Конспект лекций

по

высшей математике

УДК 517

Предлагаемый компьютерный учебник содержит 62 лекции по восьми основным разделам курса высшей математики. Именно такой объём математики (за исключением специальных курсов, таких как “Операционное исчисление”, “Теория вероятности” и т.д.) читается, как правило, в настоящее время студентам естественных факультетов университетов, экономических академий и других ВУЗов. И преподаватели, и студенты знают насколько отличаются ”живые” лекции по курсу высшей математики от учебников по тому же курсу. Данная компьютерная книга призвана восполнить этот пробел. Краткость, простота и наглядность в ней сочетаются с достаточным уровнем строгости и полноты изложения материала.
Листать эту книгу можно многими способами:
— клавишами Page Down, Page Up, Home, End;
— щелчком мыши по правому краю экрана;
— вхождением в пункт меню ”страница”;
— вхождением в пункт меню ”окно”;
— щелчком мыши в оглавлении.
Выделенные синим цветом понятия и номера страниц являются гипертекстом. Вызов понятия приводит к появлению в правом верхнем угле страницы с родственными понятиями, с помощью которой можно перейти на страницу книги, где это понятие или родственное понятие вводится. В компьютерном учебнике предусмотрена возможность распечатки любой страницы.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендован в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений учёным Советом Иркутского государственного технического университета.

Моим сыновьям.

Предисловие к первому изданию

У Вас в руках конспект моих лекций по курсу высшей математики, записанных студентами кибернетического факультета технического университета, а также студентами экономического факультета гуманитарного университета. В ходе компьютерного набора, который я сделал собственноручно в издательской системе LaTeX, были устранены многочисленные неточности и опечатки, которые допускают даже лучшие студенты, а главное, мне удалось добиться такого синтеза формы и содержания, о котором я мечтал.

Многочисленные рисунки, которые выглядят именно так, как их рисует преподаватель на доске, выполнены либо мною, либо моим сыном Антоном, который специально для этой цели изготовил в LaTeXе графический редактор TeXpic.

В книге кроме оглавления имеется предметный указатель, который отражает взаимосвязь математических понятий.

Студент-математик, если ты с лёгкостью прочтёшь эту книгу, то это значит, что ты верно выбрал свой путь.

Если ты студент, изучающий математику в силу необходимости, то этот учебник станет твоей настольной книгой на всё время её изучения.

Преподаватель математики, перелистав эту книгу, ты вряд ли останешься равнодушным.

Всем Вам я желаю успеха.

Профессор, доктор физ.-мат. наук *Власов В.Г.*

Моей супруге Лидии.

Предисловие ко второму изданию

Большинство учебников математики — это скорее математические трактаты, поскольку основным элементом в них являются теоремы. И если это логично для математика, то это не значит, что это логично для студента. Для студента, впервые читающего формулировку теоремы, она воспринимается как нечто данное богом. Ему трудно понять, зачем доказывать то, до чего он бы сам никогда не додумался. (Речь, безусловно, не идёт о студентах-математиках, которые желают и способны выстрадать все эти формулировки теорем.) Более того, если изучая математику, какой-то студент приобретёт привычку оформлять результаты в виде теорем, то ему лучше сменить факультет на математический. Ведь в прикладных науках результаты не формулируются в виде теорем. Строгое обоснование границ применимости того или иного результата как правило невозможно.

Будущие специалисты, изучающие математику, должны научиться решать задачи, ответы на которые им заранее неизвестны. Как мне кажется, заучивание формулировок и доказательств теорем не лучший для этого способ. Не лучше ли сам процесс изучения математики превратить в тот полигон, где будущий специалист учится решать задачи? На мой взгляд, это наиболее эффективный путь помочь будущему специалисту стать активным пользователем математики.

Для решения этой задачи в книге используются следующие методические приёмы:

1. Большая часть материала дана в виде задач и примеров, которые, в отличие от теорем, не требуют, чтобы в их постановке был заложен ответ, а также точные границы его применимости. Даже в тех случаях, когда под вывеской “Задача” скрывается теорема, в этом есть некоторый смысл, поскольку попытка самостоятельного решения задачи более вероятна, чем попытка доказательства теоремы. Само решение задач на лекциях — это диалог в форме вопросов и ответов, что также нашло своё отражение в книге.
2. В предлагаемых лекциях нередко то или иное понятие возникает как следствие задачи. Как говорил Пуанкаре “...хорошим определением будет то, которое понято учеником” и ещё “...недостаточно

высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать" (А.Пуанкаре "О науке", стр. 353 и 361). Так, например, определение векторного произведения возникает как следствие задачи о нахождении вектора, ортогонального двум заданным векторам (Лекция 7).

3. В учебнике особое внимание уделено взаимосвязи основных понятий. Понятие, раз введённое, затем активно используется, наполняется новым содержанием. В качестве примера можно привести развитие понятия эквивалентных (асимптотически равных) функций.

Это понятие появляется как альтернатива понятию бесконечно малых и бесконечно больших функций. Вначале находятся простейшие эквивалентные элементарных функций в нуле (Лекция 17).

На следующем витке эквивалентные функции используются при получении таблицы производных (Лекция 19), и завершается он определением дифференциала как эквивалентной приращения функции в первом приближении (Лекция 20).

На третьем витке понятие эквивалентной функции приводит к такому важному понятию как многочлен Тейлора (Лекция 21), неоднократно затем используемому. Асимптоты графика функции также определяются через эквивалентные функции (Лекция 25).

4. Каждая лекция (4–6 стр.) посвящена определённой теме, имеет свою преамбулу и свой сюжет.

5. Конспективный характер изложения должен помочь слабому студенту сосредоточить внимание на главном и стимулировать сильного студента не учить доказательства, а делать их самому. Если при этом у студента возникнет вопрос, и он обратится к классическим курсам, например, Фихтенгольца или Смирнова, то это прекрасно.

Аналогом данного учебника для меня послужил "Конспект лекций по квантовой механике" Энрико Ферми, который я с удовольствием изучал, будучи студентом МГУ.

Во втором издании книги в неё включён указатель обозначений, существенно расширен предметный указатель. Кроме того, добавлено несколько новых страниц и рисунков, изменены некоторые формулировки и устранены замеченные неточности и опечатки.

Внесённые изменения — это результат дискуссий с моими коллегами кафедры математики ИрГТУ, а также с научным редактором издательства. Всем им я искренне благодарен.

Оглавление

Раздел 3.
Дифференциальное исчисление

Раздел 4.
Интегральное исчисление

Раздел 5.
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Раздел 6.
Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Раздел 7.
Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Раздел 8.
Теория рядов

“Чему мы должны научиться делать,
мы учимся, делая.”
Аристотель

Раздел 1

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 1. Вектор в повернутой системе координат или взаимосвязь основных понятий линейной алгебры

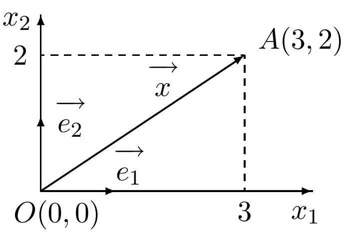
Нам предстоит убедиться, что такие известные со школы понятия как вектор и система линейных алгебраических уравнений имеют связь, которая естественным образом описывается такими новыми понятиями как матрица и определитель.

Вектор	‖	Скаляр
	графическое определение:	
Направленный отрезок прямой	‖	Длина отрезка прямой

аналитическое определение:

Набор чисел, который *меняется,* при повороте системы координат	Число, которое *не меняется,* при повороте системы координат
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$OA = \left\|\overrightarrow{x}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример 1. *Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ и скаляр OA заданы графически. Задать их аналитически в декартовой системе координат.*



▷ *Выразим $\overrightarrow{OA}$ через единичные базисные векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$:*

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$OA = \left|\overrightarrow{x}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,; \quad \text{а} \quad \left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = 1\,. \quad \triangleleft$$

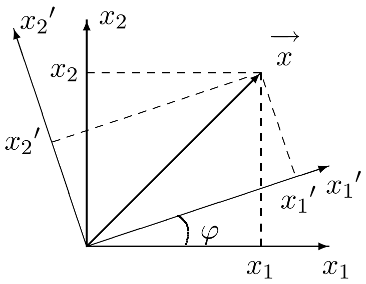
$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \text{ — матричная форма вектора}$$

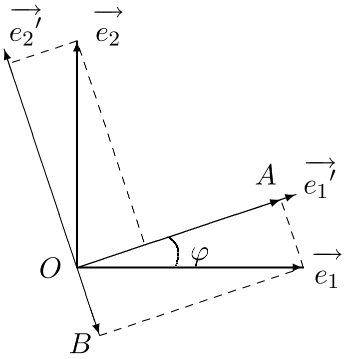
Задача 1

Пусть задан вектор в декартовой системе координат в двухмерном пространстве

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}\,.$$

Найти проекции этого вектора в повернутой системе координат.





► $\vec{x} = x_1'\vec{e_1'} + x_2'\vec{e_2'}\,,\quad x_{1,2}' = ?$
Но $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}\,,$ где $\left|\vec{e_1'}\right| = \left|\vec{e_2'}\right| = 1,\ \vec{e_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left\{\left|\overrightarrow{OA}\right| = \cos\varphi\,,\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sin\varphi\right\} =$
$= \cos\varphi\,\vec{e_1'} - \sin\varphi\,\vec{e_2'}\,,$
$\vec{e_2} = \sin\varphi\,\vec{e_1'} + \cos\varphi\,\vec{e_2'}$. *Итак,*
$\vec{x} = x_1(\cos\varphi\,\vec{e_1'} - \sin\varphi\,\vec{e_2'}) +$
$+ x_2(\sin\varphi\,\vec{e_1'} + \cos\varphi\,\vec{e_2'}) =$
$= \vec{e_1'}(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi) +$
$+ \vec{e_2'}(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi).$
Векторы равны, если равны соответствующие проекции этих векторов:

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = x_1'\,,$$
$$-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi = x_2'\,.$$

Полученное решение можно записать в матричной и операторной формах:

$$\begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$R(\varphi)\,\vec{x} = \vec{x'},\ \text{где}$$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \ (2\times 2)\ \text{— матрица поворота.}$$ ◄

• *Преобразование вектора или система линейных алгебраических уравнений могут записываться различным образом:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}_{(2\times 2)(2\times 1) = (2\times 1)} \quad \text{— матричная форма}$$

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'_1} \quad \text{— операторная форма}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = x'_i \quad \text{— тензорная форма}$$

Задача 2

Убедиться, что $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{{x'_1}^2 + {x'_2}^2}$ *, т.е. что длина отрезка прямой при повороте не меняется (самостоятельно).*

Задача 3

Пусть задана матрица поворота A и координаты вектора в штрихованной системе координат $x'_1,\ x'_2$. Найти $x_1,\ x_2$.

▶ *Решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений, которую решаем вычитанием уравнений после умножения их на подходящие коэффициенты.*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = x'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x'_2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} a_{21} \\ a_{11} \end{array} \quad \begin{array}{|l} a_{22} \\ a_{12} \end{array}$$

$$a_{12}a_{21}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}x'_1 - a_{11}x'_2$$

$$x_2 = \frac{a_{21}x'_1 - a_{11}x'_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = \frac{a_{11}x'_2 - a_{21}x'_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}x'_1 - a_{12}x'_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22}x'_1 - a_{12}x'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta \\ a_{22}x_1' - a_{12}x_2' &= \begin{vmatrix} x_1' & a_{12} \\ x_2' & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 \\ a_{11}x_2' - a_{21}x_1' &= \begin{vmatrix} a_{11} & x_1' \\ a_{21} & x_2' \end{vmatrix} = \Delta_2 \end{aligned}\right\}\ \text{определители} \quad \blacktriangleleft$$

• *Полученное решение известно в математике как формула Крамера (правило Крамера).*

Формула Крамера

Формула Крамера — формула решения квадратной системы n линейных алгебраических уравнений:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}; \quad \Delta \neq 0, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Δ_i — *дополнительные определители,*
Δ — *определитель системы (детерминант матрицы системы).*

★ *Дополнительный определитель образуется из определителя системы, заменой i-того столбца на столбец свободных членов.*

Пример 2. *Найти:* Δ , Δ_1 , Δ_2 , x_1 , x_2, *если*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ -4x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\triangleright \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 = 22, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 26, \quad x_1 = \tfrac{27}{22}, \quad x_2 = \tfrac{26}{22} = \tfrac{13}{11} \quad \triangleleft$$

Лекция 2. Определители и их свойства

Рассмотренные ниже свойства определителя нам пригодятся как для вычисления определителей, так и для нахождения рангов матриц при решении систем линейных алгебраических уравнений.

★ *Определителем или детерминантом квадратной матрицы называется скаляр, образованный из элементов этой матрицы следующим образом*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Здесь $j = j_1, j_2, \dots, j_n$ — это всевозможные перестановки натуральных чисел $j = 1, 2, 3, \dots, n$, при этом сам этот набор чисел: $j = 1, 2, 3, \dots, n$ — основная перестановка, а t_j — число транспозиций, которое необходимо совершить, чтобы перевести данную перестановку к основной.

★ *Порядком определителя называется число столбцов (строк) квадратной матрицы*

Детерминант 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}.$$

j_1, j_2	t_j
$1, 2$	0
$2, 1$	1

Определитель 3-го порядка

Вопрос: Сколько перестановок можно составить из трёх элементов?

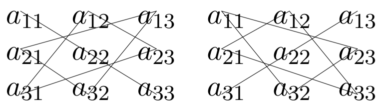
Ответ: $3!$ *(три факториал).* $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,.$$

$$3! \left\{ \begin{array}{c|l} j_1, j_2, j_3 & t_j \\ 1,2,3 & 0 \\ 3,2,1 & 3 \\ 2,3,1 & 2 \\ 2,1,3 & 1 \\ 1,3,2 & 1 \\ 3,1,2 & 2 \end{array} \right.$$

t_j – чётная $\quad$ t_j – нечётная



Свойства определителя

1. *Определитель n-го порядка сводится к вычислению определителей $n-1$-го порядка посредством его разложения по какой-либо строке (столбцу).*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}.$$

★ *M_{ik} — определитель $n-1$-го порядка, называемый минором, полученный из основного определителя, вычеркиванием i-той строки и k-того столбца.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.*

★ *Транспонированной матрицей называется такая матрица, у которой все строки заменены соответствующими столбцами.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{при } a_{12} \neq a_{21}.$$

$$\det A = \det A^T.$$

3. *Если поменять в определителе местами какие-либо две строки (столбца), то определитель изменит знак.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

$$a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}).$$

4. *Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на число, то такой определитель будет отличаться от исходного умножением на это число.*

$$\det A' = \sum_j (-1)^{t_j} a'_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = \left\{\ a'_{1j_1} = ka_{1j_1}\ \right\} =$$

$$= \sum_j (-1)^{t_j} ka_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = k\sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}.$$

$$\det A' = k \det A.$$

5. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны* 0, *то такой определитель равен* 0.

6. *Если в определителе какие-либо две строки (столбца) равны между собой, то такой определитель равен* 0.

По третьему свойству, после перестановки строк (столбцов) определитель должен сменить знак, но с другой стороны после перестановки одинаковых строк (столбцов) определитель не должен измениться, т.е.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta' = -\Delta \\ \Delta' = \Delta\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta' = \Delta = 0.$$

7. *Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на любое число, то определитель не изменится.*

$$\det A' = \sum_j (-1)^{tj} a'_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{tj} (a_{1j_1} + k a_{2j_2}) a_{2j_2} \dots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{tj} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} + \underbrace{k \sum_j (-1)^{tj} a_{2j_2} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}}_{= 0 \text{ по 6-ому свойству}} = \det A.$$

Пример 1. *Вычислить определитель.*

$$\triangleright \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \triangleleft$$

• *Вычисление определителей проводится путём последовательного понижения порядка определителя посредством элементарных преобразований, не меняющих его значение (7-ое свойство).*

Лекция 3. Матрицы и действия над ними

Произведение матриц в отличие от произведения чисел зависит от порядка сомножителей, и более того, не всякие матрицы можно перемножать или складывать.

★ *Матрицей называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, содержащая m-строк и n-столбцов.*

$$A = (a_{ij}) = \widehat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (m \times n).$$

★ *Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов — $(n \times n)$.*

★ *Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.*

$$A = B,\text{ если } \quad a_{ij} = b_{ij},\text{ где } \quad \begin{array}{l} i = \overline{1,m}; \\ j = \overline{1,n}. \end{array}$$

★ *Матрица,содержащая один столбец или одну строку, называется вектором.*

$$(m \times 1) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \overrightarrow{c}\,; \quad (1 \times m) = (c_1\, c_2 \dots c_m) = \overrightarrow{c}^{\,T}.$$

★ *Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы равны нулю.*

$$\widehat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{в частности, } \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение матриц

★ *Результатом сложения двух матриц является матрица, каждый элемент которой представляет собой сумму соответствующих элементов матриц.*

$$\underbrace{\widehat{a}+\widehat{b}=\widehat{c}}_{(m\times n)+(m\times n)=(m\times n)}, \quad \text{где } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{не имеет} \\ \text{смысла} \end{array} \right.$$

• *Складываются только матрицы одинаковой размерности.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{не имеет} \\ \text{смысла} \end{array} \right.$$

а) $A+B=B+A$ — переместительное свойство.

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$ — сочетательное свойство.

Умножение матрицы на число

★ *Результатом умножения матрицы на число является матрица, каждый элемент которой умножен на это число.*

$$\underbrace{\lambda\cdot\widehat{a}=\widehat{c}}_{\lambda\cdot(m\times n)=(m\times n)}, \quad \text{где } c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \\ 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad \text{Сравни!}$$

Умножение матриц

★ *Результатом умножения матриц, будет матрица, каждый элемент которой является результатом перемножения соответствующей строки первой матрицы на соответствующий столбец второй матрицы.*

$$\underbrace{\widehat{a}\cdot\widehat{b}=\widehat{c}}_{(m\times n)(n\times k)=(m\times k)}\quad,\quad \text{где}\ \ c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

• *Перемножаются только такие две матрицы, у которых число столбцов первой равно числу строк второй матрицы.*

Пример 1. *Вычислить.*

$$\triangleright\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 20 \\ 6 & 8 & 32 \end{pmatrix}}_{(3\times2)(2\times3)=(3\times3)}\quad\triangleleft$$

Пример 2. *Вычислить.*

$$\triangleright\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}}_{(2\times3)(3\times2)=(2\times2)}\quad\triangleleft$$

• *Умножение матриц не обладает перестановочным свойством, более того, при перестановке может меняться размерность.*

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

★ *Единичной матрицей называется такая квадратная матрица, диагональные элементы которой равны единицам, а остальные равны нулю.*

$$E = \widehat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Единичная матрица, а также нулевая квадратная матрица, обладают перестановочным свойством по отношению к квадратной матрице той же размерности.*

$$\widehat{0} \cdot \widehat{a} = \widehat{a} \cdot \widehat{0} = \widehat{0}; \quad \widehat{1} \cdot \widehat{a} = \widehat{a} \cdot \widehat{1} = \widehat{a}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

★ *Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, порожденного данной матрицей.*

• *При вычислении ранга матрицы производят те же преобразования, что и при вычислении определителя.*

Пример 3. *Найти ранг матрицы.*

$$\triangleright \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r\,(\text{ранг}) = 2 \quad \triangleleft$$

• *Ранг матрицы фактически равен числу отличных от нуля элементов, примыкающих к гипотенузе нулевого треугольника.*

Лекция 4. Системы линейных уравнений и их исследование

Не только в математике, но и в жизни, люди нередко ставят и пытаются решать задачи, которые не имеют решения. Нам нужно научиться определять: имеет ли система одно решение, нуль решений или множество решений.

★ *Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется выражение следующего вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$; x_j — неизвестные, b_i — свободные члены.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — матричная форма

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$ — операторная форма

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$ — тензорная форма

★ *Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ или $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ называется решением системы, если она обращает все уравнения в тождества.*

★ *Система совместна, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместна, если она не имеет ни одного решения.*

★ *Система называется однородной, если все свободные члены равны нулю*

$$A\overrightarrow{x}=0,$$

где под 0 *подразумевается нулевой вектор* $\overrightarrow{0}$.

- $\boxed{\det A=\Delta}$ — определитель системы

★ *Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов*

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли

Система совместна, если ранг A *равен рангу* B *и несовместна, если ранг* B *больше ранга* A.

▶ 1. *Пусть система совместна, тогда*

$$\alpha_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\ldots+\alpha_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

т.е. столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы. Исходя из седьмого свойства определителя и определения ранга матрицы приходим к выводу, что ранг A *равен рангу* B $(\ r_A=r_B\ )$.

2. *Пусть $r_B > r_A$. В этом случае столбец свободных членов не может сводиться к линейной комбинации столбцов матрицы системы, т.е.*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \not\equiv \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Последнее означает, что система несовместна. ◀

Вопрос: В чём нестрогость провёденного доказательства?

Ответ: В первом пункте показано обратное.

Первый случай

Пусть $m = n$, $\overrightarrow{b} \neq 0$.

а) *Если $\Delta \neq 0$, то $r_A = r_B = r = n$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.*

б) *Если $\Delta = 0$, то либо $r_B > r_A$, либо $r_A = r_B = r < n$.*

Последние два случая рассмотрены в Примерах 1 и 2.

Пример 1. *Решить:* $\begin{cases} x + y = 1\,, \\ -x - y = 2\,. \end{cases}$

▷ 1. *Исследование на совместность.*

$$B = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} r_A = 1, \\ r_B = 2 \end{array} \right\} \; r_B > r_A\,.$$

Ответ: Система несовместна. ◁

Пример 2. *Решить:* $\begin{cases} x+y=1\,, \\ -x-y=-1\,. \end{cases}$

$\triangleright$ 1. *Исследование на совместность.*

$$B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r_A=r_B=r=1$ — *система совместна.*

2. *Число свободных параметров (неизвестных).*

$n-r=2-1=1$ — *один свободный параметр.*

3. *Нахождение неизвестных.*

$$\begin{cases} x+y=1, \\ -x-y=-1; \end{cases} \quad y=c\,, \quad \text{тогда} \quad x=1-c\,.$$

4. *Проверка.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-c \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-c+c \\ -1+c-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} 1-c \\ c \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Второй случай

$m=n,\ \ \overrightarrow{b}=0.$

Очевидно, что однородная система всегда совместна.

$$r_A=r_B=r\leqslant n\,, \quad x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}\,, \quad \text{причём} \quad \Delta_i=0\,.$$

а) *Если* $\Delta\neq 0$, *то* $x_i=\dfrac{0}{\Delta}=0$ — тривиальное решение.

б) *Если* $\Delta=0$, *то* $x_i=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ — бесконечно много решений.

Пример 3. *Решить:* $\begin{cases} x - y + 3z = 0\,, \\ 2x + 3y - z = 0\,, \\ 3x + 2y + 2z = 0\,. \end{cases}$

$\triangleright$ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r = 2\,.$$

2. $n = 3\,, \quad n - r = 3 - 2 = 1\,.$

3. $z = c \ + \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y = -3c \\ 2x + 3y = c \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3c & -1 \\ c & 3 \end{vmatrix} = -8c, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3c \\ 2 & c \end{vmatrix} = 7c\,.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{8}{5}c, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{5}c, \quad z = c\,.$$

4. *Проверка:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 - 7 + 15 \\ -16 + 21 - 5 \\ -24 + 14 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x} = \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Лекция 5. Решение систем линейных уравнений

Существует несколько методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В частности, решение системы может быть сведено к перемножению двух матриц.

Третий случай

Число уравнений не равно числу неизвестных: $m \neq n$.

Пример 1. *Решить:* $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0\,, & n = 3\,, \\ 2x + y - z = 0\,; & m = 2\,. \end{cases}$

▷ 1. $\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)}_{r=2,\ \text{система совместна}}$

2. $r = 2\,, \quad n - r = 3 - 2 = 1\,.$

3. $z = c \quad + \quad \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = -3c\,, \\ 2x + y = c\,. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3c & -2 \\ c & 1 \end{vmatrix} = -c\,.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3c \\ 2 & c \end{vmatrix} = c + 6c = 7c \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{c}{5}\,, \quad y = \tfrac{7c}{5}\,.$$

4. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} \\ \frac{7c}{5} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} - \frac{14c}{5} + 3c \\ -\frac{2c}{5} + \frac{7c}{5} - c \end{pmatrix} =}_{(2\times3)(3\times1)=(2\times1)}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{15c}{5} + \frac{15c}{5} \\ \frac{5c}{5} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Ответ: } \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} \\ \frac{7c}{5} \\ c \end{pmatrix} \qquad \triangleleft$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

$\boxed{A^{-1}}$ — обратная матрица

★ *Матрица называется обратной к данной квадратной матрице, если их произведение равно единичной матрице.*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \widehat{1} = \widehat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

• *Обратная матрица существует только для невырожденной квадратной матрицы.*

★ *Вырожденной квадратной матрицей называется такая матрица, определитель которой равен нулю.*

Задача 1

Пусть $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, *где* A — *квадратная матрица.*
Выразить $\overrightarrow{x}$ *через* A^{-1}.

► $A^{-1}|\ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \ \Rightarrow\ A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ т.к. $\widehat{1}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$, то

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b} \quad \text{— операторная форма}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{-1} b_j \quad \text{— тензорная форма} \qquad ◄$$

Задача 2

Найти элементы обратной матрицы ${a_{ij}}^{-1}$.

► *Для нахождения элементов обратной матрицы воспользуемся формулой Крамера.*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\,, \quad \Delta_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j M_{ji}$$

$$\underbrace{x_i = \sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^{-1} b_j, \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta} b_j}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta}} \quad ◄$$

Пример 2. *Найти A^{-1}, если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

▷ $\begin{array}{ll} M_{11} = 4\,, & M_{12} = 3\,, \\ M_{21} = 2\,, & M_{22} = 1\,. \end{array} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

$$\begin{array}{ll} {a_{11}}^{-1} = -2\,, & {a_{12}}^{-1} = 1\,, \\ {a_{21}}^{-1} = \frac{3}{2}\,, & {a_{22}}^{-1} = -\frac{1}{2}\,. \end{array}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ◁

Пример 3. *Решить методом обратной матрицы:*

$$\begin{cases} x + 2y = 4\,, \\ 3x + 4y = 12\,. \end{cases}$$

$$\triangleright \quad \overrightarrow{x} = A^{-1}\,\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Алгоритм вычисления обратной матрицы методом Гаусса состоит в следующем преобразовании:

$$\boxed{(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1})}$$

которое проводится посредством тех же элементарных действий, что и при вычислении определителей.

Пример 4. *Найти* A^{-1}, *если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\triangleright \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Лекция 6. Скалярное произведение векторов

В этой лекции мы углубим школьное знакомство со скалярным произведением векторов, а также с преобразованием векторов из прямоугольной системы координат в косоугольную.

Вектор в n-мерном пространстве

★ *Множество R называется линейным пространством, а его элементы — векторами, если для любых двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ определена их сумма $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in R$ и произведение $\alpha \overrightarrow{a} \in R$, где α — любое число; и выполнены условия:*

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.
3. $\alpha \overrightarrow{a} + \alpha \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
4. $\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{a}$.
5. $\alpha(\beta \overrightarrow{a}) = (\alpha\beta) \overrightarrow{a}$.
6. $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.
7. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$, где $\overrightarrow{0}$ — нуль-вектор.
8. $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

★ *Заданные векторы пространства R называют линейно зависимыми, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{a_k} = 0\,, \text{ где } \alpha_k \neq 0\,.$$

В противном случае эти векторы называют линейно независимыми.

