«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

Популярная серия

Э. БЕККЕНБАХ, Р. БЕЛЛМАН

Введение в неравенства

Перевод с английского
Р. А. Лукацкой

Под редакцией И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"

Москва 1965

NEW MATHEMATICAL LIBRARY
THE SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP

AN INTRODUCTION TO INEQUALITIES

by

Edwin Beckenbach

University of California, Los Angeles

Richard Bellman

The Rand Corporation

RANDOM HOUSE
New York 1961

УДК 512

Редакция литературы
по математическим наукам

От редактора

Небольшая книжка известных американских ученых и крупных авторитетов в области прикладной математики Эдвина Беккенбаха и Ричарда Беллмана входит в серию „Новая математическая библиотека“, издаваемую так называемой „Исследовательской группой по школьной математике“ Американского математического общества и рассчитанную на самую широкую читательскую аудиторию, начиная со школьников средних классов.

Новые разделы прикладной математики развивались при интенсивном участии Э. Беккенбаха и Р. Беллмана; это вызвало у авторов настоящей книги глубокий интерес и к чисто математическим вопросам теории неравенств, выражением которого явилась их серьезная математическая монография [2][1]) на эту тему, переведенная ныне и на русский язык. Совсем иной характер имеет эта небольшая книжка, в которой авторы ограничиваются минимальным материалом, подобранным, однако, с большим вкусом и способным заинтересовать начинающего читателя.

Отличие этой книги от всех родственных изданий, имеющихся на русском языке, — например, учебника Г. Л. Невяжского [3], брошюры П. П. Коровкина [4] или задачников В. О. Кречмара [6] и Д. О. Шклярского и др. [5] — состоит в большом внимании, уделяемом авторами принципиальным основам теории неравенств; это внимание, как оказалось, может не противоречить ни элементарному характеру книги, ни живости изложения. Впрочем,

---

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы, помещенному на стр. 162—163.

найдутся, вероятно, и такие читатели, которых последние три главы книги, посвященные конкретным примерам неравенств и их приложениям, заинтересуют больше, чем первые три главы, имеющие несколько более формальный характер. Этим читателям мы рекомендуем не задерживаться особенно на первых главах книги, от которых последние главы почти не зависят.

Книга содержит ряд задач и упражнений, к которым в конце книги даны ответы и указания (иногда — полные решения); число этих задач не очень велико, но достаточно для того, чтобы стимулировать активность читателя и предоставить ему возможность самоконтроля. Она может быть использована в работе школьных математических кружков; ее хочется рекомендовать всем интересующимся математикой учащимся старших классов, а также преподавателям средних школ и студентам педагогических институтов. В конце книги имеется составленный редактором список дополнительной литературы по теме книги.

И. М. Яглом

Предисловие

Математику называют тавтологической наукой: другими словами, про математиков говорят, что они тратят время на доказательство того, что предметы равны самим себе. Это утверждение (свойственное философам) весьма неточно по двум причинам. Во-первых, математика, несмотря на свойственный ей научный язык, не является наукой; скорее ее можно назвать искусством, поскольку математическое творчество родственно художественному творчеству. Во-вторых, основные результаты математики чаще выражаются *неравенствами*, а не *равенствами*.

Нижеследующие страницы представляют вам три аспекта теории неравенств. Во-первых, гл. I, II и III посвящены аксиоматическому аспекту теории. Во-вторых, в гл. IV результаты предыдущих глав используются для вывода основных неравенств математического анализа, неравенств, которые на каждом шагу используются в практической работе математика. В гл. V мы показываем, каким образом можно использовать эти результаты для получения ряда интересных и важных экстремальных (т. е. связанных с задачами на отыскание наибольших и наименьших значений) свойств „симметричных" геометрических фигур: квадрата, куба, равностороннего треугольника и т. д. Наконец, в гл. VI изучены некоторые свойства расстояния и рассмотрены некоторые необычные варианты введения расстояния между двумя точками.

Таким образом, книга может удовлетворить любому вкусу. Материал изложен так, что книгу можно читать последовательно или отдельными частями. Некоторые читатели захотят овладеть аксиоматическим подходом, играющим столь фундаментальную роль в высшей математике — они могут использовать для этого первые три главы книги. Отметим заодно, что в гл. III приводится много графиков, тесно связанных с неравенствами и разъясняющих их. Другие читатели предпочтут считать эти результаты известными и сразу обратятся к чисто аналитическим выводам; им больше придется по вкусу гл. IV. Найдутся и такие читатели, которые заинтересуются разнообразными примерами применения элементарных неравенств к задачам, которые обычно решаются методами интегрального и дифференциального исчисления; этим читателям предназначена гл. V. Читателей же, интересующихся обобщениями привычных понятий и выводов, привлечет анализ некоторых необычных „неевклидовых" расстояний, проведенный в гл. VI.

Тем же, у кого разгорится аппетит при чтении этой элементарной книги, мы посоветуем обратиться к классическому трактату „Неравенства" Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда и Г. Полиа [1]. Более свежей является имеющая то же название книга Э. Ф. Беккенбаха и Р. Беллмана [2].

Э. Ф. Б.
Р. Б.

Санта-Моника, Калифорния

ГЛАВА I

Основные положения

§ 1. Отношение „больше“

Вспомним, что символ „$>$“ означает „больше“. Тогда мы сможем немедленно ответить на вопрос: правильно ли, что $3 > 2$? Конечно, правильно.

Но правильно ли, что $-3 > -2$? Можно сказать, что -3 „большее отрицательное число“, чем -2. Но это утверждение не является ответом на поставленный вопрос. Если действительные числа (положительные и

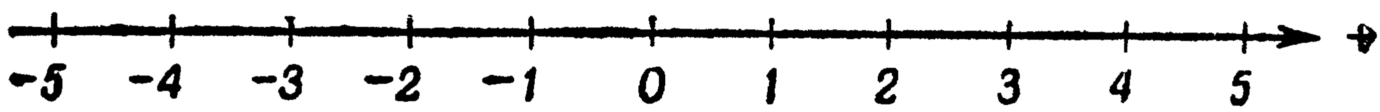


Рис. 1. Числовая прямая.

отрицательные, рациональные и иррациональные числа, а также нуль) изображены геометрически обычным способом в виде точек горизонтальной числовой прямой, направленной вправо, как показано на рис. 1, то при движении вдоль прямой слева направо числа будут появляться в порядке их возрастания. Точка, изображающая -2, расположена **правее** точки, изображающей -3; поэтому следует считать, что $-2 > -3$. Аналогично

$$4 > -4; \quad 3 > 2; \quad 0 > -2; \quad -1 > -2; \quad 1 > 0. \tag{1.1}$$

Таким образом, мы имеем следующее геометрическое правило для определения неравенства:

Пусть a и b — какие-нибудь два действительных числа, изображенных точками горизонтальной числовой прямой, направленной слева направо. Тогда $a > b$ в том и только том случае, когда точка, изо-

бражающая число a, лежит правее точки, изображающей число b.

Поэтому, если вы скажете, что $-3>-2$ или что $-300>-2$, то это будет противоречить нашему правилу, т. е. будет неверно.

Имея дело с неравенствами, часто предпочтительно и даже необходимо действовать алгебраически, а не графически. Если за основное понятие принять понятие положительного числа, то вышеприведенное геометрическое правило можно будет заменить следующим простым алгебраическим правилом:

Определение. *Пусть a и b — какие-нибудь два действительных числа. Тогда $a>b$ в том и только том случае, когда число $a-b$ положительно.*

Так, если $a=-2$, а $b=-3$, то разность $a-b=$ $=-2-(-3)=1$ положительна. Поэтому $-2>-3$, как и было установлено выше с помощью геометрических рассмотрений. Вы можете проверить неравенства (1.1), используя этот алгебраический метод, основанный на вычитании чисел, а также подтвердить каждое из следующих неравенств как геометрическим, так и алгебраическим путем:

$$\pi>3; \quad 2>0; \quad 1>-9; \quad \sqrt{2}>1; \quad -\frac{1}{2}>-40.$$

§ 2. Положительные числа, отрицательные числа и нуль

В предыдущем параграфе мы определили неравенство $a>b$ при помощи понятия положительного числа. Множество P всех положительных чисел, аналогичное ему множество N всех отрицательных чисел, а также множество O, содержащее единственное число 0, играют существенную роль в изучении неравенств. И действительно, хотя мы, разумеется, будем свободно пользоваться общеизвестными алгебраическими свойствами системы действительных чисел, такими, как коммутативные, ассоциативные и дистрибутивный законы [1]), основная идея этой книги за-

[1]) Эти свойства входят в систему аксиом, определяющих поле.

ключается в том, что *в основу всех отношений порядка в системе действительных чисел — т. е. всех алгебраических неравенств — могут быть положены две простые аксиомы, относящиеся к множеству P положительных чисел.* Эти аксиомы будут приведены в следующем параграфе.

Утверждение „a положительно“ мы будем символически записывать так: „$a \in P$“, что читается: „a есть элемент множества P“, или „a принадлежит множеству P“. Так, $5 \in P$, $0 \in O$, $-3 \in N$.

Скажем несколько слов о множествах P, N, O и об их элементах.

Число *нуль*, разумеется, является единственным элементом 0 множества O; оно обладает тем свойством, что

$$a + 0 = a$$

для любого действительного числа a.

Переходя к множеству N отрицательных чисел, важно заметить, что понятие отрицательного числа отличается от понятия противоположного числа[1]. Число, противоположное числу a, определяется как число $-a$, удовлетворяющее равенству

$$(a) + (-a) = 0.$$

Так, если $a = -3$, то число, противоположное a, будет $-(-3) = 3$, так как $(-3) + (3) = 0$. Аналогично, если $a = 0$, то $-a = 0$, так как $0 + 0 = 0$.

Отрицательное число определяется как число, противоположное положительному числу. Так мы знаем, что 3, $^1/_2$, $^9/_5$, π, $\sqrt{2}$ суть элементы множества P положительных чисел; поэтому -3, $-^1/_2$, $-^9/_5$, $-\pi$, $-\sqrt{2}$ являются элементами множества N отрицательных чисел.

Не пытаясь определить основное понятие — понятие положительного числа, перейдем к характеристике этих чисел при помощи двух основных аксиом.

---

[1]) По-английски отрицательное число — a negative number; противоположное число — the negative of a number. — *Прим. ред.*

§ 3. Основные аксиомы учения о неравенствах

Нижеследующие простые предложения, касающиеся множества P положительных чисел, не доказываются; поэтому они называются аксиомами. Интересно отметить, что это единственные предложения, на базе которых (наряду с обычными алгебраическими свойствами системы действительных чисел[1])) может быть развита вся теория неравенств.

Аксиома I. *Если a — действительное число, то справедливо одно и только одно из следующих утверждений: a — единственный элемент 0 множества O; a — элемент множества P положительных чисел; $-a$ — элемент множества P.*

Аксиома II. *Если a и b — элементы множества P положительных чисел, то их сумма $a+b$ и их произведение ab — также элементы множества P.*

Три исключающие друг друга возможности, перечисленные в аксиоме I, устанавливают следующие отношения между произвольным действительным числом a и противоположным ему числом $-a$: если a нуль, то $-a$ тоже нуль, как уже было отмечено; если a положительно, то $-a$ отрицательно на основании данного выше определения отрицательного числа; наконец, если $-a$ положительно, то $a=-(-a)$ должно быть отрицательно опять-таки по определению отрицательного числа. Таким образом, пары противоположных чисел a и $-a$ распределяются по множествам P, N и O так, как показано в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

Распределение пар взаимно противоположных чисел

Число	Множество		
a	P	N	O
$-a$	N	P	O

При геометрическом представлении чисел (рис. 1) точки, изображающие a и $-a$, либо совпадают с точкой, изображающей нуль, либо лежат по разные стороны от этой точки.

---

[1]) См., однако, примечание на стр. 17.

§ 4. Другая формулировка аксиомы I

Аксиома I относится к множеству P положительных чисел; с другой стороны, неравенство $a > b$ было нами определено в терминах множества P. Сформулируем теперь эту аксиому на языке неравенств.

Если a и b — произвольные действительные числа, то их разность $a - b$ — также действительное число; поэтому аксиома I может быть применена к $a - b$. Таким образом, либо $(a - b) \in O$ (т. е. $a = b$), либо $(a - b) \in P$ (т. е. $a > b$), либо $-(a - b) = (b - a) \in P$ (т. е. $b > a$), и эти три возможности взаимно исключают друг друга. Таким образом, следствием аксиомы I является следующее утверждение:

Аксиома I′. *Если a и b — действительные числа, то имеет место одно и только одно из следующих отношений*:

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a.$$

В специальном случае $b = 0$ аксиома I′ утверждает, что если a — действительное число, то выполняется одно и только одно из следующих трех исключающих друг друга положений: $a = 0$ (т. е. $a \in O$); $a > 0$ (т. е. $a \in P$); $0 > a$ (т. е. $-a \in P$). Следовательно, аксиома I может быть выведена из аксиомы I′.

Если утверждение S может быть выведено из утверждения T (т. е. является его следствием), говорят, что „из T следует S“. Мы только что видели, что из аксиомы I следует аксиома I′, а также, что из аксиомы I′ следует аксиома I. Если каждое из двух утверждений следует из другого, то говорят, что они р а в н о с и л ь н ы или э к в и в а л е н т н ы. Таким образом, аксиомы I и I′ эквивалентны.

В целях иллюстрации аксиом I и I′ рассмотрим числа $a_1 = 3$, $a_2 = -4$, $b_1 = 0$, $b_2 = 3$.

Иллюстрируя аксиому I, отметим, что $a_1 \in P$, $-a_2 \in P$, $b_1 \in O$ и $b_2 \in P$; отметим также, что $a_1 \notin O$ (читается: „a_1 не есть элемент множества O“) и $-a_1 \notin P$ и т. д.

В качестве иллюстрации аксиомы I′ укажем, что

$$\begin{array}{lll}
a_1 - b_1 = 3 - 0 = 3, & a_1 - b_1 > 0, & a_1 > b_1; \\
a_1 - b_2 = 3 - 3 = 0, & a_1 - b_2 = 0, & a_1 = b_2; \\
a_2 - b_1 = -4 - 0 = -4, & b_1 - a_2 > 0, & b_1 > a_2; \\
a_2 - b_2 = -4 - 3 = -7, & b_2 - a_2 > 0, & b_2 > a_2.
\end{array}$$

Итак, мы видим, что в каждом из этих четырех случаев имеет место одно и только одно из трех отношений, фигурирующих в аксиоме I′. Пояснение аксиомы I′ будет продолжено в следующем параграфе, после того как будут введены некоторые дополнительные отношения неравенства.

§ 5. Дополнительные отношения неравенства

Вместо неравенства $b > a$ мы можем с таким же успехом написать $a < b$, что читается „a меньше b“. Эти два неравенства полностью эквивалентны, и, вообще говоря, ни одно из них не имеет никаких преимуществ перед другим. В данной выше иллюстрации аксиомы I′ мы ради единообразия изложения использовали всюду знак „$>$“. Но в целях единообразия мы с равным успехом могли бы писать во всех случаях a перед b. Тогда мы имели бы

$$a_1 > b_1, \quad a_1 = b_2, \quad a_2 < b_1, \quad a_2 < b_2. \tag{1.2}$$

Аналогично

$$-4 < 4, \quad 2 < 3, \quad -2 < 0, \quad -2 < -1, \quad 0 < 1,$$

$$3 < \pi, \quad 0 < 2, \quad -9 < 1, \quad 1 < \sqrt{2}, \quad -40 < -\frac{1}{2}.$$

Символы „$>$“ и „$<$“ выражают строгие неравенства.

Двумя другими отношениями, рассматриваемыми при изучении неравенств, являются нестрогие неравенства $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$, что означает „a не меньше b“ и соответственно „a не больше b“. Первое из них, $a \geqslant b$, означает, что либо $a > b$, либо $a = b$; так, например, $3 \geqslant 2$, но также и $2 \geqslant 2$. Второе, $a \leqslant b$, означает, что либо $a < b$, либо $a = b$; так, $1 \leqslant 2$ и $2 \leqslant 2$.

В (1.2) утверждается, что в каждом из разобранных примеров имеет место одно из трех отношений, перечисленных в аксиоме I′. Аксиома же утверждает, что имеет место только одно из этих соотношений. Поэтому, чтобы завершить иллюстрацию аксиомы I′, мы должны добавить еще следующие утверждения:

$$a_1 \nleqslant b_1, \quad a_1 \genfrac{}{}{0pt}{}{\ngtr}{\nless} b_2, \quad a_2 \ngeqslant b_1, \quad a_2 \ngeqslant b_2, \tag{1.3}$$

означающие, что „a_1 не меньше и не равно b_1“ и т. д.

Вы, конечно, чувствуете, что отрицательные утверждения, перечисленные в (1.3), являются излишними — и в самом деле, никто не станет требовать, чтобы вы писали их для пополнения информации, содержащейся в (1.2). Это объясняется тем, что принцип несовместимости неравенств, выражающийся словами „одно и только одно" в формулировке аксиом I или I′, считается само собой разумеющимся.

Ясно, что в силу принципа несовместимости неравенств отвечающие друг другу соотношения в (1.2) и (1.3) являются равносильными, т. е. каждое из них следует из другого. Тем не менее отрицание неравенства часто является весьма важным понятием.

Если вы боитесь спутать два символа „$>$" и „$<$", заметьте, что в верных неравенствах, таких, как $3>2$ или $2<3$, более широкий (открытый) конец символа обращен к большему числу, в то время как узкий (заостренный) конец обращен к меньшему числу.

§ 6. Произведения, содержащие отрицательные множители

К какому виду чисел относится произведение положительного и отрицательного числа? Или произведение двух отрицательных чисел? Для получения ответов на эти вопросы мы можем использовать аксиомы I и II и некоторые их следствия.

Если $a \in P$ и $b \in N$, то $-b \in P$ в соответствии с табл. 1, так что произведение $a(-b) \in P$ в силу аксиомы II. Отсюда $-[a(-b)] \in N$ по определению отрицательного числа; но $-[a(-b)] = ab$ на основании известного правила вынесения за скобки знака минус:

$$-[a(-b)] = -[-(ab)] = ab.$$

Поэтому $ab \in N$. Таким образом, мы имеем следующий результат:

Теорема 1. *Произведение ab положительного числа a и отрицательного числа b является отрицательным числом.*

Аналогично, если $a \in N$ и $b \in N$, то $-a \in P$ и $-b \in P$ в соответствии с табл. 1. Отсюда по аксиоме II их произведение $(-a)(-b) \in P$. Но по правилам алгебры $(-a)(-b) = ab$ и поэтому $ab \in P$. Таким образом, мы получаем следующий результат:

Теорема 2. *Произведение ab двух отрицательных чисел a и b является положительным числом.*

В частности, на основании этого последнего результата и аксиомы II квадрат любого действительного числа, отличного от нуля, есть положительное число. Конечно, $0^2 = 0$.

Таким образом, мы получаем один из простейших и наиболее полезных результатов всей теории неравенств:

Теорема 3. *Любое действительное число a удовлетворяет неравенству $a^2 \geqslant 0$. Знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $a = 0$.*

§ 7. „Положительные" и „отрицательные" числа

Теперь вы можете убедиться в силе аксиом I и II. Вам, может быть, будет забавно узнать, что, исходя из них, вы можете определить, какое из неравных нулю действительных чисел относится к множеству P положительных чисел и какое относится к множеству N отрицательных чисел, как будто вы этого уже не знали раньше!

Чтобы показать это, будем брать слова „положительное" и „отрицательное" в кавычки, отмечая тем самым, что информация о характере соответствующих чисел не известна нам заранее, а получена из аксиом.

Начнем с числа $a = 1$. Так как $a \neq 0$, то из теоремы 3 § 6 следует, что $a^2 > 0$. Таким образом, a^2 „положительно". Но

$$a^2 = 1^2 = 1,$$

так что 1 — „положительное" число.

Положим, далее, $a = 2$. Так как мы только что установили, что 1 — „положительное" число, и так как $1 + 1 = 2$, то из аксиомы II, утверждающей, что сумма двух „положительных" чисел „положительна", следует, что 2 — „положительное" число.

Пусть теперь $a = 1/2$. Тогда $2a = 1$; таким образом, произведение „положительного" числа 2 и числа a — „положительное" число 1. Но если бы a было „отрицательным", то на основании теоремы 1 произведение 2 и a было бы „отрицательным". Поэтому $a = 1/2$ должно быть „положительно".

Таким образом, числа 1, 2, 1/2 „положительны", и, следовательно, в силу табл. 1 числа —1, —2, —1/2 „отрицательны".

Продолжая, мы можем показать, что целые числа 3, 4 и т. д., дроби 1/3, 1/4 и т. д. и дроби 2/3, 4/3, 3/4, 5/4 и т. д. „положительны" и соответственно что —3, —4, —1/3 и т. д. „отрицательны". Итак, мы можем определить, будет ли „положительным" или „отрицательным" любое неравное нулю рациональное число.

Наконец, предельные переходы, используемые при определении иррациональных чисел, можно использовать для того, чтобы, основываясь на информации о том, какие рациональные числа „положительны" и какие „отрицательны", определить, является ли данное иррациональное число, принадлежащее вполне упорядоченному полю действительных чисел, „положительным" или „отрицательным" [1]).

---

[1]) Здесь прилагательное „упорядоченное" означает, что аксиомы I и II выполняются, а наречие „вполне" характеризует основное свойство, заключающееся в том, что если непустое множество действительных чисел имеет верхнюю грань, то оно имеет и точную верхнюю грань. Например, множество (1; 1,4; 1,41; ...) рациональных приближений к $\sqrt{2}$ ограничено сверху числом 2 (или 1,5); следовательно, оно имеет точную верхнюю грань (которую мы обозначим через $\sqrt{2}$). Соответствующая точка на числовой прямой (см. стр. 9) делит эту прямую на две части, расположенные слева и справа от этой точки. Так как в левой части прямой имеется по крайней мере одно „положительное" рациональное число, например 1 или 1,4, то мы говорим, что $\sqrt{2}$ — „положительное" число. В § 7 мы доказываем, что рациональные числа могут быть упорядочены одним единственным образом, и утверждаем, что вещественные числа также могут быть упорядочены единственным образом.

Свойство полной упорядоченности или его эквивалент используется при определении действительных чисел с помощью рациональных и поэтому правильнее его понимать как постулат поля действительных чисел, чем как аксиому III учения о неравенствах.

В нашей книге мы не будем детально рассматривать иррациональные числа; читателю, заинтересовавшемуся этим вопросом, мы можем порекомендовать книгу И. Нивена, „Числа рациональные и иррациональные“ [1]).

Упражнения

1. Нарисуйте горизонтальную числовую прямую, направленную слева направо. Укажите на ней точки, изображающие следующие числа:

$$3,\quad -1,\quad 0,\quad -1{,}5,\quad \pi-3,\quad 3-\pi,\quad \sqrt{2},\quad 2,\quad -2,\quad -3.$$

Перепишите числа в порядке их возрастания. Результат запишите в виде непрерывного неравенства $a < b < c$ и т. д.

2. Поставьте черточку над знаком $\in$ (таким образом: $\bar{\in}$), если утверждение неверно:

а)	$-3 \in N$,	е)	$a^2 \in N$,
б)	$0 \in P$,	ж)	$(a^2+1) \in P$,
в)	$5 \in O$,	з)	$-2^2 \in P$,
г)	$\sqrt{2} \in N$,	и)	$(a^2+1) \in O$,
д)	$(\pi-3) \in P$,	к)	$-3 \in P$.

3. Поставьте вместо каждого многоточия одну из букв P, N или O так, чтобы результат был правильным:

а)	$\dfrac{48}{273} - \dfrac{49}{273} \in \ldots$	е)	$7^2 - 4(2)(6) \in \ldots$
б)	$\dfrac{721}{837} - \dfrac{721}{838} \in \ldots$	ж)	$93\left(72+\dfrac{1}{2}\right) - 93(72) \in \ldots$
в)	$\dfrac{-23}{32} - \dfrac{-25}{32} \in \ldots$	з)	$93\left(72-\dfrac{1}{2}\right) - 93(72) \in \ldots$
г)	$\dfrac{-23}{32} - \dfrac{-23}{33} \in \ldots$	и)	$\dfrac{2+3}{4+5} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{5}\right) \in \ldots$
д)	$\dfrac{-1}{-2} - \dfrac{1}{-2} \in \ldots$	к)	$(-3)^2 - 3^2 \in \ldots$

---

[1]) Niven I., Numbers: Rational and Irrational, New York — Toronto, 1960. В популярной серии „Современная математика“ намечено издание русского перевода этой книги. — *Прим. ред.*

4. Поставьте вместо каждого многоточия один из знаков $>$, $<$ или $=$ так, чтобы результат был правильным:

а) $\frac{48}{273} \ldots \frac{49}{273}$,

б) $\frac{721}{837} \ldots \frac{721}{838}$,

в) $\frac{-23}{32} \ldots \frac{-25}{32}$,

г) $\frac{-23}{32} \ldots \frac{-23}{33}$,

д) $\frac{-1}{-2} \ldots \frac{1}{-2}$,

е) $7^2 \ldots 4(2)(6)$,

ж) $93\left(72+\frac{1}{2}\right) \ldots 93(72)$,

з) $93\left(72-\frac{1}{2}\right) \ldots 93(72)$,

и) $\frac{2+3}{4+5} \ldots \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\right)$,

к) $(-3)^2 \ldots 3^2$.

5. Обозначьте буквой И истинное и буквой Л ложное соотношение:

а) $-2 \geqslant -3$ (...),

б) $0 \leqslant 0$ (...),

в) $0 > -1$ (...),

г) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$(...),

д) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ (...),

(е) $-1 \leqslant 2$ (...),

ж) $\frac{3}{2} < \frac{3}{4}$ (...),

з) $-\frac{2}{5} \geqslant -\frac{3}{5}$ (...),

и) $1-2^2 < -2^2$ (...),

к) $1 < 0$ (...).

6. Запишите число, противоположное каждому из следующих чисел:

$$-2, \quad 3-\pi, \quad (3-\pi)^2, \quad \frac{a}{b-c}, \quad 0, \quad \sqrt{b^2-4ac}.$$

7. Заполните пропуски так, чтобы получить утвердительные соотношения, эквивалентные данным соотношениям:

а) $a \nless b$, $\quad a \ldots b$,

б) $a \neq b$, $\quad a \ldots b$,

в) $a \ngtr b$, $\quad a \ldots b$,

г) $a \nleqslant b$, $\quad a \ldots b$,

д) $a \ngeqslant b$, $\quad a \ldots b$,

е) $a \not\gtrless b$, $\quad a \ldots b$.

8. Покажите, что любое положительное число p больше любого отрицательного числа n.

9. Какой единственный вывод о соотношении между двумя действительными числами a и b можно сделать, если известно, что $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$?
10. Выведите из аксиомы II при помощи метода математической индукции, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то их сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ и их произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ также положительны. (Ср. с § 6 гл. II).
11. Пользуясь аксиомами I и II, покажите, что 2/3 — „положительное“ число.

ГЛАВА II

Аппарат

§ 1. Введение

В учении о неравенствах, по существу, являются основными допущениями только две аксиомы, рассмотренные в гл. I, а также основные законы системы вещественных чисел, такие, как дистрибутивность, принцип математической индукции и т. д. Тем не менее имеется несколько простых теорем, которые выводятся из этих аксиом и так часто встречаются при построении теории и в ее применениях, что их естественно назвать „рабочим инструментом" или „аппаратом" учения о неравенствах.

Эти теоремы или правила действий и их доказательства привлекательны и интересны благодаря своим внутренним достоинствам. Кроме того, они являются отличной иллюстрацией пути, которому следуют математики, когда строят тщательно разработанную систему выводов, исходя из немногих основных положений и допущений. Доказательства обычно коротки, но тем не менее исчерпывающи. А в целом ряде случаев они требуют истинной изобретательности, которая делает математику тем захватывающим воображение предметом, каким она является.

В настоящей главе некоторые из этих теорем будут перечислены, проиллюстрированы и доказаны. Буквы a, b, c и т. д., которые встречаются в формулировках теорем, обычно обозначают действительные числа; если символы имеют другой смысл, то это будет оговариваться особо.

Для удобства теоремы или правила, как мы иногда будем их называть, будут формулироваться только для знака „$>$". В каждом случае имеется эквивалентное правило для отношения „$<$". Так, условию транзитивности для отношения „$>$": „если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$" соответствует эквивалентное условие для отношения „$<$": „если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$".

Подобным образом вы можете сформулировать правила для отношения „$<$", эквивалентные каждому из приведенных в этой главе правил, касающихся отношения „$>$". Но остерегайтесь математических ловушек! Если правило содержит положительный множитель, скажем $c > 0$, и требует, чтобы разность двух произвольных величин была положительна, то эквивалентное правило для отношения „$<$" относится также к случаю множителя $c > 0$ (или $0 < c$, если это кажется вам предпочтительнее), но не $c < 0$. Так, правилу „если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$" будет эквивалентно правило „если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$".

Формулировки теорем, которые приводятся в начале каждого параграфа, делятся на две части. Более простая первая часть, имеющая дело со строгим знаком неравенства „$>$", касается существа результата. Вторая часть относится к случаю нестрогого неравенства „$\geqslant$"; кроме того, в ней иногда рассматривается произвольное число n действительных чисел. Таким образом, вторая часть имеет дело с более общим случаем. Доказательство обычно дается только для более общего случая, однако оно легко может быть видоизменено с тем, чтобы быть приложимым и к первой части теоремы.

Иллюстрации к теоремам, приводимым в этой главе, будут иногда касаться правила, сформулированного для отношения „$>$", а иногда эквивалентного правила, касающегося отношения „$<$".

§ 2. Транзитивность

Теорема 1. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*

Более общо: если $a_1 \geqslant a_2$, $a_2 \geqslant a_3$, ..., $a_{n-1} \geqslant a_n$, то $a_1 \geqslant a_n$, причем $a_1 = a_n$ в том и только том случае, когда все числа a равны между собой.

Так, если при подсчете своих расходов вы заметили, что в субботу расходуете больше денег, чем в любой другой рабочий день недели, и что в воскресенье вы расходуете по крайней мере столько же денег, сколько в субботу, то вы можете заключить, что в воскресенье вы расходуете больше денег, чем в любой рабочий день, отличный от субботы.

Вспомним еще, что решение упр. 1 из. гл. I выглядит так:

$$-3 < -2 < -1{,}5 < -1 < 3-\pi < 0 < \pi < \\ < -3 < \sqrt{2} < 2 < 3.$$

Эта сложная запись означает только, что каждый из первых девяти членов этой последовательности меньше непосредственно следующего за ним члена; так, $-3 < -2$, $-2 < 1{,}5$ и т. д. Отсюда на основании приведенного выше условия транзитивности следует, что каждое из чисел этой последовательности меньше любого последующего числа. Например, $-3 < -1{,}5$, $-1 < 2$, $3-\pi < \sqrt{2}$.

Доказательство. Условие транзитивности может быть доказано при помощи метода математической индукции. (Объяснение сущности этого метода см. в § 6 гл. II.) Однако для этого первого правила нашей книги мы укажем здесь простое непосредственное доказательство, касающееся случая, когда мы имеем четыре действительных числа.

Предположим, что $a_1 \geqslant a_2$, $a_2 \geqslant a_3$, $a_3 \geqslant a_4$. На основании алгебраического определения неравенства каждая из величин $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$ принадлежит либо множеству P, либо множеству O. Поэтому сумма

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) = a_1 - a_4$$

есть либо элемент множества P (по аксиоме II), либо элемент множества O; при этом множеству O эта сумма принадлежит тогда и только тогда, когда $a_1 - a_2 = 0$, $a_2 - a_3 = 0$, $a_3 - a_4 = 0$.

Таким образом, $a_1 \geqslant a_4$, где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$.

Доказательство теоремы в общем случае мы оставляем для упражнений.

§ 3. Сложение

Теорема 2. *Если* $a > b$ *и* $c > d$, *то* $a + c > b + d$. *Если* $a > b$ *и* c *— любое действительное число, то* $a + c > b + c$.

Более общо: если $a_1 \geqslant b_1$, $a_2 \geqslant b_2$, ..., $a_n \geqslant b_n$, *то*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \qquad (2.1)$$

Знак равенства в (2.1) *имеет место в том и только том случае, когда* $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Так, если сложить почленно два неравенства $1 < \sqrt{2}$ и $3 < \pi$, то мы получим $1 + 3 < \sqrt{2} + \pi$. Комбинируя это последнее неравенство с равенством $-1 = -1$, получаем $3 < \sqrt{2} + \pi - 1$. Результатом почленного сложения всех этих пяти соотношений будет

$$10 < 3(\sqrt{2} + \pi) - 2.$$

Доказательство. Здесь, как и в случае транзитивности, возможно доказательство по индукции. Мы, однако, приведем непосредственное доказательство для общего случая. Так как, по предположению, каждая из величин $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, ..., $a_n - b_n$ есть элемент множества P или O, то на основании обобщения аксиомы II, указанного в упр. 10 к гл. I, сумма $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \in P$, если только она не $\in O$, что имеет место при $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ..., $a_n - b_n = 0$.

Таким образом,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

где знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

§ 4. Умножение на число

Теорема 3. *Если* $a > b$ *и* $c > 0$, *то* $ac > bc$. *Если* $a > b$ *и* $c < 0$, *то* $ac < bc$.

Более общо: если $a \geqslant b$ и $c > 0$, *то* $ac \geqslant bc$, *причем* $ac = bc$ *в том и только том случае, когда* $a = b$.

Если $a \geqslant b$ и $c < 0$, то $ac \leqslant bc$, причем $ac = bc$ в том и только том случае, когда $a = b$.

Таким образом, при умножении обоих членов неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении на отрицательное число меняется на обратный.

В частности, при $c = -1$ получаем: если $a \geqslant b$, то $-a \leqslant -b$.

Например, если мы умножим обе части неравенства $3 > 2$ на 1 или на -1, то мы получим $3 > 2$ или соответственно $-3 < -2$.

Доказательство. Нам дано, что $a \geqslant b$, так что $a - b \in P$ или $\in O$. Если $c \in P$, то из аксиомы II следует, что $c(a-b) = ca - cb \in P$ или $\in O$, т. е. $ca \geqslant cb$. Если же $c \in N$, то из теоремы 1 гл. I следует, что $c(a-b) \in N$ или $\in O$. Отсюда $-[c(a-b)] = cb - ca \in P$ или $\in O$, так что $cb \geqslant ca$.

Во всех случаях знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

§ 5. Вычитание

Теорема 4. *Если $a > b$ и $c > d$, то $a - d > b - c$. Если $a > b$ и c — какое угодно действительное число, то $a - c > b - c$.*

Более общо: если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a - d \geqslant b - c$, причем $a - d = b - c$ в том и только том случае, когда $a = b$ и $c = d$.

Отметим, что из a вычитается d и из b вычитается c, а не c из a и d из b.

Так при вычитании $5 > 3$ из $7 > 6$, будем иметь $7 - 3 > 6 - 5$, т. е. $4 > 1$; неравенство же $7 - 5 > 6 - 3$ будет неправильным. Или, иллюстрируя это правило на языке отношения „$<$": вычитание $-4 < -3$ из $-5 < 10$ дает $-5 - (-3) < 10 - (-4)$, т. е. $-2 < 14$.

Доказательство. Применяя правило умножения неравенства на отрицательное число -1 (теорема 3) к неравенству $c \geqslant d$, мы получим $-c \leqslant -d$, т. е. $-d \geqslant -c$, где знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $c=d$. Применяя теперь правило сложения неравенств к $a \geqslant b$ и $-d \geqslant -c$, мы будем иметь $(a+(-d) \geqslant \geqslant b+(-c)$ или $a-d \geqslant b-c$, где $a-d=b-c$ тогда и только тогда, когда $a=b$ и $c=d$.

Упражнения

1. Покажите, что если $a < b$, то $a < {}^1/_2(a+b) < b$.
2. Покажите, что для любых a, b, c и d

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2) \leqslant (ac-bd)^2$$

и

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2,$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $ad=bc$.

3. Покажите, что для любых a и b

$$(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$$

и что знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$.

4. Докажите методом математической индукции общее правило транзитивности для отношения „$\geqslant$“.

§ 6. Умножение

Теорема 5. *Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Более общо: если $a_1 \geqslant b_1 > 0$, $a_2 \geqslant b_2 > 0$, ..., $a_n \geqslant b_n > 0$, то*

$$a_1a_2 \ldots a_n \geqslant b_1b_2 \ldots b_n. \tag{2.2}$$

Знак равенства в (2.2) *имеет место в том и только том случае, когда $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$.*

Так, умножая $2 > 1$ на $4 > 3$, мы получаем $(2)(4) > > (1)(3)$ или $8 > 3$. Заметим, однако, что, хотя $-1 > -2$ и $-3 > -4$, тем не менее $(-1)(-3) < (-2)(-4)$; поэтому требование положительности фигурирующих в неравенствах чисел является существенным.

Доказательство. Проведем доказательство при помощи метода математической индукции. Обычно такое доказательство строится по следующей схеме. Сначала проверяется, выполняется ли утверждение, которое должно быть доказано для всех положительных целых чисел n, для одного или двух первых чисел. Затем предполагается, что это утверждение справедливо для всех целых чисел, предшествующих некоторому определенному числу, скажем $k-1$, включая и это последнее число. При этом предположении доказывается, что утверждение справедливо и для ближайшего большего целого числа, а именно для числа k. Так как k может быть любым числом >1 (в частности, можно положить $k-1=1$ или 2, для которых утверждение проверено), то мы заключаем, что утверждение действительно справедливо для всех целых положительных чисел.

При $n=1$ заключение $a_1 \geqslant b_1$ теоремы 5 просто повторяет ее условие. Этого, собственно говоря, уже достаточно для обоснования первого шага доказательства по индукции. Мы, однако, проведем также доказательство, отвечающее случаю $n=2$, т. е. покажем, что если $a_1 \geqslant b_1 > 0$ и $a_2 \geqslant b_2 > 0$, то $a_1 a_2 \geqslant b_1 b_2$.

Неравенство

$$a_1 a_2 \geqslant b_1 a_2 \tag{2.3}$$

справедливо в силу правила умножения неравенств на положительные числа. Знак равенства здесь имеет место в том и лишь том случае, когда $a_1 = b_1$. Неравенство

$$b_1 a_2 \geqslant b_1 b_2 \tag{2.4}$$

следует из того же самого правила. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a_2 = b_2$. А теперь справедливость неравенства

$$a_1 a_2 \geqslant b_1 b_2 \tag{2.5}$$

следует из неравенств (2.3) и (2.4) на основании условия транзитивности (теорема 1 гл. II); знак равенства в формуле (2.5) имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место в (2.3) и (2.4), т. е. тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Мы показали, что неравенство (2.2) выполняется при $n=1$ и при $n=2$.

Предположим, далее, что неравенство (2.2) справедливо для всех $n = 1, 2, \ldots, k-1$, в частности для произведения $k-1$ чисел:

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \geqslant b_1 b_2 \ldots b_{k-1}, \tag{2.6}$$

причем знак равенства имеет место в том и только том случае, когда

$$a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \; \ldots, \; a_{k-1} = b_{k-1}.$$

Далее, умножая обе части неравенства (2.6) на число a_k, мы получаем на основании правила умножения неравенства на положительное число (теорема 3 гл. II)

$$(a_1 a_2 \ldots a_{k-1})\, a_k \geqslant (b_1 b_2 \ldots b_{k-1})\, a_k, \tag{2.7}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1} = b_1 b_2 \ldots b_{k-1}.$$

На основании этого же самого правила, умножая неравенство

$$a_k \geqslant b_k$$

на число $b_1 b_2 \ldots b_{k-1}$, получаем

$$(b_1 b_2 \ldots b_{k-1})\, a_k \geqslant (b_1 b_2 \ldots b_{k-1})\, b_k. \tag{2.8}$$

Здесь знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a_k = b_k$.

Далее из неравенств (2.7) и (2.8) на основании условия транзитивности следует, что

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1}\, a_k \geqslant b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k.$$

Равенство имеет место в том и только том случае, когда $a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \; \ldots \; a_k = b_k$.

