЕНИЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