★ *Размерность пространства — это максимальное число содержащихся в нём линейно независимых векторов.*

★ *Упорядоченную систему n линейно независимых векторов называют базисом пространства R_n.*

★ *Вектор в линейном n-мерном пространстве R_n представляет собой матрицу размерности $(n \times 1)$ или $(1 \times n)$.*

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (n \times 1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}$$

$\overrightarrow{a}^T = (1 \times n) = (a_1\, a_2\, \ldots a_n)$ — транспонированный вектор.

Скалярное произведение векторов

★ *Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется матричное произведение этих векторов (строка на столбец), результатом которого является скаляр:*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = (a_1\, a_2\, \ldots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}$$

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}^T \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

• *Выше приведены различные обозначения скалярного произведения векторов. Знак транспонирования у векторов обычно для краткости опускают.*

$$\boxed{(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)} \text{ — скаляр.}$$

$$a^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2$$ — квадрат модуля вектора

$$\boxed{\left|\overrightarrow{a}\right| = a = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)}}$$ — модуль вектора

• *В скалярном произведении комплексных векторов первый вектор должен быть подвергнут не только операции транспонирования, но и комплексного сопряжения.*

Вектор в трёхмерном пространстве

★ *Вектор в трёхмерном пространстве в декартовой системе координат определяется одним из выражений*

$$\boxed{\overrightarrow{x} = (x\,y\,z) = \overrightarrow{i}\,x + \overrightarrow{j}\,y + \overrightarrow{k}\,z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}},$$

где x, y, z — координаты или проекции вектора, а

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

единичные ортогональные векторы, задающие декартов базис.

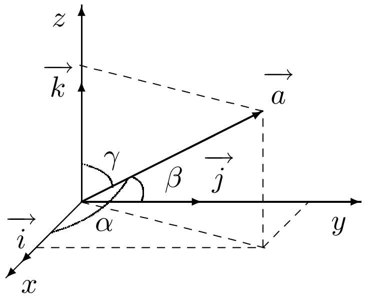
$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$ — скалярное произведение в трёхмерном пространстве

Задача 1

Показать, что векторы $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ являются единичными и ортогональными (самостоятельно).

Задача 2

Установить связь между направляющими косинусами вектора.



► $\overrightarrow{a} = a(\overrightarrow{i}\cos\alpha + \overrightarrow{j}\cos\beta + \overrightarrow{k}\cos\gamma)$,
$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i} = a\cos\alpha = \text{пр}_{\vec{i}}\,\overrightarrow{a}}$ — проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на базисный вектор $\overrightarrow{i}$, т.к.

$$(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_{\vec{i}}\,\overrightarrow{a}}{a}, \quad \cos\beta = \frac{\text{пр}_{\vec{j}}\,\overrightarrow{a}}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{\text{пр}_{\vec{k}}\,\overrightarrow{a}}{a}$$

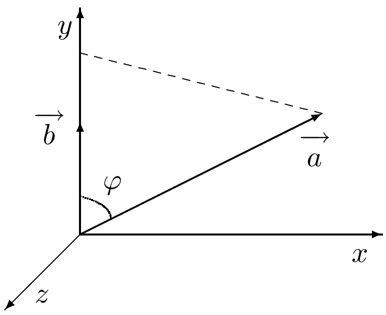
$$\underbrace{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = a^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \quad ◄$$

Задача 3

Выразить $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ через косинус угла между этими векторами.



► *Вектор $\overrightarrow{b}$ направим по оси y, тогда*

$$\overrightarrow{b} = b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{a} = a\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\cos\varphi\\\cos\gamma\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = ab\,(0\cdot\cos\alpha + {}$
$+1\cdot\cos\varphi + 0\cdot\cos\gamma) = ab\cos\varphi$.

• *Скалярное произведение векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.*

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\varphi} \implies \boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}} \quad ◀$$

• *Скалярное произведение ортогональных (перпендикулярных) векторов равно нулю.*

• *Сказанное верно в n-мерном пространстве.*

Неравенство Коши-Буняковского

Задача 4

Показать, что в n-мерном пространстве выполняется неравенство

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \leqslant \left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right).$$

► *Введём вспомогательный вектор* $\vec{a}+\lambda\vec{b}$

Очевидно, что $$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\geqslant 0$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)+2\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\lambda^2\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\geqslant 0$$

Пусть $\vec{a}\cdot\vec{a}=C$, *Тогда* $A\lambda^2+B\lambda+C\geqslant 0$,

$2\,\vec{a}\cdot\vec{b}=B$, *если* $D=B^2-4AC\leqslant 0$.

$\vec{b}\cdot\vec{b}=A$. *Отсюда:*

$$\underbrace{4\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2-4\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\leqslant 0}$$

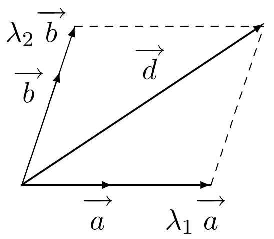
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \leqslant \left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)} \quad ◀$$

Вектор в косоугольном базисе трёх векторов

Задача 5

Пусть задано 4 вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *и* $\overrightarrow{d}$ *в декартовой системе координат. Требуется найти вектор* $\overrightarrow{d}$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$.



▶ $\overrightarrow{d} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c}$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = ?$$

Если расписать это векторное равенство, то получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x & m = 3 \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y & n = 3 \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z & \Delta \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Ответ: $\overrightarrow{d} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \overrightarrow{a} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \overrightarrow{b} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \overrightarrow{c}$ ◀

Пример 1. *Пусть* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

и $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Найти вектор* $\overrightarrow{d}$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$.

▷ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$

Аналогично находятся: $\Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = -1.$

Ответ: $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

или $\overrightarrow{d} = (2, 1, -1)$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$. ◁

Лекция 7. Векторное и смешанное произведение векторов

Результатом перемножения двух векторов может быть не только скаляр, но и вектор, скалярное умножение которого на третий вектор даёт смешанное произведение.

Задача 1

Найти вектор, ортогональный двум заданным векторам.

Дано: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$. *Найти вектор* $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}$.

► *По условию и свойству скалярного произведения*

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

или

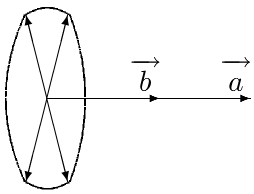
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0.$$

и тем самым задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} xa_x + ya_y + za_z = 0, & m = 2, \\ xb_x + yb_y + zb_z = 0; & n = 3. \end{cases}$$

1. *Если векторы коллинеарны, то* $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ *и тогда*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda b_x & \lambda b_y & \lambda b_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \lambda \left(\begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$



Отсюда $r = 1, \quad n - r = 3 - 1 = 2$. *Здесь решением является множество векторов, лежащих в плоскости, ортогональной векторам* $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$.

2. *Если* $\overrightarrow{a} \neq \lambda \overrightarrow{b}$, *то* $r = 2$, $n - r = 3 - 2 = 1$ *(один свободный параметр).*

$$z = c \quad + \quad \left\{ \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} xa_x + ya_y = -ca_z, \\ xb_x + yb_y = -cb_z; \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -ca_z & a_y \\ -cb_z & b_y \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$x = \frac{c \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{-c \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}.$$

Зададим c *таким образом, чтобы решение упростилось, а именно,* $c = \Delta$. *Тогда*

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

★ *Векторным произведением двух векторов называется вектор ортогональный этим векторам и определяемый формулой:*

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}} \quad ◄$$

Свойства векторного произведения

1. *Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.*

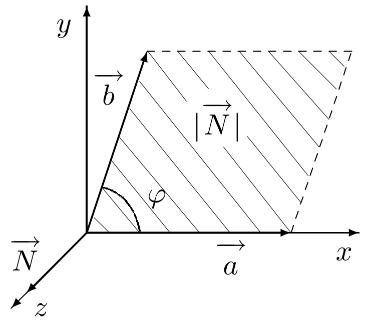
2. $\left[\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

3. $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]$.

• *Первые три свойства следуют из свойств определителя.*

Задача 2

Выразить модуль векторного произведения через угол между векторами.



▶ *Выбираем систему координат таким образом, чтобы*

$\overrightarrow{a} = (a, 0, 0)$,

$\overrightarrow{b} = (b\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$.

Векторное произведение, после подстановки $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в формулу, полученную в предыдущей задаче, принимает вид:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & 0 & 0 \\ b\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} a & 0 \\ b\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{k}\, ab\sin\varphi. \quad \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = ab\sin\varphi = S = \left|\overrightarrow{N}\right| \quad ◀$$

4. *Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Смешанное произведение векторов

★ *Смешанным произведением трёх векторов называется скалярное произведение одного из векторов на векторное произведение двух других.*

Задача 3

Представить смешанное произведение векторов в виде определителя.

▶ *Поскольку*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{i}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_x + \overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_y + \overrightarrow{k}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_z, \text{ то}$$

$$\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = c_x\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_x + c_y\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_y + c_z\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_z =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}} \text{ — смешанное произведение векторов } ◀$$

Свойства смешанного произведения

1. *Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.*

★ *Компланарными векторами называются векторы, лежащие в одной плоскости.*

Задача 4

Доказать 1-ое свойство.

▶ *Если* $\overrightarrow{c}$ *лежит в той же плоскости, что и* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$, то

$$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}.$$

Тогда смешанное произведение векторов $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равно

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x & \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y & \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

2. *Чётная перестановка векторов в смешанном произведении его не меняет:*

$$\left(\overrightarrow{c}, \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right) = \left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = \left(\overrightarrow{b}, \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]\right).$$

Задача 5

Доказать 2-ое свойство.

$\blacktriangleright$ *Согластно известному свойству определителя (*Лекция 2*)*

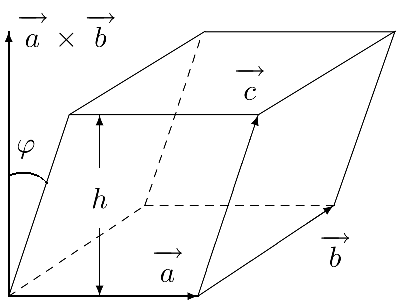
$$\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

чётная перестановка строк его не изменит. $\blacktriangleleft$

3. *Модуль смешанного произведения равен объёму параллепипеда, построенного на этих векторах.*

Задача 6

Доказать 3-е свойство.



$\blacktriangleright \quad \left|\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right| =$

$= c\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| \cos\varphi =$

$= \left\{h = c\cos\varphi\right\} =$

$= Sh = V_{\text{параллепипеда}} \quad \blacktriangleleft$

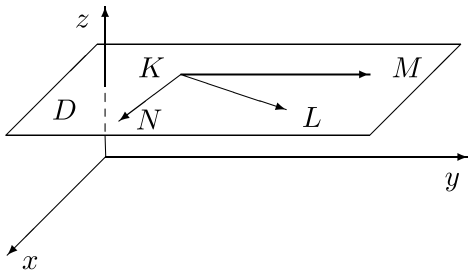
Лекция 8. Уравнения плоскости и прямой

В различных по размерности пространствах одно и то же линейное уравнение описывает различные геометрические объекты.

Общие уравнения плоскости и прямой

Задача 1

Пусть плоскость задана тремя точками K, N и L с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) соответственно.
Найти условия принадлежности произвольной точки $M(x, y, z)$ этой плоскости.



► *Решение будем искать, основываясь на известном свойстве смешанного произведения для компланарных векторов:*

$$\overrightarrow{KM} \cdot \left(\overrightarrow{KN} \times \overrightarrow{KL}\right) = 0$$

Поскольку
$$\begin{aligned} \overrightarrow{KM} &= (x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1) \\ \overrightarrow{KN} &= (x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1) \\ \overrightarrow{KL} &= (x_3 - x_1, \quad y_3 - y_1, \quad z_3 - z_1) \end{aligned}, \quad \text{то}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad \Longrightarrow$$

$$(x - x_1)\underbrace{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}_{A} + (y - y_1)\underbrace{\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}}_{B} +$$

$$+(z-z_1)\underbrace{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}_{C}=0;$$

$$\underbrace{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}_{\Downarrow};$$

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ — общее уравнение плоскости ◀

Задача 2

Определить, какой геометрический объект описывается уравнением $z=0$.

▶ *пространство:*

одномерное	$\{z\}$	$z=0$		*точка*
двухмерное	$\{x,z\}$	$z=0$	x *- любые*	*прямая*
трёхмерное	$\{x,y,z\}$	$z=0$	x,y *- любые*	*плоскость* ◀

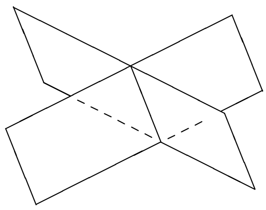
Задача 3

Исследовать уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей.

▶ $\boxed{\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}}$ — общее уравнение прямой

1. *Если* $(A_1B_1C_1)=\lambda\,(ABC)$, *т.е. векторы коллинеарны.*
$$\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ 0 & 0 & 0 & -D_1+\lambda D \end{array}\right),$$
$$r_A=1\neq r_B=2.$$
Система несовместна и плоскости не пересекаются.

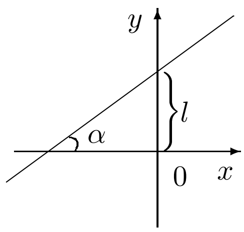
2. *Если* $(A_1B_1C_1)\neq\lambda\,(ABC)$, *т.е. векторы неколлинеарны.* $r_A=r_B=2$ *и система совместна;* $n-r=3-2=1$.



$$\begin{cases} By + Cz = -Ax - D, \\ B_1y + C_1z = -A_1x - D_1. \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -Ax - D & C \\ -A_1x - D_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}} = kx + l.$$

Аналогично $z = k_1x + l_1$.



Если $z = 0$, *т.е.* $A_1 = B_1 = D_1 = 0$, *то заданная система уравнений даёт известное со школы* уравнение прямой на плоскости*:*

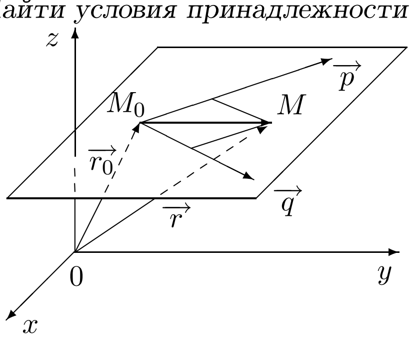
$$\boxed{y = kx + l}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент. ◀

Параметрические уравнения плоскости и прямой

Задача 4

Пусть плоскость задана двумя векторами $\overrightarrow{p}$ *и* $\overrightarrow{q}$, *лежащими на ней, и точкой* M_0 *с координатами* (x_0, y_0, z_0).
Найти условия принадлежности точки $M(x, y, z)$ *плоскости* D.



▶ $\lambda_1 \overrightarrow{p} + \lambda_2 \overrightarrow{q} = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$. *Отсюда*

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 p_x + \lambda_2 q_x = x - x_0 \\ \lambda_1 p_y + \lambda_2 q_y = y - y_0 \\ \lambda_1 p_z + \lambda_2 q_z = z - z_0 \end{cases}}$$

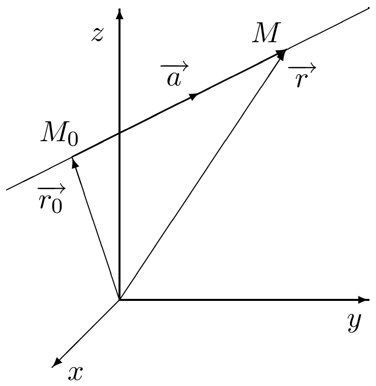
$$\Downarrow$$

параметрическое уравнение плоскости

$n = 5$, $r = 3$, $n - r = 2$ — *число свободных параметров.* ◀

Задача 5

Пусть прямая задана направляющим вектором $\overrightarrow{a} = (a_x \ a_y \ a_z)$ *и точкой* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$. *Найти условия принадлежности точки* $M\,(x, y, z)$ *этой прямой.*



► $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda \overrightarrow{a}$

$$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_x \\ y - y_0 = \lambda a_y \\ z - z_0 = \lambda a_z \end{cases}}$$

$\Downarrow$

параметрическое уравнение прямой

Исключая параметр λ *получим:*

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}}$$ — каноническое уравнение прямой ◄

Пример 1. *Пусть* $\overrightarrow{a} = (2 \ -1 \ 0)$ *и точка* $M_0\,(1, 2, 1)$ *принадлежат прямой. Записать каноническое уравнение этой прямой.*

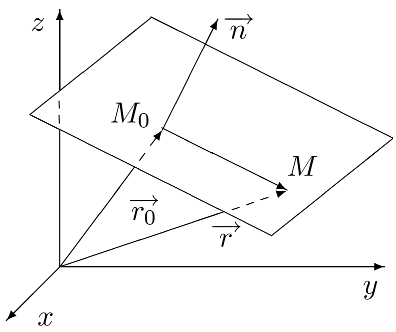
$$\triangleright \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{0} \quad \triangleleft$$

Векторные уравнения плоскости и прямой

Задача 6

Пусть плоскость задана нормальным единичным вектором $\overrightarrow{n}$ $\left(\left|\overrightarrow{n}\right| = 1\right)$ *и точкой на плоскости* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$.
Записать уравнение этой плоскости.

★ *Нормальным вектором плоскости называется такой вектор, который ортогонален любому вектору, лежащему на этой плоскости.*



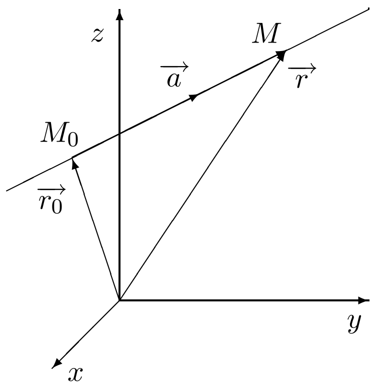
► *По условию $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен $\overrightarrow{n}$. По свойству скалярного произведения:*

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Поскольку $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$, то получим

$\boxed{\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \overrightarrow{n} = 0}$ — векторное уравнение плоскости ◄

Задача 7 *Пусть вектор $\overrightarrow{a}$ и точка $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ принадлежат прямой. Записать уравнение прямой через векторы, без привлечения параметра.*



► *Поскольку*

$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \parallel \overrightarrow{a}$,

то используя свойство векторного произведения, получим

$\boxed{\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \times \overrightarrow{a} = 0}$ — векторное уравнение прямой ◄

Лекция 9. Уравнения прямой и плоскости

Одна и та же прямая или плоскость могут быть описаны различными уравнениями. Выбор того или иного уравнения определяется постановкой задачи.

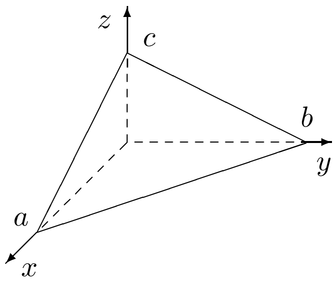
Уравнение плоскости в отрезках

Задача 1

Найти связь между уравнениями

$Ax + By + Cz + D = 0$ (1) *и* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (2) ,

и определить смысл a, b, c.



► *Вопрос: Как осуществить переход от* (1) *к* (2)*?*

Ответ: Поделить на $-D$.

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1}$ — уравнение плоскости в отрезках ◄

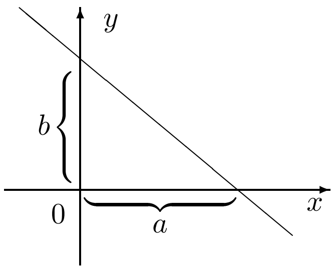
Уравнение прямой в отрезках

Задача 2

Преобразовать общее уравнение прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

к уравнению прямой в отрезках.



► $\underbrace{Ax + By + D = 0 \quad | : (-D)}$

$$\Downarrow$$

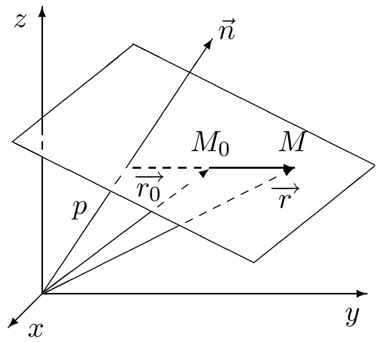
$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ — уравнение прямой в отрезках

где $a = -\frac{D}{A} \quad b = -\frac{D}{B}$ ◄

Уравнение плоскости в нормальном виде

Задача 3

Пусть нормальный вектор плоскости задан направляющими косинусами
$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$, *и известно кратчайшее расстояние p от этой плоскости до начала координат. Уравнение плоскости выразить через эти величины.*



► $\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n}, \quad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n},$

где $\left|\overrightarrow{n}\right| = 1.$

Поскольку $\overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n} = \text{пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{r_0} = p$, *то получим*

$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p}$ — уравнение плоскости в нормальном виде ◄

Задача 4

Дано уравнение плоскости в общем виде.
Найти расстояние p от плоскости до начала координат.

▶ *Вопрос: Каким образом вы предлагаете решать эту задачу?*

Ответ: Необходимо перейти от уравнения плоскости в общем виде к уравнению плоскости в нормальном виде.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$Ax + By + Cz = -D, \text{ где } \quad \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{N}\right| \neq 1$$

Перейдём от $\overrightarrow{N}$ к $\overrightarrow{n}$.

$$\frac{\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = \boxed{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{r} = -D \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = p \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p = -\frac{D}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \quad ◀$$

Пример 1. *Найти расстояние от плоскости* $x - 2y + 4z + 5 = 0$ *до начала координат, направляющие косинусы нормального вектора и отрезок, лежащий на оси* x *между плоскостью и началом координат.*

▷ $$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -\frac{5}{\sqrt{1+4+16}} = -\frac{5}{\sqrt{21}}$$

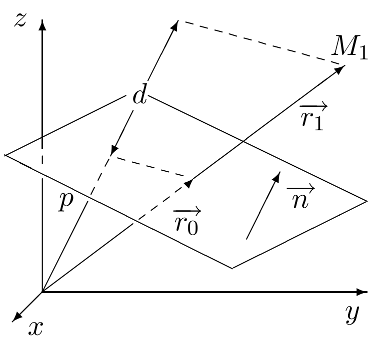
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a = -5 \quad ◁$$

Задача 5

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде.
Найти расстояние d от точки M_1 до плоскости.

▶ $Ax + By + Cz + D = 0, \quad M_1\,(x_1, y_1, z_1) \notin$ *плоскости*



Вопрос: Каким образом можно выразить искомое расстояние d через радиус-вектор $\overrightarrow{r_1}$ точки M_1?

Ответ:

$$d = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{n} = \\ = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - p$$

Поскольку $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, *то*

$$\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(Ax_1 + By_1 + Cz_1\right),$$

Согласно Задаче 4

$$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

и расстояние от точки $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости равно:*

$$\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right)} \quad ◀$$

Пример 2. *Найти расстояние от точки* $M_1\,(3, 0, 1)$ *до плоскости* $x - 2y + 4z + 5 = 0$.

$$\triangleright \quad d = \frac{1}{\sqrt{21}} \left(1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5\right) = \frac{12}{\sqrt{21}} \quad \triangleleft$$

Лекция 10. Линейные операторы

Линейные операторы описывают самые различные преобразования, взаимодействия и объекты практически во всех областях науки. Так, например, атом водорода описывается линейным оператором Шрёдингера, при этом его собственные векторы называют волновыми функциями, а собственные значения — энергетическими уровнями.

★ *Квадратную матрицу, под действием которой любой вектор $\overrightarrow{x}$, принадлежащий пространству R_n, преобразуется по определённому закону в некоторый вектор $\overrightarrow{y}$, принадлежащий тому же пространству называют линейным оператором.*

$$\overrightarrow{x} \in R_n \stackrel{A}{\Longrightarrow} \overrightarrow{y} \in R_n, \quad \text{т.е. } A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}.$$

Вопрос: Какой линейный оператор вам известен?
Ответ: Оператор или матрица поворота.

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R(\varphi)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}, \quad \left|\overrightarrow{x}\right| = \left|\overrightarrow{y}\right|.$$

Собственные векторы, собственные числа линейного оператора

★ *Собственным вектором линейного оператора A называется такой вектор $\overrightarrow{x}^{(i)}$, который под действием этого оператора испытывает только масштабное преобразование:*

$$\boxed{A\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)}}, \qquad (*)$$

где λ_i — собственные числа, $\overrightarrow{x}^{(i)}$ — собственные векторы.

Задача 1

Показать, что единичные базисные векторы $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ являются собственными векторами диагональной матрицы Λ.
Найти собственные числа диагональной матрицы.

★ *Диагональной матрицей называется такая матрица, у которой отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали.*

► *По условию* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (3 \times 3),$

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{i}$$

Аналогично $\Lambda \overrightarrow{j} = \lambda_2 \overrightarrow{j}$, $\Lambda \overrightarrow{k} = \lambda_3 \overrightarrow{k}$. ◄

Задача 2

Показать, что любой вектор является собственным вектором единичной матрицы, при этом собственные значения равны единице.

► *По правилам умножения* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Следовательно, $E \overrightarrow{x} = 1 \overrightarrow{x} \Rightarrow \lambda = 1$ ◄

Задача 3

Преобразовать уравнение $(*)$, определяющее собственные векторы и собственные числа линейного оператора, к однородному уравнению, т.е. $(*) \Rightarrow B\overrightarrow{x} = 0$.

► *Очевидно* $A\overrightarrow{x}^{(i)} - \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)} = 0$

Поскольку, согласно Задаче 2*:* $\overrightarrow{x}^{(i)} = E\overrightarrow{x}^{(i)}$, *то*

$A\overrightarrow{x}^{(i)} - \lambda_i E\overrightarrow{x}^{(i)} = 0.$ *Ответ:* $(A - \lambda_i E)\overrightarrow{x}^{(i)} = 0. \quad (**)$ ◄

Задача 4

Найти условие, при котором система $(**)$ имеет нетривиальное решение.

$$\blacktriangleright \quad \left\{ \begin{array}{r} x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ \text{все } \Delta_i = 0 \end{array} \right. \implies x_i \neq 0, \text{ если } \Delta = 0.$$

$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$ — характеристическое уравнение ◄

Задача 5

Решить характеристическое уравнение для двухмерного пространства.

► *Вопрос: Как выглядит характеристическое уравнение для двухмерного пространства в явном виде?*

Ответ:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ — характеристическое уравнение}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

По теореме Виета: $\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 6

Найти собственные векторы линейного оператора в двухмерном пространстве.

► *Вопрос: Каким уравнением мы воспользуемся?*

Ответ: Уравнением $(*)$, *где* λ_i *определены* Задачей 5.

$$A\overset{\longrightarrow(i)}{x} = \lambda_i \overset{\longrightarrow(i)}{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11} - \lambda_i)x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} = 0 \quad \text{т.к. } n - r = 2 - 1 = 1.$$

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= ca_{12} \\ x_2^{(i)} &= c(\lambda_i - a_{11}) \end{aligned} \Longrightarrow \overset{\longrightarrow(i)}{x} = c\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Найти* $\overset{\longrightarrow(i)}{x}$ *и* λ_i *матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ 1. $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, -1$

2. $\overset{\longrightarrow(1)}{x} = c\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_{1,2} = 2, -1;\ \overset{\longrightarrow(1)}{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overset{\longrightarrow(2)}{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \triangleleft$

Лекция 11. Квадратичные формы и классификация кривых второго порядка

До сих пор векторы использовались для описания линейных объектов. В этой лекции будет рассмотрено, как векторы и матрицы можно использовать для описания нелинейных объектов.