§ 7. Деление

Теорема 6. *Если* $a > b > 0$ *и* $c > d > 0$, *то* $a/d > b/c$. *В частности, для* $a = b = 1$ *и* $c > d > 0$ *получаем* $1/d > 1/c$.

Более обще: если $a \geqslant b > 0$ и $c \geqslant d > 0$, то $a/d \geqslant b/c$, причем $a/d = b/c$ в том и только том случае, когда $a = b$ и $c = d$.

Обратим внимание на то, что a делится на d и b на c, а не a на c и b на d. Так, при делении неравенства $7 > 6$ на неравенство $5 > 3$ мы получим $7/3 > 6/5$; однако неравенство $7/5 > 6/3$ будет неправильным.

Из двух данных неравенств вытекает также, что $1/6 > 1/7$ и $1/3 > 1/5$.

Доказательство. Мы имеем, что

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{cd}.$$

На основании аксиомы II знаменатель $cd \in P$, так как $c \in P$ и $d \in P$. В силу теоремы 5 гл. II из $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$ следует $ac \geqslant bd$; таким образом, числитель $ac - bd \in P$ или $\in O$. И если $a \neq b$ и $c \neq d$, то $ac - bd \in P$. По теореме 1 гл. I произведение положительного и отрицательного чисел будет отрицательным числом. Но произведение

$$cd\left(\frac{ac - bd}{cd}\right)$$

равно неотрицательному числу $ac - bd$, и cd положительно. Поэтому

$$\frac{ac - bd}{cd} = \frac{a}{d} - \frac{b}{c}$$

будет неотрицательным числом. Таким образом, $a/d \geqslant b/c$, причем $a/d = b/c$ тогда и только тогда, когда $a = b$ и $c = d$.

Упражнения

1. Исходя из неравенства

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geqslant 0,$$

покажите, что для всех положительных a, b

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}.$$

При каких условиях имеет место знак равенства?

2. Покажите, что сумма любого положительного числа и обратного ему числа не меньше 2, т. е. что

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$$

при любых положительных значениях a. При каких значениях a имеет место равенство?

3. Покажите, что при любых a, b и c

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

4. Покажите, что при любых a, b

$$(a^2-b^2)(a^4-b^4)\leqslant(a^3-b^3)^2$$

и

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2.$$

5. Покажите, что при любых неотрицательных a, b и c

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\geqslant 6abc.$$

6. Покажите, что при любых a, b, таких, что $ab\geqslant 0$,

$$(a^2-b^2)^2\geqslant(a-b)^4$$

и что при любых a, b, таких, что $ab\leqslant 0$,

$$(a^2-b^2)^2\leqslant(a-b)^4.$$

7. Покажите, что при любых a, b, таких, что $a+b\geqslant 0$,

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2.$$

8. Определите, при каких условиях имеет место равенство в соотношениях упр. 3—7.

§ 8. Степени и корни

Теорема 7. *Если $a>b>0$, а m и n — целые положительные числа, и если $a^{1/n}$ и $b^{1/n}$ — положительные корни степени n, то*

$$a^{m/n}>b^{m/n}\quad и\quad b^{-m/n}>a^{-m/n}.$$

Более общо: если $a\geqslant b>0$, а m — неотрицательное целое число и n — положительное целое число *и если* $a^{1/n}$ *и* $b^{1/n}$ — *положительные корни степени* n, *то*

$$a^{m/n} \geqslant b^{m/n} \text{ и } b^{-m/n} \geqslant a^{-m/n}, \qquad (2.9)$$

причем $a^{m/n} = b^{m/n}$ *и* $b^{-m/n} = a^{-m/n}$ *тогда и только тогда, когда либо* (1) $a = b$, *либо* (2) $m = 0$.

Некоторые значения $a^{m/n}$, $b^{m/n}$, $b^{-m/n}$ и $a^{-m/n}$ для $a = 9$ и $b = 4$ приведены в табл. 2. Из этой таблицы видно, что для каждого положительного значения m/n $9^{m/n} > 4^{m/n}$, в то время как $4^{-m/n} > 9^{-m/n}$.

ТАБЛИЦА 2

Степени некоторых чисел

$\frac{m}{n}$	$9^{m/n}$	$4^{m/n}$	$4^{-m/n}$	$9^{-m/n}$
0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{3}{2}$	27	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
2	81	16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$

Доказательство. Если $m = 0$, то $a^{m/n} = b^{m/n} = b^{-m/n} = a^{-m/n} = a^0 = b^0 = 1$, так что в этом случае в (2.9) имеет место знак равенства.

Если $m \neq 0$, то $a^m \geqslant b^m$ на основании правила умножения неравенств (теорема 5); при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. Если бы было верно $a^{1/n} < b^{1/n}$, то также было бы верно $(a^{1/n})^n < (b^{1/n})^n$ или $a < b$. Но, по предположению, $a \geqslant b$; поэтому $a^{1/n} \geqslant b^{1/n}$. Следовательно, $a^{m/n} \geqslant b^{m/n}$, причем $a^{m/n} = b^{m/n}$ в том и только том случае, когда $a = b$.

Теперь рассмотрим степени с отрицательными показателями. Положим

$$a^{m/n} = c, \quad b^{m/n} = d,$$

тогда

$$a^{-m/n} = \frac{1}{c}, \quad b^{-m/n} = \frac{1}{d}.$$

Так как мы только что показали, что

$$c \geqslant d,$$

то в силу теоремы 6

$$\frac{1}{d} \geqslant \frac{1}{c},$$

т. е.

$$b^{-m/n} \geqslant a^{-m/n},$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $c = d$, т. е. когда $a = b$.

Это правило может быть также распространено и на положительные и отрицательные *иррациональные* степени.

Упражнения

1. Покажите, что при любых a, b

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}.$$

При каких условиях здесь имеет место равенство?

2. Покажите, что если a, b и c, d положительны (причем c и d рациональны), то

$$(a^c - b^c)(a^d - b^d) \geqslant 0$$

и

$$a^{c+d} + b^{c+d} \geqslant a^c b^d + a^d b^c.$$

При каких условиях здесь имеет место равенство?

3. К чему сводится второе неравенство упр. 2, когда $c = d = 1$? Когда $c = d = 1/2$?
4. Покажите, что если $bd > 0$, то $a/b \leqslant c/d$ тогда и только тогда, когда $ad \leqslant bc$, причем равенство в одном из этих соотноше-

ний имеет место в том и только том случае, когда оно имеет место во втором соотношении.

5. Покажите, что если $a/b \leqslant c/d$, то

$$\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d},$$

и что равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

6. Покажите, что если a, b, c, d — положительные числа и $a/b \leqslant \leqslant c/d$, то

$$\frac{a}{a+b} \leqslant \frac{c}{c+d},$$

причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда когда $ad = bc$.

7. Покажите, что если b и d положительны и $a/b \leqslant c/d$, то

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

8. Основываясь на результатах упр. 4, установите справедливость четырех неравенств, рассмотренных в упр. 5—7, для значений $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ и $d = 6$.

9. Напишите правила для отношения „$<$“, эквивалентные первой части условия транзитивности, сложения неравенств, умножения их на число, вычитания, умножения, деления, а также возведения в степень и извлечения корня, сформулированных в тексте для отношения „$>$“.

ГЛАВА III

Абсолютная величина числа

§ 1. Введение

В гл. I этой книги неравенство $a > b$ было определено, как мы помним, в терминах множества P положительных чисел. Напомним также, что для справедливости отдельных результатов гл. II, например теоремы 5, касающейся умножения неравенств, было необходимо потребовать положительности некоторых чисел, фигурирующих в условиях теоремы. В теореме 7 той же главы появляются степени с дробными показателями, которые иногда могут не оказаться даже действительными числами, если не оговорить положительности числа, возводимого в дробную степень; чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть, например, $a^{1/2}$ для $a = -9$. Многие из основных неравенств, которые выводятся в гл. IV, содержат такие степени с дробными показателями. Естественно, что и далее мы часто будем ограничиваться рассмотрением положительных чисел или неотрицательных чисел (т. е. положительных чисел и числа нуль).

В прикладных проблемах, в которых приходится рассматривать неравенства, часто имеют дело с весом, объемом и т. п., с *модулем* или *абсолютной величиной* таких математических объектов, как действительные числа, комплексные числа, векторы. Все эти величины измеряются неотрицательными числами. Так, если даже условиться обозначать выигрыши положительными числами, а проигрыши отрицательными числами, то все же будет естественно сказать, что проигрыш в три доллара больше, чем проигрыш в два доллара — и это несмотря на то, что число -3 меньше, чем -2. При этом мы имеем в виду, что абсолютная величина числа —3 больше абсолютной величины числа —2.

В этой главе мы дадим определение абсолютной величины действительного числа и изучим некоторые ее свойства для применения их к неравенствам в следующих главах. Мы также приведем графики некоторых интересных и достаточно часто встречающихся функций, содержащих абсолютную величину, и изложим некоторые относящиеся к ним новые идеи.

§ 2. Определение

Абсолютная величина действительного числа a, обозначаемая через $|a|$, может быть определена различными способами. Мы здесь рассмотрим некоторые из возможных определений этого понятия.

Определение. *Абсолютная величина $|a|$ действительного числа a определяется как число a, если a положительно или равно нулю, и как число $-a$, если a отрицательно.*

Так, например, $|2|=2$, $|0|=0$, $|-2|=-(-2)=2$.

Принципиальная невыгодность только что приведенного определения заключается в том, что оно не подходит для алгебраических преобразований. Так, например (см. теорему 2 настоящей главы), для любых чисел a, b

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

что можно проверить, рассматривая отдельно различные возможные случаи: числа a и b оба положительны; одно из чисел положительно, а второе отрицательно; оба числа отрицательны; одно из чисел равно нулю, а второе положительно; одно из чисел равно нулю, а второе отрицательно; оба числа равны нулю. Однако предпочтительнее дать единый вывод, охватывающий все случаи и имеющий чисто алгебраический характер; такой вывод будет дан в § 8 после того, как будут приведены различные определения абсолютной величины, эквивалентные данному выше определению. Эти новые определения будут основываться на понятиях квадрата числа и квадратного корня из числа.

Приведенное выше определение абсолютной величины можно перефразировать следующим образом:

Абсолютная величина $|a|$ *действительного числа* a *равна* 0, *если* $a \in O$; *во всех же остальных случаях* $|a|$ *есть положительный элемент множества* $\{a, -a\}$.

Так, если $a=2$, то $|a|$ есть положительный элемент множества $\{2, -2\}$, т. е. 2. Если $a=-2$, то $|a|$ есть положительный элемент множества $\{-2, -(-2)\}$, т. е. снова 2. Однако этой характеристике символа $|a|$ присущи те же неудобства, что и предыдущей.

§ 3. Специальные символы

Последующие два определения числа $|a|$ связаны с двумя специальными символами: $\max\{\ \}$ и $\{\ \}^+$. Значение этих символов мы сейчас и объясним.

Символ $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *обозначает наибольший элемент множества* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *действительных чисел.*

Если множество содержит только один или только два элемента, мы все же будем говорить о „наибольшем" из его элементов. Если наибольшее значение имеют несколько элементов множества, то любой из них считается наибольшим. Так,

$$\max\{3, 7, 0, -2, 5\}=7; \quad \max\{4, 4\}=4;$$
$$\max\{-3, -1\}=-1.$$

После некоторой тренировки можно научиться производить те или иные арифметические операции над выражениями, содержащими символ $\max\{\ \}$.

Так, например,

$$\frac{(\max\{4, -3\})(\max\{0, 5\})+\max\{-4, 4\}-\max\{-9, -8\}}{2\max\{1, 4\}}=4.$$

В частности, рассмотрим $\max\{a, -a\}$; если $a=2$, то

$$\max\{a, -a\}=\max\{2, -2\}=2=|a|;$$

если $a = -3$, то

$$\max\{a, -a\} = \max\{-3, -(-3)\} = 3 = |a|;$$

если $a = 0$, то

$$\max\{a, -a\} = \max\{0, 0\} = 0 = |a|,$$

и т. д. Таким образом, для любых a

$$\max\{a, -a\} = |a|, \tag{3.1}$$

так что соотношение (3.1) *можно принять за еще одно определение* $|a|$.

Перейдем теперь ко второму специальному символу.

Символ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^+$ *обозначает наибольший элемент множества* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *если по крайней мере один из его элементов неотрицателен; если же все элементы множества отрицательны, то этот символ означает число* 0.

Так,

$$\{3, 7, 0, -2, 5\}^+ = 7, \quad \{4, 4\}^+ = 4; \quad \{-3, -1\}^+ = 0.$$

Как и в случае символа $\max\{\ \ \}$, можно производить арифметические действия с выражениями, содержащими символ $\{\ \ \}^+$, хотя это и представляет известные неудобства. Так, например,

$$\frac{(\{4, -3\}^+)(\{0, 5\}^+) + \{-4, 4\}^+ - \{-9, -8\}^+}{2\{1, 4\}^+} = 3.$$

Как показывают рассмотренные примеры, символы $\max\{\ \ \}$ и $\{\ \ \}^+$ не эквивалентны. Действительно, легко можно видеть, что

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^+ = \max\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \\ = \max\{0, \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}.$$

Отсюда следует, что

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^+ \geqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ содержит по крайней мере один неотрицательный элемент.

А так как множество $\{a, -a\}$ при любом значении a содержит неотрицательный элемент, то при любом значении a

$$\{a, -a\}^+ = \max\{a, -a\} = |a|.$$

Таким образом, равенство

$$\{a, -a\}^+ = |a|$$

также можно рассматривать как определение величины $|a|$.

Упражнения

1. Чему равны

а) $\max\{-7, -4, -1\}$,	е) $\{-7, -4, -1\}^+$,
б) $\max\{3, \pi, \sqrt{2}\}$,	ж) $\{3, \pi, \sqrt{2}\}^+$,
в) $\max\{-7, 0, -1\}$,	з) $\{-7, 0, -1\}^+$,
г) $\max\{0, 4, 1\}$,	и) $\{0, 4, 1\}^+$,
д) $\max\{3, -3, 3\}$,	к) $\{3, -3, 3\}^+$.

2. Символ $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает наименьший элемент некоторого множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ действительных чисел, а символ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^-$ — наименьший элемент множества $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Определите

а) $\min\{-7, -4, -1\}$,	е) $\{-7, -4, -1\}^-$,
б) $\min\{3, \pi, \sqrt{2}\}$,	ж) $\{3, \pi, \sqrt{2}\}^-$,
в) $\min\{-7, 0, -1\}$,	з) $\{-7, 0, -1\}^-$,
г) $\min\{0, 4, 1\}$,	и) $\{0, 4, 1\}^-$,
д) $\min\{3, -3, 3\}$,	к) $\{3, -3, 3\}^-$.

3. Определите

$$(\max\{-1, -2\})(\{-1, -2\}^+) - (\min\{1, 2\})(\{1, 2\}^-).$$

4. Покажите, что

$$\max\{\max\{a, b, c\}, \max\{d, e\}\} = \max\{a, b, c, d, e\}.$$

5. Приведите пример, показывающий, что неравенство

$$\max\{a, b\} + \max\{c, d\} \geqslant \max\{a, b, c, d\}$$

имеет место не всегда.

6. Покажите, что

$$\{a, b\}^+ + \{c, d\}^+ \geqslant \{a, b, c, d\}^+.$$

7. Покажите, что

$$\begin{aligned}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^+ &\geqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant \\ &\geqslant \quad \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^-.\end{aligned}$$

Существует ли такое множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что во всех трех случаях имеет место знак строгого неравенства?

8. Покажите, что если $a = \max\{a, b, c\}$, то $-a = \min\{-a, -b, -c\}$.

9. Покажите, что $\{-a, -b\}^- = -\{a, b\}^+$.

10. Покажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \max\{a_1, \max\{a_2, a_3, \ldots, a_n\}\}$.

§ 4. Графические рассмотрения

Графическое изображение может дать поразительно яркую картину поведения функции независимо от того, имеем ли мы дело со средней суточной температурой, колебаниями рынка сбыта, величиной $|x|$ или с чем-нибудь еще. Самым важным здесь является то, что график позволяет нам с одного взгляда усмотреть некоторые общие свойства функции, которые при иных способах ее изучения могли бы остаться скрытыми.

Например, значение символов $\max\{\ \}$ и $\{\ \}^+$ становится более понятным при рассмотрении изображенных на рис. 2 и 3 графиков функций

$$y = \max\left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}$$

и

$$y = \left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}^+.$$

Пунктирными линиями на рис. 2 и 3 продолжены графики функций

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ и } y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}.$$

Построим теперь график функции $y = |x|$, который дает наглядную характеристику понятия абсолютной величины. Для наших целей достаточно ограничиться неполным графиком, отвечающим интервалу $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

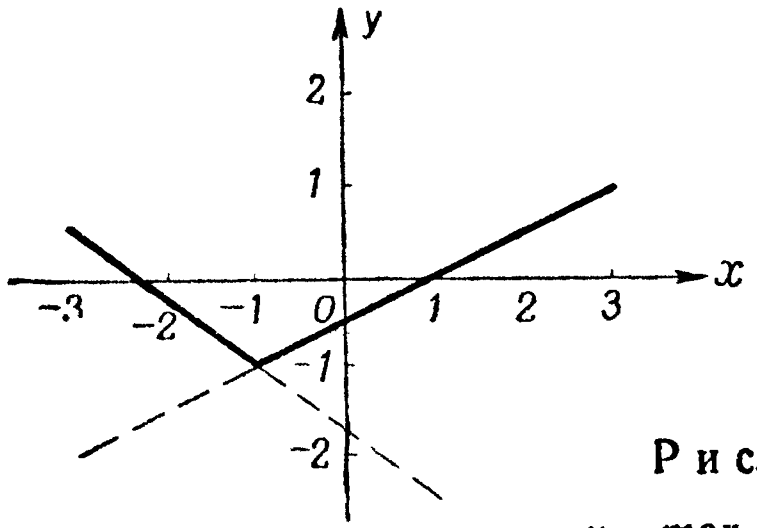


Рис. 2. График функции $y = \max\left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

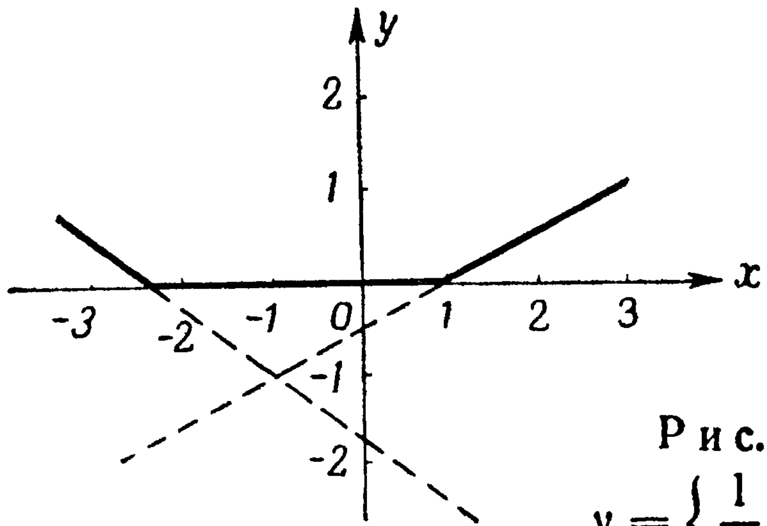


Рис. 3. График функции $y = \left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}^{+}$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

При построении этого графика сначала полезно и интересно рассмотреть график функции $y_1 = x$, т. е. множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y_1), где $y_1 = x$, а также график функции $y_2 = -x$. Эти графики изображены на рис. 4 и 5.

Из этих графиков и определения

$$|x| = \max\{x, -x\} = \max\{y_1, y_2\}$$

сразу следует, что график функции $y = |x|$ совпадает с графиком $y = \max\{y_1, y_2\}$, как это показано на рис. 6. Мы должны выбирать на рис. 4 и 5 большую из ординат y_1 и y_2, отвечающих данной абсциссе x. Эта большая ордината и служит ординатой y на графике, изображенном на рис. 6. Например, при $x=-2$ большей ординатой будет $y_2=2$; при $x=1$ большей ординатой будет $y_1=1$ и т. д.

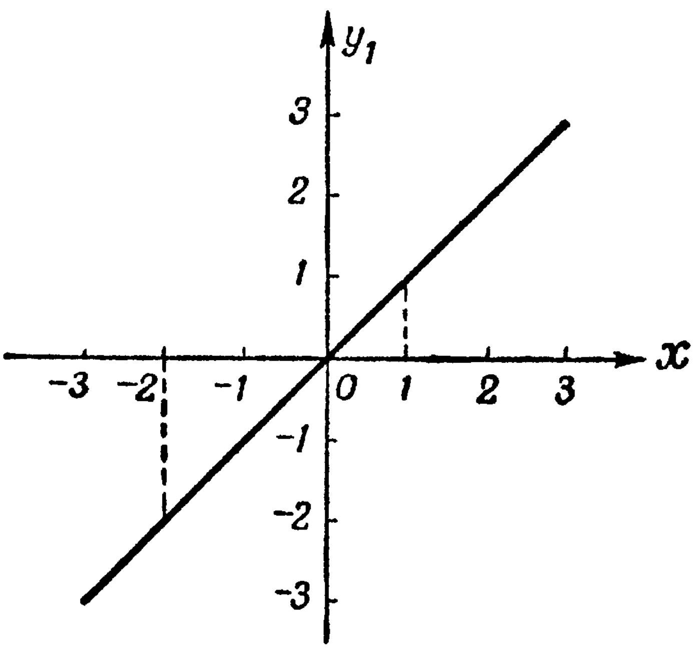


Рис. 4. График функции $y_1=x$; $-3\leqslant x\leqslant 3$.

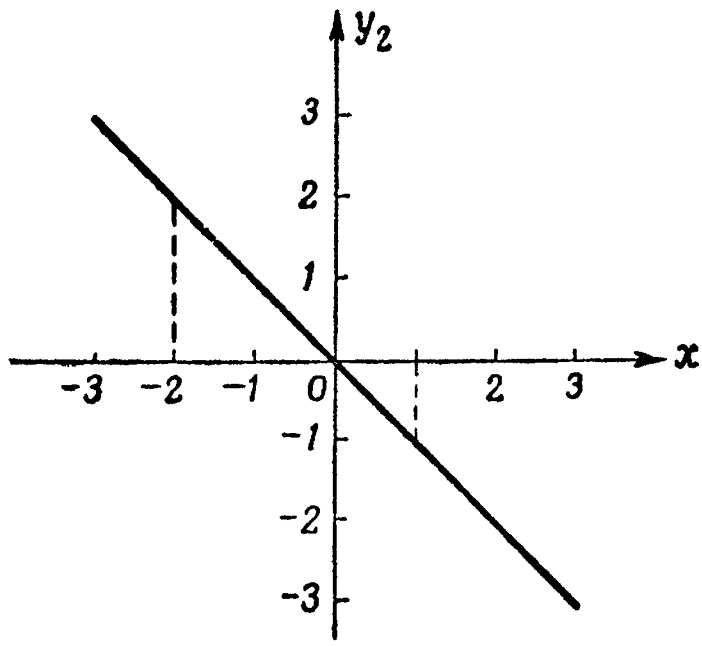


Рис. 5. График функции $y_2=-x$; $-3\leqslant x\leqslant 3$.

На рис. 7 изображен график функции $y=-|x|$.

Рассматривая четыре графика, изображенные на рис. 4—7, мы заметим, что для любого значения абсциссы x все четыре ординаты не меньше $-|x|$ и не больше $|x|$.

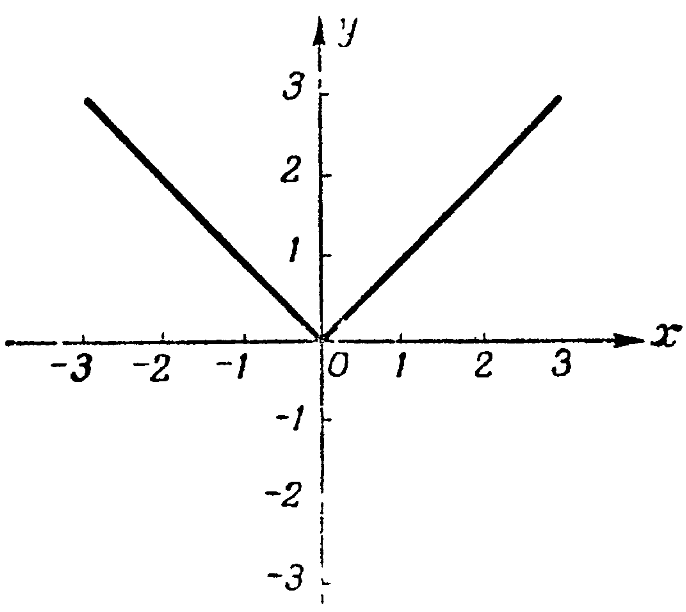


Рис. 6. График функции $y=|x|$; $-3\leqslant x\leqslant 3$.

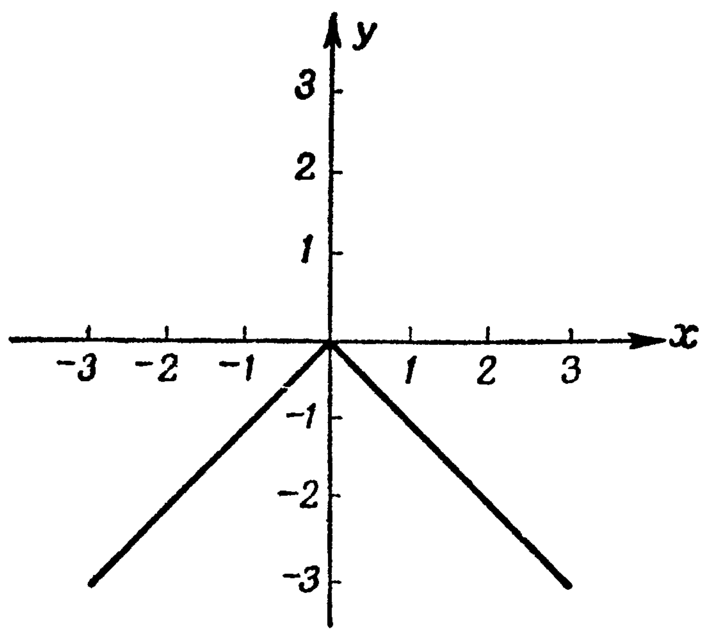


Рис. 7. График функции $y=-|x|$; $-3\leqslant x\leqslant 3$

Поэтому из рис. 4, 6 и 7 можно сделать следующий вывод, который вы, безусловно, смогли бы заметить и доказать вообще без рассмотрения графиков:

Теорема 1. *Для каждого действительного числа* a

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

При этом первый знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a \leqslant 0$, *а второй — тогда и только тогда, когда* $a \geqslant 0$.

Теорема 1 следует, например, из того, что $a = -|a|$, если $a \in N$ или $a \in O$, и $a = |a|$, если $a \in P$ или $a \in O$, а также из того факта, что всякое положительное число больше любого отрицательного числа (см. упр. 8 в гл. I).

Рассмотрим теперь в качестве упражнений графики некоторых более сложных функций, содержащих абсолютную величину.

Начнем с графика функции

$$y = \frac{1}{2}(x + |x|).$$

Для $x \geqslant 0$ имеем $|x| = x$ и, следовательно,

$$y = \frac{1}{2}(x + x) = x;$$

но при $x < 0$ получаем $|x| = -x$, так что

$$y = \frac{1}{2}(x - x) = 0.$$

График этой функции, изображенный на рис. 8, легко построить, также исходя из указанных на рис. 4 и 6

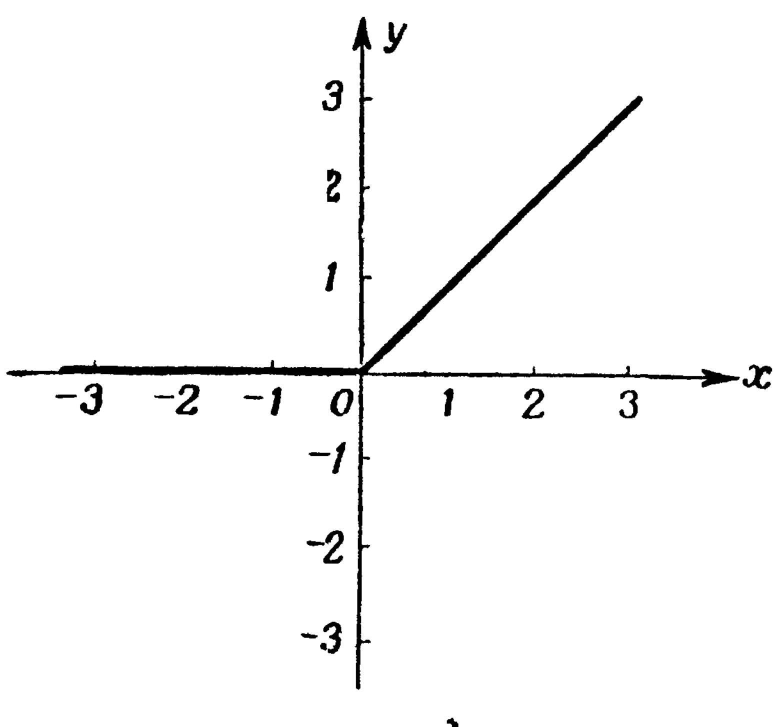


Рис. 8. График функции $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

графиков, принимая за ординату для каждой абсциссы x среднее значение ординат y_1 и y.

Легко видеть, что график, изображенный на рис. 8, можно рассматривать так же, как график функций $y = \max\{0, x\}$ или как график функции $y = \{x\}^+$.

В самом деле,

$$\{x\}^+ = \max\{0, x\} = \frac{1}{2}(x + |x|)$$

для любых значений x.

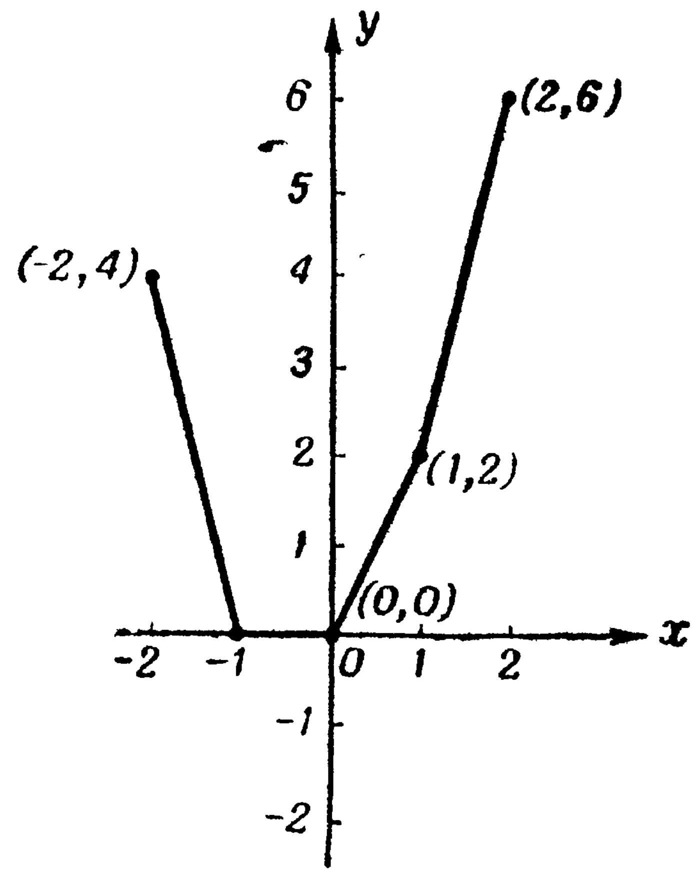


Рис. 9. График функции $y = 2|x+1| + |x| + |x-1| - 3$. $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Рассмотрим теперь график функции

$$y = 2|x+1| + |x| + |x-1| - 3 \tag{3.2}$$

в интервале $-2 \leqslant x \leqslant 2$. При $1 \leqslant x$ члены правой части уравнения (3.2) могут быть записаны следующим образом:

$$2|x+1| = 2x+2, \quad |x| = x, \quad |x-1| = x-1, \quad -3 = -3,$$

так что при $1 \leqslant x$ мы имеем

$$y = 2x + 2 + x + x - 1 - 3 = 4x - 2.$$

При $0 < x < 1$ первые два члена в правой части уравнения (3.2) могут быть записаны, как и прежде, но

$$|x-1| = 1 - x, \text{ а не } |x-1| = x - 1.$$

(Можете вы объяснить, почему?) Соответственно этому при $0 < x < 1$

$$y = 2x + 2 + x + 1 - x - 3 = 2x.$$

Аналогично при $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$y = 2x + 2 - x + 1 - x - 3 = 0$$

и при $x < -1$

$$y = -2x - 2 - x + 1 - x - 3 = -4x - 4.$$

Таким образом, уравнение (3.2) в рассмотренных интервалах сводится к разным линейным уравнениям. Вычерчивая отрезки прямых, лежащие в соответствующих интервалах, мы получим непрерывный график (см. рис. 9).

Упражнения

1. Из рассмотрения графиков, изображенных на рис. 5, 6 и 7, получите для $-a$ вывод, аналогичный теореме 1, относящейся к величине a.
2. Постройте графики функций

а) $y = \frac{1}{2}(x - |x|)$; б) $y = \frac{1}{2}(|x| - x)$; в) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$

в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

3. Определите, какие из графиков, перечисленных в упражнении 2, являются также графиками функций

г) $y = \min\{0, x\}$, ж) $y = \{x\}^-$,
д) $y = \max\{0, -x\}$, з) $y = \{-x\}^+$,
е) $y = \min\{0, -x\}$, и) $y = \{-x\}^-$.

4. Вычертите графики

а) $y = \max\{x, -x-2\}$, в) $y = \{x, -x-2\}^+$
б) $y = \min\{x, -x-2\}$, г) $y = \{x, -x-2\}^-$

в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

5. Вычертите график

$$y = 2|x-1| - |x| + 2|x+1| - 5$$

в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

6. Функция f, определяемая уравнением $y = f(x)$, называется **четной**, если $f(-x) = f(x)$ при любых значениях x,

и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ при любых значениях x. Так, функция, определяемая уравнением $y = x^2$, четна, так как $(-x)^2 = x^2$, а функция, определяемая уравнением $y = x^3$, нечетна, так как $(-x)^3 = -x^3$. (Конечно, некоторые функции могут не быть ни четными, ни нечетными.) Какие из функций, графики которых изображены на рис. 4—7, являются четными, а какие — нечетными?

§ 5. Функция sgn

График одной функции, имеющей близкое отношение к $|x|$, показан на рис. 10. Эта функция обозначается через $y = \operatorname{sgn} x$ [1]) (читается „сигнум x“ или „знак x“; не

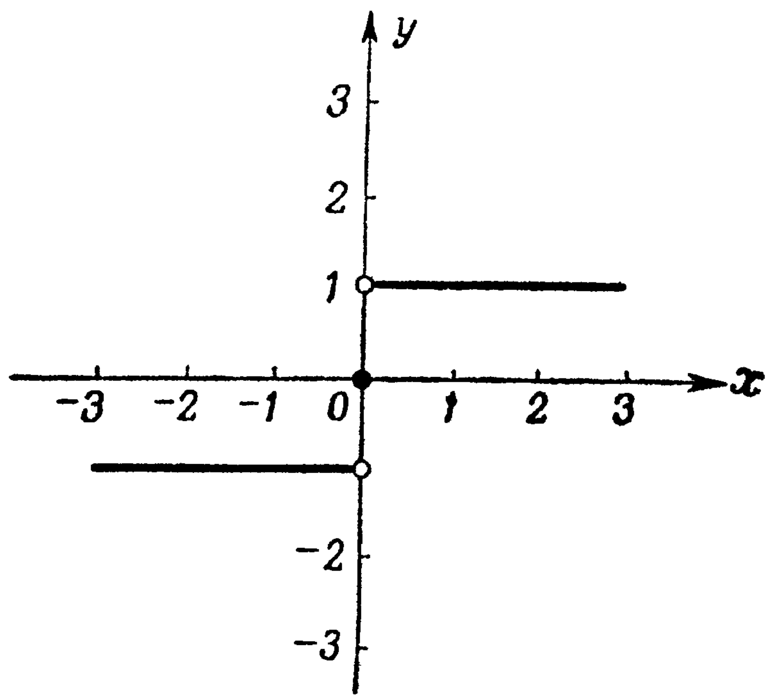


Рис. 10. График функции $y = \operatorname{sgn} x$; $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

путайте с функцией $\sin x$!) и определяется равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} x &= +1 \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \operatorname{sgn} x &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \operatorname{sgn} x &= -1 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Точки, отвечающие координатам (0, 1) и (0, —1), на рис. 10 отмечены светлыми кружочками для того, чтобы подчеркнуть, что они не включаются в график. Точка же, соответствующая координатам (0, 0), отмечена черным кружочком, чтобы подчеркнуть, что она включается в график.

[1]) От латинского слова signum — знак.

Функция $y = \operatorname{sgn} x$ связана с функцией $y = |x|$ посредством понятия подъема, которое определяется следующим образом:

Пусть L — невертикальная прямая линии плоскости, и пусть $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ — две различные ее точки (см. рис. 11 и 12). При переходе от P_1 к P_2 подъем по

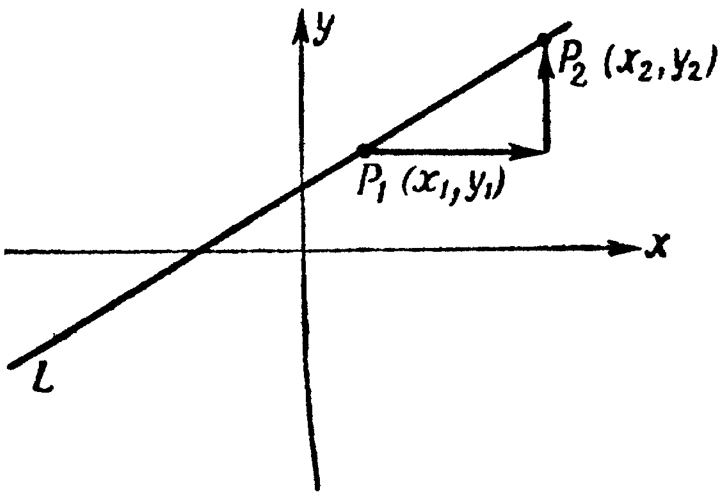


Рис. 11. Прямая L, имеющая положительный подъем.

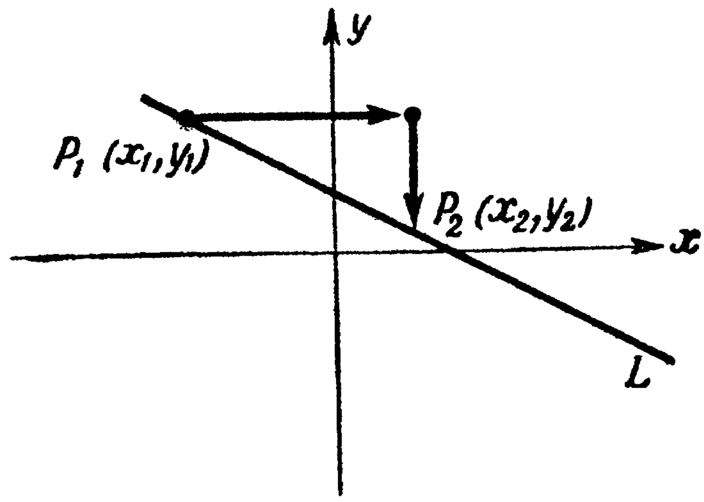


Рис. 12. Прямая L, имеющая отрицательный подъем.

вертикали выражается направленным отрезком $y_2 - y_1$, а сдвиг по горизонтали — направленным отрезком $x_2 - x_1 \neq 0$. Конечно, либо подъем по вертикали, либо сдвиг (вправо) по горизонтали, либо даже и то и другое может оказаться отрицательным. Так, на рис. 12 подъем $y_2 - y_1$ отрицателен (в действительности это спуск). Отношение величины подъема к соответствующему смещению по горизонтали, имеющее одно и то же значение для любых пар точек P_1, P_2 прямой L, называется удельным подъемом или просто подъемом m прямой L[1]):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Легко проверить, что подъем прямых $y = x$ и $y = -x$ равен соответственно 1 и -1 (см. рис. 4 и 5).

