МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИНАЙ Я.Г.

ВВЕДЕНИЕ В ЭРГОДИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕРЕВАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕРЕВАН 1973

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИНАЙ Я.Г.

ВВЕДЕНИЕ В ЭРГОДИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕРЕВАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕРЕВАН 1973

Введение.

У физиков часто встречается выражение-" изложение для пешеходов". Под этим обычно подразумевается изложение какой-либо теории, предназначенное для широкого круга читателей, где на первый план выдвигаются основные идеи, а технические результаты и более тонкие вопросы опущены. В этом смысле данные лекции можно назвать изложением эргодической теории "для пешеходов". Они возникли из циклов лекций, которые я читал студентам, начиная с третьего курса, на механико-математических факультетах Московского и Ереванского Государственных Университетов. Читатель почти не найдёт здесь доказательств общих теорем, основанных на серьёзном применении теории меры. Зато здесь разобрано большое число примеров, популярных в эргодической теории. Для их понимания достаточно знания самых общих фактов теории меры, теории гладких многообразий, теории вероятностей. Надо отметить, впрочем, что в ряде мест развитие теории не пошло намного дальше, чем разбор этих примеров.

Приводимые в курсе доказательства не везде доведены до конца, так как их пунктуальное проведение невозможно на том уровне, который здесь принят. Имеющиеся в тексте литературные ссылки должны помочь читателю ознакомиться с более глубокой литературой по тому или иному вопросу. Подчеркнём, что эти литературные ссылки далеко не полны.

Последние две лекции посвящены энтропии. Для их понимания полезно знать теорию измеримых разбиений и, в частности, операции над разбиениями.

При подготовке этих лекций для публикации большую помощь оказали мне студенты механико-математического факультета МГУ А.Брудно и С.Зенович, которым я приношу свою искреннюю благодарность.

ЛЕКЦИЯ I. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В чем состоят основные задачи эргодической теории? С моей точки зрения основные задачи эргодической теории заключаются в изучении статистических свойств групп движений неслучайных объектов. Необходимо подчеркнуть, что это моя личная точка зрения, и вполне допустимы другие. Например, можно считать, что эргодическая теория изучает категорию пространств с мерой и их морфизмов - сохраняющих меру преобразований.

Сейчас мы коротко обсудим, что мы будем понимать под статистическими свойствами групп движений. Исходное пространство мы будем всегда обозначать буквой $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{M}$ должно быть измеримым пространством, т.е. в нем должна быть выделена естественная σ-алгебра γ его подмножеств. Во всех конкретных случаях выделение этой σ-алгебры не вызывает трудностей. Допустим, что в $\mathcal{M}$ действует некоторая группа или полугруппа преобразований G. Пока мы рассмотрим случай, когда G счётна. Тогда для всякого элемента $g \in G$ преобразование $T_g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ определено так, что

1) T_g есть измеримое преобразование, т.е. если $A \in \gamma$ то $T_g(A),\ T_g^{-1}(A) \in \gamma$;

2) $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$;

Из 2) следует, что в случае, когда G есть группа, каждое T_g обратимо, поскольку

$$(T_g)^{-1} = T_{g^{-1}}$$

В дальнейшем будут полезны следующие примеры.

Пример I. $G = \mathbb{Z}^+$, $T = T_1$ - эндоморфизм пространства $\mathcal{M}$ т.е. однозначное, но не взаимно однозначное преобразование $\mathcal{M}$.

Пример 2. $G = \mathbb{Z}$, $T = T_1$ - взаимно однозначное преобразование пространства $\mathcal{M}$, называемое автоморфизмом, $T_n = (T_1)^n = T^n$.

Можно рассматривать и более общие случаи, когда G - произвольная счетная коммутативная группа. Но пока ограничимся этими двумя примерами. Мы затронем сейчас чрезвычайно важную и довольно общую проблему:

Что значит, что действие группы G обладает случайными (или статистическими) свойствами?

Предлагаемая далее схема не является максимально общей. Например, в нее не укладываются применения эргодической теории к теории алгебраических полей, о которых идет речь в книге Ю.В. Линника "Эргодическая теория алгебраических полей".

Некоторый накопленный опыт дает основание к выделению следующих, в известной мере усиливающих друг друга пяти свойств, которые естественно назвать статистическими.

Свойство I. Существование конечной меры μ, инвариантной относительно G. (Нормировкой всегда можно добиться, чтобы $\mu(\mathcal{M}) = 1$).

Инвариантность меры относительно действия группы G означает, что для любого множества $A \in \mathcal{Y}$ и для любого элемента $g \in G$

$$\mu(A) = \mu(T_g^{-1} A).$$

Так как $\mathcal{M}$ есть измеримое пространство, то можно рассмотреть измеримые функции (случайные величины) $f(x)$ и сопряженную (т.е. действующую на функции) полугруппу или группу преобразований $\{U_g\}$

$$U_g : f(x) \to f(T_g x); \quad G \to \{U_g\}.$$

Тогда инвариантность меры μ эквивалентна следующему соотношению:

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int (U_g f)(x)\, d\mu(x). \qquad (1)$$

которое должно выполняться для любого $g \in G$.

Докажем это утверждение. В силу линейности математического ожидания достаточно проверить (I) для индикаторов измеримых множеств. Функция $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0 & \text{если } x \notin A \end{cases}$ называется индикатором множества A. Положим $f(x) = \chi_A(x)$.

Подставляя в (I), получаем

$$\mu(A) = \int_M \chi_A(x)\, d\mu(x); \quad \int_M (U_g f)(x)\, d\mu(x) = \int_M \chi_{T_g^{-1}A}(x)\, d\mu(x) = \mu(T_g^{-1}A),$$

и мы приходим к исходному определению инвариантности.

Если G - группа, то $T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$ и, значит, $\mu(A) = \mu(T_g^{-1}A) = \mu(T_g A)$, т.е. мера любого измеримого множества равна мере и образа, и прообраза этого множества.

Следующая теорема показывает, почему наличие инвариантной меры можно отнести к статистическим свойствам действия группы G. В ее формулировке G будет либо $\mathbb{Z}^+$, либо $\mathbb{Z}$, хотя можно рассматривать и более общую ситуацию.

Эргодическая теорема Биркгофа - Хинчина.

Пусть $f(x) \in \mathcal{L}^1_\mu(M)$ и μ инварианта относительно G. Тогда при $n \to \infty$ с вероятностью I существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f = \hat{f}(x).$$

При этом, с вероятностью I $\hat{f}(Tx) = \hat{f}(x)$ и

$$\int_M f(x)\, d\mu(x) = \int_M \hat{f}(x)\, d\mu(x).$$

В случае группы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k} x) \quad \text{с вероят. } 1.$$

В теории вероятностей подобные утверждения называются законами больших чисел, а так как сходимость имеет место почти всюду, то эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина есть теорема типа усиленного закона больших чисел. Доказательство этой теоремы можно найти в книге П. Биллингсли "Эргодическая теория и информация".

Очень часто, в особенности в физической литературе, недостаточно подчеркивается, что эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина верна почти всюду. Те точки x , для которых она выполняется в случае хороших функций, естественно назвать типичными. В реальных ситуациях могут встречаться нетипичные точки, и это, зачастую, сильно усложняет исследования.

Тот факт, что при наличии инвариантной меры можно проводить усреднение по времени, означает, что система находится в определенном стационарном, не меняющемся со временем режиме. Часто бывает так, что система с течением времени выходит на какой-нибудь стационарный режим. Тогда этот режим естественно изучать с помощью той инвариантной меры, который ему соответствует. Сейчас мы получим первое, самое простое следствие существования инвариантной меры.

Теорема Пуанкаре о возвращении.

Пусть в пространстве M действует группа $\{T^n\}$ степеней автоморфизма T . Для всякого множества A, такого, что $\mu(A) > 0$, и для почти каждой точки $x \in A$ существует бесконечная возрастающая последовательность номеров n_i, при которых $T^{n_i} x \in A$.

Прежде чем доказывать эту теорему, я расскажу о парадоксе Цермело, связанном с теоремой Пуанкаре о возвращении.

Рассмотрим газ, находящийся в некотором замкнутом объеме . (Забегая вперед отметим, что теорема Пуанкаре верна и для непрерывного времени $G = R^1$. Доказательство при этом почти не меняется).

В классической статистической механике считается, что газ состоит из большого числа молекул, взаимодействующих между собой и движущихся по законам классической механики. Иными словами, такой газ есть гамильтонова система, хотя и система с очень большим числом степеней свободы (при нормальных условиях в I см^3 находится примерно I0^{20} молекул). Как мы увидим позже, всякая замкнутая гамильтонова система обладает конечной инвариантной мерой, и, стало быть, применима теорема Пуанкаре о возвращении. Возьмем в качестве множества A множество тех начальных данных, когда все молекулы находятся в левой половине сосуда. Из вида меры следует, что $\mu(A) > 0$. Но тогда по теореме Пуанкаре о возвращении для почти каждой точки $x \in A$ должны существовать сколь угодно большие моменты времени, когда траектория точки x попадает в множество A. Однако, за всю историю существования человечества не отмечено ни одного случая, когда бы молекулы газа заняли половину отведенного им объема. Этот парадокс называется парадоксом Цермело и связан с основаниями статистической механики. Для его разрешения обычно говорят, что циклы Пуанкаре настолько длинные, что превышают все разумные сроки существования галактики и, в частности, наблюдаемого объема газа.

Перейдем к доказательству теоремы Пуанкаре.

Обозначим через A_1 множество тех точек из A, которые возвращаются в A хотя бы один раз

$$A_1 = \{ x : x \in A, \exists k > 0, T^k x \in A \}.$$

Если мы докажем, что $\mu(A) = \mu(A_1)$ то утверждение теоремы легко из этого следует, ибо $A_2 = \{ T^k x \in A; x \in A \}, \mu(A_2) = \mu(A)$ и так далее. Ясно, что $A_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ состоит из тех точек, которые мы ищем, а кроме того $\mu(A_\infty) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(A)$, т.е. $\mu(A \setminus A_\infty) = 0$ Положим $B = A \setminus A_1 = \{ x : x \in A, \forall k > 0\ T^k x \notin A \}$ и допустим, что $\mu(B) > 0$. Имеем $T^{-k} B \cap B = \emptyset$.

Значит, при любых $k>0$ система множеств $\{T^{-k}\mathcal{B}\}$ дизъюнктна, и поэтому $\mu(\bigcup_k T^{-k}\mathcal{B}) = \sum_k \mu(T^{-k}\mathcal{B}) \le 1$ в силу нормированности меры. Но T сохраняет меру, значит $\sum_k \mu(T^{-k}\mathcal{B}) = \sum_k \mu(\mathcal{B})$, и последний ряд расходится. Следовательно, $\mu(\mathcal{B}) = 0$.

Свойство II. Эргодичность.

Это свойство можно сформулировать по-разному, например так: преобразование T эргодично, если в теореме Биркгофа-Хинчина для любой функции $f \in \mathcal{L}^1_\mu(M)$ предельная функция $\hat{f}$ есть константа: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum f(T^k x) = \hat{f}(x) = \int_M f(x)\,d\mu(x)$ п.в.

В теории вероятности такой вид имеет самый обычный усиленный закон больших чисел: средние сходятся почти наверное к математическому ожиданию.

Как мы увидим далее, свойство эргодичности означает неразложимость системы на инвариантные нетривиальные подмножества. Более подробно, множество A называется инвариантным (инвариантным $\mathrm{mod}\,0$), если $A = T^{-1}A$ ($\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$). Покажем, что эргодичность эквивалентна следующему утверждению: для всякого инвариантного $\mathrm{mod}\,0$ множества A $\mu(A)$ равна I или 0. В самом деле, заметим, во-первых, что для любого инвариантного $\mathrm{mod}\,0$ множества A найдется инвариантное множество A_1, для которого $\mu(A \triangle A_1) = 0$. Для этого положим вначале $\mathcal{B} = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}A$. Ясно, что $\mu(A \triangle \mathcal{B}) = 0$, $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\mu(\mathcal{B} - T^{-1}\mathcal{B}) = 0$. Множество $A_1 = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}\mathcal{B}$ и будет искомым.

Пусть T эргодично. Возьмем какое-либо инвариантное $\mathrm{mod}\,0$ множество $\mathcal{A}$. Найдем отличающееся от него на множество меры 0 инвариантное множество $\mathcal{A}_1$. Для индикатора $\chi_{A_1}(x)$ среднее $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{A_1}(T^k x)$ равно I

или 0, в зависимости от того, $x \in \mathcal{A}_1$ или $x \notin \mathcal{A}_1$. Но отсюда и из эргодичности следует, что если $\mu(\mathcal{A}_1)>0$, то это среднее должно равняться $\int \chi_{A_1}(x)\,d\mu(x)=\mu(\mathcal{A}_1)$, что и требовалось показать.

Обратно, пусть для любого инвариантного $\mathrm{mod}\,0$ множества $\mathcal{A}$ $\mu(A)=1$ или 0. Тогда, взяв любую функцию $f\in\mathcal{L}^1_\mu(\mathcal{M})$ и ее временное среднее $\hat{f}$, мы получим, что для любых двух чисел a, b, $-\infty<a\le b<\infty$ множество $E_a^b(\hat{f})=\{x:\ a\le\hat{f}<b\}$ будет инвариантным $\mathrm{mod}\,0$.

Но тогда $\mu(E_a^b(\hat{f}))=1$ или 0. Это означает, что $\hat{f}=const$ почти всюду.

Из доказанного вытекает, что эргодичность есть свойство неразложимости системы на инвариантные части.

Свойство Ш. Перемешивание.

Преобразование T (автоморфизм или эндоморфизм) обладает свойством перемешивания, если для любых функций $f, g\in\mathcal{L}^2_\mu(\mathcal{M})$ при больших k функции $f(T^k x)$, $g(x)$ становятся статистически независимыми. Формально для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\int_{\mathcal{M}} f(T^k x)\cdot g(x)\,d\mu(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathcal{M}} f(T^k x)\,d\mu(x)\cdot\int_{\mathcal{M}} g(x)\,d\mu(x) =$$

$$=\int_{\mathcal{M}} f(x)\,d\mu(x)\cdot\int_{\mathcal{M}} g(x)\,d\mu(x).$$

Например, если A, B множества, χ_A и χ_B - их индикаторы, то независимость χ_A и χ_B означает, что точки, которые в начальный момент времени находились в множестве B, с течением времени равномерно распределяются по всему пространству. Поэтому, в системах с перемешиванием весьма трудно различить точки, которые достаточно долгое время назад были или не были в множестве A.

Пусть $\rho(x)$ - неотрицательная измеримая функция, для которой $\int_M \rho(x)\, d\mu(x) = 1$. Мы можем ввести новую меру ν_0, абсолютно непрерывную, относительно μ, для которой $\frac{d\nu_0(x)}{d\mu(x)} = \rho(x)$. Физик назвал бы ν_0 неравновесным распределением. Мы можем ввести в рассмотрение эволюцию меры ν_0, положив $\nu_n(A) = \nu_0(T^{-n}A)$.

Тогда в случае преобразования с перемешиванием

$$\int_M f(x)\, d\nu_n(dx) = \int f(x)\, \rho(T^n x)\, d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\, d\mu(x),$$

что означает, что неравновесное распределение стремится к равновесному. Подчеркнем, что одной эргодичности для этого недостаточно.

<u>Свойство IУ. Центральная предельная теорема (Ц.П.Т.)</u>

Для заданной функции f рассмотрим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \bar{f}, \quad \bar{f} = \int_M f(x)\, d\mu(x).$$

ЦПТ состоит в том, что существует число $\sigma > 0$, при котором

$$\mu\left\{x : \sigma\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - \bar{f}\right] < \alpha\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \quad (2)$$

Мы будем говорить, что динамическая система обладает Ц.П.Т., если (2) имеет место для достаточно богатого класса функций $f(x)$. Свойства IУ означает, что последовательность случайных величин $f(T^k x)$ ведет себя похоже на последовательность независимых случайных величин. Кроме того, Ц.П.Т. показывает, что в эргодической теореме Биркгофа-Хинчина разность

$$\hat{f}(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$$

имеет порядок $n^{-\frac{1}{2}}$, но следующего члена асимптотики написать нельзя: при больших n выражение $6\sqrt{n}\left(\hat{f}(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\right)$ не стремится ни к какому пределу, а имеет только предельное распределение.

Свойства У. Экспоненциальное убывание корреляций.

Пусть функция f такова, что $\int\limits_M f(x)\,d\mu(x) = 0$.

Говорят, что для функции f имеет место экспоненциальное убывание корреляции, если существует число q, $0<q<1$, такое, что

$$\left|\int\limits_M f(T^k x)\, f(x)\, d\mu(x)\right| \leq C(f)\, q^k \qquad (3).$$

Группа $\{T^n\}$ обладает свойством (V), если (3) имеет место для достаточно богатого запаса функций.

Проблема существования инвариантной меры

I. Теория Боголюбова-Крылова. Мы изложим только часть этой теории. Пусть M - компактное топологическое пространство и T - непрерывное отображение M в себя. Тогда на M всегда существует хотя бы одна инвариантная относительно T мера. Доказательство. Пусть ν - произвольная мера. Обозначим $\nu_k(A) = \nu(T^{-k}A)$ или $T^k\nu = \nu_k$. Далее, введем меру

$\tilde{\nu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k$. Пространство нормированных мер на компактном

пространстве M слабокомпактно. Это значит, что найдется такая нормированная мера μ и строго монотонная последовательность номеров n_i, при которой $\nu_{n_i} \xrightarrow[n_i\to\infty]{} \mu$.

Докажем инвариантность меры μ, т.е. равенство $\int f(x)\,d\mu(x) = \int f(Tx)\,d\mu(x)$ для любой ограниченной измеримой функции f. В силу компактности пространства $\mathcal{M}$ последнее соотношение достаточно проверить только для непрерывных функций (они всюду плотны в пространстве измеримых функций). Если $f(x)$ непрерывна, то

$$\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n_i\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_{n_i}(x) =$$

$$= \lim_{n_i\to\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{n_i-1} \int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_k(x) = \lim_{n_i\to\infty}\Big[\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_k(x)$$

$$- \frac{1}{n_i}\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_{n_i}(x) + \frac{1}{n_i}\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_0(x)\Big] =$$

$$= \lim_{n_i\to\infty}\Big[\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\int f(T^k x)\,d\nu(x)\Big] = \lim_{n_i\to\infty}\Big[\frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{n-1}\int f(Tx)\,d\nu_k(x)\Big] =$$

$$= \int f(Tx)\,d\mu(x).$$

Мы использовали по ходу дела

$$\lim_{n_i\to\infty}\frac{1}{n_i}\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_{n_i}(x) = \lim_{n_i\to\infty}\frac{1}{n_i}\int\limits_{\mathcal{M}} f(x)\,d\nu_0(x) = 0$$

Теорема доказана.

Сейчас мы рассмотрим другой частный случай, когда применимы подобные соображения. Пусть Q – компактное топологическое пространство и пусть для любого $x\in Q$ задана функция $P(x,\cdot)$ (вероятности перехода) так, что она удовлетворяет следующим условиям:

I) Для всех $x \in Q$ $P(x, A)$ есть распределение вероятностей по A;

2) Для любого $A \in \gamma$ $P(x, A)$ есть измеримая по x функция.

Набор функций $P(x, \cdot)$ задает цепь Маркова, для которой Q служит фазовым пространством.

Мера λ называется инвариантной мерой для марковской цепи с вероятностями перехода $P(x, \cdot)$, если для любого $A \in \gamma$

$$\lambda(A) = \int_Q \lambda(dx) \cdot P(x, A).$$

Доказательство существования инвариантной меры в случае компактного Q очень похоже на предыдущее доказательство. Берем произвольную меру ν и полагаем $\tilde{P}\nu(A) = \int_M d\nu(x) P(x, A)$.

Далее рассматриваем последовательность средних $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}^k \nu$, из которой извлекается слабо сходящаяся подпоследовательность. Ее предел и будет искомой мерой.

Пример

Пусть в каждой целочисленной точке прямой находится автомат, который может быть только в одном из двух состояний = 0,I. Система таких автоматов есть бесконечная среда автоматов. Предположим, что из переходного состояния всей системы автоматов в следующее - марковский и локальный. Это значит, что вероятность состояния $y_i = x_i(t+1)$ i-ого автомата зависит только от состояний $x_{i-1}(t)$, $x_i(t)$, $x_{i+1}(t)$ этого же автомата и двух его ближайших соседей и определяется функцией $p(y_i / x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$. Для разных автоматов переходы независимы. Тогда выражение

$$p(y_{\tau_1}, y_{\tau_2}, \dots, y_{\tau_k} \mid x) = \prod_{s=1}^{k} p(y_{\tau_s} \mid x_{\tau_s - 1}, x_{\tau_s}, x_{\tau_s + 1}) \quad (4)$$

при каждом $x = \{x_i\}$, $x_i = 0,1$, задает распределение вероятностей на пространстве состояний автомата и порождает в таком пространстве цепь Маркова. Пространство состояний системы автоматов есть пространство бесконечных двоичных последовательностей и в естественной топологии компактно. Формула (4) определяет марковскую цепь, а по доказанному - для нее существует инвариантная мера, что заранее далеко не очевидно. В таких ситуациях основными становятся следующие вопросы:

1. Единственна ли инвариантная мера?

2. Как ее найти?

Большое число результатов было получено в этой проблематике И.И. Пятецким-Шапиро и его сотрудниками: Вассерштейном, Леонтовичем, Ставской, Тоомом и другими.

ЛЕКЦИЯ 2

ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

П. Пусть $\mathcal{M}$ – компактное гладкое многообразие класса C^{∞} без края, T – диффеоморфизм $\mathcal{M}: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ класса C^{r} $(r \geq 1)$. Теория Боголюбова – Крылова дает существование хотя бы одной инвариантной относительно T меры, но эта мера может быть плохой – сосредоточенной в отдельных точках, на замкнутых, нигде не плотных множествах сложной природы, и никак не связанной с гладкой структурой. Мы рассмотрим сейчас некоторые необходимые условия существования гладкой инвариантной меры.

Сделаем небольшое отступление о дифференциальных формах. Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое замкнутое ориентированное n– мерное многообразие и T – гладкое преобразование $\mathcal{M}$. Желающие могут считать $\mathcal{M}$ двумерной поверхностью, расположенной в R^3. Через любую точку x многообразия $\mathcal{M}$ можно провести касательное пространство $\mathcal{T}_x$. Возьмем в нем какой-либо упорядоченный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Так как $\mathcal{M}$ ориентировано, то базисы могут быть положительными и отрицательными. Рассмотрим n– мерный параллелограмм $\Pi(e_1, e_2, \dots, e_n)$, натянутый на базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ т.е. множество всех векторов вида $\sum \lambda_i e_i$,

где $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Мы будем говорить, что на $\mathcal{M}$ задана n-мерная дифференциальная форма ω_x, если каждому параллелограмму $\Pi(e_1, e_2, \dots, e_n) = \Pi$ сопоставлено число $\omega_x(\Pi)$ так, что:

1. При перестановке векторов базиса ω_x умножается на $(-1)^J$, где J – четность перестановки;

2. $\omega_x(\Pi(e_1, \dots, e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)) = \lambda\, \omega_x(\Pi(e_1, \dots, e_n))$,

3. $\omega_x(A\Pi) = \det A\, \omega_x(\Pi)$, где A – любое линейное преобразование $\mathcal{T}_x$ (2 есть частный случай 3);

4. ω_x в естественном смысле непрерывно зависит от x.

Дифференциальные формы можно интегрировать по многообразию $\mathcal{M}$, составляя римановы суммы и переходя к пределу. ($\mathcal{M}$ разбивается на криволинейные параллелепипеды, которые аппроксимируются параллелепипедами в касательных пространствах. Так как $\mathcal{M}$ ориентировано, то можно выбрать разбиение, любой параллелепипед которого ориентирован положительно.)

Из свойства 3 следует, что при фиксированном x значение $\omega_x(\Pi)$ однозначно определяется своим значением на одном параллелепипеде П. Поэтому, если даны две n- мерные дифференциальные формы ω и ω_1, то существует такая функция $\rho(x)$, что $\omega_1 = \rho\,\omega$.

Если есть дифференциальная форма ω порядка n и гладкое преобразование T многообразия $\mathcal{M}$, то можно рассмотреть индуцированную этим преобразованием дифференциальную форму $T^*\omega$. Она определяется следующим образом. Пусть $x \in \mathcal{M}$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис касательного пространства $\mathcal{T}_x$ и $y = Tx$.

Пусть, далее, локальные координаты в окрестности точки y суть $y_1, y_2, \dots, y_n$, а локальные координаты в окрестности точки x суть $x_1, x_2, \dots, x_n$. Преобразование Т может быть представлено в виде $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, где f_i - дифференцируемая функция. Рассмотрим матрицу частных производных, называемую матрицей Якоби преобразования Т:

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_x : \mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_y .$$

Если Π_y - параллелепипед в точке y, то можно рассмотреть параллелепипед в точке x, связанный с Π_y соотношением

$$\Pi_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Pi_x .$$

Определим $T^*\omega$ равенством $(T^*\omega)_y(\Pi_y) = \omega_x(\Pi_x)$.

Тогда $T^*\omega$ будет снова n- мерной дифференциальной формой. Из замечания, сделанного выше, получаем

$$T^*\omega = J_\omega(x)\cdot\omega .$$

Функция $J_\omega(x)$ называется якобианом формы ω по отношению к преобразованию T. Гладкая мера на $\mathcal{M}$ задается n- мерной дифференциальной формой: $\mu(A) = \int\limits_A \omega(dx)$.

Наша задача - найти инвариантную гладкую меру, или отвечающую ей гладкую форму.

Условие инвариантности формы ω состоит в том, чтобы $J_\omega(x) \equiv 1$.