★ *Квадратичной формой в n-мерном пространстве называется скалярное произведение следующего вида:*

$$\boxed{\begin{gathered} Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \\ = (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n) \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \end{gathered}}$$

где матрица A — симметрическая.

★ *Квадратная матрица, которую не меняет транспонирование $A^T = A$, называется симметрической.*

★ *Канонической квадратичной формой называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных*

$$\boxed{\begin{gathered} Q(x_1{}', x_2{}', \ldots, x_n{}') = \left(\overrightarrow{x'}, \Lambda\overrightarrow{x'}\right) = \\ = (x_1'\, x_2'\, \cdots\, x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i{}'^2 \end{gathered}}$$

Квадратичная форма в двухмерном пространстве

$$Q(x,y) = \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = (x\, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (xa_{11} + ya_{12} \quad xa_{12} + ya_{22})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Каноническая квадратичная форма имеет вид:

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

Классификация кривых второго порядка

★ *Кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола — задаются уравнениями, которые содержат квадратичные формы в двухмерном пространстве, причём, если*

1. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ — *эллипс,*
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ — *гипербола,*
3. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ — *парабола.*

Пример 1. *Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением:* $x^2 + xy + y^2 = 1$.

$\triangleright$ $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ *Согласно* Задаче 5 *предыдущей лекции*

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} > 0$

Ответ: $x^2 + xy + y^2 = 1$ — *эллипс.* $\triangleleft$

Пример 2. *Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением:* $xy = 1$.

$\triangleright$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$

Ответ: $xy = 1$ — *гипербола.* $\triangleleft$

Диагонализация матрицы квадратичной формы

Задача 1

Найти оператор T, диагонализирующий матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

► *Требуется найти такой оператор T, чтобы $TAT^{-1} = \Lambda$.*

Будем исходить из уравнения (1) Лекции 10 *:* $A \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)}$

Подействуем оператором T: $TA\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T\overrightarrow{x}^{(i)}$ и далее

$TA\underbrace{T^{-1}T}_{E}\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T\overrightarrow{x}^{(i)}$ *или* $TAT^{-1}T\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T\overrightarrow{x}^{(i)}$

По условию задачи $TAT^{-1} = \Lambda$, а значит

$$\Lambda T\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T\overrightarrow{x}^{(i)}. \qquad (*)$$

Согласно Задаче 1 Лекции 10 *собственными векторами диагональной матрицы являются единичные базисные векторы, т.е.*

$$\Lambda \overrightarrow{e}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{e}^{(i)}, \qquad (**)$$

Из сопоставления $(*)$ и $(**)$ следует, что $T\overrightarrow{x}^{(i)} = \overrightarrow{e}^{(i)}$ *или*

$$\overrightarrow{x}^{(i)} = T^{-1}\overrightarrow{e}^{(i)} \qquad (***)$$

Если расписать $(***)$, то

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

откуда очевидно, что $\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{pmatrix}}$ ◄

Задача 2

Найти, при каком условии верно $\left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{x}', \Lambda\overrightarrow{x}'\right)$.

$$\blacktriangleright \quad \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}^T A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T \underbrace{T^{-1}T}_{E} A \underbrace{T^{-1}T}_{E} \overrightarrow{x} =$$

$$= \overrightarrow{x}^T T^{-1} \Lambda \overrightarrow{x}' = \left(\overrightarrow{x}', \Lambda\overrightarrow{x}'\right).$$

Поскольку $\left(T\overrightarrow{x}\right)^T = \overrightarrow{x}^T T^T$, *то получим* $T^{-1} = T^T$ ◀

Задача 3

Найти при каких условиях диагонализирующий оператор одновременно является оператором поворота в двухмерном пространстве.

▶ *Вопрос:* Чему равен $R^{-1}(\varphi)$? *Ответ:* $R^{-1}(\varphi) = R(-\varphi) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Чтобы $T^{-1} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{pmatrix} = R^{-1}(\varphi)$, *необходимо:*

1. $x^{(1)} = y^{(2)}, \quad y^{(1)} = -x^{(2)}$
2. ${x^{(1)}}^2 + {y^{(1)}}^2 = 1$, т.е. $\left(\overrightarrow{x}^{(i)}, \overrightarrow{x}^{(i)}\right) = 1$ ◀

• *Чтобы диагонализирующий оператор матрицы квадратичной формы являлся оператором поворота необходимо собственные векторы этой матрицы нормировать на единицу и брать их в определённом порядке, как это показано соответственно в пунктах 2 и 1* Задачи 3.

Лекция 12. Кривые второго порядка

Простейшие нелинейные геометрические объекты — эллипс (окружность), парабола и гипербола. Ниже будут рассмотрены их свойства, а также их движение (сдвиг и поворот).

★ *Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:*

$$Q(x, y) + Ax + By + D = 0,$$

где квадратичная форма зависит от абсциссы и ординаты.

• *Если нет поворота и смещения кривой относительно начала координат, то кривая описывается каноническим уравнением.*

Канонические уравнения кривых второго порядка

Эллипс

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{—} \quad \begin{array}{c}\text{каноническое}\\ \text{уравнение эллипса}\end{array}$$

Вопрос: *Почему это уравнение эллипса?*

Ответ: *Потому, что*

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$$

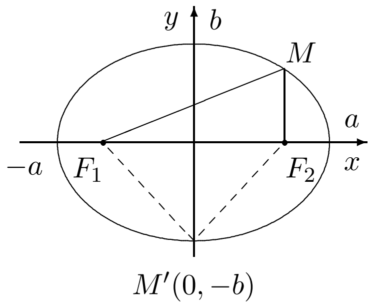
Вопрос: *Каков смысл* a *и* b*?*

Ответ: *Очевидно, что* $x = \pm a$ *и* $y = \pm b$ *— это точки пересечения эллипса с координатными осями. Если* $a > b$*, то* a *— большая, а* b *— малая полуоси эллипса.*

• *При повороте кривой второго порядка появляется смешанное произведение* xy*, а при сдвиге* $Ax + By$*. Это касается любой кривой второго порядка.*

Задача 1

Известно, что каждая точка эллипса $M(x, y)$ удовлетворяет равенству $F_1M + F_2M = 2a$, где $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — координаты фокусов. Выразить c через a и b.



► *По построению*
$F_1M' = F_2M'$.
Тогда по условию задачи:
$F_1M' = a$,
и по теореме Пифагора
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ◄

★ *Отношение* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ *называется эксцентриситетом эллипса (гиперболы).*

Гипербола

Задача 2

Найти уравнение кривой, любая точка которой $M(x, y)$, удовлетворяет равенству $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$, где $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — координаты фокусов.

► *По условию:* $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.
После уничтожения радикалов получим: $x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$, *откуда при* $c^2 = a^2 + b^2$ *следует*

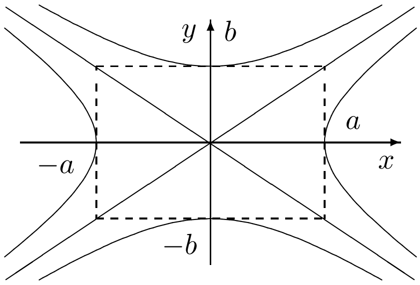
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ — каноническое уравнение гиперболы

Действительно: $\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{a^2b^2} < 0$ ◄

Задача 3

Найти уравнение асимптот гиперболы.

★ *Асимптотой называется такая прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удалённой точке.*



► $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ll \infty$

$\Big\Downarrow$ *если* $x, y \to \infty$

$y \simeq \pm\frac{b}{a}x$

$\boxed{y = \pm\dfrac{b}{a}x}$ — уравнение асимптот

Вопрос: Как построить асимптоты?

Ответ: Очевидно, что асимптоты являются продолжением диагоналей прямоугольника размером $2a \times 2b$. ◄

• *Построение гиперболы начинать с построения асимптот.*

Вопрос: Показать, что при заданных a *и* b *можно построить две гиперболы.*

Ответ: Неравенство $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *безусловно имеет два решения:* $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 < 0,\ \ \lambda_2 > 0$, *т.е. для второй гиперболы* $\lambda_1 = -1/a^2$ *и* $\lambda_2 = 1/b^2$.

Вопрос: Как расположены ветви этих гипербол?

Ответ: Чтобы определить, как относительно асимптот расположены ветви гиперболы, необходимо посмотреть какую ось они пересекают:

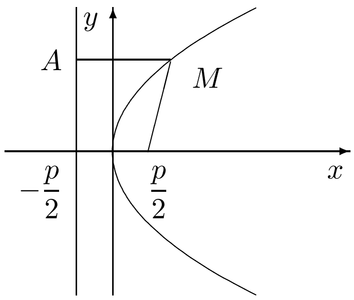
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \overset{y=0}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$$

Если бы $\quad -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *то* $y = 0$ — *исключено.*

Парабола

Задача 4

Найти уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от точки фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$ *и прямой* $x = -\frac{p}{2}$ *(директрисы).*



▶ *По условию* $AM = MF$, *т.е.*

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2 = y^2 \Rightarrow$$

$\boxed{y^2 = 2px}$ — каноническое уравнение параболы

Действительно: $\lambda_1 \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ◀

Преобразование кривых второго порядка к каноническому виду

Пример 1 *Найти каноническое уравнение кривой*

$$x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 6 = 0,$$

угол её поворота и построить эту кривую.

▷ 1. *Чтобы избавиться от линейных по* x *и* y *слагаемых, совершим преобразование сдвига:* $\{x' = x - a,\ y' = y - b\}$.
После подстановки $x = x' + a,\ y = y' + b$ *получим*

$$(x' + a)^2 + (x' + a)(y' + b) + (y' + b)^2 - 4(x' + a) - 5(y' + b) + 6 = 0$$

$$\left.\begin{array}{lcl} x' & : & 2a + b - 4 = 0 \\ y' & : & a + 2b - 5 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a = 1,\ b = 2.$$

В результате уравнение приобретает вид

$$x'^2 + x'y' + y'^2 = 1.$$

2. *Запишем матрицу квадратичной формы* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

и характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

3. *Решение характеристического уравнения*

$(1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; 1-\lambda = \pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$

определяет каноническое уравнение:

$$\frac{1}{2}x''^2 + \frac{3}{2}y''^2 = 1.$$

4. *Решим уравнение на собственные векторы:*

$$(A - \lambda_i E)\overrightarrow{x}^{(i)} = 0$$

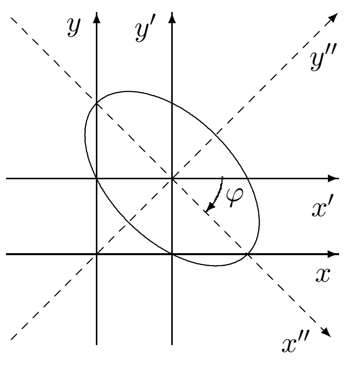
$$\overrightarrow{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^{(2)} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

которые нормируем на единицу

$$\overrightarrow{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

5. *Запишем оператор поворота*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = R(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$



Оператор поворота позволяет найти угол поворота дважды штрихованной системы координат относительно заданной.

Ответ: $\dfrac{x''^2}{2} + \dfrac{y''^2}{2/3} = 1\,,$

$\varphi = -45^0 \quad \triangleleft$

Лекция 13. Поверхности второго порядка

Если кривые второго порядка задаются на плоскости, то поверхности второго порядка — в трёхмерном пространстве. Родственность этих геометрических объектов заключается в том, что их уравнения содержат квадратичную форму.

★ *Поверхностью второго порядка называется поверхность, описываемая в декартовой системе координат уравнением:*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{x}, \mathbf{A}\overrightarrow{x}\right) + Ax + By + Cz - D = 0},$$

где $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = (3 \times 3)$ — матрица квадратичной формы.

Вопрос: Плоскость или поверхность в общем случае описываются функцией скольких переменных?

Ответ: Плоскость или поверхность в общем случае описываются функцией двух независимых переменных, поскольку для их описания достаточно одного уравнения в трёхмерном пространстве.

Поверхности вращения

★ *Поверхностью вращения называется такая поверхность, которая описывается уравнением инвариантным относительно преобразования поворота вокруг оси вращения.*

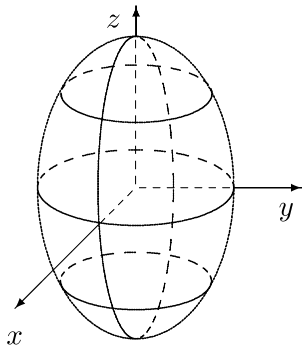
★ *Уравнение инвариантно относительно некоторого преобразования, если в результате этого преобразования оно остаётся неизменным.*

Вопрос: Какая кривая при повороте не меняет свой вид?
Ответ: Окружность.

$$x^2 + y^2 = x^{2'} + y^{2'} \quad \text{— инвариант поворота}$$

$$\boxed{F(x^2 + y^2, z) = 0} \quad \text{— уравнение поверхности вращения}$$

Эллипсоид вращения



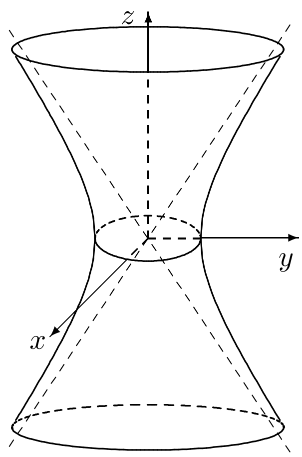
$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — эллипс}$$

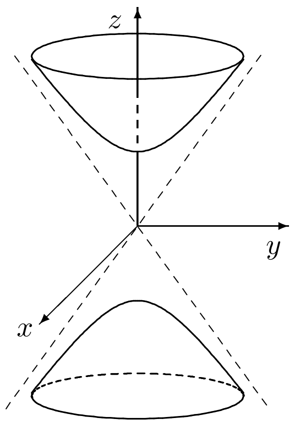
Гиперболоид вращения

Гиперболоиды вращения бывают двух типов: однополостные и двуполостные.



$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad \text{— однополостный}$$

1. $z = 0 \Rightarrow$ *окружность:* $R = a$
2. $z > 0 \Rightarrow$ *окружность:* $R = a\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{c^2}}$
3. $x = 0 \Rightarrow$ *гипербола:* $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



$\boxed{-\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ — дву-полостный

1. $z = 0 \quad \Rightarrow$ *нет решения*

2. $z > c \quad \Rightarrow$ *окружность:* $R = a\sqrt{\dfrac{z^2}{c^2}-1}$

3. $x = 0 \quad \Rightarrow$ *гипербола:* $-\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Параболоид вращения

$$\boxed{x^2+y^2=2pz}$$

Цилиндрические поверхности

★ *Цилиндрической поверхностью называется такая поверхность, которая описывается уравнением, инвариантным относительно преобразования сдвига вдоль оси цилиндра.*

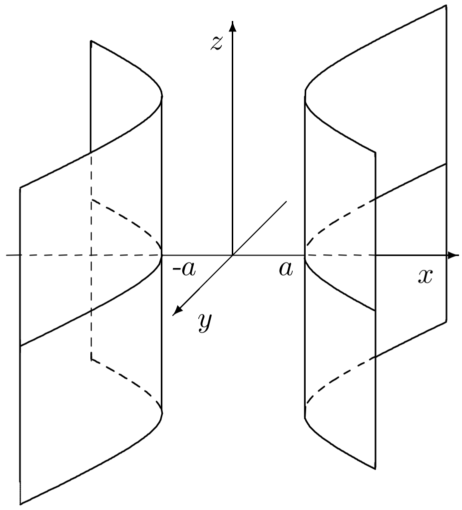
Вопрос: *Записать уравнение поверхности инвариантной относительно преобразования сдвига* $z \Rightarrow z - z_0$.

Ответ: $\boxed{F(x,y)=0}$ — уравнение цилиндрической поверхности

Вопрос: *Как выглядят уравнения параболического, эллиптического и гиперболического цилиндров.*

Ответ: *Эти уравнения тождественны уравнениям параболы, эллипса и гиперболы соответственно. Цилиндры эти уравнения описывают в трёхмерном пространстве.*

Гиперболический цилиндр

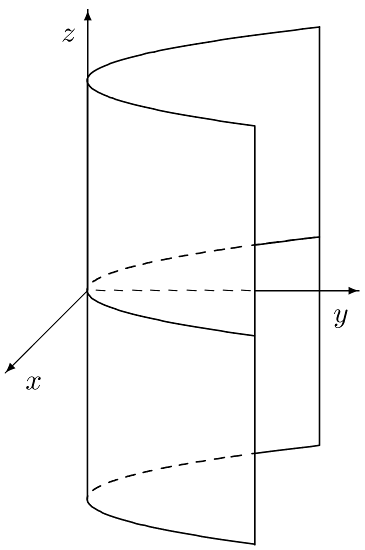


Вопрос: Изобразить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ответ: Множество точек, получаемое переносом гиперболы вдоль оси z, образует гиперболический цилиндр.

Параболический цилиндр



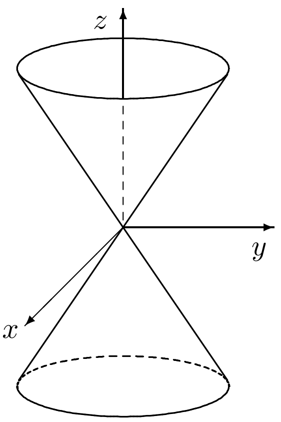
Вопрос: Записать уравнение изображенной поверхности.
Ответ: Поскольку сечение этой поверхности любой плоскостью $z = C$ представляет собой параболу, то эта поверхность описывается уравнением

$$y = 2px^2, \ p > 0,$$

инвариантным относительно преобразования сдвига $z \Rightarrow z - z_0$.

Коническая поверхность

★ *Конической поверхностью второго порядка будем называть такую поверхность, сечение которой плоскостью $x = 0$ представляет собой пару симметрично пересекающихся прямых.*



$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0}, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

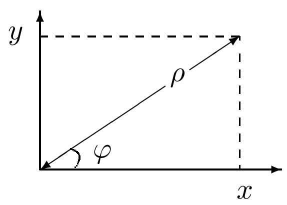
$z = \pm\dfrac{c}{b}y$ — пересекающиеся прямые

Полярная система координат

В полярной системе координат каждая точка задаётся двумя параметрами ρ и φ, где $\rho \in [0, \infty]$ — расстояние от точки до полюса, и $\varphi \in [0, 2\pi]$ — азимутальный угол от полярной оси до радиус-вектора точки. В трёхмерном пространстве полярная система координат, дополненная координатой z, называется цилиндрической системой координат.

Задача 1

Найти связь декартовой системы координат с полярной и наоборот.



► $x = \rho\cos\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$

$y = \rho\sin\varphi; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$ ◄

“В математике логика называется анализом,
анализ же значит разделение, рассечение.”
Анри Пуанкаре

Раздел 2

Введение в математический анализ

Лекция 14. Комплексные числа и их свойства

Из этой лекции вам станет ясно, что не всякое школьное утверждение является абсолютной истиной. В частности, если дискриминант меньше нуля, то квадратное уравнение имеет решения, правда, для этого потребуется выйти из множества действительных чисел.

Задача 1

Решить уравнение:

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; \\ \blacktriangleright \quad z^2 - 1 &= 0; \\ (z-1)(z+1) &= 0; \\ z_{1,2} &= \pm 1 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Вопрос: Что вы можете сказать о полученных числах и какие ещё числа вы знаете?

Ответ: *Это вещественные, рациональные, целые числа. Множество вещественных чисел, помимо рациональных, включает в себя иррациональные числа, которые, в отличие от рациональных, не представимы периодической бесконечной десятичной дробью.*

Задача 2

Решить уравнение:

$$\begin{aligned} z^3 &= 1; \\ \blacktriangleright \quad z^3 - 1 &= 0; \\ (z-1)(z^2+z+1) &= 0; \\ z_1 = 1, \quad z^2+z+1 &= 0; \end{aligned}$$

$$z_{2,3} = \tfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\tfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 *привела нас к понятию мнимой единицы:*

$$\boxed{\mathrm{i} = \sqrt{-1}}\,.$$

★ *Комплексным числом называется выражение следующего вида:*

$$\boxed{z = a + \mathrm{i}b = \operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z} \quad \text{— алгебраическая форма}$$

где a или $\operatorname{Re} z$ – действительная, а b или $\operatorname{Im} z$ – мнимая части комплексного числа.

★ *Комплексно сопряженным числом называется число, отличающиеся от исходного только знаком (знаками) перед мнимой единицей (единицами)*

$$z^* = a - \mathrm{i}b\,.$$

• *При комплексном сопряжении меняются знаки перед всеми мнимыми единицами, входящими в это комплексное число.*

Свойства комплексных чисел

1. *Два комплексных числа равны, если их действительные и мнимые части соответсвенно равны*
$$z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2 \,.$$
2. *Сумма комплексных чисел есть комплексное число*
$$z_1 + z_2 = z_3 \quad \Longrightarrow \quad a_1 + a_2 = a_3, \quad b_1 + b_2 = b_3 \,.$$
3. *Произведение комплексных чисел есть комплексное число*
$$z_1 z_2 = z_3 \,.$$
Действительно
$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2) = a_1a_2 + \mathrm{i}^2 b_1b_2 + \mathrm{i}a_1b_2 + +\mathrm{i}a_2b_1 =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{i}(a_1b_2 + b_1a_2),$$
где используется
$$\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1, \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1.$$
4. *Частное комплексных чисел равно комплексному числу*
$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \quad \Longrightarrow \quad z_3 = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \,.$$
5. *Модуль комплексного числа определяется, как квадратный корень из произведения комплексного числа на его комплексно сопряжённое.*
$$zz^* = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = |z|^2 \,.$$
$$\boxed{|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

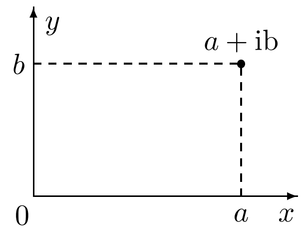
Пример 1. *Найти модули* $z_{2,3}$ из Задачи 2.

$$\triangleright \quad z_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2} \,,$$
$$|z_{2,3}| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1 \quad \triangleleft$$

Комплексное число в декартовой и полярной системах координат

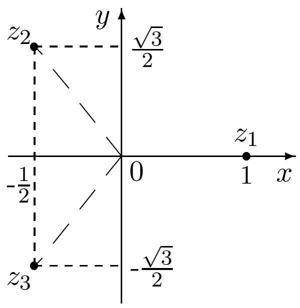
Задача 3

Каков геометрический образ комплексного числа $z = a + \mathrm{i}b$?



► *Пара чисел — это точка на плоскости. Её отображение в декартовой системе координат для $z = x + \mathrm{i}y$, где x и y — координаты комплексного числа на комплексной плоскости, представлено на рисунке.* ◄

Пример 2. *Отобразить на декартовой плоскости решение уравнения из* Задачи 2.



$$\triangleright \quad z_1 = 1\,, \quad z_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$x_1 = 1\,, \quad x_{2,3} = -\tfrac{1}{2}\,,$$

$$y_1 = 0\,, \quad y_{2,3} = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,. \quad \triangleleft$$

Задача 4

Выразить x и y через модуль комплексного числа и угол φ и наоборот.

► *Используя связь декартовой и полярной систем координат* (Лекция 13. Задача 1), *запишем:*

$$\begin{aligned} x &= |z|\cos\varphi\,, & y &= |z|\sin\varphi\,, \\ |z| &= \sqrt{x^2+y^2}\,, & \varphi &= \operatorname{arctg} y/x\,. \end{aligned} \quad ◄$$

- $\boxed{z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}$ — тригонометрическая форма

Задача 5

Попытайтесь проверить следующее очень важное равенство:

$$\boxed{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi}} \quad \text{— формула Эйлера}$$

$$\blacktriangleright \quad |\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi| = 1, \qquad |e^{\mathrm{i}\varphi}| = 1,$$

$$\text{т.к.} \quad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1; \qquad \text{т.к.} \quad \sqrt{e^{\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\varphi}} = \sqrt{e^0} = 1;$$

$$\text{а также, при } \varphi = 0:$$

$$\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1, \qquad e^{\mathrm{i}0} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

- $\boxed{z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}}$ — показательная форма

Задача 6

Обосновать формулу Муавра:

$$\boxed{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi}.$$

$$\blacktriangleright \quad (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = e^{\mathrm{i}\varphi n} = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \quad \blacktriangleleft$$

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.

Задача 7

Найти все корни $w = \sqrt[n]{z}$.

▶ *Примем* $z = a + \mathrm{i}b = |z|e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}$, *т.к.* $e^{\mathrm{i}2\pi k} = 1$, *и тогда*

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}{n}}}$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, *а* $\sqrt[n]{|z|}$ — *арифметический корень* n*-ой степени. При* $k = n$ *корень тот же, что при* $k = 0$. ◀

- *Корни* n*-ой степени — вершины правильного* n*-угольника.*

Пример 3. *Самостоятельно показать,что* $\sqrt[3]{1} = 1,\ e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

Лекция 15. Последовательности и пределы

Предел — это основное понятие математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий, как производная и интеграл, является слово предел.

Ограниченные и неограниченные последовательности

★ *Если каждому натуральному числу $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ по определённому закону поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество этих чисел называется последовательностью:*

$$\boxed{\{x_n\} = x_1,\ x_2, x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots} \quad \text{— последовательность}$$

где x_n — общий элемент (член) последовательности.

Пример 1. *Записать элементы последовательности:*

$$\{x_n\} = \{an + b - a\}.$$

$$\triangleright \quad \{x_n\} = b,\ a+b,\ 2a+b,\ \ldots,\ na+b,\ \ldots \quad \triangleleft$$

★ *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что $\forall x_n$ этой последовательности выполняется неравенство:*

$$x_n \leqslant M \qquad (x_n \geqslant m)\,.$$

Вопрос: Назовите последовательность, ограниченную снизу.

Ответ: Натуральный ряд чисел $\{x_n\} = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$

★ *Последовательность $\{x_n\}$ одновременно ограниченная и снизу и сверху называется ограниченной $m \leqslant \forall x_n \leqslant M$.*

★ *Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall M > 0$ найдётся элемент последовательности x_n, удовлетворяющий неравенству: $|x_n| > M$.*

Вопрос: *Назовите неограниченную последовательность.*

Ответ: $\{x_n\} = -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$, *а также, подходит предыдущий ответ.*

Вопрос: *Назовите ограниченную последовательность.*

Ответ: $\{x_n\} = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots$, где $0 < 1/n \leqslant 1$.

Определение предела последовательности

★ *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \delta > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \delta$.*

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$ — предел последовательности

★ *Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. В противном случае она называется расходящейся.*

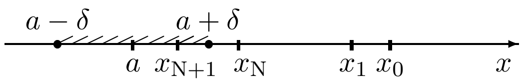
Задача 1

Выяснить смысл неравенства: $|x_n - a| < \delta$.