Теперь рассмотрим подъем графика $y = |x|$, изображенного на рис. 6; при этом не будем также терять из виду ординаты графика $y = \operatorname{sgn} x$, изображенного на рис. 10.

[1]) В русской литературе эта величина часто называется угловым коэффициентом прямой. — *Прим. ред.*

При $x > 0$ график $y = |x|$ совпадает с графиком $y = x$ и имеет подъем $m = 1$. График $y = \operatorname{sgn} x$ при $x > 0$ имеет ординату, равную тому же числу 1: при $x > 0$ имеем $y = \operatorname{sgn} x = 1$.

При $x < 0$ график $y = |x|$ совпадает с графиком $y = -x$ и имеет подъем $m = -1$. График $y = \operatorname{sgn} x$ при $x < 0$ имеет ординату, равную числу -1; при $x < 0$ имеем $y = \operatorname{sgn} x = -1$.

В точке $x = 0$ подъем графика $y = |x|$ неопределен. Однако можно сказать, что подъем справа в точке (0, 0) равен 1, а подъем слева в этой точке равен -1. Среднее значение этих подъемов равно $1/2\,[1 + (-1)] = 0$. График $y = \operatorname{sgn} x$ при $x = 0$ имеет ординату, также равную 0: $y = \operatorname{sgn} 0 = 0$.

Итак, функции $y = |x|$ и $y = \operatorname{sgn} x$ геометрически связаны следующим образом:

При $x \neq 0$ значение $y = \operatorname{sgn} x$ равно величине подъема графика $y = |x|$; при $x = 0$ оно равно среднему от значений подъема справа и подъема слева этого графика.

Интересно отметить, что, хотя функции $y = |x|$ и $y = \operatorname{sgn} x$, которые мы анализировали выше, совсем просты, график $y = |x|$ обладает той замечательной особенностью, что его подъем не непрерывен. А график функции $y = \operatorname{sgn} x$ еще более необычен тем, что сам имеет разрыв. Мы здесь не будем делать попыток определить понятия непрерывности и разрыва функции. Однако смысл этих понятий интуитивно ясен из приведенных примеров.

Функция $y = \operatorname{sgn} x$ связана с функцией $y = |x|$ еще и следующим поучительным образом: легко видеть, что для каждого действительного значения a

$$a \operatorname{sgn} a = |a|.$$

Это равенство представляет собой *еще одно определение абсолютной величины $|a|$ числа a.*

Упражнения

1. Проведите (в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$) прямые, проходящие через точку (0, 0) и имеющие подъемы: а) $m = 0$, б) $m = 2/3$, в) $m = -1$.

2. Вычертите заключенные внутри квадрата $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ части графиков следующих функций:

$$\text{а) } y = x, \qquad \text{б) } y = x + 1, \qquad \text{в) } y = x + 2,$$
$$\text{г) } y = x + 3, \qquad \text{д) } y = x - 1, \qquad \text{е) } y = x - 2.$$

Для части графика функции г) это то ли невозможно, то ли очень легко сделать. Что именно? Почему?

3. Вычертите графики функций

$$\text{а) } y = (x + 1) \operatorname{sgn} x, \qquad \text{б) } y = x \operatorname{sgn}(x + 1)$$

в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

4. Постройте в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 3$ такой график, чтобы для каждого значения x соответствующее значение y было равно подъему графика, изображенного на рис. 7. Для точки x, в которой величина подъема не определена, положите значение y равным среднему от подъема справа и подъема слева.

§ 6. Графики неравенств

Прежде чем оставить наглядную и поучительную тему о графиках, исследуем несколько **неравенств**, содержащих абсолютную величину.

Рассмотрим, например, уравнение

$$|x| = 1$$

и неравенство

$$|x| \leqslant 1.$$

Уравнение имеет точно два решения, а именно

$$x = 1 \quad \text{и} \quad x = -1.$$

Решениями же неравенства будут все значения x, заключенные в интервале

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Аналогично уравнение

$$|x - 1| = 2$$

имеет точно два решения:

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = 3;$$

однако решением неравенства

$$|x-1| \leqslant 2$$

может служить каждое значение x, удовлетворяющее условиям

$$-1 \leqslant x \leqslant 3$$

(см. рис. 13).

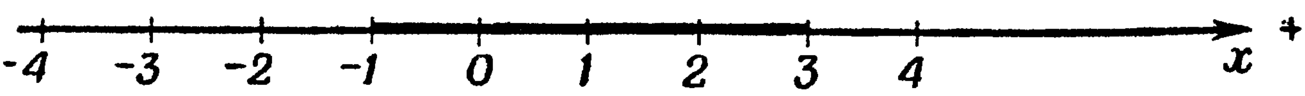


Рис. 13. Графическая иллюстрация неравенства $|x-1| \leqslant 2$.

Чтобы найти решение неравенства

$$|x|+|y| \leqslant 1, \tag{3.4}$$

рассмотрим, какой вид принимает это соотношение в каждом из квадрантов координатной плоскости x, y. Так, в первом квадранте, где

$$x \geqslant 0 \quad \text{и} \quad y \geqslant 0,$$

неравенство (3.4) равносильно следующему:

$$x+y \leqslant 1.$$

Нарисуем отрезок прямой

$$x+y=1,$$

другими словами, прямой

$$y=1-x,$$

расположенной в первом квадранте. А так как нас интересуют решения неравенства

$$y \leqslant 1-x,$$

то соответствующий график будет состоять из тех точек первого квадранта, которые лежат на этой прямой или расположены ниже ее. Этот график изображен на рис. 14; полный же график, отвечающий неравенству (3.4), изображен на рис. 15.

Рис. 14 можно рассматривать так же как график, отвечающий решению следующей системы неравенств:

$$\begin{aligned} x+y&\leqslant 1,\\ x&\geqslant 0,\\ y&\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Заштрихованные на рис. 16 области (а), (б) и (в) отвечают множествам решений одного первого, одного второго и одного третьего из неравенств (3.5). Троекратно заштри-

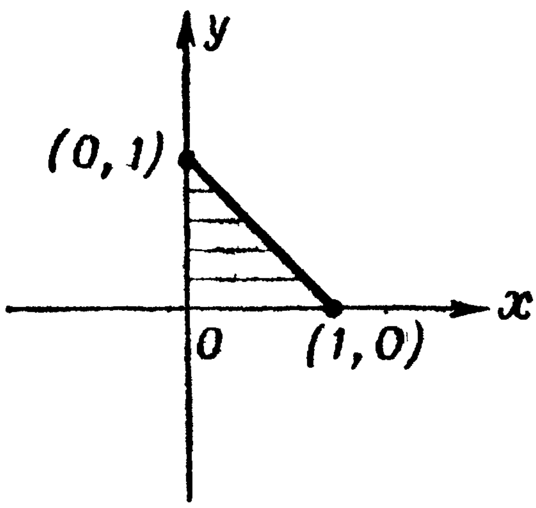


Рис. 14. Графическая иллюстрация неравенства $|x|+|y|\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

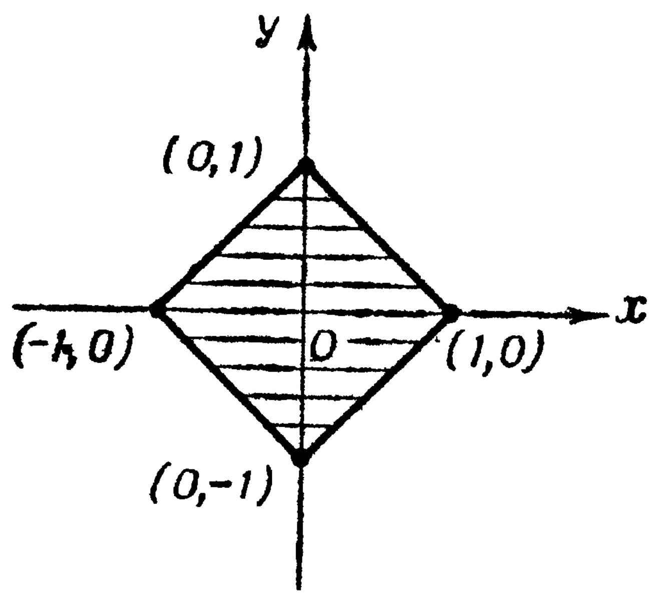


Рис. 15. Графическая иллюстрация неравенства $|x|+|y|\leqslant 1$.

хованная область (г) содержит точки, доставляющие нам решения сразу всех неравенств (3.5). Таким образом, хотя система уравнений

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ x&=0,\\ y&=0 \end{aligned}$$

вовсе не имеет решений, множество решений системы неравенств (3.5) заполняет целую область.

Вспомним, что этому до некоторой степени аналогичен случай уравнения $|x|=1$, которое имеет только два решения, в то время как решения неравенства $|x|\leqslant 1$ заполняют целый отрезок. Таким образом, множество

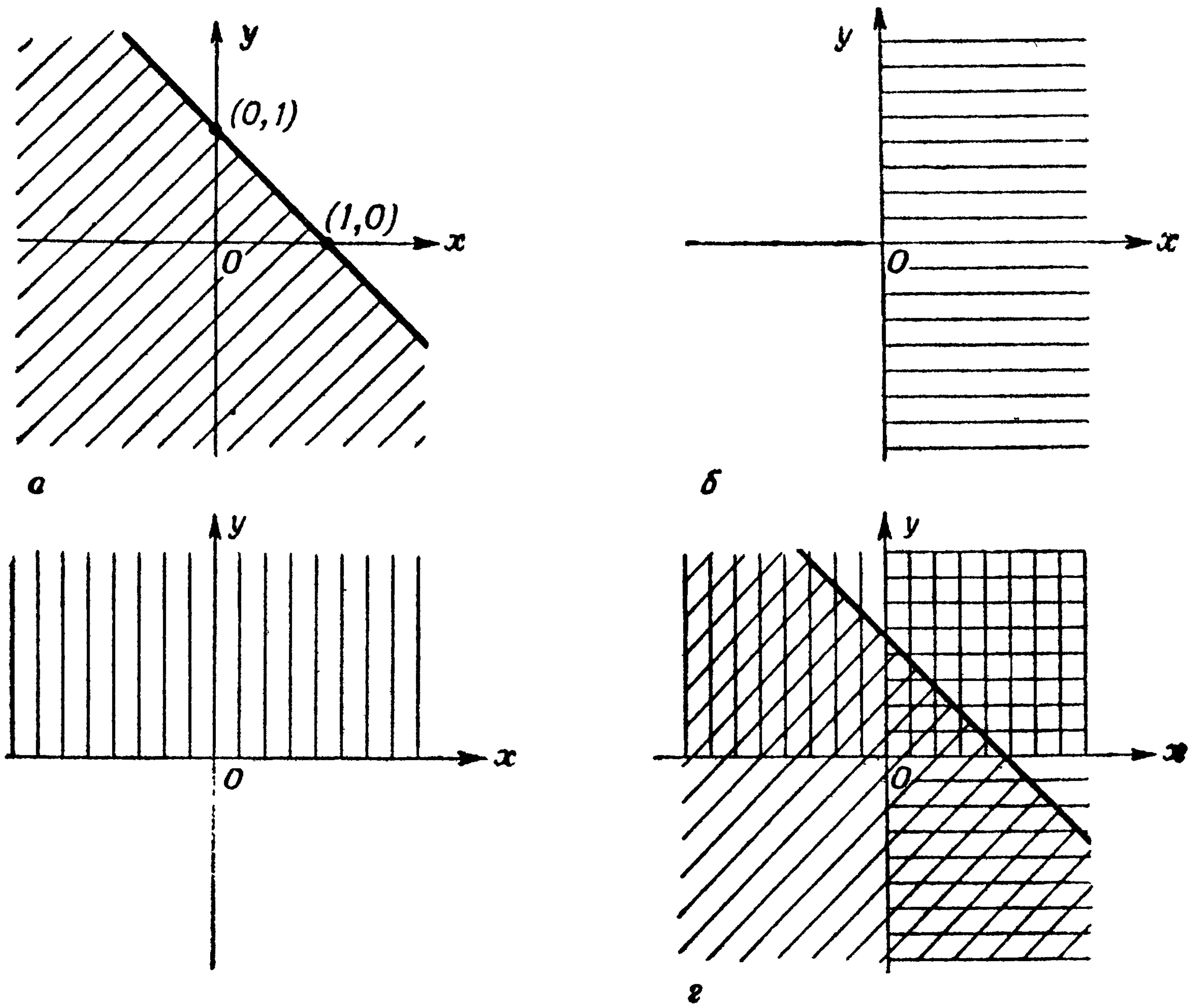


Рис. 16. Неполные графики, отвечающие множествам решений неравенства:

а) $x+y\leqslant 1$, б) $x\geqslant 0$ и в) $y\geqslant 0$.

Троекратно заштрихованная область на графике г) доставляет решения сразу всех трех неравенств системы (3.5).

всех решений неравенства (или системы неравенств) часто бывает гораздо „богаче“ множества всех решений уравнения (или системы уравнений).

Упражнения

1. На рис. 16, *г* плоскость разбита на семь частей, заштрихованных различным образом. Каждая часть (вместе с ее границей) доставляет нам множество решений некоторой системы трех неравенств: так, например, одна из этих областей описывается неравенствами $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 1$. Выпишите системы неравенств, характеризующих каждую из областей.

2. Вычертите графики неравенств

а) $|x|-|y|\geqslant 1$, где $-2\leqslant x\leqslant 2$; б) $|x|+2|y|\leqslant 1$.

3. Вычертите график системы неравенств

$$\begin{aligned} y&\leqslant x+3,\\ -2\leqslant x&\leqslant 2,\\ y&\geqslant 0. \end{aligned}$$

4. Изобразите множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} 2x+\ y&\leqslant 5,\\ x-\ y&\leqslant 1,\\ x+2y&\leqslant 7. \end{aligned}$$

5. Изобразите множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} 2x+\ y&\geqslant 5,\\ x-\ y&\leqslant 1,\\ x+2y&\geqslant 7. \end{aligned}$$

§ 7. Алгебраическое определение абсолютной величины

Последнее определение величины $|a|$, которое мы сейчас приведем, на первый взгляд может показаться менее всего удобным, так как оно представляется не имеющим отношения к делу и довольно неестественным. Но на самом деле это определение обладает большими достоинствами, связанными с чисто алгебраическим его характером. Именно поэтому этим определением абсолютной величины мы будем пользоваться чаще всего.

Для того чтобы прийти к этому определению, заметим, что если $a=-2$, то

$$a^2=(-2)^2=4, \quad \sqrt{4}=2=|a|, \text{ так что } \sqrt{a^2}=|a|.$$

Если $a=0$, то

$$a^2=0^2=0, \quad \sqrt{0}=0=|a|, \text{ так что } \sqrt{a^2}=|a|,$$

и если $a=2$, то

$$a^2=2^2=4, \quad \sqrt{4}=2|a|, \text{ так что } \sqrt{a^2}=|a|.$$

Аналогично для любых действительных a

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

и это как раз и есть наше *алгебраическое определение величины* $|a|$.

Фактически определение $|a| = \sqrt{a^2}$ является частным случаем соотношения Пифагора

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

связывающего длины катетов a, b и длину гипотенузы c прямоугольного треугольника; к нему мы приходим, положив $b = 0$. Таким образом, абсолютная величина действительного числа a может быть истолкована как длина отрезка числовой прямой между началом отсчета и точкой, изображающей число a (см. рис. 1 на стр. 9). Читатель, который продолжит изучение математики, вскоре узнает, что это последнее определение абсолютной величины (так же как и ее геометрическое истолкование) может быть соответствующим образом обобщено: абсолютную величину можно определить и для других математических объектов, например для векторов или комплексных чисел.

В только что приведенном алгебраическом выражении для величины $|a|$ заслуживают внимания два момента: во-первых, то, что число a^2 всегда неотрицательно, так что квадратный корень из a^2 является действительным числом; во-вторых, то, что по определению под символом $\sqrt{}$ понимается неотрицательное (арифметическое) значение квадратного корня. Разумеется, $(\pm 2)^2 = 4$, так что корень квадратный из числа 4 имеет два значения, а именно ± 2; но в алгебраических выражениях под символом $\sqrt{4}$ понимается только число 2, но не -2. Рассмотрим, например, равенства

$$5 + \sqrt{4} = 7, \quad 5 - \sqrt{4} = 3$$

и

$$5 - \sqrt{4} = 7, \quad 5 + \sqrt{4} = 3.$$

Первые два из них правильны, последние же два неправильны, ибо символ $\sqrt{}$ всегда обозначает неотрицательное значение квадратного корня. По этой же причине в известной формуле решения квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0,$$

перед символом $\sqrt{\ }$ появляется знак $\pm$, а именно

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Упражнения

1. Из соотношения Пифагора следует, что множество (геометрическое место) точек (x, y), являющихся решением уравнения

$$x^2+y^2=r^2,$$

представляет собой окружность, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен r. Что представляет собой множество точек (x, y), являющихся решением неравенства

$$x^2+y^2\leqslant 25?$$

2. Абсолютная величина комплексного числа $x+iy$ определяется следующим образом:

$$|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Изображая $x+iy$ точкой (x, y) плоскости, определите, что представляет собой множество решений неравенств

$$1\leqslant|x+iy|\leqslant 2.$$

3. Что представляет собой множество точек $x+iy$, для которых

$$|x+iy+1|=|x+iy-1|?$$

§ 8. Неравенство треугольника

Неравенство (3.6), фигурирующее в нижеследующей теореме 2 (выше мы уже упоминали один раз про эту теорему) в силу геометрических соображений, которые будут рассмотрены ниже в гл. IV, часто называют „неравенством треугольника“.

Сформулируем теперь полностью эту теорему.

Теорема 2. *Для всех действительных чисел a, b*

$$|a|+|b| \geqslant |a+b|. \qquad (3.6)$$

При этом равенство имеет место в том и только том случае, когда $ab \geqslant 0$, т. е. тогда и только тогда, когда или оба числа a и $b \geqslant 0$, или оба они $\leqslant 0$.

Например, если $a=5$ и $b=-2$, то

$$|a+b|=|5+(-2)|=3,$$

в то время как

$$|a|+|b|=|5|+|-2|=7.$$

Но если $a=-5$ и $b=-2$, то

$$|a+b|=|(-5)+(-2)|=7$$

и

$$|a|+|b|=|-5|+|-2|=7.$$

В справедливости неравенства (3.6) нас убеждает наша интуиция — достаточно обратить внимание на то, что если a и b имеют противоположные знаки, то в правой части неравенства числа a и b „гасят друг друга“, что приводит к уменьшению их суммарной величины, в то время как в левой части числа $|a|$ и $|b|$ „подкрепляют друг друга“, будучи одного знака.

Эти же соображения убеждают нас в справедливости неравенства

$$|a-b| \geqslant ||a|-|b||, \qquad (3.7)$$

в котором опять равенство достигается тогда и только тогда, когда $ab \geqslant 0$ (т. е. когда или оба числа a и $b \geqslant 0$ или оба они $\leqslant 0$). Здесь, напротив, в правой части неравенства числа $|a|$ и $|b|$ обязательно „гасят друг друга“, в то время как в левой части неравенства они иногда „действуют согласованно“, увеличивая суммарную абсолютную величину (так будет обстоять дело в том случае, когда a и b имеют противоположные знаки).

Используя алгебраическое определение $|a|=\sqrt{a^2}$ абсолютной величины, нетрудно доказать неравенства (3.6) и (3.7). Так, неравенство (3.6) можно записать следующим образом:

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\geqslant\sqrt{(a+b)^2}. \qquad (3.8)$$

Далее, неравенство (3.8) эквивалентно

$$(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2})^2\geqslant(a+b)^2, \qquad (3.9)$$

т. е. справедливость каждого из неравенств (3.8) и (3.9) следует из правильности другого неравенства: (3.9) получается из (3.8) при возведении последнего неравенства в квадрат (см. теорему 5 гл. II, стр. 26), а (3.8) получается из (3.9) извлечением квадратного корня из обеих частей (см. теорему 7 гл. II, стр. 30).

Но неравенство (3.9) можно переписать так:

$$a^2+2\sqrt{a^2b^2}+b^2\geqslant a^2+2ab+b^2,$$

или, что равносильно, в виде

$$\sqrt{a^2b^2}\geqslant ab. \qquad (3.10)$$

Здесь мы используем правила сложения и вычитания неравенств, а также правило умножения неравенства на положительное число. Но

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=|ab|,$$

так что (3.10) эквивалентно

$$|ab|\geqslant ab. \qquad (3.11)$$

Таким образом, неравенство (3.6) эквивалентно (3.11). А само соотношение (3.11) справедливо на основании теоремы 1 этой главы (стр. 42), утверждающей, что всякое действительное число меньше своей абсолютной величины или равно ей. Знак равенства в формуле (3.11) имеет место тогда и только тогда, когда $ab\geqslant 0$. Следовательно, эквивалентное неравенству (3.11) неравенство (3.6) также справедливо и равенство в нем имеет место тогда и только тогда, когда $ab\geqslant 0$.

Неравенство (3.7) может быть доказано аналогичным образом после того, как будет представлено в равносильном ему виде

$$\sqrt{(a-b)^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}.$$

Однако интересно отметить, что неравенство (3.7) также может быть выведено непосредственно из формулы (3.6). В самом деле, подставив в нее вместо произвольного действительного числа a действительное число $a-b$, получим

$$|a-b|+|b|\geqslant|a-b+b|$$

или

$$|a-b|+|b|\geqslant|a|,$$

откуда

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{3.12}$$

на основании теоремы 4 гл. II (правила вычитания) неравенств. Аналогично подстановка $b-a$ вместо b в формулу (3.6) дает

$$|a|+|b-a|\geqslant|a+b-a|$$

или

$$|a|+|a-b|\geqslant|b|,$$

откуда

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|. \tag{3.13}$$

Так как

$$||a|-|b||=\max\{(|a|-|b|),\ -(|a|-|b|)\}=$$
$$=\max\{(|a|-|b|),\ (|b|-|a|)\},$$

то из неравенств (3.12) и (3.13) следует, что

$$|a-b|\geqslant||a|-|b||.$$

Следовательно, соотношение (3.7) справедливо, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место в одном из неравенств (3.12) или (3.13).

Поскольку при выводе формулы (3.12) вместо a было подставлено $a-b$, то равенство в ней будет достигаться в том и только том случае, когда $(a-b)b\geqslant 0$, т. е. когда $ab\geqslant b^2$. Последнее же неравенство имеет место в том и только том случае, когда $ab\geqslant 0$ и $|a|\geqslant|b|$. Аналогично равенство в формуле (3.13) будет иметь место тогда и только тогда, когда $a(b-a)\geqslant 0$, т. е. когда $ab\geqslant a^2$. Последнее же условие выполняется в том и только том случае, когда $ab\geqslant 0$ и $|b|\geqslant|a|$. Наконец, из того, что одно из неравенств $|a|\geqslant|b|$ и $|b|\geqslant|a|$ всегда имеет место, следует, что равенства в (3.7) будут достигаться тогда и только тогда, когда $ab\geqslant 0$.

Следует отметить, что, так как b представляет собой произвольное действительное число — положительное, нуль или отрицательное, — неравенства (3.6) и (3.7) будут справедливы и в том случае, если b заменить на $-b$. При этом неравенство (3.6) принимает вид

$$|a|+|b|\geqslant|a-b|, \tag{3.14}$$

а неравенство (3.7) — вид

$$|a+b|\geqslant\big||a|-|b|\big|, \tag{3.15}$$

при этом знак равенства в формулах (3.14) и (3.15) будет достигаться тогда и только тогда, когда $a(-b)\geqslant 0$, т. е. $ab\leqslant 0$. Неравенства (3.6), (3.7), (3.14) и (3.15) вместе могут быть записаны так:

$$|a|+|b|\geqslant|a\pm b|\geqslant\big||a|-|b|\big|. \tag{3.16}$$

Упражнения

1. Исходя из алгебраического определения абсолютной величины, покажите, что для любых действительных чисел a, b справедливы соотношения

а) $|-a|=|a|$, б) $|ab|=|a|\cdot|b|$

и что при $b\neq 0$

в) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

2. Определите, какой из двух знаков $<$ или $=$ имеет место в нестрогом неравенстве $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$ при

а) $a=\pi$, $b=2\pi$; г) $a=-9$, $b=-10$;

б) $a=-\pi$, $b=\sqrt{2}$; д) $a=9$, $b=-10$.

в) $a=2$, $b=0$;

3. Определите, какой из двух знаков $>$ или $=$ имеет место в нестрогом неравенстве $|a|+|b| \geqslant |a+b|$ при

   а) $a=3, \quad b=-2$; г) $a=0, \quad b=-2$;

   б) $a=-3, \quad b=-2$; д) $a=0, \quad b=0$.

   в) $a=3, \quad b=2$;

4. Решите тот же вопрос, что и в упр. 2, для неравенства $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$.
5. Решите тот же вопрос, что и в упр. 3, для неравенства $|a|+|b| \geqslant |a-b|$.
6. Покажите, что неравенство $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$ эквивалентно неравенству $|ab| \geqslant ab$.
7. Покажите, что если $ab \geqslant 0$, то $ab \geqslant \min\{a^2, b^2\}$.
8. Покажите, что все определения величины $|a|$, приведенные в этой главе, могут быть выведены из последнего ее определения: $|a|=\sqrt{a^2}$.

ГЛАВА IV

Классические неравенства

§ 1. Введение

Теперь, когда мы выковали наши основные инструменты, продемонстрируем некоторые чудесные свойства математики. Подобно тому как художник всего лишь несколькими мазками кисти по холсту вызывает к жизни картины исключительной красоты, как музыкант из сочетаний всего лишь нескольких звуков рождает волшебные мелодии, так и математик из немногих глубоких логических предпосылок создает выводы, отличающиеся подлинным изяществом. Несмотря на их простоту, эти выводы часто кажутся нам таинственными, будто возникшими по мановению волшебной палочки, потому что их происхождение скрыто.

Основные результаты первых трех глав мы здесь используем для изучения некоторых наиболее важных для математического анализа неравенств. Эти неравенства служат аппаратом, который повседневно используют специалисты, работающие в этой области математики.

В следующей главе книги мы покажем, как можно применить эти новые соотношения для решения ряда интересных проблем, которые на первый взгляд кажутся совсем не связанными с учением о неравенствах и вообще с алгеброй. Приложением этих неравенств мы займемся и в последней главе, посвященной анализу и обобщению понятия расстояния.

Такова одна из очаровательных сторон математики — простые идеи, примененные в должной последовательности, приводят к результатам, которые никак нельзя было бы предвидеть заранее!

§ 2. Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом

а) Математический эксперимент. Даны два неотрицательных числа, скажем 1 и 2. Образуем их „среднее" следующими двумя способами: возьмем их среднее арифметическое (или полусумму), которое иногда называют просто „средним":

$$\frac{1+2}{2}=1{,}5$$

и среднее геометрическое (корень квадратный из их произведения):

$$\sqrt{1\cdot 2}=1{,}41\ldots .$$

Заметим, что $1{,}5>1{,}41\ldots$. Аналогично, если мы начнем с чисел 3 и 9, то их среднее арифметическое будет равно $1/2\,(3+9)=6$, а среднее геометрическое $\sqrt{27}=5{,}19\ldots$. Отметим, что $6>5{,}19\ldots$. Действуя таким же образом с различными парами неотрицательных чисел, выбранными наугад, допустим с числами 11 и 13, 1/2 и 1/4 и т. д., мы заметим, что в каждом случае среднее арифметическое этих чисел больше их среднего геометрического.

В праве ли мы, без риска ошибиться, обобщить эти наблюдения и сделать определенные выводы? Математическое чутье подсказывает нам, что мы, возможно, напали на след теоремы. Может быть, этот результат имеет место для всех пар неотрицательных чисел! Иными словами, мы можем предположить, что среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел во всяком случае не меньше их среднего геометрического. Выразим это предположение при помощи алгебраических символов; ниже, в п. б), мы убедимся в его истинности. Итак, сформулируем следующее утверждение:

Теорема 1. *Среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического, т. е.*

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}. \tag{4.1}$$

Равенство имеет место в том и только том случае, когда $a=b$.

Отметим, что если бы одно из двух чисел было положительным, а другое отрицательным, то соотношение (4.1) не имело бы смысла, так как его правая часть была бы мнимой[1]). Если бы оба числа были отрицательными, то левая часть неравенства (4.1) была бы отрицательной, а правая — положительной, и теорема была бы неверной.

Математический эксперимент, который привел нас к теореме 1, представляет собой пример метода „проб и ошибок", часто используемого математиками, чтобы выявить ту или иную закономерность. Раньше это было очень трудоемкой работой. В наше же время, когда для математического экпериментирования приспособлены современные цифровые вычислительные машины, мы можем за несколько часов провести тысячи и миллионы проб. Таким образом, в наших руках оказываются драгоценные ключи к установлению математических истин.

Упражнения

1. Определите среднее геометрическое и среднее арифметическое и сравните эти средние для следующих пар чисел:

а) 2, 8, б) 3, 12, в) 4, 9, г) 0, 20.

2. При условии, что p неотрицательно, определите среднее геометрическое и среднее арифметическое и сравните эти средние для следующих пар чисел:

а) p, $9p$, б) 0, p, в) 2, $2p^2$.

б) **Доказательство теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел.** Поскольку квадратный корень — это такой математический объект, который может доставить немало хлопот, мы постараемся от него избавиться, положив

$$a = c^2, \quad b = d^2, \tag{4.2}$$

что допустимо, ибо в теореме 1 предполагается, что числа a и b неотрицательны. При этом соотношение (4.1), в спра-

[1]) Понятие неравенства приложимо только к абсолютной величине комплексных чисел, но никак не непосредственно к самим комплексным числам.

ведливости которого для произвольных неотрицательных чисел a и b мы хотим убедиться, примет следующий вид:

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd, \tag{4.3}$$

где c и d — произвольные действительные числа. Неравенство (4.3) имеет место в том и только том случае, когда

$$\frac{c^2+d^2}{2} - cd \geqslant 0, \tag{4.4}$$

что в силу основных правил, относящихся к неревенствам, равносильно тому, что

$$c^2+d^2-2cd \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Здесь мы встретились с нашим старым знакомым, а именно с выражением

$$c^2+d^2-2cd = (c-d)^2. \tag{4.6}$$

Итак, (4.5) равносильно

$$(c-d)^2 \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Так как на основании теоремы 3 гл. I квадрат любого действительного числа неотрицателен, то ясно, что соотношение (4.7) всегда имеет место. Таким образом, неравенство (4.5) всегда справедливо, а следовательно, справедливы и неравенства (4.4), (4.3) и (4.1). Равенство в формуле (4.7), а значит, и в формуле (4.1) достигается в том и только в том случае, когда $c-d=0$, т. е. $c=d$, или, иначе говоря, тогда и только тогда, когда $a=b$.

Отметим, что, в то время как неравенство (4.1) теоремы 1 выполняется только для неотрицательных чисел a, b, приведенное доказательство показывает, что неравенство (4.3) имеет место для *любых* действительных чисел c, d (причем равенство достигается в том и только том случае, когда $c=d$). Мы увидим в дальнейшем, что выводы § 4 и 6 этой главы также справедливы не только для неотрицательных, но и для любых действительных чисел. Этот факт позволяет дать полученным результатам более общее геометрическое истолкование.

в) *Геометрическое доказательство.* Покажем теперь, что теорему 1 можно вывести также геометрически путем простого сравнения некоторых площадей.

Рассмотрим график функции $y=x$, изображенный на рис. 17. Пусть S и T — точки прямой $y=x$ с координатами $(c,\ c)$ и $(d,\ d)$. Рассмотрим также указанные на рис. 17 точки $P(c,\ 0)$ и $Q(0,\ d)$ и $R(c,\ d)$. Так как длина отрезка OP равна c, то длина отрезка PS также

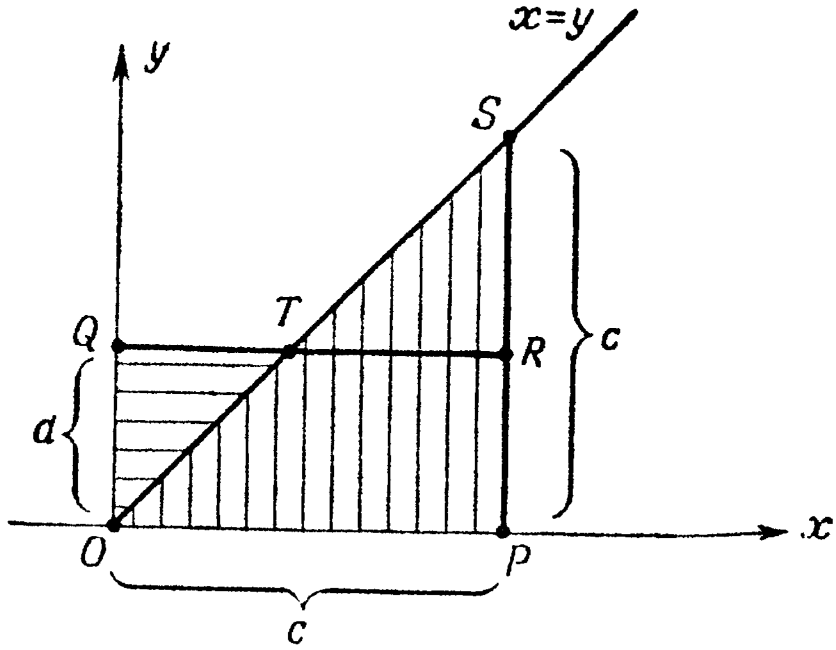


Рис. 17. Геометрическое доказательство неравенства $\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd$.

равна c. Поэтому площадь треугольника OPS, полупроизведение длин его основания и высоты, равна $c^2/2$. Аналогично площадь треугольника OQT равна $d^2/2$.

Рассмотрим теперь прямоугольник $OPRQ$. Он полностью покрывается треугольниками OPS и OQT, так что

$$\text{пл. } OPS + \text{пл. } OQT \geqslant \text{пл. } OPRQ. \tag{4.8}$$

Так как площадь прямоугольника $OPRQ$ — произведение длин его основания и высоты — равна cd, то при помощи алгебраических символов соотношение (4.8) можно записать так:

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd. \tag{4.9}$$

Неравенство (4.9) совпадает с неравенством (4.3); таким образом, наше геометрическое доказательство завершено.

Кроме того, легко видеть, что равенство достигается только тогда, когда площадь треугольника TRS равна нулю, что возможно только при совпадении точек S и T, т. е. когда $c=d$.

г) Геометрическое обобщение. Нетрудно видеть, что вышеизложенные соображения сохраняют силу и в том случае, когда кривая OTS не является прямой линией. Рассмотрим рис. 18; и в этом случае, очевидно,

$$\text{пл. } OPS + \text{пл. } OQT \geqslant \text{пл. } OPRQ. \qquad (4.10)$$

Когда вы изучите интегральное и дифференциальное исчисления и познакомитесь с приемами вычисления пло-

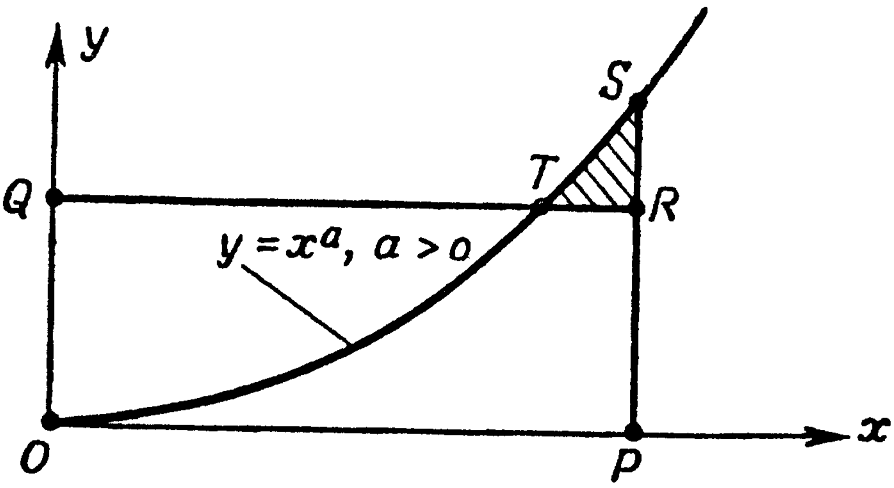


Рис. 18. Более общий случай.

щадей, ограниченных графиками простых функций, таких, например, как $y = x^a$ при произвольном положительном a, вы увидите, что таким путем получается ряд интересных неравенств. В следующих параграфах настоящей главы мы получим некоторые из этих неравенств другим способом.

Упражнения

1. Пусть a и b — длины двух смежных отрезков прямой, совместно образующих диаметр полуокружности, как это изображено

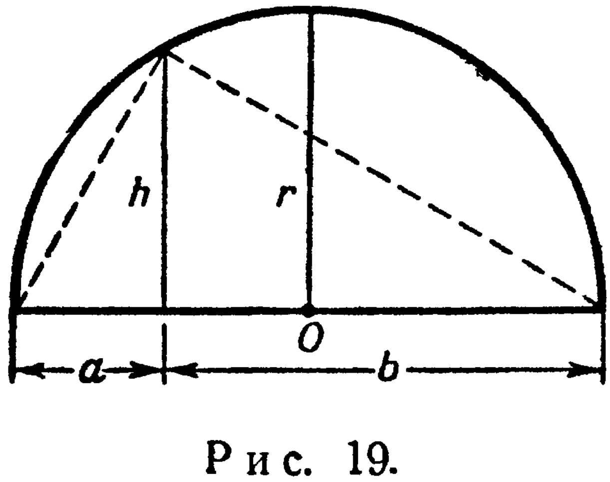


Рис. 19.

на рис. 19. Докажите, что радиус r этой окружности равен среднему арифметическому отрезков a, b, а перпендикуляр h равен их среднему геометрическому.

2. В оптике и при расчете электрических сетей часто встречается среднее двух чисел, которое называют их *средним гармоническим*. Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется такое число c, что

$$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Решая это уравнение относительно c, получаем

$$c=\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}.$$

Покажите, что среднее гармоническое двух чисел не больше их среднего арифметического и также не больше их среднего геометрического, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. покажите, что

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}.$$

3. Определите среднее гармоническое, среднее геометрическое и среднее арифметическое следующих пар чисел:

а) 2, 8; б) 3, 12; в) 4, 9; г) 5, 7; д) 6, 6.

4. Соотношение между путем s, скоростью v и временем t при равномерном прямолинейном движении имеет вид $s=vt$. Покажите, что если при движении из одного города в другой первая половина пути проходится со скоростью v_1, а вторая — со скоростью v_2, то средняя скорость движения будет равна среднему гармоническому величин v_1 и v_2. Если же половину всего времени движения скорость равна v_1, а остальное время — v_2, то средняя скорость движения совпадет со средним арифметическим чисел v_1 и v_2. В каком из этих двух случаев (при $v_1\neq v_2$) мы прибудем раньше на конечный пункт?

5. Воспользуйтесь теоремой 1 для решения упр. 2 стр. 30.

д) Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех чисел. Продолжим наш математический эксперимент. Возьмем три неотрицательных числа, скажем 1, 2 и 4, и образуем их среднее арифметическое подобно тому, как мы это делали раньше:

$$\frac{1+2+4}{3}=2,33\ \ldots .$$

Вычислим также их среднее геометрическое, т. е. корень кубичный из их произведения

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 2.$$

Мы видим, что среднее арифметическое этих трех чисел больше их среднего геометрического. Произведя аналогичный опыт для других произвольно выбранных троек неотрицательных чисел, мы убедимся, что результат во всех случаях будет таким же. Естественно возникает подозрение, что мы напали на новую теорему. Действительно, может быть, существует обобщение теоремы 1 — вывод, утверждающий, что среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического?