Если же ω_1 - произвольная форма и $J_{\omega_1}(x)$ ее якобиан, то $\omega = \rho(x)\,\omega_1$ и, как не трудно проверить,

$$J_\omega = \frac{\rho(x)}{\rho(Tx)}\, J_{\omega_1}$$

Значит, ω будет инвариантной формой тогда и только тогда, когда $J_{\omega_1} = \dfrac{\rho(Tx)}{\rho(x)}$. Выведем отсюда ряд следствий. Пусть $x^{(0)}$ - неподвижная точка: $Tx^{(0)} = x^{(0)}$; $x_1, \dots, x_n$ - координаты в ее окрестности. Отображение T в этих координатах задается дифференцируемыми функциями $f_i(x_1, \dots, x_n)$. Помещая начало координат в точку $x^{(0)}$, получим $f_i(0, \dots, 0) = 0$.

Пусть $\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_0 = a_{ij}$. Отсюда следует, что в случае неподвижной точки $J_\omega(x)$ не зависит от ω и $J_\omega(x) = \det \|a_{ij}\|$.

Мы получили необходимые условия существования инвариантной меры: в неподвижных точках $\det \| a_{ij} \| = 1$. Поэтому, если $x^{(0)}$ – притягивающая точка, то $\det \| a_{ij} \| < 1$ и равенство $J_\omega(x) \equiv 1$ невозможно, т.е. инвариантной гладкой меры не существует, что, впрочем, ясно и из наглядных соображений: не может быть конечной инвариантной гладкой меры, если окрестность какой-либо точки переходит строго внутрь себя.

Сейчас мы рассмотрим важный пример, впервые исследованный Гауссом. На нем хорошо видна природа однозначного, но не взаимно-однозначного, сохраняющего меру преобразования.

Пусть фазовым пространством служит отрезок $[0, 1]$, и преобразование T имеет вид: $Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$.

Пусть точка $x_0 \in [0,1]$. фиксирована. Найдем все такие x, что $Tx = x_0$. Последнее соотношение означает, что

$\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] = x_0$. Пусть $\left[\frac{1}{x} \right] = n$ – в знак этого такую точку x обозначим через x_n (кстати, $\frac{1}{n} \leq x_n < \frac{1}{n+1}$).

Тогда $\frac{1}{x_n} - \left[\frac{1}{x_n} \right] = \frac{1}{x_n} - n = x_0$, т.е. $x_n = \frac{1}{x_0 + n}$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, у точки x_0 счетное число прообразов в силу того, что $T\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] = [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$ и в каждом таком отрезке есть ровно одна точка, переходящая в x_0.

Ищем плотность инвариантной меры в виде $\rho(x_0)\, dx_0$.

Гаусс показал, что $\rho(x_0) = \frac{1}{1+x_0}$. Проверим инвариантность этой меры, т.е. что $\rho(x_0)\, dx_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n)\, dx_n$.

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n}{1+x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n}{1 + \frac{1}{x_0+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{x_0+n+1}\, dx_n .$$

Но $\left|\frac{dx_n}{dx_0}\right| = \frac{1}{|f'(x_n)|} = x_n^2$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{x_0+n+1}\, dx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{x_0+n+1} \cdot x_n^2\, dx_0 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0+n}{(x_0+n+1)(x_0+n)^2}\, dx_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x_0} \cdot \frac{1}{1+n+x_0}\, dx_0 =$$

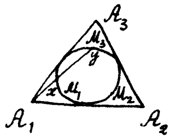
$$= dx_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x_0} - \frac{1}{1+n+x_0} \right) = \frac{dx_0}{1+x_0} .$$

что и требовалось доказать.

Вот небольшое видоизменение примера Гаусса. Пусть $f(x)$ задана на $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=m$ - натуральное число, большее единицы, и $f'(x)>1$ при всех x . Определим $Tx=\{f(x)\}$. Инвариантную меру ищем в виде $\rho(x)dx$, где функция $\rho(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\rho(x_0) = \sum_{x_i:\, Tx_i = x_0} \frac{\rho(x_i)}{f'(x_i)} .$$

Оказывается, что это уравнение всегда разрешимо, причем если $f(x)\in C^r\ (r\geq 2)$, то $\rho(x)\in C^{r-1}$ Последнее утверждение несколько более сложное. Однако то, что $\rho(x)$ непрерывна и даже удовлетворяет условию Липшица (Гельдера) легче доказать, что впервые сделал Реньи (1953 г.). Глубокое исследование этих преобразований было проведено В.А. Рохлиным, Вот один пример, взятый из недавних исследований Богоявленского и Новикова однородных моделей в общей теории относительности. Пусть Δ -правильный треугольник и $\mathcal{M}$ - вписанная в него окружность (см. рис.). Тогда $\mathcal{M}$ делит-



ся точками касания на три дуги $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, прилежащие к трем вершинам A_1, A_2, A_3. Рассмотрим следующее преобразование $\mathcal{M}$: точка $x \in \mathcal{M}_i$ соединяется прямолинейным отрезком с A_i, после чего этот отрезок продолжается в противоположную сторону до следующего пересечения с $\mathcal{M}$. Точка y, полученная при этом пересечении, и есть Tx.

Легко видеть, что T есть двукратное накрытие $\mathcal{M}$, производная которого во всех точках, кроме точек касания, больше I. Отсюда и из общих теорем следует, что T имеет гладкую инвариантную меру, но явный вид ее неизвестен. Было бы интересно ее найти.

В общем случае существование гладкой инвариантной меры - трудно устанавливаемый факт. Трудности особенно возрастают в случае динамических систем с непрерывным временем.

ЛЕКЦИЯ 3

СДВИГИ НА КОММУТАТИВНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ, ИХ ПРИМЕНЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

В задачах алгебраического происхождения существование инвариантной меры легко следует из дополнительной симметрии. Сейчас мы рассмотрим простейшие примеры. Пусть $\mathcal{M}$ - коммутативная компактная группа.

Пример I. $S^1 = \{ z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$.

Пример 2. $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ – n - мерный тор.

$$T^n = \{ z : z = (z_1, \ldots, z_n) : z_i \in S^1, i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Групповой операцией в T^n служит покоординатное умножение.

Мерой в группе S^1 служит обычная длина (мера Лебега), а мера на T^n определяется как прямое произведение мер. Эта мера является мерой Хаара, поскольку она инвариантна при сдвигах (см. далее).

Введем на S^1 линейную координату $x : 0 \le x \le 1$, причем точки $x = 0$ и $x = 1$ отождествляются. Аналогично определяются координаты на любом торе T^n.

Сдвигом на группе G называется преобразование: $T_g : x \xrightarrow{T_g} gx$. В случае тора T^n это преобразование состоит в сдвиге точек тора на фиксированную точку $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, где $0 \le g_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ сдвиг записывается в виде:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{T_g} (x_1 + g_1 \ (\mathrm{mod}\, 1), \ldots, x_n + g_n \ (\mathrm{mod}\, 1)).$$

В частности, при $n = 1$ $x \to x + g \ (\mathrm{mod}\, 1)$, что геометрически означает поворот окружности на угол $2\pi g$. Очевидно, что сдвиг сохраняет меру Хаара на T^n. Отметим важное свойство сдвига. Если под расстоянием между точками x', x'' понимать например, длину наименьшей дуги, их соединяющей $(x', x'' \in$

$\in S^1$) или, в случае $x', x'' \in T^n$ сумму таких длин по каждой координате, то сдвиг T есть изометрия тора T^n: $d(T^t x', T^t x'') = d(x', x'')$. для любого t.

Множество $\{T^t x_0, -\infty < t < \infty\}$ называется траекторией точки x_0. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если хотя бы для одной точки x_0, ее траектория всюду плотна, то траектория каждой точки всюду плотна.

Доказательство.

Пусть y - произвольная точка. Выберем $\varepsilon > 0$.

Тогда существует такое t_0, что $d(T^{t_0} x_0, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как траектория x_0 всюду плотна, то существует число N, такое, что множество $\{T^i x_0 : |i| \le N\}$ образует $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в M.

Так как T - изометрия, то для любой точки z

$$d(z, T^i y) \le d(z, T^{i+t_0} x_0) + d(T^{i+t_0} x_0, T^i y).$$

В силу того, что найдется i_0, при котором $d(z; T^{i_0+t_0} x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем: $d(z, T^i y) < \varepsilon$, т.е. точки $T^i y$, $t_0 \le i \le N - t_0$ образуют ε- сеть. Теорема доказана.

Вспомним данное в первой лекции определение эргодичности преобразования. Пусть T - преобразование с инвариантной мерой. Оно называется эргодичным, если для почти каждой точки $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_M f\, d\mu.$$

Выражение слева называется временным средним, а интеграл $\int_M f\, d\mu$ называется пространственным средним. В эргодическом случае временное среднее почти всюду совпадает с пространственным. Функция $f(x)$ называется инвариантной, если $f(Tx)=f(x)$ для всех x. Функция $f(x)$ называется инвариантной $mod\, 0$, если

$$f(x) = f(Tx) \quad п.в.$$

В эргодическом случае всякая инвариантная $mod\, 0$ функция есть константа.

Теорема (Г. Вейль-фон Нейман). Преобразование T торе T^n эргодично тогда и только тогда, когда ни при каких целых r_i и m, не равных нулю одновременно, равенство

$\sum_{i=1}^{n} r_i g_i + m = 0$ невозможно. (В одномерном случае S^1 это эквивалентно тому, что число g иррационально).

Доказательство.

Пусть T - сдвиг на торе и выполнено условие "иррациональности". Докажем, что если f инвариантна $mod\, 0$, то $f = const \ mod\, 0$, какова бы ни была функция f.

Доказательство разобьем на три части.

I. Без ограничения общности можно считать f ограниченной. Если это не так (т.е. f не ограничена), то для любых двух a и b положим

$$E_a^b(f) = \{x : a \le f < b\}$$

Новая функция $f \cdot \chi_{E_a^b}$ будет ограниченной и свойство инвариантности $mod\, 0$ сохранится. Если мы докажем, что $f(x)\chi_{E_a^b} = const$ п.в., то предельным переходом $a \to -\infty$, $b \to \infty$

получим требуемый результат.

2. Ограниченную на торе функцию f можно разложить в ряд Фурье, сходящийся в среднем квадратичном:

$$f(x) = \sum_{r} c_r \, e^{2\pi i (r, x)}$$

где $r = (r_1, \dots, r_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T^n$ (r_i - - целые числа) и суммирование распространяется по всем таким целочисленным наборам. Коэффициенты c_r определены из равенства : $c_r = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} e^{-2\pi i (r, x)} f(x)\, dx$.

3. Используя инвариантность $f \bmod 0$ имеем

$$f(Tx) = \sum_{r} c_r \, e^{2\pi i (r, x+g)} = \sum_{r} c_r \, e^{2\pi i (r, g)} e^{2\pi i (r, x)} =$$

$$= \sum_{r} c_r \, e^{2\pi i (r, x)} \quad (\bmod 0).$$

В силу единственности коэффициентов Фурье

$$c_r \, e^{2\pi i (r, g)} = c_r .$$

Если $c_r \neq 0$, то $e^{2\pi i (r, g)} = 1$, $(r, g) = m$, где m есть целое число. Но последнее равенство невозможно по условию теоремы. Значит, в ряде Фурье только один коэффициент, может быть отличен от нуля, а именно c_0 . Но это и значит, что $f = c_0 = const \bmod 0$, что и требовалось доказать.

Обратно. Пусть найдется вектор с целыми координатами $r = (r_1, \dots, r_n)$ и целое число m такие, что $(g, r) + m = 0$, причем некоторые $r_i \neq 0$.

Положим $f(x) = e^{2\pi i (x, r)}$. Тогда

$$f(Tx) = e^{2\pi i (x, r)} \cdot e^{2\pi i (g, r)} = e^{2\pi i (x, r)} e^{2\pi i m} = e^{2\pi i (x, r)} =$$

$$= f(x)$$

Функция f инвариантна, но не является константой. Значит, T не эргодично. Теорема доказана.

Доказанная нами теорема настолько важна, что мы приведем позже второе ее доказательство, однако вначале извлечем из нее следствия.

Пусть $A = (r_1, r_2)$ - интервал с рациональными концами на окружности S^1. Тогда в случае эргодического T для почти всех x $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) \to \ell(A)$, где ℓ - мера Лебега. Это означает, что точка попадает в каждый интервал с рациональными концами с частотой, пропорциональной длине интервала. Отсюда и из доказанной выше теоремы следует, что траектории всех точек всюду плотны. Аналогичный результат верен и для тора T^n в случае эргодического T.

Докажем теперь теорему Кронекера-Вейля.

Теорема. Пусть дано n иррациональных чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$ которые рационально независимы вместе с I (т.е. линейно независимы над полем рациональных чисел). Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется целое t_0 и такие целые числа $k_1, k_2, \dots, k_n$, что

$$|t_0 g_i - k_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство:

Условие теоремы есть в точности условие теоремы Вейля-фон Неймана. Рассмотрим сдвиг тора T^n на вектор $g = (g_1, \dots, g_n)$. Этот сдвиг эргодичен и, следовательно, траектория любой точки (в частности, точки 0) всюду плотна. Но тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется целое t_0 такое, что $d(T^{t_0} x_0, x_0) < \varepsilon$, где $x_0 = (0, \dots, 0)$. Так как

$$T^t x_0 = (g_1 t_0 \ (\mathrm{mod}\, 1), \dots, g_n t_0 \ (\mathrm{mod}\, 1)),$$

то последнее утверждение как раз означает, что существует набор целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, при которых одновременно

$$|g_1 t_0 - k_1| < \varepsilon, \quad |g_2 t_0 - k_2| < \varepsilon, \ldots, |g_n t_0 - k_n| < \varepsilon.$$

Продолжим изучение поворота окружности: $M = S^1$, $Tx = x + g \pmod 1$. Это преобразование, как было доказано выше, сохраняет лебегову меру и расстояние между двумя точками. Из предыдущего следует, что следующие три условия эквивалентны:

I. Преобразование T эргодично.

2. Число g иррационально.

3. Траектории всех точек всюду плотны.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность точек на единичной окружности, Δ – дуга окружности: $\Delta = \{x : \alpha \le x \le \beta\}$; длину дуги Δ будем обозначать $\ell(\Delta)$.

Определение. Произвольная последовательность точек $\{x_n\}$ единичной окружности называется равномерно распределенной на S^1, если для любой дуги Δ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\Delta)}{n} = \ell(\Delta),$$

где через $\nu_n(\Delta)$ обозначено число тех номеров k, $1 \le k \le n$, при которых $x_k \in \Delta$.

Возьмем в качестве последовательности $\{x_n\}$ траекторию какой-либо точки x_0: $T^n x_0 = x_n$. Если T эргодично, то по теореме Биркгофа-Хинчина последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена при почти всех начальных точках x_0. Мы сейчас докажем более сильное утверждение: последовательность $\{T^n x_0\}$ равномерно распределена при всех x_0 (Часто это утверждение называют теоремой Вейля).

Доказательство:

I. Утверждение. Пусть $f(x) \in C(S^1)$ – непрерывная функция на S^1. Тогда для равномерной распределенности множества точек $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in C(S^1)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to \int_{S^1} f(x)\,dl.$$

Действительно, пусть для любой $f \in C(S^1)$ имеет место сходимость; выведем отсюда равномерную распределенность последовательности $\{x_n\}$. Пусть Δ - произвольная дуга на S^1, χ_Δ - индикаторная функция Δ. Тогда

$\nu_n(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \chi_\Delta(x_i)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем теперь

такие функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, чтобы а) они были непрерывны;

в) $f^-(x) \leq \chi_\Delta(x) \leq f^+(x)$ для всех x;

с) $\int [f^+(x) - f^-(x)]\,dx < \varepsilon$

Тогда $\sum_{i=1}^{n} f^-(x_i) \leq \nu_n(\Delta) \leq \sum_{i=1}^{n} f^+(x_i)$ или, деля

обе части на n,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^-(x_i) \leq \frac{\nu_n(\Delta)}{\Delta} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^+(x_i)$$

Зафиксировав функции f^- и f^+, устремим n к бесконечности. При этом, по предположению, левая и правая части стремятся соответственно к $\int f^- dl$ и $\int f^+ dl$. Это означает, что

$$l(\Delta) - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\Delta)}{\Delta} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\Delta)}{\Delta} \leq l(\Delta) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\Delta)}{\Delta}$ существует

и равен $l(\Delta)$. Доказательство необходимости предоставляется читателю.

П. Утверждение. Пусть $f(x)$ непрерывна на S^1. Тогда
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_0 + kg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(x)\,dl \quad \text{при} \quad (*)$$
почти всех x_0.

В самом деле, это соотношение верно для любой фиксированной функции $f \in C(S^1)$ при почти всех x_0 в силу эргодичности преобразования T. Мы сейчас покажем, что из выполнения $(*)$ хотя бы при одной начальной точке x_0 вытекает, что оно верно и для любой другой точки $\bar{x}_0$.

Пусть есть точка x_0, для которой $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_0 + kg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(x)\,dl$, а $\bar{x}_0$ - произвольная точка окружности. Выберем $\varepsilon > 0$. Так как траектория точки x_0 всюду плотна, то найдется такое целое число $\bar{k}$, что $d(T^{\bar{k}} x_0, \bar{x}_0) < \delta$, где δ будет определено позже. В таком случае

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_0 + kg) - \frac{1}{n+\bar{k}} \sum_{k=1}^{n+\bar{k}} f(x_0 + kg) \right| \le$$
$$\le \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[f(\bar{x}_0 + kg) - f(x_0 + (k+\bar{k})g) \right] \right| +$$
$$+ \frac{\bar{k}}{n+\bar{k}} \max_{x\in S^1} |f(x)| + \frac{\bar{k}}{n(n+\bar{k})} \cdot \sum_{k=\bar{k}}^{n+\bar{k}} |f(x_0 + kg)|.$$

Первое слагаемое можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ за счет выбора δ, а сумма двух других слагаемых в правой части будет мала при достаточно больших n. Значит $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_0 + kg)$ тоже сходится к $\int f(x)\, dl(x)$.

Основным моментом в этом доказательстве является использование того факта, что если расстояние между двумя точками мало в некоторый момент времени, то оно будет оставаться малым и во все последующие моменты времени. Из теоремы Биркгофа-Хинчина, а также из утверждений I и II вытекает равномерная распределенность последовательности $\{T^n x_0\}$ при всех n. Из доказанной теоремы получаем важное

Следствие. Поворот окружности на иррациональный угол имеет только одну инвариантную борелевскую меру.

Доказательство:

Пусть μ - инвариантная борелевская мера (т.е. мера, определенная на борелевских множествах). Мера μ однозначно определяется значениями интегралов $\int f(x)\, d\mu(x)$ от непрерывных функций.

По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+kg) = \hat{f}(x) \quad \mu\text{- п. в.}$$

По теореме Вейля при всех x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+kg) = \int f\, dl.$$

Сопоставляя эти две теоремы, получаем, что

$$\hat{f}(x) = const = \int f\, dl.$$

Итак, $\int f\, d\mu = \int f\, dl$ для любой непрерывной функции $f \in C(S^1)$. Следовательно $\mu = l$, что и утверждалось.

Совсем недавно немецким математиком Кеане было доказано, что у поворота окружности на иррациональный угол существует континуум непрерывных попарно сингулярных квазиинвариантных мер (мера μ называется квазиинвариантной относительно T если мера $T\mu$ эквивалентна μ). Этот результат имеет отношение к некоторым задачам теории представлений групп.

ЛЕКЦИЯ 4.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.

Одной из интересных и важных проблем теории чисел является задача о распределении дробных долей разных функций, в частности, многочленов.

Пусть $f(t)$ - многочлен степени $r \geq 1$ с действительными коэффициентами, $f(t) = \alpha_0 t^r + \alpha_1 t^{r-1} + \ldots + \alpha_r$. Обозначим $y_n = \{f(n)\}$, $n = 1, 2, 3\ldots$, где $\{\cdot\}$ - знак дробной части. Говорят, что для многочлена $f(t)$ имеет место равномерное распределение дробных долей, если последовательность $\{y_n\}$ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$.

Пусть $f(t) = \alpha_0 t + \alpha_1$ - многочлен первой степени.

Имеем $f(n) = \alpha_0 n + \alpha_1$, $y_n = \{\alpha_0 n + \alpha_1\} = T^n \alpha_1$,

где $Tx = x + \alpha_0 \pmod 1$. Из доказанных ранее теорем, вытекает, что если α_0 иррационально, то последовательность y_n равномерно распределена. Для многочлена произвольной степени справедлива общая теорема Г. Вейля.

Теорема (Г. Вейль). Если среди коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ хотя бы одно число иррационально, то последовательность $\{y_n\}$ равномерно распределена.

Доказывать эту теорему мы не будем, но при $r = 2$ поясним, как можно свести дело к эргодической теории. Итак, пусть

$$f(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2 .$$

Возьмем двумерный тор $T^2 = M$ т.е. единичный квадрат с попарно отождествленными сторонами. В качестве меры на T^2 возьмем обычную меру Лебега.

Определим преобразование $T(x,y)$ тора T^2, называемое косым сдвигом или косым поворотом, положив $T(x,y) = (x + \alpha \pmod 1), y + 2x + \alpha \pmod 1))$, где число α определим позднее. Косой сдвиг переводит окружность $x = const$ в окружность $x = const + \alpha \pmod 1$ и сдвигает ее параллельно самой себе на угол $2x+\alpha$, зависящий от x. T сохраняет лебегову меру, так как оно линейно, матрица его первых производных треугольна и ее детерминант равен I. Докажем по индукции следующую формулу:

$$T^n(x,y)=(x+n\alpha \pmod 1),\ \alpha n^2+2nx+y \pmod 1)).$$

При $n=1$ она верна в силу определения преобразования T. Пусть она верна при некотором n. Проверим ее справедливость для $n+1$. Имеем $T^{n+1}(x,y)=T(T^n(x,y))=$
$=T(x+n\alpha,\ \alpha n^2+2nx+y)=(x+(n+1)\alpha,\ \alpha n^2+2nx+y+$
$+\ 2(x+n\alpha)+\alpha)=(x+(n+1)\alpha,\ y+2(n+1)x+\alpha(n+1)^2)$.

Установим теперь следующий факт: если α иррационально, то преобразование T эргодично.

Доказательство, которое мы проведем, похоже на аналогичное доказательство для поворота окружности, однако в нем есть и нечто новое.

Пусть $h(x,y)$ - инвариантная $\mathrm{mod}\,0$ относительно T функция на торе T^2, т.е. $h(x,y)=h(T(x,y))$ п. в. Как мы уже видели, предположение об ограниченности по модулю функции h не уменьшает общности наших рассуждений. Поэтому можно считать, что h ограничена и может быть разложена в ряд Фурье:

$$h=\sum c_{n_1n_2}\, e^{2\pi i(n_1x_1+n_2y_2)},$$

сходящийся в среднем квадратичном. При этом

$$\int |h(x,y)|^2 dx\,dy=\sum |c_{n_1n_2}|^2<\infty .$$

Из последнего неравенства вытекает, что среди коэффициентов Фурье функции h не может быть бесконечного числа равных по модулю ненулевых коэффициентов. Это и есть то новое, что мы существенно будем использовать ниже.

$$h(T(x,y)) = \sum c_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1(x+\alpha) + n_2(y+2x+\alpha))} =$$

$$= \sum c_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1+n_2)\alpha} \cdot e^{2\pi i ((n_1+2n_2)x + n_2 y)}$$

что в силу инваниатности $mod\ 0$ совпадает с

$\sum c_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1 x + n_2 y)}$ почти всюду. Покажем, что

уравнение $\sum' c_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1+n_2)\alpha} e^{2\pi i ((n_1+2n_2)x + n_2 y)} =$

$$= \sum c_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1 x + n_2 y)}$$

не имеет решения при условии $\sum |c_{n_1 n_2}|^2 < \infty$. Произведем переобозначения: $n_1 + 2n_2 = m_1$, $n_2 = m_2$. Тогда

$$\sum c_{m_1 - 2m_2, m_2} e^{2\pi i (m_1 - m_2)\alpha} e^{2\pi i (m_1 x + m_2 y)} = \sum c_{m_1 m_2} e^{2\pi i (m_1 x + m_2 y)}$$

По теореме единственности для коэффициентов Фурье имеем

$$c_{m_1 - 2m_2, m_2} e^{2\pi i (m_1 - m_2)\alpha} = c_{m_1, m_2}.$$

Отсюда $|c_{m_1 - 2m_2, m_2}| = |c_{m_1; m_2}|$.

Из последнего равенства видно, что если найдется $m_2 \neq 0$, при котором хотя бы коэффициент c_{m_1, m_2} не равен нулю, то в ряде Фурье будет бесконечно много ненулевых, одинаковых по модулю зкоэффициентов, что невозможно. Следовательно, $c_{m_1,m_2}=0$, если $m_2\neq 0$.

Итак, отличными от нуля могут быть только коэффициенты $c_{m_1,0}$.

Это означает, что функция $h(x,y)$ зависит только от x:

$$h(x,y)=h(x),\quad h(T(x,y))=h(x+\alpha).$$

По условию функция h инвариантна $\mathrm{mod}\ C$.

Если α иррационально, то поворот на угол $2\alpha\pi$ эргодичен. Значит $h=\mathrm{const}$ почти всюду, откуда вытекает эргодичность косого сдвига.

Вернемся к теореме Вейля о распределении дробных долей для случая многочлена второй степени. Имеем

$$T^n(x,y)=(x+n\alpha,\ n^2\alpha+2nx+y),\quad f(t)=\alpha_0 t^2+\alpha_1 t+\alpha_2.$$

Положим $\alpha_0=\alpha,\ \alpha_1=2x,\ \alpha_2=y$. Тогда вторая координата точки $T^n(x,y)$ равна дробной части значения $f(t)$ в точке n: $\{\alpha n^2+2nx+y\}$. При иррациональном α преобразование T эргодично, как следует из только что доказанного утверждения. Можно доказать (мы не будем сейчас этого делать), что траектория любой точки (x,y) равномерно распределена на торе, и T всегда имеет - и притом единственную - инвариантную меру. Известные мне доказательства этой теоремы основаны на теоретико-числовых соображениях. Было бы очень полезно найти прямое доказательство этого утверждения. Из единственности инвариантной меры вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(T^k(x,y))=$
$=\int f\,dx\,dy$, справедливое для всех точек (x,y) и любой непрерывной функции f. Пусть $f(x,y)=f(y)$ - непрерывная периодическая на S^1 функция. Тогда $f(T^k(x,y))=$
$=f(k^2\alpha+2kx+y)=f(y_k)$ и поэтому при иррациональном α

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(y_k) = \int f(y)\,dy$$

Тем самым мы пришли к частному случаю теоремы Вейля. Еще проще рассматривается случай, когда α_0 рационально, а α_1 иррационально.