► $$|x_n - a| = \begin{cases} x_n - a, & \text{если } x_n - a \geqslant 0 \\ -x_n + a, & \text{если } x_n - a < 0 \end{cases}$$

$$x_n - a < \delta \implies x_n < a + \delta$$

$$-x_n + a < \delta \implies x_n > a - \delta$$



$$x_n \in (a - \delta, a + \delta) \quad \text{при } n > N$$ ◄

★ *δ-окрестностью точки a называется интервал $(a - \delta, a + \delta)$.*

Пример 2. *Показать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

$\triangleright$ *Зададим произвольное* $\delta > 0$ *и найдём такое* N, *что при* $n > N$ *выполняется* $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \delta$. *Очевидно* $N = \dfrac{1}{\delta}$ $\triangleleft$

★ *Предел последовательности* $\{x_n\}$ *равен* ∞ *(бесконечности), если* $\forall > 0$ *найдется такой номер* N, *что при* $n > N$ *выполняется* $|x_n| > A$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty} \quad \text{— бесконечный предел}$$

★ *Величина называется бесконечно малой, если её предел равен* 0, *и бесконечно большой, если её предел равен* ∞.

$\alpha_n \to 0$ — бесконечно малая
$\beta_n \to \infty$ — бесконечно большая

Например: $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ *б.м.*
$\beta_n = n$ *б.б.*

• *Обратная бесконечно малой является бесконечно большой и наоборот* $\beta_n = 1/\alpha_n$.

Вычисление предела последовательности

Пример 3. *Вычислить предел.*

$$\triangleright \quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{5n-10}{3n-6} = \left\{\tfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{n(5-\frac{10}{n})}{n(3-\frac{6}{n})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}} = \frac{5-\frac{10}{\infty}}{3-\frac{6}{\infty}} = \frac{5}{3} \quad \triangleleft$$

Пример 4. *Вычислить предел.*

$$\triangleright \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \{\infty - \infty\} =$$

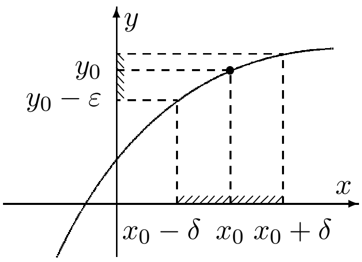
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \triangleleft$$

• *Вычисление предела — это, как правило, раскрытие неопределённости вида:* $0/0,\ \infty/\infty,\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0}$ *и т.д.*

Определение функции

★ *Пусть задано два множества чисел D и G, и пусть по определённому закону каждому $x \in D$ сопоставляется одно (несколько) $y \in G$, тогда говорят, что на множестве D определена однозначная (многозначная) функция $y = f(x)$, при этом*

D — область определения функции,
x — независимая переменная или аргумент,
y — зависимая переменная или функция,
G — область допустимых значений функции.



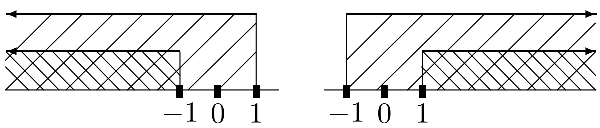
Функции могут задаваться:

1. графически (см. рис.)
2. аналитически: $y = x^2$
3. таблично:

x	1	1.2	1.5	2	2.5
y	1	1.44	2.25	4	6.25

Пример 5. *Найти область определения, т.е. то множество значений, при которых существует функция* $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$\triangleright \quad \left.\begin{array}{r} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ (x-1)(x+1) \geqslant 0; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x - 1 \leqslant 0; \\ x + 1 \leqslant 0; \\ \Downarrow \\ x \leqslant -1 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} (x - 1) \geqslant 0; \\ (x + 1) \geqslant 0; \\ \Downarrow \\ x \geqslant 1 \end{array}$$



Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $\triangleleft$

• *Здесь и далее речь идёт о действительном переменном.*

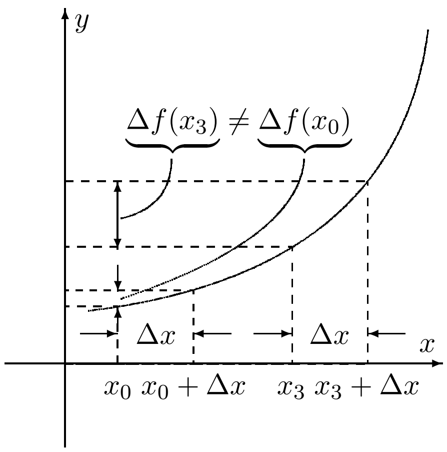
Лекция 16. Непрерывность функции и её разрывы

Из этой лекции мы узнаем, что разрывы функции подразделяют на два рода, а среди всевозможных пределов два предела названы замечательными.

Приращение аргумента и функции

★ *Приращением функции называется изменение функции при заданном приращении аргумента*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}\,.$$



★ *Если* $x_1 = x_0$, *а* $x_2 = x_0 + \Delta x$, *то*

$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ — приращение аргумента

$f(x_2) - f(x_1) =$

$f(x_0{+}\Delta x){-}f(x_0) = \Delta f(x_0)$

$\Delta f(x_3) = f(x_3{+}\Delta x){-}f(x_3)$

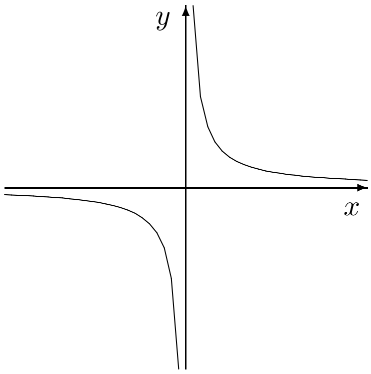
• *Приращение функции, в отличие от приращения аргумента, зависит от самого аргумента.*

Определение непрерывности функции

★ *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *если в этой точке она определена, а её приращение стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента*

$$\boxed{\Delta f(x_0) \to 0\ , \quad \text{если} \quad \Delta x \to 0}\,.$$

Пример 1. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \frac{1}{x}$.



$\triangleright$ $\Delta f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$

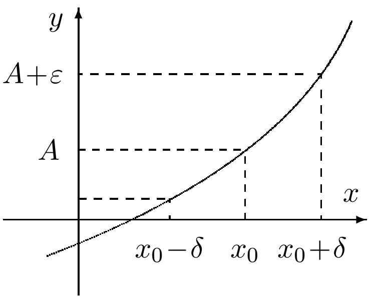
$\Delta f(x_0) \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$ *кроме точки* $x_0 = 0$.

$\bigstar$ *Точку, в которой приращение функции не стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента, называют точкой разрыва функции.* $\triangleleft$

Определение предела функции в точке

$\bigstar$ *Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$, найдётся такое $\delta > 0$, что $\forall x$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают* $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$.

- *В точке x_0 функция $f(x)$ может быть не определена.*



Вопрос: Чему равен предел приращения функции в точке x_0, если в этой точке функция непрерывна?

Ответ: Поскольку $\Delta f(x_0) \to 0$, при $\Delta x \to 0$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \Delta f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \Delta y = 0}$$

- *Функция непрерывна в точке x_0, если предел приращения функции в этой точке равен нулю.*

Задача 1

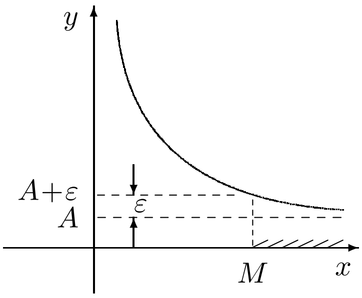
Пусть функция определена и непрерывна в точке x_0. Найти предел функции в этой точке.

$$\blacktriangleright \quad \lim_{x\to x_0} \Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \quad \blacktriangleleft$$

★ *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке.*

Определение предела функции на бесконечности



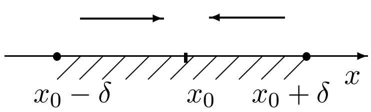
★ *Число A называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности (в бесконечно удалённой точке), если $\forall \varepsilon > 0$, найдётся такое $M > 0$, что при $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = A}.$$

Предел функции слева и справа

★ *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 справа (слева), если $\forall \varepsilon > 0$, найдётся такое $\delta > 0$, что при $x_0 < x < x_0 + \delta$ $\quad (x_0 - \delta < x < x_0)$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают*

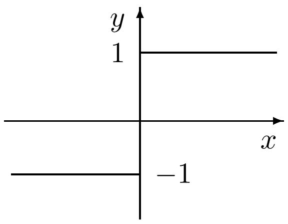
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0+0\\ (x\to x_0-0)}} f(x) = A}$$



• *Предел функции в точке x_0 существует, если предел справа равен пределу слева.*

Разрывы первого и второго рода

Пример 2. *Построить график функции* $y = \dfrac{x}{|x|}$.



$\triangleright$ *Очевидно, что*

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad \triangleleft$$

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода, если пределы слева и справа конечны, но не равны друг другу.*

Пример 3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} e^{\frac{1}{x-2}}$.

$\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2+0-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = 0$ $\triangleleft$

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода, если хотя бы один из пределов слева или справа бесконечен или не существует.*

Пример 4. *Вычислить:* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

$\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = \left\{\sin\frac{1}{0}\right\}$ — *предел не существует.* $\triangleleft$

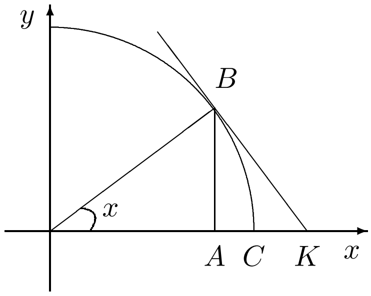
• *Постройте график этой функции.*

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = 1}$$

Задача 2

Следуя рисунку, доказать первый замечательный предел.



► *Согласно рисунку*
$AB < BC < BK$, где
$AB = \sin x,\ BC = x,\ BK = \operatorname{tg} x$
$\sin x < x < \operatorname{tg} x \ :\ \sin x$
$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$1 < \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ◄

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \{1^{\pm\infty}\} = e = 2.718...}$$

Основные правила вычисления пределов

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \ \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f[u(x)] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right]$

- *Все правила имеют смысл, если пределы функций* $f(x)$, $g(x)$, $f[u(x)]$ *и* $u(x)$ *существуют.*

Лекция 17. Бесконечно малые, бесконечно большие и эквивалентные функции

Одна и та же функция в одной и той же точке может быть и бесконечно малой, и бесконечно большой; так же, как муравей мал относительно слона и велик относительно микроба.

★ *Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными в окрестности точки x_0, если предел их отношения равен единице*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} g(x)}$$

★ *Функция $f(x)$ является бесконечно малой относительно $g(x)$ в окрестности точки x_0, если*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} o(g(x))}$$

★ *Функция $g(x)$ является бесконечно большой относительно $f(x)$ в окрестности точки x_0, если*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} o(g(x))}$$

• *Согласно данным определениям*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o\,(g(x))}{g(x)}=0, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{o(g(x))}=\infty$$

Задача 1

Определить, какой является функция $\sin x$ *относительно функций* $1,\ x,\ x^2$ *в окрестности нуля.*

► 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \underset{x\to 0}{\simeq} o(1) \quad \Longrightarrow$ *б.м.*

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x \quad \Longrightarrow$ *эквив.*

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \left\{\dfrac{1}{0}\right\} = \infty \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x^2 \underset{x\to 0}{\simeq} o(\sin x) \quad \Longrightarrow$ *б.б.* ◄

Теорема об эквивалентных функциях

Теорема

Чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна функции $g(x)$ в окрестности точки x_0, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\boxed{f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0}$$

► 1. *При доказательстве достаточности исходят из доказываемого равенства:*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad : \quad g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x\to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} g(x)$$

2. *При доказательстве необходимости исходят из определения эквивалентных функций:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \underset{x\to x_0}{=} o(1)$$

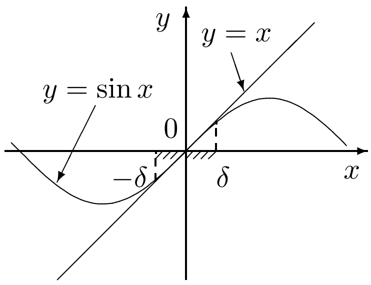
$$f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)o(1) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o(g(x)) \quad ◄$$

Аппроксимация элементарных функций простейшими многочленами

- *Аппроксимация — приближённое описание.*

Задача 2

Найти эквивалентные следующих функций: $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\exp x$, $\operatorname{tg} x$ *— в окрестности точки нуль, в виде простейших многочленов (степенью не выше двух).*



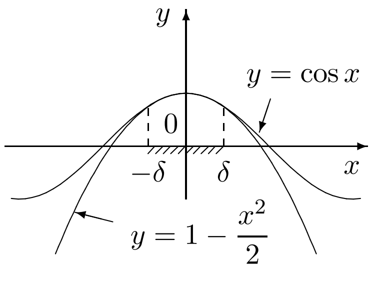
► 1. $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

Согласно Задаче 1

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

иначе $\boxed{\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x}$

- *В окрестности точки нуль прямая $y = x$ сливается с кривой $y = \sin x$.*



2. $\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$,

т.е. $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$

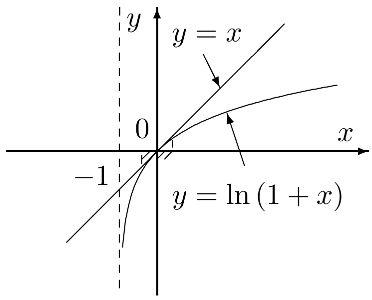
Теперь $o(1) = ?$ *Попробуем, не является ли* $o(1) \simeq x$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2(\sin x/2)^2}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2(x/2)^2}{x} = 0 \implies o(1) \not\simeq x$$

Легко убедиться, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{-x^2/2} = 1$, *т.е.*

$$o(1) = \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} -x^2/2 \implies \boxed{\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - x^2/2}$$



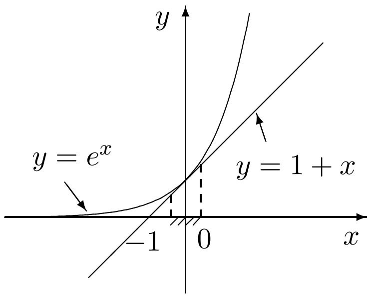
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} =$

$= \ln \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$

Следовательно $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x}$



4. $e^x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, *то*

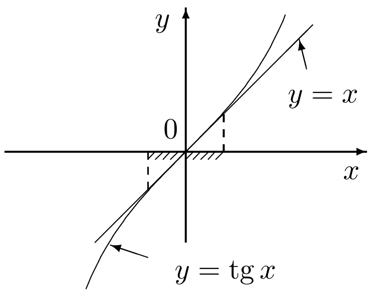
$$e^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + o(1)$$

$o(1) = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} y = e^x - 1 \\ x = \ln(1+y) \end{array} \right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{\ln(1+y)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{y} = 1$

При вычислении последнего предела был использован результат пункта 3. *Таким образом* $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} x$ *или* $\boxed{e^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + x}$



5. $\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$, *то*

$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} o(1)$

$o(1) = ?$ *Так как*

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, *то*

$\boxed{\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} x}$ ◀

• *Рисунки наглядно показывают, что заданные функции и их эквивалентные в окрестности точки нуль почти не различимы.*

• *Вычисление пределов можно проводить путём замены под знаком предела заданных функций на их эквивалентные.*

"Нам нужна способность, которая позволяла бы видеть цель издали, а эта способность есть интуиция."
Анри Пуанкаре

Раздел 3

Дифференциальное исчисление

Лекция 18. Производная, её геометрический и механический смысл

Важнейшим понятием математического анализа является производная, которая определяет скорость изменения функции.

★ *Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)}\,.$$

Пример 1. *Вычислить производную функции $f(x)=x^2$ в точке $x=5$.*

$\triangleright \quad \Delta f(5) = f(5+\Delta x) - f(5) = 10\Delta x + \Delta x^2,$

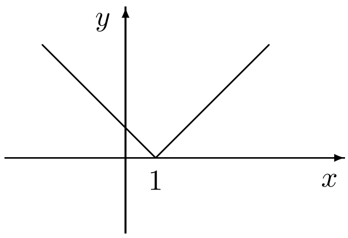
$$f'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(10+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10+\Delta x) = 10. \quad \triangleleft$$

Производная справа и слева

★ *Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел справа (слева) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta f(x_0 \pm 0)}{\Delta x} = f'(x_0 \pm 0)}\,.$$

Пример 2. *Вычислить производную функции $f(x) = |x-1|$ в точке $x = 1$.*



$$\triangleright \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{при} \quad x \geqslant 1 \\ -x+1, & \text{при} \quad x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{-x+1}{x-1} = -1.$$

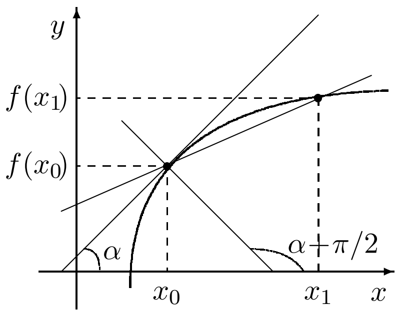
$$f'(1+0) \neq f'(1-0) \implies f'(1) \text{ — не существует} \quad \triangleleft$$

Геометрический смысл производной

Задача 1

Получить уравнение касательной.

★ *Касательной называется предельное положение секущей при стремлении второй точки секущей к первой.*



► *Запишем уравнение секущей*

$$y-f(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

и устремим вторую точку секущей к первой, тогда поскольку

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x_0),$$

то вычисление предела даёт

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}\ \text{— уравнение касательной}$$

где угловой коэффициент касательной $k_{кас}=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$ ◄

★ *Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции.*

Задача 2

Получить уравнение нормали.

★ *Нормалью называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной.*

► $y-f(x_0)=k_{норм}(x-x_0)$, где

$$k_{норм}=\operatorname{tg}(\alpha+\pi/2)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

$$\boxed{y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}\ \text{— уравнение нормали}$$ ◄

Пример 3. *Найти уравнения касательной и нормали для функции* $f(x)=x^2$ *в точке* $x=5$.

▷ $f'(5)=10$, $f(5)=25$, *и очевидно*

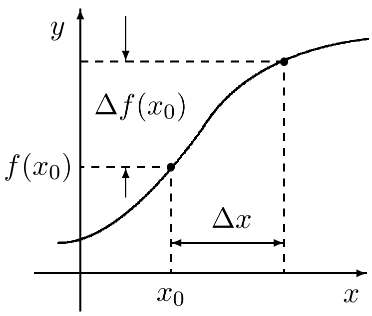
$$y_{кас}-25=10(x-5),\quad y_{норм}-25=-0.1(x-5)$$ ◁

Задача 3

Показать, что если производная положительна, то функция возрастает, а если отрицательна, то убывает.

★ *Функция* $f(x)$ *возрастает (убывает) на интервале* (a, b), *если* $\forall x_0 \in (a, b)$ *выполняется:*

$$\Delta f(x_0) > 0 \quad (\Delta f(x_0) < 0) \ \text{ при } \Delta x > 0.$$



► *Пусть* $f'(x_0) > \varepsilon > 0$, *тогда из определения производной как предела следует*

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon,$$

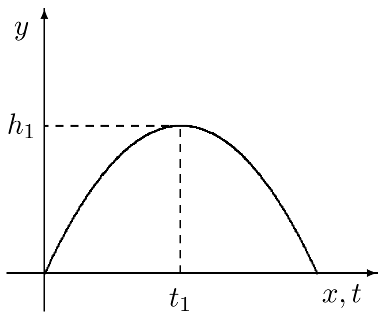
откуда

$$\Delta f(x_0) > 0 \ \text{ при } \Delta x > 0. \quad ◄$$

Механический смысл производной

Задача 4

Известно, что траекторией брошенного камня является парабола. Найти его скорость и ускорение.



► *Поскольку горизонтальное движение равномерное, то вертикальная координата равна:*

$h(t) = -\dfrac{g}{2}(t - t_1)^2 + h_1,$ тогда

$h'(t) = -g(t - t_1)$ — скорость

$h''(t) = -g$ — ускорение ◄

• *Вычисление производной позволило нам "получить" известный физический закон, что всякое брошенное тело испытывает постоянное ускорение свободного падения.*

Основные правила дифференцирования

★ *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она имеет производную в этой точке.*

Вопрос: Является ли непрерывной дифференцируемая функция?
Ответ: Да, поскольку для существования предела, определяющего производную, необходимо $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Задача 5

Показать, что производные суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & (u+v)' = u' + v' \\ 2. & (uv)' = u'v + v'u \\ 3. & (u/v)' = (u'v - v'u)/v^2 \end{array}}$$

► 1. $$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

2. $$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u(x_0+\Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0+\Delta x) = v + \Delta v \end{array} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u v + \Delta v u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + u' \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{=0} = u'v + v'u.$$

3. $$(u/v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \left\{ \Delta \frac{u}{v} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u v - \Delta v u}{\Delta x v(v+\Delta v)} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad ◄$$

Лекция 19. Вывод таблицы производных

Так же, как при умножении чисел используют не определение действия умножения, а таблицу умножения, так и при вычислении производных используют не определение производной, а таблицу производных.

Задача 1

Показать, что производная сложной функции равна произведению производных составляющих функций, т.е.

$$\boxed{f'_x = f'_u u'_x, \quad \text{где} \quad f = f[u(x)]}$$

► $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f \Delta u}{\Delta x \Delta u} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta u} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u u'_x$ ◄

• *Прежде чем вычислять производную функции, необходимо определить число составляющих её функций.*

Задача 2

Используя определение производной, вычислить производные элементарных функций.

► 1. $C' = ?$

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

2. $(x^n)' = ?$

Поскольку $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, то можно предположить, что $(x^n)' = nx^{n-1}$. Последнее верно, если при этом предположении выполняется $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Докажем это равенство

$(x^{n+1})' = (xx^n)' = x'x^n + x\,(x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$.

Следовательно $(x^n)' = nx^{n-1}$.

• *Доказательство дано методом математической индукции.*

3. $(e^x)' =?$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} =$$
$$= \left\{e^{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\simeq} 1+\Delta x\right\} = e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

Найдём производную показательной функции

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' =$$
$$= \{f'_x = f'_u \cdot {u_x}'\} = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x\ln a.$$

4. $(\ln x)' =?$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \left\{\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\simeq} u\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,.$$

5. $(\sin x)', (\cos x)' =?$

Вычислить производную синуса через производную экспоненты.

$$(\sin x)' = \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)' = \frac{e^{\mathrm{i}x}(\mathrm{i})-e^{\mathrm{i}x}(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2} = \cos x.$$

Вычислить производную косинуса через производную синуса.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

6. $(\operatorname{tg} x)', (\operatorname{ctg} x)' =?$

Вычислить производную тангенса через производные синуса и косинуса.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Вычислить производную котангенса через производную тангенса.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. $(\operatorname{ch} x)', (\operatorname{sh} x)' =?$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Для завершения таблицы производных потребуется решить следующую задачу.

Задача 3

Найти связь производной функции с производной обратной функции.

▶ *Пусть обе функции: прямая $y = y(x)$ и обратная $x = x(y)$ — непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, тогда*

$$x_y{}' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y_x{}'}.$$

$$\boxed{x_y{}' = 1/y_x{}'} \quad ◀$$

Продолжим решение Задачи 2.

8. $(\arcsin x)', (\arccos x)' =?$

Пусть $y = \arcsin x$, *тогда* $x = \sin y$.

$$(\arcsin x)_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{(\sin y)_y{}'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично получим, что $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. $(\operatorname{arctg} x)', (\operatorname{arcctg} x)' =?$

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$, *тогда* $x = \operatorname{tg} y$.

$$(\operatorname{arctg} x)_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Нетрудно показать, что $(\operatorname{arcctg} x)_x{}' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ ◀

Таблица производных

N	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0
2	x^n	nx^{n-1}
3	e^x a^x	e^x $a^x \ln a$
4	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
5	$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$
6	$\operatorname{tg} x$ $\operatorname{ctg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7	$\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$
8	$\arcsin x$ $\arccos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\operatorname{arctg} x$ $\operatorname{arcctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$ $-\dfrac{1}{1+x^2}$

Лекция 20. Дифференциал функции

Дифференциал функции — понятие столь же часто используемое в математике, как и производная.

Теорема о дифференцируемой функции

Теорема

Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно выполнения равенства:

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{=} f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).} \qquad (*)$$

Достаточность

Докажем, что если формула $(*)$ выполняется, то функция дифференцируема, т.е. имеет производную. Поделим обе части равенства $(*)$ на Δx, тогда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\,,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Необходимость

Исходим из определения производной. Поскольку

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,,$$

то согласно определения предела

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\simeq} f'(x_0)\,.$$

или

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\underset{\Delta x\to 0}{=}o(1),$$

и далее

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x\underset{\Delta x\to 0}{=}o(1)\Delta x\underset{\Delta x\to 0}{=}o(\Delta x),$$

что и требовалось доказать.

Вопрос: Что является эквивалентной приращению функции?

★ *Согласно доказанному равенству $(*)$, эквивалентной приращению функции является произведение производной функции на приращение аргумента, т.е.*

$$\boxed{df(x_0)=f'(x_0)\Delta x} \quad \text{— дифференциал функции.}$$

Вопрос: Чему равен дифференциал аргумента?

$$dx=x'\Delta x=\Delta x.$$

★ *Приращение аргумента тождественно равно дифференциалу аргумента:*

$$\boxed{dx=\Delta x} \quad \text{— дифференциал аргумента.}$$

Вопрос: Как выразится производная функции через дифференциалы функции и аргумента?

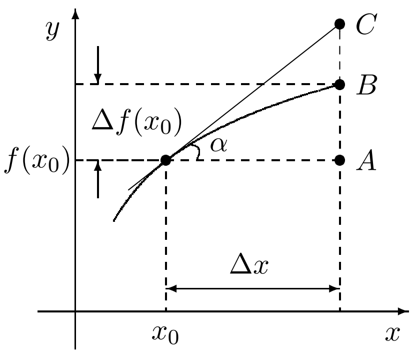
★ *Производная функции равна частному дифференциалов функции и аргумента:*

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}} \quad \text{— производная функции.}$$

Геометрический смысл дифференциала

Задача 1

Выяснить геометрический смысл дифференциала.



► *Согласно рисунку* $AB = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *— приращение функции, а* $AC = \operatorname{tg}\alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$ *— приращение ординаты касательной.* ◄

★ *Дифференциал функции — это приращение ординаты касательной.*

Задача 2

Самостоятельно показать, что дифференциалы суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & d(u+v) = du + dv \\ 2. & d(uv) = vdu + udv \\ 3. & d(u/v) = (vdu - udv)/v^2 \end{array}}$$

Дифференциал и приближённое вычисление

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

Пример 1. *Вычислить* $\sqrt{0.9}$.

$$\triangleright \quad \sqrt{0.9} = \sqrt{1 - 0.1} \approx \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 1, & \Delta x = -0.1 \\ f(x_0) = 1, & f'(x_0) = 1/2 \end{array} \right\} \approx$$

$$\approx 1 - 0.1/2 = 0.95 \quad \triangleleft$$

Производные и дифференциалы высших порядков

★ *Производной или дифференциалом второго порядка называется производная производной или дифференциал дифференциала первого порядка.*

$$\boxed{f''(x) = (f'(x))', \quad d^2f(x) = d(df(x))}$$

Задача 3

Выразить дифференциал и производную n-го порядка.