Теперь докажем, что в самом деле имеет место

Теорема 2. *Среднее арифметическое любых трех неотрицательных чисел a, b, c не меньше их среднего геометрического, т. е.*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}. \tag{4.11}$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда $a = b = c$.

С целью исключить из рассмотрения кубический корень положим

$$a = x^3, \quad b = y^3, \quad c = z^3. \tag{4.12}$$

Подставляя эти значения a, b и c в неравенство (4.11), получаем

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz, \tag{4.13}$$

что равносильно следующему неравенству:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0. \tag{4.14}$$

Мы докажем теорему 2, если установим, что неравенство (4.14) имеет место для произвольных неотрицательных чисел x, y, z.

Здесь мы снова получили выражение, которое можно разложить на множители. Это разложение на множители не так известно, как предыдущее, однако оно часто оказывается полезным. Мы утверждаем, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz); \qquad (4.15)$$

проверить это можно непосредственно путем умножения.

Так как $x+y+z$ — неотрицательное число, то первый множитель в правой части (4.15) положителен (если x, y и z не равны нулю одновременно). Поэтому, чтобы доказать справедливость неравенства (4.14), достаточно показать, что второй множитель также неотрицателен, т. е. что

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqslant 0. \qquad (4.16)$$

Неравенство (4.16) можно следующим образом вывести из неравенства $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geqslant 0$, уже использованного нами при алгебраическом доказательстве теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел (см. п. б) этого параграфа). Выпишем три неравенства

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy, \quad x^2+z^2 \geqslant 2xz, \quad y^2+z^2 \geqslant 2yz \qquad (4.17)$$

и сложим их почленно:

$$2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+xz+yz). \qquad (4.18)$$

Таким образом, мы получили неравенство, равносильное требуемому неравенству (4.16). Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y=z$.

Поскольку справедливо неравенство (4.16), а также $x+y+z \geqslant 0$, то левая часть (4.15) также $\geqslant 0$, т. е. неравенство (4.14) имеет место. Но неравенство (4.14) равносильно (4.11). Мы, таким образом, доказали теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех чисел. Условие $x=y=z$, при котором достигается равенство в (4.14), а следовательно, и в (4.11), равносильно условию $a=b=c$.

е) Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом для n чисел. Ободренные достигнутыми успехами, предположим, что результаты, которые мы установили для двух и для трех чисел, являются только частными случаями общей теоремы, имеющей место для любого числа положительных чисел. Если это предположение правильно, то имеет место

Теорема 3. *Среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не меньше их среднего геометрического, т. е.*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{4.19}$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенство (4.19), связывающее среднее арифметическое n чисел с их средним геометрическим, хорошо известно и, действительно, всегда имеет место. Мы обратили особое внимание на это неравенство по целому ряду причин. Во-первых, оно поразительно само по себе и притом может быть доказано множеством интересных способов. Имеются буквально десятки различных доказательств теоремы 3, основанных на положениях, вытекающих из самых разнообразных источников. Во-вторых, оно может быть использовано в качестве основной теоремы теории неравенств, в качестве краеугольного камня, на котором покоятся многие другие очень важные заключения. В-третьих, как будет показано в пятой главе, некоторые следствия этого неравенства можно использовать для решения ряда интересных задач на максимум и минимум.

Первое, что может прийти в голову при попытке доказать теорему 3, — это продолжить линию, начатую доказательствами теорем 1 и 2, т. е. найти разложение на множители соответствующего выражения для $n=4$, затем для $n=5$ и т. д. Однако на самом деле этот подход совсем не является привлекательным, он даже вообще невозможен: простых доказательств, в основе которых лежит указанная идея, не существует.

Вместо этого мы приведем простое доказательство, основанное на использовании двух методов математической индукции. Сначала при помощи метода „прямой" индукции мы докажем теорему 3 для всех целых чисел n, являющихся степенями двойки, т. е. для чисел $n=2^k$, Затем мы применим метод „обратной" индукции (от некоторого целого положительного числа n к предшествующему числу $n-1$), который наряду с методом прямой индукции даст нам возможность установить результат для любых целых положительных чисел.

1) Прямая индукция. Первый этап доказательства теоремы 3 демонстрирует технику использования метода математической индукции, рассмотренного нами выше (в § 6 гл. II).

Начнем с результата, относящегося к случаю $n=2$, а именно

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{4.20}$$

Это неравенство выполняется при любых значениях неотрицательных чисел a и b в силу теоремы 1. Однако далее нельзя обойтись без некоторой математической смекалки. Существует множество простых доказательств теоремы 3, однако во всех этих доказательствах содержится известная тонкость, требующая удачной догадки.

Положим

$$a = \frac{a_1+a_2}{2}, \quad b = \frac{a_3+a_4}{2},$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — неотрицательные числа. Подставляя эти значения чисел a и b в (4.20), получаем неравенство

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)},$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}. \tag{4.21}$$

Так как левая часть неравенства (4.21) уже записана в нужной для нас форме (см. теорему 3), то сосредоточим внимание на правой части этого неравенства. Используя неравенства

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}; \quad \frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3a_4}, \tag{4.22}$$

справедливость которых была уже установлена выше, а также условие транзитивности (теорема 1, гл. II), получаем из (4.21)

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \geqslant (a_1a_2a_3a_4)^{1/4}. \quad (4.23)$$

Но ведь это в точности тот результат, который мы хотим получить! Он получен для случая четырех неотрицательных чисел: для $n=4$ среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Неравенство (4.21) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2},$$

а (4.22) — тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $a_3=a_4$; следовательно, равенство в (4.23) достигается в том и лишь том случае, когда $a_1=a_2=a_3=a_4$.

Ничто не мешает нам повторить тот же трюк. Положим

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2}; \quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2}; \quad a_3=\frac{b_5+b_6}{2}; \quad a_4=\frac{b_7+b_8}{2},$$

где все числа b_i ($i=1, 2, \ldots, 8$) неотрицательны. Подставляя эти значения в (4.23), имеем

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_8}{8} \geqslant \left[\frac{b_1+b_2}{2}\cdot\frac{b_3+b_4}{2}\cdot\frac{b_5+b_6}{2}\cdot\frac{b_7+b_8}{2}\right]^{1/4}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\frac{b_1+b_2}{2} \geqslant \sqrt{b_1b_2}, \ \ldots, \ \frac{b_7+b_8}{2} \geqslant \sqrt{b_7b_8}$$

и условием транзитивности, получаем

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_8}{8} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8}\right)^{1/4} \geqslant (b_1b_2\ldots b_8)^{1/8},$$

т. е. требуемый результат для случая восьми чисел. Равенство имеет место в том и только том случае, когда все числа b_i равны между собой.

Очевидно, что, продолжая таким же образом, мы сможем получить аналогичное неравенство для всех чисел n, которые являются степенями двух, т. е. для $n=2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$. Для строгого вывода теоремы применим метод математической индукции. Основной шаг заключается в доказательстве следующего утверждения:

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом справедлива для всех чисел n вида 2^k, где $k=1, 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Мы уже знаем, что теорема имеет место при $n=2=2^1$, т. е. при $k=1$, а также при $n=2^2$ и $n=2^3$. Предположим, что теорема верна для целого числа n, имеющего вид 2^k, и покажем, что она верна и для числа $n_1=2^{k+1}$. Так как $2^{k+1}=2\cdot 2^k$, то это означает, что теорема 3 верна для числа $n_1=2n$.

Таким образом, мы предполагаем, что неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \tag{4.24}$$

выполняется для любого множества неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n=2^k$. Заменим числа a_i в (4.24) $(i=1, 2, \ldots, n)$ выражениями

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2}, \quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2}, \ \ldots, \quad a_n=\frac{b_{2n-1}+b_{2n}}{2},$$

где $2n$ чисел b_j $(j=1, 2, \ldots, 2n)$ — какие угодно неотрицательные числа. Поступая таким же образом, как и выше, получаем в итоге

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{2n}}{2n} \geqslant (b_1b_2\ldots b_{2n})^{1/2n}.$$

Как и раньше, равенство достигается в том и только том случае, когда все числа b_j равны между собой. Таким образом, мы доказали теорему 3 для $2n$ чисел или для 2^{k+1} чисел.

Принцип математической индукции (прямой) утверждает, что поскольку неравенство выполняется для $k=1$, то оно выполняется для любого целого положительного числа k и, следовательно, неравенство (4.24) имеет место для любого числа n, являющегося целой положительной степенью двойки.

2) Обратная индукция. Теперь мы уже доказали, что теорема 3 верна для тех целых чисел, которые являются степенями двух; однако как же нам доказать, что она имеет место для всех целых положительных чисел?

Здесь требуется иная процедура. Рассмотрим случай $n=3$, для которого мы выше уже доказали теорему 3 иным способом. Используя соотношение для $n=2^2=4$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant (a_1a_2a_3a_4)^{1/4}, \tag{4.25}$$

справедливость которого уже была доказана при помощи метода прямой индукции, посмотрим, нельзя ли отсюда получить соответствующий результат для $n=3$.

Мы проведем доказательство, используя важный метод, называемый *специализацией*. Начнем с соотношения (4.25). Выберем числа a_1, a_2, a_3 и a_4 следующим образом: положим

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2, \quad a_3=b_3 \tag{4.26}$$

и найдем значение a_4 из равенства

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

Перепишем последнее равенство, учитывая (4.26):

$$\frac{b_1+b_2+b_3+a_4}{4} = \frac{b_1+b_2+b_3}{3},$$

откуда

$$a_4 = \frac{4}{3}(b_1+b_2+b_3)-(b_1+b_2+b_3) = \frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

Подставляя эти частные значения a_i в (4.25), получаем

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqslant \sqrt[4]{b_1b_2b_3 \cdot \frac{b_1+b_2+b_3}{3}}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в четвертую степень, имеем

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^4 \geqslant b_1b_2b_3 \cdot \frac{b_1+b_2+b_3}{3};$$

после деления полученного выражения на $(b_1+b_2+b_3)/3$ получаем

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^3 \geqslant b_1b_2b_3,$$

что равносильно требуемому результату:

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}. \tag{4.27}$$

Поскольку равенство в (4.25) достигается в том и только том случае, когда $a_1=a_2=a_3=a_4$, то в (4.27) оно достигается тогда и только тогда, когда $b_1=b_2=b_3$.

С целью распространить этот метод на общий случай мы используем прием, характерный для доказательств по индукции, однако прием нестандартный. Вместо того чтобы доказывать, что если результат справедлив для n чисел, то он справедлив и для $n+1$ чисел, мы докажем, что результат справедлив для $n-1$ чисел, если он справедлив для n чисел. Поскольку мы уже доказали теорему для всех чисел n вида 2^k (где $k=1, 2, \ldots$), то этот метод позволит нам завершить доказательство теоремы.

Покажем, что *если теорема* 3 *справедлива для* n *чисел, то она справедлива и для* $n-1$ *чисел.* Для этого повторим тот же прием специализации, который мы уже применили выше. Положим

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_{n-1}=b_{n-1} \tag{4.28}$$

и определим a_n из условия

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1}.$$

Учитывая (4.28) и решая последнее уравнение относительно a_n, получаем

$$a_n=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1}. \tag{4.29}$$

Мы предположили, что неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

выполняется для n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Подставляя значения a_i из (4.28) и (4.29), имеем

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1}},$$

Возводя обе части в n-ю степень и сокращая, получаем неравенство

$$\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant b_1b_2\ldots b_{n-1},$$

что эквивалентно требуемому результату

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{b_1b_2\ldots b_{n-1}}.$$

Как и раньше, равенство достигается в том и только том случае, когда $b_1=b_2=\ldots=b_{n-1}$; таким образом, доказательство теоремы 3 полностью завершено.

§ 3. Обобщение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом

Здесь мы покажем, что многие результаты, которые кажутся обобщениями выведенной выше основной теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом, в действительности являются ее частными случаями.

В первую очередь положим, что первые m чисел x_i в неравенстве

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant (x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}$$

равны некоторому неотрицательному числу x, а остальные $n-m$ чисел — неотрицательному числу y, т. е. что

$$x_1=x_2=\ldots=x_m=x, \quad x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=y.$$

В этом случае теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ примет вид

$$\frac{mx+(n-m)y}{n} \geqslant (x^my^{n-m})^{1/n},$$

или

$$\frac{mx}{n}+\left(1-\frac{m}{n}\right)y \geqslant x^{m/n}y^{(n-m)/n}.$$

Здесь n — любое целое число, а m — целое число, значения которого заключены в пределах $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Отсюда следует, что число m/n может быть любой рациональной дробью r, принадлежащей интервалу $0 < r < 1$. Теперь последнее неравенство можно переписать так:

$$rx + (1-r)y \geqslant x^r y^{1-r}. \tag{4.30}$$

Этот результат впоследствии нам неоднократно понадобится.

Неравенство (4.30) имеет место для любых неотрицательных чисел x и y и для любой дроби r, значения которой заключены между 0 и 1. Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $x = y$.

Обозначим число r через $1/p$; поскольку $0 < r < 1$, то $p > 1$. Отсюда

$$1 - r = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}.$$

Пусть $p/(p-1) = q$, тогда $1/q = 1 - r$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

В этих обозначениях неравенство (4.30) принимает вид

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqslant x^{1/p} y^{1/q}. \tag{4.31}$$

С целью исключить из рассмотрения дробные показатели степени положим

$$x = a^p, \quad y = b^q. \tag{4.32}$$

При этом неравенство (4.31) принимает вид

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab, \tag{4.33}$$

где a и b — неотрицательные числа, а p и q — такие рациональные числа, что $1/p + 1/q = 1$. Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда

$$a^p = b^q. \tag{4.34}$$

Если считать известными понятия иррационального числа и степенной функции x^r, где показатель степени r иррационален, то можно показать [непосредственно или при помощи предельного перехода, примененного к неравенству (4.30)], что это неравенство справедливо для **любых** (рациональных или иррациональных!) значений r, заключенных между 0 и 1, и что поэтому неравенство (4.33) выполняется при л ю б ы х $p > 1$ и $q > 1$, удовлетворяющих условию

$$1/p + 1/q = 1.$$

Если вы захотите продолжить изучение этого вопроса, то прочтите сначала книгу И. Нивена «Числа рациональные и иррациональные», на которую мы уже ссылались в гл. I.

Упражнения

1. Покажите, что если все числа $y_1, y_2, \ldots, y_k$ неотрицательны и если $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — целые положительные числа, то

$$\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ky_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} \geqslant \left(y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_k^{m_k}\right)^{1/(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)}.$$

Иными словами, покажите, что если числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — правильные дроби, удовлетворяющие условию

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = 1,$$

то

$$r_1y_1 + r_2y_2 + \ldots + r_ky_k \geqslant y_1^{r_1} y_2^{r_2} \ldots y_k^{r_k}.$$

2. Средним значением нескольких чисел, имеющим большое значение в статистике, является *среднее квадратичное.* Средним квадратичным s двух неотрицательных чисел a и b называется выражение

$$s = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Вычислите среднее арифметическое и среднее квадратичное следующих пар чисел: (5, 12); (0, 1); (p, p).

3. Покажите, что среднее арифметическое двух положительных чисел не превосходит их среднего квадратичного:

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

В каком случае имеет место равенство? Сравните среднее квадратичное со средним геометрическим и средним гармоническим.

4. На рис. 20 изображена трапеция $ABDC$, основания которой равны $AB = a$, $CD = b$. Пусть O — точка пересечения диагоналей этой трапеции. Покажите, что

а) Среднее арифметическое $(a+b)/2$ двух чисел a и b может быть изображено отрезком GH, параллельным основаниям трапеции и проходящим через середину ее высоты.

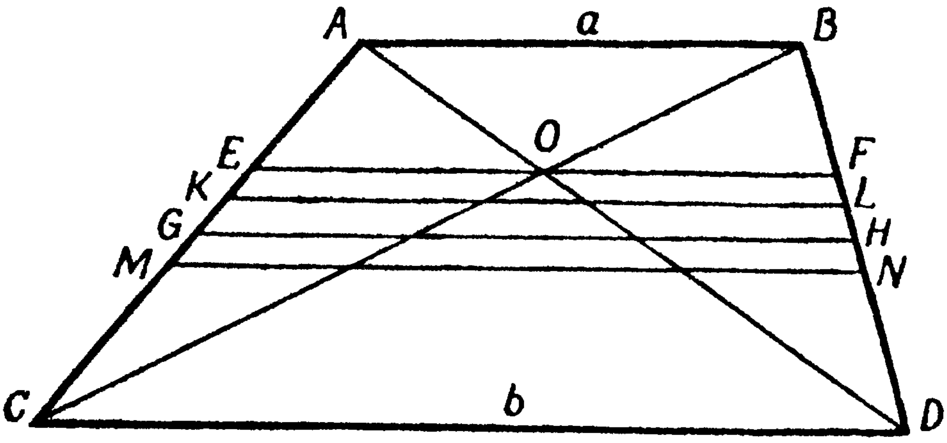


Рис. 20. Геометрическая иллюстрация неравенств
$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

б) Среднее геометрическое этих чисел $\sqrt{ab}$ изображается отрезком KL, параллельным основаниям и расположенным так, что трапеции $ABLK$ и $KLDC$ подобны.

в) Среднее гармоническое изображается отрезком EF, параллельным основаниям и проходящим через точку O.

г) Среднее квадратичное изображается отрезком MN, параллельным основаниям и разбивающим трапецию $ABDC$ на две равновеликие трапеции.

§ 4. Неравенство Коши

а) Двумерный вариант: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$. Перейдем к новой теме. Как в музыкальном произведении, эта тема будет переплетаться с главной темой, в результате чего в дальнейшем возникнут еще более замечательные выводы.

В первую очередь отметим, что неравенство
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$
на котором основывались все выводы в предыдущих параграфах этой главы (см. § 2 п. б)), является простым

следствием тождества

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

имеющего место не только для неотрицательных чисел a, b, но и для любых действительных чисел a, b.

Теперь рассмотрим произведение

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \tag{4.35}$$

Произведя умножение, получим многочлен

$$a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2,$$

совпадающий с тем, который получается после раскрытия скобок в выражении

$$(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2. \tag{4.36}$$

Отсюда получаем

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2. \tag{4.37}$$

Так как квадрат $(bc - ad)^2$ неотрицателен, то из (4.37) следует неравенство

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2 \tag{4.38}$$

для любых действительных чисел a, b, c, d. Это весьма симпатичное неравенство имеет большое значение для многих вопросов анализа и математической физики. Оно называется *неравенством Коши* или, более точно, двумерным вариантом неравенства Коши[1]).

Из соотношения (4.37) вытекает, что равенство в (4.38) достигается тогда и только тогда, когда

$$bc - ad = 0. \tag{4.39}$$

В этом случае говорят, что две пары чисел (a, b) и (c, d) *пропорциональны*. При $c \neq 0$ и $d \neq 0$ условие (4.39)

[1]) Обобщение этого неравенства, относящееся к интегральному исчислению, было сделано независимо математиками Буняковским и Шварцем. Название „неравенство Коши — Шварца“ иногда относят к неравенству (4.38) и в особенности к его обобщению. (В русской литературе термины „неравенство Коши“, „неравенство Коши — Буняковского“, „неравенство Шварца“, „неравенство Буняковского“, „неравенство Буняковского — Коши“ часто означают одно и то же. — *Прим. ред.*)

можно записать следующим образом:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

б) Геометрическая интерпретация. Впервые встретясь с тождеством (4.37), читатель вполне естественно и законно заинтересуется, каким же все-таки образом можно было натолкнуться на этот результат. Тождество выражений (4.35) и (4.36) покажется ему ничем не мотивированным, случайным, некоторым „математическим трюком", свидетельствующим лишь об известной „ловкости рук" автора приведенного доказательства.

Нерушимым принципом математики является то, что в ней нет случайных фактов и положений. Каждый результат, какое бы место он ни занимал, находит свое истолкование, благодаря которому этот результат становится прозрачным, само собой разумеющимся. Это истолкование может не сразу броситься в глаза, и оно может быть найдено не сразу. Часто подлинный смысл математической теоремы проясняется только тогда, когда мы посмотрим на нее, так сказать, „сверху", т. е. с точки зрения более общей теории. Однако истолкование, поясняющее смысл теоремы, имеется всегда — и это исключительно важно. Если бы дело обстояло не так, то математика вырождилась бы в набор несвязанных формальных трюков и схоластических выкрутасов.

Часто наиболее простое истолкование алгебраического результата имеет геометрический характер. Формулы, которые кажутся совершенно непонятными и сложными, становятся очевидными, когда раскрывается их геометрическое содержание.

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 21. Очевидно, что длины отрезков OP, OQ и PQ определяются равенствами

$$OP=(a^2+b^2)^{1/2}, \qquad OQ=(c^2+d^2)^{1/2}$$

и

$$PQ=[(a-c)^2+(b-d)^2]^{1/2}.$$

Обозначим угол между сторонами OP и OQ через θ. На основании теоремы косинусов имеем

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\theta.$$

Подставляя значения OP, OQ и PQ и упрощая полученное выражение, получаем

$$\cos\theta = \frac{ac+bd}{(a^2+b^2)^{1/2}(c^2+d^2)^{1/2}}. \tag{4.40}$$

Поскольку значение косинуса всегда заключено между -1 и $+1$, мы имеем

$$0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1. \tag{4.41}$$

Возводя в квадрат равенство (4.40) и учитывая (4.41), получаем

$$\cos^2\theta = \frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leqslant 1$$

и, наконец,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2.$$

А это ведь опять двумерный вариант неравенства Коши (4.38) — неравенства, ранее казавшегося таким непонятным и странным.

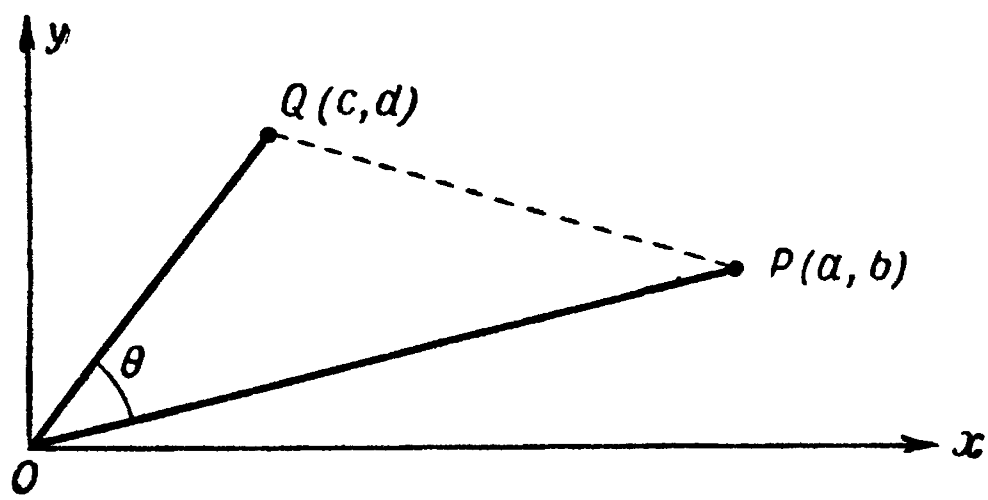


Рис. 21. Геометрическая интерпретация неравенства Коши.

Кроме того, мы видим, что равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $\cos^2\theta = 1$, т. е. тогда и только тогда, когда $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, — другими словами, в том и лишь том случае, когда точки O, P и Q лежат на одной прямой. При этом должно иметь место равенство подъемов прямых OP и OQ; иначе говоря, если $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то должно быть [1])

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

[1]) См., например, Дубнов Я. С., Введение в аналитическую геометрию, М., Физматгиз, 1959. — *Прим. ред.*

в) Трехмерный вариант неравенства Коши. Вышеприведенная интерпретация неравенства Коши для двумерного случая хороша еще и тем, что позволяет нам при помощи геометрической интуиции легко сообразить, какой вид будут иметь аналогичные результаты, относящиеся к более сложному случаю любого числа измерений.

Перейдем к случаю обыкновенного или трехмерного пространства (пространства трех измерений). Пусть $P(a_1, a_2, a_3)$ и $Q(b_1, b_2, b_3)$ — две точки, не совпадающие с началом координат $O(0, 0, 0)$. Тогда косинус угла θ между прямыми OP и OQ будет определяться равенством [1]

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)^{1/2}},$$

которое, в силу того что $\cos^2\theta \leqslant 1$, приводит к трехмерному варианту знаменитого неравенства Коши

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)^2. \quad (4.42)$$

Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда три точки O, P и Q лежат на одной прямой, что выражается соотношениями

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

имеющими смысл при условии, что все числа b_i, стоящие в знаменателях, отличны от нуля.

г) Тождество Коши — Лагранжа и n-мерный вариант неравенства Коши. Чисто алгеб-

[1] Это равенство выводится так же, как и равенство (4.40), с той разницей, что для нахождения длин сторон треугольника OPQ вместо теоремы Пифагора следует воспользоваться выражением диагонали прямоугольного параллелепипеда через его ребра. Подробнее см. любой курс аналитической геометрии или векторного исчисления, например, книгу Я. С. Дубнова „Основы векторного исчисления“ (М. — Л., Гостехиздат, 1950) или статью „Векторы и их применения в геометрии“ в т. IV Энциклопедии элементарной математики (М., Физматгиз, 1963). — *Прим. ред.*

раическое доказательство трехмерного варианта неравенства Коши (4.42) можно вывести из следующего тождества:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2)-$$
$$-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2. \quad (4.43)$$

Очевидно, что последнее выражение в (4.43) неотрицательно, так как оно состоит из суммы трех неотрицательных членов. Поэтому

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\geqslant 0.$$

Таким образом, еще одним путем доказано неравенство Коши для трехмерного случая. Из тождества (4.43) видно также, когда неравенство Коши обращается в равенство: последнее выражение в (4.43) равно нулю, лишь если каждое из трех его слагаемых равно нулю, т. е. если все числа a и b пропорциональны.

Если вы впоследствии будете изучать аналитическую геометрию в пространстве, то вы узнаете, что тождество (4.43) — это не что иное, как соотношение

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

выраженное иным способом [1]).

Тождество (4.43) можно обобщить следующим образом: для любой системы действительных чисел a_i и b_i ($i=1, 2, \ldots, n$) имеем

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2. \quad (4.44)$$

Это — известное **тождество Коши — Лагранжа**. Из тождества Коши — Лагранжа непосредственно следует

[1]) Ср., например, указанные в примечании на стр. 82 книги: Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, и Энциклопедия элементарной математики, т. IV. — *Прим. ред.*

n-мерный вариант неравенства Коши: **для любых действительных чисел** a_i **и** b_i

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2. \qquad (4.45)$$

д) Другое доказательство трехмерного варианта неравенства Коши. Все приведенные выше доказательства приводят к желаемому результату, и с этой точки зрения они вполне удовлетворительны. Однако использованные в них методы не являются настолько общими, чтобы их можно было применить и в других, интересных для дальнейшего, ситуациях. Поэтому здесь мы начнем снова с самого начала и укажем новую схему доказательства.

Начнем с нашего основного неравенства $(x-y)^2\geqslant 0$, которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\geqslant xy. \qquad (4.46)$$

Неравенство (4.46) имеет место для любых действительных чисел x и y. Вместо x и y последовательно подставим в (4.46) следующие выражения: сначала

$$x=\frac{a_1}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}}, \qquad y=\frac{b_1}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}};$$

затем

$$x=\frac{a_2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}}, \qquad y=\frac{b_2}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}}$$

и, наконец,

$$x=\frac{a_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}}, \qquad y=\frac{b_3}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

где a_i и b_i — действительные числа. Складывая три полученных таким образом неравенства, получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

что бесспорно равносильно неравенству

$$1 \geqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)^{1/2}},$$

в свою очередь равносильно неравенству Коши (4.42), что и требовалось доказать. Тем же путем можно получить n-мерный вариант неравенства Коши (4.45).

§ 5. Неравенство Гёльдера

Мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы получить одно из наиболее полезных неравенств математического анализа — неравенство Гёльдера. Оно утверждает, что *для любой системы неотрицательных чисел* a_i *и* b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)^{1/p}\left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q\right)^{1/q} \geqslant \\ \geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n, \qquad (4.47)$$

где числа p *и* q *удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (4.48)$$

и $p > 1$.

В случае $p = q = 2$ мы приходим к неравенству Коши, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Однако в противоположность неравенству Коши в общем неравенстве Гёльдера мы должны будем ограничиться лишь неотрицательными числами a_i и b_i, так как показатели степени p и q могут иметь дробные значения.

Фактически мы докажем неравенство (4.47) только для рациональных p и q. Однако окончательный результат сохраняет силу и для иррациональных p и q [1]).

Начнем с неравенства

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab,$$

[1]) Ср. выше стр. 76—77. — *Прим. ред.*

установленного нами в § 3 этой главы [см. (4.33)] для рациональных значений p и q и неотрицательных чисел a и b.

Затем используем прием, который мы уже применили в § 4. Положим

$$a=\frac{a_1}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}},\quad b=\frac{b_1}{\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q}},$$

затем

$$a=\frac{a_2}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}},\quad b=\frac{b_2}{\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q}}$$

и т. д. и сложим неравенства, получающиеся после последовательных подстановок этих значений в (4.33). При этом мы получим

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p}{a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q}{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q}}. \quad (4.49)$$

Окончательно, используя (4.48), получаем неравенство, равносильное (4.47). Равенство в (4.49) достигается тогда и только тогда, когда все отношения b_i/a_i равны между собой.

§ 6. Неравенство треугольника

Из геометрии мы знаем, что сумма длин двух сторон треугольника не меньше длины его третьей стороны. Посмотрим, как можно выразить эту теорему алгебраически.

Рассмотрим треугольник OPR, расположенный так, как показано на рис. 22. Геометрическое неравенство

$$OP+PR\geqslant OR$$

равносильно алгебраическому неравенству треугольника

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}. \quad (4.50)$$

Можно ли доказать последнее неравенство, не обращаясь к геометрии? В § 8 гл. III было приведено доказательство для одномерного случая (см. теорему 2 гл. III), в котором неравенство принимает следующий вид:

$$|x_1| + |x_2| \geqslant |x_1 + x_2|;$$

в этой записи оно встречается чаще, чем равносильное ему неравенство

$$\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + x_2)^2}.$$

Наиболее простой способ доказательства двумерного варианта неравенства треугольника (4.50) заключается

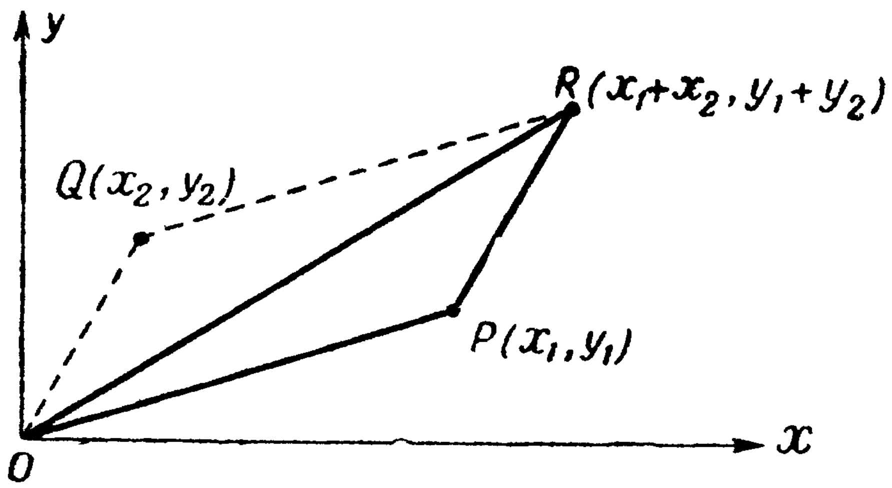


Рис. 22. Неравенство треугольника.

в том, чтобы доказать равносильное ему неравенство. Для этого возведем обе части неравенства (4.50) в квадрат, при этом мы придем к неравенству

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geqslant$$
$$\geqslant (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2,$$

равносильному (4.50). Легко видеть, что последнее неравенство в свою очередь равносильно следующему:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geqslant x_1x_2 + y_1y_2. \tag{4.51}$$

Но это неравенство является простым следствием известного неравенства Коши [двумерный вариант, см. (4.38)]

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geqslant (x_1x_2 + y_1y_2)^2, \tag{4.52}$$

что и доказывает неравенство треугольника.

Как и в одномерном случае, определение условий, при которых неравенство треугольника (4.50) обращается в равенство, не представляет особого труда. Вспомним, что в неравенстве Коши (4.52) равенство достигается тогда и только тогда, когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пропорциональны, т. е. когда $x_1 = kx_2$ и $y_1 = ky_2$. Неравенство (4.51) может быть получено путем извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства (4.52). Эта операция законна, так как имеется в виду неотрицательный квадратный корень из выражения, стоящего слева. Пусть $x_1x_2 + y_1y_2 < 0$, т. е. $x_1x_2 + y_1y_2$ есть отрицательный квадратный корень из выражения $(x_1x_2 + y_1y_2)^2$, стоящего в правой части (4.52). В этом случае даже тогда, когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пропорциональны, в (4.51) будет иметь место строгое неравенство. Таким образом, *равенство в* (4.51), а следовательно, и *в неравенстве треугольника* (4.50) *достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = kx_2$ и $y_1 = ky_2$, где k — неотрицательный коэффициент пропорциональности*[1]).

Геометрический смысл этого условия, необходимого и достаточного для того, чтобы в формуле (4.50) имело место равенство, заключается в следующем: точки O, P и Q (рис. 21) должны принадлежать одной прямой, причем точки P и Q расположены по одну сторону от точки O. При этом треугольник OPR превращается в отрезок прямой. Иначе говоря, точки P и Q не только лежат на одной прямой с точкой O, но и лежат на одном луче с началом O.

Легко убедиться в том, что полученные здесь условия согласуются с соответствующими условиями для одномерного случая (неравенства $|a| + |b| \geqslant |a + b|$), где равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a и b имеют один знак.

Доказательство неравенства треугольника можно обобщить, следуя по тому же пути, что и при выводе

---

[1]) Так, числа $(-3, 4)$ и $(6, -8)$ пропорциональны; однако в этом случае коэффициент пропорциональности отрицателен; напротив, числа $(-3, 4)$ и $(-6, 8)$ пропорциональны с положительным коэффициентом пропорциональности.

неравенства Гёльдера, а именно доказать, что *неравенство*

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2}$$

имеет место для любых действительных значений x_i, y_i, причем, как и прежде, *равенство достигается в том и только том случае, когда числа* x_i *и* y_i *пропорциональны и коэффициент пропорциональности положителен*. Мы вернемся к этому неравенству в гл. VI, где будет рассмотрен его геометрический смысл.

Перейдем к другому доказательству неравенства треугольника, которое можно использовать также и для получения более общих результатов. Имеет место тождество

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)+$$
$$+x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2).$$

Неравенство Коши в форме, использующей квадратные корни [см. (4.51)], применим по очереди к двум выражениям:

$$x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)$$

и

$$x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2).$$

Мы получим

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}\left[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right]^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)$$

и

$$(x_2^2+y_2^2)^{1/2}\left[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right]^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2).$$

Сложим эти два неравенства

$$\left[(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2}\right]\left[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right]^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2.$$

Разделив обе части на общий множитель $[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$, будем иметь

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2} \geqslant [(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}.$$

Таким образом, мы еще раз доказали неравенство треугольника (4.50).

Условия, при которых в последнем соотношении достигается равенство, можно определить из анализа промежуточных неравенств [полученных после применения неравенства Коши в форме (4.51)]: равенство опять имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = kx_2, \quad y_1 = ky_2,$$

где k — некоторый неотрицательный коэффициент пропорциональности, другими словами, тогда и только тогда, когда три точки O, P и Q лежат на одной прямой, причем точки P и Q расположены по одну сторону от точки O.

§ 7. Неравенство Минковского

Мы располагаем теперь всеми данными, необходимыми для доказательства еще одного известного неравенства, которым мы обязаны Минковскому. Неравенство Минковского утверждает, что *для любых неотрицательных*[1] *чисел* x_1, y_1, x_2, y_2 *при любом* $p>1$

$$(x_1^p+y_1^p)^{1/p}+(x_2^p+y_2^p)^{1/p} \geqslant [(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1/p}. \tag{4.53}$$

Неравенство треугольника (4.50) составляет частный случай неравенства Минковского (4.53) для $p=2$.

Доказательство неравенства (4.53) подобно доказательству неравенства треугольника с той лишь разницей,

---

[1]) Ограничение неотрицательными числами необходимо, так как, вообще говоря, не исключено, что показатели степени q и p являются дробными числами.

что здесь вместо неравенства Коши используется более общее неравенство Гёльдера (см. § 5 этой главы).

Запишем тождество

$$(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p=\left[x_1(x_1+x_2)^{p-1}+\right.$$
$$\left.+y_1(y_1+y_2)^{p-1}\right]+\left[x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}\right]$$

и применим неравенство Гёльдера к каждому члену правой части этого тождества. В результате получим

$$\left(x_1^p+y_1^p\right)^{1/p}\left[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}\right]^{1/q}\geqslant$$
$$\geqslant x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1}$$

и

$$\left(x_2^p+y_2^p\right)^{1/p}\left[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}\right]^{1/q}\geqslant$$
$$\geqslant x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}.$$

Так как $1/p+1/q=1$, то $(p-1)q=p$. Складывая последние два неравенства, имеем

$$\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{1/q}\left[\left(x_1^p+y_1^p\right)^{1/p}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{1/p}\right]\geqslant$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p.$$

Разделив затем на $[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1/q}$, получим

$$\left(x_1^p+y_1^p\right)^{1/p}+\left(x_2^p+y_2^p\right)^{1/p}\geqslant\left[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p\right]^{1-1/q}.$$

Так как $1-1/q=1/p$, то последнее неравенство полностью совпадает с требуемым неравенством Минковского (4.53).

Знак равенства в неравенстве Минковского имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место в неравенстве Гёльдера [при помощи которого и было доказано (4.53)], т. е. тогда и только тогда, когда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (расположенные в первом квадранте) лежат на одной прямой с точкой (0, 0).

Аналогично обобщениям неравенств Коши, Гёльдера и неравенства треугольника легко получить и неравенство

Минковского для двух систем из n неотрицательных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{и} \quad y_1, y_2, \ldots, y_n;$$

оно имеет вид

$$[x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p]^{1/p} + [y_1^p + y_2^p + \ldots + y_n^p]^{1/p} \geqslant$$
$$\geqslant [(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p + \ldots + (x_n + y_n)^p]^{1/p}, \quad (4.53')$$

где $p \geqslant 1$. При $p < 1$ знак неравенства следует изменить на обратный.

§ 8. Абсолютная величина числа и классические неравенства

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом, неравенства Коши и Гёльдера, неравенство треугольника и неравенство Минковского являются классическими неравенствами математического анализа. Для удобства они сведены в табл. 3 (см. стр. 94).

Эти неравенства имеют место для любых последовательностей неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ при произвольном $p > 1$ и при $1/p + 1/q = 1$. Неравенство Коши и неравенство треугольника составляют частные случаи неравенств Гёльдера и Минковского, в которые последние обращаются при $p = 2$. В теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа a_i равны между собой; в остальных же неравенствах — тогда и только тогда, когда последовательности неотрицательных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пропорциональны.

Рассмотренные неравенства относятся к неотрицательным числам. Однако абсолютная величина любого действительного числа неотрицательна, и поэтому эти неравенства в частности применимы к абсолютным величинам произвольных действительных чисел. Этот вывод можно расширить, используя теорему 2 гл. III, согласно которой сумма абсолютных величин двух чисел не меньше абсолютной величины их суммы. Так, в применении к неравенству Минковского мы имеем

$$|a_i| + |b_i| \geqslant |a_i + b_i|,$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда числа a_i и b_i имеют одинаковый знак. В табл. 4 (см. стр. 95) приведены неравенства в том более общем виде, о котором здесь идет речь.

Эти неравенства, имеющие место для произвольных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, обращаются в равенство в следующих случаях: теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом — тогда и только тогда, когда все числа a_i имеют одну и ту же абсолютную величину, остальные неравенства — тогда и только тогда, когда последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности неотрицателен.