Задача о распределении дробных долей многочленов связана с оценками числа решений диофантовых уравнений в алгебраической теории чисел.

ЛЕКЦИЯ 5

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭРГОДИЧНОСТИ ПОВОРОТА ОКРУЖНОСТИ И ПЕРЕКЛАДЫВАНИЯ

Мы дадим новое доказательство эргодичности поворота окружности на иррациональный угол, не использующее разложения функции в ряд Фурье.

Пусть, как обычно, $Tx = x + g \pmod 1$ и g - иррациональное число. Взяв произвольную точку x_0, рассмотрим ее траекторию $\{T^n x_0\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Докажем, что замыкание $\overline{\{T^n x_0\}} = S^1$. Действительно, не ограничивая общности можно считать, что $x_0 = e$ - единица группы S^1. Тогда $\{T^n x_0\}$ есть подгруппа группы S^1, а $\overline{\{T^n x_0\}}$ есть замкнутая подгруппа S^1. Известно, что всякая замкнутая подгруппа S^1 есть либо группа корней степени n из единицы, либо вся группа (см., например, книгу Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы"). В первом случае g, очевидно, рационально. Поэтому в нашем случае $\overline{\{T^n x_0\}} = S^1$. Но тогда траектория каждой точки всюду плотна на S^1

Теперь наметим план доказательства эргодичности T, предоставляя читателю провести все доказательство в деталях.

Пусть A и B - инвариантные относительно T множества, такие, что $0 < \mu(A) < 1$, $0 < \mu(B) < 1$, $A \cap B = \emptyset$. Пусть x_0 есть точка плотности множества A. Это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ell((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A)}{2\varepsilon} = 1,$$

где $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ есть дуга с центром в точке x_0. Вспомним здесь теорему о том, что почти все точки любого множества положительной меры по окружности являются точками плотности этого множества (см. например, И.П. Натансон "Введение в теорию функций вещественной переменной"), откуда вытекает существование точки x_0). Пусть y_0 есть точка плотности множества $\mathcal{B}$. Малая окрестность точки y_0 состоит в основном из точек множества $\mathcal{B}$. Сдвинем теперь окрестность x_0 при помощи степеней T. Так как $\{T^n x_0\}$ всюду плотна на S^1, то при некотором k точка $T^k x_0$ попадет в любую, сколь угодно, малую окрестность точки y_0. Но точка $T^k x_0$ есть точка плотности множества A из того, что T - поворот:

$$\frac{\ell(T^k(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap A)}{2\varepsilon} = \frac{\ell(T^k((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap A)}{2\varepsilon} = \frac{\ell((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap A)}{2\varepsilon}$$

в силу предположенной инвариантности этого множества. Но это противоречит тому, что $A \cap B = \varnothing$.

Перейдем теперь к рассмотрению нового важного класса преобразований..

Перекладывания.

Фазовым пространством служит отрезок $[0, 1]$ с обычной мерой Лебега. Пусть $[0, 1]$ разбит на отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ произвольной длины, объединение которых есть $[0, 1]$, а сами отрезки попарно не пересекаются кроме своих концов. Перекладыванием называется преобразование $[0, 1]$, состоящее в перестановке этих отрезков в другом порядке. Поясним важность изучения перекладываний.

Многие естественные пространства с мерой изоморфны как пространства с мерой отрезку $[0, 1]$ с обычной мерой Лебега. Сохраняющее меру преобразование отрезка T задается некоторой измеримой функцией $f: [0,1] \to [0,1]$. Эту функцию можно аппроксимировать кусочно-линейной, с тангенсом угла наклона ± 1, а кусочно-линейная функция как раз и задает преобразование типа перекладывания (при этом наклону -1 соответствует перекладывание и симметричное отражение отрезка).

Таким образом, перекладывание можно использовать для аппроксимаций произвольных сохраняющих меру преобразований отрезка. Кроме того, мы увидим, что перекладывания сами по себе возникают в некоторых интересных примерах динамических систем.

Пусть T - перекладывание отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$. Рассмотрим преобразование T^2. Оно, очевидно, состоит в перекладывании отрезков $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap T\Delta_j$. Аналогично, можно рассмотреть пересечения $\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^{n-1}\Delta_{i_{n-1}} \cap T^n\Delta_{i_n}$ и определить T^n как перекладывание отрезков такого вида.

Определение. Перекладывание T называется транзитивным, если

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i_0, i_1, \dots, i_n} \ell(\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^n\Delta_{i_n}) = 0.$$

Прежде чем сформулировать и доказать одну теорему о перекладываниях, принадлежащую Оселедцу, обратимся к некоторым фактам, относящимся к унитарным матрицам и их обобщениям - унитарным операторам в гильбертовом пространстве.

Пусть H - конечномерное комплексное гильбертово пространство. Мы будем говорить, что в H действует унитарный оператор U, если U есть обратимое линейное отображение пространства H, сохраняющее скалярное произведение: для любых h_1 и h_2 из H $(Uh_1, Uh_2) = (h_1, h_2)$.

Унитарный оператор U имеет собственные значения и полный набор ортогональных собственных функций. Все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице. Возможна ситуация, когда одному и тому же собственному значению соответствует несколько собственных функций: $Ue_1 = ze_1$, $Ue_2 = ze_2$, $\dots$, $Ue_k = ze_k$, $e_i \perp e_j$.

Множество таких собственных функций образует линейное пространство. Размерность этого пространства называют кратностью собственного значения z. Линейные пространства H_s, соответствующие различным собственным значениям z_s, попарно ортогональны и $H = \bigoplus_s H_s$.

Пусть h - произвольный вектор из H. Рассмотрим линейное пространство, натянутое на векторы $\dots U^{-2}h, U^{-1}h, h, \dots, U^n h, \dots$, которое мы обозначим $H(h)$. Это пространство конечномерно, так как содержится в H. Кроме того, $H(h)$ инвариантно в том смысле, что $H(h) = U H(h) = U^{-1} H(h)$.

Оказывается, что $H(h)$ можно получить и другим способом. Пусть h_i есть проекция h на собственное подпространство H_i, соответствующее собственному значению z_i унитарного оператора $\mathcal{U}$. Тогда $H(h)$ есть линейная оболочка векторов h_i. Этот факт полезно проверить самостоятельно. Отсюда получаем важное

Следствие: Пусть заданы векторы $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}$ и

пусть $H = \sum_{\ell=1}^{k} H(h^{(\ell)})$. При этом подпространства $H^{(\ell)} = H(h^{(\ell)})$ не обязаны быть ортогональными. Тогда $\dim H_i \leq k$ при любом i (иначе говоря, кратность любого собственного значения не превосходит k).

Доказательство:

Обозначим через $h_i^{(\ell)}$ проекцию вектора $h^{(\ell)}$ на подпространство H_i. По условию система $\{ h_i^{(\ell)}, \ \ell = 1, 2, \dots, k \}$

порождает подпространство H_i. Но это и означает, что $\dim H_i \leq k$.

Обобщим наши рассуждения на бесконечномерный случай. Пусть H - сепарабельное, бесконечномерное гильбертово пространство, $\mathcal{U}$ - унитарный оператор, действующий в

В этом случае $\mathcal{U}$ может не иметь собственных значений, а если они есть, то их число не более чем счетно.

По аналогии с конечномерной конструкцией обозначим через $H(h)$ замыкание линейной оболочки векторов вида $\mathcal{U}^k h$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $H(h)$ есть минимальное подпространство, содержащее вектор h и инвариантное относительно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^{-1}$.

Пусть $\{z_n\}$ - собственные значения оператора $\mathcal{U}$, $\{H_n\}$ - соответствующие им инвариантные подпространства. Обозначим $h_n = P_{H_n}(h)$, где P - оператор проектирования.

Лемма. Пусть существует конечное число векторов $h^{(1)}, \dots, h^{(k)}$,

таких, что $\overline{\sum_{\ell=1}^{k} H(h^{(\ell)})} = H$, Тогда для всех l $\dim H_l \le k$.

Доказательство в точности повторяет доказательство для конечномерного случая. Мы ограничимся этими сведениями об унитарных операторах и перейдем к доказательству следующей теоремы.

Теорема (В. Оселедец). Транзитивное перекладывание p отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ всегда имеет не более, чем p инвариантных множеств положительной меры, на каждом из которых T уже неразложимо (т.е. эргодично).

Доказательство:

Роль H будет играть пространство $\mathcal{L}^2([0,1])$ - пространство интегрируемых с квадратом функций на отрезке $[0, 1]$ с мерой Лебега. Оператор $\mathcal{U}$ в нем определим, как обычно, равенством

$$(\mathcal{U} h)(x) = h(Tx)$$

Из обратимости T следует обратимость $\mathcal{U}$, а так как T сохраняет меру, то $\mathcal{U}$ будет унитарным оператором. Рассмотрим следующие функции: $h^{(1)} = \chi_{\Delta_1}$, $h^{(2)} = \chi_{\Delta_2}, \dots$, $h^{(p)} = \chi_{\Delta_p}$.

Сейчас мы покажем, что $\overline{\sum_{l=1}^{p} H(h^{(l)})} = H$ $(*)$. Тогда из леммы будет следовать, что кратность любого собственного значения оператора $\mathcal{U}$ не превосходит p. Выведем отсюда требуемое утверждение. Действительно, пусть найдутся s инвариантных множеств, $A_1, A_2, \dots, A_s$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \ne j$ и $m(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. Так как A_i попарно дизъюнктны, то функции $\chi_{A_i}(x)$ попарно ортогональны. Кроме того, $\chi_{A_i}(x)$ инвариантны относительно T ввиду того, что A_i инвариантны $\operatorname{mod} 0$ относительно T. При всех i $\mathcal{U}\chi_{A_i} = \chi_{A_i}$. Значит, размерность инвариантного подпространства H_1, отвечающего собственному значению $1 = z$, больше или равна s. Но по лемме и из равенства ($*$) имеем: $s \leq \dim H_1 \leq p$.

Перейдем теперь к доказательству равенства ($*$). Рассмотрим функции $\mathcal{U}^{-1}\chi_{\Delta_1} = \chi_{T\Delta_1}$, $\mathcal{U}^{-1}\chi_{\Delta_2} = \chi_{T\Delta_2}, \ldots, \mathcal{U}^{-1}\chi_{\Delta_p} = \chi_{T\Delta_p}$.

Докажем, что всевозможные функции $\chi_{\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1}}$ суть линейные комбинации функций χ_{Δ_i} и $\mathcal{U}^{-1}\chi_{\Delta_j}$. В самом деле, пусть последний отрезок Δ_p покрыт некоторым числом отрезков $T\Delta_{i_1}, T\Delta_{i_2}, \ldots, T\Delta_{i_k}$, причем $\Delta_p \supset T\Delta_{i_1} \cup T\Delta_{i_2} \cup \ldots \cup T\Delta_{i_{k-1}}$, $\Delta_p \subset T\Delta_{i_1} \cup T\Delta_{i_2} \cup \ldots \cup T\Delta_{i_k}$. Тогда $\Delta_p \cap T\Delta_{i_s} = T\Delta_{i_s}$ при $1 \leq s \leq k-1$. Далее,

$$\chi_{\Delta_p \cap T\Delta_{i_k}} = \chi_{\Delta_p} - \sum_{s=1}^{k-1} \chi_{T\Delta_s}.$$

Если $T\Delta_{i_k} \subset \Delta_p \cup \Delta_{p-1}$, то $\chi_{\Delta_{p-1} \cap T\Delta_{i_k}} = \chi_{T\Delta_{i_k}} - \chi_{\Delta_p \cap T\Delta_{i_k}}$ и т.д.

Проводя такие же рассуждения и далее, мы получим, что $\chi_{\Delta_i \cap T\Delta_j}$ представимы в виде линейных комбинаций функций χ_{Δ_i}, $\chi_{T\Delta_j}$. Затем таким же образом докажем, что $\chi_{\Delta_{i_1} \cap T\Delta_{i_2} \cap \ldots \cap T^{k-1}\Delta_{i_{k-1}} \cap T^k\Delta_{i_k}}$ представим как линейная комбинация функций $\chi_{\Delta_{i_0}}, \chi_{T\Delta_{i_1}}, \ldots, \chi_{T^k\Delta_{i_k}}$.

Но тогда функция $\chi_{\Delta_{i_1} \cap \ldots \cap T^k\Delta_{i_k}}$ принадлежит линейному пространству $\overline{\sum_{i=1}^{p} H(\chi_{\Delta_i})}$. Так как перекладывание T транзитивно, то линейные комбинации функщий $\not\Delta_{i_1} \cap \dots \cap T^k \Delta_{i_k}$ всюду плотны в $\mathcal{L}^2([0,1])$.

Следовательно: $\overline{\sum_{i=1} H(\not\Delta_i)} = \mathcal{L}^2([0,1])$.

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 6

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Пусть $\mathcal{M}$ - измеримое пространство с выделенной в нем естественной σ-алгеброй $\mathcal{F}$ измеримых подмножеств. Пусть для любого t, $-\infty < t < \infty$ определено преобразование S_t пространства $\mathcal{M}$ в себя, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) для всех t_1, t_2 $\quad S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_{t_1+t_2}$;

2) для любой измеримой относительно $\mathcal{F}$ функции $f(x)$ функция $g(x,t) = f(S_t x)$ измерима на прямом произведении пространств $\mathbb{R}^1 \times \mathcal{M}$.

В этом случае непрерывная однопараметрическая группа $\{S_t\}$ называется динамической системой с непрерывным временем или, иногда, потоком.

Мера μ называется инвариантной мерой относительно группы $\{S_t\}$, если для любого $A \in \mathcal{F}$ $\mu(S_t A) = \mu(A)$ при всех t.

Мы будем рассматривать только нормированные инвариантные меры, для которых $\mu(\mathcal{M}) = 1$.

Теорема Биркгофа-Хинчина для потока, сохраняющего меру, гласит: для любой функции $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathcal{M})$ с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_t x)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_{-t} x)\,dt =$$

$$= \hat{f}(x), \qquad \text{причем} \int_{\mathcal{M}} f\,d\mu = \int \hat{f}\,d\mu.$$

Поток $\{S_t\}$ называется эргодическим, если $\hat{f} = const = \int f\,d\mu \pmod 0$ для любой функции $f \in \mathcal{L}^1_\mu$.

В эргодическом случае из эргодической теоремы Биркгофа-Хинчина следует, что почти каждая траектория эргодического потока проводит в измеримом множестве A время, пропорциональное $\mu(A)$. Теория Боголюбова-Крылова переносится на непрерывный случай без всяких изменений.

Рассмотрим важный пример. Пусть $M = T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\ раз}$

т.е. n - мерный тор, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in T^n$. Точку тора T^n можно задать в мультипликативной записи как выбор комплексных чисел z_k, $|z_k| = 1$, $1 \le k \le n$, а можно и в аддитивной: $z_k = e^{2\pi i \varphi_k}$, $z = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, причем $\varphi_i' = \varphi_i + m_i$, m_i - целое, задают одну и ту же точку.

Пусть задан набор действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

В качестве меры на M возьмем меру Хаара: $d\mu = \prod_{i=1}^{n} d\varphi_i$.

Поток на T^n определим соотношением $S_t z = (e^{2\pi i \lambda_1 t} \cdot z_1, \ldots e^{2\pi i \lambda_n t} z_n)$ или $S_t z = (\varphi_1 + \lambda_1 t \pmod 1), \ldots, \varphi_n + \lambda_n t \pmod 1))$.

Ясно, что поток $\{S_t\}$ сохраняет меру Хаара.

Набор векторов $a(t) = (e^{2\pi i \lambda_1 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t})$, $-\infty < t < \infty$ есть траектория нуля тора T^n, рассматриваемого как группа. Она образует однопараметрическую подгруппу тора T^n, так что $\{S_t\}$ есть группа сдвигов тора T^n по направлению подгруппы $\{a(t)\}$. Поток $\{S_t\}$ часто называют условно-периодическим, а λ_i - его частотами.

Теорема. Условно-периодический поток эргодичен тогда и только тогда, когда числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел.

Доказательство:

Отметим сначала, что в случае потока на торе, также как и в дискретном случае, траектории всех точек одновременно всюду плотны на торе. Пусть $f(z) = f(S_t z) \mod 0$, где функцию f можно считать ограниченной. Ее можно разложить в квадратично сходящийся ряд Фурье.

В аддитивной записи функция на торе может быть записана как функция переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, периодическая по каждой переменной с периодом I, и разложена в комплексный ряд Фурье,

$$f(z) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} e^{2\pi i (m_1 \varphi_1 + \ldots + m_n \varphi_n)} c_{m_1, \ldots, m_n},$$

$$f(S_t z) = f(\varphi_1 + \lambda_1 t, \ldots, \varphi_n + \lambda_n t) =$$

$$= \sum_{\vec{m}} c_{\vec{m}} e^{2\pi i (\vec{m}, \lambda) t} \cdot e^{2\pi i (\vec{m}, \varphi)} = f(z).$$

Если $(\vec{m}, \lambda) \neq 0$ при любом $\vec{m} \neq 0$, то последнее равенство не может иметь место (если t произвольно), и можно повторить все рассуждения соответствующей теоремы для дискретного случая.

В другую сторону доказательство проводится тоже по тому же пути, как в дискретном случае.

В связи с последней теоремой обратим внимание на то обстоятельство, что из эргодичности потока $\{S_t\}$ не вытекает эргодичность отдельных преобразований S_t, входящих в поток.

Действительно, пусть $n = 1$, $S_t x$ есть движение точки x по окружности с постоянной скоростью $v = 1$ (напомним, что $\mu(S^1) = 1$). Ясно, что этот поток эргодичен. С другой стороны, $S_n = Id$, где Id - тождественное преобразование.

Теперь мы обратимся к изучению одного из применений потоков на торе, возникшего из задач небесной механики и стимулировавшего развитие теории почти-периодических функций.

Теорема Лагранжа о среднем движении.

Пусть даны n комплексных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (n векторов на плоскости). Рассмотрим кривую на плоскости комплексного переменного z

$$z(t) = a_1 e^{2\pi i \lambda_1 t} + a_2 e^{2\pi i \lambda_2 t} + \dots + a_n e^{2\pi i \lambda_n t}.$$

Геометрический смысл функции $z(t)$ таков; представим себе, что на плоскости есть вектор a_1 , к его концу прикреплен вектор a_2 и т.д. Пусть a_1 вращается вокруг своего начала с угловой скоростью λ_1 , a_2 вращается в то же время вокруг своего начала (т.е. конца a_1) с угловой скоростью λ_2 и т.д.. $z(t)$ есть траектория конца вектора a_n.

Допустим, что $z(t)$ ни при каких t не обращается в нуль. Тогда можно написать

$$z(t) = r(t)\, e^{2\pi i \varphi(t)},$$

где $\varphi(t)$ есть непрерывная функция от t.

Вопрос Лагранжа заключается в следующем: существует ли предел $\omega = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\varphi(T)$ и чему он равен, иными словами, с какой средней угловой скоростью вращается конец вектора a_n вокруг начала вектора a_1.

Сам Лагранж получил ответ для случая двух векторов. Если $|a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| < |a_1|$ то ясно, что $\omega = \lambda_1$.

Мы рассмотрим общий случай и покажем, как эта задача сводится к задаче эргодической теории. Однако совсем строгих обоснований мы давать не будем. Из выражения для $z(t)$ видно, что $\varphi(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln z(t)\right)$, откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{z'(t)}{z(t)}\right) = \mathrm{Re}\frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\lambda_s a_s e^{2\pi i\lambda_s t}}{\sum\limits_{s=1}^{n} a_s e^{2\pi i \lambda_s t}} = \mathrm{Re}\frac{\sum |a_s|\lambda_s e^{2\pi i(\lambda_s t + \bar\varphi_s)}}{\sum |a_s| e^{2\pi i(\lambda_s t + \bar\varphi_s)}},$$

где $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ есть начальная точка движения, и

$$x(t) = |a_1| e^{2\pi i(\bar{\varphi}_1 + \lambda_1 t)} + \dots + |a_n| e^{2\pi i(\bar{\varphi}_n + \lambda_n t)}.$$

Возьмем теперь тор T^n и рассмотрим на нем условно-периодический поток, который определяется вектором $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Допустим, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда наш поток эргодичен. На торе T^n рассмотрим функцию:

$$f(\varphi) = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \mathrm{Re} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s |a_s| e^{2\pi i \varphi_s}}{\sum\limits_{s=1}^{n} |a_s| e^{2\pi i \varphi_s}} \tag{1}$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi) \Big|_{\bar{\varphi} + \bar{\lambda} t} = f(\varphi_t).$$

где $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Поэтому $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi_u)\,du$

Нам надо найти $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\varphi_u)du.$

Если бы функция $f(\varphi)$ была ограничена и непрерывна, то такой предел существовал бы всюду и равнялся бы $\int_{T^n} f(\varphi)d\mu$ по эргодической теореме. Однако знаменатель в правой части (I) может обращаться в нуль. Условие обращения в нуль знаменателя $\sum_{s=1}^{n} |a_s| e^{2\pi i \varphi_s} = 0$ содержит на самом деле два уравнения (для вещественной и мнимой частей) и определяет на торе T^n подмногообразие коразмерности. 2. Отсюда следует, что типичная траектория не проходит через это особое многообразие.

Допустим, что эргодическая теорема применима. Тогда

$$\int_{T^n} f(\varphi)\,d\varphi = \mathcal{R}e \int \frac{\sum \lambda_s |a_s| e^{2\pi i \varphi_s}}{\sum |a_s| e^{2\pi i \varphi_s}}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n =$$

$$= \sum \lambda_s |a_s| \cdot w_s ,$$

$$w_s = \mathcal{R}e \int_{T^n} \frac{e^{2\pi i \varphi_s}}{\sum_{t=1}^{n} |a_t| e^{2\pi i \varphi_t}}\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n .$$

Мы должны вычислить w_s. Для этого зафиксируем значения всех переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ за исключением переменной φ_s

Тогда: $$w_s = \int_{T^n} \left[\int \frac{e^{2\pi i \varphi_s}\, d\varphi_s}{\mathcal{B}(\varphi_1 \dots \varphi_{s-1}, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_n) + |a_s| e^{2\pi i \varphi_s}} \right] d\varphi_1 \dots \widehat{d\varphi_s} \dots d\varphi_n .$$

Выражение под знаком интеграла можно записать в виде

$$\frac{1}{|a_s|\,2\pi i}\;\frac{d\,\ln\left(\mathcal{B}+|a_s|\,e^{2\pi i \varphi_s}\right)}{d\varphi_s}$$

Под знаком логарифма стоит уравнение окружности.

Возможно только два случая

I. Начало координат лежит внутри окружности.

П. Окружность не содержит начало координат.

В случае I интеграл равен единице, а в случае П он обращается в нуль.

Условием того, что окружность содержит внутри себя начало служит неравенство $|\mathcal{B}| \leq |a_s|$. Значит

$$\int \frac{e^{2\pi i \varphi_s}\, d\varphi_s}{\mathcal{B}+|a_s|\,e^{2\pi i \varphi_s}} = \frac{1}{2\pi i\,|a_s|}\cdot P\left\{|a_s| > |\mathcal{B}|\right\}.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. W_s есть доля тех моментов времени, когда вращение вектора a_s вносит свой вклад в функцию $\varphi(t)$.

ЛЕКЦИЯ 7.

ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Цель сегодняшней и части последующих лекций состоит в том, чтобы убедить слушателей в том, что динамические системы на торе встречаются в большом числе задач эргодической теории.

Пусть $\mathcal{M}^n$ есть n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Обозначим $\mathcal{T}_x$ касательную плоскость к многообразию $\mathcal{M}^n$ в точке x. Через $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ обозначим касательное расслоение (касательный пучок) многообразия $\mathcal{M}$. По определению, $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ есть набор всех касательных плоскостей $\mathcal{T}_x$ с естественной гладкой структурой, превращающей $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ в многообразие класса C^∞.

Векторным полем α класса C^r на многообразии $\mathcal{M}=\mathcal{M}^n$ называется сечение касательного расслоения класса C^r. Иными словами, для любой точки $x\in\mathcal{M}$ задан вектор, гладко $\alpha(x)\in\mathcal{T}_x$ зависящий от x. По векторному полю α можно построить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(x) \qquad (*)$$

Движение по траекториям этой системы происходит таким образом, что вектор скорости частицы, находящейся в точке x, равен $\alpha(x)$ и не зависит от t (автономность).

Мы будем в дальнейшем считать $r=\infty$. Поэтому для системы дифференциальных уравнений $(*)$ выполняются теоремы существования и единственности решения. Следовательно, для любого момента времени t и любой начальной точки x_0 определена точка x_t - сдвиг начальной точки x_0 на время t вдоль решения системы.

Рассмотрим преобразование S_t, состоящее в сдвиге начального данного вдоль траектории за время t:

$$S_t : x_0 \to x_t .$$

Преобразования S_t очевидным образом образуют группу: $S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_{t_1+t_2}$. Группы $\{S_t\}$, порождаемые системами дифференциальных уравнений, часто называют классическими динамическими системами.

В обычной теории дифференциальных уравнений изучаются локальные свойства траекторий. Эргодическую теорию прежде всего интересуют вопросы, связанные с поведением траектории в целом.