► $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\Delta x) =$

$$= d(f'(x))\Delta x + f'(x)\underbrace{d(\Delta x)}_{=0} = \left\{ \begin{array}{l} (\Delta x)' = 0 \ \text{ т.к. } \ \Delta x \\ \textit{не зависит от } \ x \end{array} \right\} =$$

$$= f''(x)\Delta x\Delta x = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

В последнем равенстве круглые скобочки подразумеваются: это тот редкий случай, когда математики пишут одно, а подразумевают другое. Отсюда

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\boxed{d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}} \quad ◄$$

Задача 4

Проверить инвариантность формы дифференциала первого порядка.

$$\boxed{df = f'_x dx = f'_u du, \quad \text{где } \ f = f[u(x)] \text{ — сложная функция}}$$

► $f'_x dx = f'_u u'_x dx = f'_u du$. *Самостоятельно показать, что*

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 \neq f''_{uu}du^2, \ \text{ где } \ f''_{xx} = (f'_x)'_x \quad ◄$$

Лекция 21. Формула Тейлора

Если дифференциал функции описывает приращение функции в первом приближении, то многочлен Тейлора описывает приращение функции со сколь угодной точностью.

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Найти эквивалентную приращения функции в окрестности точки $x_0 \in [a,b]$ в виде многочлена n-ой степени.

► Согласно предыдущей лекции

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0),$$

а требуется найти такой $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x-x_0)^k$, чтобы

$$f(x) - f(x_0) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Для нахождения A_k необходимо n раз продифференцировать равенство

$f(x) - f(x_0) = A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \cdots + A_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$.

В результате получим

$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \cdots + nA_n(x-x_0)^{n-1} + o\left(n(x-x_0)^{n-1}\right)$,

$f''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-x_0) + \cdots + n\cdot(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2} + o\left(n\cdot(n-1)(x-x_0)^{n-2}\right)$,

$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1A_3 + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3} + o\left(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)(x-x_0)^{n-3}\right)$,

. . . .

$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1A_n + o\left(n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\right)$.

Положим $x = x_0$, тогда

$$\underbrace{f'(x_0) = A_1,\ f''(x_0) = 2A_2,\ f'''(x_0) = 3!A_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = n!A_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}} \quad \text{— коэффициенты Тейлора}$$

Итак, приращение функции в точке x_0 в виде многочлена n-ой степени имеет вид

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),$$

где второе слагаемое дает погрешность многочлена Тейлора. То же равенство можно записать иначе

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)} \quad \text{— формула Тейлора} \quad ◀$$

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки $x = 0$. Представить её в виде многочлена n-ой степени в окрестности этой точки.

▶ *Согласно* Задаче 1

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^n\right)} \quad \text{— формула Маклорена} \quad ◀$$

Пример 1. *Представить e^x в виде многочлена Маклорена.*

▷ $f^{(k)}(0) = ?$ *Очевидно* $e^{(k)}(0) = 1$ *и*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) \quad ◁$$

Пример 2. *Представить $(a+x)^n$ в виде многочлена Маклорена.*

$\triangleright$ $f^{(0)}(0) = a^n,\ f^{(1)}(0) = na^{(n-1)},\ f^{(2)}(0) = n(n-1)a^{(n-2)},\ \ldots$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{(n-k)},\ \ldots$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a^0 = n!$$

Поскольку все последующие производные равны нулю, то подстановка производных в формулу Маклорена даст точное равенство

$$(a+x)^n = a^n + na^{(n-1)}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{(n-2)}x^2 + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{(n-k)}x^k + \cdots + nax^{(n-1)} + x^n \quad \triangleleft$$

• *Полученный результат можно записать иначе*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{(n-k)}b^k} \quad \text{— бином Ньютона}$$

Пример 3. *Известно, что* $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x$.
Найти следующее приближение.

$\triangleright$ $\sin^{(0)} 0 = 0,\ \sin^{(1)} 0 = \cos 0 = 1,\ \sin^{(2)} 0 = -\sin 0 = 0,$

$$\sin^{(3)} 0 = -\cos 0 = -1 \implies \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \triangleleft$$

Дифференцирование параметрически заданных функций

Задача 3

Найти производные первого и второго порядка для параметрически заданных функций.

★ *Функция $y = y(x)$ задана параметрически, если*
$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T,$
где T — *область определения функции.*

$$\blacktriangleright\quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} dy = \psi'(t)dt \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \boxed{\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'_x}\ ; \quad y''_{xx} = \frac{d}{dx} y'_x =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \boxed{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = y''_{xx}}\ . \quad \blacktriangleleft$$

Пример 4. *Найти производные функции* $\left\{ \begin{array}{l} y = b\sin t \\ x = a\cos t \end{array} \right.$.

$$\triangleright\quad y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}. \quad \triangleleft$$

Дифференцирование неявно заданных функций

★ *Функция задана неявно, если она определена уравнением* $F(x, y) = 0$.

Пример 5. *Найти производные функции* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

• *Можно догадаться, что задача дифференцирования неявно заданных функций решается простым дифференцированием уравнения по переменной* x.

$$\triangleright\quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \implies y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2y'^2 + 2yy''}{b^2} = 0 \implies y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \quad \triangleleft$$

Пример 6. *Выразив для эллипса явную зависимость* y *от* x *вычислить* y' *и* y''. *Полученный результат сравнить с результатами* Примеров 4 *и* 5. *Оценить какое задание функции быстрее приводит к результату (самостоятельно).*

Лекция 22. Теоремы о среднем

В этой лекции будут получены некоторые важные соотношения между производной функции и самой функцией.

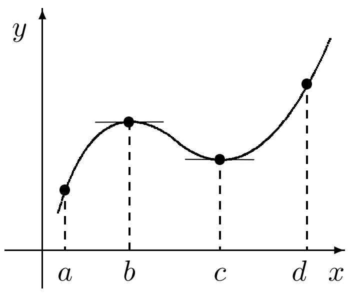
Экстремум функции

★ *Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой δ-окрестности этой точки $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству:*

$$\begin{array}{c} f(x) < f(x_0) \;\; — \;\; \max \\ \Big(f(x) > f(x_0) \;\; — \;\; \min\Big) \end{array} \quad \textit{при} \;\; x \neq x_0.$$

★ *Локальный максимум или минимум называют локальным экстремумом.*

Пример 1. *Указать точки локального экстремума функции, заданной на отрезке $[a, d]$.*



▷ *Очевидно, что*

$$f(b) \;\; — \;\; \max,$$
$$f(c) \;\; — \;\; \min;$$

в то время как

$$f(d) \;\; — \;\; \text{наибольшее},$$
$$f(a) \;\; — \;\; \text{наименьшее} \quad \triangleleft$$

• *Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке могут не быть локальными экстремумами.*

Теорема Ферма

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то тогда её производная в этой точке равна нулю.

▶ *Если функция дифференцируема в точке x_0, то её левая и правая производные равны, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Пусть для определённости в точке x_0 — $\max$. Тогда

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)\leqslant 0\ \ \text{при}\ \ x\leqslant x_0\ \text{и при}\ x\geqslant x_0}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{f'(x_0)=0}\quad ◀$$

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a)=f(b)$, то существует хотя бы одна точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

▶ 1. *Если $f(x)\equiv f(a)\equiv f(b)$ при $x\in(a,b)$,*
тогда $f'(\xi)=0\ \ \forall\xi\in(a,b)$.

2. *Если $f(x)\neq const$, то на интервале (a,b) найдётся хотя бы одна точка ξ локального экстремума. Но тогда в этой точке, согласно теореме Ферма, $f'(\xi)=0$.* ◀

Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$:
— непрерывны на отрезке $[a,b]$,
— дифференцируемы на интервале (a,b),
— $g'(x)\neq 0$,
тогда найдётся такая точка $\xi\in(a,b)$, в которой выполняется соотношение

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}\qquad(*)$$

► *Для доказательства вводится вспомогательная функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ролля*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

а значит, найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, *что* $F'(\xi) = 0$. *Итак*

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \implies (*) \quad ◄$$

Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$*:*
— *непрерывна на отрезке* $[a, b]$,
— *дифференцируема на интервале* (a, b),
тогда найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой выполняется соотношение*

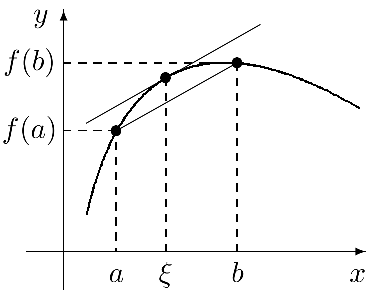
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)} \qquad (**)$$

► *Вопрос: Как с помощью соотношения* $(*)$ *получить* $(**)$*?*
Ответ: Ввести функцию $g(x) = x$. *Поскольку*

$$g'(\xi) = 1, \ \ g(b) - g(a) = b - a, \ \ \text{то} \ \ (*) \implies (**) \quad ◄$$

Задача 1

Определить геометрический смысл теоремы Лагранжа.



► *Так как* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\varphi$ *тангенс угла наклона секущей, а* $f'(\xi)$ — *тангенс угла наклона касательной, то согласно теореме Лагранжа найдётся такая точка* $\xi \in (a, b)$, *в которой они равны.* ◄

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом отрезке n нулей. Показать, что $f'(x)$ имеет на этом отрезке нулей не меньше чем $n-1$.

► *По условию*

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0, \text{ где } x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b].$$

Тогда на отрезках

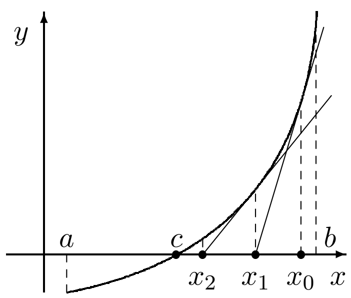
$$[x_i, x_{i+1}] \in [a,b], \quad \text{где } i = \overline{1, n-1}$$

выполнены условия теоремы Ролля, а значит найдутся точки

$$\xi_i \in [a,b], \text{ где } f'(\xi_i) = 0. \quad ◄$$

Задача 3 (метод Ньютона)

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную знакопостоянную производную на отрезке $[a,b]$ и $f(c) = 0$, где $a < c < b$. Получить с помощью уравнения касательной алгоритм нахождения нуля функции.



► *Проведём касательную к кривой в точке $x_0 \in [a,b]$*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Теперь проведём касательную к кривой в точке x_1, которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, получим искомый алгоритм:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_c \text{ при } n \to \infty} \text{ — метод касательных} \quad ◄$$

Лекция 23. Правило Лопиталя

Доказанные в предыдущей лекции теоремы имеют важные приложения, в частности, теорема Коши приводит к новому для нас методу вычисления пределов.

Задача 1 (правило Лопиталя)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, причём

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,, \quad g(x) \neq 0\,.$$

Показать, что

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}\,. \qquad (*)$$

► *Доопределим заданные функции в точке x_0, а именно, $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда согласно теореме Коши найдётся такая точка $\xi \in (x, x_0)$, в которой выполняется соотношение*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Вычисление предела от этого соотношения

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{при } x \to x_0, \\ \xi \to x_0 \end{array} \right\} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

приводит к правилу Лопиталя $(*)$. ◄

• *Предел частного дифференцируемых функций, в случае неопределённости вида $\{0/0\}$, равен пределу частного производных функций, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

Пример 1. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

$$\triangleright \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad \triangleleft$$

Пример 2. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos 1/x}{x}$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos 1/x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos 1/x+\sin 1/x}{1}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sin 1/x = \sin\infty$ — *не существует, а значит, правило Лопиталя не применимо. Правильное решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos 1/x}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos 1/x=0 \quad \triangleleft$$

Замечание 1. *Если отношение функций представляет собой неопределённость вида* $\{\infty/\infty\}$, *то правило Лопиталя применимо (без доказательства).*

Пример 3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\dfrac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg} x}$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg} x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{1/(x-\pi/2)}{1/\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\cos^2 x}{(x-\pi/2)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\sin 2x}{1}=0 \quad \triangleleft$$

Замечание 2. *Правило Лопиталя можно применять повторно, если вновь приходим к неопределённости.*

Пример 4. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{6}=\frac{1}{3}$$

$\triangleleft$

Замечание 3. *Правило Лопиталя можно применять для вычисления предела в бесконечно удалённой точке.*

Пример 5. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^{100}}$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{100}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{100x^{99}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{100!}=\infty\ \triangleleft$$

Задача 2

Свести неопределённость вида $\{0\cdot\infty\}$ *к неопределённости вида* $\{0/0\}$ *или* $\{\infty/\infty\}$.

$$\blacktriangleright\ \text{Пусть}\ \begin{cases} f(x)\to 0\\ g(x)\to\infty\end{cases}\ \text{при}\ x\to x_0.$$

Тогда очевидны следующие соотношения

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=(0\cdot\infty)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}\\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}\end{cases}\ \text{или}\quad\blacktriangleleft$$

Замечание 4. *Правило Лопиталя после простого преобразования можно применять для раскрытия неопределённости вида* $\{0\cdot\infty\}$.

Пример 6. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\ln(x-1)$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to1+0}\ln x\ln(x-1)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to1+0}\frac{\ln(x-1)}{1/\ln x}=\{\infty/\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to1+0}\frac{-x\ln^2 x}{x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1+0}\frac{2\ln x}{x}=0\quad\triangleleft$$

Задача 3

Свести неопределённость вида $\{\infty-\infty\}$ *к неопределённости вида* $\{0/0\}$.

► *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \{\infty-\infty\}$. *Тогда необходимо преобразовать разность к дроби*

$$f-g=\frac{1}{1/f}-\frac{1}{1/g}=\frac{1/g-1/f}{1/f\cdot 1/g}\underset{\substack{f\to\infty\\ g\to\infty}}{\longrightarrow}\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0} \quad ◄$$

Замечание 5. *Правило Лопиталя можно применять для раскрытия неопределённостей вида* $\{\infty-\infty\}$, *поскольку она сводится к неопределённости вида* $\{0/0\}$.

Пример 7. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

$$\triangleright \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2} \quad \triangleleft$$

Задача 4

Свести неопределённости вида 1^∞, 0^∞, ∞^0 *к неопределённости вида* $0\cdot\infty$.

$$► \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\exp\{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\}=e^{(0\cdot\infty)} \quad ◄$$

Замечание 6. *Правило Лопиталя после логарифмирования можно применять для раскрытия неопределённостей вида* 1^∞, 0^∞, ∞^0.

Пример 8. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\triangleright \quad \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\right)=e^{\{0/0\}}=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{tg}2x}{2x}\right)=e^{-2} \quad \triangleleft$$

Лекция 24. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Чтобы найти экстремум функции, требуется определить, в каких точках он возможен, а затем выяснить, действительно ли он имеет место и каков его характер.

Вспомним определение экстремума функции:

$$\boxed{\textit{или}\quad \begin{array}{lcl} f(x) < f(x_0) & — & \max \\ f(x) > f(x_0) & — & \min \end{array} \quad \textit{при} \quad \begin{array}{c} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ x \neq x_0 \end{array}}$$

Необходимые условия экстремума: критические точки

★ *Критическими точками мы будем называть такие точки, в которых функция может иметь экстремум.*

Критические точки

1. *Стационарной точкой является такая точка x_0, в которой производная (скорость) равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0\,.$$

2. *Критической точкой для непрерывной функции $f(x)$ является также такая точка x_0, в которой её производная не существует или обращается в бесконечность:*

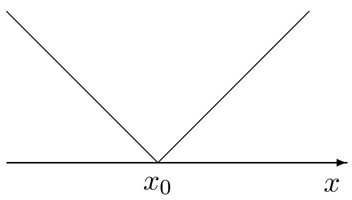
$$f'(x_0) \text{ — \textit{не существует или равна} } \infty.$$

Вопрос: Привести три примера графиков, содержащих критические точки, но не имеющих экстремумов (самостоятельно).

Первое достаточное условие

Задача 1

Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в δ-окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки. Показать, что если в этой точке производная меняет знак, то имеет место локальный экстремум.



► *Пусть для определенности*

$$f'(x_0 - 0) < 0, \text{ а } f'(x_0 + 0) > 0.$$

Покажем, что в этом случае имеет место минимум. Воспользуемся соотношением

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{В левой окрестности:}\ \ \Delta x < 0,\ \ f'(x_0 - 0) < 0, \\ \text{а значит } f(x_0 + \Delta x) > f(x_0). \\[1ex] \textit{В правой окрестности:}\ \ \Delta x > 0,\ \ f'(x_0 + 0) > 0, \\ \text{и значит } f(x_0 + \Delta x) > f(x_0). \end{array}\right\} \Rightarrow \min \qquad ◄$$

• *Изображённая на рисунке функция $f(x) = |x - x_0|$ не имеет производной в точке минимума.*

• *Если в критической точке производная функции меняет знак с минуса на плюс, то имеет место минимум; а с плюса на минус — максимум.*

• *Первое достаточное условие годится для любых критических точек и является универсальным.*

Второе достаточное условие

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке стационарную точку ($f'(x_0) = 0$). Показать, что если в этой точке вторая производная отлична от нуля, то имеет место локальный экстремум.

▶ *Формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big)$$

в стационарной точке принимает вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big).$$

Так как в любой окрестности x_0 (правой и левой) $(x - x_0)^2 > 0$, то в δ-окрестности точки x_0 выполняются неравенства:

$$\begin{array}{lcc@{\qquad}lcc} \text{если } f''(x_0) > 0, & & \overset{+}{\smile} & \text{если } f''(x_0) < 0, & & \underset{-}{\frown} \\ \text{то } f(x) > f(x_0) & — & \min & \text{то } f(x) < f(x_0) & — & \max \end{array}$$ ◀

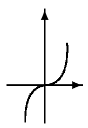
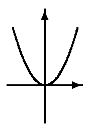
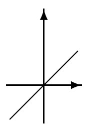
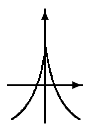
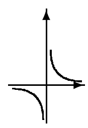
• *Если вторая производная в стационарной точке больше нуля, то имеет место минимум, а если меньше нуля, то максимум.*

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$, необходимо:

1. *Найти критические точки на этом отрезке.*
2. *Подсчитать значения функции в этих точках и на концах отрезка.*
3. *Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.*

Пример 1. *Исследовать на экстремум следующие функции:* x^3, x^2, x, $1-x^{\frac{2}{3}}$, x^{-1}. *Решение представить в виде таблицы.*

$f(x)$	x^3	x^2	x	$1-x^{\frac{2}{3}}$	x^{-1}
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$	$-x^{-2}$
x_0 *крит. т.*	0	0	*нет*	0	*разрыв в нуле*
$f'(x_0)$	0	0		*не сущ.*	
знак $f'(x_0)$ *лев., прав.*	$+\ +$ $\nearrow\ \nearrow$	$-\ +$ $\searrow\ \nearrow$		$+\ -$ $\nearrow\ \searrow$	
экстремум $f(x)$	*нет*	min	*нет*	max	*нет*
$f''(x)$	$6x$	2			
знак $f''(x_0)$	0	$+$			
графики					

Пример 2. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x)=x^3-3x+1$ *на отрезке* $[-2,2]$.

$\triangleright$ $f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$. *Далее*
$f(-1)=3,\ f(1)=-1,\ f(-2)=-1,\ f(2)=3.$

$f(2,-1)=3$ — *наибольшее, а* $f(1,-2)=-1$ — *наименьшее.* $\triangleleft$

Лекция 25. Выпуклость, точка перегиба и асимптоты кривой

При исследовании функции и построении её графика, помимо экстремума, используется ещё несколько важных понятий.

Выпуклость вверх и вниз

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ выпуклость вверх (вниз), если касательная в окрестности этой точки располагается выше (ниже) этой кривой.*

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет производные первого и второго порядка.
Показать, что по знаку производной второго порядка можно судить о том, функция в этой точке выпукла вверх или вниз.

► *Формулу Тейлора*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{y_{\text{кас}}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big)$$

можно записать в следующем виде:

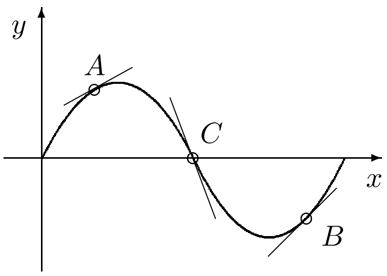
$$f(x) \simeq y_{кас} + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \qquad (*)$$

По определению, если $f(x) < y_{кас}$, то функция выпукла вверх, а если $f(x) > y_{кас}$, то функция выпукла вниз. Таким образом из формулы $(*)$ следует:

$f''(x_0) > 0$	$\overset{+}{\smile}$	— выпуклость вниз
$f''(x_0) < 0$	$\underset{-}{\frown}$	— выпуклость вверх

◄

★ *Точкой перегиба называется такая точка, которая разделяет у непрерывной функции области выпуклости вверх и вниз, и в которой график функции имеет касательную.*



Вопрос: *Идентифицируйте точки A, B, C, заданные на рисунке.*

Ответ: *A — точка выпуклости вверх,*
B — точка выпуклости вниз,
C — точка перегиба.

• *Проходящая через точку перегиба касательная, частично лежит выше кривой, а частично ниже.*

Необходимые условия точки перегиба: критические точки

Точка x_0 является критической точкой относительно перегиба, если выполняется одно из двух условий:

1. $f''(x_0) = 0$,
2. $f''(x_0)$ — *не существует или обращается в* ∞.

Достаточное условие точки перегиба

Задача 2

Показать, что если в окрестности критической точки вторая производная меняет знак, то эта точка — точка перегиба.

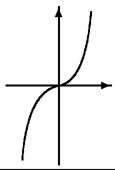
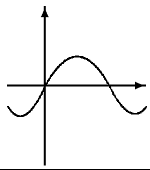
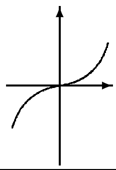
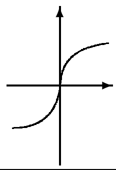
► *Для двух вариантов смены знаков из* Задачи 1 *следует:*

$$\begin{matrix} f''(x_0-0)>0 \text{ и } f''(x_0+0)<0 \\ f''(x_0-0)<0 \text{ и } f''(x_0+0)>0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \overset{+}{\smile} & \underset{-}{\frown} \\ \underset{-}{\frown} & \overset{+}{\smile} \end{matrix}} \text{ — } \begin{matrix}\text{точки}\\ \text{перегиба}\end{matrix}$$ ◄

• *Кроме смены знака второй производной в точке перегиба должна существовать касательная, которая может быть параллельна оси ординат.*

Пример 1. *Исследовать на перегиб следующие функции:* x^3, $\sin x$, $x^{\frac{5}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}$.

Решение представить в виде таблицы.

$f(x)$	x^3	$\sin x$	$x^{\frac{5}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}$
$f''(x)$	$6x$	$-\sin x$	$\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$
x_0 крит. т.	0	$n\pi$	0	0
$f''(x_0)$	0	0	*не сущ.*	*не сущ.*
знак $f''(x_0)$ *лев., прав.*	$\overset{\frown}{-}$ $\underset{\smile}{+}$	$\underset{\smile}{+}$ $\overset{\frown}{-}$ $\underset{\smile}{+}$	$\overset{\frown}{-}$ $\underset{\smile}{+}$	$\underset{\smile}{+}$ $\overset{\frown}{-}$
перегиб $f(x)$	да	да	да	да
графики				

Асимптоты

Графическое определение:

★ *Асимптотой называется прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удалённой точке.*

Аналитическое определение:

★ *Асимптотой называется линейная функция, эквивалентная заданной функции или обратной функции в бесконечно удалённой точке.*

• *Если бесконечно удалённой точкой является $x = \infty$, то асимптоту называют наклонной, а если бесконечно удалённой точкой является $y = \infty$ при x конечном, то асимптоту называют вертикальной.*

Пример 2. *Найти асимптоты функции* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$, *используя только определение асимптот через эквивалентные.*

▷ 1. *Наклонная асимптота:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} = x - 3 + \frac{8}{x + 1} = \underbrace{x - 3}_{y_{\text{ac}}} + o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$

2. *Вертикальная асимптота:*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \;\Rightarrow\; x + 1 = \frac{x^2 - 2x + 5}{y} = 0 + o(1) \quad \text{при } y \to \infty.$$

Ответ: $y_{ac} = x - 3$, $x_{ac} = -1$ ◁

• $\boxed{\text{Если } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \text{ то } x_{ac} = x_0}$ — вертикальная асимптота

Задача 3

Пусть функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту, т.е.
$f(x) = kx + l + o(1)$ *при* $x \to \infty$. *Найти* $\boxed{y_{ac} = kx + l}$.

▶ 1. *Делим $f(x)$ на x и вычисляем предел:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{l}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{o(1)}{x} \;\Rightarrow\; \boxed{k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

2. *Переносим в левую часть kx и вычисляем предел:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (l + o(1)) \Rightarrow \boxed{l = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)}$$ ◀

• *При построении графика функции находят её область определения, асимптоты, исследуют на экстремум и перегиб.*

Пример 3. *Построить график функции* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

▷ 1. *Находим область определения функции:*

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad x = 0 \text{ — точка разрыва 2-го рода.}$$

2. *Выявляем характерные особенности функции (чётность, периодичность, знакопостоянство и т.д.):*

$$f(x) \geqslant 0, \quad f(1) = 0 \text{ — функция не отрицательна.}$$

3. *Находим асимптоты функции:*

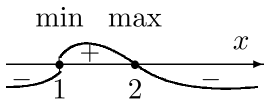
$$f(x) \to +0 \text{ при } x \to \pm\infty \Rightarrow y = 0 \text{ — горизонтальная асимптота}$$

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ — вертикальная асимптота}$$

4. *Исследуем функцию на экстремум*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{-x+1}{x^2} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

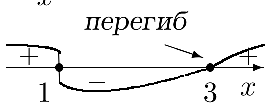
Критические точки: $x = 1, 2$. $f'(x)$:

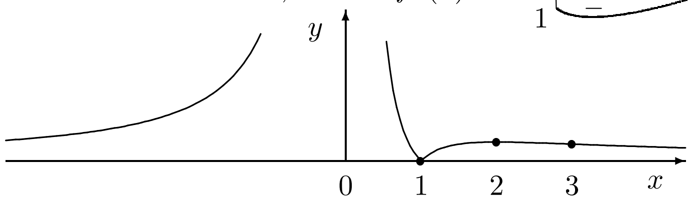


5. *Исследуем функцию на перегиб*

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\begin{cases} \dfrac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2(x-3)}{x^4} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{2(3-x)}{x^4} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Критические точки: $x = 1, 3$. $f''(x)$:





• *В точке* $x = 1$ *нет перегиба, поскольку нет касательной.* ◁

“Я принуждён сознаться, что положительно не способен сделать без ошибки сложения.”

Анри Пуанкаре

Раздел 4

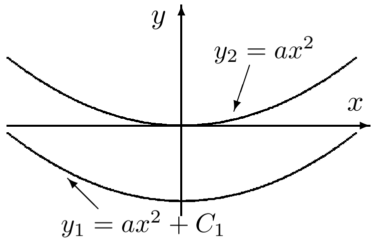
Интегральное исчисление

Лекция 26. Неопределённый интеграл или свойства первообразных

В математике, как и в жизни, нередко действию можно сопоставить обратное действие. По отношению к дифференцированию таким обратным действием является интегрирование.