Приведем пример, иллюстрирующий применение неравенства Минковского. Даны последовательности чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Положим

$$a_i = z_i - y_i \quad \text{и} \quad b_i = y_i - x_i.$$

Тогда

$$a_i + b_i = z_i - y_i + y_i - x_i = z_i - x_i,$$

и общее неравенство Минковского примет вид

$$\begin{aligned}(|z_1 - y_1|^p + |z_2 - y_2|^p + \ldots + |z_n - y_n|^p)^{1/p} + \\ + (|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p + \ldots + |y_n - x_n|^p)^{1/p} \geqslant \\ \geqslant (|z_1 - x_1|^p + |z_2 - x_2|^p + \ldots + |z_n - x_n|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда последовательности чисел $(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \ldots, z_n - y_n)$ и $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности неотрицателен.

ТАБЛИЦА 3

Классические неравенства для неотрицательных чисел

Название неравенства	Неравенство
Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом	$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}$
Неравенство Коши	$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2} \geqslant$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
Неравенство Гёльдера	$(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q)^{1/q} \geqslant$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
Неравенство треугольника	$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2} \geqslant$ $\geqslant [(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$
Неравенство Минковского	$(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{1/p}+(b_1^p+b_2^p+\ldots+b_n^p)^{1/p} \geqslant$ $\geqslant [(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p]^{1/p}$

ТАБЛИЦА 4

Классические неравенства для произвольных чисел

Название неравенства	Неравенство
Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом	$\frac{\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert}{n}\geqslant\lvert a_1a_2\ldots a_n\rvert^{1/n}$
Неравенство Коши	$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2}\geqslant$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
Неравенство Гёльдера	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\ldots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}(\lvert b_1\rvert^q+\lvert b_2\rvert^q+\ldots+\lvert b_n\rvert^q)^{1/q}\geqslant$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
Неравенство треугольника	$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2}\geqslant$ $\geqslant[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$
Неравенство Минковского	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\ldots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}+(\lvert b_1\rvert^p+\lvert b_2\rvert^p+\ldots+\lvert b_n\rvert^p)^{1/p}\geqslant$ $\geqslant[\lvert a_1+b_1\rvert^p+\lvert a_2+b_2\rvert^p+\ldots+\lvert a_n+b_n\rvert^p]^{1/p}$

§ 9. Симметрические средние

Вы можете подумать, что учение о неравенствах нами уже почти исчерпано. В действительности же имеет место обратное. До сих пор мы только скользили по поверхности, не проникая в глубь темы. Доказанные нами неравенства можно обобщать бесчисленным рядом способов, и эти обобщения в свою очередь могут быть обобщены. Их можно весьма остроумно комбинировать, получая при этом множество новых выводов, что мы и проиллюстрируем в этом и следующем параграфах.

Укажем, например, одно интересное обобщение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Образуем три средних:

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad m_2 = \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3}\right)^{1/2},$$

$$m_3 = (x_1x_2x_3)^{1/3}.$$

Тогда для любых неотрицательных чисел x_1, x_2 и x_3 имеют место неравенства

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3.$$

(Доказательство этого предложения предоставляем читателю.) Последнее в свою очередь является частным случаем аналогичного утверждения, справедливого для любых n неотрицательных чисел, для которых можно образовать n средних, начиная со среднего арифметического и кончая средним геометрическим.

§ 10. Арифметико-геометрическое среднее Гаусса

Даны два неотрицательных числа a и b. Введем числа a_1 и b_1, определяемые следующим образом:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

На основании аксиомы II (стр. 12) числа a_1 и b_1 также неотрицательны. Предположив, что $a > b$, имеем

$$a_1 < \frac{a+a}{2} = a, \quad b_1 > \sqrt{b^2} = b.$$

Кроме того, в силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$a_1 > b_1.$$

Повторим теперь эти выкладки, образовав числа a_2 и b_2 при помощи формул

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Тогда на тех же основаниях, что и выше

$$a > a_1 > a_2, \quad b < b_1 < b_2$$

и

$$a_2 > b_2.$$

Продолжим этот процесс, полагая

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

затем вводя a_4, b_4 и вообще a_n, b_n при помощи рекуррентных соотношений

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}. \tag{4.54}$$

После k-го шага мы получим числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$, удовлетворяющие неравенствам

$$a > a_1 > a_2 > \ldots > a_k > b_k > b_{k-1} > \ldots > b_1 > b.$$

Например, если $a = 4$ и $b = 1$, то расположение нескольких первых чисел a и b на числовой оси изображено на рис. 23. Мы видим, что b — наименьшее, а a — наибольшее из всех этих чисел и что все числа b меньше чисел a.

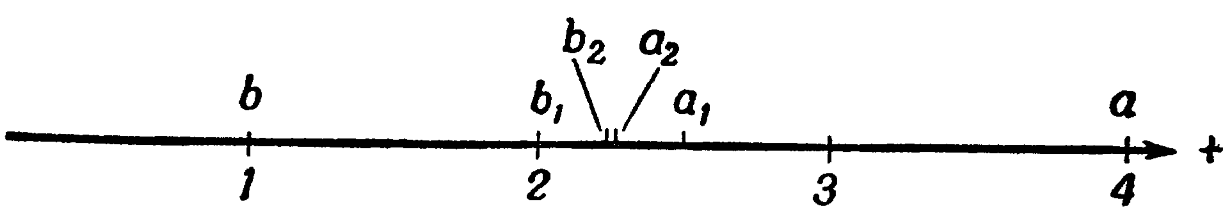


Рис. 23. Арифметико-геометрическое среднее Гаусса.

Однако, сделав k шагов, мы не должны останавливаться. Предположим, что мы строим все новые и новые числа a и b, определяемые соотношениями (4.54). Каждая пара чисел a_i, b_i, определенная таким образом, заключена между значениями предыдущей пары чисел a_{i-1}, b_{i-1}. Таким образом, правдоподобно, что числа a_n, убывающие при возрастании n, но все же остающиеся бо́льшими любого из чисел b, приближаются к некоторому фиксированному числу A. Аналогично числа b_n, возрастающие при возрастании n, но остающиеся меньшими любого из чисел a, приближаются к фиксированному числу B. Читателю, знакомому с понятием предела, ясно, что A — предел бесконечной последовательности чисел $\{a_n\}$, а B — предел бесконечной последовательности чисел $\{b_n\}$.

Кроме того, разность $a_n - b_n$ быстро уменьшается при возрастании n. Можно показать, что на каждой промежуточной стадии величина этой разности меньше половины разности, получающейся на предшествующей стадии. Действительно, учитывая (4.54), имеем

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2}. \qquad (4.55)$$

Так как $\sqrt{b_n} < \sqrt{a_n}$, то

$$2b_n < 2\sqrt{a_n b_n}.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства $a_n - b_n - 2\sqrt{a_n b_n}$, получаем

$$a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n < a_n - b_n.$$

Применив это последнее неравенство к (4.55), имеем

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n),$$

что и требовалось доказать.

Поскольку последовательности чисел a и b приближаются друг к другу, их пределы A и B должны совпасть, т. е.

$$A = B.$$

Общий предел этих последовательностей зависит только от начальных значений чисел a и b. Математики говорят в таком случае, что A является **функцией** чисел a и b. Гаусс показал, что эта функция не какой-то курьез, а весьма важна для некоторых задач анализа — она может быть использована для обоснования той области математики, которая называется теорией эллиптических функций.

ГЛАВА V

Задачи на максимум и минимум

§ 1. Введение

В этой главе мы продемонстрируем использование неравенств, установленных в предыдущей главе, для решения ряда важных и интересных задач — *задач на максимум и минимум*.

Все задачи, с которыми мы встречаемся в алгебре и тригонометрии, имеют следующий характер: требуется определить результат, если заданы начальные данные и последовательность операций, которые над ними нужно произвести, или, наоборот, заданы операции, которые нужно произвести, и окончательный результат, а требуется определить исходные данные.

Например, вы встретились с тремя рабочими: энергичным и трудолюбивым рабочим A, расчетливым и добросовестным рабочим B и отъявленным лентяем C; производительность каждого рабочего нам известна. Эти рабочие копают канавы, строят плавательный бассейн или возводят дома. Задача заключается в том, чтобы определить, сколько им потребуется времени, если известна работа, выполненная каждым из них, или определить работу рабочего C, если известно время, которое они все вместе затратили, и работа, выполненная рабочими A и B.

Вот еще пример: заданы две стороны треугольника и угол между ними, либо заданы все стороны треугольника; задача заключается в определении всех неизвестных элементов треугольника.

Эти примеры относятся к области задач, которые условно можно назвать описательными.

В этой главе мы рассмотрим задачи совершенно иного характера. Мы будем иметь дело с ситуациями, при которых имеется множество возможных путей достижения цели, а задача будет заключаться в выборе оптимального (самого выгодного) пути. Задачи такого рода возникают во всех областях науки; они составляют одно из наиболее важных применений математического анализа. Кроме того, многие предложения, играющие фундаментальную роль в физике и технике, основаны на принципах, согласно которым физические процессы протекают в природе так, чтобы определенные величины, такие, как время или энергия, достигали минимальных или максимальных значений.

Многие явления такого характера расшифровываются с помощью замечательных методов, разработанных Ферма́, Лейбницем и Ньютоном, а именно при помощи дифференциального и интегрального исчисления. Как известно, в XVII веке людей, знакомых с дифференциальным и интегральным исчислением, можно было пересчитать по пальцам. Считалось, что эти люди владеют исключительными знаниями. А теперь этот предмет изучается и в высшей, и в средней школе, и все признают, что овладение им не требует никаких особых талантов и выдающихся способностей.

Если вы прослушаете курс дифференциального и интегрального исчисления, вы убедитесь в том, что многие задачи, которые здесь решаются алгебраически, можно быстро решить при помощи указанных там методов. Было бы забавно решить их в уме с помощью развитой здесь техники, применяя формулы математического анализа для проверки правильности полученных результатов.

Каждому аппарату — интегральному и дифференциальному исчислению, также как и теории неравенств, — присущи свои преимущества и недостатки, касающиеся применений этого аппарата к решению задач на максимум и минимум. Для математики довольно характерно наличие многих различных путей решения любой конкретной задачи. Обычно задача, которую можно решить одним методом, может быть решена и многими другими методами.

§ 2. Задача Дидо́ны

Согласно легенде, город Карфаген был основан Дидоной, царицей из Тира. Она искала землю, пригодную для нового поселения. Местные жители весьма неохотно позволили ей занять территорию, которую она сможет окружить воловьей шкурой. Поняв, что если сделать буквально то, на что рассчитывали туземцы, то она получит очень малый участок земли, который неизбежно будет крайне перенаселен, царица с большой изобретательностью разрезала шкуру вола на тонкие полоски, а затем разложила их так, чтобы окружить площадь, гораздо большую, чем можно было бы просто покрыть одной шкурой.

Математическая задача, с которой встретилась Дидона, заключается в следующем: определить замкнутую кривую

Рис. 24. Задача Дидоны.

данного периметра, ограничивающую максимальную площадь (см. рис. 24)[1].

В общей форме эта задача слишком сложна, чтобы ее можно было рассмотреть здесь. Действительно, на нашем настоящем уровне мы даже не можем точно сформулировать эту задачу, так как не знаем, что следует понимать под периметром произвольной кривой и под площадью, ограниченной этой кривой. В интегральном и дифференциальном исчислении содержатся определения этих величин и формулы для их вычисления. Однако решение этой задачи относится к еще более сложному разделу высшей математики — так называемому *вариационному исчислению*.

Наша интуиция подсказывает, что оптимальной кривой в задаче Дидоны будет окружность. Однако здесь мы не

---

[1]) Обычно под задачей Дидоны понимается даже несколько более общая задача, возникающая если учесть, что участок земли, который хотела получить Дидона, являлся прибрежным, так что с одной стороны он был ограничен морем, вдоль которого можно было не протягивать ремешок, вырезанный из воловьей шкуры. — *Прим. ред.*

коснемся этого результата, а сосредоточим наше внимание на некоторых более простых вариантах этой задачи, которые легко исследуются до конца с помощью полученных выше основных результатов теории неравенств. Читателю, пожелавшему продолжить изучение этого вопроса, можно порекомендовать интересную книгу Н. Д. Казаринова „Геометрические неравенства", которая входит в ту же серию New Mathematical Library, что и настоящая книга [1]).

§ 3. Упрощенный вариант задачи Дидоны

Предположим, что в силу каких-либо практических соображений Дидона вынуждена была выбрать прямоугольный участок земли, как изображено на рис. 25.

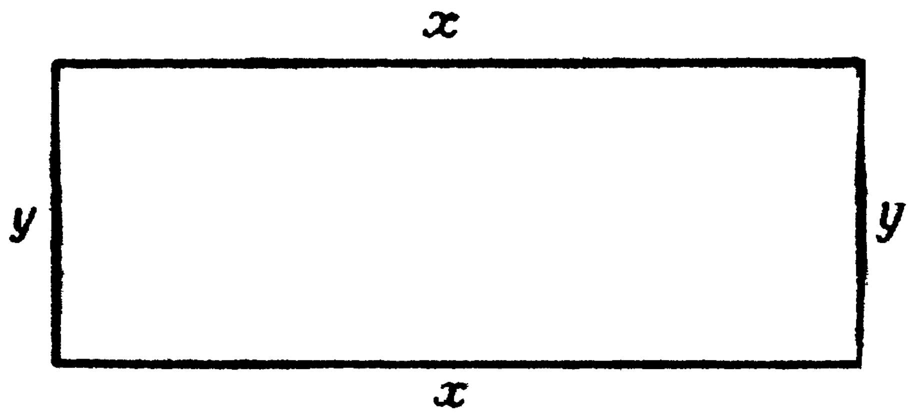


Рис. 25. Упрощенный вариант задачи Дидоны.

Если обозначить стороны прямоугольника через x и y, то его периметр будет равен

$$L = 2x + 2y, \tag{5.1}$$

а его площадь будет равна

$$A = xy. \tag{5.2}$$

Так как величины x и y представляют собой длины отрезков, они, безусловно, неотрицательны. Поскольку

[1]) Kazarinoff N. D., Geometric Inequalities, New York — Toronto, 1961. Русскому читателю можно порекомендовать следующие книги: Крыжановский Д. А., Изопериметры, М., Физматгиз, 1959, или Яглом И. М. и Болтянский В. Г., Выпуклые фигуры, § 5, М. — Л., Гостехиздат, 1951. — *Прим. ред.*

$2x+2y$ равно периметру L, то x и y должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{L}{2} \geqslant x \geqslant 0, \quad \frac{L}{2} \geqslant y \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Ясно далее, что площадь $A = xy$ не может быть сколь угодно большой. Действительно, из неравенств (5.3) и выражения (5.2) для площади следует в силу теоремы 5 гл. II, что A не может превысить величины $L^2/4$, т. е. что

$$\frac{L^2}{4} \geqslant xy = A. \tag{5.4}$$

Каким же образом определить размеры прямоугольника, при которых его площадь будет максимальной?

Обращаясь к теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел, мы видим, что

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}. \tag{5.5}$$

Это неравенство имеет место для любых неотрицательных чисел x и y. Поскольку в нашем случае $x+y = L/2$, то неравенство (5.5) означает, что

$$\frac{L}{4} \geqslant \sqrt{xy} \quad \text{или} \quad \frac{L^2}{16} \geqslant xy = A. \tag{5.6}$$

Таким образом, мы видим, что полученная нами приближенная оценка для величины $L^2/4$ [см. (5.4)] может быть существенно уточнена. Мы можем, однако, пойти еще дальше. Вспомним, что, как мы установили раньше, неравенство (5.6) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = y$. В нашем случае это означает, что новая верхняя оценка $L^2/16$ для величины площади достигается в том и лишь том случае, когда $x = y$. При любом другом выборе неотрицательных чисел x и y, удовлетворяющих условию (5.1), площадь прямоугольника будет меньше, чем $L^2/16$.

О чем говорит проведенный нами анализ? Он говорит о том, что площадь прямоугольника периметра L ни в коем случае не может превысить величину $L^2/16$ и что это максимальное значение действительно может быть достигнуто, причем в том и только том случае, когда стороны прямоугольника равны друг другу и, значит, равны $L/4$.

Таким образом, чисто алгебраическим путем мы получили доказательство хорошо известного и до некоторой степени интуитивно ясного факта: *прямоугольником наибольшей площади, имеющим заданный периметр, будет квадрат.*

§ 4. Обратная задача

Рассмотрим теперь следующую задачу: найти прямоугольник наименьшего периметра, ограничивающий заданную площадь. Эта задача обратна или двойственна первоначальной задаче Дидоны.

Возвращаясь к равенствам (5.1) и (5.2), мы видим, что теперь нам нужно определить те значения неотрицательных величин x и y, при которых сумма $2x+2y$ будет минимальной, в то время как произведение этих величин $A=xy$ дано.

Можно ожидать, что та же теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом поможет решению и этой задачи. Из соотношения (5.5) следует

$$\frac{(x+y)^2}{4} \geqslant xy = A.$$

Отсюда имеем

$$x+y \geqslant 2\sqrt{A}$$

и, значит,

$$L = 2x+2y \geqslant 4\sqrt{A}.$$

Следовательно, мы можем утверждать, что периметр искомого прямоугольника должен быть во всяком случае не меньше $4\sqrt{A}$ и что, кроме того, это минимальное значение действительно достигается, причем тогда и только тогда, когда $x=y=\sqrt{A}$. Итак, и здесь прямоугольником оптимальной формы оказывается квадрат.

Это взаимное соответствие между решениями двух задач не является случайным. Обычно при решении вариационных задач подобного типа из решения прямой задачи автоматически следует решение обратной задачи. Доказательство этого принципа двойственности можно найти в книге Н. Д. Казаринова „Геометрические неравенства“, на которую мы уже ссылались выше [1]).

§ 5. Распространение света

Предположим, что нам нужно определить, как распространяется свет, исходящий от источника P и попадающий в точку Q после отражения от плоского зеркала, как показано на рис. 26. Поставленная таким образом задача

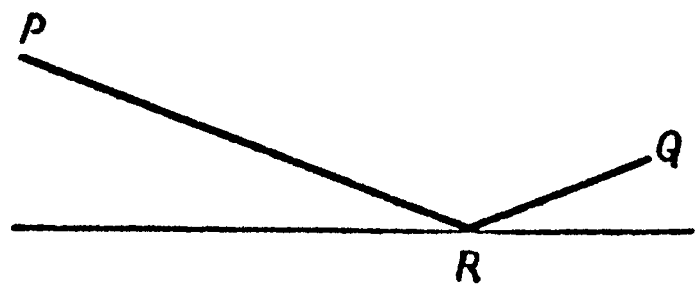


Рис. 26. Отраженный луч света.

является, конечно, пространственной. Однако нижеследующий анализ показывает, что световой луч распространяется в плоскости, проходящей через точки P и Q и перпендикулярной плоскости зеркала.

Предположим, что среда, в которой распростаняется свет, однородна, так что скорость света постоянна. Как найти точку R падения луча на зеркало и отрезки PR и RQ светового луча? Призовем на помощь принцип Ферма́, утверждающий, что реальный путь светового луча между двумя точками выделяется из всех мыслимых путей тем, что *время прохождения этого пути минимально*. Так как среда однородна, то это означает, что отрезки PR и RQ прямолинейны, и что точка R расположена таким образом, что сумма $PR+RQ$ этих отрезков минимальна.

Допустим, что координаты точек P и Q соответственно $(0, a)$ и (q, b), а неизвестный отрезок OR равен r;

---

[1]) См. также § 8 указанной в подстрочном примечании на стр. 102 книги Д. А. Крыжановского. — *Прим. ред.*

тогда (см. рис. 27)

$$OP = a, \quad TQ = b, \quad OR = r, \quad RT = q - r$$

и

$$PR = \sqrt{a^2 + r^2}, \quad RQ = \sqrt{b^2 + (q - r)^2}$$

Наша задача заключается в определении того значения r, при котором минимальна сумма $PR + PQ$, т. е. сумма $\sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + (q - r)^2}$.

Применим к этой сумме неравенство треугольника (4.50):

$$\sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + (q - r)^2} \geqslant \sqrt{(a + b)^2 + (r + q - r)^2} = \\ = \sqrt{(a + b)^2 + q^2}.$$

Таким образом, путь, пройденный светом, не может быть меньше постоянной величины $\sqrt{(a + b)^2 + q^2}$ и это наименьшее возможное значение достигается тогда и только

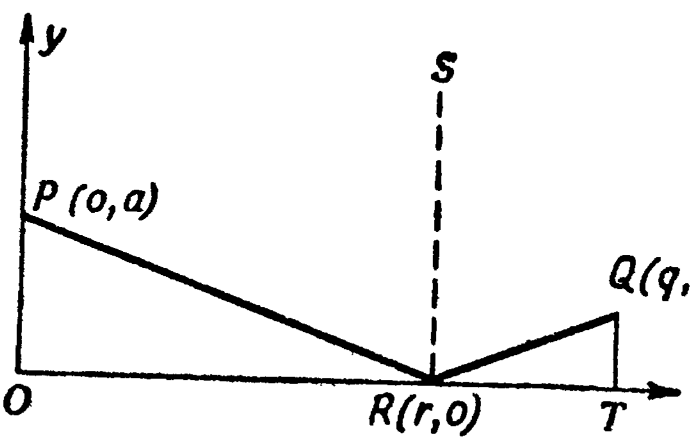


Рис. 27. Определение точки R.

тогда, когда числа $(a, \; r)$ и $(b, \; q - r)$ пропорциональны с положительным коэффициентом пропорциональности, т. е. когда

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{q - r} > 0. \tag{5.7}$$

Посмотрим, каков геометрический смысл условия (5.7). Это условие означает, что прямоугольные треугольники ORP и TRQ подобны и что $q - r$ также положительно, так как b положительно. Иначе говоря, точка R расположена между точками O и T. Из подобия прямоугольных треугольников вытекает, что их углы равны между собой: $\measuredangle ORP = \measuredangle TRQ$. Следовательно, равны между собой также и дополнительные углы: $\measuredangle SRQ$ и $\measuredangle SRP$. Таким образом, из принципа Ферма вытекает известный из оптики закон отражения света: *угол падения равен углу отражения*

$$\measuredangle SRP = \measuredangle SRQ.$$

Из него можно также получить и тот более очевидный факт, что точка R расположена между точками O и T.

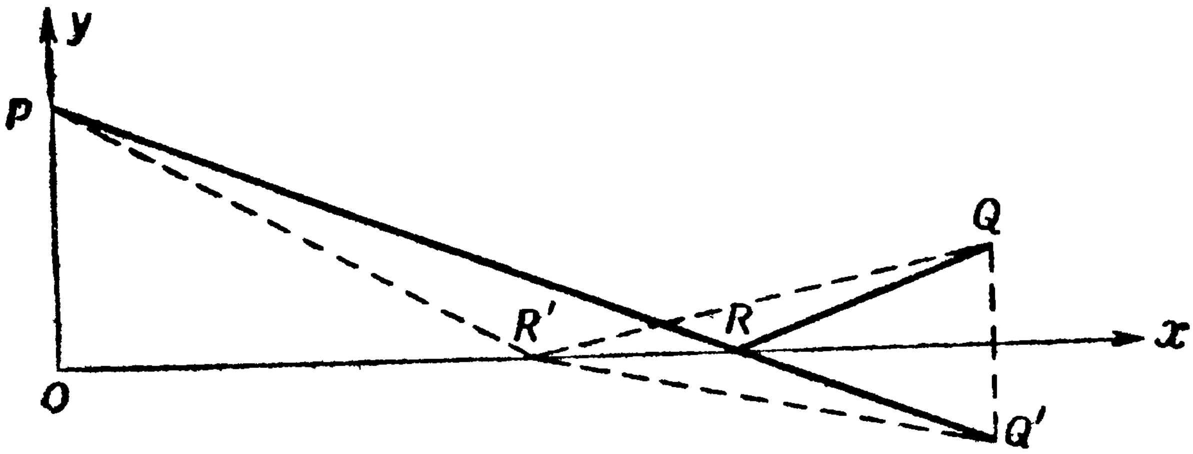


Рис. 28. Определение точки P геометрическим путем.

Сформулированный выше закон отражения света может быть установлен и из чисто геометрических соображений. Пусть R' на рис. 28 обозначает некоторую точку оси абсцисс, не сопадающую с точкой R, а Q' — точку, координаты которой имеют вид $(q, \; -b)$; тогда

$$PR + RQ = PR + RQ' = PQ' < PR' + R'Q' = PR' + R'Q.$$

Таким образом, точка R опять соответствует минимуму суммы расстояний $PR + RQ$.

Предположим теперь, что некоторая плоскость служит границей раздела двух однородных сред M_1 и M_2 различной оптической плотности. В среде M_1 свет распространяется прямолинейно со скоростью v_1; в среде M_2 он распространяется также прямолинейно, но уже с иной скоростью v_2. Каково наименьшее время, за которое свет от источника P, расположенного в среде M_1, достигает некоторой точки Q, расположенной в среде M_2 (рис. 29)?

Здесь мы снова имеем

$$PR = \sqrt{a^2 + r^2}, \quad RQ = \sqrt{b^2 + (q - r)^2}.$$

Задача состоит в том, чтобы определить минимальное время распространения света (путь/скорость)

$$t = \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(q-r)^2}}{v_2}.$$

Эта задача весьма просто решается при помощи дифференциального исчисления; однако наши элементарные неравенства не позволяют это сделать. Минимум времени t

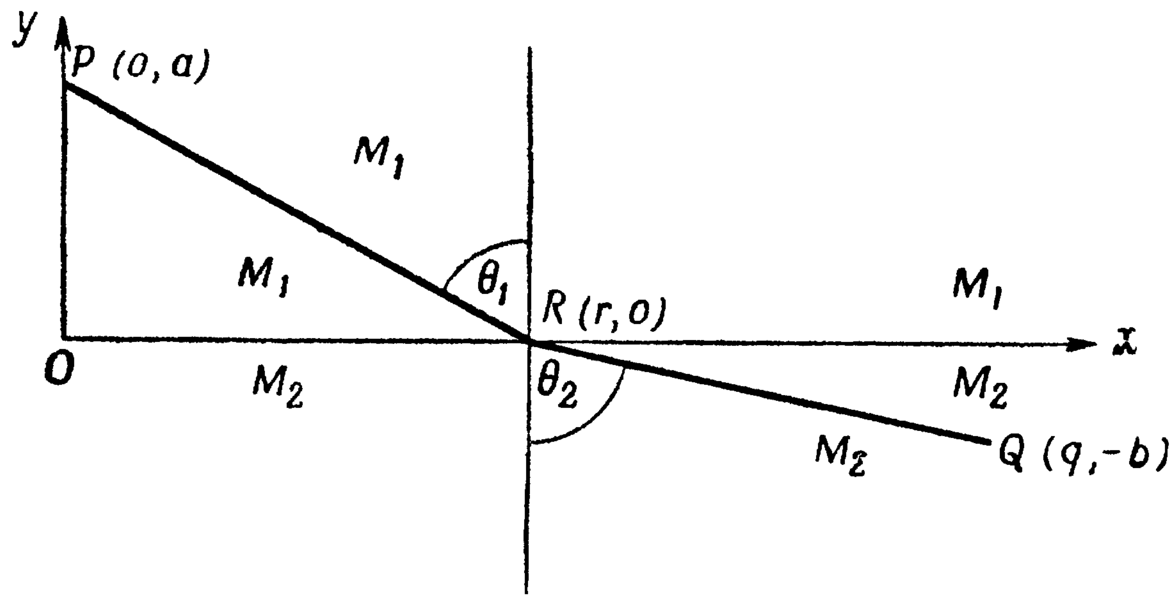


Рис. 29. Преломленный луч света.

достигается, если свет от точки P до точки Q распространяется по такой ломаной PRQ, что углы θ_1 и θ_2 между отрезками соответственно PR и RQ и нормалью к плоскости (см. рис. 29) удовлетворяют соотношению [1])

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Это известный закон преломления света (закон Снеллиуса).

§ 6. Упрощенный вариант пространственной задачи Дидоны

Перейдем к рассмотрению задачи, заключающейся в определении прямоугольной коробки наибольшего объема при заданной площади ее поверхности (рис. 30). Обозна-

[1]) Элементарно-геометрический вывод закона Снеллиуса из принципа Ферма можно найти, например, в книге: Болтянский В. Г., Яглом И. М., Преобразования. Векторы, М., „Просвещение“, 1964, стр. 46—47. — *Прим. ред.*

чив ребра коробки соответственно через x, y и z, мы заключим, что ее объем V и площадь поверхности A равны

$$V = xyz$$

и

$$A = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Нам дано A и требуется определить, при каких значениях x, y и z объем коробки V принимает наибольшее возможное значение. Решение этой задачи снова сводится

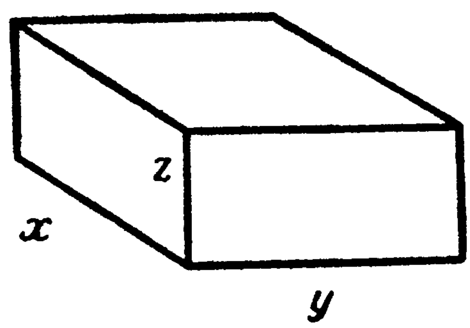


Рис. 30. Трехмерный случай упрощенной задачи Дидоны.

к применению теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Учитывая, что xy, xz и yz — это три неотрицательных числа, имеем

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geqslant [(xy)(xz)(yz)]^{1/3} = (xyz)^{2/3}. \quad (5.8)$$

Равенство здесь, как нам известно, достигается тогда и только тогда, когда

$$xy = xz = yz,$$

что имеет место в том и только том случае, когда[1])

$$x = y = z.$$

Так как

$$xy + xz + yz = \frac{A}{2},$$

[1]) Чтобы это заключение было верным, нужно дополнительно предположить, например, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Мы можем это предполагать, так как в противном случае V было бы равно нулю, что заведомо не есть максимальное значение. — *Прим. ред.*

то неравенство (5.8) означает, что

$$\frac{A}{6} \geqslant (xyz)^{2/3} = V^{2/3} \quad \text{или} \quad \left(\frac{A}{6}\right)^{3/2} \geqslant V.$$

Отсюда следует, что объем прямоугольной коробки данной площади поверхности A не превышает величину $(A/6)^{3/2}$ и что эта величина достигается тогда и только тогда, когда

$$x = y = z = \left(\frac{A}{6}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, прямоугольная коробка, объем которой при данной поверхности максимален, будет иметь форму куба. И наоборот, прямоугольная коробка минимальной поверхности, ограничивающая данный объем, будет кубом. Здесь мы снова видим взаимное соответствие между двумя взаимно обратными задачами.

Упражнения

1. Докажите, что если сумма длин 12 ребер прямоугольной коробки равна E, то максимальная величина площади ее поверхности A будет равна $E^2/24$. Покажите, что $A = E^2/24$ тогда и только тогда, когда эта коробка будет иметь форму куба.
2. Сформулируйте и решите задачу, обратную задаче упр. 1.
3. Определите, какой из всех прямоугольников, имеющих диагональ заданной длины, имеет наибольший периметр и какой имеет наибольшую площадь. (Воспользуйтесь решением упр. 3, стр. 32, или решением упр. 3, стр. 77.)

§ 7. Треугольник максимальной площади, имеющий заданный периметр

Рассмотрим теперь задачу определения треугольника максимальной площади, имеющего заданный периметр. Пусть p — полупериметр треугольника, изображенного на рис. 31, т. е. пусть

$$p = \frac{x+y+z}{2},$$

Хорошо известно, что площадь A треугольника определяется формулой

$$A=[p(p-x)(p-y)(p-z)]^{1/2}.$$

Требуется найти максимальное значение площади при условии, что x, y и z могут принимать любые положительные значения, такие, что

$$2p=x+y+z,$$

где p — заданное число.

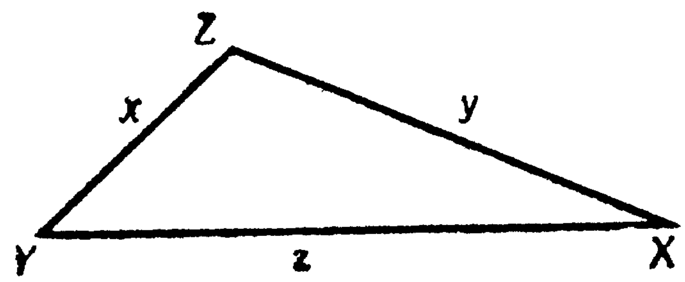


Рис. 31. Задача Дидоны для треугольника.

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом поможет довольно просто решить и эту задачу. Для трех неотрицательных чисел $p-x$, $p-y$ и $p-z$ имеем

$$[(p-x)(p-y)(p-z)]^{1/3}\leqslant\frac{(p-x)+(p-y)+(p-z)}{3}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3p-(x+y+z)}{3}=\frac{3p-2p}{3}=\frac{p}{3}.$$

Следовательно,

$$(p-x)(p-y)(p-z)\leqslant\left(\frac{p}{3}\right)^3. \qquad (5.9)$$

После несложных преобразований из (5.9) получаем

$$A=[p(p-x)(p-y)(p-z)]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left[p\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]^{1/2}=\left(\frac{p^4}{3^3}\right)^{1/2}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

где неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$p-x=p-y=p-z,$$

т. е. тогда и только тогда, когда $x = y = z$. Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.*

Заметим, что все результаты, полученные в этой главе, указывают на то, что симметрия и оптимальные свойства тесно связаны между собой. Пожалуй, лучше всего подходит к этому случаю глубокое изречение поэта Китса, относящееся ко всем эстетическим проблемам: „Красота правдива, правда прекрасна“.

Упражнения

1. Полупериметр треугольника равен p, его площадь равна A, а стороны — x, y и z. В таком случае

$$p = \frac{x+y+z}{2}$$

и

$$A^2 = p(p-x)(p-y)(p-z).$$

Обозначим площадь равнобедренного треугольника (частный случай, к которому мы приходим, положив $y = z$) через I, а площадь равностороннего треугольника (частный случай, к которому мы приходим, положив $x = y = z$) — через E. Покажите, что

$$I^2 = \frac{p}{4} x^2 (p-x)$$

и

$$E^2 = \frac{p^4}{27}.$$

2. Используя обозначения упр. 1, покажите, что для треугольников одного периметра $2p$

$$E^2 - I^2 = \frac{p}{27}(p+3x)\left(p - \frac{3x}{2}\right)^2$$

и

$$I^2 - A^2 = \frac{p}{4}(p-x)(y-z)^2,$$

где x — основание равнобедренного треугольника и одновременно длина одной из сторон произвольного треугольника.

3. Используя формулы упр. 2, докажите, что
$$E^2 - I^2 \geqslant 0$$
и
$$I^2 - A^2 \geqslant 0.$$
При каких условиях достигается равенство?

4. Используя одно из неравенств упр. 3, докажите, что из всех треугольников данного периметра с фиксированной длиной одной стороны наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

5. Используя одно из неравенств упр. 3, докажите, что из всех равнобедренных треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

6. Используя неравенства упр. 3, объясните, почему формула
$$A = \sqrt{E^2 - (E^2 - I^2) - (I^2 - A^2)}$$
выражает A через несколько неотрицательных величин и каким образом результаты, установленные в упр. 4 и 5, и теорема 1 настоящего параграфа вытекают из этой формулы.

7. Определите, какой из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой имеет наибольшую высоту, опущенную на гипотенузу.

§ 8. Богатый футболист

Рассмотрим сходную, но несколько более сложную задачу.

Некий футболист отказался от подвигов на футбольном поле ради положения в обществе. С течением времени, став владельцем многих акций, он разбогател. Будучи сентиментальным (что свойственно многим отставным футболистам), он завещал, чтобы его похоронили в склепе, имеющем форму гигантского футбольного мяча. Его душеприказчики, уважая последнее желание усопшего, столкнулись с необходимостью выполнить его самым экономным образом.

После некоторых размышлений они решили, что математическая задача, наиболее близко приближающаяся к ситуации, с которой они встретились, заключается в том, чтобы *описать около прямоугольного параллелепипеда данных размеров эллипсоид наименьшего возможного объема* [1]).

Рассуждая так же, как мы в предыдущих задачах, они начали с решения обратной задачи: *вписать в данный эллипсоид прямоугольный параллелепипед наибольшего возможного объема.*

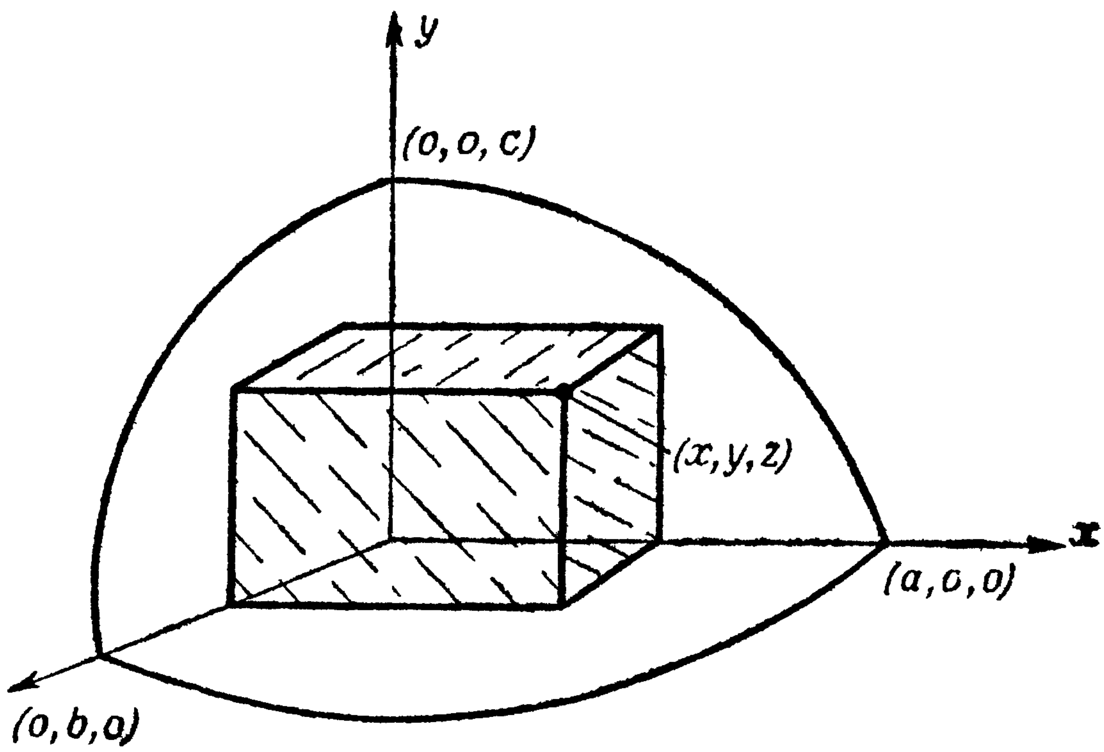


Рис. 32. Восьмая часть параллелепипеда, вписанного в эллипсоид.

В пространственной аналитической геометрии устанавливается, что эллипсоид, центр которого совпадает с началом координат, а оси направлены по осям координат, записывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (5.10)$$

где $2a$, $2b$, $2c$ — оси эллипсоида [2]). Интуитивно ясно, что центр вписанного прямоугольного параллелепипеда будет совпадать с началом координат, а его ребра будут параллельны осям координат. Таким образом, если одна из вершин параллелепипеда с координатами (x, y, z) при-

---

[1]) В американском футболе („регби") играют мячом, имеющим форму не шара, а скорее сплющенного эллипсоида. — *Прим. ред.*

[2]) См. любой учебник аналитической геометрии в пространстве. — *Прим. ред.*

надлежит поверхности эллипсоида (см. рис. 32, на котором изображена восьмая часть эллипсоида), то остальные семь вершин должны быть расположены симметрично. Это означает, что координаты остальных семи вершин параллелепипеда определяются следующим образом:

$$(-x,\ y,\ z),\ (x,\ -y,\ z),\ (x,\ y,\ -z),\ (-x,\ -y,\ z),$$
$$(x,\ -y,\ -z),\ (-x,\ y,\ -z),\ (-x,\ -y,\ -z).$$

Так как ребра параллелепипеда имеют длину $2x$, $2y$, $2z$, то его объем равен

$$V = 8xyz. \tag{5.11}$$

Задача, которая стоит перед нами, заключается в нахождении максимального значения величины (5.11) при условии, что числа x, y и z удовлетворяют условию (5.10).