Сейчас мы рассмотрим вопрос о существовании гладкой инвариантной меры, связанной с данной системой дифференциальных уравнений. Теорема Боголюбова-Крылова дает в компактном случае существование хотя бы одной инвариантной меры, но ничего не говорит о ее гладкости. Если мы интересуемся существованием гладкой инвариантной меры, то такая мера должна быть задана дифференциальной формой ω размерности n (мы считаем, что наше многообразие M ориентировано). В любой системе координат форма ω задается неотрицательной функцией плотности $\rho(x)$: $\omega = \rho(x) \prod_{i=1}^{n} dx_i$. Пусть в переменных

$x_1, x_2, \dots, x_n$ компоненты векторного поля $\alpha(x)$ имеют вид $(\alpha_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\alpha_n(x_1,\dots,x_n))$. Тогда наша система уравнений примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i(x_1,\dots,x_n) \qquad (**).$$

Имеет место основная

Теорема Лиувилля. Для того, чтобы дифференциальная форма ω порождала инвариантную меру для системы $\{S_t\}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho\alpha_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{или} \quad div(\rho\vec{\alpha}) = 0.$$

Полное доказательство этой теоремы можно найти в книгах Немыцкий, Степанов "Качественная теория дифференциальных уравнений" или Уиттекер "Аналитическая динамика" или Стернберг "Лекции по дифференциальной геометрии". Из теоремы Лиувилля вытекает также Следствие. Пусть дано векторное поле $\alpha(x)$, для которого инвариантная мера задается дифференциальной формой ω. Рассмотрим поле $\beta(x)$, получающееся из $\alpha(x)$ "заменой скорости":

$$\beta(x) = f(x)\alpha(x), \quad f(x) > 0.$$

Тогда β имеет гладкую инвариантную меру, которая задается дифференциальной формой $\omega_1 = \frac{1}{f}\,\omega$.

Утверждение следствия проверяется простой подстановкой в теорему Лиувилля. На самом деле оно справедливо и в случае замены времени в абстрактной динамической системе. В случае $n < \infty$ для динамических систем, возникающих из вариационных принципов механики, можно найти гладкую инвариантную меру.

Пример. Гамильтоновы системы.

Пусть $n = 2m$ и многообразие M^{2m} есть многообразие класса C^∞ и переменные разбиты на две группы:

$q^1, q^2, \dots, q^n$ (координаты)

$p^1, p^2, \dots, p^n$ (импульсы)

Пусть на M^{2m} задана функция $H(q, p)$. Гамильтоновой системой, порожденной функцией H, называется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

или отвечающая ей динамическая система, т.е. группа $\{S_t\}$.

В таком виде могут быть записаны многие уравнения классической механики.

Гамильтоновой системе соответствует естественная инвариантная мера, порожденная дифференциальной формой

$$\omega = \prod_{i=1}^{n} dq^i dp^i \qquad (\text{т.е. } \rho(x) \equiv 1).$$

Это утверждение мгновенно вытекает из теоремы Лиувилля и из уравнений Гамильтона.

Полученная нами мера носит название меры Лиувилля. Связанная с ней сложность такова: соответствующее фазовое пространство некомпактно и поэтому мера Лиувилля не является конечной на нашем пространстве. Есть стандартная схема для того, чтобы обойти эту трудность. Рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона $\mathcal{H}$, не зависящей от времени. Тогда $\mathcal{H}$ будет первым интегралом этой системы, т.е. полная производная функции $\mathcal{H}$ по времени равна нулю:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \sum \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i} \cdot \frac{dp^i}{dt} = 0.$$

Это означает, что поверхность постоянной энергии $\mathcal{H} = const$ инвариантна, т.е. всякая траектория, находившаяся в начальный момент $t=0$ на этой поверхности, останется на ней во все моменты времени. Поверхность $\mathcal{H} = const$ в фазовом пространстве при типичных значениях $const$ часто оказывается уже гладким компактным многообразием, на котором индуцируется конечная мера. Эта индуцированная мера называется в статистической механике микроканоническим распределением.

<u>Конечномерные линейные системы дифференциальных уравнений с точки зрения эргодической теории</u>.

Функция Гамильтона $\mathcal{H}$ есть энергия системы. Во многих случаях энергия системы представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий.

Кинетическая энергия $\mathcal{H}_{кин}$ как правило, имеет вид

$$\mathcal{H}_{кин} = \sum a_{ij}(q) p^i q^j$$

где $a_{ij}(q)$ - коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, зависящие только от координат, а p^i - импульсы. Потенциальную энергию $\mathcal{H}_{пот}$ возьмем в виде $V(q)$ - функций, зависящей только от координат. Положениями равновесия системы служат также точки, в которых $V(q)$ имеет экстремум. Если $\bar{q}$ - положение равновесия и $H_0 = V(\bar{q})$, то точка, у которой $q^i(0) = \bar{q}^i$, $p^i = 0$, останется неподвижной. Если $\bar{q}$ есть точка невырожденного минимума, то соответствующее положение равновесия будет устойчивым.

Для устойчивого положения равновесия $\bar{q}$ при $H = H_0 + \delta H$ все движения происходят в достаточно малой окрестности точки $\bar{q}$ при достаточно малом δH.

Поэтому функцию $\mathcal{H}$ вблизи точки $\bar{q}$ можно разложить в ряд с точностью до членов второго порядка по переменным p и $q - \bar{q}^i$

$$\mathcal{H} = \sum a_{ij}(q) p^i p^j + \sum V_{ij} q^i q^j \qquad (1)$$

Движения, описываемые такой функцией $\mathcal{H}$, называют линейным приближенным системы около положения равновесия.

Если функция $\mathcal{H}$ имеет вид (I), то решения линейной системы определяются числами a_{ij} и V_{ij}.

Квадратичная форма $\| a_{ij} \|$ положительно определена. По известной теореме из линейной алгебры существует такая замена переменных

$$\tilde{q}^i = \sum c^i_j q^j, \quad \tilde{p}^i = \sum c^i_j p^j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

которая обе формы приводит одновременно к каноническому виду:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{p}^i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i (\tilde{q}^i)^2.$$

Такая замена сохраняет гамильтонову структуру уравнений, т.е. уравнения движения имеют по-прежнему гамильтонов вид:

$$\frac{d\tilde{q}^i}{dt} = 2\lambda_i \tilde{p}^i, \quad \frac{d\tilde{p}^i}{dt} = -2\omega_i \tilde{q}^i.$$

Отсюда получаем, что при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют место уравнения

$$\frac{d^2\tilde{q}^i}{dt^2} = -4\lambda_i \omega_i \tilde{q}^i \quad \text{или} \quad \frac{d^2\tilde{q}^i}{dt^2} + \alpha_i \tilde{q}^i = 0, \quad \alpha_i = 4\lambda_i \omega_i.$$

При тех i, для которых $\omega_i > 0$ имеем $\alpha_i > 0$.

Величина $I_i = \omega_i (\tilde{q}^i)^2 + \lambda_i (\tilde{p}^i)^2$ служит первым интервалом системы. Таким образом, линейные системы имеют n дополнительных первых интегралов $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Если $\omega_i > 0$ при всех i, то пересечение многообразий $I_1 = I_1^{(0)} = const, \ldots, I_n = I_n^{(0)} = const$ компактно и, как правило, представляет собой n-мерный тор. Это означает, что линейные гамильтоновы системы неэргодичны и при $\omega_i > 0$ фазовое пространство распадается на семейство инвариантных n-мерных торов. Если ввести угловые переменные φ_i по формуле

$$\varphi_i = \operatorname{arctg}\left(2\lambda_i \sqrt{\frac{\lambda_i}{\omega_i}} \frac{\tilde{p}^i}{\tilde{q}^i}\right),$$

то угловая скорость $\frac{d\varphi_i}{dt} = \alpha_i = const$, и мы получаем условно-периодическое движение на n-мерном торе рассмотренного выше вида. При рациональной несоизмеримости чисел α_i система будет эргодической.

Эргодическая теория решений линейных волновых уравнений.

Наш предыдущий анализ допускает обобщений на бесконечнрмерный случай, т.е. на случай динамических систем, порождённых дифференциальными уравнениями в частных производных. Рассмотрим малые колебания струны, мембраны, ограниченного об'ёма в пространстве. Уравнение малых колебаний можно получить из вариационного принципа, если взять в качестве функции Гамильтона функционал

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \rho(x)\, u_t^2\, dx + \frac{1}{2} \int \kappa(x) (\nabla u)^2 dx$$

В дальнейшем мы ограничимся для простоты одномерным случаем и задачей с закреплёнными концами. Уравнение движения струны принимает вид

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Покажем, как этому уравнению можно сопоставить динамическую систему в функциональном пространстве. Рассмотрим в качестве фазового пространства пространство пар (u, u_t), где функции u, u_t будут впоследствии подчинены некоторым условиям. Из метода Фурье следует, что если $v_k(x)$ – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) = -\lambda_k \rho(x) v_k\,, \quad \text{где } 0 \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \ldots$$

и функции u, u_t допускают разложение в квадратично сходящийся ряд Фурье по функциям v_k:

$$u = \sum a_k v_k\,,$$

$$u_t = \sum b_k v_k\,,$$

то волновое уравнение сведется к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k}{dt} = b_k , \qquad \frac{db_k}{dt} = -\frac{1}{\lambda_k} a_k , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Из вида этой системы вытекает, что для волнового уравнения имеется бесконечная система первых интегралов

$$a_k^2 + \lambda_k b_k^2 = I_k .$$

Итак, возьмем в качестве фазового пространства $\mathcal{M}$ пространство пар (u, u_t), где u, u_t разлагаются в квадратично сходящийся ряд Фурье. Фиксация первых интегралов I_0, $I_1, \ldots$ выделяет в фазовом пространстве бесконечно-мерный тор. Движение нашей системы сводится к условно-периодическому движению на этом торе с частотами $\omega_k = \pm\sqrt{\lambda_k}$. Как и в конечномерном случае, оно будет эргодическим, если частоты ω_k рационально несоизмеримы. По-видимому, для функций ρ, k общего вида это будет действительно так, но, нам не известно аккуратное доказательство этого факта.

Если в функциональном пространстве пар (u, u_t) ввести координаты "действие" - $I_0, I_1, \ldots$ и "угол" $\varphi_0, \varphi_1,$ $\ldots, \ \varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda_i}\, b_i}{a_i}$, то любая инвариантная мера для динамической системы, отвечающей волновому уравнению, может быть записана в виде:

$$d\mu = d\lambda(I_0, I_1, \ldots) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} d\varphi_k ,$$

где λ - произвольная мера в пространстве переменных $I_0, I_1 \ldots$.

ЛЕКЦИЯ № 8.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Сейчас мы рассмотрим математическую модель идеального газа на прямой (т.е. одномерного идеального газа).

Пусть дана окружность длины L, на которой расположено N точек массы I, каждая из которых движется со своей постоянной скоростью v_i. Если q_i - угловая координата точки i, то ее уравнение движения имеет вид

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i ,$$

$$\frac{dv_i}{dt} = 0 .$$

Написанная система уравнений есть гамильтонова система с функцией Гамильтона $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$. Обозначим

$$v_i = p_i ,$$

так что $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum p_i^2$. Тогда, в соответствии с теоремой Лиувилля, существует инвариантная мера m, которая имеет вид

$$dm = \prod dq_i \, dp_i .$$

Поверхность постоянной энергии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(N, L) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} p_i^2$ есть прямое произведение N- мерного тора (координатного или конфигурационного пространства) на сферу радиуса $2\mathcal{H}$. Обозначим $d\tilde{\mu} = dq \times d\lambda$, где λ - равномерная мера на сфере.

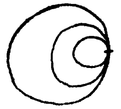
$dq = \prod_{i=1}^{N} dq_i$. Мера $\tilde{\mu}$ очевидно, инвариантна.

Рассматриваемая нами система при данных N, L, H неэргодична, так как скорость каждой частицы при движении сохраняется. Если значения этих скоростей фиксировать, то мы получим условно-периодическое движение на N- мерном торе. Так как рациональные соотношения между компонентами встречаются с вероятностью 0 по отношению к мере $\tilde{\mu}$, то такая система с вероятностью 1 будет эргодична.

Сейчас мы сделаем важное преобразование, которое позволит нам освободиться от нумерации частиц и произвести специальный предельный переход $N \to \infty$ (термодинамический предельный переход). Мы переходим от исходного фазового пространства к новому пространству, в котором точкой служит набор N точек окружности (т.е. N - точечное подмножество окружности). Конфигурационным пространством раньше было $T^N = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{N\ раз}$. Теперь мы факторизуем пространство T^N по группе S_N - группе перестановок N символов. Полученное множество $Q_N = T_N / S_N$ будет конфигурационным пространством, являющимся псевдомногообразием, т.е. многообразием всюду, за исключением подмножеств меньшей размерности, что не страшно с точки зрения теории меры.

Для каждой точки $q \in Q_N$ набор скоростей m частиц можно представлять себе как функцию на q. Если $q_i \in q$, то $v(q_i)$ - скорость частицы, находящейся в точке q_i. Если в точке q_i находится k частиц, то $v(q_i)$ есть упорядоченный по величине набор k чисел - скоростей частиц, находящихся в q_i.

Теперь мы остановимся на конструкции, которая дает возможность перейти к рассмотрению идеального газа с бесконечным числом частиц на прямой. Будем считать, что имеется последовательность окружностей, имеющих общую фиксированную точку O и расположенных так, как показано на рисунке. Пусть $N \to \infty$, $L \to \infty$, $\mathcal{H} \to \infty$, но стремление к бесконеч-



ности происходит не произвольным образом, а согласованно и так, что $\frac{N}{L} \to \rho$, $\frac{\mathcal{H}}{N} \to h$, где ρ и h - фиксированные положительные числа.

При $L \to \infty$ окружности все более "выпрямляются" и в пределе мы получаем систему из бесконечного числа частиц на прямой.

Мы построим инвариантную меру на предельном пространстве как предел инвариантных мер Лиувилля, а также покажем, что предельная система эргодическая и даже обладает свойством перемешивания. Это потребует применения несколько более серьезного аппарата теории меры.

Пусть Δ - произвольный отрезок на прямой. Обозначим через $\eta(\Delta)$ число точек (молекул), попавших в отрезок Δ. В допредельном случае (длина окружности L, число частиц N)

$$P_{N,L}\{\eta(\Delta)=k\} = C_N^k \left(\frac{\Delta}{L}\right)^k \left(1-\frac{\Delta}{L}\right)^{N-k}.$$

При нашем предельном переходе $P_{N,L}\{\eta(\Delta)=k\} \to e^{-\rho|\Delta|}\frac{(\rho|\Delta|)^k}{k!}$

где $|\Delta|$ - длина Δ (распределение Пуассона). Более того, случайные величины $\eta(\Delta_1)$ и $\eta(\Delta_2)$ в пределе независимы, если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$.

Эти рассуждения показывают, что предельной мерой в конфигурационном пространстве служит пуассоновская мера.

Теперь изучим распределение скоростей частиц (см., например, Кац "Вероятность и смежные вопросы в физике" стр. 14-16). Если $N < \infty, L < \infty$, то N- мерный вектор скорости равномерно распределен на N- мерной сфере радиуса $\sqrt{2\mathcal{H}(N,L)}$, $\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = 2\mathcal{H}(N,L)$. Нетрудно показать, переходя к сферической системе координат, что распределение каждой координаты v_i сходится:

$$\mathrm{Distribution}\ v_i \xrightarrow{\text{слабо}} N(0,\sigma^2)$$

где $N(0,\sigma^2)$ - гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией σ^2, причем $\sigma^2 = 2h$ и для разных i скорости асимптотически независимы. Итак, скорость каждой частицы имеет гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 = 2h$, причем скорости разных частиц независимы между собой (в этой ситуации говорят, что скорости частиц газа имеют распределение Максвелла). В конфигурационном пространстве частицы распределены по закону Пуассона с параметром ρ. Легко проверить, что построенная мера инвариантна относительно динамики, при которой каждая частица движется со своей скоростью. Мы покажем, что динамика идеального газа такова, что соответствующая динамическая система обладает свойством перемешивания. Пусть x - точка фазового пространства. Тогда $x = (q, v_q)$, где q - счетное подмножество точек прямой, v_q - функция на этом подмножестве, сопоставляющая каждой его точке (т.е. частице) ее скорость.

Пусть Δ - измеримое подмножество прямой, например - отрезок. Тогда можно рассмотреть те подмножества фазового пространства $\mathcal{M}$, которые положением и скоростями частиц, находящихся в определяются этом отрезке. Примером такого подмножества может служить множество $A_k(\Delta)$- множество таких x

у которых в отрезке Δ находится ровно k частиц.

Для любого измеримого множества Δ определяемые им множества фазового пространства образуют σ- подалгебру, σ- алгебры всех измеримых множеств, которую мы обозначим через $\gamma(\Delta)$.

Отметим одно важное свойство подалгебр $\gamma(\Delta)$: если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то σ - алгебры $\gamma(\Delta_1)$ и $\gamma(\Delta_2)$ независимы, т.е. для любого множества $A \in \gamma(\Delta_1)$ и любого множества $B \in \gamma(\Delta_2)$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Перейдем теперь к доказательству перемешивания. Перемешивание эквивалентно следующему предложению: для любой функции, определенной на пространстве M

$$\int f(S_t x)\, f(x)\, d\mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int f\, d\mu\right)^2$$

Свойство перемешивания достаточно доказать для всюду плотного множества функций из $\mathcal{L}^2_\mu(M)$. В качестве такого множества функций мы возьмем те функции, которые зависят от части x в отрезке Δ (измеримы относительно σ-подалгебры $\gamma(\Delta)$).

Пример I. $f_\Delta(x)$ - число частиц конфигурации x, попавших в отрезок Δ.

Пример 2. $f_\Delta(x) = \sum\limits_{q_i \in \Delta} v_q(q_i)$ - полный импульс частиц, находящихся в отрезке Δ.

Среди всех функций f мы будем рассматривать те, для которых $\int f\, d\mu = 0$. Для того, чтобы установить перемешивание, необходимо показать, что

$$\int f(S_t x)\, f(x)\, d\mu(x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Идею доказательства поясним на примере функции $f = f_\Delta$, где f_Δ - число молекул, находящихся в Δ. Тогда $f_\Delta(S_t x) = f(S_t x)$. Возьмем точку x и входящую в нее частицу q_i (движущуюся со скоростью v_i). Через время t эта частица будет находиться в точке $q_i + t v_i$, так как столкновений с другими молекулами не происходит (идеальный газ!). Нас интересует вероятность того, что точка $q_i + t v_i$ лежит в Δ. Если точка q_i была в Δ, то при условии $|v_i| \geq \frac{|\Delta|}{t}$ частица выйдет из Δ, причем при $t \to \infty$ вероятность этого события стремится к единице. Итак, вероятность тех x, которые содержат частицы, не вышедшие из Δ через время t, стремится к нулю при $t \to \infty$. Но тогда $f(S_t x)$ становится асимптотически измеримой относительно $\gamma(R^1 - \Delta)$. Независимость $\gamma(\Delta)$ и $\gamma(R^1 - \Delta)$ приводит к требуемому соотношению. Детали мы опускаем (см. К.Л.Волковысский и Я.Г.Синай "Эргодические свойства идеального газа с бесконечным числом степеней свободы", Функциональный анализ и его прил., т.5, вып.4, (1971), стр. 19-21.

ЛЕКЦИЯ 9.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть Q - компактное, замкнутое риманово многообразие. Это значит, что в каждой касательной плоскости можно ввести скалярное произведение $\langle e_1, e_2 \rangle$, гладко зависящее от точки q в естественном смысле. Кроме того, для всякой гладкой кривой $\gamma \in Q$ можно определить ее длину, ввести на многообразии элемент объема $d\sigma$ (риманов объем), позволяющий интегрировать "хорошие" функции: $\int f(q)\, d\sigma(q)$, а также параллельное перенесение векторов и геодезические линии.

Пусть $\mathcal{M}$ - единичный касательный пучок к Q, т.е.

$$\mathcal{M} = \{ x : (q, v) = x,\ q \in Q, v = v_q \in \mathcal{T}_q,\ \| v_q \| = 1 \}.$$

Тогда x - называется линейным элементом, а q - носителем линейного элемента.

Множество линейных элементов с одним и тем же носителем представляет собой единичную сферу S_q^{m-1}, где $\dim Q = m$. Ясно, что $\dim \mathcal{M} = 2m - 1$.

Имея риманову метрику на Q, можно ввести риманову метрику на $\mathcal{M}$. Именно, пусть $x_1 = (q_1, v_1)$, $x_2 = (q_2, v_2)$ - два близких линейных элемента. Положим для них по определению $ds^2(x_1, x_2) = dq^2 + d\varphi^2$, где dq^2 - квадрат длины отрезка геодезической, соединяющей q_1 и q_2, $d\varphi^2$ - квадрат расстояния между v_1 и вектором, получающимся из v_2 при параллельном перенесении его вдоль этого отрезка в точку q_1. Через μ обозначим меру в M, порожденную метрикой ds.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $\{S_t\}$ пространства $\mathcal{M}$, для которой отдельное преобразование S_t состоит в сдвиге линейного элемента x вдоль определяемой им геодезической на расстояние t. Такая однопараметрическая группа называется геодезическим потоком.

К геодезическим потокам сводятся многие важные задачи классической механики. Сам по себе геодезический поток также допускает механическую интерпретацию. А именно, допустим, что материальная точка массы m, имеющая энергию h, движется по поверхности Q без трения. Тогда, при соответствующем выборе единиц масштаба, M будет фазовым пространством такой динамической системы, а ее движение по этому пространству будет геодезическим потоком. Более общим образом, если для какой-нибудь системы координатным пространством служит гладкое многообразие Q, а функция Гамильтона есть сумма кинетической энергии и потенциальной, причем кинетическая энергия есть квадратичная форма от импульсов с коэффициентами, зависящими от $q \in Q$, то на Q можно ввести риманову метрику, так, что движение нашей динамической системы получится из геодезического потока гладкой заменой времени.

Ясно, что в случае гладкого многообразия, группе $\{S_t\}$ сдвигов по геодезическим отвечает гладкое векторное поле на M. Возможность применять эргодическую теорию к изучению геодезических потоков вытекает из следующей леммы.

Лемма I (без доказательства) Геодезический поток сохраняет меру μ. (см. УМН 1967, вып. 5 статья Аносова и Синая, или "Лекции по классической механике" В.И. Арнольда)

Примеры:

1. Пусть Q - двумерная сфера, тогда геодезические линии периодичны на Q, геодезический поток неэргодичен, и каждая геодезическая является отдельной эргодической компонентой.
2. Пусть Q - поверхность вращения. Это значит, что Q получается вращением некоторой кривой на плоскости (x, z) в пространстве около оси z.

В таком случае на M действует однопараметрическая группа преобразований, порожденная вращением вокруг оси z. Орбитами этой группы служат замкнутые кривые, состоящие из линейных элементов, носители которых лежат на меридиане, а угол с меридианом фиксирован. Эта группа перестановочна с геодезическим потоком, поэтому по теореме Нётер ей отвечает первый интеграл движения. Этот интеграл называется интегралом Клеро. С точки зрения механики интеграл Клеро есть проекция момента количества движения точки на ось z.

Пусть $I(x)$, $x \in M$ - интеграл Клеро. При любом фиксированном c поверхности уровня $M_c = \{x : I(x) = c\}$ - являются инвариантными множествами геодезического потока. При типичных c это множество с топологической точки зрения представляет собой двумерный тор.

Как мы увидим позже, при типичных c движение на таком торе может быть сведено путем надлежащей замены переменных к эргодическому условно-периодическому движению на торе. Таким образом, в случае поверхностей вращения геодезический поток не эргодичен, а его типичные эргодические компоненты сводятся к условно-периодическим движениям на двумерном торе.

3. Потоки на выпуклых поверхностях.

Сказанное выше о поверхностях вращения относится, в частности, к эллипсоидам вращения. Оказывается, что и для произвольных трехосных эллипсоидов ситуация такая же, как и для поверхностей вращения. (Якоби "Лекции по динамике").

Для произвольных выпуклых поверхностей Пуанкаре выдвинул гипотезу о том, что на таких поверхностях существует три замкнутых геодезических. Сам Пуанкаре доказал существование одной такой геодезической на поверхностях, близких к эллипсоиду. Полное решение проблемы было получено Люстерником и Шнирельманом в 30-е годы. В хороших случаях одна или две из этих геодезических является устойчивыми (в линейном приближении). При довольно общих условиях здесь применима теория Колмогорова - Арнольда - Мозера, из которой следует, что геодезический поток будет неэргодичным.

4. Геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Такие поверхности по своим геометрическим свойствам совершенной не похожи на выпуклые поверхности. Это сказывается и на свойствах геодезических потоков на этих поверхностях.

Докажем для этого случая следующую теорему.

Теорема (Хедлунд-Хопф).

Геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны эргодичен.

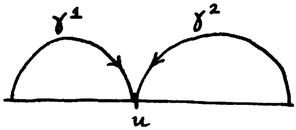
Замечания. Можно также показать, что геодезические потоки на таких поверхностях обладают хорошими статистическими свойствами: перемешивание, центральная предельная теорема для хороших функций, экспоненциальное убывание корреляций. Доказательства этих свойств не просты, и мы не будем их здесь проводить.

Прежде чем перевходить к доказательству теоремы, остановимся на строении поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Рассмотрим модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Как известно, в этой модели плоскость Лобачевского представляет собой верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\operatorname{Im} z > 0$

с метрикой $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

Движениями плоскости Лобачевского служат дробно-линейные преобразования, переводящие верхнюю полуплоскость в себя.

Геодезические линии в модели Пуанкаре имеют вид либо окружностей, ортогональных к вещественной оси, которая называется абсолютом, либо вертикальных полупрямых. Мы будем рассматривать также ориентированные геодезические. Две направленные геодезические называются положительно асимптотическими, если они оканчиваются в одной и той же точке абсолюта. Пусть эта точка есть u. Оценим скорость сближения таких асимптотических геодезических при их стремлении к u. Сделаем дробно-линейное преобразование φ, переводящее верхнюю полуплоскость в себя, а точку u в бесконечность. Тогда $\varphi(\gamma^1)$ и $\varphi(\gamma^2)$

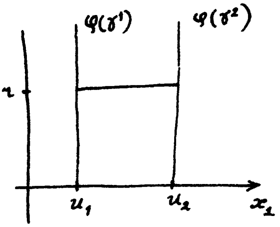


перейдут в две параллельные прямые, пересекающие абсолют в точках u_1 и u_2. Расстояние между точками $\varphi(\gamma^1)$ и $\varphi(\gamma^2)$ находящимися на уровне $y = r$ $(r > 1)$, измеренное по отрезку $\{y = r,\ u_1 \le x \le u_2\}$ равно

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{y} = \frac{u_2 - u_1}{y} \; ;$$ в свою очередь

$$r = \int_1^y \frac{du}{u} = \ln y$$

т.е. $$s = \frac{u_2 - u_1}{e^r}$$



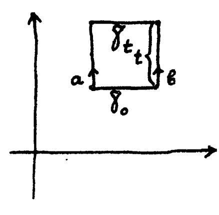
Отсюда следует, что асимптотические геодезические сближаются между собой с экспоненциальной скоростью. Это свойство асимптотических геодезических является основным при установлении эргодичности.