★ *Пусть в некоторой области определены фунции: $f(x)$ и $F(x)$, и пусть $F'(x) = f(x)$, тогда $f(x)$ называется производной $F(x)$, а $F(x)$ — первообразной $f(x)$.*

Пример 1. *Построить график первообразной* $f(x) = 2ax$.



▷ *Простым подбором находится* $F(x) = ax^2 + C$, т. к. $(ax^2 + C)' = 2ax$. ◁

• *Непрерывная $f(x)$ имеет бесконечно много первообразных.*

★ *Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется её произвольная первообразная*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad C = \text{const}\,,}$$

где x — переменная интегрирования, а $f(x)$ — подынтегральная функция.

Задача 1

Показать, что если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то и $F(x) + C$ также первообразная функции $f(x)$.

▶ *По условию $F'(x) = f(x)$, но тогда*

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) \quad ◀$$

Свойства неопределенного интеграла.

Задача 2

Чему равен дифференциал неопределённого интеграла?

▶ $$d\int f(x)\,dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC =$$
$$= F'(x)\,dx = f(x)\,dx \quad ◀$$

1. *Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению*
$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Задача 3

Чему равен неопределённый интеграл дифференциала?

▶ $$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ◀$$

2. *Неопределённый интеграл дифференциала функции равен самой функции с точностью до произвольной постоянной*
$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Задача 4

Выразить интеграл $\int Af(x)\,dx$ *через исходный* ($A = \text{const} \neq 0$).

► $$\int Af(x)\,dx = \int dAF(x) =$$

$$\overset{\text{по 2 св-ву}}{=} AF(x) + C = A\int f(x)\,dx \quad ◄$$

• *Поскольку* C *произвольная постоянная, то после каждого равенства она может переопределяться, что здесь и в дальнейшем неоднократно используется.*

3. *Постоянный множитель выносится из под знака интеграла*
$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Задача 5

Сделать замену переменной интегрирования в $\int f[u(x)]u'(x)\,dx$.

► $$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \{u'(x)\,dx = du\} = \int f(u)\,du \quad ◄$$

4. *Под знаком интеграла можно проводить замену переменной*
$$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

5. *Интеграл суммы равен сумме интегралов с точностью до произвольной постоянной (показать самостоятельно)*
$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Задача 6

Получить таблицу первообразных, исходя из таблицы производных.

Таблица первообразных		
N	$F'(x) = f(x)$	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$
1	$C' = 0$	$\int 0\,dx = C$
2	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3	$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
4	$(\sin x)' = \cos x$ $(-\cos x)' = \sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
5	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
6	$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
7	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$ $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
8	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
9	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

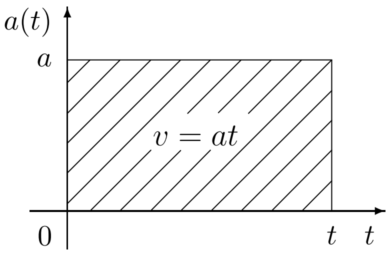
Лекция 27. Определённый интеграл и его свойства

Определённый интеграл отличается от неопределённого тем, что это либо число, либо первообразная с определённой постоянной при переменном верхнем пределе интегрирования.

Механический смысл определённого интеграла

Задача 1

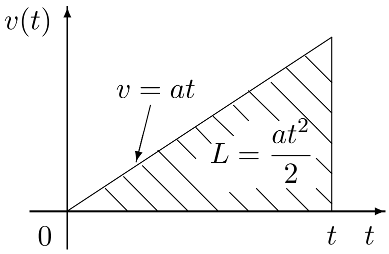
На графике ускорения отобразить скорость, а на графике скорости отобразить путь, пройденный телом при равноускоренном движении от $t = 0$ до момента t, если в начальный момент времени скорость и путь равны нулю.



► а) *По условию:*

$$v' = a,\ v(0) = 0,$$

следовательно $v = at$, что равно площади прямоугольника, при этом $y = a = \text{const}$, $x = t$. Тот же результат можно записать так $v = \int_0^t y\,dx = \int_0^t a\,dx$.

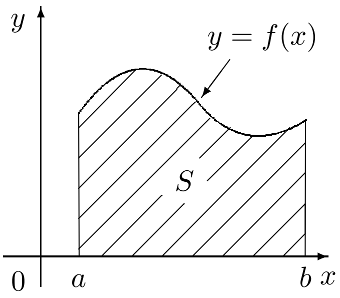


б) *По условию:*

$$L' = v = at,\ L(0) = 0,$$

а значит $L = at^2/2$, что равно площади треугольника, при этом $y = v = ax$, $x = t$. Тот же результат можно записать так $L = \int_0^t y\,dx = \int_0^t ax\,dx$.

Геометрический смысл определённого интеграла



Вопрос: *Какова площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой* $y = f(x)$ *и прямыми* $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

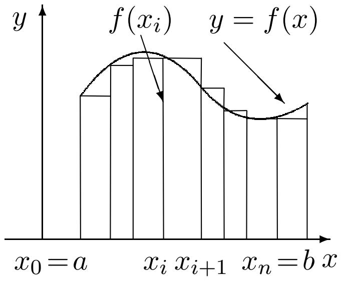
Ответ:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

- *Определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции.*

Задача 2

Представить определённый интеграл как предел некоторой суммы.



▶ *Весь отрезок* $[a, b]$ *разобъём на* n *отрезков* $[x_i, x_{i+1}]$ *длиной* $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, где $i = \overline{0, n-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. *В качестве элемента суммы возьмём площадь прямоугольника* $\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, *причём* $\xi_i = x_i$ *или* x_{i+1} *или* $(x_i + x_{i+1})/2$ и т. д.

Тогда суммы площадей прямоугольников $\forall \xi_i$ *имеют вид*

$$\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i} \quad \text{— интегральные суммы.}$$

Интуитивно ясно, что при $n \to \infty$ и $\max\ \Delta x_i \to 0$ *все интегральные суммы стремятся к площади криволинейной трапеции*

$$\boxed{S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.} \quad ◀$$

★ *Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при стремлении максимального частичного отрезка разбиения к нулю.*

★ *Числа a и b носят название, соответственно, нижнего и верхнего пределов интегрирования.*

Вопрос: *Какая связь существует между формой записи определённого интеграла и предела интегральной суммы?*

Ответ:
$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \to \int_a^b, \\ f(\xi_i)\to f(x)\,, \\ \Delta x_i \to dx\,.\end{array}}$$

Формула Ньютона–Лейбница

Задача 3

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и имеет первообразную $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. Показать, что тогда определённый интеграл находится по формуле:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

► $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\max\ \Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) =$$
$= \{$*согласно теореме о дифференцируемой функции*$\} =$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[F(x_{i+1}) - F(x_i) - o(\Delta x_i)\right] = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) -$$
$$-F(x_1) + \cdots + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) -$$
$$-F(x_{n-1}) + \lim_{\max\ \Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} o(\Delta x_i) = F(x_n = b) - F(x_0 = a)$$ ◄

Свойства определённого интеграла

Задача 4

Дать краткое обоснование каждому из приведённых ниже свойств.

1. $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a).$

• *Это простейший пример формулы Ньютона–Лейбница.*

2. $\displaystyle\int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)]\ dx = A_1\int_a^b f_1(x)\,dx + A_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$

• *Используется, что предел суммы равен сумме пределов, если эти пределы существуют.*

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ \ c\in[a;b].$

• *Используется свойство аддитивности.*

4. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

• *Можно сослаться на формулу Ньютона–Лейбница.*

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$, если $f(x)\geqslant g(x)$ на $[a,b]$.

• *Следует из аналогичного неравенства для интегральных сумм.*

6. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$ *при* $a<b$.

• *Используется, что модуль суммы не больше суммы модулей.*

Лекция 28. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

Сегодня вам предоставляется возможность познакомиться с двумя самыми популярными методами интегрирования.

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$.
Показать, что $\int_a^x f(u)\,du$ также первообразная функции $f(x)$.

► *Вычислим производную от интеграла с переменным верхним пределом:*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(u)\,du\right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой} \\ \text{Ньютона-Лейбница} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(F(x) - F(a)\right) = F'(x) = f(x) \quad ◄$$

• $\boxed{\int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a) = \Phi(x)}$ — первообразная $f(x)$

Вопрос: *Верно ли тождество*

$$\int_a^x f(u)\,du \equiv \int_a^x f(t)dt\ ?$$

Ответ: *Да!* *Переобозначение переменной интегрирования — это не замена переменной интегрирования.*

• *Не всякий определённый интеграл с переменным верхним пределом может быть выражен в виде комбинации элементарных функций. В качестве примера таких интегралов, которые получили название специальных функций, приведём*

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du \quad \text{— интегральный синус.}$$

Задача 2 (теорема о среднем)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Показать, что в этом случае найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что выполняется

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,, \text{ где } \xi \in (a,b)\,.$$

► *Будем исходить из формулы Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a) = \left\{ \begin{array}{c} \textit{по теореме} \\ \textit{Лагранжа} \end{array} \right\} =$$

$$= \Phi'(\xi)(b-a) = \left\{ \begin{array}{c} \textit{поскольку} \\ \Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)\,du \end{array} \right\} = f(\xi)(b-a)\,. \quad ◄$$

Вопрос: Каков геометрический смысл теоремы о среднем?

Ответ: Всегда можно подобрать такую высоту прямоугольника, чтобы его площадь равнялась площади криволинейной трапеции с тем же основанием.

★ *Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равно:*

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Задача 3

Обосновать неравенство

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)\,, \text{ где } \left\{ \begin{array}{c} m = \inf f(x), \\ M = \sup f(x). \end{array} \right.$$

► *Неравенство является очевидным следствием* Задачи 2. ◄

Задача 4 (о замене переменной)

Пусть $f\left[u(x)\right])$ *непрерывна, а* $u(x)$ *дифференцируема на* $[a,b]$, *причём* $u(a)=c$, $u(b)=d$.
Показать, что:

$$\boxed{\int_a^b f\left[u(x)\right]u'(x)\,dx=\int_c^d f(u)\,du}$$

► $$\int_a^b f\left[u(x)\right]\underbrace{u'(x)\,dx}_{du}=\int_a^b f\left[u(x)\right]\,du(x)=F\left(u(x)\right)\Big|_a^b=$$

$$=F\left(u(b)\right)-F\left(u(a)\right)=F(d)-F(c)=$$

$$=\int_c^d F'(u)\,du=\int_c^d f(u)\,du$$ ◄

- *Пределы интегрирования изменяются!*

Пример 1. *Вычислить* $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\,dx.$

▷ $$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=x^2, & du=2xdx\\ x_1=0, & u_1=0\\ x_2=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & u_2=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$$ ◁

Задача 5 (об интегрировании по частям)

Выполнить под знаком интеграла $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ *перенос производной со второй функции* $v(x)$ *на первую* $u(x)$, *если обе функции дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$.

▶ *Вопрос: Какое выражение связывает* uv' *и* $u'v$?

Ответ:
$$\underbrace{d(u\cdot v)=udv+vdu=uv'dx+u'vdx}_{\text{дифференциал произведения}}.$$

Теперь проинтегрируем это равенство
$$\underbrace{\int_a^b d(uv)}_{2}=\underbrace{\int_a^b uv'\,dx}_{1}+\underbrace{\int_a^b u'v\,dx}_{3}$$
и окончательно получим:
$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx}\quad\blacktriangleleft$$

Пример 2. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx.$

$$\triangleright\quad\int_1^e \ln x\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x, & v'=1\\ u'=\dfrac{1}{x}, & v=x\end{array}\right\}=$$
$$=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}x\,dx=e-x\Big|_1^e=1\quad\triangleleft$$

Задача 6

Упростить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du$, *если* $f_{\text{чёт}}(u)$ *или* $f_{\text{нечёт}}(u)$.

$$\blacktriangleright\quad\int\limits_{-a}^{0} f(u)\,du=\left\{\begin{array}{ll} u=-x, & du=-dx\\ u_1=-a, & x_1=a\\ u_2=0, & x_2=0\end{array}\right\}=$$
$$=-\int_a^0 f(-x)\,dx=\mp\int_a^0 f(x)\,dx\quad\text{для } f_{\text{чёт}}(x) \text{ или } f_{\text{нечёт}}(x).$$

В результате
$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du=\begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(u)\,du & \text{при } f_{\text{чёт}}(u)\\ 0 & \text{при } f_{\text{нечёт}}(u)\end{cases}}\quad\blacktriangleleft$$

Лекция 29. Методы интегрирования

Всякое обратное действие сложнее прямого. Это в полной мере относится к такому действию, как интегрирование. Прежде чем воспользоваться таблицей интегралов необходимо заданный интеграл преобразовать к табличному.

Метод замены переменной интегрирования

$$\boxed{\int_a^b f\left[u(x)\right] u'(x)\,dx = \int_c^d f(u)\,du}, \quad \text{где } c = u(a),\ d = u(b).$$

Это наиболее часто используемый метод. Он применяется, когда подынтегральная функция является сложной функцией.

Пример 1. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x^2} 2x\,dx.$

$$\triangleright \quad \int \frac{1}{\cos^2 x^2} 2x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\cos^2 u}\,du =$$

$$= \operatorname{tg} u + C = \operatorname{tg} x^2 + C \quad \triangleleft$$

Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

Этот метод применяется тогда, когда подынтегральная функция содержит:

1. *Какую-либо обратную функцию:* $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x$ *и т. д.*
2. *Произведение степенной функции на экспоненту или тригонометрическую функцию:* $x \sin x,\ x^2 \exp x$ *и т. д.*
3. *Произведение экспоненты на тригонометрическую функцию.*

Пример 2. *Вычислить интеграл* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

$$\triangleright \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \triangleleft$$

Метод неопределённых коэффициентов

Задача 1

Привести интеграл от рациональной дроби $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, *в котором* $Q_m(x)$ *и* $P_n(x)$ *— многочлены степеней* m *и* n, *к сумме интегралов от простейших дробей.*

► *Для вычисления интеграла от рациональной дроби необходимо:*

а) *привести эту дробь к правильной дроби, т. е.*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{F_{m_1}(x)}{P_n(x)}, \text{ где } m_1 < n.$$

б) *преобразовать знаменатель к произведению простейших многочленов, т. е.*

$$P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)^l\cdots(ax^2+bx+c),$$

где x_k – корень кратности l.

в) *записать правильную дробь в виде суммы простейших дробей, т. е.*

$$\frac{F_{m_1}(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{C}{(x-x_k)} + \frac{D}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-x_k)^l}}_{l} + \frac{Wx+Z}{ax^2+bx+c}\ ,$$

где $A, B, \ldots, C, D, K, \ldots, W, Z$ – неопределённые коэфициенты.

г) *приводя сумму простейших дробей к общему знаменателю, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая её, находим неопределённые коэффициенты.*

д) *окончательный ответ получится после вычисления интегралов от многочлена и простейших дробей*

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,dx = \int R_{m-n}(x)\,dx + \int \frac{A}{x-x_0}\,dx + \int \frac{B}{x-x_1}\,dx + \cdots$$

$$+ \int \frac{C}{(x-x_k)}\,dx + \cdots + \int \frac{K}{(x-x_k)^l}\,dx + \int \frac{Wx+Z}{ax^2+bx+c}\,dx \quad ◀$$

Пример 3. *Вычислить интеграл:*

$$\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$$

▷ а) *Приводим заданную дробь к правильной*

$$\frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x} = x+1+\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}$$

посредством деления многочленов обычным “столбиком”.

б) $x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$,

где использована теорема Виета.

в) $$\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{{}^{x^2-5x+6}\!/A}{x} + \frac{{}^{x(x-3)}\!/B}{x-2} + \frac{{}^{x(x-2)}\!/C}{x-3}$$

г) $2x^2-1 = A(x^2-5x+6) + B(x^2-3x) + C(x^2-2x)$

★ *Многочлены равны, если все коэффициенты в них при соответствующих степенях x между собой равны.*

Вопрос: Сколько в данном случае будет равенств?

Ответ: Три, а именно:

$$\begin{aligned} x^2 &: \ A + B + C = 2\,, \\ x^1 &: \ 5A + 3B + 2C = 0\,, \\ x^0 &: \ 6A = -1\,. \end{aligned}$$

Полученную систему решаем по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6\,,$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21\,,$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -34\,.$$

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}, \quad C = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}.$$

д) $$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx = \int (x+1)\,dx -$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C \quad \triangleleft$$

Лекция 30. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений

В этой лекции будет продолжено изучение методов интегрального исчисления.

Дополнение к таблице интегралов

Пример 1. *Показать, что*

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.}$$

▷ *Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов.*

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{{}^{x+a/}A}{x-a} + \frac{{}^{x-a/}B}{x+a},$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a) \implies \begin{array}{l} x^1: \ A + B = 0, \\ x^0: \ Aa - Ba = 1. \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix} = -2a, \quad \begin{array}{l} \Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -1, \quad A = \dfrac{\Delta_A}{\Delta} = \dfrac{1}{2a}, \\ \Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad B = \dfrac{\Delta_B}{\Delta} = \dfrac{-1}{2a}. \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \triangleleft$$

Пример 2. *Показать, что*

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.}$$

$\triangleright$ *Чтобы убедиться в правильности первообразной, достаточно вычислить её производную ($F'(x) = f(x)$). Но прежде ответьте на вопрос.*

Вопрос: *Как связана производная модуля функции с производной этой функции?*
Ответ:

$$\frac{d|u|}{dx} = \frac{d|u|}{du}\frac{du}{dx} = \operatorname{sign} u \,\frac{du}{dx},$$

поскольку

$$\frac{d|u|}{du} = \left\{\begin{array}{ll} +1 & \text{при } u > 0 \\ -1 & \text{при } u < 0 \end{array}\right\} = \operatorname{sign} u\,.$$

$$F'(x) = \Big(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\Big)' = \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|} \times$$

$$\times \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = f(x) \quad \triangleleft$$

Интегрирование иррациональных выражений

1. *Сведение к табличным интегралам.*

Пример 3. *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}$.

$\triangleright$ *Сведём данный интеграл к предыдущему*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (3/2)x - 1/2}} =$$

$$= \left\{x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} = x^2 + 2 \cdot \tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{16} - \tfrac{9}{16} - \tfrac{1}{2} = (x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{17}{16}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x + \frac{3}{4})}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x + \tfrac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}}\right| + C \quad \triangleleft$$

2. *Замена переменных, приводящая к избавлению от иррациональности под знаком интеграла.*

Вопрос: Как избавиться от иррациональности в интеграле

$$\int R\left(\sqrt[m_1]{ax+b}\,,\ \ \sqrt[m_2]{ax+b}\,,\ \ldots\ ,\ \ \sqrt[m_n]{ax+b}\right)\,dx\,?$$

Ответ: Необходимо сделать замену переменной

$$u = \sqrt[m]{ax+b}\,,$$

где m – наименьшее общее кратное $m_1,\ m_2,\ \ldots\ , m_n$.

Пример 4. *Вычислить:* $\displaystyle\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$$\triangleright\quad \int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left\{\begin{array}{ll} u=\sqrt[6]{x}, & \sqrt{x}=u^3 \\ du=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\,dx, & \sqrt[3]{x}=u^2 \\ \multicolumn{2}{c}{dx=6x^{\frac{5}{6}}du=6u^5du} \\ x_1=1, & u_1=1 \\ x_2=64, & u_2=2 \end{array}\right\} =$$

$$= \int_1^2\frac{6u^5\,du}{u^3+u^2} = \int_1^2\frac{6u^3\,du}{u+1} = 6\int_1^2\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$\begin{array}{l|l} u^3 & u+1 \\ \cline{2-2} \underline{u^3+u^2} & u^2-u+1 \\ \quad -u^2 & \\ \quad \underline{-u^2-u} & \\ \qquad\quad u & \\ \qquad\quad \underline{u+1} & \\ \qquad\quad\ -1 & \end{array}$$

$$= 6\left[\tfrac{u^3}{3}-\tfrac{u^2}{2}+u-\right.$$

$$\left.-\ln(u+1)\right]\Big|_1^2 = 6\left[\tfrac{8}{3}-\tfrac{1}{3}-\right.$$

$$\left.-2+\tfrac{1}{2}+1-\ln\tfrac{3}{2}\right] =$$

$$= 11-6\ln 1{,}5 \quad \triangleleft$$

Интегрирование тригонометрических выражений

1. $I=\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx.$

Вычисление интеграла такого типа проводится при помощи универсальной тригонометрической подстановки: $u=\operatorname{tg}(x/2)$.

Задача 1

Выразить $\sin x$, $\cos x$ *и* dx *через универсальную тригонометрическую подстановку.*

► а) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$;

где использована формула : $1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} = 1/\cos^2\frac{x}{2}$.

б) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

в) $du = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2} = (1+u^2)\frac{dx}{2} \quad\Longrightarrow\quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

Таким образом универсальная тригонометрическая подстановка означает следующую замену переменной в интеграле I*:*

$$\boxed{I = \left\{\begin{array}{ll} u = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, & dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, & \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array}\right\} = \int R_1(u)\,du} \quad ◄$$

Пример 5. *Вычислить:* $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

$$\triangleright \quad \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C \quad \triangleleft$$

2. $\displaystyle\int\sin^p x\cos^q x\,dx$.

Вычисление интегралов такого типа осуществляется более простыми подстановками по сравнению с универсальной тригонометрической подстановкой:

$\boxed{\cos x = u \quad \textit{или} \quad \sin x = u}$ — если p или q нечётное;

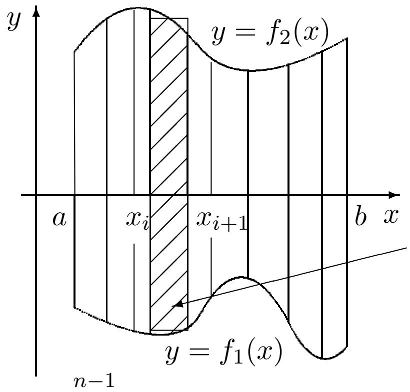
$\boxed{\mathrm{tg}\,x = u,\ \ dx/\cos^2 x = du}$ — если p и q чётное.

Лекция 31. Геометрические приложения определенных интегралов

Определение определённого интеграла как предела интегральных сумм позволяет получить различные формулы для нахождения длин, площадей и объёмов геометрических объектов.

Задача 1

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$.



► *Вопрос:* *Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*

Ответ: *Площадь прямоугольника:*

$\Delta S_i = [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i,$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$
$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\,, \quad x_0 = a,\ x_n = b.$

$S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$ — интегральная сумма

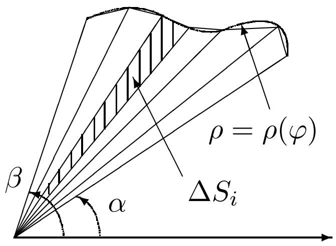
$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i$$

Используя связь между формой записи определённого интеграла и предела интегральной суммы (Лекция 27)*, получим*

$$\boxed{S_{\text{крив. трап}} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\ dx} \quad ◄$$

Задача 2

Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного линиями: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.



► *Вопрос: Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*

Ответ: Площадь треугольника:

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho(\varphi_i) \cdot \rho(\varphi_{i+1}) \cdot \sin \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$,
$\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_n = \beta$.

Вопрос: Чему равна эквивалентная площади треугольника?

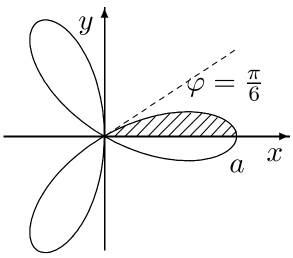
Ответ:
$$\left.\begin{array}{l} \rho(\varphi_{i+1}) = \rho(\varphi_i) + o(\rho(\varphi_i)) \\ \sin \Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i + o(\Delta\varphi_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta S_i \simeq \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$$

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\varphi_i \to 0}} S_n = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$$

Действуя так же как в Задаче 1, *получим*

$$\boxed{S_{\text{крив. сект}} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi} \quad ◄$$

Пример 1. *Найти площадь трилистника, если длина лепестка равна a.*



▷ *Вопрос: Назовите простейшую непрерывную периодическую функцию с амплитудой a и периодом $T = 2\pi/3$?*

Ответ: $\rho = a\cos 3\varphi$.

Очевидно $\rho = a$
при $\varphi = 0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$.

Вопрос: Укажите пределы интегрирования для половинки заштрихованного лепестка.

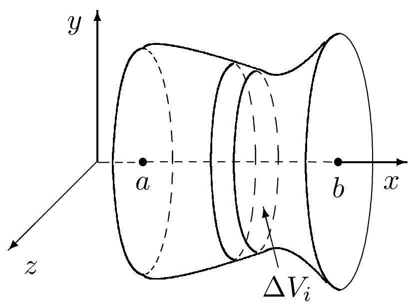
Ответ: $\varphi \in [0, \pi/6]$.

$$S = 6\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\varphi\,d\varphi = 3a^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4} \quad \triangleleft$$

Задача 3

Найти объём тела вращения, если он ограничен плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси x.



► *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?

Ответ: Объём диска:

$$\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

$$V = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

В результате

$$\boxed{V_{тел.\ вращ} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx} \quad ◄$$

Пример 2. *Найти объём шара радиуса R.*

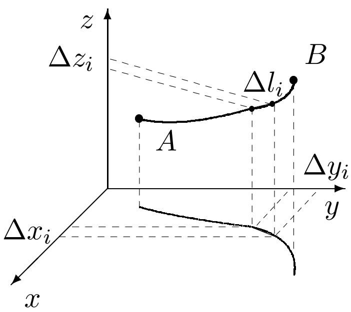
▷ *Вопрос:* Вращением какой кривой описывается шар?

Ответ: Вращением полуокружности. Итак, $f^2(x) = R^2 - x^2$ и

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \triangleleft$$

Задача 4

Найти длину кривой в трёхмерном пространстве, если она задана параметрическим образом: $\begin{array}{ll} x = x(t), & z = z(t), \\ y = y(t), & t \in [\alpha, \beta]. \end{array}$



► *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?

Ответ: Длину отрезка:

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2 + \Delta {z_i}^2},$$

при этом длина ломанной:

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2 + \Delta {z_i}^2}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2 + \Delta {z_i}^2} = \int_B^A \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

$$\boxed{L_{\text{длина крив}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx} \quad ◄$$

Пример 3. *Найти длину окружности радиуса R.*

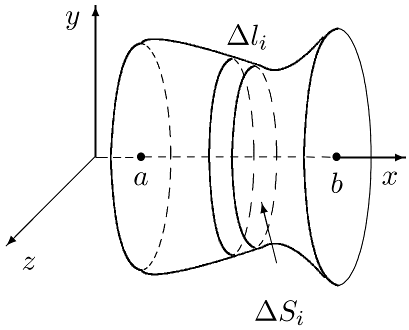
$$\triangleright \quad L = 2\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = 4R\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 4R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R \quad \triangleleft$$

• $y' = x/y$ находится из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ как производная неявной функции.

Задача 5

Найти площадь поверхности вращения, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси x, если $x \in [a, b]$.



► *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?