И эта задача также легко решается с помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Мы имеем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \geqslant \left(\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}\right)^{1/3}. \tag{5.12}$$

Учитывая, что x, y и z удовлетворяют условию (5.10), и используя выражение (5.11) для V, мы видим, что из неравенства (5.12) следует

$$\frac{1}{3} \geqslant \frac{V^{2/3}}{4(a^2b^2c^2)^{1/3}},$$

или

$$\frac{4}{3}(abc)^{2/3} \geqslant V^{2/3}.$$

Отсюда вытекает, что наибольший возможный объем параллелепипеда равен $8abc/(3\sqrt{3})$; кроме того, в силу условий равенства в (5.12) этот объем достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

или

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y=\frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad z=\frac{c}{\sqrt{3}}. \tag{5.13}$$

Это и есть искомые размеры параллелепипеда, вписанного в данный эллипсоид с полуосями a, b и c.

Вернемся теперь к прямой задаче. Мы видели, что для данных a, b, c выражения (5.13) для x, y, z доставляют половины длин ребер прямоугольного параллелепипеда максимального объема. Но можно ли заключить отсюда, что для заданных величин x, y, z значения

$$a=\sqrt{3}\,x,\quad b=\sqrt{3}\,y,\quad c=\sqrt{3}\,z \qquad (5.14)$$

отвечают минимальному объему описанного эллипсоида? Были ли душеприказчики футболиста достаточно проницательными или им просто повезло, но так или иначе, они были правы, следуя своему математическому чутью. Действительно, вот доказательство:

Объем W эллипсоида (5.10) *определяется формулой*

$$W=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Даны положительные числа x, y, z. Нужно найти такие значения положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению (5.10), *чтобы объем W эллипсоида принимал минимальное значение.*

Чтобы установить взаимное соответствие между прямой и обратной задачами, можно поступить следующим образом. Так как нам теперь известны числа x, y, z, а нужно определить числа a, b и c, то мы „обратим“ и алфавит, положив

$$a=\frac{1}{X},\quad b=\frac{1}{Y},\quad c=\frac{1}{Z};\qquad x=\frac{1}{A},\quad y=\frac{1}{B},\quad z=\frac{1}{C}. \qquad (5.15)$$

При этом уравнение (5.10) заменится следующим:

$$\frac{(1/A)^2}{(1/X)^2}+\frac{(1/B)^2}{(1/Y)^2}+\frac{(1/C)^2}{(1/Z)^2}=1$$

или

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1. \qquad (5.10')$$

Требуется найти такие числа X, Y, Z, удовлетворяющие условию (5.10′), для которых величина

$$W=\frac{4}{3}\pi abc$$

имеет минимальное значение. Так как коэффициент $4\pi/3$ постоянен, то нахождение минимума W сводится к нахождению минимума произведения

$$abc = \frac{1}{XYZ},$$

что в свою очередь равносильно определению максимума величины

$$V' = 8XYZ. \qquad (5.11')$$

Но ведь это как раз та задача, которую мы уже решили, а именно задача определения параллелепипеда наибольшего возможного объема, вписанного в данный эллипсоид! Неважно, что этот эллипсоид (5.10′) и параллелепипед объема (5.11′) в действительности не имеют никакого отношения к нашему футболисту; проведенное рассуждение позволяет оттенить роль чисто математического анализа задач. Решение выглядит так [ср. с равенствами (5.13)]:

$$X = \frac{A}{\sqrt{3}}, \quad Y = \frac{B}{\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{C}{\sqrt{3}}. \qquad (5.13')$$

Подставляя (5.15) в (5.13′), получаем (5.13) и (5.14).

Полагая (что достаточно реально) длину параллелепипеда $2x$ равной 6 футам, его ширину $2y$ равной 2 футам, а высоту $2z$ равной 1 футу[1]), мы получим следующие размеры описанного вокруг параллелепипеда эллипсоида минимального объема:

$$a = 3\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{3}/2,$$

В эллиптическом склепе (в силу его искривленности) нашлось бы достаточно места и для нескольких изношенных футбольных мячей, которые составили бы компанию нашему герою футбольного поля на месте его успокоения.

§ 9. Касательные

Применим теперь теорию неравенств к задаче нахождения касательной к данной кривой. Конечно, здесь мы сможем опереться только на нашу математическую интуицию,

[1]) Фут составляет около 30 см. Утверждение о „достаточной реальности“ таких размеров мы оставляем на совести авторов. — *Прим. ред.*

поскольку точное определение того, что мы понимаем под касательной к кривой в данной точке, лежит за пределами круга вопросов, обсуждаемых в этой книге.

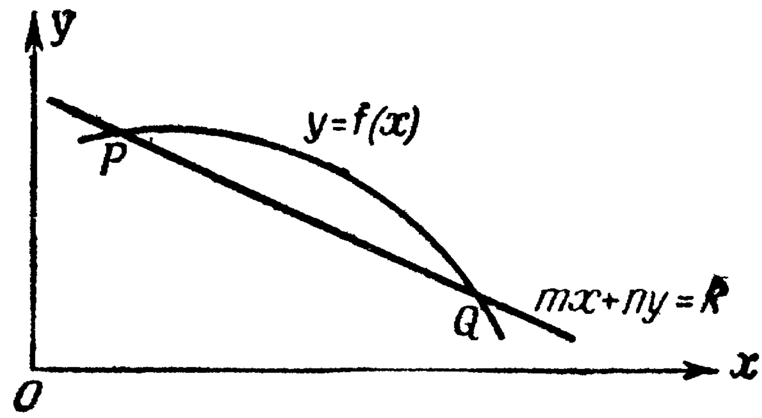


Рис. 33. Кривая и хорда.

Рассмотрим кривую, определяемую уравнением $y=f(x)$, и прямую, заданную уравнением

$$mx+ny=k, \tag{5.16}$$

которая пересекает нашу кривую в точках P и Q, как это изображено на рис. 33. Будем перемещать прямую параллельно себе самой [это вызовет только изменение

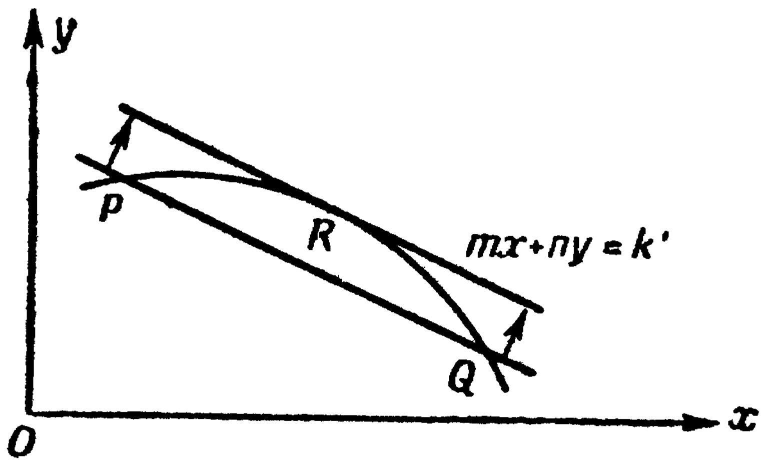


Рис. 34. Кривая и касательная.

значения k в уравнении (5.16) прямой], пока эти две точки не сольются в одну точку R (см. рис. 34). Прямую $mx+ny=k'$ можно назвать касательной к кривой $y=f(x)$ в точке R. Обратим внимание на то, что здесь мы и не пытались точно определить понятие касательной. Однако вы уже знакомы с касательной к окружности и можете убедиться в том, что в данном частном случае описанная процедура приводит к ожидаемому результату.

Используем описанное построение и теорию неравенств для того, чтобы найти касательные к эллипсу, имеющие данное направление. Предположим, что эллипс (см. рис. 35) задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

и положим, что (x_1, y_1) — одна из двух точек касания с эллипсом прямых вида $mx+ny=k$, где m и n — фик-

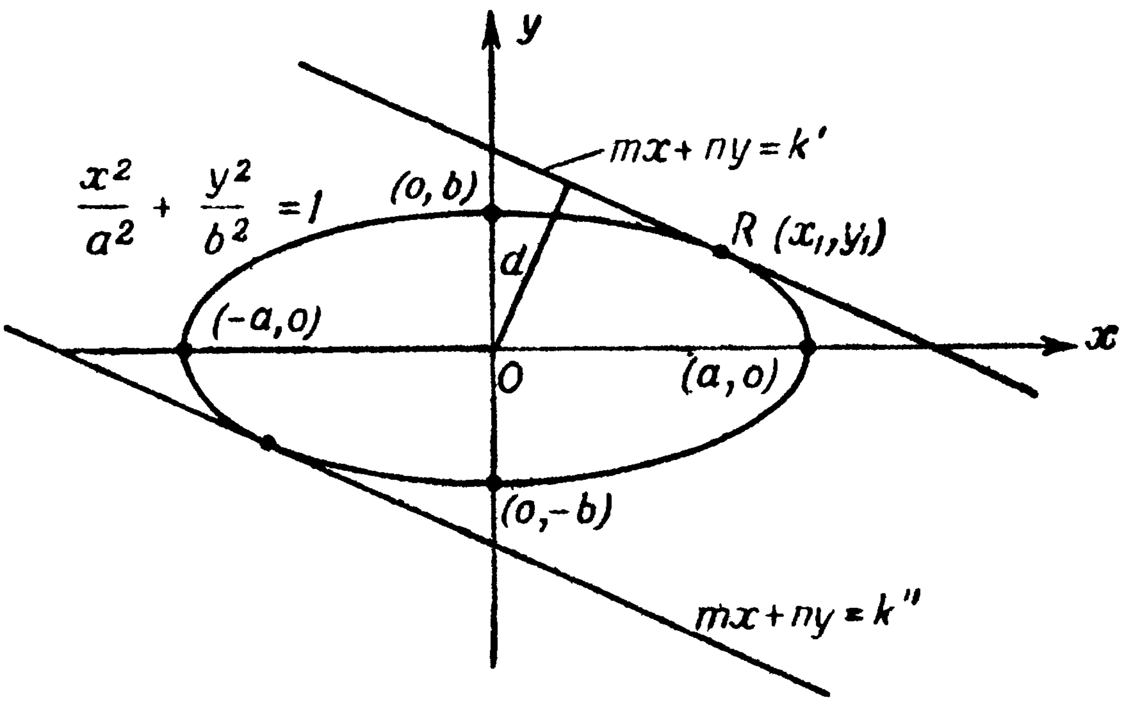


Рис. 35. Эллипс и две параллельные касательные к нему.

сированы (причем $m^2+n^2\neq 0$), а k может принимать любое значение. Заметим, что точка касания удовлетворяет следующим условиям:

а) Точка (x_1, y_1) принадлежит эллипсу, т. е. значения x_1, y_1 удовлетворяют уравнению

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \tag{5.17}$$

б) Точка (x_1, y_1) принадлежит прямой, т. е. значения x_1, y_1 удовлетворяют уравнению

$$mx_1+ny_1=k.$$

в) При переменном k расстояние от начала координат до прямой $mx+ny=k$ **максимально** по сравнению со всеми другими прямыми, для которых существуют точки (x_1, y_1), удовлетворяющие условиям а) и б).

Расстояние d от начала координат до прямой $mx+ny=k$ определяется формулой

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}. \qquad (5.18)$$

Чтобы убедиться в этом, отметим, что подъем прямой

$$mx+ny=k \qquad (5.19)$$

равен $-m/n$ (см. рис. 36), и поэтому уравнение перпен-

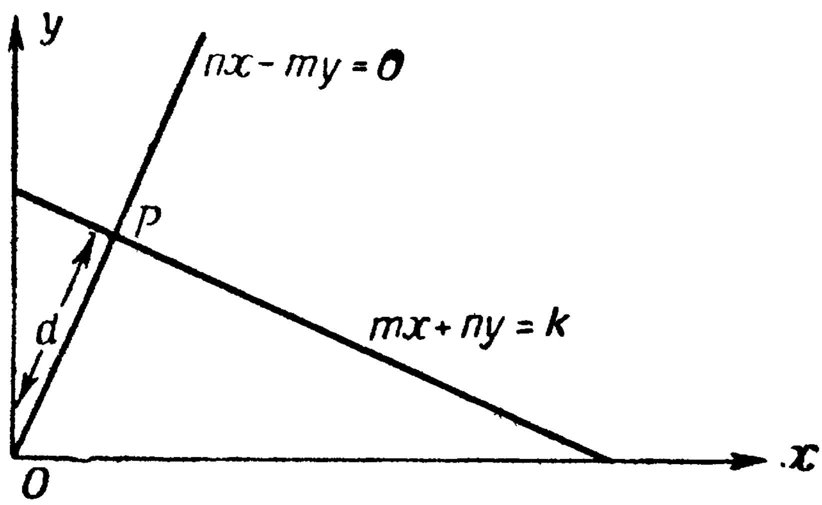


Рис. 36. Формула расстояния.

дикуляра OP, опущенного из начала координат на прямую, имеет вид [1])

$$y=\frac{n}{m}x. \qquad (5.20)$$

Решая систему линейных уравнений (5.19) и (5.20), мы найдем, что координаты точки P имеют вид

$$x=\frac{km}{m^2+n^2}, \qquad y=\frac{kn}{m^2+n^2}.$$

Поэтому расстояние от начала координат до точки P равно

$$d=OP=\left[\frac{k^2m^2}{(m^2+n^2)^2}+\frac{k^2n^2}{(m^2+n^2)^2}\right]^{1/2}=$$
$$=\left(\frac{k^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

а так как по условию б) $k=mx_1+ny_1$, то отсюда и вытекает справедливость формулы (5.18).

[1]) Ср. с указанной в подстрочном примечании на стр. 81 книгой Я. С. Дубнова. — *Прим. ред.*

Следовательно, задача нахождения касательной сводится к нахождению максимума выражения (5.18) для всех пар чисел x_1, y_1, удовлетворяющих условию (5.17).

Применим неравенство Коши, т. е. неравенство (4.38) из § 4 гл. IV. Из него следует, что

$$d = \frac{|mx_1 + ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{\left|am\frac{x_1}{a} + bn\frac{y_1}{b}\right|}{\sqrt{m^2+n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}. \tag{5.21}$$

Точки касания определяются двумя условиями. А именно 1) они должны лежать на эллипсе, так что координаты (x_1, y_1) должны удовлетворять уравнению (5.17), и 2) расстояние (5.21) должно быть максимальным, т. е. в выражении (5.21) должно иметь место равенство, что достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1/a}{am} = \frac{y_1/b}{bn}. \tag{5.22}$$

Координаты точки касания находятся как решения системы уравнений (5.17) и (5.22)

$$x_1 = \pm\frac{a^2m}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}}, \quad y_1 = \pm\frac{b^2n}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}}, \tag{5.23}$$

где оба знака либо одновременно суть знаки „плюс“, либо суть знаки „минус“. Искомые значения k' и k'' величины k (см. рис. 35) могут быть найдены путем подстановки значений x_1 и y_1 из (5.23) в формулу (5.19).

§ 10. Касательные (продолжение)

Решая задачу нахождения касательной к эллипсу в данной точке, мы сможем, затратив немного труда, получить результат, гораздо более изящный, чем тот, к которому мы пришли при отыскании касательной, имеющей данное направление.

Вместо того чтобы решать систему уравнений относительно x_1 и y_1, выражая их через m и n, нужно только решить систему уравнений относительно m и n, выразив решение через x_1 и y_1. Вот как это просто! Из уравнения (5.22) имеем

$$m = \frac{rx_1}{a^2}, \quad n = \frac{ry_1}{b^2},$$

где r — некоторый, пока еще не определенный коэффициент пропорциональности. Подставляя эти выражения в уравнение $mx + ny = k$, мы получаем уравнение касательной в следующем виде:

$$\left(\frac{rx_1}{a^2}\right)x + \left(\frac{ry_1}{b^2}\right)y = k$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{k}{r}.$$

Так как, с одной стороны, (x_1, y_1) — это точка, принадлежащая касательной, и, с другой стороны, точка, принадлежащая эллипсу, то числа x_1 и y_1 удовлетворяют равенству (5.17), т. е. $k/r = 1$. Отсюда вытекает очень простой и изящный результат. А именно *касательная к эллипсу*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в принадлежащей эллипсу точке (x_1, y_1) *выражается уравнением*

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Когда вы будете изучать математический анализ, вы увидите, что этот результат можно получить также с помощью дифференциального исчисления.

Упражнения

1. Определите, какие из точек (5, —3), (3, 5) и (7, 0) принадлежат эллипсу

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

2. Пусть $x = 2$. Определите, при каком значении y точка (x, y) принадлежит эллипсу, уравнение которого указано в упр. 1. При каких значениях y точка $(2, y)$ находится внутри эллипса или на эллипсе?

3. Найдите уравнение касательной к эллипсу упр. 1 в точке $(-5, 3)$.

4. Решите систему уравнений

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$mx + ny = k,$$

где a, b, m и n имеют заданные значения. Выберите k таким образом, чтобы полученное квадратное уравнение имело двойной корень. (Вы найдете, что $k^2 = a^2m^2 + b^2n^2$.) Сравните ответ со значениями x_1, y_1, указанными в конце § 9 (стр. 121).

ГЛАВА VI

Свойства расстояния

§ 1. Евклидово расстояние

Расстояние между двумя точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ на плоскости (x, y), с которым мы обычно имеем дело, называется евклидовым расстоянием. Обозначим его через $d_2(PQ)$. Евклидово расстояние определяется формулой

$$d_2(PQ) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}. \qquad (6.1)$$

Перечислим теперь некоторые свойства, характерные для этой функции расстояния.

1. Расстояние между двумя точками зависит только от взаимного расположения этих точек, т. е. оно зависит только от разностей их координат $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$. Это свойство (заключающееся в том, что расстояние между двумя точками не изменяется при одновременном параллельном переносе обеих точек) называется инвариантностью относительно параллельных переносов.

2. Расстояние от точки P до точки Q равно расстоянию от точки Q до точки P. Действительно, из выражения (6.1) следует, что

$$d_2(PQ) = d_2(QP).$$

Это свойство обычно называют свойством симметричности.

3. Функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника

$$d_2(PR) \leqslant d_2(PQ) + d_2(QR)$$

(см. § 6 гл. IV).

4. Расстояние $d_2(PQ)$ между двумя произвольными точками P и Q неотрицательно

$$d_2(PQ) \geqslant 0.$$

При этом равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда точки P и Q совпадают. Это свойство часто называют свойством положительности функции расстояния. Оно непосредственно следует из определения (6.1).

5. Если точка P имеет координаты (x, y), а точка Q — координаты (ax, ay), где a — некоторая неотрицательная постоянная, то

$$d_2(OQ) = ad_2(OP);$$

здесь O означает начало координат $(0, 0)$. Последнее свойство иногда называют однородностью функции расстояния. Оно вытекает из того, что

$$d_2(OQ) = [(ax)^2 + (ay)^2]^{1/2} = [a^2(x^2 + y^2)]^{1/2} =$$
$$= a(x^2 + y^2)^{1/2} = ad_2(OP).$$

Евклидовому расстоянию присуще еще и следующее свойство:

6. Евклидово расстояние между двумя точками не меняется при повороте плоскости (x, y) на некоторый угол вокруг произвольной точки. Это свойство называют инвариантностью относительно поворотов.

§ 2. Расстояние в „геометрии города“

Оказывается, что в рассмотрение можно ввести также и много других полезных и интересных „неевклидовых“ расстояний. Чтобы функцию двух точек P и Q можно было назвать „расстоянием“, она должна обладать перечисленными выше свойствами 1—5 обычного расстояния (6.1). Лишь евклидово расстояние d_2 удовлетворяет всем шести свойствам.

В качестве примера мы рассмотрим здесь расстояние в „геометрии города“. Предположим, что все улицы вашего родного города имеют два фиксированных направления: с юга на север и с востока на запад. Предположим также, что в городе нет незастроенных площадей, которые можно было бы пересекать, т. е. передвигаться можно только строго по улицам (см. рис. 37). Расстояние в „геометрии города" мы определим как длину наименьшего пути, по которому можно пройти в вашем городе

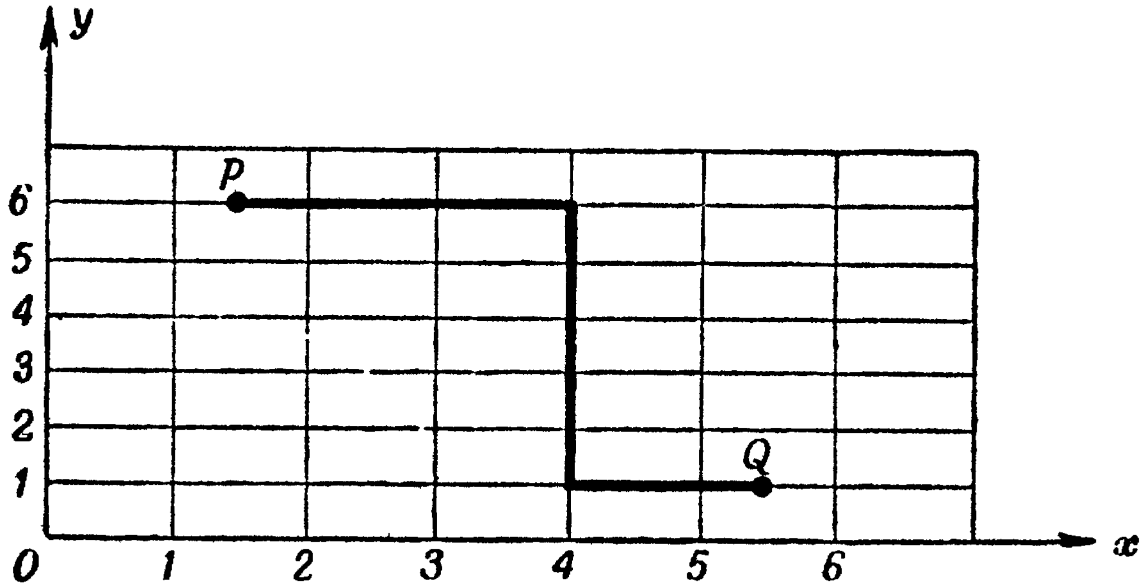


Рис. 37. Расстояние в «геометрии города».

от точки $P(x_1, y_1)$ до точки $Q(x_2, y_2)$; путь от точки P до точки Q должен состоять исключительно из горизонтальных и вертикальных отрезков; поэтому расстояние $d(PQ)$ состоит из суммы всех горизонтальных расстояний и всех вертикальных расстояний, которые нужно

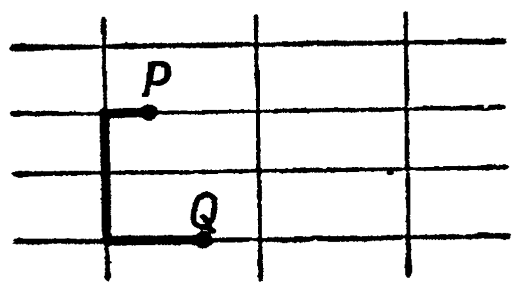


Рис. 38. Расстояние в «геометрии города»; исключительный случай.

пройти, перемещаясь от точки P к точке Q. Отсюда следует, что расстояние в „геометрии города" d_1 можно определить как

$$d_1(PQ) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \tag{6.2}$$

хотя, строго говоря, это и не совсем точно опишет ситуацию. [Это будет неверно для случая, изображенного на рис. 38, где точки P и Q расположены между одними и теми же двумя улицами, проходящими с севера на юг (или с востока на запад); в этом случае пешеход вынужден будет в процессе движения идти по двум противоположным направлениям.] Тем не менее мы примем (6.2) за определение нового „неевклидового" расстояния — ведь наш пример с городскими кварталами только иллюстрирует возможность нового определения расстояния. [Если городские кварталы очень малы, определение расстояния (6.2) довольно точно. Без обращения к городским кварталам функцию (6.2) можно определить как наименьший возможный путь, который нужно пройти при движении от точки P до точки Q, при условии, что допускается лишь движение по четырем главным направлениям — на юг, на север, на восток и на запад.]

Посмотрим теперь, обладает ли расстояние d_1, определенное формулой (6.2), характерными для расстояния свойствами 1—5.

Так как в формулу (6.2) входят только разности координат, то расстояние d_1, безусловно, инвариантно относительно параллельных переносов, т. е. оно обладает свойством 1.

Так как $d_1(PQ) = d_1(QP)$, то расстояние d_1 симметрично, т. е. оно обладает свойством 2.

С целью установить неравенство треугольника

$$d_1(PR) \leqslant d_1(PQ) + d_1(QR)$$

предположим, что точки P, Q, R имеют соответственно координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3). В таком случае

$$d_1(PR) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = \\ = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3|.$$

Так как на основании теоремы 2 гл. III (стр. 55)

$$|x_1 - x_2 + x_2 - x_3| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$$

и

$$|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \leqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|,$$

мы имеем

$$d_1(PR) \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| = \\ = d_1(PQ) + d_1(QR).$$

что и доказывает справедливость свойства 3.

Расстояние в „геометрии города“, безусловно, удовлетворяет свойству 4, так как абсолютная величина любого действительного числа всегда неотрицательна. Расстояние d_1 положительно, если точки P и Q не совпадают.

Справедливость свойства 5 легко проверить, поскольку при $a \geqslant 0$

$$|ax| + |ay| = a[|x| + |y|].$$

Теперь попробуем перенести на „геометрию города“ понятие окружности в евклидовой геометрии. В геометрии

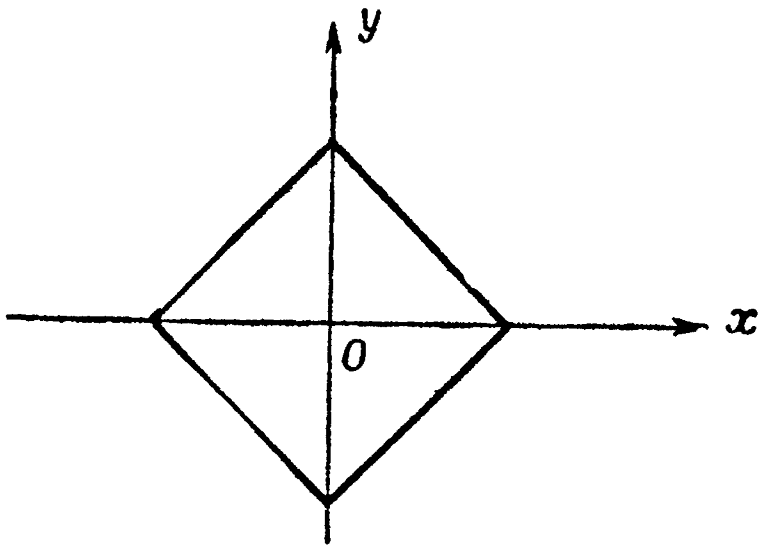


Рис. 39. Единичная окружность в «геометрии города».

Евклида окружность — это множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки — центра окружности. Сохраним это определение в нашей новой „геометрии“. Согласно (6.2), „единичная окружность“ с центром в начале координат $O(0, 0)$ определяется уравнением

$$d_1(OP) = |x| + |y| = 1.$$

Ее вид с обычной евклидовой плоскости изображен на рис. 39 (см. также рис. 15, на котором изображен „круг“ нашей „геометрии города“; ср. ниже, стр. 132).

§ 3. Другие „неевклидовы“ расстояния

Определим теперь „расстояние“ между началом координат O и произвольной точкой P с координатами (x, y) следующим образом:

$$d_p(OP) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, \qquad (6.3)$$

где p — фиксированное число $\geqslant 1$. Более обще, расстояние между двумя произвольными точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ мы определим так:

$$d_p(PQ) = [|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p]^{1/p}. \qquad (6.4)$$

Проверим, имеют ли место в этом случае пять свойств расстояния. Расстояние (6.4), несомненно, инвариантно относительно параллельных переносов. Кроме того, оно обладает свойством симметричности, т. е. $d_p(PQ) = d_p(QP)$. Далее, неравенство треугольника следует из формулы (4.53′), которая была выведена в конце § 7 гл. IV из неравенства Минковского. Четвертое свойство — положительность — также присуще расстоянию d_p. Наконец, для точек P и Q с координатами (x, y) и (ax, ay) имеем

$$d_p(OQ) = [|ax|^p + |ay|^p]^{1/p} = (a^p)^{1/p}[|x|^p + |y|^p]^{1/p} = \\ = ad_p(OP).$$

Таким образом, наше расстояние d_p обладает и пятым свойством.

В этом случае „единичная окружность“, т. е. совокупность точек, удаленных от начала координат на расстояние 1, задается уравнением

$$|x|^p + |y|^p = 1.$$

Как именно выглядит эта „окружность“, зависит от частного значения p. Так, при $p = 1$ мы снова приходим к единичной окружности в „геометрии города“; при $p = 2$ имеем обычную окружность евклидовой геометрии и т. д. При этом для $p = 1, 2, 4$ имеют место неравенства

$$|x| + |y| \geqslant (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} \geqslant (|x|^4 + |y|^4)^{1/4},$$

справедливость которых легко проверяется возведением обеих частей неравенства в квадрат. Евклидовы графики соответствующих „единичных окружностей“ изображены на рис. 40. Кривая, отвечающая случаю $p = 1$, целиком расположена внутри кривой, отвечающей значению $p = 4$. Верно ли, что и в общем случае „единичные окружности“ для расстояний, задаваемых равенством (6.3), расположены таким образом, что линия, отвечающая некоторому фиксированному значению p, содержит внутри себя все кривые, отвечающие меньшим значениям p? А если это так, то становятся ли эти кривые все больше и больше при возрастании p?

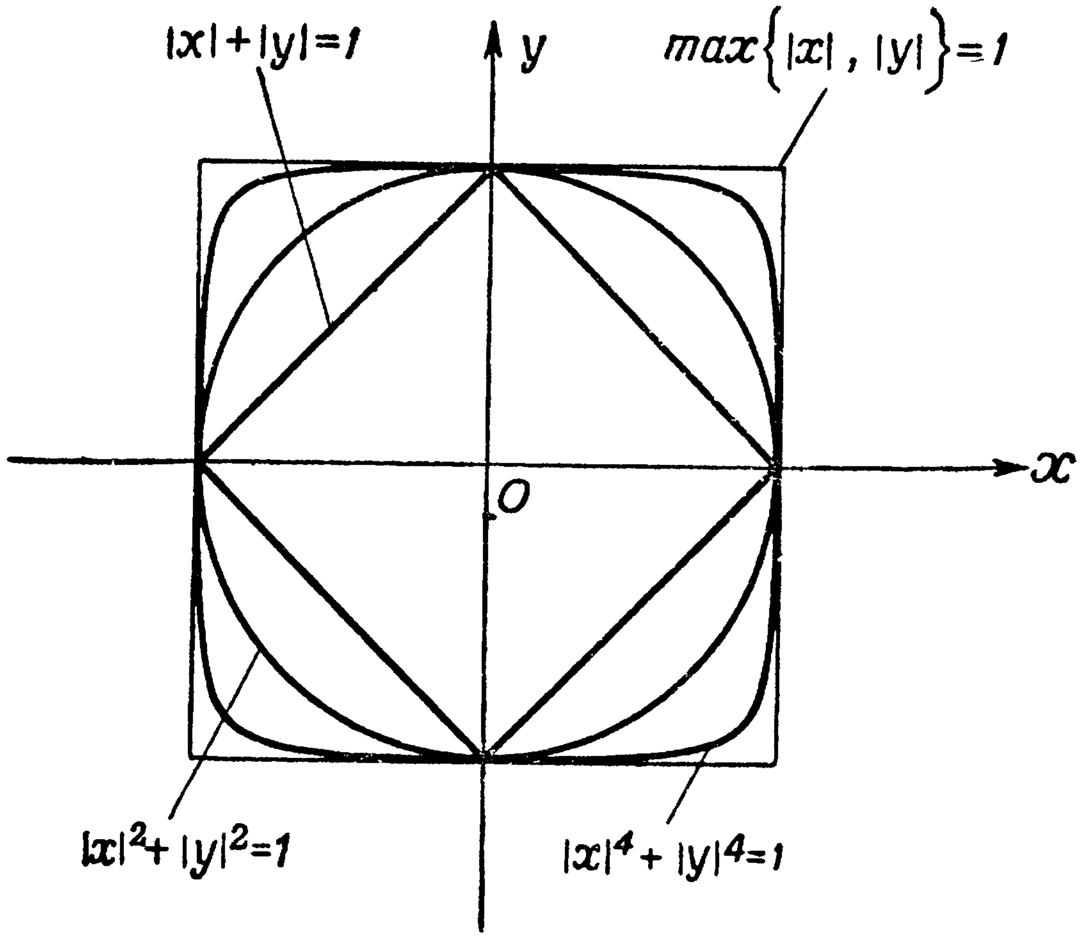


Рис. 40. Евклидовы графики неевклидовых «единичных окружностей».

Чтобы ответить на первый вопрос, заметим, что он равносилен следующему: должно ли неравенство

$$[|x|^n+|y|^n]^{1/n} \geqslant [|x|^m+|y|^m]^{1/m}$$

выполняться всякий раз, когда $m \geqslant n \geqslant 1$? Конечно, должно. Попробуем показать это для $m=3$, $n=2$ и предоставим читателю самостоятельно провести доказательство в общем случае.

С целью сделать записи менее громоздкими введем обозначения

$$a=|x|, \quad b=|y|.$$

Требуется доказать, что

$$(a^2+b^2)^{1/2} \geqslant (a^3+b^3)^{1/3} \quad \text{при} \quad a, b \geqslant 0.$$

Запишем

$$a^3+b^3=aa^2+bb^2$$

и воспользуемся неравенством Коши (в форме, содержащей квадратные корни). Получаем

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^4+b^4)^{1/2}\geqslant a^3+b^3. \qquad (6.5)$$

Поскольку

$$a^2+b^2\geqslant(a^4+b^4)^{1/2},$$

неравенство (6.5) можно еще усилить:

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^2+b^2)\geqslant a^3+b^3,$$

или

$$(a^2+b^2)^{3/2}\geqslant a^3+b^3,$$

откуда

$$(a^2+b^2)^{1/2}\geqslant(a^3+b^3)^{1/3}.$$

Доказательство для произвольных рациональных значений $m\geqslant n\geqslant 1$ можно получить, воспользовавшись неравенством Гёльдера. Нетрудно видеть, что при p, стремящемся к 1, „единичная окружность"

$$|x|^p+|y|^p=1, \quad p>1,$$

неограниченно приближается к изображенному на рис. 39 квадрату $|x|+|y|=1$.

С целью выяснить, что произойдет, если значение p будет неограниченно возрастать, заметим, что

$$\max\{|x|^p,\ |y|^p\}\leqslant|x|^p+|y|^p\leqslant 2\max\{|x|^p,\ |y|^p\}. \qquad (6.6)$$

Так как

$$[\max\{|x|^p,\ |y|^p\}]^{1/p}=\max\{|x|,\ |y|\},$$

то из (6.6) следует

$$\max\{|x|,\ |y|\}\leqslant[|x|^p+|y|^p]^{1/p}\leqslant 2^{1/p}\max\{|x|,\ |y|\}. \qquad (6.7)$$

Рассмотрим теперь, что произойдет с правой частью выражения (6.7), когда p станет очень большим. В этой части p фигурирует лишь как показатель степени $1/p$

числа 2. Когда p становится очень большим, $1/p$ становится очень малым, и поэтому $2^{1/p}$ стремится к $2^0 = 1$. Поэтому из (6.7) следует, что при p, „стремящемся к бесконечности",

$$d_p = (OP) = [|x|^p + |y|^p]^{1/p}$$

стремится к „расстоянию"

$$d_\infty(OP) = \max\{|x|, |y|\}. \tag{6.8}$$

Можно показать, что „расстояние" d_∞ обладает всеми пятью свойствами расстояния.

Как же будет выглядеть „единичная окружность"

$$\max\{|x|, |y|\} = 1?$$

Она обратится в квадрат со сторонами

$$\begin{aligned} |x| = 1, \quad 0 \leqslant |y| \leqslant 1, \\ |y| = 1, \quad 0 \leqslant |x| \leqslant 1. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Итак, мы видим, что

$$d_p(PQ) = \left[|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\right]^{1/p}$$

при любом $p \geqslant 1$ можно рассматривать как функцию расстояния и что при неограниченном возрастании p „единичная окружность"

$$|x|^p + |y|^p = 1$$

увеличивается, стремясь к квадрату (6.9). При этом все „единичные окружности" заключены в пределах квадрата (6.9) (см. рис. 40).

Во всех рассматриваемых случаях „единичная окружность" разбивает плоскость на две области: внутреннюю область, состоящую из всех точек, расположенных от начала координат на расстоянии, меньшем 1, и внешнюю область, содержащую точки, удаленные от начала координат на расстояние, большее 1. Множество точек, определяемых неравенством

$$d(OP) \leqslant 1,$$

иногда называют единичным **кругом**, а „единичную окружность"

$$d(OP) = 1$$

называют **границей** этого единичного круга.

Сделаем несколько общих замечаний. Евклидово расстояние, как было отмечено выше, инвариантно относительно параллельных переносов (свойство 1) и относительно поворотов (свойство 6), т. е. относительно всех движений (или „жестких перемещений"). Другие расстояния, рассмотренные здесь, также не изменяются при параллельных переносах, однако они изменяются при вращении. Действительно, из рис. 40 нетрудно усмотреть, что расстояние в „геометрии города" d_1 переходит в расстояние $d_\infty = \max\{|x_2 - x_1|, \ |y_2 - y_1|\}$ (увеличенное в $\sqrt{2}$ раз), когда плоскость поворачивается на угол 45° вокруг точки $(x_1, \ y_1)$ [1]. Можно показать (мы, однако, здесь на этом не остановимся), что евклидово расстояние полностью характеризуется шестью свойствами, перечисленными в § 1 этой главы, т. е. что единственным расстоянием, инвариантным относительно поворотов (а также обладающим и пятью остальными свойствами „расстояния", является евклидово расстояние) [2].

§ 4. Единичный круг

Существует много других функций, которым присущи пять свойств расстояния; мы рассмотрели лишь немногие из них.