Зафиксировав точку абсолюта u , рассмотрим пучок асимптотических между собой направленных геодезических, оканчивающихся в точке u . Ясно, что через каждую точку плоскости проходит одна и только одна геодезическая из этого пучка. (Если считать геодезические линии решениями соответствующей вариационной задачи, то пучок направленных асимптотических геодезических образует поле экстремалей, по терминологии, принятой в вариационном исчислении).

Рассмотрим ортогональные траектории к пучку асимптотических геодезических. В модели Пуанкаре неевклидовы углы "совпадают" с евклидовыми углами, отсюда легко следует, что ортогональные траектории представляют собой окружности, касающиеся абсолюта в точке

Эти окружности называются орициклами.

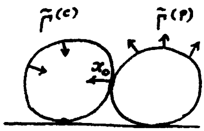
Таким образом, пучку направленных асимптотических геодезических отвечает семейство ортогональных траекторий. Такой же подсчет, что и выше, показывает важную связь, которая имеется между двумя этими семействами. Возьмем отрезок $\tilde{\gamma}_0$ орицикла от a до b . Через каждую его точку c проведем отрезок геодезической длины t , направленный в точку u . Тогда совокупность концов этих отрезков есть снова отрезок орицикла $\tilde{\gamma}_t$, их длины связаны соотношением: $\ell(\tilde{\gamma}_t) = e^{-t}\,\ell(\tilde{\gamma}_0)$.



"Поднимем" эти соотношения в пространство линейных элементов плоскости Лобачевского. Если Q_0 - плоскость Лобачевского, то обозначим через $\mathcal{M}_0$ пространство линейных элементов Q_0.

Всякая направленная геодезическая в Q_0 порождает кривую в $\mathcal{M}_0$: надо рассмотреть линейные элементы, касающиеся данной геодезической и имеющие положительное направление на данной геодезической.

Аналогичным образом всякий орицикл на плоскости Лобачевского можно поднять до кривой в $\mathcal{M}_0$. Именно, если x_0 - линейный элемент и q_0 - его носитель, то через q_0 проходят две окружности $\tilde{\Gamma}^{(c)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(p)}$, касающиеся абсолюта и ортогональные к x_0. Рассмотрим кривые $\Gamma^{(c)}$ и $\Gamma^{(p)}$ в пространстве $\mathcal{M}_0$, получающиеся оснащением кривых $\tilde{\Gamma}^{(c)}$ и $\tilde{\Gamma}^{(p)}$ единичными векторами нормали, направленными также, как x_0. Полученные кривые в пространстве $\mathcal{M}_0$ мы, по-прежнему, будем называть орициклами. Отметим следующие свойства орициклов:



1. $S_t\,\Gamma^{(c)}(x) = \Gamma^{(c)}(S_t x)$; $S_t\,\Gamma^{(p)}(x) = \Gamma^{(p)}(S_t x)$;

2. $\ell(S_t\,\gamma^{(c)}(x)) = e^{-t}\ell(\gamma^{(c)}(x))$; $\ell(S_{+t}\,\gamma^{(p)}(x)) = e^{t}\ell(\gamma^{(p)}(x))$;

$$\gamma^{(c)}(x) \subset \Gamma^{(c)}(x) \qquad\qquad \gamma^{(p)}(x) \subset \Gamma^{(p)}(x).$$

(Доказательство предоставляется читателю).

Ввиду свойства 2 орициклы $\Gamma^{(c)}$ и $\Gamma^{(p)}$ естественно называть сжимающимися и расширяющимися соответственно, что и определило выбор индексов „c" и „p" для них.

Обозначим через $R^{(c)}_\tau$ -преобразование пространства $\mathcal{M}_0$, состоящее в сдвиге каждого элемента $x_0 \in \mathcal{M}_0$ вдоль определяемого им сжимающегося орицикла на расстояние τ. Легко видеть, что преобразования $R^{(c)}_\tau$ образуют однопараметрическую группу гладких диффеоморфизмов пространства $\mathcal{M}_0$ и поэтому порождаются некоторым гладким векторным полем, которое мы обозначим $\alpha^{(c)}$. Аналогично строится векторное поле $\alpha^{(p)}$ для орициклов $\Gamma^{(p)}$. Обозначим также $\alpha^{(o)}$ гладкое векторное поле, отвечающее геодезическому потоку. Легко видить, что в каждой точке $x_o \in \mathcal{M}_o$ векторные поля $\alpha^{(p)}$, $\alpha^{(c)}$, $\alpha^{(o)}$ линейно независимы между собой.

Каждая компактная поверхность постоянной отрицательной кривизны получается из плоскости Лобачевского Q_o при помощи некоторой дискретной группы движений Γ. А именно, поверхность Q получается как фактор-пространство Q_o/Γ. (см. Спрингер "Введение в теорию римановых поверхностей").

Пусть $\mathcal{M}$ - пространство линейных элементов поверхности Q, естественное отображение $Q_o \to Q$ порождает отображение $\mathcal{M}_o \to \mathcal{M}$. Мы будем по-прежнему обозначать $\alpha^{(o)}$, $\alpha^{(c)}$, $\alpha^{(p)}$ векторные поля на $\mathcal{M}$, индуцированные этим отображением соответствующих полей на $\mathcal{M}_o$. Отсюда, в частности, следует, что для любого $x_o \in \mathcal{M}$ существуют проходящие через него расширяющиеся и сжимающиеся орициклы.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы Хедлунда-Хопфа. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция. По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина почти всюду существуют пределы :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_t x)\,dt = \hat{f}^+(x), \qquad (*)$$

$$\lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_{-t} x)\,dt = \hat{f}^-(x) \qquad (**)$$

причем $\hat{f}^+ = \hat{f}^-$ почти всюду на $\mathcal{M}$.

Мы хотим доказать, что $\hat{f}^- = const$ почти всюду. Ясно, что достаточно доказать это утверждение в малой окрестности любой точки x_o. Зафиксировав эту окрестность, и обозначив ее через $\mathcal{U}$, возьмем точку $x \in \mathcal{U}$, для которой $\hat{f}^+(x)$ существует. Отметим, что:

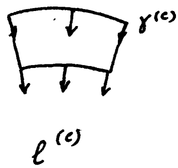
I. Если $\hat{f}(x)$ - существует и $y \in \Gamma^{(c)}(y)$, то

$$\hat{f}^{+}(x) = \hat{f}^{+}(y).$$

Действительно, это следует из того, что точки $S_t x$ и $S_t y$ сближаются с экспоненциальной скоростью, т.е. $\hat{f}^{+}(x)$ - постоянна на сжимающихся орициклах.

2. Аналогично, если существует $\hat{f}^{-}(x)$ и $y \in \Gamma^{(p)}(x)$, то $\hat{f}^{-}(x) = \hat{f}^{-}(y)$, т.е. $\hat{f}^{-}(x)$ - постоянна на расширяющихся орициклах.

Возьмем какой-либо отрезок сжимающегося орицикла $\gamma^{(c)}$, для которого $\hat{f}^{+} = \hat{f}^{-}$ почти всюду. Так как $\hat{f}^{+} = \hat{f}^{-}$ почти всюду в $\mathcal{U}$, то такие отрезки образуют множество полной меры в $\mathcal{U}$. Построим двумерную площадку $\ell^{(c)} = \bigcup_{|t|<t_0} S_t \gamma^{(c)}$, для которой по-прежнему,



$\hat{f}^{+} = \hat{f}^{-}$ почти всюду. Так как векторное поле $\alpha^{(p)}$ гладкое и $\ell^{(c)}$ - часть гладкого подмногообразия в $\mathcal{M}$, то можно на $\ell^{(c)}$ выбрать подмножество полной меры $\mathcal{A} \subset \ell^{(c)}$, где $\mathcal{A} = \{ z : z \in \ell^{(c)}, \hat{f}^{+}(z) = \hat{f}^{-}(z) \}$. Тогда

$$\mathcal{B} = \bigcup_{z \in \mathcal{A}} \gamma^{(p)}(z)$$

в пересечении с $\mathcal{U}$ дает подмножество полной меры в $\mathcal{U}$, так как поле $\alpha^{(p)}$ гладкое и $\ell^{(c)}$ - часть гладкой площадки. Для любых двух точек $x_1 \in \mathcal{B}$, $x_2 \in \mathcal{B}$ и отвечающих им $z_1 \in \mathcal{A}$, $z_2 \in \mathcal{A}$ имеем $\hat{f}^{-}(x_1) = \hat{f}^{-}(z_1) = \hat{f}^{+}(z_1) = \hat{f}^{+}(z_2) = \hat{f}^{-}(z_2) = \hat{f}^{-}(x_2)$. Таким образом, $\hat{f}^{-}$ постоянна почти всюду, в $\mathcal{U}$. Следовательно, геодезический поток эргодичен. Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ 10.

БИЛЬЯРДЫ.

Пусть Q - ограниченная область в $\mathbb{R}^k$ с кусочно-гладкой границей ($k \geq 2$).

Бильярдом в Q называется динамическая система, порожденная равномерным прямолинейным движением материальной точки внутри Q с постоянной скоростью и с отражением на границе, при котором тангенциальная составляющая скорости остается неизменной, а нормальная составляющая меняет знак.

Фазовое пространство бильярда состоит из всевозможных наборов (q,v), где $q \in Q$, а v - вектор скорости, т.е. элемент единичной сферы k - мерного пространства. В таком случае q называется носителем точки x.

Меру в фазовом пространстве зададим в виде

$$d\mu = dq \cdot d\omega,$$

где $d\omega$ есть равномерное распределение на единичной сфере k- мерного пространства точек $x = (q,v)$, имеющих носителем q. Мера μ конечна, и мы будем считать, что она нормирована.

Те траектории, которые попадают в особые точки границы, имеют меру нуль. С точки зрения эргодической теории, такими траекториями можно пренебречь.

Утверждение. Мера μ является инвариантной мерой бильярда.

Внутри области наше утверждение очевидно. Рассмотрим отражение от границы. Отражение относительно плоскости очевидным образом сохраняет меру. Отличие же общего случая от случая плоскости сказывается на малых высшего порядка (так как граница гладкая).

Пусть M есть множество тех линейных элементов (т.е. точек $x = (q,v)$), носители которых либо лежат в Q, либо принадлежат краю, причем в последнем случае v направлено вне Q. Тогда можно рассмотреть преобразование S_t, переводящее множество $\mathcal{M}$ в себя; $S_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и состоящее в изменении положения частицы и направления ее скорости в соответствии с ее сдвигом вдоль траектории на время t.

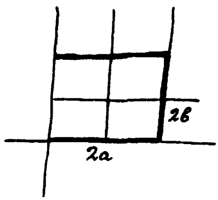
$\{S_t\}$ - будет динамической системой в пространстве $\mathcal{M}$.

Примеры бильярдов и связанных с ними задач.

I. $k=2$, Q есть прямоугольник.

Вдоль каждой траектории бильярда, не проходящей через вершину прямоугольника, угол отражения (т.е. угол выходящей после отражения траектории с внутренней нормалью) может принимать только четыре возможных значения. Поэтому бильярд в прямоугольнике не эргодичен.

Замостим всю плоскость прямоугольниками со сторонами a и b и устроим отображение плоскости на прямоугольник со сторонами a и b, которое мы обозначим через π. Пусть (x, y) - точка плоскости, причем $x = ka + x_0$, $y = l \cdot b + y_0$, где k, l - целые числа, а x_0, y_0 таково, что $0 \leq x_0 < a$, $0 \leq y_0 < b$.



Отображение $\pi(x, y)$ определим следующим образом:

I) если k, l - чётные, то $\pi(x, y) = (x_0, y_0)$;

2) если k - чётно, l - нечётно, то

$$\pi(x, y) = (x_0, b - y_0);$$

3) если k - нечётно, l - чётно, то

$$\pi(x, y) = (a - x_0, b);$$

4) если k, l - нечётные, то $\pi(x, y) = (a - x_0, b - y_0)$.

Легко видеть, что отображение π непрерывно, а поднятие всякой траектории бильярдного типа в прямоугольнике $Q = (a, b)$ на плоскость есть прямая линия.

Указанное выше отождествление действует так же, как и склеивание тора из прямоугольника $(2a, 2b)$. Поэтому бильярд в этом прямоугольнике можно рассматривать как прямолинейное движение на двумерном торе, если фиксировать угол наклона φ первого отрезка траектории.

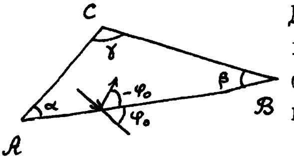
Для такого движения на торе мы имеем условие эргодичности: необходимо, чтобы $\frac{a}{b}\,tg\,\varphi$ было иррационально.

П. Равносторонний треугольник.

Бильярд в равностороннем треугольнике рассматривается совершенно аналогично. бильярду в прямоугольнике, так как равносторонними треугольниками тоже можно замостить всю плоскость.

Ш. Бильярд в произвольном треугольнике.

Мы покажем, что если углы треугольника рационально соизмеримы, то бильярд внутри такого треугольника не эргодичен.



Для этого рассмотрим отражение от всех трех сторон треугольника. Зафиксируем начальное направление, от которого мы будем отсчитывать угол φ, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Пусть, для определенности, оно совпадает с AB. Если частица движется под углом φ_0 и отражается от AB то ее угол после отражения равен $-\varphi_0$: $\varphi_0 \to -\varphi_0$. Если она движется под углом φ_0 и отражается от стороны AC, то ее угол после отражения равен $\varphi_0 \to 2\alpha - \varphi_0$. Если, наконец, частица движется под углом φ_0 и отражается от стороны BC, то $\varphi_0 \to 2(\pi-\beta) - \varphi_0$

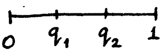
Таким образом, если $\alpha = 2\pi\frac{p}{q}$, $\beta = 2\pi\frac{r}{s}$, где p, q, r, s - целые числа, то при всевозможных отражениях частицы от сторон треугольника угол принимает лишь конечное множество значений. Отсюда непосредственно следует, что движение неэргодично.

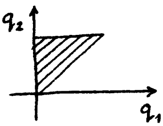
Пусть $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ - тот конечный набор значений углов, о котором мы только что говорили. Сейчас мы покажем, как здесь естественно возникает преобразование типа перекладывания отрезков.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ – углы, соответствующие линейным элементам, носители которых лежат на нижней стороне треугольника. Если считать их отрезками соответствующей длины, то после первого отражения возникает преобразование этих отрезков – перекладывание. Бильярду внутри треугольника с рационально соизмеримыми углами соответствует перекладывание. В настоящий момент не известны условия, при которых это перекладывание будет транзитивным.

К изучению бильярдов сводятся некоторые задачи механики. Рассмотрим одну из них.

Пусть на отрезке $[0,1]$ движутся 2 материальные точки с массами m_1 и m_2 и скоростями v_1 и v_2 соответственно. Пусть, кроме того, они упруго отражаются друг от друга и от концов отрезка. Обозначим через q_1 и q_2 координаты первой и второй точек на отрезке. Тогда $0 \le q_1 \le q_2 \le 1$. Конфигурационное пространство нашей системы есть треугольник,

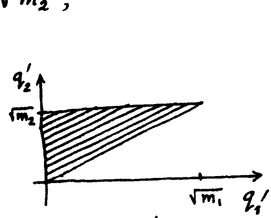




а траектория движения частиц есть траектория типа бильярда в этом треугольнике. Для доказательства последнего утверждения введем новые координаты: $q_1' = \sqrt{m_1}\, q_1$, $q_2' = \sqrt{m_2}\, q_2$.

Теперь $0 \le q_1' \le \sqrt{m_1}$, $0 \le q_2' \le \sqrt{m_2}$,

а конфигурационное пространство принимает вид треугольника: $0 \le q_1' \le \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\, q_2' \le \sqrt{m_1}$. Если ввести скорости, отвечающие координатам q_1', q_2'



$v_1' = \sqrt{m_1}\, v_1$, $v_2' = \sqrt{m_2}\, v_2$, то энергия системы станет равной

$$H = \frac{(v_1')^2}{2} + \frac{(v_2')^2}{2}$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что при отражении сохраняется длина вектора скорости (v_1', v_2'), равная $\sqrt{2H}$.

При столкновении частиц суммарный импульс до и после столкновения сохраняется : $\sqrt{m_1}\, v_1' + \sqrt{m_2}\, v_2' = const$.

Иными словами, скалярное произведение вектора скорости (v_1', v_2') с вектором гипотенузы $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ постоянно. Это и означает, что закон отражения от гипотенузы есть закон отражения бильярда. Отражение от катетов исследуется еще проще, и мы его не приводим. Если m_1 и m_2 таковы, что углы треугольника α и β представимы в виде $\alpha = 2\pi \frac{p}{q}$, $\beta = 2\pi \frac{r}{s}$, где p, q, r, s - целые числа, то движение не эргодично. Вопрос об эргодичности при несоизмеримых α, β является открытым.

Бильярд в выпуклых областях.

Пусть область Q есть эллипс, с фокусами F_1, F_2.

Теорема. Любая траектория бильярда в эллипсе касается либо гиперболы, либо эллипса, софокусных с данным эллипсом.

Доказательство.

Докажем это утверждение в случае эллипса. Пусть A - точка Q и $A_1 A$, $A A_2$ - две последовательных отрезка какой-либо траектории нашего бильярда. Возьмем точку B_1, симметричную F_1 относительно $A_1 A$ и проведем отрезок $B_1 F_2$. Этот отрезок пересечет $A_1 A$ в точке C_1. Ясно, что $u_1 = F_1 C_1 + C_1 F_2 = B_1 C_1 + C_1 F_2$ и для всякой точки D отрезка $A_1 A$, отличной от C_1, имеет место неравенство $u_1 < F_1D_1 + D_1F_2$. Отсюда следует, что эллипс, софокусный с Q, для которого сумма расстояний до F_1 и F_2, равна u, касается A_1A и притом в точке C_1. Аналогичное построение проделаем с отрезком AA_2. Найдем соответствующую точку C_2 и $u_2 = F_1C_2 + C_2F_2$. Заметим теперь, что $u_1 = u_2$ ввиду равенства треугольников B_1AF_2 и B_2AF_1. Следовательно, C_1 и C_2 лежат на одном эллипсе. Наше утверждение доказано. Гипербола появляется в том случае, когда угол A_1AA_2 лежит внутри угла F_1AF_2.

Пусть $\frac{x^2}{a^2-u} + \frac{y^2}{b^2-u} = 1$ есть уравнение софокусных с Q эллипсов и гипербол. Тогда для любого множества U те траектории бильярда, которые касаются софокусных кривых при $u \in U$, образуют инвариантное множество. Поэтому бильярд в эллипсе не эргодичен.

Пусть Q - произвольные выпуклая область, ограниченная кривой Γ.

Определение. Каустикой для данного бильярда в Q называется такая кривая γ, что траектория частицы после каждого отражения касается этой кривой.

Нахождение каустик важно для ряда асимптотических задач теории уравнений с частными производными. Недавно ленинградский математик В.Ф. Лазуткин доказал, что у выпуклых областей общего вида существует много каустик. Более того, мера множества линейных элементов, касающихся каустик, положительна и граница бильярда служит в естественном смысле точкой плотности этого множества.

Гораздо более простой является обратная задача: пусть задана выпуклая кривая γ. Найти все кривые Γ, для которых γ есть каустика. Студент Ереванского университета Минасян заметил, что такие кривые Γ образуют однопараметрическое семейство, и их можно получить следующим образом: пусть $s \geqslant \ell(\gamma)$, $\ell(\gamma)$ - длина γ. Тогда Γ состоит из всех таких точек q, что если из q провести отрезки, касающиеся γ и взять сумму длин этих отрезков и части кривой γ, заключенной между их концами, то она будет постоянна и равна s.

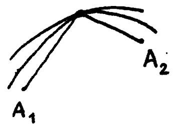
Периодической траекторией бильярда называется замкнутая ломаная в Q, которая может служить траекторией бильярда.

Теорема. Внутри выпуклой кривой всегда существует бесконечное число периодических бильярдных траекторий.

Теорема и ее доказательство, которое мы дадим, принадлежат Биркгофу.

Доказательство.

Для произвольного $n \geqslant 3$ мы построим периодическую траекторию, имеющую n вершин. Последующие рассуждения легко провести также и для случая $n = 2$. Пусть n фиксировано. Рассмотрим всевозможные выпуклые k-угольники Π_k, вписанные в кривую Γ, $k \leqslant n$. Через $f(\Pi_k)$ обозначим периметр многоугольника Π_k. Между любыми двумя k-угольниками, вписанными в Γ можно определить расстояние, например, как расстояние между множествами их вершин. Тогда множество всех Π_k есть компактное замкнутое полное метрическое пространство, а f - непрерывная функция на нем. Значит, на некотором k-угольнике $\Pi_k^{(0)}$ она достигает своего максимального значения: $f(\Pi_k^{(0)}) = \max\limits_{\Pi_k} f(\Pi_k)$. Докажем, что граница $\Pi_k^{(0)}$ будет периодической траекторией бильярда.



Пусть A_1 и A_2 - две соседние вершины многоугольника $\Pi_k^{(0)}$. Рассмотрим однопараметрическое семейство эллипсов, фокусы которых суть A_1 и A_2.

Пусть некоторый эллипс этого семейства $\mathcal{E}_1$ касается нашей кривой в какой-то точке $\mathcal{A}$. Такой эллипс найдется, так как наша кривая гладкая и выпуклая. Тогда ясно, что A_1A+AA_2 максимальна по всем точкам A, лежащим между A_1 и A_2 (так как для любой другой точки соответствующий ей эллипс пересекает нашу кривую и лежит строго внутри эллипса Θ_1). Известно, что если один из отрезков траектории бильярда в эллипсе проходит через его фокус F_1, то следующий отрезок траектории проходит через фокус F_2 и т.д.. Так как Θ_1 есть эллипс с фокусами A_1 и A_2, касающийся нашей кривой в точке A, то $A_1 A A_2$ есть траектория бильярда. Теорема Биркгофа доказана.

ЛЕКЦИЯ 11.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

Пусть T^2 - двумерный тор, (x, y) - координаты на T^2. Интересующая нас динамическая система - это однопараметрическая группа сдвигов по траекториям системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \qquad (1)$$

с плотностью инвариантной меры, равной $\rho(x, y)$ Предположим, что векторное поле системы (I) не имеет особых точек, т.е. $F_1^2 + F_2^2 > 0$ и что функции $F_1, F_2, \rho \in C^\infty$. Задача изучения таких систем возникает во многих вопросах, например, при изучении геодезических потоков на поверхностях вращения или поверхностях Лиувилля, где геодезический поток интегрируем. При фиксировании значения первого интеграла, в трехмерном пространстве линейных элементов выделяется двумерный тор, на котором геодезический поток индуцирует векторное поле рассматриваемого вида.

Теорема.
Существует бесконечно дифференцируемая замена переменных:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

на торе T^2 такая, что в новой системе координат траектории нашей системы (I) будут прямыми линиями, и система запишется в виде

$$\frac{du}{dt} = F$$
$$\frac{dv}{dt} = \gamma F.$$

где γ - число, а F - некоторая положительная функция. При доказательстве мы сделаем дополнительное допущение:

$$F_1(x, y) > 0 \quad , \quad (x, y) \in T^2.$$

Оно не существенно, но избавление от него требует определенного времени (см. К.Л. Зигель "Лекции по небесной механике"). Доказательство разобьем на отдельные пункты.

I. Существует такая замена времени, что для новой динамической системы меридиан $x = 0$ перейдет в меридиан $x = 1$ (т.е. в себя) за время $t = 1$.

Действительно, у системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{F_2}{F_1} \end{aligned} \qquad (2)$$

те же траектории, что и у системы (I), а время перехода каждой точки меридиана $x = 0$ на меридиан $x = 1$, очевидно, равно единице.

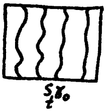
2. Будем иметь дело с системой (2).

После замены времени плотность инвариантной меры изменилась и стала равной (см. лекцию)

$$\rho_1(x, y) = \rho(x, y) \cdot F_1(x, y).$$

3. Пусть $\{S_t\}$ - однопараметрическая группа сдвигов вдоль траектории системы (2).

Применив S_t к меридиану $\gamma_0 = \{x = 0\}$, получим гладкое разбиение тора на меридианы $S_t\gamma_0,\ 0\le t\le 1$,

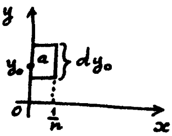


Рассмотрим окружность $\gamma_0 = \{(x,y): x=0\}$ и преобразование $T:\gamma_0\to\gamma_0$, где $Ty_0 = y_1$, если $S_1(0,y_0) = (1,y_1)$. Тогда T - диффеоморфизм окружности, обладающий гладкой инвариантной мерой с плотностью $\tau(y_0)$, причем из условия гладкости и инвариантности вытекает, что

$$\tau(y_0)\,dy_0 = \tau(Ty_0)\,T(dy_0) \qquad (*)$$

Покажем, что $\tau(y_0) = \rho_1(y_0, 0)$ Для этого надо показать, что $\rho_1(y_0, 0)$ удовлетворяет условию $(*)$.