Ответ: Площадь "пояска":

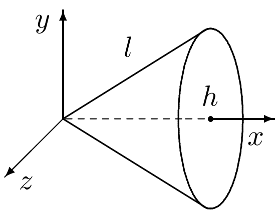
$\Delta S_i = 2\pi f(\xi_i)\Delta l_i$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(x_i)}\Delta x_i$$

$$\boxed{S_{поверх.\ вращ} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx} \quad ◄$$

Пример 4. *Найти площадь боковой поверхности конуса вращения радиуса R, если длина образующей равна l.*



▷ *Вопрос:* Каково уравнение образующей конуса?

Ответ: $y = x\dfrac{R}{h}$,

где $h = \sqrt{l^2 - R^2}$ — высота конуса.

$$S = 2\pi \int_0^h x\frac{R}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}\, dx = 2\pi \frac{Rl}{h^2}\, \frac{x^2}{2}\bigg|_0^h = \pi R l$$

Вопрос: К чему стремится площадь боковой поверхности конуса вращения, если его высота стремится к нулю?

Ответ: К площади круга. ◁

Лекция 32. Несобственные интегралы

До сих пор мы занимались вычислением интегралов. В данной лекции речь пойдёт о таких интегралах, которые прежде, чем вычислять, необходимо исследовать на сходимость.

★ *Интеграл называется несобственным, если его подынтегральная функция не ограничена на отрезке интегрирования, либо неограничена сама область интегрирования.*

★ *Несобственный интеграл существует (сходится), если существует предел этого интеграла в точке разрыва подынтегральной функции или в бесконечно удалённой точке. В противном случае говорят, что несобственный интеграл не существует (расходится).*

Несобственный интеграл с неограниченным пределом интегрирования

Это интеграл следующего вида:

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Пример 1. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

$$\rhd \quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - 0) = \frac{\pi}{2} \quad \lhd$$

Несобственный интеграл от неограниченной функции

Это интеграл следующего вида:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \text{ где } \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty}$$

или

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \text{ где } \lim_{x\to b-0} f(x)=\infty}$$

Пример 2. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\triangleright \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-0\right) = \frac{\pi}{2} \quad \triangleleft$$

Признаки сходимости несобственных интегралов

Задача 1 (признак сравнения)

Пусть выполняется неравенство $0 < g(x) \leqslant f(x)$, *где* $x \in [a,\infty)$. *Показать, что если несобственный интеграл от большей функции* $f(x)$ *сходится , то он сходится и от меньшей функции* $g(x)$, *а если он от меньшей функции расходится, то он расходится и от большей функции.*

$$\blacktriangleright \quad g(x) \leqslant f(x) \implies \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \implies$$

$$\implies \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \implies$$

$$\implies \int_a^\infty g(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 (предельный признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ с точностью до постоянного множителя эквивалентны в точке их разрыва или в бесконечно удалённой точке.
Показать, что в этом случае несобственные интегралы от этих функций сходятся или расходятся одновременно.

▶ *По условию* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, *и положим* $g(x) > 0,\ A > 0$.

Тогда из определения предела:

$$\begin{array}{c}\underbrace{A-\varepsilon \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant A+\varepsilon} \\ \Downarrow \\ \underbrace{(A-\varepsilon)g(x) \leqslant f(}_{1-\text{нерав.}}\underbrace{x) \leqslant (A+\varepsilon)g(x)}_{2-\text{нерав.}}\end{array}, \quad \text{где } x\to\infty$$

Применим теперь признак сравнения к каждому из неравенств:

из 1 неравенства $\Rightarrow$ *если сходится интеграл от $f(x)$, то сходится интеграл от $g(x)$;*
из 2 неравенства $\Rightarrow$ *если сходится интеграл от $g(x)$, то сходится интеграл от $f(x)$.* ◀

Пример 3. *Исследовать* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x^2}$.

▷ $$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x^2} \Rightarrow \left\{\frac{1}{\sin x^2} \underset{x\to 0}{\simeq} \frac{1}{x^2}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^2} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{0} = \infty.$$

Ответ: Интеграл расходится ◁

Задача 3 (частный предельный признак сходимости для интеграла с неограниченным пределом)

Пусть $f(x) \underset{x\to\infty}{\simeq} \dfrac{A}{x^\alpha}$, *тогда несобственный интеграл сходится, если* $\alpha > 1$ *и расходится, если* $\alpha \leqslant 1$.

$$\blacktriangleright \quad \int_a^\infty \frac{A}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{A}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \neq 1, \quad \lim\limits_{b\to\infty} \left.\dfrac{A/(1-\alpha)}{x^{\alpha-1}}\right|_a^b & - \begin{array}{l} \alpha > 1 - \textit{сходится} \\ \alpha < 1 - \textit{расходится} \end{array} \\ \alpha = 1, \quad \lim\limits_{b\to\infty} A\ln x\Big|_a^b & - \textit{расходится} \end{array} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 4 (частный предельный признак сходимости для интеграла от неограниченной функции)

Пусть $f(x) \underset{x\to b}{\simeq} \dfrac{A}{(x-b)^\alpha}$, *тогда несобственный интеграл сходится, если* $\alpha < 1$, *и расходится, если* $\alpha \geqslant 1$.

$$\blacktriangleright \quad \int_a^b \frac{A}{(x-b)^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} \frac{A}{(x-b)^\alpha}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \neq 1, \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left.\dfrac{A/(1-\alpha)}{(x-b)^{\alpha-1}}\right|_a^{b-\varepsilon} & - \begin{array}{l} \alpha < 1 - \textit{сходится} \\ \alpha > 1 - \textit{расходится} \end{array} \\ \alpha = 1, \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A\ln(x-b)\Big|_a^{b-\varepsilon} & - \textit{расходится} \end{array} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 4. *Исследовать* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x-3)^2}$.

$\triangleright$ *Поскольку* $\alpha = 2$, *то согласно* Задаче 3 *интеграл с неограниченным пределом интегрирования сходится. Но в точке* $x = 3$, *принадлежащей отрезку интегрирования, неограниченна подынтегральная функция, а значит, согласно* Задаче 4, *интеграл расходится. Ответ: Интеграл расходится* $\triangleleft$

Лекция 33. О других методах интегрального исчисления

Изученные нами методы интегрирования позволяют вычислять достаточно простые интегралы. Существуют и другие, более изощрённые методы интегрирования. Некоторым из них, например, методу перевала, посвящены монографии. В данной лекции мы лишь коснёмся двух таких методов интегрального исчисления, а именно, метода вычисления интегралов с помощью введения параметра и метода приближённого интегрирования.

Вычисление интегралов, зависящих от параметра

★ *Пусть подынтегральная функция является функцией двух переменных* $f(x,\lambda)$, *заданой на множестве точек* (x,λ), *где* $x \in [a,b], \quad \lambda \in [c,d]$, *тогда интеграл*

$$\int_a^b f(x,\lambda)\,dx = I(\lambda)$$

называется интегралом зависящим от параметра λ.

Свойство:

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}I(\lambda) = \int_a^b \frac{d}{d\lambda}f(x,\lambda)\,dx} \qquad (*)$$

- $f'_\lambda(x,\lambda)$ *является непрерывной функцией двух переменных.*

Пример 1. *Вычислить* $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 xe^{-\lambda x}\,dx$, где $\lambda > 0$.

$\triangleright$ *Введём вспомогательный интеграл*

$$J(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda x}\,dx = \left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_0^1 = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Очевидно, что

$$I(\lambda) = \int_0^1 xe^{-\lambda x}\,dx = -\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}.$$

Отсюда следует

$$I(\lambda) = -\left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)'_\lambda = \frac{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}{\lambda^2} \quad \triangleleft$$

Задача 1

Вычислить: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$

► *Примем без доказательства, что заданный несобственный интеграл сходится. График его подынтегральной функции при* $x \gg 2\pi$ *вырезает почти равные площади в верхней и нижней полуплоскостях, в отличие от* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}$, *который расходится.*

Введём два вспомогательных интеграла

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad J(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x\,dx, \quad \text{где } \lambda > 0.$$

В предположении, что свойство $(*)$ *выполняется и для* $I(\lambda)$, *получим*

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = -J(\lambda).$$

Действительно

$$\frac{d}{d\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda x}\,dx = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}x\,dx.$$

Согласно формуле Эйлера (Лекция 14)

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}x},$$

и соответственно

$$\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} e^{\mathrm{i}x}\, dx = J(\lambda).$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x + \mathrm{i}x}\, dx = \left.\frac{e^{-\lambda x+\mathrm{i}x}}{-\lambda+\mathrm{i}}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda - \mathrm{i}},$$

то один из вспомогательных интегралов равен

$$J(\lambda) = \operatorname{Im}\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}} = \operatorname{Im}\frac{\lambda+\mathrm{i}}{1+\lambda^2} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Теперь подсчитаем второй интеграл

$$I(\lambda) = -\int J(\lambda)\, d\lambda = -\int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + C = \operatorname{arcctg}\lambda + C.$$

Очевидно

$$I(\infty) = 0 = \operatorname{arcctg}\infty + C = 0 + C \implies C = 0$$

В результате искомый интеграл равен

$$I(0) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arcctg} 0 + C = \frac{\pi}{2} \quad ◀$$

Задача 2

Вычислить: $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$, *воспользовавшись интегралом Пуассона* $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*он будет вычислен в* Лекции 50).

▶ *Вопрос: Сходится ли заданный интеграл?*

Ответ: Да, заданный несобственный интеграл безусловно сходится, поскольку подынтегральная функция убывает быстрее, чем $x^{-\alpha}$, где α сколь угодно большое число.

Введём два вспомогательных интеграла

$$I(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx, \quad \text{и} \quad J(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2}\, dx, \quad \text{где } \lambda > 0.$$

Первый из них простой заменой переменной сводится к интегралу Пуассона

$$I(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \lambda x^2 = t^2 \\ \sqrt{\lambda} x = t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{\lambda}} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

В предположении, что свойство $(*)$ выполняется, получим

$$J(\lambda) = -\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}.$$

В результате

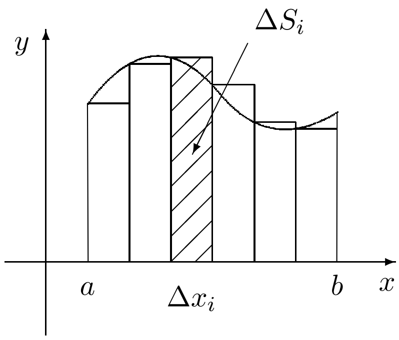
$$\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = J(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad ◀$$

Приближённое вычисление интегралов

Ниже мы получим два простейших численных алгоритма вычисления интегралов.

Задача 3 (формула прямоугольников)

Выразить интегральную сумму в виде суммы площадей прямоугольников с равными основаниями.



► $x_0 = a, \quad x_n = b,$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \quad \text{т. е.}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n},$$

. . . .

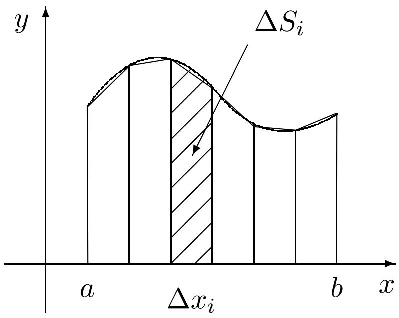
$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i \in [0, n]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$$ — формула прямоугольников ◄

Задача 4 (формула трапеций)

Выразить интегральную сумму в виде суммы площадей трапеций с равными основаниями.



► *Как следует из школьного курса геометрии, площадь любой из трапеций равна*

$$\Delta S_i = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i+1}) + f(x_i)].$$

Действуя так же, как в Задаче 3, *нетрудно получить*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]}$$ — формула трапеций ◄

“Теперь я знаю, почему
столько людей на земле охотно колет дрова.
По крайней мере сразу видишь результаты своего труда.”
Альберт Эйнштейн

Раздел 5

Дифференциальные уравнения

Лекция 34. Метод изоклин

В данной лекции мы познакомимся с дифференциальным уравнением первого порядка, а также с его графическим решением.

★ *Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение следующего вида*

$$\boxed{F(x, y, y') = 0 \quad \textit{или} \quad y' = f(x, y)}, \tag{1}$$

где x *— независимая переменная,* y *— неизвестная функция, а* f *и* F *— заданные функции соответственно двух и трёх переменных.*

★ *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция* $y = y(x, C)$, *где* C *— произвольная постоянная, которая обращает уравнение* (1) *в тождество, т.е.*

$$F(x, y(x, C), y'(x, C)) \equiv 0 \quad \textit{или} \quad y'(x, C) \equiv f(x, y(x, C)).$$

Задача 1

Решить простейшее дифференциальное уравнение: $y' = f(x)$.

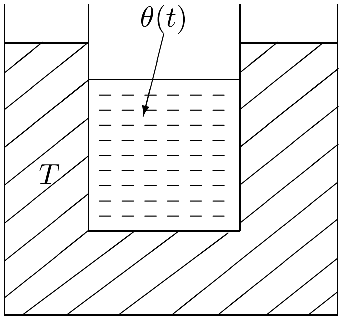
▶ $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \implies dy = f(x)dx,$

$$\int dy = \int f(x)\,dx \implies y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$ ◀

• *Решение простейшего дифференциального уравнения сводится к вычислению первообразной.*

Задача 2

Составить и решить дифференциальное уравнение, описывающее процесс охлаждения стакана молока в термостате, если известно, что скорость охлаждения пропорциональна разности температур этих тел.



▶ *По условию задачи:*

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T),$$

где k — *коэффициент пропорциональности.*
Уравнение составлено и осталось только решить его.

Для интегрирования необходимо разделить переменные

$$d\theta = -k(\theta - T)dt \implies \frac{d\theta}{\theta - T} = -kdt,$$

$$\int \frac{d\theta}{\theta - T} = -\int k\,dt \implies \ln|\theta - T| = -kt + C.$$

Итак, общее решение:

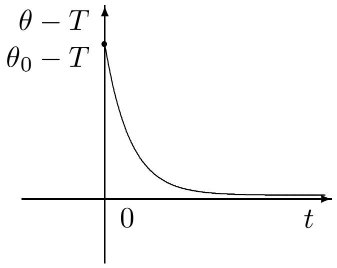
$$\theta - T = e^{-kt+C}.$$

Чтобы найти C требуется задать начальные условия:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad t_0 = 0.$$

Тогда

$$e^C = \theta_0 - T \quad \text{и} \quad \theta - T = (\theta_0 - T)e^{-kt}.$$



Вопрос: К чему стремится разность температур со временем?

Ответ: К нулю, что можно проиллюстрировать. ◄

Задача Коши

★ *Частным решением дифференциального уравнения* (1) *называется такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию*

$$\boxed{y(x_0) = y_0}. \tag{2}$$

★ *Задача Коши состоит в нахождении решения уравнения* (1), *удовлетворяющему начальному условию* (2).

Метод изоклин

Графическое решение дифференциальных уравнений основывается на уравнении

$$y' = f(x, y) = k,$$

где k — угловой коэффициент касательной.

Вопрос: Что описывает последнее уравнение?

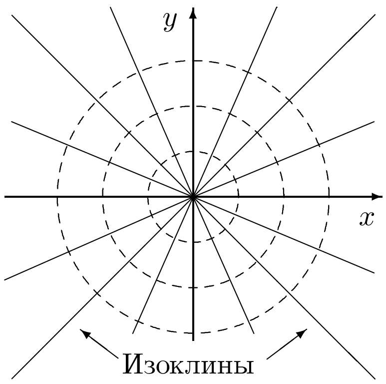
Ответ: При фиксированном k оно описывает кривую с равным углом наклона касательных.

★ *Изоклиной называется кривая с равным углом наклона касательных.*

$$\boxed{f(x,y)=k} \quad \text{— уравнение изоклины}$$

• *Метод изоклин заключается в построении семейства изоклин с нанесёнными на них отрезками касательных. Множество отрезков касательных образует поле направлений касательных интегральных кривых. Плавное соединение касательных даёт семейство интегральных кривых — общее решение уравнения.*

Пример 1. *Решить методом изоклин уравнение:* $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.



▷ *Уравнение изоклины*

$$-\frac{x}{y}=k$$

в данном случае совпадает с уравнением нормали

$$y=-\frac{1}{k}x.$$

Вопрос: *Запишите несколько уравнений изоклин для фиксированных угловых коэффициентов касательных.*

Ответ: $\begin{cases} k=\pm\infty & y=0 \\ k=\pm 1 & y=\mp x \\ k=0 & x=0 \end{cases}$ *Представленное на рисунке поле направлений касательных даёт семейство интегральных кривых.*

Вопрос: *Что из себя представляют интегральные кривые?*

Ответ: *Окружности.*

Вопрос: *Попробуйте это решение получить аналитически.*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy + xdx = 0 \implies,$$

$$\int y\,dy + \int x\,dx = C \implies x^2 + y^2 = 2C \quad \lhd$$

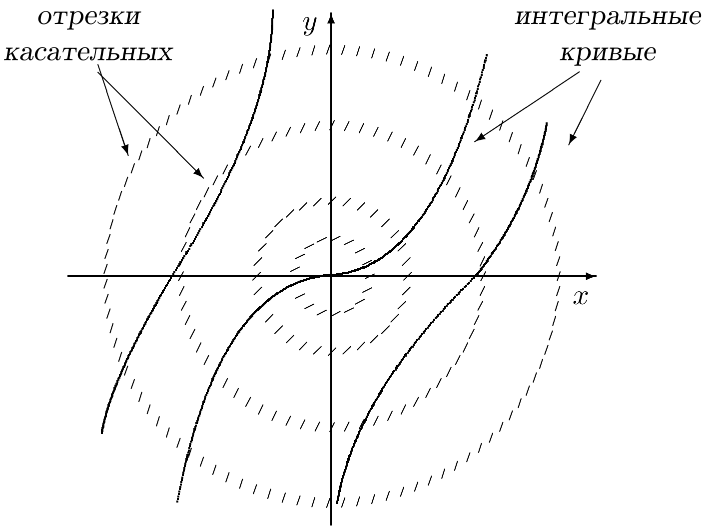
Пример 2. *Решить методом изоклин уравнение:*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\rhd$ *Уравнение изоклины*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k$$

в данном случае является уравнением окружности, причем чем меньше радиус окружности, тем меньше тангенс угла наклона касательных.



• *Полученное графически семейство интегральных кривых элементарными функциями не описывается, а само уравнение простыми аналитическими методами не решается.* $\lhd$

Лекция 35. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Чтобы решить дифференциальное уравнение, его необходимо проинтегрировать, но прежде его необходимо идентифицировать и преобразовать.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, определённые в предыдущей лекции, удобно записывать в следующей форме

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}\,. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными

★ *Пусть* $M(x,y) = u(x)$, *а* $N(x,y) = g(y)$, *тогда уравнение* (1) *называется дифференциальным уравнением с разделёнными переменными.*

Задача 1

Решить дифференциальное уравнение: $u(x)dx + g(y)dy = 0$.

► $\int u(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$ ◄

• *Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными решается простым интегрированием.*

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

★ *Пусть* $M(x,y) = u_1(x)g_1(y)$, *а* $N(x,y) = u_2(x)g_2(y)$, *тогда уравнение* (1) *называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 2

Решить дифференциальное уравнение:

$$u_1(x)g_1(y)dx + u_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

▶ *Поделим исходное уравнение на*

$$g_1(y)u_2(x) \not\equiv 0,$$

и тем самым сведем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{u_1(x)}{u_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C \quad ◀$$

Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

★ *Функция* $M(x, y)$ *называется однородной относительно* x *и* y*, если она удовлетворяет равенству*

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y),$$

где n *— степень однородности.*

Пример 1. *Найти степень однородности следующих функций:*

$$M_1(x, y) = 4x^2 + y^2, \;\; M_2(x, y) = x^3/y - 2xy,$$
$$M_3(x, y) = \sin\frac{y}{x}, \;\; M_4(x, y) = e^{xy}.$$

▷ *Ответ:* $M_{1,2}(x, y)$ — однородные с $n = 2$, $M_3(x, y)$ — однородная с $n = 0$, $M_4(x, y)$ — неоднородная. ◁

★ *Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется такое уравнение, в которое входят однородные функции* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$*, причём степень их однородности одинаковая.*

Задача 3

Решить дифференциальное уравнение:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

где $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ — *однородные функции степени* n.

► *По определению* $\begin{cases} M(x,y) = x^n M(1, \frac{y}{x}), \\ N(x,y) = x^n N(1, \frac{y}{x}). \end{cases}$

Вопрос: Какая замена приводит эти функции к функциям одной переменной?

Ответ:

$$\boxed{z = \frac{y}{x}, \quad y = zx, \quad dy = xdz + zdx}$$

после которой уравнение (1) *становится уравнением с разделяющимися переменными*

$$M(1,z)dx + N(1,z)(xdz + zdx) = 0$$

Вопрос: Что теперь делать?

Ответ: Преобразовать его к уравнению с разделёнными переменными и проинтегрировать

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}dz = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}\,dz = C \quad ◄$$

Пример 2. *Решить:* $(x^2 + y^2)dx + yxdy = 0, \quad y(1) = 0.$

▷ *Это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка* $(n = 2)$, *а потому делаем замену переменных:*

$$z = \frac{y}{x}, \quad y = zx, \quad dy = xdz + zdx \quad + \; (1) \implies$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{1+2z^2} = 0 \implies \int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{1+2z^2} = \ln C \implies$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln (1+2z^2) = \ln C \implies x^4(1+2z^2) = C\,.$$

Обратная замена переменных даёт общее решение

$$x^2(x^2+2y^2) = C,$$

а после учёта начального условия

$$1(1+2\cdot 0) = C \implies C = 1,$$

найдём частное решение

$$x^2(x^2+2y^2) = 1 \quad \textit{или} \quad y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x^2} - x^2\right)} \quad \triangleleft$$

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

★ *Дифференциальное уравнение является линейным, если оно линейно относительно неизвестной y и её производных.*

★ *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение*

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)}\,,$$

где y — неизвестная, а $p(x)$ и $f(x)$ — известные функции независимой переменной x.

★ *Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если $f(x) = 0$, в противном случае оно неоднородное.*

Задача 4

Решить линейное однородное уравнение:

$$\boxed{y' + p(x)y = 0}\,.$$

► *Вопрос: К какому известному типу уравнений данное уравнение относится?*

Ответ: Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C \implies \ln y + \int p(x)\,dx = \ln C,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y}, \text{ где } \boxed{\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}} \quad ◄$$

Задача 5

Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{$*$}$$

► *Решение будет искаться в виде подобном решению однородного уравнения (методом вариации постоянных)*

$$y = C(x)\overline{y}\,,$$

где $C(x)$ — *неизвестная функция. Тогда*

$$(*) \implies C'(x)\overline{y} + \underbrace{C(x)\overline{y}' + C(x)p(x)\overline{y}}_{\substack{\Downarrow \\ C(x)[\overline{y}' + p(x)\overline{y}] = 0}} = f(x)\,,$$

$$C'(x)\overline{y} = f(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \frac{f(x)}{\overline{y}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{\overline{y}}\,dx + C\,,$$

$$\boxed{y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{f(x)}{\overline{y}}\,dx} \text{ — формула Бернулли} \quad ◄$$

Уравнения Бернулли и Риккати

★ *Уравнением Бернулли называется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:*

$$\boxed{y' + p(x)y = y^n f(x), \text{ где } n \neq 0 \text{ или } 1}. \tag{1}$$

Задача 6

Свести уравнение Бернулли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению 1-го порядка.

▶ *Вопрос: Почему в уравнении Бернулли $n \neq 0$ или 1?*

Ответ: При $n = 1$ и $n = 0$ уравнение является линейным (однородным и неоднородным).

Поскольку в линейном уравнении в правой части y отсутствует поделим уравнение на y^n:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = f(x).$$

Вопрос: При какой замене искомой функции уравнение станет линейным?

Ответ: При замене $\boxed{z = y^{1-n}}$, *так как* $z' = (1-n)y^{-n}y'$, *то*

уравнение (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{z'}{1-n} + p(x)z = f(x)$. ◀

★ *Уравнением Риккати называется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:*

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)}. \tag{2}$$

Вопрос: При какой замене искомой функции уравнение Риккати сведётся к уравнению Бернулли, если известно частное решение y_1 уравнения Риккати.

Ответ: При замене $\boxed{y = y_1 + z}$

уравнение (2) $\Rightarrow$ $z' + [a(x) + 2b(x)y_1(x)]z + b(x)z^2 = 0.$

Лекция 36. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальные уравнения 2-го порядка в некоторых случаях сводятся к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

★ *Если в уравнении наивысший порядок производной искомой функции второй, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением 2-го порядка*

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0 \quad \textit{или} \quad y'' = f(x, y, y')}\,, \qquad (1)$$

где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, а f и F — заданные функции соответственно трёх и четырёх переменных.

Вопрос: *Каково теперь начальное условие?*

Ответ: *Поскольку начальное условие должно определить две константы интегрирования, то оно содержит два уравнения*

$$\boxed{y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y'_0}\,, \qquad (2)$$

где y_0 и y'_0 известные числа.