Можно задать следующий вопрос: дано множество S точек (которое мы впредь будем называть точечным множеством) плоскости, содержащее начало координат. При каких условиях оно будет представлять собой единичный круг, отвечающий некоторой функции расстояния d? Другими словами, при каких условиях существует

---

[1]) В самом деле, „единичная окружность" $|x| + |y| = 1$ при повороте вокруг начала координат на 45°, переходит в линию, подобную „единичной окружности" (6.9), с коэффициентом подобия $1/\sqrt{2}$. Поэтому, если $a = d_1\ (OP)$ и точка P переходит в точку P' при рассматриваемом повороте, то $a = \sqrt{2} \cdot d_\infty\ (OP')$.— *Прим. ред.*

[2]) Это связано с тем, что единственной „окружностью", переходящей в себя при любом повороте, является евклидова окружность.— *Прим. ред.*

такая функция расстояния d, что S содержит те и только те точки P, для которых

$$d(OP) \leqslant 1?$$

Мы утверждаем, *что для того, чтобы при данном точечном множестве S, содержащем начало координат, существовала такая функция расстояний d,*

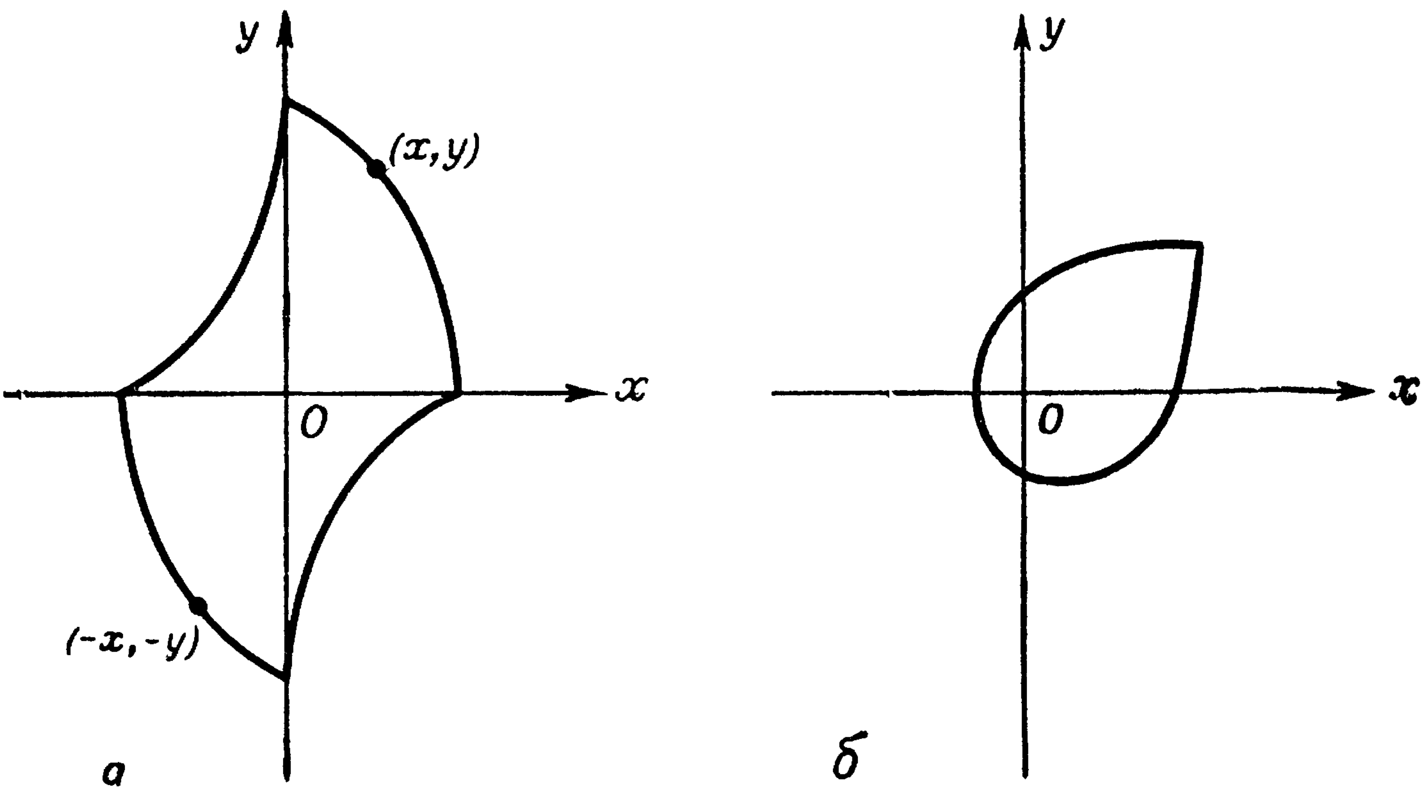


Рис. 41. Точечные множества на плоскости.

а — точечное множество, симметричное относительно начала координат; б — выпуклое точечное множество.

чтобы S (вместе с границей S) являлось единичным кругом, отвечающим d, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) *Точечное множество S симметрично относительно начала координат.*

б) *Точечное множество S выпукло.*

Точечное множество S симметрично относительно начала координат, если для каждой его точки (x, y) также и точка $(-x, -y)$ принадлежит S; оно выпукло, если прямолинейный отрезок, соединяющий любые две принадлежащие S точки, полностью содержится в S (см. рис. 41, *а* и *б*).

Докажем сначала, что свойство а) имеет место, если существует функция расстояния d: *если d — произвольная функция расстояния и S — отвечающий ей единичный круг, то S симметрично относительно начала координат.* Иначе говоря, если d — функция расстояния и точка $P(x, y)$ удовлетворяет условию $d(OP) \leqslant 1$, то точка $Q(-x, -y)$ удовлетворяет условию $d(OQ) \leqslant 1$.

Если d — расстояние, то оно инвариантно относительно параллельных переносов. Поэтому, если мы перенесем точки Q и O на некоторый отрезок x в горизонтальном направлении и на некоторый отрезок y в вертикальном направлении, то расстояние между этими точками $d(OQ)$ останется прежним. Но этот перенос переводит точку Q в начало O, а начало O в точку P. Следовательно,

$$d(QO) = d(OP) \leqslant 1,$$

и поскольку d обладает и свойством симметричности, то

$$d(OQ) = d(QO) \leqslant 1.$$

Следовательно, точка Q принадлежит единичному кругу.

Докажем теперь, что если существует функция расстояния d, то имеет место свойство б), т. е. докажем, что *если P и Q — какие-либо две точки, принадлежащие единичному кругу*, то прямолинейный отрезок PQ целиком принадлежит единичному кругу. Эту задачу можно выразить еще так: пусть точки P и Q таковы, что для некоторой функции расстояния d $d(OP) \leqslant 1$ и $d(OQ) \leqslant 1$; требуется доказать, что для любой точки R отрезка PQ имеет место неравенство $d(OR) \leqslant 1$. Очевидно, что это верно, если $P = Q$ или если либо точка P, либо точка Q совпадает с началом координат; таким образом, мы можем считать, что O, P и Q — три различные точки.

В первую очередь запишем в удобной форме то обстоятельство, что точка R принадлежит отрезку PQ. Пусть на рис. 42 $P'R \parallel OQ$ и $Q'R \parallel OP$. Покажем теперь, что

$$d(OP') = ad(OP), \quad d(OQ') = bd(OQ), \tag{6.10}$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $a + b = 1$. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся евклидовой теорией пропорций (учение о подобных треугольниках). Пользуясь одним и тем же символом AB для обозначения отрезка прямой и его евклидовой длины, получим

$$a=\frac{OP'}{OP}=\frac{QR}{QP}, \qquad b=\frac{OQ'}{OQ}=\frac{PR}{PQ}, \tag{6.11}$$

где a и b просто означают выписанные отношения и поэтому являются положительными числами. Кроме того, складывая эти отношения, имеем

$$a+b=\frac{QR+RP}{QP}=\frac{QP}{QP}=1.$$

Поскольку точки P и P' лежат на одной и той же прямой, проходящей через точку O, их координаты пропорциональны. Поэтому мы можем воспользоваться пятым

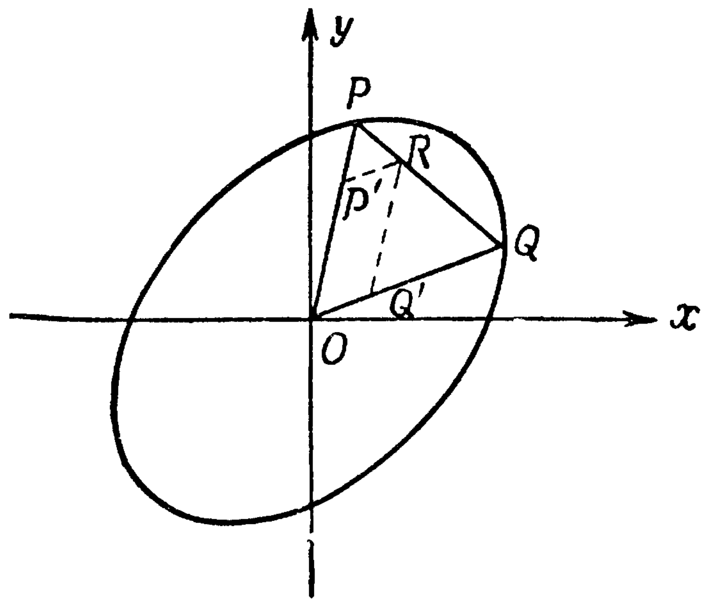


Рис. 42. Выпуклость единичного круга.

свойством евклидова расстояния и вывести из (6.11), что если точка P имеет координаты (x_1, y_1), то координатами точки P' будут (ax_1, ay_1). Аналогично, поскольку точки Q и Q' лежат на одной и той же прямой, проходящей через точку O, то, если координаты точки Q имеют вид (x_2, y_2), координаты точки Q' имеют вид (bx_2, by_2). Теперь мы воспользуемся тем, что наше расстояние d также обладает пятым свойством, в силу чего

$$d(OP')=ad(OP), \quad d(OQ')=bd(OQ). \tag{6.12}$$

Наконец, воспользуемся третьим свойством расстояний (неравенство треугольника; см. рис. 42):

$$d(OR)\leqslant d(OP')+d(P'R),$$

или, так как $d(P'R) = d(OQ')$ на основании свойства 1, то

$$d(OR) \leqslant d(OP') + d(OQ').$$

Воспользовавшись (6.12), получаем

$$d(OR) \leqslant ad(OP) + bd(OQ),$$

и поскольку $d(OP) \leqslant 1$, $d(OQ) \leqslant 1$ и $a + b = 1$,

$$d(OR) \leqslant a + b = 1,$$

что по определению означает, что точка R принадлежит единичному кругу.

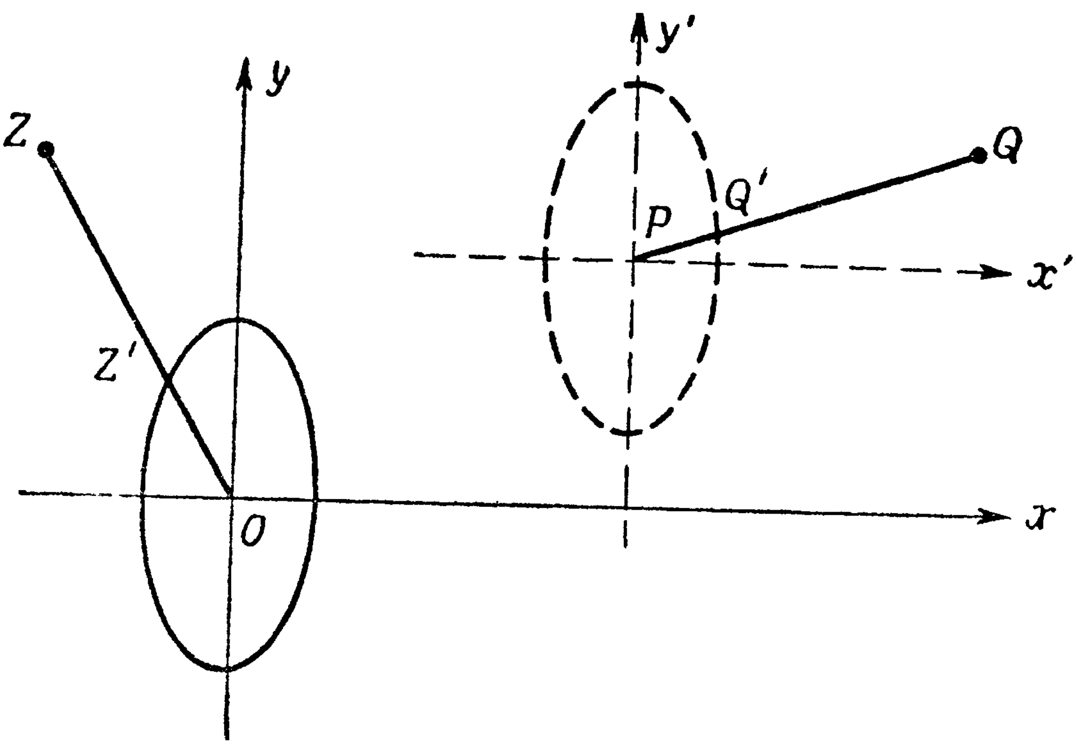


Рис. 43. $d(OZ) = \frac{OZ}{OZ'}$; $d(PQ) = \frac{PQ}{PQ'}$.

Таким образом, мы доказали, что если d — расстояние, а S — отвечающий ему единичный круг, то S симметрично относительно начала координат и выпукло. Мы должны еще доказать обратное: *если S — точечное множество, содержащее начало координат, выпуклое и симметричное относительно начала координат, то существует функция расстояния d, для которой S является единичным кругом.*

Мы, покажем, каким образом может быть определено такое расстояние d, однако предоставим читателю труд самостоятельно проверить, что для d выполнены пять характеризующих расстояние свойств.

Итак, пусть S — точечное множество, обладающее требуемыми свойствами (рис. 43). Дана некоторая точка Z

плоскости, не совпадающая с точкой O. Проведем луч, выходящий из точки O, проходящий через точку Z и пересекающий границу точечного множества S в точке Z'. (Поскольку множество S выпукло, то этот луч пересекает его границу в единственной точке.) Затем образуем отношение

$$r = \frac{OZ}{OZ'}$$

евклидова расстояния OZ к расстоянию OZ' и определим расстояние d от точки O до точки Z как равное этому отношению, т. е. положим

$$d(OZ) = r.$$

Заметим, что $d(OZ)$ меньше 1, равно 1 или больше 1 в зависимости от того, находится ли точка Z внутри S, на границе S или вне S.

Чтобы определить расстояние $d(PQ)$ для любых точек P и Q, сдвинем систему координат, как показано на рис. 43, и далее поступим прежним образом.

Отношение длины обычной евклидовой окружности к ее диаметру обозначается символом π; оно приблизительно равно 3,14. В упражнениях, которые приводятся ниже, требуется найти отношение r „неевклидовой“ длины окружности к диаметру для соответствующего заданному расстоянию единичного круга. Ниже мы проанализируем один частный случай, остальные же случаи предоставим исследовать читателю.

Пример. Пусть множество S совпадает с правильным шестиугольником, расположенным так, как это изображено на рис. 44. Поскольку точечное множество S выпукло и симметрично относительно начала координат, его можно рассматривать как единичный круг, отвечающий некоторой функции расстояния d. Так как неевклидов радиус единичного круга по определению равен 1, диаметр этого круга равен 2. Для того чтобы вычислить длину окружности этого единичного круга, отметим, что поскольку d инвариантно относительно параллельных пере-

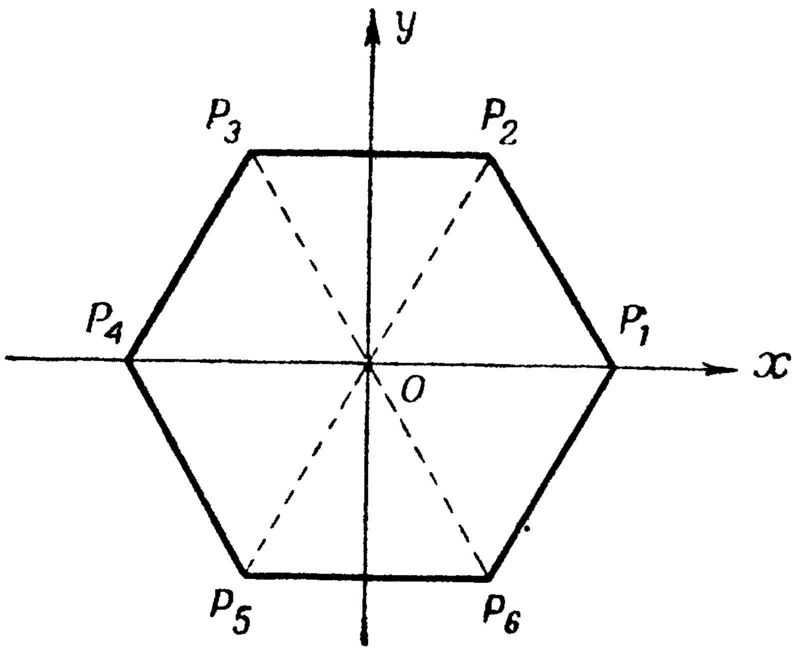


Рис. 44. Правильный шестиугольник, расположенный симметрично относительно осей координат.

носов, имеют место следующие соотношения:

$$d(P_1P_2) = d(OP_3) = 1, \quad d(P_2P_3) = d(OP_4) = 1,$$
$$d(P_3P_4) = d(OP_5) = 1,$$
$$d(P_4P_5) = d(OP_6) = 1, \quad d(P_5P_6) = d(OP_1) = 1,$$
$$d(P_6P_1) = d(OP_2) = 1.$$

Сложив длину всех отрезков, мы найдем, что длина окружности равна 6. Следовательно, искомое отношение равно [1])

$$r = \frac{6}{2} = 3.$$

Упражнения

Вычислите отношение „неевклидовой" длины окружности к ее диаметру для следующих единичных кругов S:

1. S — единичный круг, отвечающий расстоянию $d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ в „геометрии города" (рис. 39).

---

[1]) Можно доказать, что во всех случаях $3 \leqslant r \leqslant 4$, где $r = 3$ для „единичного круга", совпадающего с правильным шестиугольником, и $r = 4$ для „единичного круга", совпадающего с квадратом. См. по этому поводу, например, последний параграф статьи „Неевклидовы геометрии" в печатающемся V томе Энциклопедии элементарной математики (М., „Наука", 1965). — *Прим. ред.*

2. S — единичный круг, отвечающий функции расстояния
$$d(OP) = \max\{|x|, |y|\}.$$
3. Единичный круг S представляет собой правильный восьмиугольник, центр которого совпадает с началом координат.
4. Единичный круг S представляет собой правильный десятиугольник, центр которого совпадает с началом координат.

§ 5. Алгебра и геометрия

Как мы имели возможность убедиться при чтении предыдущих параграфов, геометрическая интуиция может быть использована для вывода интересных алгебраических результатов. В случае двух и трех измерений эти приемы хороши. Но как только мы обращаемся к n-мерной геометрии, где $n \geqslant 4$, ситуация становится обратной. Теперь мы часто обращаемся к алгебре, при помощи которой можно уточнить геометрические определения и установить результаты, имеющие геометрический характер.

Проиллюстрируем эту мысль. Пусть n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют собой координаты точки P в n-мерном пространстве. „Евклидово расстояние" между двумя точками $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного пространства определяется формулой
$$d(PQ) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \tag{6.13}$$

При $n = 2$ формула (6.13) сводится к известной формуле для расстояния между двумя точками (x_1, x_2) и (y_1, y_2) на плоскости. Если мы обозначим начало координат $(0, 0, \ldots 0)$ через O, а точку $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots \ldots, x_n + y_n)$ через R, то неравенство треугольника в n-мерном пространстве
$$d(OP) + d(PR) \geqslant d(OR)$$
будет выглядеть так:
$$[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2]^{1/2} + [y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2]^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2]^{1/2}. \tag{6.14}$$

Как было показано в конце § 6, гл. IV, это неравенство имеет место.

Определим теперь косинус угла θ между прямыми OP и OQ следующим образом:

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)^{1/2}}. \qquad (6.15)$$

Из неравенства Коши (см. § 4 гл. IV) следует, что $|\cos\theta| \leqslant 1$.

Этим самым мы заложили основы аналитической геометрии n-мерного пространства[1]).

---

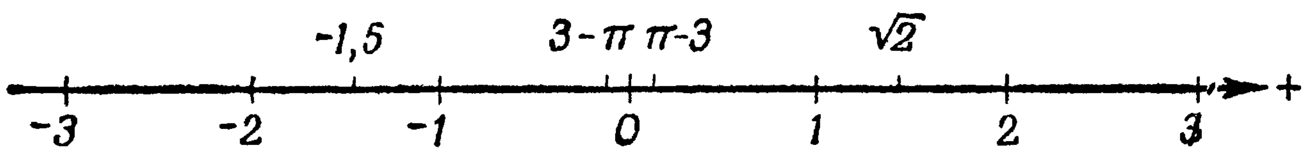
[1]) См., например, § 7 статьи „Векторы и их приложения в геометрии“ в т. IV Энциклопедии элементарной математики и специальную статью о многомерных пространствах в печатающемся V томе ЭЭМ. —*Прим. ред.*

Ответы и указания

Глава I

Страницы 18—20

1.



$$-3 < -2 < -1{,}5 < -1 < 3 - \pi < 0 < \pi - 3 < \sqrt{2} < 2 < 3$$

2. а) $\in$; б) $\overline{\in}$; в) $\overline{\in}$; г) $\overline{\in}$; д) $\in$; е) $\overline{\in}$; ж) $\in$; з) $\overline{\in}$; и) $\overline{\in}$; к) $\overline{\in}$.

3. а) N; б) P; в) P; г) N; д) P; е) P; ж) P; з) N; и) P; к) O;

4. а) $<$; б) $>$; в) $>$; г) $<$; д) $>$; е) $>$; ж) $>$; з) $<$; и) $>$; к) $=$.

5. а) И; б) И; в) И; г) Л; д) И; е) И; ж) Л; з) И; и) Л; к) Л;

6. $2,\ \pi - 3,\ -(3-\pi)^2,\ \dfrac{a}{c-b},\ 0,\ -\sqrt{b^2-4ac}.$

7. а) $\geqslant$; б) $\gtreqless$; в) $\leqslant$; г) $>$; д) $<$; е) $=$.

8. $p > 0$, $-n > 0$, так что $p - n > 0$ и $p > n$.

9. $a = b$.

10. Для $n = 1$ имеет место по предположению; далее воспользуйтесь методом математической индукции и аксиомой II.

11. В тексте показано, что числа 1 и 2 „положительны“, так что $1 + 2 = 3$ „положительно“ по аксиоме II. Положим $a = 1/3$; тогда $3a = 1$, так что a „положительно“, поскольку 3 и 1 „положительны“. Затем $2a = 2/3$ „положительно“ по аксиоме II.

Глава II

Страница 26

1. Сложите $a/2 < b/2$ сначала с $a/2 = a/2$, затем с $b/2 = b/2$.

2. Оба неравенства равносильны неравенству $(ad - bc)^2 \geqslant 0$.

3. Равносильно неравенству $(a - b)^4 \geqslant 0$.

4. Для $n = 2$ теорема утверждает: если $a_1 \geqslant a_2$, то $a_1 \geqslant a_2$, что справедливо. Предположим, что теорема верна для n чисел и положим $a_1 \geqslant a_2, \ldots, a_{n-1} \geqslant a_n, \ a_n \geqslant a_{n+1}$. Тогда $a_1 \geqslant a_n$, $a_n \geqslant a_{n+1}$, так что $a_1 \geqslant a_{n+1}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2, \ldots, a_{n-1} = a_n$ и $a_n = a_{n+1}$.

Страницы 29—30

1. Промежуточный шаг

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Равенство имеет место в том и только том случае, когда $a = b$.

2. Положите в неравенстве упр. 1 $b = 1/a$. Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$.

3. Сложите неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + a^2 \geqslant 2ac$; результат разделите на 2.

4. Равносильно неравенству $a^2b^2(a - b)^2 \geqslant 0$.

5. Умножьте $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ на c, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$ на a, $c^2 + a^2 \geqslant 2ac$ на b; затем сложите то, что получилось.

6. Промежуточный шаг

$$(a^2 - b^2)^2 - (a - b)^4 = 4ab(a - b)^2.$$

7. Промежуточный шаг

$$(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a + b)(a - b)^2.$$

8. 3) $a = b = c$; 4) $a = b$ или по крайней мере одно из них равно 0. 5) $a = b = c$; 6) $a = b$ или по крайней мере одно из них равно 0; 7) $a = \pm b$.

Страницы 32—33

1. Равносильно неравенству $(a-b)^2 \geqslant 0$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b \geqslant 0$.

2. На основании теоремы 7 гл. II и того, что c и d имеют один и тот же знак, a^c-b^c и a^d-b^d будут иметь один и тот же знак. Перемножьте. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$.

3. $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

4. Равносильность этих неравенств можно доказать, умножая первое на $bd>0$, а второе на $1/bd>0$; см. теорему 3 гл. II. Равносильность соответствующих им равенств можно доказать таким же образом.

5. Прибавьте к неравенству равенство $1=1$. Равенство $a/b=c/d$ равносильно равенству $ad=bc$.

6. Воспользуйтесь теоремой 7. гл. II при показателе степени, равном -1; прибавьте к полученному неравенству равенство $1=1$; затем снова воспользуйтесь теоремой 7 гл. II при показателе степени -1. Равенство имеет место при том же условии, что и в упр. 5.

7. Промежуточные шаги

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqslant 0, \quad \frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)} \geqslant 0.$$

8. $30<33$; $22<25$; $18<21$; $42<45$.

9. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

Если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$. Если $a<b$ и c — любое действительное число, то $a+c<b+c$.

Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$. Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.

Если $a<b$ и $c<d$, то $a-d<b-c$. Если $a<b$ и c — любое действительное число, то $a-c<b-c$.

Если $0<a<b$ и $0<c<d$, то $ac<bd$.

Если $0<a<b$ и $0<c<d$, то $a/d<b/c$. В частности, если $a=b=1$, то при $0<c<d$ имеем $1/d<1/c$.

Если $0 < a < b$, а m и n — целые положительные числа и если $a^{1/n}$ и $b^{1/n}$ означают положительные корни n-й степени, то

$$a^{m/n} < b^{m/n} \quad \text{и} \quad b^{-m/n} < a^{-m/n}.$$

Глава III

Страницы 38—39

1. а) —1; б) π; в) 0; г) 4; д) 3; е) 0; ж) π; з) 0; и) 4; к) 3.

2. а) —7; б) $\sqrt{2}$; в) —7; г) 0; д) —3; е) —7; ж) 0; з) —7; и) 0; к) —3.

3) $(-1)(0)-(1)(0)=0$.

4. Используйте типичные случаи и определение символа $\max\{\ \}$.

5. $\{a, b, c, d\}=\{-1, -1, -1, -1\}$.

6. Одно из выражений $\{a, b\}^+$ и $\{c, d\}^+$ равно выражению $\{a, b, c, d\}^+$; второе неотрицательно.

7. Первое и третье неравенства: возможно добавить еще одно число, а именно 0. Среднее неравенство: определение $\max\{\ \}$ и $\min\{\ \}$. Нет; все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ должны быть отрицательными, для того чтобы первое неравенство было строгим, и положительными, чтобы третье неравенство было строгим.

8. Умножьте неравенства $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ на —1 и воспользуйтесь теоремой 3 гл. II.

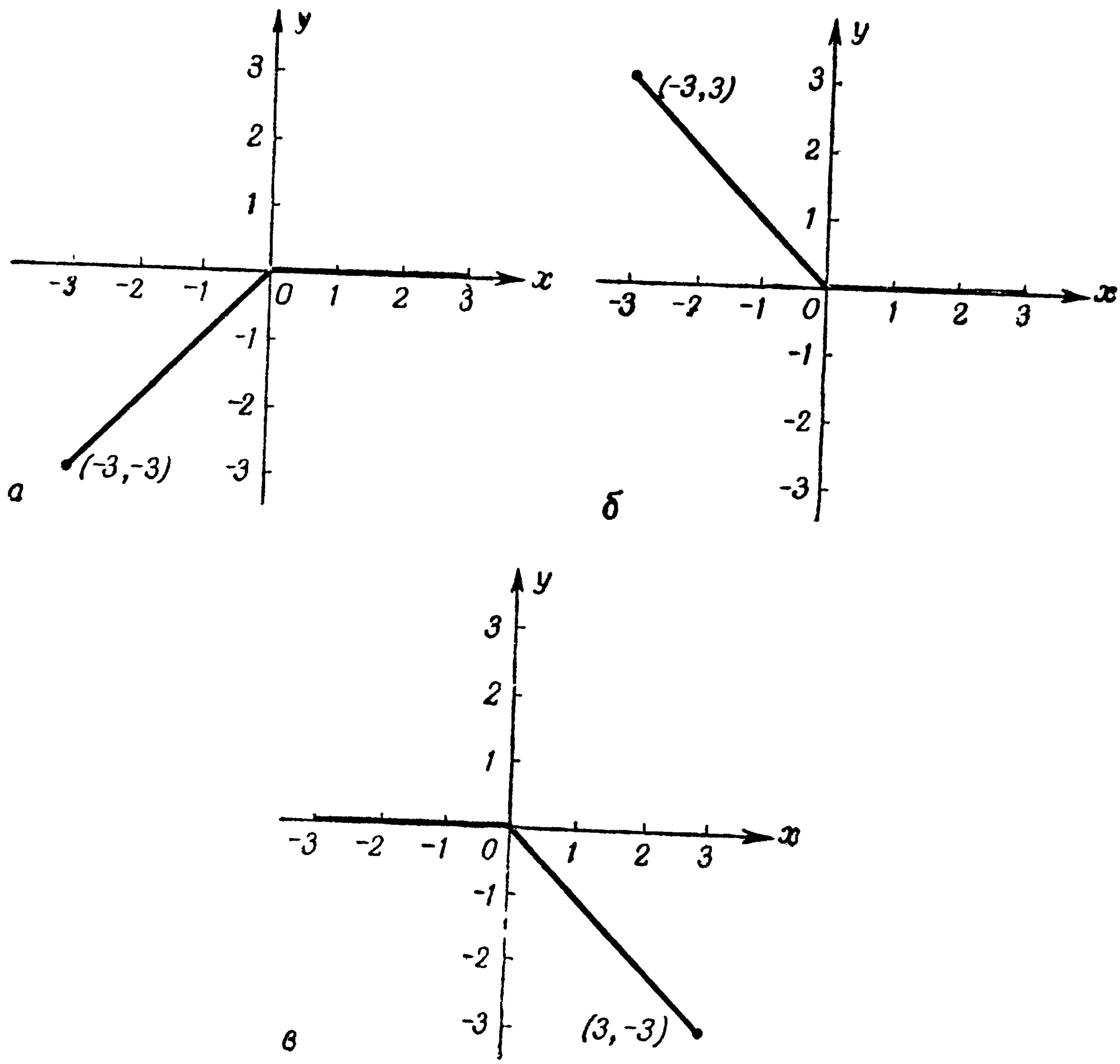
9. $\{-a, -b\}^- = \min\{0, -a, -b\} = -\max\{0, a, b\} = -\{a, b\}^+$.

10. Рассмотрите типичные случаи и определение символа $\max\{\ \}$.

Страницы 44—45

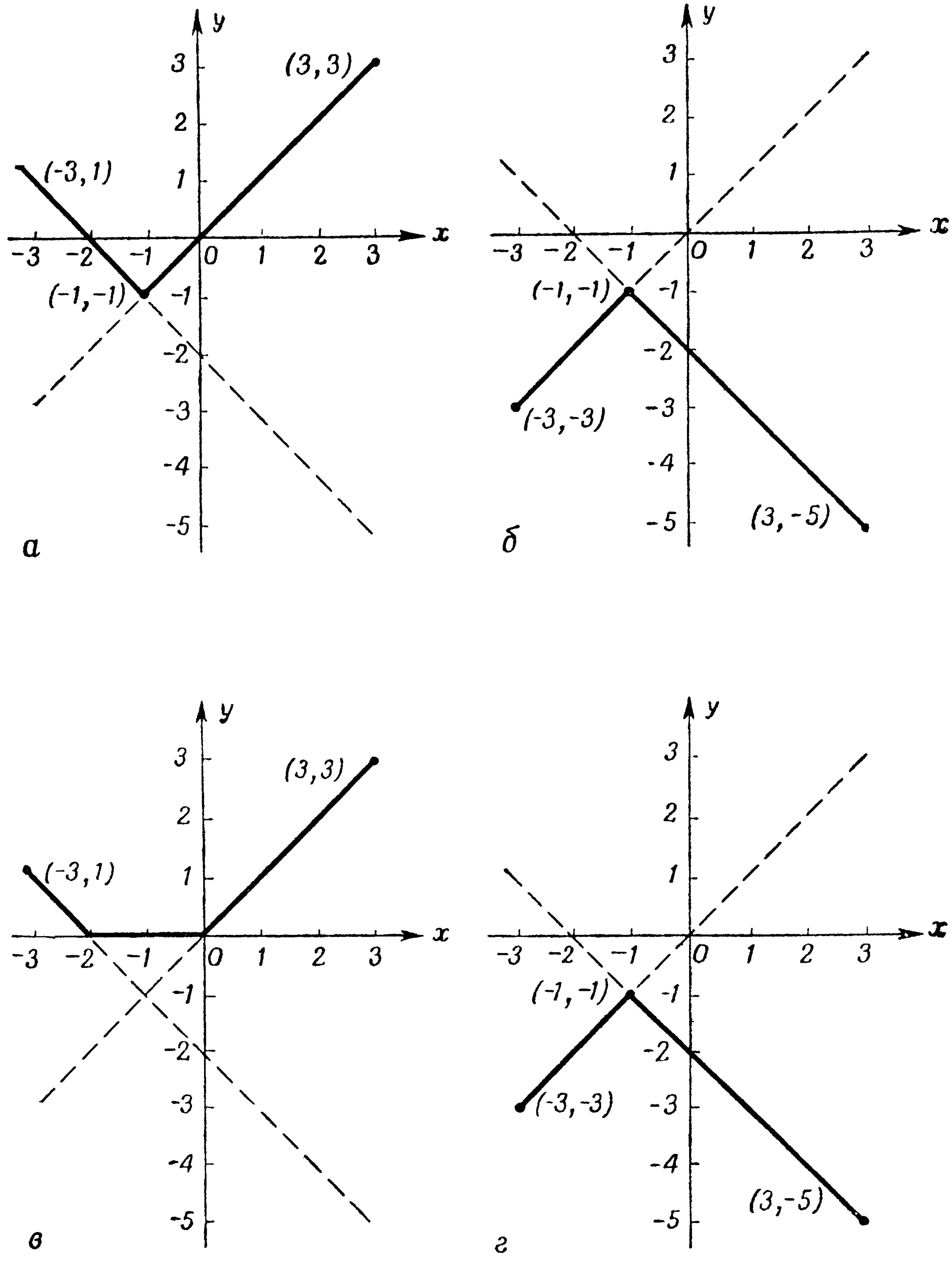
1. Для каждого действительного числа a имеет место: $-|a| \leqslant -a \leqslant |a|$. Первое равенство достигается тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$, а второе — тогда и только тогда, когда $a \leqslant 0$.

2.

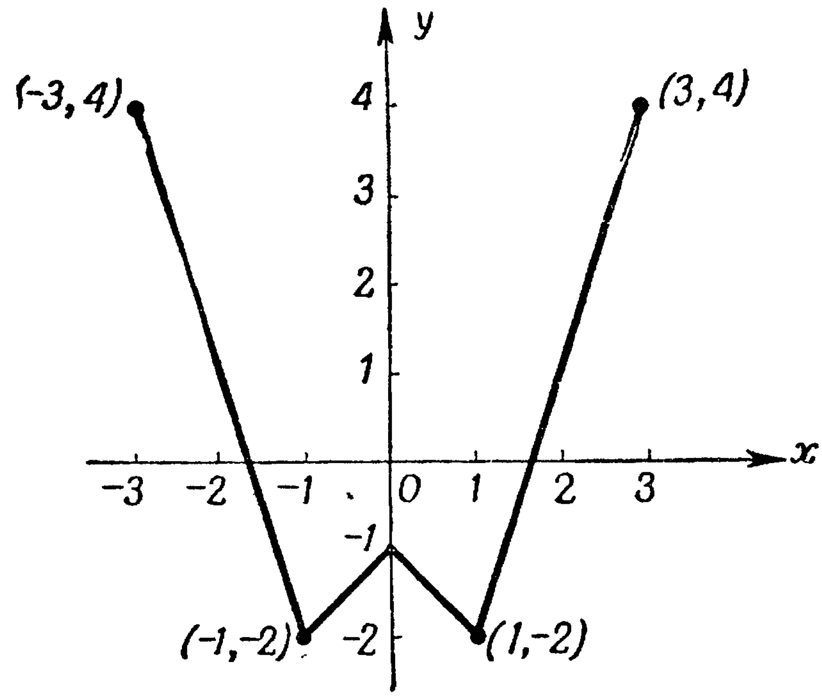


3. а) совпадает с графиками г) и ж); б) совпадает с графиками д) и з); в) совпадает с графиками е) и и).

4.



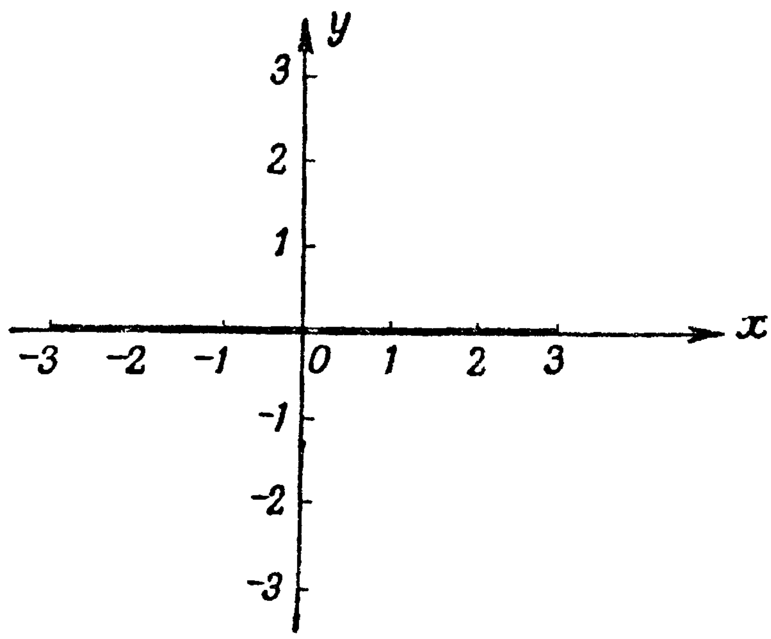
5.



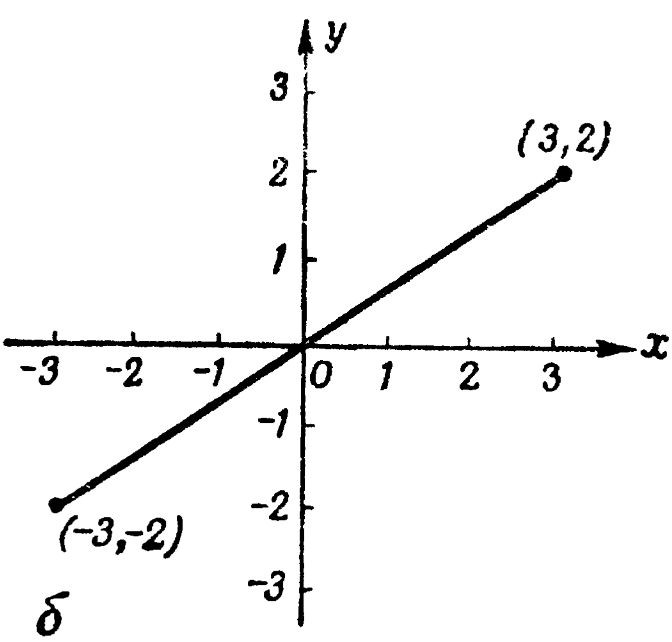
6. Рис. 4, нечетная; рис. 5, нечетная; рис. 6, четная; рис. 7, четная.

Страницы 47—48

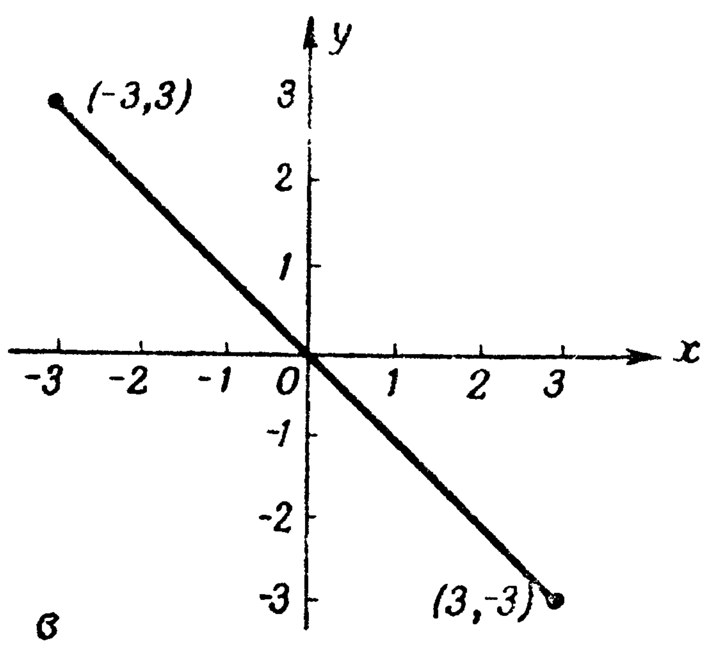
1.