Рассмотрим маленький прямоугольник a около точки y_0 со сторонами, параллельными осям координат и соответственно равными $\frac{1}{n}$ и dy_0



За единицу времени a перейдет в криволинейный параллелограмм a', причем из того, что S_t сохраняет меру, следует, что $\mu(a) = \mu(a')$. Но при малых dy_0 и $\frac{1}{n}$

$$\mu(a) = dy_0\cdot\frac{1}{n}\left(\rho_1(y_0,0)+o(1)\right)$$

и значит, $\mu(a') = T(dy_0)\frac{1}{n}\left(\rho_1(Ty_0,0)+o(1)\right)$, следовательно, $dy_0\,\rho_1(y_0,0) = Tdy_0\,\rho_1(Ty_0,0)$, $\rho_1(y_0,0)$ удовлетворяет условию $(*)$.

4. Для сохраняющего гладкую меру диффеоморфизма окружности T существует система координат, в которой T есть поворот.

Положим $V(y_1,y_2) = \int_{y_1}^{y_2}\tau(u)\,du$ и пусть $\alpha = \int_0^{T(0)}\tau(u)\,du$.

Тогда

$$v(0, Ty_0) = v(0, T(0)) + v(T(0), Ty_0) = \alpha + V(T(0, y_0)) = \\ = \alpha + v(0, y_0).$$

Приняв $v(0, y_0)$ за новую координату точки y_0, получаем что T - есть сдвиг на α в этой координате.

5. Построим систему координат, в которой система (2) - будет системой с постоянными коэффициентами.

Полагаем $u = x$. Пусть $v = v$ при $x = 0$

$$v(x, y) = v(0, y) + \alpha x, \quad \text{если} \quad (x, y) = S_x(0, y_0).$$

В новой системе координат (u, v) траектории - суть прямые линии. Следовательно, и траектории исходной системы - прямые линии.

Теорема I доказана.

Теорема I показывает, что можно ограничиться изучением систем вида

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha F(u, v) \end{aligned} \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда систему (3) можно привести к системе с постоянными коэффициентами надлежащей заменой переменных. Для того, чтобы получилась система с постоянными коэффициентами, достаточно, чтобы существовала замкнутая кривая γ, такая, что каждая ее точка возвращалась на эту кривую за одно и тоже время. Составим уравнение для кривой γ. Пусть v_0 - координата на меридиане $\{x = 0\}$, построена в п. 4, $\tau(v_0)$ - время движения точки $(0, v_0)$ до искомой кривой γ. Ясно, что функцию $\tau(v_0)$ можно рассматривать как задание кривой γ. Положим

$$t(v_0) = \int_0^1 \frac{du}{F(u,v)}$$

Тогда уравнение для $\tau(v_0)$ примет вид

$$t(v_0) - \tau(v_0) + \tau(v_0 + \alpha) = K \qquad (4)$$

Из уравнения (4) сразу видно, что $K = \int t(v_0)\,dv_0$. Разложим функции $t(v_0)$ и $\tau(v_0)$ в ряд Фурье. Заметим, что

$$t(v_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} t_k \, e^{2\pi i k v_0}, \quad t_0 = K$$

$$\tau(v_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tau_k \, e^{2\pi i k v_0}$$

Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\sum_{k \neq 0} \left(t_k - \tau_k + \tau_k e^{2\pi i k \alpha} \right) e^{2\pi i k v_0} \equiv 0 \qquad (4')$$

или

$$\tau_k = \frac{t_k}{1 - e^{2\pi i k \alpha}} .$$

Для существования функции τ необходимо, чтобы $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tau_k|^2 < \infty$ т.е. при рациональных α уравнение (4) заведомо неразрешимо. Рассмотрим вопрос о том, когда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tau_k|^2 < \infty$.

Назовем число α - нормально приближаемым рациональными числами, если: найдутся $C, \varepsilon > 0$, такие, что при любом целом q

$$\min_{p} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}},$$

где минимум берется по всем целым p.

Лемма. Нормально приближаемые числа α на отрезке $[0,1]$ образуют множество полной меры.

Действительно, фиксируя ε и C, имеем $\operatorname{mes}(A_q) \leq \frac{2C}{q^{1+\varepsilon}}$, где $A_q = \left\{\alpha : \min\limits_{p}\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}\right\}$,

$$\sum_{q} \operatorname{mes}(A_q) < \infty$$

Отсюда следует утверждение леммы с помощью леммы Бореля-Кантелли.

Оценим τ_k для α, при условии что α - нормально приближаемо.

В силу наших оценок имеем: $\frac{1}{k^2} \geq \left|\alpha - \frac{n}{k}\right| \geq \frac{C}{k^{2+\varepsilon}}$

или $\frac{1}{k} \geq |k\alpha - n| \geq \frac{C}{k^{1+\varepsilon}}$, значит $\left|1 - e^{2\pi i k\alpha}\right| \geq \frac{C_1}{k^{1+\varepsilon}}$;

откуда заключаем, что $|\tau_k| < \frac{|t_k|}{C_1} \cdot k^{1+\varepsilon}$.

Теорема.

Если $t(v_0) \in C^{\infty}$, а α - нормально приближаемо, то уравнение (4) разрешимо, причем $\tau(v_0) \in C^\infty$.

Доказательство.

Так как $t(v_0) \in C^\infty$, то $\frac{d^r t}{dv_0^r} = \sum_k (2\pi i k)^r t_k e^{2\pi i k v_0}$,

причем $|t_k| \le \frac{\mathcal{D}_r}{(2\pi)^r \cdot k^r}$, где $\mathcal{D}_r = \max_{v_0 \in [0,1]} \left| \frac{d^r t(v_0)}{d v_0^r} \right|$.

Но тогда $|\tau_k| \le |t_k| \cdot \frac{k^{1+\varepsilon}}{C_1} \le \frac{\mathcal{D}_r}{(2\pi)^r \cdot C_1 \cdot k^{r-1-\varepsilon}}$,

и $\tau(v_0) \in C^\infty$. Теорема доказана.

Получив $\tau(v_0)$, можно гладкой заменой отобразить ее на меридиан $x = 0$, а затем, применив пункты 2, 3, 4 теоремы I привести систему к виду

$$\frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Наши рассмотрения следовали, в основном, работе А.Н.Колмогорова "О динамических системах с интегральным инвариантом на торе", ДАН, т.93. 763-766 (1953) и книге

S. Sternberg'а „Celestial Mechanics", Part I.

ЛЕКЦИЯ 12.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем, т.е. последовательность случайных величин

$$\ldots \xi_{-n}, \xi_{-n+1}, \ldots, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots = \{\xi_i\}_{-\infty}^{\infty},$$

где ξ_i есть результат наблюдения над случайным объектом в момент времени i, $-\infty < i < \infty$. В соответствии с традицией, принятой в теории вероятностей, через Ω мы будем обозначать пространство всех возможных реализаций случайного процесса. Пусть задано распределение вероятностей случайного процесса, т.е. определены всевозможные вероятности вида $P\{\xi_{i_1} \in A_1, \xi_{i_2} \in A_2, \ldots, \xi_{i_r} \in A_r\}$, где A_j - произвольные измеримые множества.

Рассмотрим преобразование T, заданное в пространстве Ω, которое состоит в следующем: если $\xi = \{\xi_i\}_{-\infty}^{\infty}$ есть реализация нашего процесса, то $T\xi = \xi' = \{\xi'_i\}_{-\infty}^{\infty}$, где $\xi'_i = \xi_{i+1}$, т.е. есть сдвинутая реализация. Для того, чтобы T было объектом изучения эргодической теории, необходимо, чтобы T сохраняло исходное распределение вероятностей: так как $T^s\{\xi_{i_1} \in A_1, \ldots, \xi_{i_r} \in A_r\} = \{\xi_{i_1-s} \in A_1, \ldots, \xi_{i_r-s} \in A_r\}$, то это означает, что $P\{\xi_{i_1-s} \in A_1, \ldots, \xi_{i_r-s} \in A_r\}$ не должно зависеть от s. Процессы, для которых выполнено последнее условие, называются стационарными в узком смысле случайными процессами.

Пример I. Автоморфизм Бернулли.

Если все ξ_i независимы, то сдвиг T называется сдвигом Бернулли или автоморфизмом Бернулли. Стационарность в узком смысле сводится к тому, что все случайные величины ξ_i одинаково распределены.

Пример 2. Автоморфизм Маркова.

Если ξ_i суть случайные величины, образующие конечную цепь Маркова: $\xi_i \in E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$,

$P = \| p_{ij} \|$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$ - матрица вероятностей перехода и стационарное распределение, т.е.

$\pi = \pi P$,

то сдвиг T называется автоморфизмом Маркова.

Пример 3. Автоморфизм Гаусса (нормальный автоморфизм).

Если случайные величины ξ_i имеют совместное гауссовское распределение, то T называется гауссовским (или нормальным) автоморфизмом. Как известно, распределение Гаусса однозначно определяется своими моментами первых двух порядков

$$a_i = \mathcal{M} \xi_i = \int \xi_i(\omega)\, dP(\omega)$$

$$b_{ij} = \mathcal{M}(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j) = \int (\xi_i(\omega) - a_i)(\xi_j(\omega) - a_j)\, dP(\omega).$$

Из того, что T сохраняет меру, легко вытекает

$$a_i = const \quad (\text{т.е. } \mathcal{M}\xi_i = \mathcal{M}\xi_j),$$

$$b_{ij} = f(|i-j|).$$

Иными словами стационарная гауссовская мера задается двумя параметрами: числом a и последовательностью $\{b(\tau)\}$. Последовательность $\{b(\tau)\}$ положительно определена, поэтому по теореме Бохнера - Хинчина, числа $b(\tau)$ могут быть представлены как коэффициенты Фурье некоторой конечной меры σ на окружности:

$$b(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\tau}\, d\sigma(\lambda).$$

Обратно, по всякому числу a и мере σ на окружности можно построить гауссовский стационарный процесс.

Докажем теперь эргодичность автоморфизма Бернулли.

Теорема. Автоморфизм Бернулли эргодичен.

Доказательство

Пусть A - инвариантное $\bmod 0$ множество положительной меры. Это означает, что для всех натуральных n $\mu(T^n A \Delta A) = 0$. Пусть $\mu(A) < 1$. Приведем это предположение к противоречию.

I⁰. Множество A как всякое измеримое множество можно аппроксимировать объединением конечного числа конечномерных цилиндров. Точнее, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется множество A_ε такое, что $A_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ (A_i есть цилиндр, зависящий от конечного числа координат) и

$$\mu(A_\varepsilon \,\Delta\, A) < \varepsilon.$$

Обозначим через $n(\varepsilon)$ расстояние от нулевой координаты до самой дальней из тех, от которых зависит множество A_ε (или, что то же, хотя бы одно из A_i). Тогда множество $T^{2n(\varepsilon)+1} A_\varepsilon$ определяется значениями координат в пределах $-3n(\varepsilon)-1 \le i \le -n(\varepsilon)-1$. В силу определения меры Бернулли множества A_ε и $T^{2n(\varepsilon)+1} A_\varepsilon$ независимы и поэтому

$$P(A_\varepsilon \cap T^{2n(\varepsilon)+1} A_\varepsilon) = P^2(A_\varepsilon)$$

Далее имеем:

$$
\begin{aligned}
&\left| P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} A_\varepsilon \cap A_\varepsilon\right) - P(A) \right| \leq \\
&\leq \left| P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} A_\varepsilon \cap A_\varepsilon\right) - P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} A \cap A_\varepsilon\right) \right| + \\
&+ \left| P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} A \cap A_\varepsilon\right) - P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} A \cap A\right) \right| \leq \\
&\leq P\left(T^{2n(\varepsilon)+1} (A_\varepsilon \triangle A)\right) + P(A_\varepsilon \triangle A) \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

$$\left| P(A) - P^2(A_\varepsilon) \right| \leq 2\varepsilon,$$

$$\left| P^2(A) - P^2(A_\varepsilon) \right| \leq 2\varepsilon$$

Поэтому $|P(A) - P^2(A)| \leq 4\varepsilon$ или, ввиду произвольности ε, $P(A) = P^2(A)$, т.е. $P(A) = 1, 0$, что и завершает доказательство.

Автоморфизмы Маркова.

Рассмотрим цепи Маркова с конечным числом состояний. Стационарное распределение вероятностей каждой такой цепи определяется стохастической матрицей $P = \|p_{ij}\|$ и вектором стационарных вероятностей $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$.

Напомним хорошо известную классификацию состояний конечных цепей Маркова (см., например, Феллер "Введение в теорию вероятностей и ее приложения", т. I). Каждая цепь Маркова распадается на классы сообщающихся состояний. Каждый такой класс имеет некоторое число d циклических подклассов (это число называется периодом класса). Кроме того, цепь Маркова может иметь такие состояния, из которых можно выйти, но нельзя вернуться (они называются несущественными или невозвратными состояниями). Если есть несколько классов, то стационарное распределение не единственно, а если цепь Маркова состоит только из одного класса, то единственно. В стационарном случае вероятность несущественного состояния равна нулю.

Необходимое и достаточное условие эргодичности автоморфизма Маркова состоит в том, что цепь Маркова состоит ровно из одного класса.

Если $d = 1$, то автоморфизм Маркова обладает перемешиванием, а если $d > 1$, то перемешивания нет. Таким образом, с точки зрения эргодической теории идеальным случаем является цепь, состоящая ровно из одного класса и одного подкласса. Как известно, это имеет место тогда и только тогда, когда все элементы некоторой степени матрицы переходных вероятностей строго положительны. Покажем теперь, что марковские автоморфизмы могут возникать из задач совсем невероятностного характера.

Автоморфизмы двумерного тора и автоморфизмы Маркова.

Мы расскажем сейчас об одной конструкции Адлера и Вейсса. Пусть $M = T^2$ есть двумерный тор, рассматриваемый как абелева группа по сложению. Под автоморфизмом тора мы будем понимать автоморфизм тора как абелевой группы.

В таком случае, преобразование T представляет собой линейное преобразование с матрицей $T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Для того чтобы

T было преобразованием тора, необходимо, чтобы точки плоскости, координаты которых отличаются на целое число, переходили в точки, координаты которых отличаются на целое число. Отсюда следует, что a, b, c, d должны быть целыми числами. Из требования инвариантности меры получаем $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$.

Преобразование T имеет два собственных значения. Если они комплексные, то они являются сопряженными и каждое из них по модулю равно I (так как их произведение равно $\pm$ I). В этом случае нетрудно показать, что T не эргодично. Мы будем рассматривать случай, когда λ_1 и λ_2 вещественны. Обозначим соответствующие им собственные векторы e_1, e_2 и пусть для определенности

$$|\lambda_1| > 1 , \quad |\lambda_2| < 1 .$$

Рассмотрим разбиение тора на множества

$$\xi = \{ A_1, A_2, \dots, A_r \},$$

так что $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = M \mod 0$, $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, если $i \neq j$. Построим стандартное для эргодической теории отображение M в пространство последовательностей из r символов (Ω_r).

Пусть $x \in M$ - произвольная точка тора и пусть точка $T^s x \in A_{i_s}$ (s -я степень преобразования T, примененная к точке x, лежит в множестве A_{i_s}). Определим отображение $\varphi : M \to \Omega_r$, полагая

$$\varphi(x) = \{ i_s, -\infty < s < \infty \}.$$

Отображение φ индуцирует меру в пространстве Ω_r: для любого множества C из Ω_r

$$P(C) = \mu(\varphi^{-1}(C)).$$

Так как $\varphi(Tx) = T\varphi(x)$, то, если T обозначает также сдвиг в Ω_r, то

$$P(TC) = \mu(\varphi^{-1}(TC)) = \mu(T\varphi^{-1}(C)) = \mu(\varphi^{-1}(C)) = P(C).$$

Это значит, что возникающая мера P стационарна в Ω_r.

Естественно возникает вопрос: каков запас случайных процессов, которые можно получить из преобразования T (беря разные разбиения ξ) ? Мы покажем, что в случае автоморфизма тора можно выбрать такое разбиение, что соответствующая мера будет марковской.

Пусть каждое из множеств A_i есть параллелограмм, стороны которого параллельны векторам e_1 и e_2.

Стороны, параллельные e_1, будем называть расширяющейся границей параллелограмма, а стороны, параллельные e_2, будем называть его сжимающейся границей (обозначаются, соответственно, $\gamma^{(p)}(A_i)$ и $\gamma^{(c)}(A_i)$).

Сжимающейся границей разбиения ξ называется объединение сжимающихся границ всех параллелограммов A_i. Аналогично определяется расширяющаяся граница разбинения ξ. (обозначения $\gamma^{(c)}(\xi)$ и $\gamma^{(p)}(\xi)$).

$T\xi$ тоже разбиение M на множества TA_i, которые будут параллелограммами такого же вида.

Определение. Разбиение ξ называется марковским, если

1) $\gamma^{(c)}(T\xi) \subseteq \gamma^{(c)}(\xi)$;

2) $\gamma^{(p)}(T\xi) \supseteq \gamma^{(p)}(\xi)$.

Теорема. Если ξ - марковское разбиение, то индуцированная мера в пространстве последовательностей есть мера, отвечающая цепи Маркова.

Доказательство

Пусть A_{i_0} - параллелограмм. Тогда условие марковости означает, что всякое пересечение $A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n}A_{i_n}$ есть, по-прежнему, параллелограмм или несколько параллелограммов, лежащих внутри A_{i_0}. Существенно при этом, что одна пара сторон каждого из параллелограммов, лежащего внутри $\mathcal{A}_{i_0}$, лежит на соответствующей паре сторон $\mathcal{A}_{i_0}$. Параллелограмм $T\mathcal{A}_{i_{-1}}$ вытягивается в другом направлении и $\mathcal{A}_{i_0} \cap T\mathcal{A}_{i_{-1}}$ есть объединение нескольких параллелограммов, у каждого из которых одна пара сторон лежит на другой паре противоположных сторон параллелограмма $\mathcal{A}_{i_0}$. Отсюда следует, что условная вероятность

$$\mu(T\mathcal{A}_{i_{-1}} \mid \mathcal{A}_{i_0} \cap T^{-1}\mathcal{A}_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n}\mathcal{A}_{i_n}) =$$

$$= \frac{\mu(T\mathcal{A}_{i_{-1}} \cap \mathcal{A}_{i_0} \cap T^{-1}\mathcal{A}_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n}\mathcal{A}_{i_n})}{\mu(\mathcal{A}_{i_0} \cap T^{-1}\mathcal{A}_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n}\mathcal{A}_{i_n})} =$$

$$= \frac{\mu(T\mathcal{A}_{i_{-1}} \cap \mathcal{A}_{i_0})}{\mu(\mathcal{A}_{i_0})} = \mu(T\mathcal{A}_{i_{-1}} \mid \mathcal{A}_{i_0}),$$

что и требовалось

доказать.

Введем новое важное понятие.

Пусть $\mathcal{M}$ - измеримое пространство, на котором задана мера μ, и пусть T взаимно-однозначное сохраняющее меру преобразование этого пространства. Рассмотрим разбиение ξ пространства $\mathcal{M}$:

$$\xi = (C_1, C_2, \ldots, C_r),$$

$$\mu(C_i \cap C_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{r} C_i = \mathcal{M} \bmod 0.$$

Определение. Разбиение ξ называется образующей для преобразования T, если наименьшая замкнутая σ-алгебра, содержащая все множества $T^k C_i$, $-\infty < k < \infty$, $i = 1, \ldots, r$, совпадает с σ- алгеброй всех измеримых множеств M.

Пусть M есть пространство Лебега с непрерывной мерой, т.е. пространство, допускающее изоморфное $\bmod 0$ отображение на отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. Пространства Лебега обладают следующим свойством.

Пусть дана система подмножеств $\{B_1, B_2, \ldots\}$ пространства M. Она образует счетное всюду плотное множество σ- алгебры измеримых множеств пространства Лебега тогда и только тогда, когда из пространства Лебега можно выбросить множество N меры нуль так, что для любых двух точек x и y из $M - N$ найдется множество B_i, при котором имеет место следующая альтернатива: либо

$$x_i \in B_i, \; y_i \notin B_i, \quad \text{либо} \quad x_i \notin B_i, \; y_i \in B_i.$$

Доказательство можно найти в статье В. Рохлина "Основные понятия теории меры" (Математический сборник, т. 25, 1949 г.).

Пусть $\xi = (A_1, \ldots, A_r)$ - марковское разбиение для автоморфизма тора T.

Лемма. Если всевозможные пересечения $G = T^{-k} A_{i_k} \cap \ldots \cap T^{\ell} A_{i_\ell}$, $k > 0$, $\ell > 0$, связны, то разбиение ξ будет образующей для T.

Доказательство.

Из того, что ξ - марковское разбиение, следует, как уже объяснялось выше, что каждое пересечение G представляет собой параллелограмм. Опять-таки, в силу марковского свойства $\gamma^{(p)}(G) = \lambda_1^k \gamma^{(p)}(A_{i_k})$, $\gamma^{(e)}(G) = \lambda_2^{\ell} \gamma^{(e)}(A_{i_{-\ell}})$. Отсюда следует, что $\operatorname{diam} G$ стремится к нулю, когда k, ℓ

стремятся к бесконечности. Пусть

$$N = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(T^n \left(\gamma^{(p)}(A_i) \cup \gamma^{(c)}(A_i) \right) \right).$$

Тогда, если x, y принадлежат $\mathcal{M} - \mathcal{N}$, то найдется такое G, что $diam\,(T^{-k} A_{i_{-k}} \cap \ldots \cap T^k A_{i_k}) < d(x,y)$, где $x \in T^{-k} A_{i_{-k}} \cap \ldots \cap T^k A_{i_k}$. Лемма доказана.

Теперь мы построим одно из марковских разбиений.

Пусть T - автоморфизм двумерного тора $\mathcal{M}$. У него всегда есть неподвижная точка - точка O. Пусть e_1 и e_2 - расширяющийся и сжимающийся собственные векторы преобразования T, и $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ - бесконечные прямые на торе, проходящие через e_1 и e_2 соответственно. Всякий отрезок $\ell^{(1)}$ прямой $\gamma^{(1)}$, содержащий точку O внутри себя, обладает тем свойством, что $T\ell^{(1)} \supset \ell^{(1)}$. Аналогичным образом, для отрезка $\ell^{(2)}$ на прямой $\gamma^{(2)}$, содержащего точку O, имеем $T\ell^{(2)} \subset \ell^{(2)}$.

Мы построим теперь разбиение ξ тора M на два параллелограмма, причем границей $\gamma^{(p)}(\xi)$ будет отрезок $\ell^{(1)} \in \gamma^{(1)}$, содержащий точку O, и, аналогично, $\gamma^{(c)}(\xi)$ будет отрезок прямой $\gamma^{(2)}$, содержащий точку O. В силу сказанного выше, всякое разбиение ξ на такие множества будет марковским.

Возьмем произвольный отрезок d_1, выходящий из точки O в направлении $\ell^{(1)}$ (рис. I). Проведем из точки O в направлении e_2 отрезок d_2 до пересечения с d_1 (рис. 2). Продолжим теперь d_1 до пересечения с d_2 и этот отрезок обозначим d_3 (рис. 3). Продолжим d_3 в противоположном от точки O направлении до пересечения с d_2.

Весь полученный отрезок, лежащий на $\gamma^{(1)}$, обозначим d_4 (рис. 4)

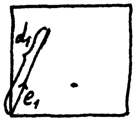


рис. 1

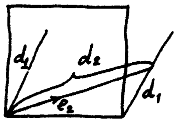


рис. 2

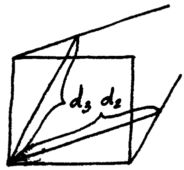


рис. 3

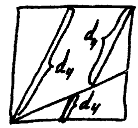


рис. 4

На рисунке 5 заштрихован один из параллелограммов полученного разбиения

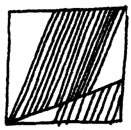


рис. 5

Марковское разбиение ξ, которое мы построили выше, вообще говоря, может не быть образующим (и, как правило, не будет). Однако образующее марковское разбиение легко получить следующим образом.

Рассмотрим разбиение ξ_1, элементы которого имеют вид вид $A_i \cap TA_j$. Элементы этого разбиения могут быть несвязны. Введем разбиение η, элементы которого представляют собой связные компоненты разбиения ξ_1. Разбиение η снова будет марковским, а все соответствующие пересечения будут связны. Поэтому разбиение η будет образующей для T.

В абстрактной эргодической теории вводится понятие изоморфизма двух сохраняющих меру преобразований, а именно: пусть T_1 - сохраняющее меру, взаимно однозначное $(\mathrm{mod}\, 0)$ преобразование пространства M_1, а T_2 - сохраняющее меру, взаимно однозначное $(\mathrm{mod}\, 0)$ преобразование пространства M_2. Тогда T_1 и T_2 называются изоморфными $(\mathrm{mod}\, 0)$, если существует такое изоморфное $(\mathrm{mod}\, 0)$ взаимно однозначное $(\mathrm{mod}\, 0)$ отображение U пространства M_1 на пространство M_2, при котором

$$U_{\#} T_1 = T_2 U \pmod 0, \quad T_1 U^{-1} = U^{-1} T_2 \pmod 0$$

Слова $\bmod 0$ означают всюду, что равенства становятся точными, если из соответствующих пространств выбросить множества меры нуль.

Доказанное выше утверждение можно теперь сформулировать теперь следующим образом: автоморфизм тора изоморфен $(\bmod 0)$ автоморфизму Маркова.

ЛЕКЦИЯ 13

ГАУССОВСКИЕ СИСТЕМЫ

Пусть Ω - пространство бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \{\omega_i\}_{-\infty}^{\infty}$, где отдельная координата $\omega_i \in R^1$

Пространство таких последовательностей встречается в теории вероятностей как пространство элементарных событий вещественнозначного случайного процесса.

Допустим, что в пространстве Ω задана вероятностная мера μ. Такая мера называется гауссовской, если любое конечное подмножество из множества случайных величин $(\dots \xi_{-n}, \dots, \xi_0, \dots, \xi_n \dots)$ имеет в качестве совместного распределения многомерное гауссовское распределение.

Как известно, всякое гауссовское распределение задается своими двумя первыми моментами: функцией одного переменного m_i, где $m_i = \mathcal{M}\xi_i$, и функцией двух переменных $b(s,t)$, где $b(s,t) = \mathcal{M}(\xi_s - m_s)(\xi_t - m_t)$

Рассмотрим в Ω преобразование сдвига T:

$$T\omega = \omega', \qquad \omega'_i = \omega_{i+1}.$$

Ясно, что это преобразование измеримо, т.е. переводит измеримое множество в измеримое. В случае гауссовской меры нетрудно проверить, что для инвариантности меры μ необходимо и достаточно, чтобы $m_i = m = const$, а $b(s,t) = b(s-t)$. При этом функция одного переменного $b(s)$ - положительна определенная функция и, таким образом, по теореме Бохнера - Хинчина $b(s) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda s} d\sigma(\lambda)$, где σ - конечная мера на S^1 ,инвариантная относительно преобразования $z \to \bar{z}$. Мера σ - называется спектральной мерой гауссовского процесса.

Определение. Преобразование T с инвариантной гауссовской мерой μ называется автоморфизмом Гаусса.

Так как мера μ - однозначно определяется m и мерой σ, то ясно, что все эргодические свойства автоморфизма Гаусса могут быть выражены через эти параметры. От m эти свойства не должны зависеть, так как сдвиг начала отсчета $\Omega \xrightarrow{\Pi} \Omega$, $\Pi(\omega) = \{\omega_i - m\}$, переводит гауссовскую меру с параметрами m, σ в гауссовскую меру $0, \sigma$.

В дальнейшем всюду считается, что $m = 0$.

Теорема (Фомин, Маруяма)

I Преобразование T эргодично тогда и только тогда, когда мера σ - непрерывна.

П Преобразование T обладает перемешиванием тогда и только тогда, когда $b(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Следствие. Если мера σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $d\sigma(\lambda) = r(\lambda)\,d\lambda$, то T - обладает перемешиванием.

Это вытекает из теоремы Римана-Лебега, согласно которой коэффициенты Фурье интегрируемой функции стремятся к нулю.

Доказательство I.

Необходимость нашего условия установить просто.

Рассмотрим в $\mathcal{L}^2_\mu(\Omega)$ последовательность функций $f_i(\omega) \equiv \omega_i$, $-\infty < i < \infty$. Ясно, что $f_i(\omega) = \mathcal{U}^i f_0$, где $\mathcal{U}$ - унитарный оператор, порожденный гауссовским сдвигом T.

Образуем линейное пространство H_1, являющееся замыканием всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum_s c_s f_s$, где $c_s \in \mathbb{C}$. Ясно, что $\mathcal{U} H_1 = H_1$ и любая случайная величина $h \in H_1$ имеет гауссовское распределение.

Сейчас мы получим для подпространства H_1 более удобное описание.

Сопоставим каждой линейной комбинации $\sum c_s f_s$ тригонометрический полином $\sum c_s e^{i\lambda s} = P(\lambda)$. Если ввести в пространстве полиномов $P(\lambda)$ скалярное произведение по формуле $(P_1, P_2) = \int_0^{2\pi} P_1 \bar{P}_2 \, d\sigma(\lambda)$, то построенное нами соответствие будет линейным изометрическим отображением, и поэтому может быть продолжено по непрерывности на соответствующие замыкания. Замыканием линейных комбинаций $\sum c_s f_s$ служит пространство H_1, замыканием тригонометрических полиномов служит $L^2_\sigma(S^1)$.

Построенное отображение H_1 на $L^2_\sigma(S^1)$ обозначим α.

Основное свойство отображения α вытекает из соотношения $\alpha \mathcal{U} = e^{i\lambda}\alpha$ или подробнее

$$\alpha(\mathcal{U}h) = \alpha(\mathcal{U}\sum_s c_s f_s) =$$

$$= \alpha\left(\sum c_s f_{s+1}\right) = e^{i\lambda}\alpha(h)$$

для любого $h \in H_1$.

Пусть существует точка λ_0, для которой $\sigma(\lambda_0) > 0$.

Рассмотрим элемент Гильбертова пространства H_1, отвечающий функции $\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda = \lambda_0 \\ 0 & \lambda \neq \lambda_0 \end{cases}$. Так как

$$\int |\varphi(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda_0) > 0,$$

то $\|h\|^2 = \sigma(\lambda_0)$. Так как $e^{i\lambda}\varphi(\lambda) = e^{i\lambda_0}\varphi(\lambda)$, то $\mathcal{U}h = e^{i\lambda_0}h$.

Отсюда следует, что $|h(\omega)|$ является инвариантной функцией. Действительно

$$\mathcal{U}|h(\omega)| = |h(T\omega)| = |e^{i\lambda_0}h(\omega)| = |h(\omega)|.$$

Но $\|h(\omega)\| > 0$ и h - гауссовски распределенная случайная величина. Поэтому $|h(\omega)|$ не является константой, и, следовательно, T - неэргодично.

Доказательство достаточности I опирается на важную теорию Ито кратных стохастических интегралов.

Один из результатов этой теории состоит в том, что гильбертово пространство $\mathcal{L}^2_\mu(\Omega)$ может быть разложено в ортогональную прямую сумму подпространств $H_{n,m}$, где каждое пространство $H_{n,m}$ изоморфно пространству $(n+m)$- мерных функций $\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n;\lambda'_1,\dots,\lambda'_m)$, определенных на $(n+m)$- мерном торе, и квадратично интегрируемых по мере $\underbrace{\sigma\times\sigma\times\dots\times\sigma}_{n+m}$, четных по каждой переменной и симметричных по каждой из групп переменных $\lambda_1,\dots,\lambda_n;\ \lambda'_1,\dots,\lambda'_m$ в отдельности. Весьма существенно, что оператор U при этом изоморфизме переходит в оператор умножения на $\exp[i(\lambda_1+\dots+\lambda_n-\lambda'_1-\dots-\lambda'_m)]$. Тем самым, каждое пространство $H_{n,m}$ инвариантно относительно U.

Пользуясь этими фактами, докажем достаточность I.

Пусть T - неэргодично, т.е. существует инвариантная, отличная от константы функция h. Одна из ее проекций на пространства $H_{m,n}$ $(m+n>0)$ должна быть отлична от нуля. Каждая проекция $h_{n,m}$ - будет снова инвариантной функцией (Докажите!).

Пусть $\varphi_{n,m}$ отвечает $h_{n,m}$ при описанном выше изоморфизме. Условие инвариантности $h_{n,m}$ означает, что

$$e^{i(\lambda_1+\dots+\lambda_n-\lambda'_1-\dots-\lambda'_m)}\varphi_{n,m}=\varphi_{n,m}$$

почти всюду по мере $\underbrace{\sigma\times\dots\times\sigma}_{n+m}$. Отсюда следует, что $\varphi_{n,m}\neq 0$ лишь на гиперплоскости $\lambda_1+\dots+\lambda_n-\lambda'_1-\dots-\lambda'_m=0$.

Но так как мера σ непрерывна, то мера этой гиперплоскости равна 0. Таким образом, $\varphi_{n,m}=0$ почти всюду для всех (n,m).

Утверждение I доказано полностью.

Прежде чем доказывать утверждение II, опишем конструкцию Ито (для комплексной гауссовской системы).

Запишем спектральное представление для гауссовской стационарной последовательности

$$x(t) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda t}\, dF(\lambda).$$

Для каждого борелевского подмножества Λ отрезка $[0, 2\pi]$ величина $F(\Lambda)$ представляет собой гауссовскую случайную величину со средним 0 и дисперсией $\sigma(\Lambda)$. Кроме того, для непересекающихся множеств Λ_1 и Λ_2 случайные величины $F(\Lambda_1)$ и $F(\Lambda_2)$ - взаимно независимы.

Линейное пространство H_1 можно представлять себе как пространство одномерных стохастических интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\lambda)\, dF(\lambda).$$

Естественным обобщением одномерного стохастического интеграла должен служить многомерный стохастический интеграл вида

$$\int \varphi(\lambda_1 \dots \lambda_n ; \lambda'_1 \dots \lambda'_m)\, dF(\lambda_1) \dots dF(\lambda_n)\, \overline{dF(\lambda'_1)} \dots \overline{dF(\lambda'_m)}.$$

Однако корректное определение такого интеграла надо вводить с некоторыми предосторожностями. Если φ_1 и φ_2 отличаются лишь перестановкой аргументов λ или λ', то результат интегрирования должен давать одну и ту же случайную величину. Отсюда следует, что уже с самого начала надо рассматривать только функции, симметрические как относительно λ, так и относительно λ'.

Другое, более существенное обстоятельство, заключается в стохастическом характере случайной меры F.

Следующие, нестрогие, рассуждения должны помочь читателю уяснить суть дела.

Рассмотрим выражение $dF(\lambda_1)\ldots dF(\lambda_k)\cdot\overline{dF(\lambda'_1)}\ldots$ $\ldots\overline{dF(\lambda'_\ell)}$ и допустим, что к нему можно применить преобразование $\mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}\,dF(\lambda_k) = e^{i\lambda_k}\,dF(\lambda_k)$,

$\mathcal{U}\,\overline{dF(\lambda'_\ell)} = e^{-i\lambda'_\ell}\,\overline{dF(\lambda'_\ell)}$ и оператор $\mathcal{U}$ - мультипликативный, то

$$\mathcal{U}\left(dF(\lambda_1)\cdot\ldots\cdot dF(\lambda_k)\,\overline{dF(\lambda'_1)}\cdot\ldots\cdot\overline{dF(\lambda'_\ell)}\right) =$$

$$= e^{i\left(\sum\limits_{s=1}^{k}\lambda_s - \sum\limits_{s=1}^{\ell}\lambda'_s\right)}\,dF(\lambda_1)\cdot\ldots\cdot dF(\lambda_k)\cdot\overline{dF(\lambda'_1)}\cdot\ldots$$

$$\overline{dF(\lambda'_\ell)}.$$

Если $\sum\limits_{s=1}^{k}\lambda_s - \sum\limits_{s=1}^{\ell}\lambda'_s = 0$, то это означает, что

$$dF(\lambda_1)\cdot\ldots\cdot dF(\lambda_k)\,\overline{dF(\lambda'_1)}\cdot\ldots\cdot\overline{dF(\lambda'_\ell)} -$$

— Инвариантная функция оператора $\mathcal{U}$. В эргодическом случае всякая инвариантная функция равна своему математическому ожиданию. В гауссовском случае это математическое ожидание отлично от нуля лишь в случае $k=\ell$ и сосредоточено на подпространствах $\lambda_1 = \lambda'_{i_1}$, $\lambda_2 = \lambda'_{i_2}$, $\ldots$, $\lambda_k = \lambda'_{i_k}$.

В этом случае надо положить

$$dF(\lambda_1)\cdot\ldots\cdot dF(\lambda_k)\,\overline{dF(\lambda'_1)}\cdot\ldots\cdot\overline{dF(\lambda'_k)} = \prod_{i=1}^{k}|dF(\lambda_i)|^2 = \prod_{i=1}^{k}d\sigma(\lambda_i).$$

Поэтому при определении настоящего стохастического интеграла необходимо выбрасывать из областей интегрирования всевозможные подпространства $\lambda_i = \lambda'_j$. Подробное построение можно найти в статье Ито

„Complex Multiple Wiener Integral", Japan J. Math., 22, 63-86, 1949.

Помимо корректного построения многомерных стохастических интегралов в этой статье содержится доказательство того, что линейные комбинации кратных стохастических интегралов образуют всюду плотное множество, в $\mathcal{L}^2_\mu(\Omega)$.

Каждое пространство $H_{n,m}$ и есть пространство стохастических интегралов вида

$$\int \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n ; \lambda'_1, \dots, \lambda'_m)\, dF(\lambda_1) \dots dF(\lambda_n)\, \overline{dF(\lambda'_1)} \dots \overline{dF(\lambda'_m)}.$$

Мы описали конструкцию Ито для комплексной гауссовской системы. Для действительной гауссовской системы при построении стохастического интеграла необходимо сузить запас функций, используя только функции $\varphi(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, удовлетворяющие соотношению:

$$\varphi(\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}, -\lambda_i, \lambda_{i+1} \dots \lambda_n) = \overline{\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

при всех i, $1 \leq i \leq n$.

Перейдем к доказательству условия П

Как и ранее, для доказательства перемешивания достаточно показать, что $(U^k h, h) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех h, таких, что $M h = (h, 1) = 0$. Поэтому, если перемешивание есть, то для функции $h = \omega_0$

$$b(s) = M \omega_{s} \cdot \omega_0 \to M\omega_0 \cdot M\omega_0 = 0,$$

т.е. наше условие необходимо. Для доказательства достаточности рассмотрим проекцию h на подпространство $H_{n,m}$.

Так как

$$(U^s h_{n,m},\ h_{n,m}) = \int_0^{2\pi} e^{is(\sum\lambda_i - \sum\lambda'_j)} |\varphi(\lambda_1\ldots\lambda_n;\lambda'_1\ldots\lambda'_m)|^2 \cdot d\sigma(\lambda_1)\ldots d\sigma(\lambda_n)\, d\sigma(\lambda'_1)\ldots d\sigma(\lambda'_m)$$

а $b(s) = \int_0^{2\pi} e^{is\lambda} d\sigma(\lambda) \to 0,$ при $s\to\infty$ по предположению, то в силу обобщенной теоремы Римана-Лебега $(U^s h_{n,m}, h_{n,m}) \to 0$ при $s\to\infty$. Это утверждение верно для любых $h_{n,m}$.

Утверждение П доказано полностью.

ЛЕКЦИЯ I4. Энтропия динамической системы.

Каждой динамической системе можно сопоставить некоторое число (возможно, равное бесконечности), называемое ее энтропией. Понятие энтропии было введено в эргодическую теорию А.Н. Колмогоровым в 1959 году. Самым удивительным оказывается то, что очень часто в тех случаях, когда энтропия положительна, динамические системы обладают целым рядом дополнительных сильных статистических свойств.

Слово "энтропия" в математике и физике употребляется во многих смыслах. В равновесной статистической физике под энтропией понимают коэффициент при асимптотике логарифма числа конфигураций, обладающих теми или иными свойствами, когда число степеней свойства стремится к бесконечности. Если пользоваться этим представлением об энтропии, то энтропию, встречающуюся в эргодической теории, естественно назвать динамической: она служит коэффициентом при асимптотике логарифма числа различных типов траекторий динамической системы, когда время стремится к бесконечности.

Чтобы дать более точные определения, необходимо начать с энтропии разбиений и ее простейших свойств.

Через $(\mathcal{M}, \gamma, \mu, T)$ мы будем обозначать динамическую систему, $\alpha = \{A_i\}, i \in I$, $\beta = \{B_j\}, j \in J$ будут конечными или счетными разбиениями $\mathcal{M}$. Обозначим

$$z(x) = \begin{cases} -x \ln x, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Под $\ln$ мы всегда будем понимать натуральный логарифм, $z(x)$ - непрерывная, выпуклая вверх функция на $[0, 1]$.

Определение 1. Энтропия $H(\alpha)$ разбиения α равна

$$H(\alpha) = -\sum_{i \in I} z(\mu(A_i)).$$

Упражнение. Если $\operatorname{card} I = N < \infty$, то $H(\alpha) \le \ln N$. $H(\alpha) = \ln n$ тогда и только тогда, когда $\mu(A_i) = \frac{1}{N}$ при всех i. $H(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $N = 1$.

Определение 2. Условной энтропией α относительно β, $H(\alpha | \beta)$ называется

$$H(\alpha | \beta) = \sum_{j \in J} \mu(B_j)\Big[\sum_{i \in I} z(\mu(A_i | B_j))\Big].$$

Теорема 1. Если $\alpha' = \{A'_k\}_{k \in K}$, $\beta' = \{B'_n\}_{n \in N}$ -

измеримые разбиения $\mathcal{M}$, то

а) $H(\alpha \vee \beta \mid \beta) = H(\alpha \mid \beta)$;

в) $H(\alpha \mid \beta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta$;

в) $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta) + H(\alpha \mid \beta)$;

d) $\alpha \leq \alpha' \Longrightarrow H(\alpha) \leq H(\alpha')$;

е) $\alpha \leq \alpha' \Longrightarrow H(\alpha \mid \beta) \leq H(\alpha' \mid \beta)$;

f) $H(\alpha \vee \alpha' \mid \beta) \leq H(\alpha \mid \beta) + H(\alpha' \mid \beta)$;

g) $H(\alpha \vee \alpha' \vee \beta) + H(\beta) \leq H(\alpha \vee \beta) + H(\alpha' \vee \beta)$;

h) $\beta \leq \beta' \Longrightarrow H(\alpha \mid \beta') \leq H(\alpha \mid \beta)$;

i) $H(\alpha \vee \beta \mid \beta') = H(\beta \mid \beta') + H(\alpha \mid \beta \vee \beta')$.

Доказательство предоставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Для любого автоморфизма T и любого разбиения $\alpha = \{A_i\}$ через $T\alpha$ обозначается разбиение на множества $\{TA_i\}$. Заметим, что всегда $H(\alpha \mid \beta) = H(T\alpha \mid T\beta)$.

Определение 3. Энтропией на один знак разбиения α называется величина

$$h(\alpha, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^n\alpha) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} H(T^n\alpha / \alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^{n-1}\alpha).$$

Существование этого предела следует из пункта с) теоремы I. (последовательность, определяющая $h(\alpha,T)$, состоит из положительных элементов).

Определение 4. Энтропией $(\mathcal{M}, \gamma, \mu, T)$ называется

$$h(T) = \sup h(\alpha, T)$$

где верхняя грань берется по всем конечным или счетным измеримым разбиениям α пространства $\mathcal{M}$, $H(\alpha) < \infty$.

Теорема 2. Энтропия есть инвариант динамической системы. Иными словами, изоморфные динамические системы имеют одинаковую энтропию.

<u>Доказательство</u>.

Пусть $\mathcal{U}: M \to \mathcal{M}'$ есть изоморфизм динамических систем $(\mathcal{M}, \gamma, \mu, T)$ и $(\mathcal{M}', \gamma', \mu', T')$, т.е. $T' = \mathcal{U} T \mathcal{U}^{-1}$. Для любого разбиения α имеем

$$h(\mathcal{U}\alpha, T') = h(\mathcal{U}\alpha, \mathcal{U} T \mathcal{U}^{-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}\alpha \vee \ldots \vee \mathcal{U} T^n\alpha) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee \ldots \vee T^n\alpha) = h(\alpha, T).$$

Это и доказывает теорему.

Почти невозможно вычислять энтропию, исходя из определения. Главным средством, позволяющим ее вычислять, служит теорема об энтропии обрезующего разбиения, принадлежащая А.Н. Колмогорову. Прежде чем к ней приступить, докажем несколько лемм.

Через Z обозначим множество всех измеримых разбиение (пространства $\mathcal{M}$) с конечной энтропией. Для $\alpha, \beta \in Z$ положим $|\alpha, \beta| = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$.

Лемма I. $(Z, |\cdot,\cdot|)$ есть метрическое пространство.

Доказательство

$|\cdot,\cdot|$ разделяет точки по пункту в) теоремы I. Очевидно, что $|\cdot,\cdot|$ симметрична по своим аргументам. Неравенство треугольника:

$$H(\alpha|\gamma) = H(\alpha \vee \gamma) - H(\gamma) \leq H(\alpha \vee \beta \vee \gamma) - H(\beta \vee \gamma)$$

$$+ H(\beta \vee \gamma) - H(\gamma) =$$

$$= H(\alpha|\beta \vee \gamma) + H(\beta|\gamma) \leq H(\alpha|\beta) + H(\beta|\gamma).$$

Аналогично $H(\gamma|\alpha) \leq H(\gamma|\beta) + H(\beta|\alpha)$. Отсюда следует неравенство треугольника.

Лемма 2. При фиксированном T функция $h(\alpha, T)$

непрерывна на Z, точнее

$$|h(\alpha,T)-h(\beta,T)|\le|\alpha,\beta|, \quad \alpha,\beta\in Z.$$

Доказательство.

Пусть $\alpha_n=\alpha\vee T\alpha\vee\ldots\vee T^n\alpha$, $\beta_n=\beta\vee T\beta\vee\ldots\vee T^n\beta$. Легко видеть, что $|H(\alpha_n)-H(\beta_n)|\le|\alpha_n,\beta_n|$. Но

$$H(\alpha_n|\beta_n)\le H(\alpha|\beta_n)+H(T\alpha|\beta_n)+\ldots+H(T^n\alpha|\beta_n)\le$$

$$\le H(\alpha|\beta)+H(T\alpha|T\beta)+\ldots+H(T^n\alpha|T^n\beta)=(n+1)H(\alpha|\beta)$$

(так как $\beta, T\beta, \ldots, T^n\beta\le\beta_n$).

Итак, $|\alpha_n,\beta_n|\le(n+1)|\alpha,\beta|$. Это и дает требуемое неравенство.

Лемма 3. Множество всех конечных разбиений пространства $\mathcal{M}$ есть плотное подмножество в Z.

Доказательство

Пусть $\alpha=\{A_1, A_2,\ldots,A_k,\ldots\}$ Обозначим

$$E_n=\mathcal{M}-\bigcup_{i=1}^{n}A_i, \quad \alpha_n=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,E_n\}.$$

Легко видеть, что $|\alpha,\alpha_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Леммы 2 и 3 дают нам возможность определить энтропию равенством:

$$h(T)=\sup h(\alpha,T),$$

где верхняя грань берется по конечным измеримым разбиениям пространства $\mathcal{M}$.

Если дано разбиение α, то через $\gamma(\alpha)$ мы обозначим σ- алгебру, порожденную α. Если дано семейство σ - алгебр γ_i, $i \in I$, то через $\bigvee_{i\in I} \gamma_i$ мы обозначим σ- алгебру, порожденную $\{\gamma_i\}$, $i \in I$.

Лемма 4. Пусть $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots$ измеримые разбиения $\mathcal{M}$ такие, что $\gamma = \bigvee_n \gamma(\alpha_n)$. Тогда $Z' = \{\beta :$ β есть конечное разбиение и $\beta \le \alpha_n$ при некотором $n\}$ плотно в Z.

Доказательство.

По лемме 3 мы должны показать, что, взяв конечное разбиение α и число $\delta > 0$, мы можем найти n и конечное разбиение $\beta \le \alpha_n$ что $|\alpha, \beta| < \delta$. Пусть $\alpha = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m\}$. По условию леммы найдется такое n и множества $\mathcal{A}_1', \dots$ $\dots \mathcal{A}_{m-1}' \in \gamma(\alpha_n)$, такие, что $\mu(\mathcal{A}_i \,\Delta\, \mathcal{A}_i') < \varepsilon$ для $1 \le i < m$ Определим разбиение β так: $\beta = \{B_1, \dots, B_m\}$, где $B_1 = A_1'$, $\mathcal{B}_i = A_i' \setminus (\mathcal{A}_1' \cup \dots \cup \mathcal{A}_{i-1}')$ для $1 \le i < m$, $\mathcal{B}_m = \mathcal{M} - \bigcup_{i<m} \mathcal{A}_i'$ Очевидно, что $\beta \le \alpha_n$. Имеем

$$|\alpha, \beta| = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)\left[\sum_{j=1}^{m} z\left(\frac{\mu(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j)}{\mu(\mathcal{A}_i)}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu(\mathcal{B}_i)\left[\sum_{j=1}^{m} z\left(\frac{\mu(\mathcal{A}_j \cap \mathcal{B}_i)}{\mu(\mathcal{B}_i)}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} z(\mu(A_i)) - 2\sum_{i,j=1}^{m} z(\mu(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j)) + \sum_{j=1}^{m} z(\mu(\mathcal{B}_j)) \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} z(\mu(A_i)) - 2\sum_{i=1}^{m} z(\mu(A_i \cap \mathcal{B}_i)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} z(\mu(\mathcal{B}_j)) \leq \sum_{i=1}^{m} \Big[z(\mu(A_i)) -$$

$$- z(\mu(A_i \cap \mathcal{B}_i))\Big] + \sum_{i=1}^{m} \Big[z(\mu(\mathcal{B}_i)) -$$

$$- z(\mu(A_i \cap \mathcal{B}_i))\Big].$$

Но $0 \leq \mu(\mathcal{A}_i) - \mu(A_i \cap \mathcal{B}_i) < \varepsilon, \quad 0 \leq \mu(\mathcal{B}_i) - \mu(A_i \cap \mathcal{B}_i) \leq \varepsilon.$

Если ε достаточно мало, то

$$z(\mu(\mathcal{A}_i)) - z(\mu(A_i \cap \mathcal{B}_i)) < \frac{\delta}{2m}, \quad z(\mu(\mathcal{B}_i)) - z(\mu(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i)) < \frac{\delta}{2m},$$

чем и завершается доказательство.

Определение 5. Измеримое, счетное разбиение α пространства $\mathcal{M}$ называется образующей для T, если

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^n \alpha = \varepsilon \quad (\text{т.е.} \bigvee_{-\infty}^{\infty} \gamma(T^n\alpha) = \gamma).$$

Теорема 3 (А.Н. Колмогорова об образующей).
Если α есть образующая для T и $\mathcal{H}(\alpha) < \infty$,
то $h(T) = h(\alpha, T)$.

Доказательство.

По данному разбиению ξ определим $\tilde{\xi}_n = \bigvee_{k=-n}^{n} T^k \xi$.

Очевидно, что

$$\frac{1}{n} H(\tilde{\xi}_n) = \frac{1}{2n} H(\xi \vee T\xi \vee \ldots \vee T^{2n}\xi) \cdot \frac{2n}{n} \to 2h(\xi, T) \qquad (*).$$

Очевидно, что $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2 \leq \ldots$ и $\bigvee \tilde{\alpha}_n = \varepsilon$. Тогда, по лемме 4, достаточно показать, что если $\beta \leq \tilde{\alpha}_n$, то $h(\beta, T) \leq h(\alpha, T)$.

Но если $\beta \leq \tilde{\alpha}_n$, то

$$\tilde{\beta}_m \leq (\tilde{\alpha}_n)_m = \tilde{\alpha}_{n+m}$$

для всех m. Поэтому $\frac{1}{m} H(\tilde{\beta}_m) \leq \frac{1}{n+m} H(\alpha_{n+m}) \cdot \frac{n+m}{m}$.