а

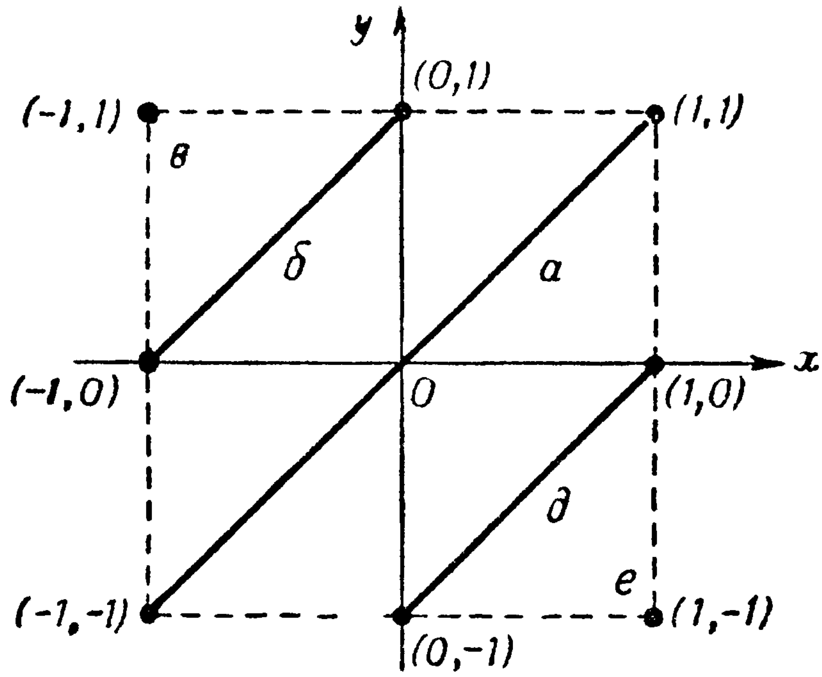


б



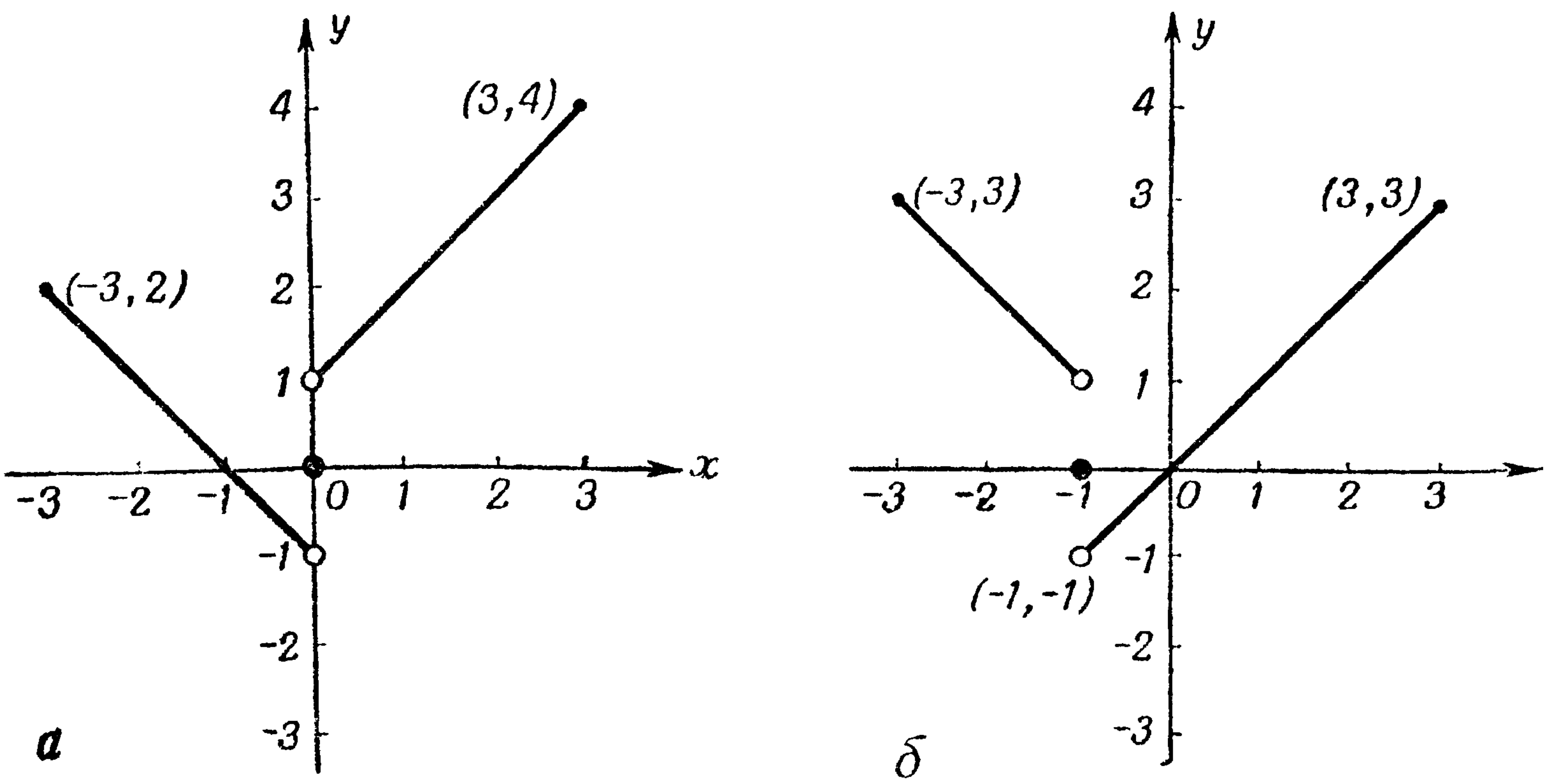
в

2.



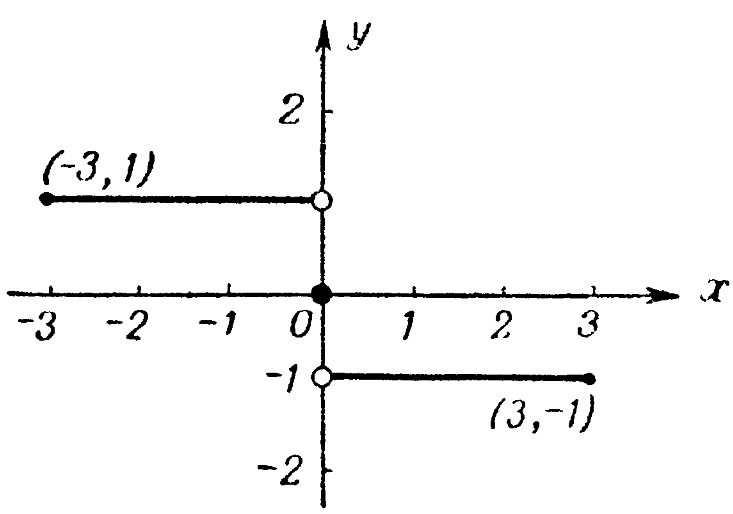
Часть г) очевидна — здесь нечего делать.

3.



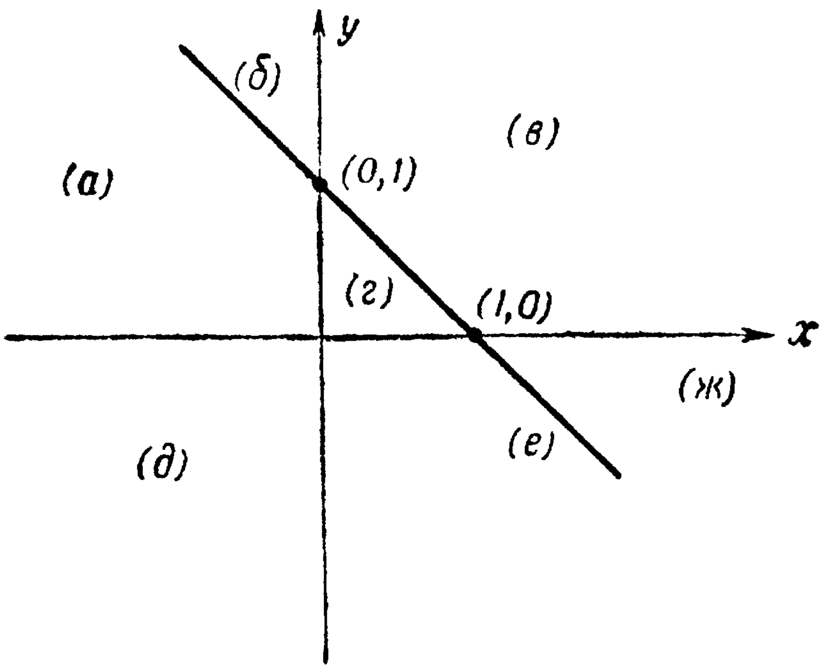
а б

4.



Страницы 51—52

1.



(а) $x \le 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1$;

(б) $x \le 0,\ y \ge 0,\ x+y \ge 1$;

(в) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \ge 1$;

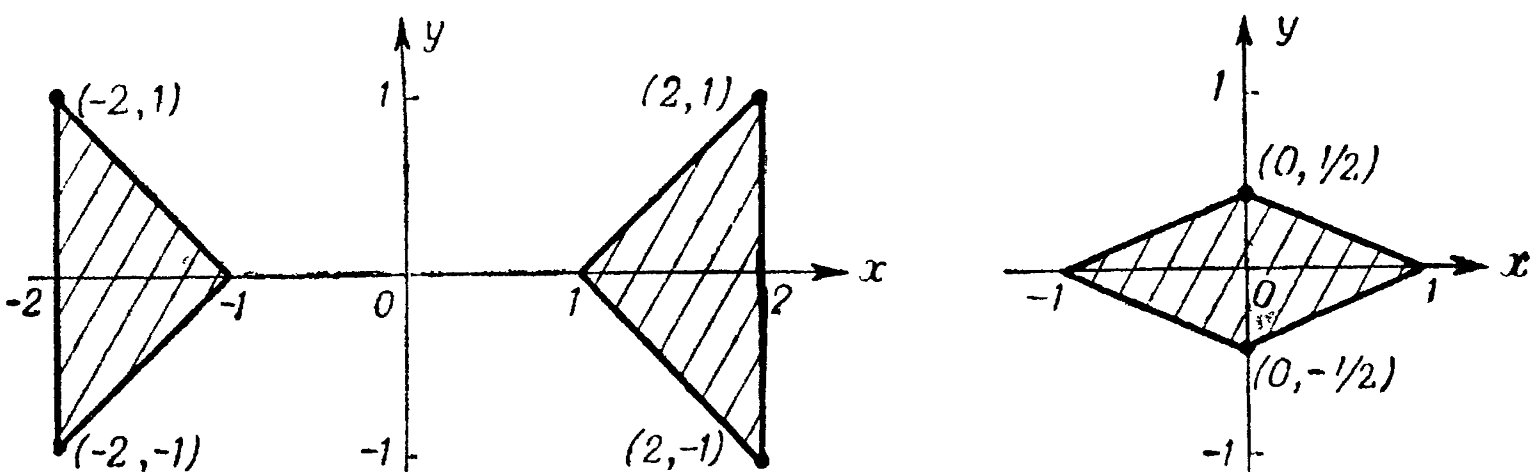
(г) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1$;

(д) $x \le 0,\ y \le 0,\ x+y \le 1$;

(е) $x \ge 0,\ y \le 0,\ x+y \le 1$;

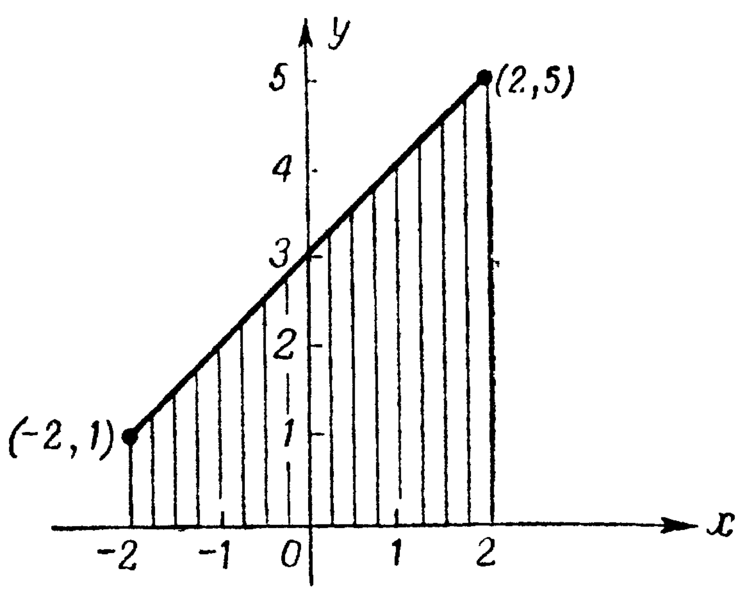
(ж) $x \ge 0,\ y \le 0,\ x+y \ge 1$.

2.

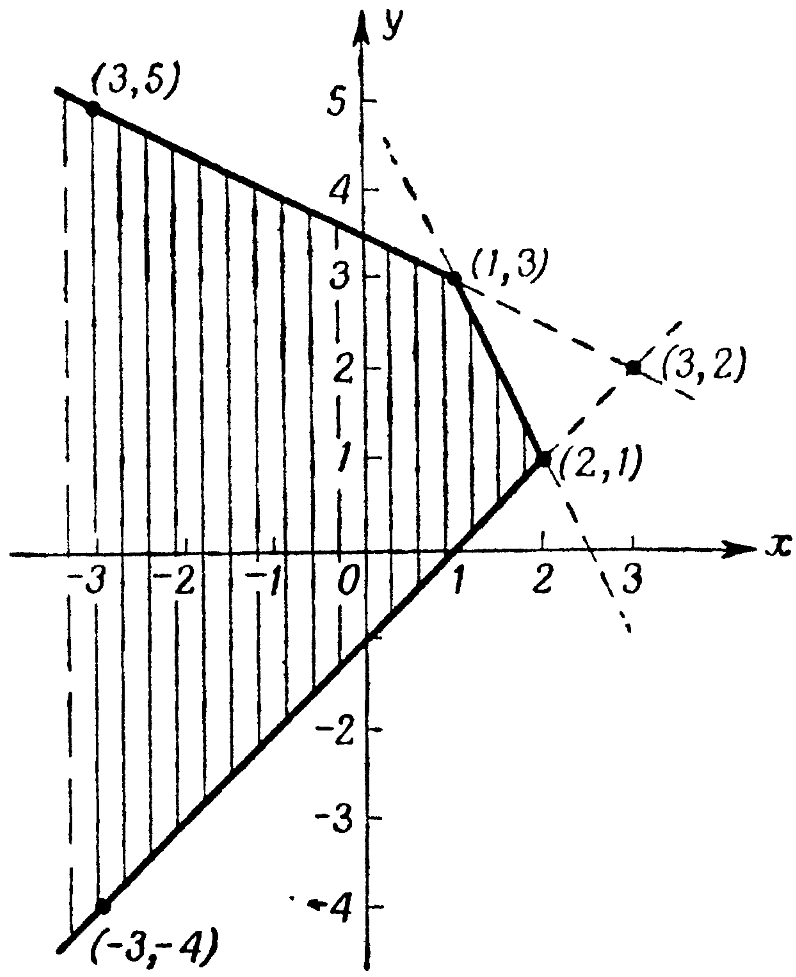


а б

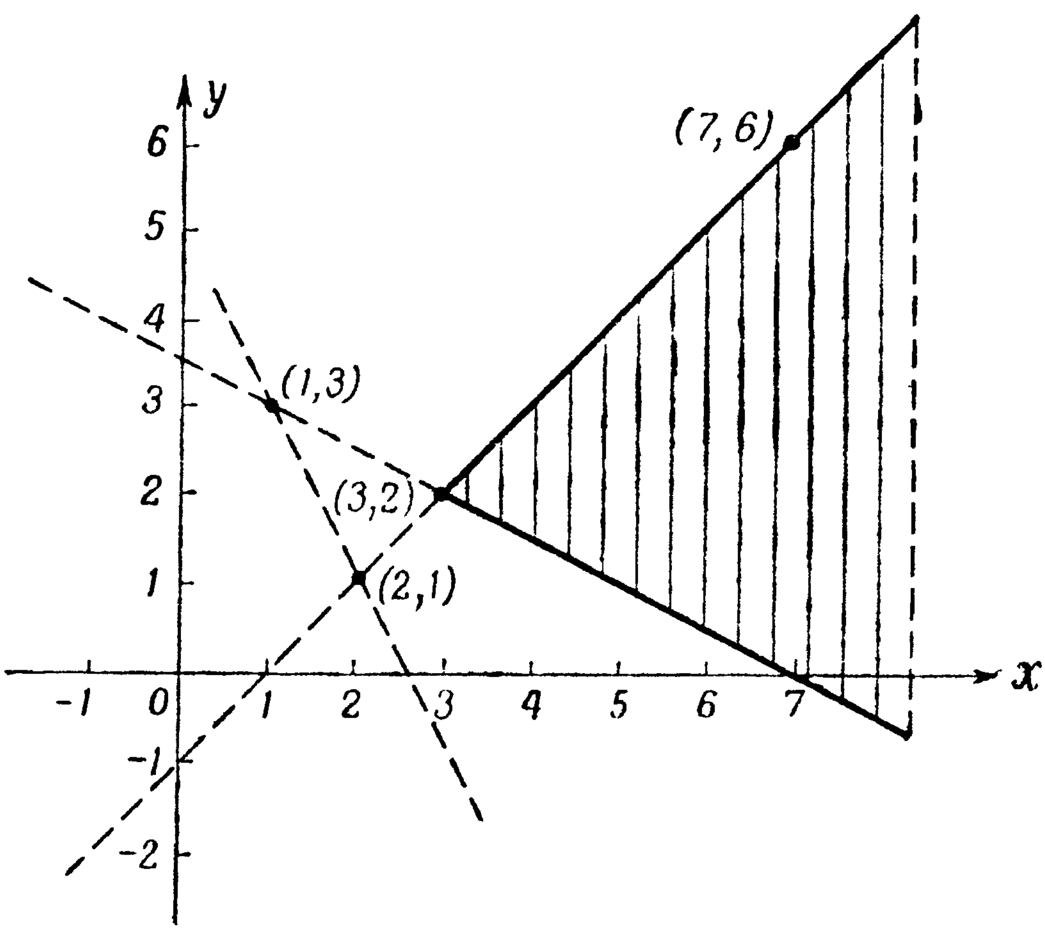
3.



4. Неполный график.

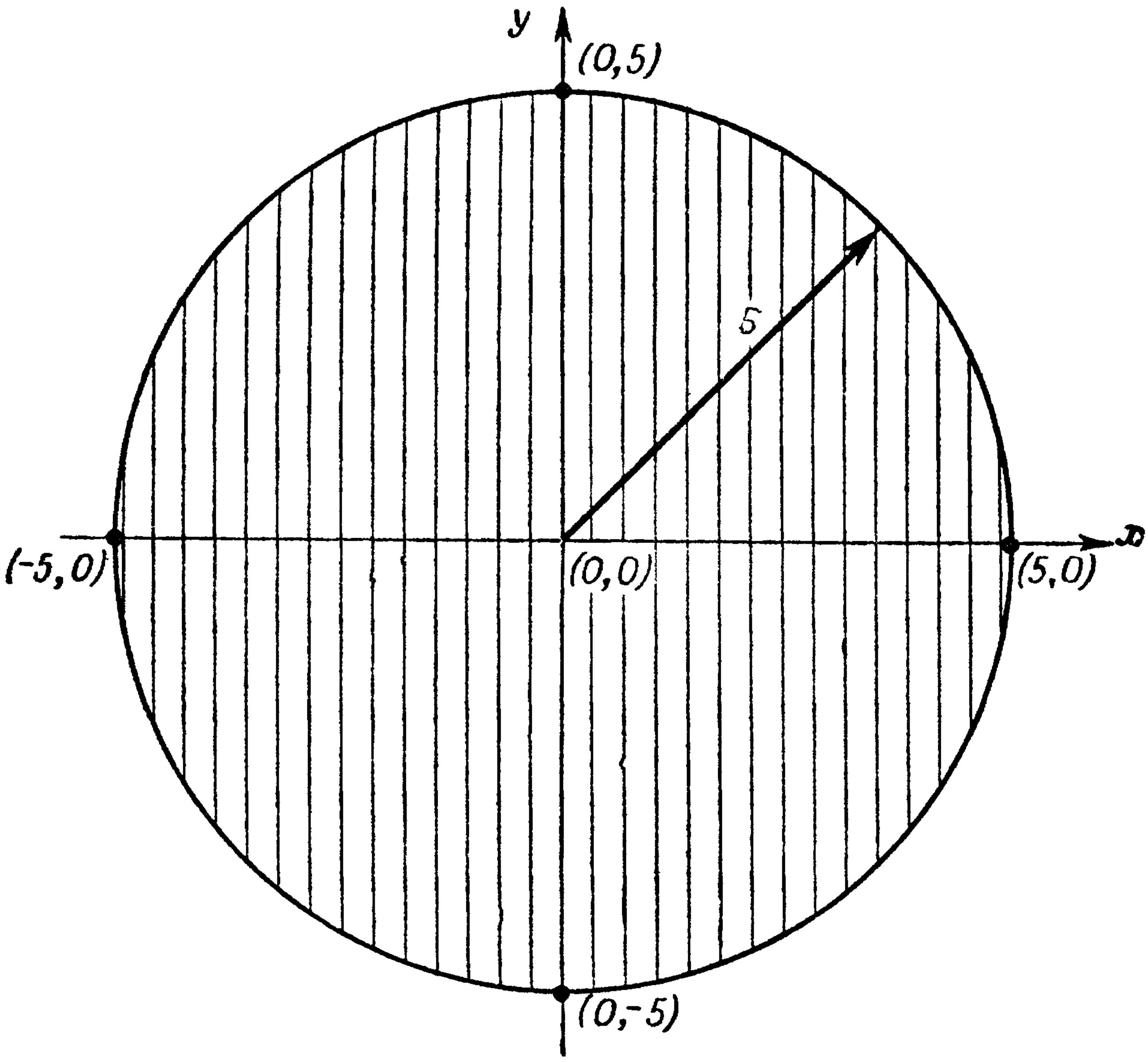


5. Неполный график.

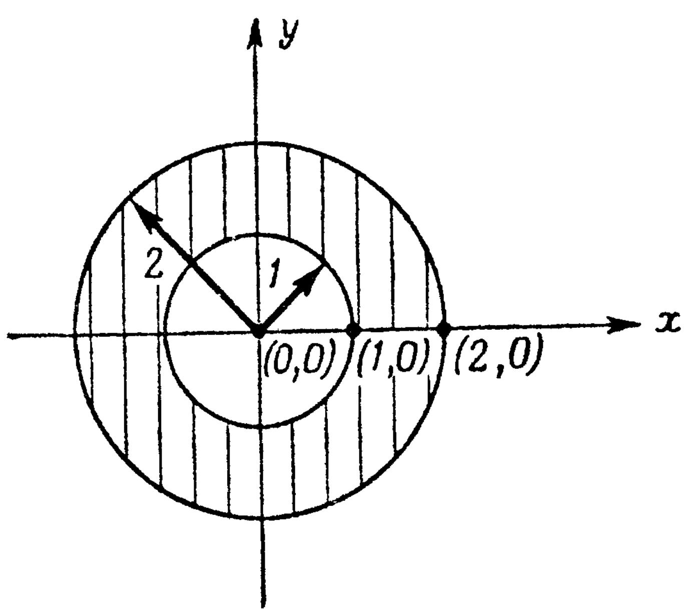


Страница 54

1.



2.



3. Ось y, $x=0$. Геометрическое решение задачи заключается в определении множества точек, равноудаленных от точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Аналитическое — в решении уравнения

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Страницы 58—59

1. а) $|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$;

б) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$;

в) $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$.

2. а) $=$; б) $<$; в) $=$; г) $=$; д) $<$.

3. а) $>$; б) $=$; в) $=$; г) $=$; д) $=$.

4. а) $>$; б) $=$; в) $=$; г) $>$; д) $=$.

5. а) $=$; б) $>$; в) $>$; г) $=$; д) $=$.

6.
$$\sqrt{(a-b)^2} \geqslant \sqrt{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})^2};$$
$$(a-b)^2 \geqslant (\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant a^2 - 2\sqrt{a^2b^2} + b^2;$$
$$2\sqrt{a^2b^2} \geqslant 2ab;$$
$$|ab| \geqslant ab.$$

7. Предположим, что $a^2 \leqslant b^2$ и $ab \geqslant 0$, тогда
$$\min\{a^2, b^2\} = a^2 = |a| \cdot |a| \leqslant |a| \cdot |b| = ab.$$

8. Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a > 0$. Аналогично, $\sqrt{a^2}$ равно 0, если $a = 0$; в противном случае оно является положительным элементом множества $\{a, -a\}$; $\sqrt{a^2} = \max\{a, -a\}$; $\sqrt{a^2} = \{a, -a\}^+$; график функции $y = \sqrt{x^2}$ изображен на рис. 7, и $\sqrt{a^2} = a \operatorname{sgn} a$.

Глава IV

Страница 62

1. а) 4, 5; б) 6, 7,5; в) 6, 6,5; г) 0, 10.

2. а) $3p$, $5p$; б) 0, $p/2$, в) $2p$, p^2+1.

Страницы 65—66

1. $a + b =$ диаметру $= 2r$, так что $r = (a+b)/2$; вследствие подобия треугольников $a/h = h/b$, откуда $h = \sqrt{ab}$.

2. При доказательстве того, что среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического, воспользуйтесь неравенством

$$ab\,(a-b)^2=0$$

или воспользуйтесь результатом упр. 1, стр. 29. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$. Чтобы доказать, что среднее гармоническое не больше среднего арифметического, можно воспользоваться теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом или провести доказательство непосредственно, используя неравенство

$$(a-b)^2\geqslant 0.$$

3. а) 3,2, 4,5; б) 4,8, 6, 7,5; в) 5,54$^-$, 6, 6,5; г) 5,83$^+$, 5,91$^+$, 6; д) 6, 6, 6.

4. Половина расстояния при каждой скорости

$$\frac{s}{2}=v_1t_1=v_2t_2;\qquad t_1=\frac{s}{2v_1};\qquad t_2=\frac{s}{2v_2};$$

$$t=t_1+t_2=\frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right);$$

$$s=vt=\frac{vs}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right);\qquad v=\frac{2}{1/v_1+1/v_2}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Половина времени при каждой скорости

$$s=vt=\frac{v_1t}{2}+\frac{v_2t}{2};\qquad v=\frac{v_1+v_2}{2}.$$

На основании решения упр. 2 путешественник прибудет раньше в конечный пункт при втором варианте изменения скоростей.

5. Положите $b=1/a$.

Страницы 77—78

1. В теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом (4.19) первые m_1 чисел a_i положите равными одному и тому же числу y_1, следующие m_2 чисел a_i положите равными одному и тому же числу y_2 и т. д.; наконец, последние m_k чисел a_i положите равными одному и тому же числу y_k. Учтите, что

$$m_1+m_2+\ldots+m_k=n.$$

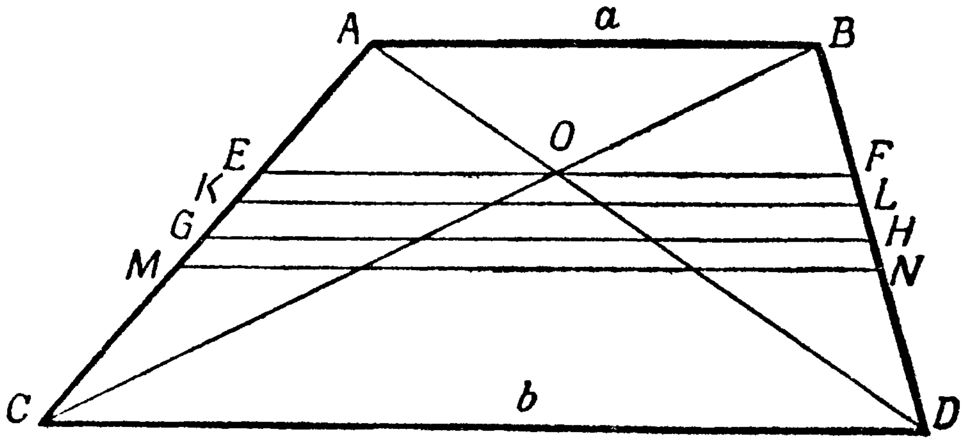
Таким образом вы получите первое неравенство. Для доказательства второго неравенства положите

$$\frac{m_1}{n} = r_1, \quad \frac{m_2}{n} = r_2, \quad \ldots, \quad \frac{m_k}{n} = r_k.$$

2. 8,5, $9{,}1^+$; 0,5, $0{,}7^+$; p, p.

3. Промежуточный шаг $(a-b)^2 \geqslant 0$; или см. упр. 1, стр. 32. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. Поскольку среднее квадратичное не меньше среднего арифметического, оно также не меньше среднего геометрического и среднего гармонического.

4. а) Диагональ делит отрезок GH на два отрезка, один из которых имеет длину $a/2$, а другой — длину $b/2$.



б) Если $ABLK \sim KLDC$, то $AB/KL = KL/CD$ и $KL^2 = \sqrt{ab}$.

в) Среднее гармоническое равно

$$\frac{2ab}{a+b} = h.$$

Чтобы показать, что $EF = h$, докажите, что $EO = OF$, и воспользуйтесь подобием треугольников:

$$\frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC}.$$

Но

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EO}{AB},$$

отсюда

$$\frac{EO}{CD} = 1 - \frac{EO}{AB} \quad \text{или} \quad EO\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1;$$

таким образом,

$$EO = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} h$$

и

$$EF = 2EO = h.$$

г) Положите $MN = r$. Если x и y — высоты трапеций, на которые разбита трапеция $ABDC$, то высота трапеции $ABDC$ равна $x + y$. Затем по предположению

$$\frac{r+a}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} (x+y), \quad \frac{r+b}{2} \cdot y = \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} (x+y).$$

Эта система линейных уравнений относительно x и y имеет решение в том и только том случае, когда

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Таким образом, r есть среднее квадратичное a и b.

Глава V

Страница 110

1. Сложите неравенство $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$ из упр. 3, стр. 30, с тождеством $2(ab + bc + ca) = 2(ab + bc + ca)$. Вы получите $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2$. Отсюда

$$A = 2(ab + bc + ca) \leqslant \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{E}{4}\right)^2 = \frac{E^2}{24}.$$

Равенство в упр. 3, стр. 30, имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

2. Если площадь поверхности прямоугольной коробки имеет фиксированную величину A, то сумма длин двенадцати ее ребер по меньшей мере равна $2\sqrt{6A}$ и коробка будет иметь форму куба тогда и только тогда, когда $E = 2\sqrt{6A}$. Доказательство следует непосредственно из неравенства $A \leqslant E^2/24$, полученного в упр. 1.

3. Положите A = площади, P = периметру, a и b = длине сторон, c = длине диагонали. На основании соотношения между средним арифметическим и средним квадратичным (см. упр. 3, стр. 77)

$$P = 2(a + b) = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \leqslant 4\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\sqrt{2}c.$$

В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$A = ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16}.$$

Отсюда

$$A \leqslant \frac{c^2}{2}.$$

Равенство достигается в том и лишь том случае, когда $a = b$. Следовательно, наибольший периметр $2\sqrt{2}c$ и наибольшую площадь $c^2/2$ имеет квадрат.

Страницы 112—113

1. Если $y = z$, то $p - y = p - z = x/2$, так что

$$I^2 = p(p-x)(p-y)(p-z) = p(p-x)\frac{x}{2}\frac{x}{2} = \frac{p}{4}x^2(p-x).$$

Если $x = y = z$, то $p - x = p - y = p - z = p/3$, так что

$$E^2 = p(p-x)(p-y)(p-z) = \frac{p^4}{27}.$$

2. Подставьте значения E^2, I^2 и A^2, приведенные в упр. 1, перемножьте и сравните результаты.

3. Каждый член, находящийся справа, неотрицателен, либо потому что он является полным квадратом, либо в силу его геометрического смысла. Равенство $E^2 = I^2$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = 2p/3$, т. е. в том и только том случае, когда равнобедренный треугольник будет равносторонним. Равенство $I^2 = A^2$ достигается тогда и только тогда, когда либо $x = p$, либо $y = z$, т. е. когда треугольник равнобедренный.

4. Второе неравенство. См. обсуждение условий, при которых достигается равенство $I^2 = A^2$ в решении упр. 3.

5. Первое неравенство. См. обсуждение условий, при которых достигается равенство $E^2 = I^2$ в решении упр. 3.

6. Формула показывает, что квадрат площади треугольника равен квадрату площади равностороннего треугольника того же периметра, уменьшенной на определенную величину, если

треугольник только равнобедренный, и уменьшенной на большую величину, если треугольник даже не равнобедренный.

7. Пусть длины катетов a и b, длина гипотенузы c, длина высоты t. Тогда в силу подобия треугольников $t=ab/c$. На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$t=\frac{ab}{c}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}=\frac{c}{2},$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. тогда и только тогда, когда прямоугольный треугольник будет равнобедренным.

Страницы 122—123

1. (5, —3).

2. $\pm\frac{3}{5}\sqrt{46}$; $-\frac{3}{5}\sqrt{46}\leqslant y\leqslant\frac{3}{5}\sqrt{46}$.

3. $\frac{-x}{10}+\frac{y}{6}=1$.

4. Если решить линейное уравнение относительно y и подставить полученное выражение в квадратное уравнение, то его дискриминант будет равен $4a^2b^2n^2(a^2m^2+b^2n^2-k^2)$. Это выражение обращается в нуль, если

$$k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}.$$

Соответствующие значения двойных корней приведены на стр. 121 (соотношения (5.23)).

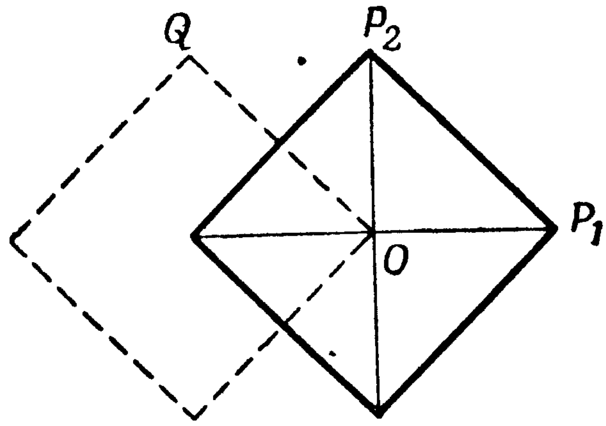
Глава VI

Страницы 139—140

1. Длина диаметра в „геометрии города“ равна 2, и длина каждой стороны равна $d_1(P_1, P_2)=d_1(O, Q)=2$. Поэтому

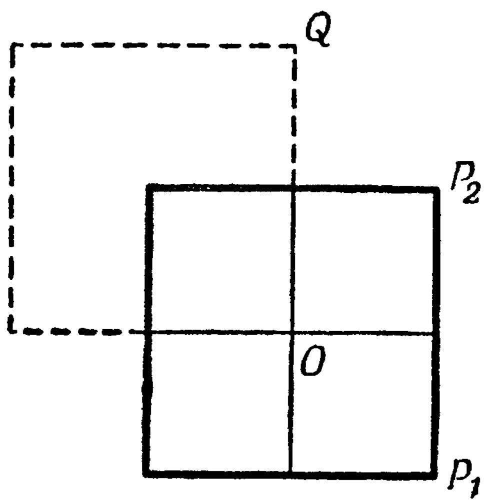
периметр в „геометрии города" равен $4 \cdot 2 = 8$ и искомое отношение равно

$$r = \frac{8}{2} = 4.$$



2. Неевклидова длина диаметра равна 2, и длина каждой из сторон $d_\infty(P_1P_2) = d_\infty(OQ) = 2$, таким образом, неевклидов периметр равен 8 и

$$r = \frac{8}{2} = 4.$$



3. Указание. Каждый правильный многоугольник с четным числом сторон и центром, совпадающим с началом координат, может занимать два различных положения, при которых он симметричен относительно каждой координатной оси. Попытайтесь доказать, что

а) если число сторон многоугольника N делится на 4, то неевклидова длина каждой стороны равна $2\,\mathrm{tg}(180°/N)$ [и поэтому периметр имеет неевклидову длину, равную $2N\,\mathrm{tg}(180°/N)$],

б) если число сторон четно, но не делится на 4, то длина каждой стороны равна $2\sin(180°/N)$ [и поэтому периметр равен $2N\sin(180°/N)$], в) результаты а) и б) имеют место при всех возможных положениях многоугольника.

Поскольку $N=8$ делится на 4, имеем

$$\text{диаметр} = 2,$$

$$\text{неевклидова длина периметра} = 16\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{8} = 16\,\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ,$$

$$r = \frac{16\,\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ}{2} = 8(\sqrt{2}-1) \approx 3{,}314.$$

4. Поскольку $N=10$ не делится на 4, имеем

$$\text{диаметр} = 2,$$

$$\text{неевклидова длина периметра} = 20\sin\frac{180^\circ}{10},$$

$$r = \frac{20\sin 18^\circ}{2} = 10\sin 18^\circ \approx 3{,}090.$$

Объяснение символов

$|a|$ — абсолютная величина числа a;
N — множество всех отрицательных чисел;
O — множество из одного элемента, именно числа 0;
P — множество всех положительных чисел;
$\in$ — есть элемент множества;
$\bar{\in}$ — не есть элемент множества;
$=$ — равно;
$\neq$ — не равно;
$>$ — больше;
$\not>$ — не больше;
$<$ — меньше;
$\not<$ — не меньше;
$\geqslant$ — больше или равно;
$\not\geqslant$ — не больше и не равно;
$\leqslant$ — меньше или равно;
$\not\leqslant$ — не меньше и не равно;
$\gtrless$ — не больше и не меньше;
$\sqrt{}$ — неотрицательный квадратный корень;
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наибольший элемент множества $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наименьший элемент множества $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^+$ — $\max\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^-$ — $\min\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 & \text{для } x > 0, \\ -1 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

Литература

На русском языке имеются две обстоятельные монографии по теории неравенств, содержащие весьма обширный и разнообразный материал:

[1] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, М., ИЛ, 1948.

[2] Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, М., „Мир“, 1965.

Более элементарный характер имеет следующая книга, рассчитанная на учителей математики и студентов математических институтов:

[3] Невяжский Г. Л., Неравенства, М., Учпедгиз, 1947.

Еще проще небольшая книжка, рассчитанная на школьников и содержащая не столько элементы общей теории, сколько множество разнообразных примеров:

[4] Коровкин П. П., Неравенства, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

Обширные разделы, посвященные неравенствам, имеются в рассчитанных на школьников сборниках задач:

[5] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), М., „Наука“, 1965.

[6] Кречмар В. О., Задачник по алгебре, М., „Наука“, 1964.

Значительно более серьезный характер имеет посвященный теории неравенств раздел в замечательном сборнике задач, рассчитанном на студентов-математиков:

[7] Полиа Г. и Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, часть 1, М., Гостехиздат, 1956.

Наконец, с содержанием последней главы этой книги тесно перекликается небольшая книжка, рассчитанная на учащихся средней школы:

[8] Шрейдер Ю. А., Что такое расстояние?, М., Физматгиз, 1963.

Оглавление

Э. Беккенбах, Р. Беллман

ВВЕДЕНИЕ В НЕРАВЕНСТВА

Редактор *Д. В. Беклемишев*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор
В. И. Шаповалов
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *Т. С. Бухтина*

Сдано в производство 8/IV 1965 г.
Подписано к печати 30/IX 1965 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}=2{,}63$ бум. л.
8,82 печ. л.
Уч.-изд. л. 6,75. Изд. № 1/3353.
Цена 47 к. Зак. 1422.
БЗ—16—65—4

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.