Если в этом неравенстве мы устремим m к бесконечности, то по неравенству ($*$) мы получим

$$2h(\beta, T) \leq 2h(\alpha, T).$$

Теорема Колмогорова доказана.

Теорема 4. $h(T^s) = |s| \cdot h(T)$ при всех $s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство

Легко видеть, что $h(T^s) = h(T^{-s})$. Поэтому мы можем допустить, что $s > 0$. Пусть ξ - конечное измеримое разбиение, $\xi_1 = \tilde{\xi}_s$. Тогда

$$\frac{1}{n} H(\xi_1 \vee T^s \xi_1 \vee \ldots \vee T^{sn} \xi_1) = \frac{1}{n} H(\xi \vee T\xi \vee T^2 \xi \vee \ldots \vee T^{ns} \xi) \to$$
$$\to s\, h(\xi, T).$$

Значит, $h(T^s) \geq s\, h(T)$. С другой стороны, так как $\xi \leq \xi_1$, $h(\xi, T^s) \leq h(\xi_1, T^s) = s\, h(\xi, T)$. Поэтому $h(T^s) \leq s\, h(T)$.

Упражнение. Если существует образующая α такое, что $\bigvee_{n=0}^{\infty} \alpha = \varepsilon$, $H(\alpha) < \infty$, то $h(T) = 0$.

Упражнение. Доказать, что энтропия автоморфизма Бернулли с вероятностями $\{p_1, \ldots, p_r\}$ равна $\sum_{i=1}^{r} z(p_i)$.

Из последнего утверждения вытекает, что существует континуум не изоморфных автоморфизмов Бернулли. Недавно американский математик Д. Орнштейн показал, что автоморфизмы Бернулли с равной энтропией изоморфны.

Упражнение. Пусть (M, Γ, μ, T) и $(M_1, \Gamma_1, \mu_1, T_1)$ - динамические системы. Доказать, что

$$h(T \times S) = h(T) + h(S),$$

где $(T_1 \times T_2)(x, y) = (T_1 x, T_2 y)$ есть автоморфизм, измеримого пространства $(M_1 \times M_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

Сейчас мы приведем обобщение теоремы 4 на случай непрерывного времени.

Определение 6. Назовем поток $(M, \Gamma, \mu, \{S_t\})$ непрерывным, если $\lim_{t \to 0} \mu(S_t A \triangle A) = 0$ для любого множества $A \in \gamma$.

Теорема 5. Если $(\mathcal{M}, \gamma, \mu, \{S_t\})$ - непрерывный поток, то $h(S_t) = |t|\, h(S_1)$.

Доказательство.

Так как $h(T) = h(T^{-1})$, мы можем положить $t > 0$.

Мы докажем, что если $0 < u < t$, то $h(S_t) \le \frac{t}{u} h(S_u)$.

Пусть m - натуральное число. Положим $\delta = \frac{1}{m}$. Взяв разбиение ξ, положим

$$\eta = \xi \vee S_{\delta u}\xi \vee S_{2\delta u}\xi \vee \dots \vee S_{(m-1)\delta u}\xi$$

Через $k = k(n)$ мы обозначим такое натуральное число, что $nt \le ku < (n+1)t$, а через $r(p)$ - такое, что $r(p)\cdot\delta\cdot u \le pt < (r(p)+1)\cdot\delta\cdot u$. Имеем

$$\mathcal{H}(S_t\xi \vee \dots \vee S_{nt}\xi) \le \mathcal{H}(S_t\xi \vee \dots \vee S_{nt}\xi \vee \eta \vee S_u\eta \vee \dots$$

$$\dots \vee S_{ku}\eta) = \mathcal{H}(\eta \vee S_u\eta \vee \dots \vee S_{ku}\eta) +$$

$$+ \mathcal{H}(S_t\xi \vee \dots \vee S_{nt}\xi \mid \eta \vee S_u\eta \vee \dots \vee S_{ku}\eta) \le$$

$$\le \mathcal{H}(\eta \vee S_u\eta \vee \dots \vee S_{ku}\eta) + \sum_{p=1}^{n} \mathcal{H}(S_{pt}\xi \mid S_{r(p)\cdot\delta\cdot u}\eta).$$

Поэтому $\mathcal{H}(S_{pt}\xi \mid S_{r(p)\cdot\delta\cdot t}\xi) = \mathcal{H}(S_\tau\xi \mid \xi)$,

где $\tau = pt - \delta\cdot u\cdot r(p) < \delta\cdot u$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда при достаточно больших m выполнено неравенство $\mathcal{H}(S_\tau \xi / \xi) < \varepsilon$ в силу непрерывности потока. Кроме того,

$$\mathcal{H}(S_t \xi \vee \ldots \vee S_{nt} \xi) \leq \mathcal{H}(\eta \vee S_u \eta \vee \ldots \vee S_{k(n)u} \eta) + n\varepsilon .$$

Так как $\frac{k(n)}{n} \to \frac{t}{u}$ то ввиду последнего неравенства получаем $h(S_t) \leq \frac{t}{u} h(S_u) + \varepsilon$. Но ε произвольно, значит $h(S_t) \leq \frac{t}{u} h(S_u)$.

Пусть теперь натуральное τ таково, что $\frac{t}{\tau} < u$. По теореме 4 $\tau h(S_{\frac{t}{\tau}}) = h(S_t)$. По доказанному, $h(S_u) \leq \frac{u \cdot \tau}{t} h(S_{\frac{t}{\tau}})$. Значит $h(S_t) = \frac{t}{u} h(S_u)$.

Это и доказывает теорему.

ЛЕКЦИЯ 15.

ЭНТРОПИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
(Продолжение)

Непрерывность условной энтропии. Теорема Бреймана.

В этой лекции ξ и η будут обозначать измеримое разбиение измеримого пространства $(\mathcal{M}, \mathcal{Y}, \mu)$.

Через $H(\xi \mid \eta(x))$ обозначим энтропию разбиения $\xi \vee \eta$ пространства $(\eta(x), \mathcal{Y}|_{\eta(x)}, \mu|_{\eta(x)})$,

где $\eta(x)$ - элемент разбиения η, содержащий точку x.

Упражнение. Пусть $\xi \geqslant \eta$. Тогда $H(\xi \mid \eta(x))$ есть измеримая функция от x.

Определение I. Условной энтропией называется

$$H(\xi \mid \eta) = H(\xi \vee \eta \mid \eta) = \int_{\mathcal{M}} H(\xi \mid \eta(x))\, d\mu(x).$$

Упражнение. Доказать, что

$$H(\xi \mid \eta) = -\int_{\mathcal{M}} \log \mu(\xi(x) \mid \eta(x))\, d\mu(x).$$

Утверждение I. Пусть $\{\xi_n\}$ - измеримые разбиения пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}(\xi_1) < \infty$. Если $\xi_n \uparrow \xi$ $(\xi_n \downarrow \xi)$, то $H(\xi_n) \uparrow H(\xi)$ $(H(\xi_n) \downarrow H(\xi))$.

Доказательство.

По предположению, $\mu(\xi_n(x)) \downarrow \mu(\xi(x))$ $(\mu(\xi_n(x)) \uparrow \mu(\xi(x)))$ для μ- почти всех x. Применив теорему об интегрировании ограниченной монотонной последовательности, получим требуемый результат.

Утверждение 2. Пусть $\{\xi_n\}$ те же, что и выше. Тогда

$$\mathcal{H}(\xi_n|\eta)\uparrow\mathcal{H}(\xi|\eta)\quad(\mathcal{H}(\xi_n|\eta)\downarrow\mathcal{H}(\xi|\eta)).$$

Доказательство

$\mathcal{H}(\xi_n|\eta)=\int\limits_{M|\eta}\mathcal{H}(\xi_n|\eta(x))\,d\mu(x)$. По утверждению I, $\mathcal{H}(\xi_n|\eta(x))\uparrow\mathcal{H}(\xi|\eta(x))$ для всех x.

Осталось снова применить теорему об интегрировании монотонной последовательности.

Теорема I. Пусть $\{\eta_n\}$ - измеримые разбиения M, $\mathcal{H}(\xi|\eta_1)<\infty$. Если $\eta_n\uparrow\eta$ $(\eta_n\downarrow\eta)$, то

$$\mathcal{H}(\xi|\eta_n)\downarrow\mathcal{H}(\xi|\eta)\quad(\mathcal{H}(\xi|\eta_n)\uparrow\mathcal{H}(\xi|\eta)).$$

Доказательство.

Пусть ξ - конечное разбиение, $\xi=\{A_1,\dots,A_m\}$, $\mu(A_k)>0$. По теореме Дуба, для $i=1,2,\dots,m$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_i|\eta_n(x))=\mu(A_i|\eta(x))$$ для μ-почти всех x.

Следовательно, $\mathcal{H}(\xi|\eta_n(x))\to\mathcal{H}(\xi|\eta(x))$ для μ-почти всех x . Так как $\mathcal{H}(\xi|\eta(x))$ есть ограниченная функция, то по теореме Лебега об интегрировании

$$\mathcal{H}(\xi|\eta_n)=\int\limits_M\mathcal{H}(\xi|\eta_n(x))\,d\mu\to\int\limits_M\mathcal{H}(\xi|\eta(x))\,d\mu(x)=\mathcal{H}(\xi|\eta).$$

Теорема доказана для конечных разбиений ξ . Пусть теперь ξ произвольно. Тогда найдется такая последовательность конечных разбиений $\{\xi_n\}$, что $\xi_n\uparrow\xi$. Остается применить утверждение 2. Теорема I полностью доказана.

Пусть $(\mathcal{M}, \gamma, \mu, T)$ – динамическая система. Тогда $h(\xi, T) = \mathcal{H}(\xi \mid \xi^-)$, где $\xi^- = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\xi$.

Упражнение. Пусть $\mathcal{L}$ – плотное подмножество в Z. Если $\mathcal{H}(\xi \mid \alpha) = \mathcal{H}(\xi \mid \beta)$ для всех $\xi \in \mathcal{L}$, то $\alpha = \beta$.

Упражнение. Если $\mathcal{H}(\xi) < \infty$ и $\mathcal{H}(\xi \mid \eta) = \mathcal{H}(\xi)$, то ξ и η независимы.

Теорема 2. Если $\mathcal{H}(\eta / \xi) < \infty$ и $\eta < \xi_T \overset{def}{=\!=} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^{-k}\xi$,

то $h(\eta, T) \leq h(\xi, T)$.

Доказательство.

Так как $\eta < \xi_T$, то $H(\eta \mid \xi_T) = 0$. Таким образом, по теореме I, для любого $\varepsilon > 0$ найдется s_0 такое, что

$\mathcal{H}(\eta \mid \bigvee_{-s}^{s} T^k \xi) < \varepsilon$ для всех $s > s_0$.

Для всех таких s и любого n имеем

$$\frac{1}{n}\mathcal{H}(T\eta \vee \ldots \vee T^n\eta) \leq \frac{1}{n}\mathcal{H}(T\eta \vee \ldots \vee T^n\eta \vee T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{n+s}\xi) =$$

$$= \frac{1}{n}\mathcal{H}(T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{n+s}\xi) + \frac{1}{n}\mathcal{H}(T\eta \vee \ldots \vee T^n\eta / T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{n+s}\xi).$$

Но $\frac{1}{n}\mathcal{H}(T\eta \vee \ldots \vee T^n\eta \mid T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{n+s}\xi) \leq$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}(\eta \mid T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{s}\xi) \leq \varepsilon.$$

Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}(T^{-s}\xi \vee \ldots \vee T^{n+s}\xi) = h(\xi, T)$

при всех s. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Теорема Колмогорова об образующей есть простое следствие теоремы 2: если ξ есть образующая для T, то $\xi_T = \varepsilon$ и, значит, $\eta \leq \xi_T$ каково бы ни было разбиение η. Если, кроме того, $\eta \in Z$, то $\mathcal{H}(\eta) < \infty$ и, следовательно, $\mathcal{H}(\eta / \xi) \leq \mathcal{H}(\eta) < \infty$. Но

$$h(T) = \sup_{\eta \in Z} h(\eta, T).$$

Теперь наша цель состоит в том, чтобы доказать важную теорему Бреймана.

Теорема 3. Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{Y}, \mu, T)$ - эргодическая динамическая система и пусть $\xi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $\mu(A_k) > 0$, $k = 1, \ldots, m$ есть конечное разбиение пространства $\mathcal{M}$. Тогда для μ - почти всех $x \in \mathcal{M}$

$$h(\xi, T) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\xi_n(x)),$$

где $\xi_n = \xi \vee T^{-1}\xi \vee \ldots \vee T^{-n+1}\xi$.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем предварительные замечания. Обозначим $\xi^+ = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^k \xi$,

$$g_k(x) = -\log \mu(\xi(x) \,|\, (T\xi \vee \ldots \vee T^k\xi)(x)),$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

$$g_0(x) = -\log \mu(\xi(x)), \quad g(x) = -\log \mu(\xi(x) | \xi^+(x)).$$

(по теореме Дуба, $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$ μ - п. в.).

Лемма. $\int\limits_M [\sup_k g_k(x)]\, d\mu(x) < \infty$.

Доказательство леммы.

Достаточно показать, что существует такая константа C, что $\mu\{x: \sup_k g_k(x) > \lambda\} \le C\, 2^{-\lambda}$ для всех λ.

Пусть $f_k^i = -\log \mu(A_i \,|(T\xi \vee \ldots \vee T^k\xi)(x))$

$$E_1 = \{x : g_1(x) > \lambda\},$$

$F_1^i = \{x : f_1^i(x) > \lambda\}$. Для $k \geq 2$ положим

$$E_k = \{x : \max_{j<k} g_j(x) \le \lambda, \; g_k(x) > \lambda\},$$

$$F_k^i = \{x : \max_{j<k} f_j^i(x) \le \lambda, \; f_k^i(x) > \lambda\}.$$

Имеем $\mu(E_k) = \sum_{i=1}^{m} \mu(E_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(F_k^i \cap$ ...

Так как $F_k^i \in \gamma(\xi \vee T\xi \vee \ldots \vee T^k\xi)$, то по теореме об условной вероятности получим

$$\mu(A_i \cap F_k^i) = \int_{F_k^i} \mu(A_i \mid (T\xi \vee \ldots \vee T^k\xi)(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int_{F_k^i} 2^{-f_k^i(x)}\, d\mu(x) \le 2^{-\lambda} \mu(F_k^i).$$

Если $k \ne j$, то $F_k^i \cap F_j^i = \varnothing$, поэтому

$$\mu\{x : \sup_k g_k(x) > \lambda\} = \sum_k \mu(E_k) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda} \sum_k \mu(F_k^i) \le m\, 2^{-\lambda}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы Бреймана.

Легко проверить, что

$$-\frac{1}{n} \log \mu(\xi_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x)$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[g_k(T^k x) - g(T^k x) \right].$$

По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина, первая сумма сходится к $\int g(x)\,d\mu(x) = h(\xi, T)$. Таким образом, чтобы доказать теорему, надо показать, что

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g_k(T^k x) - g(T^k x)\right) = 0 \qquad (*)$$

Обозначим $G_N(x) = \sup_{k \geq N} |g_k(x) - g(x)|$. Имеем

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g_k(T^k x) - g(T^k x)\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|g_k(T^k x) -$$

$$- g(T^k x)| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|g_k(T^k x) - g(T^k x)| +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}|g_k(T^k x) - g(T^k x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|g_k(T^k x) - g(T^k x)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} G_N(T^k x).$$

Если $n \to \infty$ в предыдущем неравенстве, а N фиксировано, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g_k(T^k x) - g(T^k x)\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} G_N(T^k x) =$

$= \int\limits_M G_N(x)\,d\mu(x)$ для μ - почти всех x (по теореме Биркгофа-Хинчина).

Кроме того, $0 \leq G_N(x) \leq g(x) + \sup_k g_k(x)$. По лемме, $g(x) + \sup_k g_k(x)$ есть интегрируемая функция. Таким образом, $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{M} G_N(x)\,d\mu(x)=\int\limits_{M}\lim\limits_{N\to\infty} G_N(x)\,d\mu=0$ Этим доказано равенство ($*$) и теорема Бреймана.

Примеры вычисления энтропии.

Энтропия автоморфизма тора.

Для вычисления энтропии автоморфизма тора мы воспользуемся марковским разбиением, построенным нами в лекции № ....

Напомним, что для эргодического автоморфизма T двумерного тора, заданного целочисленной матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с определителем, равным единице, было построено марковское разбиение на параллелограммы $\xi=(C_1, C_2, \dots, C_r)$ Как было объяснено, это разбиение можно сделать образующим, поэтому, по по теореме Колмогорова, $h(T)=h(T,\xi)$. Займемся вычислением $h(T,\xi)$. Мы покажем, что для любого множества $C_{i_0}\cap T^{-1}C_{i_1}\cap\dots\cap T^{-n}C_{i_{-n}}$ имеет место следующее соотношение:

$$\alpha_2 \le \frac{\mu(C_{i_0}\cap T^{-1}C_{i_{-1}}\cap\dots\cap T^{-n}C_{i_{-n}})}{\lambda^n}\le \alpha_1, \qquad (1)$$

если это пересечение имеет положительную меру, причем α_1, α_2 - константы, не зависящие от n, а λ - собственное значение матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, по модулю меньшее единицы.

Отсюда видно, что число элементов разбиения $\xi\vee T\xi\vee\dots\vee T^n\xi$ не превосходит $\alpha_1\lambda^{-n}$ и $\mathcal{H}(\xi\vee T^{-1}\xi\vee\dots\vee T^{-n}\xi)=$ $=-\sum\mu(C_{i_0}\cap T^{-1}C_{i_{-1}}\cap\dots\cap T^{-n}C_{i_{-n}})\ln\mu(C_{i_0}\cap\dots\cap T^{-n}C_{i_{-n}})\le\ln\alpha_1-n\ln\lambda.$

Аналогично получаем оценку снизу. Из этих оценок легко следует, что $h(T,\xi) = -\ln\lambda$. Для доказательства неравенств (I) заметим, что в силу свойств марковского разбиения пересечение

$$C_{i_0} \cap T^{-1}C_{i_{-1}} \cap \ldots \cap T^{-n} C_{i_{-n}}$$

есть параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам параллелограмма C_{i_0}. При этом длина сжимающейся стороны этого параллелограмма равна длине сжимающейся стороны параллелограмма C_{i_0}, а длина расширяющейся стороны равна произведению λ^n на длину расширяющейся стороны параллелограмма $C_{i_{-n}}$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Энтропия эргодического сдвига на компактной коммутативной группе.

Начнем со следующего замечания: если для какого-нибудь разбиения ξ и некоторого $\alpha > 0$ число различных элементов разбиения ненулевой меры

$$\xi \vee T^{-1}\xi \vee \ldots \vee T^{-n}\xi$$

не превосходит n^α при достаточно больших n, то

$$h(T,\xi) = 0.$$

Для доказательства расположим меры элементов разбиения в убывающем порядке. Мы получим последовательность положительных чисел $\pi_1 \geqslant \pi_2 \geqslant \ldots \geqslant \pi_k$, где $k \leq n^\alpha$, $\sum \pi_k = 1$.

Найдем такой номер i, при котором $\pi_i \geqslant \frac{1}{n^{4\alpha}} > \pi_{i+1}$.

Если $\pi_k > \frac{1}{n^{4\alpha}}$, то полагаем $i = k$. Тогда

$$-\sum_{s=1}^{k} \pi_s \ln \pi_s = -\sum_{s=1}^{i} \pi_s \ln \pi_s - \sum_{s=i+1}^{k} \pi_s \ln \pi_s = I_1 + I_2 .$$

Для I_1 имеем следующую оценку:

$I_1 \leq 4\alpha \ln n$ и потому $\frac{I_1}{n} \to 0, n \to \infty .$

Что касается I_2, то заметим, что $-\mu \ln \mu \leq \mu^{\frac{1}{2}}$ при малых μ. Поэтому

$$I_2 = -\sum_{i+1}^{k} \pi_s \ln \pi_s \leq \sum_{i+1}^{k} \pi_s^{\frac{1}{2}} \leq n^{\alpha} \cdot n^{\alpha - \frac{4\alpha}{2}} \leq 1 .$$

Следовательно, $\frac{I_2}{n} \to 0, n \to \infty$, и наше утверждение доказано.

Рассмотрим поворот окружности на иррациональный угол α. Покажем, что его энтропия равна нулю. Пусть разбиение ξ нашей окружности состоит из двух полуокружностей. Докажем, что это разбиение будет образующим. В самом деле, пусть x и y – две различные точки на окружности. Тогда точка x – любая из двух точек, определяющих разбиение ξ – после достаточно большого числа сдвигов окажется между x и y (в силу всюду плотности ее траектории). Значит на некотором шагу и будут в разных элементах разбиения $\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$. Это и значит, что ξ – образующее разбиение.

Теперь заметим, что число элементов разбиения $\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$ ненулевой меры растет линейно по n. Действительно, после каждого шага оно увеличивается ровно на два элемента. Поэтому энтропия сдвига равна нулю.

Точно такие же рассуждения применимы и к сдвигам n -мерного тора.

Энтропия потока на двумерном торе.

Пусть M - двумерный тор и S_t - поток на M, порождаемый системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y) \end{aligned} \qquad (1).$$

сохраняющий инвариантную меры $d\mu = \rho(x, y)\,dx\,dy$.

Мы будем предполагать, что F_1, F_2 и ρ - функции класса C^∞, чтобы избежать небольших осложнений, связанных с конечнократной дифференцируемостью. Кроме того, мы будем предполагать, что $F_1 > 0$. На самом деле, имеется лемма. Зигеля, которая позволяет общий случай свести к этому, - если поток на торе не имеет неподвижных точек. Как было показано на странице ... , на торе всегда можно ввести такие гладкие координаты, что траектории нашей системы превратятся в прямые линии $y = \alpha x + c$ Это эквивалентно тому, что в подходящей системе координат система дифференциальных уравнений (I) переходит в систему дифференциальных уравнений (2):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha f(x, y) \end{aligned} \qquad (2)$$

где $f(x, y)$ - функция класса C^∞, не обращающаяся в нуль.

На этом примере удобно познакомиться с одной конструкцией, очень часто применяющейся в эргодической теории.

Пусть Q - пространство с нормированной мерой σ, T - измеримое, сохраняющее меру преобразование Q. Пусть F - измеримая, положительная почти всюду, интегрируемая по мере σ функция, определенная на Q.

Рассмотрим подмножество $\mathcal{M}$ прямого произведения $R^1 \times Q$:

$$\mathcal{M} = \{(q, u) : q \in Q, \ 0 \leq u \leq F(q)\}$$

Структура прямого произведения: $R^1 \times Q$ индуцирует меру ν на пространстве $\mathcal{M}$, вообще говоря не нормированную: $\nu(\mathcal{M}) = \int_Q F(q)\, d\sigma(q)$. Мы можем эту меру нормировать. Полученную таким образом меру обозначим μ.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований пространства $\mathcal{M}$, которая действует след ющим образом: точка q_0 с нижнего слоя движетчя с единичной скоростью вертикально вверх время $F(q_0)$, а в момент $F(q_0)$ она оказывается в точке Tq_0 и т.д. Тем самым у нас возникает однопараметрическая группа преобразований пространства $\mathcal{M}$. Легко показать, что она сохраняет меру μ (для кусочно-постоянных функций F это очевидно, а для произвольных F делается стандартная аппроксимация). Тем самым возникает динамическая система. Она называется специальным потоком, построенным по автоморфизму T пространства Q и функции F.

Важная теорема эргодической теории утверждает, что всякая динамическая система в смысле эргодической теории изоморфна некоторому специальному потоку.

Замечание I. Идея сводить изучение систем дифференциальных уравнений с непрерывным временем к изучению итераций отдельных преобразований встречалась у Пуанкаре (метод секущих поверхностей).

Замечание 2. Идея специального потока интересна также со следующей точки зрения. Пространство Q, вложенное в $\mathcal{M}$, имеет, разумеется, меру нуль. Однако каждая траектория нашего потока проходит через это множество. Таким образом, возникает возможность выделять в фазовом пространстве существенные множества меры нуль, как такие множества, через которые проходит множество траекторий положительной меры. Это соображение полезно при исследовании некоторых бесконечномерных динамических систем.

На самом деле мы уже фактически встречались несколько раз со специальными с представлениями некоторых динамических систем. Например, рассмотрим бильярд в замкнутой области Q с границей Γ. Фазовым пространством M служат линейные элементы, носители которых лежат в области Q. Возьмем в качестве Q линейные элементы, носители которых лежат на Γ а они сами направлены внутрь Q. Преобразование T здесь естественно возникает как результат первого отражения траектории от границы Γ.

Другой пример относится к динамическим системам на двумерном торе. Пусть Γ - окружность: $\Gamma = \{x = 0\}$. Траектория, выходящая из точки $(0, y)$, через некоторое время вновь возвращается в точку этой же окружности, которую мы обозначим $(0, Ty)$. Тем самым мы получаем преобразование T окружности Γ, индуцированное нашей динамической системой. Обозначим через $\tau(y)$ время движения точки y до первого попадания на окружность Γ. Тогда система (2) есть не что иное, как специальный поток над поворотом окружности на угол α с функцией F, равной τ

Мы сейчас сформулируем (без доказательства) важную теорему Л.М. Абрамова:

Пусть Q-пространство Лебега с нормированной мерой μ Пусть T - автоморфизм Q и F измеримая функция на Q, причем $F \geqslant \tau > 0$ и $\{S_t\}$ специальный поток, построенный по автоморфизму T и функции F.

Тогда $$h(S_t) = |t| \frac{h(T)}{\int\limits_Q F(q)\, d\mu(q)}$$

Применяя эту теорему к динамической системе на двумерном торе, получаем, что $h(S_t) = 0$, поскольку $h(T) = 0$ ввиду того, что T есть поворот окружности.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Подписано к печати II.6.1973 г.
Сдано в производство I5.6.1973 г.
Бум. 60х84, 6 печ.л. Цена 2I коп.
Заказ 249 ВФ 03II4 Тираж 400

Цех "Ромайор" Ереванского государственного университета, Ереван, ул.Мравяна №I

Цена 21 коп.