★ *Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющему начальному условию (2), называется задачей Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка.*

Типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

Задача 1

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 1-го типа

$$F(x, y', y'') = 0$$

к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

► *Поскольку заданная функция зависит только от трёх переменных, то очевидна замена переменных*

$$z = y', \quad z' = y''.$$

Тогда

$$F(x, y', y'') = 0 \implies \begin{cases} F(x, z, z') = 0 \\ z = y' \end{cases} \quad ◄$$

Пример 1. *Решить:* $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$, *если* $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

▷ $$y'' = \sqrt{1 + y'^2} \implies \begin{cases} z' = \sqrt{1 + z^2}\,, \\ z = y'\,. \end{cases}$$

1. $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2} \implies \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int dx + C_1 \implies \ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = x + C_1\,,$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{x + C_1} \implies 1 + z^2 = e^{2(x + C_1)} - 2ze^{x + C_1} + z^2\,,$$

$$z = \frac{e^{x + C_1} - e^{-(x + C_1)}}{2} = \operatorname{sh}(x + C_1)\,.$$

2. $$z = y' \implies y' = \operatorname{sh}(x + C_1)$$

$$y = \int \operatorname{sh}(x + C_1)\, dx = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2 \quad \text{— общее решение}$$

3. $$\begin{cases} y'(0) = \operatorname{sh}(0 + C_1) = 0 \\ y(0) = \operatorname{ch}(0 + C_1) + C_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \operatorname{ch} x \quad \text{— частное решение}$$

Проверка: $y'' = \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh} x^2} \iff \operatorname{ch} x^2 - \operatorname{sh} x^2 = 1.$

Ответ: $y = \operatorname{ch} x$. ◁

Задача 2

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 2-го типа

$$F(y, y', y'') = 0$$

к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

► *В дифференциальном уравнении 1-го порядка y должна играть роль x, поэтому напрашивается замена*

$$y'_x = z(y), \quad y''_{xx} = (z(y))' = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)dy}{dydx} = z'_y z\,.$$

Тогда

$$F(y, y', y'') = 0 \implies \begin{cases} F(y, z, zz'_y) = 0 \\ z(y) = y'_x \end{cases} \quad ◄$$

Пример 2. *Решить:* $y'^2 + 2yy'' = 0.$

▷ $y'^2 + 2yy'' = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ y'' = zz'_y \end{array} \right\} \implies \begin{cases} z^2 + 2yzz' = 0 \\ y'_x = z \end{cases}$

1. $z(z + 2yz') = 0$

a) $z = 0 \Rightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C$ — *тривиальное решение*

b) $z + 2yz' = 0 \Rightarrow z' + \frac{1}{2y}z = 0$ — *это линейное однородное уравнение 1-го порядка, где* $p(x) = \frac{1}{2y}$. *Его решение равно*

$$z = C_1 e^{-\int \frac{dy}{2y}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln y} = C_1 e^{\ln \frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

2. $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}\,,$

$$\int \sqrt{y}\,dy = \int C_1\,dx + C_2 \implies \tfrac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1 x + C_2.$$

Проверка: Дважды дифференцируя полученное решение, приходим к исходному уравнению

$\frac{2}{3}\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'_x = C_1 \implies \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'^2 + y^{\frac{1}{2}}y'' = 0 \implies \frac{y'^2+2yy''}{2\sqrt{y}} = 0.$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1x + C_2$. $\triangleleft$

Задача 3

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 3-го типа

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

однородное относительно $y,\ y',\ y''$, *к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.*

$\blacktriangleright$ *По условию* $F(x, y, y', y'') = y^n F(x, 1, y'/y, y''/y)$ *и поэтому напрашивается замена*

$$z = \frac{y'}{y} \ \Rightarrow\ y' = zy \ \Rightarrow\ y'' = z'y + zy' = y(z' + z^2)\,.$$

Тогда

$$F(x, y, y', y'') = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} F(x, z, z' + z^2) = 0 \\ y' = zy \end{array} \right. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3. *Решить:* $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

$\triangleright$ $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = zy \\ y'' = y(z' + z^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xz' - z = 0 \\ y' = zy \end{array} \right.$

1. $xz' - z = 0 \implies z = C_1e^{\int \frac{dx}{x}} = C_1x$
2. $y' = C_1xy \implies \frac{dy}{y} = C_1xdx \implies y = C_2e^{\frac{C_1x^2}{2}}$

Проверка: После подстановки $y' = x$ *и* $y'' = C_1y(C_1x^2 + 1)$ *в исходное уравнение приходим к тождеству:*

$$xyC_1y(C_1x^2 + 1) - xC_1^2x^2y^2 - C_1y^2x = 0 \equiv 0.$$

Ответ: $y = C_2e^{\frac{C_1x^2}{2}}$. $\triangleleft$

Лекция 37. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

На этой лекции мы познакомимся с такими важными понятиями, как определитель Вронского и фундаментальная система решений.

★ *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение*

$$\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = f(x)}, \quad (1)$$

где $p_i(x)$ $(i = \overline{0, n-1})$ *и* $f(x)$ *— известные функции.*

Вопрос: *Почему это уравнение называется линейным?*

Ответ: *Потому что оно линейно относительно y и её производных.*

Линейный дифференциальный оператор n-го порядка

★ *Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется выражение*

$$\boxed{L_n = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)}.$$

Вопрос: *Какой вид примет линейное дифференциальное уравнение при использовании линейного дифференциального оператора?*

Ответ:
$$\boxed{L_n[y] = f(x)}. \quad (1)$$

Задача Коши

★ *Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию*

$$\boxed{y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}}. \tag{2}$$

★ *Задачей Коши называется задача нахождения решения дифференциального уравнения* (1) *при заданном начальном условии* (2).

Свойства линейного дифференциального оператора

1. *Однородность*

$$L_n[cy] = cL_n[y]\,.$$

2. *Аддитивность*

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]\,.$$

Решение линейного однородного уравнения

★ *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение следующего вида*

$$\boxed{L_n[y] = 0}. \tag{1'}$$

Задача 1

Пусть $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *являются решениями уравнения* (1′). *Показать, что сумма* $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k$ *также является решением* (1′).

$$\blacktriangleright\quad L_n\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right] = \{\text{по 2-ому свойству}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} L_n\left[C_k y_k\right] = \{\text{по 1-ому свойству}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k L_n\left[y_k\right] = \{\text{по условию}\} = \sum_{k=1}^{n} C_k 0 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

★ *Фундаментальной системой решений называется система n линейно независимых решений уравнения $(1')$.*

★ *Система n функций называется линейно зависимой, если найдутся такие постоянные коэффициенты C_k, при этом хотя бы одно $C_k \neq 0$, что выполняется*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b),$$

в противном случае такая система функций называется линейно независимой на (a, b).

★ *Пусть $\{y_k(x)\}$ образует фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, тогда*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)\,, \quad \text{где} \;\; C_k = \text{const},$$

является его общим решением.

Пример 1. *Являются ли линейно независимыми функции: e^x и e^{x+b} ?*

▷ *Попробуем подобрать такие C_1 и C_2, чтобы*

$$C_1 e^x + C_2 e^{x+b} \equiv 0\,.$$

Очевидно, что тождество выполняется при $C_1 = e^b$, $C_2 = -1$.

Ответ: Функции линейно зависимы. ◁

Задача 2

Показать, что если функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю.*

★ *Определителем Вронского называется определитель, образованный из функций и их производных следующим образом*

$$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

▶ *Вопрос: Что будет, если продифференцировать* $n-1$ *раз условие линейной зависимости функций?*

Ответ: Получится квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно C_k

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0 \\ C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Вопрос: Когда эта система имеет нетривиальное решение, т.е. $C_k \neq 0\ \ \forall x \in (a,b)$*?*

Ответ: Чтобы $C_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta} \neq 0$, *необходимо*

$$\Delta = W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] = 0 \quad ◀$$

• *Если найдётся хотя бы одна точка* x, *в которой*

$$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] \neq 0\,,$$

то тогда функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *— линейно независимы.*

Пример 2. *Является ли линейно независимой система следующих функций:* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$*?*

$$\triangleright\quad W\,[x,\ \cos x,\ \sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(\cos^2 x + \sin^2 x) = x \neq 0\,.$$

Ответ: Функции линейно независимы. $\triangleleft$

Пример 3. *Найти линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальной системой решений которого являются функции:* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$.

$\triangleright$ *Вопрос: Каков порядок искомого дифференциального уравнения?*

Ответ: Третий.

Сейчас мы выпишем общее решение, трижды его продифференцируем, и далее подберём такие множители, чтобы при сложении правых его частей получился нуль.

$$\begin{array}{r|rl} -1 & y = & C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x \\ x & y' = & C_1 \quad - C_2 \sin x + C_3 \cos x \\ -1 & y'' = & \qquad\ - C_2 \cos x - C_3 \sin x \\ x & y''' = & \qquad\ + C_2 \sin x - C_3 \cos x \\ \hline \end{array}$$

$$-\,y + xy' - y'' + xy''' = 0.$$

Ответ: $y''' - \dfrac{1}{x}y'' + y' - \dfrac{1}{x}y = 0.$ $\triangleleft$

Лекция 38. Метод вариации произвольных постоянных

Вариация — термин, введённый Лагранжем для обозначения малого смещения независимого переменного или функции. Метод вариации произвольных постоянных, ранее использованный для решения линейного неоднородного уравнения 1-го порядка, будет здесь использован для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Задача 1

Пусть y_0 — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка, а $\{y_k(x)\}$ образует фундаментальную систему решений того же уравнения, т.е. $\overline{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$ — общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка. Показать, что $y(x) = y_0 + \overline{y}$ — общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

► $L_n[y(x)] = L_n[y_0 + \overline{y}] = L_n[y_0] + L_n[\overline{y}] =$

$$= \left\{ \begin{array}{c} L_n[y_0] \equiv f(x) \\ L_n[\overline{y}] \equiv 0 \end{array} \right\} \equiv f(x) + 0 \equiv f(x) \quad ◄$$

Задача 2

Пусть известна $\{y_k\}$ — фундаментальная система решений уравнения

$$L_n[y] = f(x). \tag{1}$$

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

► *Решение* (1) *будем искать в виде общего решения линейного* *однородного уравнения (см.* Лекцию 35. Задачу 5*)*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k, \tag{2}$$

но с переменными коэффициентами. Чтобы найти $C_k(x)$, *которых* n, *а уравнение одно, требуется наложить* $n-1$ *условие при вычислении производных* y. *Итак*

$$y' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k'\,,$$

$$y'' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k''\,,$$

$$\cdots\cdots\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}\,.$$

Подстановка всех производных в исходное уравнение даёт последнее уравнение для нахождения $C_k'(x)$

$$L_n[y] = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) \underbrace{L_n[y_k]}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)} = f(x)\,.$$

В результате получим следующую квадратную систему линейных алгебраических уравнений для $C_k'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 & + & C_2' y_2 & + \ldots + & C_n' y_n & = & 0, \\ C_1' y_1' & + & C_2' y_2' & + \ldots + & C_n' y_n' & = & 0, \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} & + & C_2' y_2^{(n-1)} & + \ldots + & C_n' y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{cases}$$

Решение этой системы определяется формулой Крамера

$$C'_k(x) = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{\Delta_k}{W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]}, \tag{3}$$

причём её определителем является определитель Вронского. ◄

★ *Метод вариации произвольных постоянных — метод нахождения частного и общего решений линейного неоднородного уравнения при известной фундаментальной системе его решений, при этом решение уравнения* (1) *ищется в виде* (2), *в котором* $C_k(x)$ *удовлетворяет* (3).

Пример 1. *Известно, что* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$ *— фундаментальная система решений уравнения*

$$y''' - \frac{1}{x}y'' + y' - \frac{1}{x}y = x.$$

Найти частное и общее решения этого уравнения.

▷ $$y = \sum_{k=1}^{3} C_k(x)y_k = C_1(x)x + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x\,.$$

1. *Вычислим определители.*

$$W\,[x,\ \cos x,\ \sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & \sin x \\ 1 & 0 & \cos x \\ 0 & x & -\sin x \end{vmatrix} = -x(x\cos x - \sin x),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x & \cos x & 0 \\ 1 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & x \end{vmatrix} = x(-x\sin x - \cos x).$$

2. *Вычислим* $C_k(x)$.

$$\begin{aligned} C_1' &= 1 && \Rightarrow \ C_1(x) = x + C_1\,, \\ C_2' &= -x\cos x + \sin x && \Rightarrow \ C_2(x) = -\int x\cos x\,dx - \cos x + C_2\,, \\ C_3' &= -x\sin x - \cos x && \Rightarrow \ C_3(x) = -\int x\sin x\,dx - \sin x + C_3\,, \end{aligned}$$

$$\int x\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right\} = x\sin x + \cos x,$$

$$\int x\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x\cos x + \sin x.$$

Таким образом

$$C_2(x) = -x\sin x - 2\cos x + C_2;\ C_3(x) = x\cos x - 2\sin x + C_3.$$

3. *Окончательно получим*

$$y = \sum_{k=1}^{3} C_k(x)y_k = (x + C_1)x + (-x\sin x - 2\cos x + C_2)\cos x +$$

$$+(x\cos x - 2\sin x + C_3)\sin x = \underbrace{x^2 - 2}_{y_0} + \underbrace{C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x}_{\overline{y}}$$

4. *Проверим частное решение* $y_0 = x^2 - 2$

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad y''' = 0 \Longrightarrow 0 + \frac{1}{x}2 - 2x - \frac{1}{x}(x^2 - 2) = x \equiv x\,.$$

Ответ: $y = x^2 - 2 + C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x.$ $\lhd$

Лекция 39. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Нам предстоит получить общее решение линейного однородного уравнения $L_n[y] = 0$ (1) как для случая простых корней (действительных и комплексных), так и для случая кратных корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение

Задача 1

Преобразовать линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y^{(1)} + p_0 y = 0, \quad p_j = \mathrm{const}$$

к алгебраическому уравнению.

▶ *Возьмём в качестве решения функцию*

$$\boxed{y = e^{kx}} \quad \text{— пробная функция}$$

Тогда

$$L_n[e^{kx}] = \sum_{j=0}^{n} p_j \frac{d^j}{dx^j} e^{kx} = e^{kx} \sum_{j=0}^{n} p_j k^j = e^{kx} R_n(k) = 0 \quad ◀$$

★ *Алгебраическое уравнение, получаемое из линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка заменой производных на степени, т.е. $y^{(j)} \implies k^j$, называется характеристическим уравнением*

$$\boxed{R_n(k) = \sum_{j=0}^{n} p_j k^j = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0}\,.$$

Задача 2

Пусть все k_j — простые корни характеристического уравнения. Показать, что $\left\{e^{k_j x}\right\}$, где $j = \overline{1, n}$, является фундаментальной системой решений уравнения (1).

► *Из* Задачи 1 *следует, что $e^{k_j x}$ без сомнения являются решениями уравнения* (1). *Нужно показать, что они линейно независимы. Сделаем это для случая $n = 3$.*

$$W\left[e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ e^{k_3 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ {k_1}^2 e^{k_1 x} & {k_2}^2 e^{k_2 x} & {k_3}^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ {k_1}^2 & {k_2}^2 & {k_3}^2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{преобразуем} \\ \text{определитель} \\ \text{Вандермонда} \end{array} \right\} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ {k_1}^2 & {k_2}^2 - {k_1}^2 & {k_3}^2 - {k_1}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ {k_2}^2 - {k_1}^2 & {k_3}^2 - {k_1}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 + k_1 - k_2 - k_1) \neq 0,$$

поскольку в случае простых корней $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ ◄

Задача 3

Показать, что следующие фундаментальные системы решений эквивалентны $\underbrace{\left\{e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)\mathrm{x}},\ e^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)\mathrm{x}}\right\}}_{1} \Longleftrightarrow \underbrace{\{e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x\}}_{2}$.

► *Общее решение, соответствующее первой фундаментальной системе, равно*

$$y = \underbrace{C_1 e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{x}} + C_2 e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)\mathrm{x}}}_{1} = \left\{ e^{\pm\mathrm{i}\beta\mathrm{x}} = \cos\beta x \pm \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x} \right\} =$$

$$= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x}) + \mathrm{C_2 e^{\alpha x}}(\cos\beta\mathrm{x} - \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x}) =$$

$$= (C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i}(\mathrm{C_1} - \mathrm{C_2})\mathrm{e^{\alpha x}}\sin\beta\mathrm{x} =$$

$$= \underbrace{A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}_{2} \quad ◄$$

Случай кратных корней

Задача 4

Пусть первые m корней совпадают, т.е. k_1 является m-кратным корнем характеристического уравнения. Показать, что $e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1 x}$ — *решения уравнения* (1).

► *По условию задачи* $R_n(k) = (k-k_1)^m Q_{n-m}(k)$. *Убедимся, что* $L_n[x^l e^{k_1 x}] = 0$, *если* $l = \overline{0, m-1}$.

$$L_n[x^l e^{kx}]\Big|_{k=k_1} = L_n[\frac{d^l}{dk^l}e^{kx}]\Big|_{k=k_1} = \frac{d^l}{dk^l}L_n[e^{kx}]\Big|_{k=k_1} =$$

$$= \frac{d^l}{dk^l}[e^{kx}(k-k_1)^m Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_1} =$$

$$= e^{kx}[x^l R_n(k) + x^{l-1}m(k-k_1)^{m-1}Q_{n-m}(k) +$$

$$+ \ldots + m(m-1)\cdots(m-l+1)(k-k_1)^{m-l}Q_{n-m}(k) + \ldots$$

$$+ (k-k_1)^m \frac{d^l}{dk^l}Q_{n-m}(k))]\Big|_{k=k_1} = 0 \quad ◄$$

Задача 5

Пусть первые m корней совпадают, т.е. k_1 является m-кратным корнем характеристического уравнения. Показать, что в этом случае e^{k_1x}, xe^{k_1x}, $\ldots$, $x^{m-1}e^{k_1x}$ входят в фундаментальную систему решений уравнения (1).

► *Согласно* Задаче 4 *эти функции являются решениями уравнения* (1). *Нам осталось показать, что эти функции линейно независимы. Как следует из определения линейно независимых функций* (Лекция 37), *умножение всех функций на некоторую функцию не может изменить их линейную зависимость или независимость. Поэтому достаточно вычислить определитель Вронского*

$$W[1,\ x,\ \ldots,\ x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & (m-1)x^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (m-1)! \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Итак, заданные функции линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений уравнения (1). ◄

Пример 1. *Решить:* $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0$.

▷ 1. $R_5(k) = k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2 = 0 \implies$

$$R_5(k) = k^2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = k^2(k+1)^3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\underbrace{k_{1,2} = 0}_{m_1=2}$, $\underbrace{k_{3,4,5} = -1}_{m_2=3}$.

2. *Фундаментальная система решений:*

$$\{f_i(x)\} = e^{0x},\ xe^{0x},\ e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5x^2e^{-x}$ ◁

Лекция 40. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Из этой лекции станет ясно, что решение указанных уравнений не имеет принципиальных трудностей и может быть проведено даже двумя способами.

Решение методом вариаций произвольных постоянных

Решение этим методом состоит из следующих шагов:

1. *Решить характеристическое уравнение, и тем самым найти фундаментальную систему решений* $\{y_k(x)\}$ *и общее решение линейного однородного уравнения*

$$\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)\,, \quad \text{где } C_k = \text{const}\,.$$

2. *Вычислить определитель Вронского и дополнительные определители, с помощью которых находятся*

$$C_k'(x) = \frac{\Delta_k}{\Delta}\,.$$

3. *Решить простейшие дифференциальные уравнения из пункта 2, и тем самым найти* $C_k(x)$.

4. *Общее решение неоднородного уравнения равно*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = \overline{y} + y_0$$

и представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Пример 1. *Решить:* $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

$\triangleright$ 1. $k^3 + k = 0 \;\Rightarrow\; k(k^2+1) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0,\; k_{2,3} = \pm \mathrm{i}$.

$\overline{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\mathrm{i}x} + C_3 e^{-\mathrm{i}x} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

• *Здесь произвольные постоянные переобозначены.*

2. $$W[1,\ \cos x,\ \sin x] = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \; C_1'(x) = \operatorname{tg} x\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \operatorname{tg} x & 0 \end{vmatrix} = -\sin x \qquad \Rightarrow \; C_2'(x) = -\sin x\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \sin x \;\; \Rightarrow \; C_3'(x) = -\operatorname{tg} x \sin x\,.$$

3. $$C_1(x) = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C_1\,,$$

$$C_2(x) = -\int \sin x\, dx = \cos x + C_2\,,$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx =$$
$$= \sin x + \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})| + C_3\,.$$

4. $y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x -$
$$-\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{tg}(\tfrac{x}{2} - \tfrac{\pi}{4})| \sin x \quad \triangleleft$$

Решение при специальном виде правой части

Первый случай:

$$\boxed{L_n[y] = Ae^{k_0 x}}\,, \tag{1}$$

где k_0 не совпадает с корнями характеристического уравнения.

Задача 1

Найти частное решение (1), если k_0 не совпадает с корнями характеристического уравнения.

► *Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде подобном его правой части*

$$\boxed{y_0 = ae^{k_0 x}}\,,$$

где требуется определить a.

$$L_n[ae^{k_0 x}] = ae^{k_0 x}R_n(k_0) = Ae^{k_0 x} \;\Rightarrow\; \boxed{a = \frac{A}{R_n(k_0)}} \quad ◄$$

Пример 2. *Решить:* $y'' - 5y' + 6y = 10e^{-2x}$.

▷ $k^2 - 5k + 6 = 0 \implies k_{1,2} = 2, 3 \;\Rightarrow\; \overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$A = 10,\;\; k_0 = -2,\;\; R_2(-2) = 20,\;\; a = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y_0 = \frac{1}{2}e^{-2x}$.

$$y = \overline{y} + y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Проверка: Для каждой из функций, входящих в решение, должен выполняться баланс коэффициентов.

$$\begin{aligned}
C_1 e^{2x} &: \;\; 4 - 10 + 6 = 0 \;\equiv\; 0\,,\\
C_2 e^{3x} &: \;\; 9 - 15 + 6 = 0 \;\equiv\; 0\,,\\
e^{-2x} &: \;\; 2 + 5 + 3 = 10 \;\equiv\; 10\,.
\end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ ◁

Второй случай:

$L_n[y] = Ae^{k_0 x}$, (1)

где экспоненциальный множитель k_0 *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m.

Задача 2

Найти частное решение (1), *если* k_0 *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m.

▶ *Вопрос: Может ли* $x^l e^{k_0 x}$ *при* $l = \overline{0, m-1}$ *являться частным решением уравнения* (1)*?*

Ответ: Нет, поскольку $x^l e^{k_0 x}$ *является решением однородного уравнения (*Лекция 39, Задача 4*).*

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\boxed{y_0 = ax^m e^{k_0 x}},$$

где требуется определить a.

По условию задачи $R_n(k) = (k - k_0)^m Q_{n-m}(k)$.

$$L_n[ax^m e^{k_0 x}] = aL_n[\frac{d^m}{dk^m} e^{kx}]\Big|_{k=k_0} = a\frac{d^m}{dk^m} L_n[e^{kx}]\Big|_{k=k_0} =$$

$$= a\frac{d^m}{dk^m}[e^{kx}(k-k_0)^m Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_0} = ae^{kx} m! Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_0} =$$

$$= ae^{k_0 x} m! Q_{n-m}(k_0) = Ae^{k_0 x} \;\Rightarrow\; \boxed{a = \frac{A}{m! Q_{n-m}(k_0)}} \quad ◀$$

• *Обратим внимание, что* $m = 0$ *соответствует первому случаю.*

• *Алгоритм верен как для действительных* k_0, *так и для комплексных.*

Третий случай:

$$\boxed{L_n[y] = P_l(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + K_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x},$$

где $P_l(x)$ *и* $K_l(x)$ *многочлены* l*-ой степени, а комплексная величина* $k_0 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m.

В этом случае, как и в первых двух, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n*-го порядка с постоянными коэффициентами ищется в виде наиболее близком к его правой части*

$$\boxed{y_0 = x^m[F_l(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + G_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]}.$$

Пример 3. *Решить задачу Коши:*

$y'' + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

$\triangleright \quad k^2 + 1 = 0 \implies k_{1,2} = \pm\mathrm{i} \ \Rightarrow \ \mathrm{m} = 1, \ \text{т.к.}\ \mathrm{k}_0 = \pm\mathrm{i}.$

$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x, \quad y_0 = x[(Ax + C)\cos x + (Bx + D)\sin x].$

Подстановка частного решения в исходное уравнение позволяет найти неопределённые коэффициенты частного решения.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\cos x & : & 2A + D = 0\ ; & \sin x & : & 2B - C = 0\,, \\
x\cos x & : & 2B - C + C = 1\ ; & x\sin x & : & -2A - D + D = 0\,, \\
x^2\cos x & : & A - A = 0\ ; & x^2\sin x & : & -B + B = 0\,.
\end{array}$$

Отсюда $A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1, \quad D = 0,$ *следовательно*

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + \tfrac{1}{2}x^2\sin x.$$

Применим к найденному y *начальные условия:*

$y(0) \ : \ C_1 = 0\ ; \ y'(0) \ : \ C_2 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \ C_2 = 1.$

Ответ: $y = \sin x + x\cos x + \frac{1}{2}x^2\sin x \quad \triangleleft$

Лекция 41. Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами

Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

★ *Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид в операторной форме:*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{y}}{dx} = A\overrightarrow{y}}, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{y} = (n \times 1)$ — искомый вектор, а A — линейный оператор, представляющий собой числовую матрицу $(n \times n)$.

Вопрос: *Как выглядит та же система в тензорной форме?*

Ответ: $\boxed{\dfrac{dy_i}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}$, где $a_{ij} = \text{const}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Вопрос: *Как выглядит система (1) в матричной форме?*

Ответ:
$$\boxed{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}.$$

Вопрос: *Как выглядит система (1) в алгебраической форме?*

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\,, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\,. \end{array}}$$

Задача 1

Получить характеристическое уравнение системы (1).

► *Чтобы свести систему* $\dfrac{d\overrightarrow{y}}{dx} = A\overrightarrow{y}$ *к алгебраической, введём пробную функцию*

$$\boxed{\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\alpha}\,e^{kx}}\,.$$

Тогда (1) $\implies$ $k\overrightarrow{\alpha}\,e^{kx} = A\overrightarrow{\alpha}\,e^{kx}$ $\implies$ $A\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{\alpha}\,.$

Полученное уравнение — это уравнение на собственные векторы квадратной матрицы (смотри Лекцию 10*). Использование единичной матрицы* $E\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$, *даёт уравнение на собственные числа квадратной матрицы:*

$$\boxed{\det(A - kE) = 0} \text{ — характеристическое уравнение} \quad ◄$$

Вопрос: Как запишется общее решение системы (1), *если все корни характеристического уравнения* k_j *различны?*

Ответ: $\boxed{y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}e^{k_jx}}$, где $b_{ij} = \text{const},\ i = \overline{1,n}.$

Вопрос: Как запишется общее решение системы (1), *если вычисленны собственные векторы* $\overrightarrow{\alpha}^{(j)}$ *матрицы* A*?*

Ответ: Тогда общее решение имеет вид:

$$\boxed{\overrightarrow{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \overrightarrow{\alpha}^{(j)} e^{k_j x}}, \quad \text{где} \quad j = \overline{1, n}.$$

Вопрос: Как запишется общее решение системы (1), *если корень характеристического уравнения* k_1 *кратности* m?

Ответ: В этом случае фундаментальная система решений:

$$\left\{e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1 x},\ e^{k_{m+1} x},\ \ldots,\ e^{k_n x}\right\},$$

а потому общее решение:

$$\boxed{y_i = (b_{i1} + b_{i2}x + \cdots + b_{im}x^{m-1})e^{k_1 x} + \sum_{j=m+1}^{n} b_{ij}e^{k_j x}}.$$

Вопрос: Сколько произвольных констант содержит общее решение системы (1)?

Ответ: Всего n, *поскольку* n *уравнений* 1-*го порядка. Следовательно* $n^2 - n$ *коэффициентов* b_{ij} *подлежат определению.*

Пример 1. *Решить:*
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2\,. \end{cases}$$

▷ 1. *Решаем характеристическое уравнение:*

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1-k)^2 - 4 = 0 \implies k_{1,2} = -1, 3.$$

2. *Фундаментальная система решений:* $\left\{e^{-x},\ e^{3x}\right\}$.

3. *Найдём общее решение:*

$$y_1 = b_{11}e^{-x} + b_{12}e^{3x}, \quad y_2 = b_{21}e^{-x} + b_{22}e^{3x}.$$

Вопрос: Как выразить коэффициенты b_{21} *и* b_{22} *через коэффициенты* $b_{11} = C_1$ *и* $b_{12} = C_2$*?*

Ответ: Для этого достаточно подставить в любое уравнение системы y_1 *и* y_2*, и потребовать, чтобы оно обратилось в тождество.*

$$\frac{d}{dx}\left(C_1e^{-x} + C_2e^{3x}\right) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + 2b_{21}e^{-x} + 2b_{22}e^{3x}.$$

$$\begin{array}{rcrcl} e^{-x} & : & -C_1 & = & C_1 + 2b_{21} \implies b_{21} = -C_1\,, \\ e^{3x} & : & 3C_2 & = & C_2 + 2b_{22} \implies b_{22} = C_2\,. \end{array}$$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \\ -C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$ ◁

Пример 2. *Решить:* $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - \ y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2\,. \end{cases}$

▷ 1. $\det(A - kE) = \begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$

$(1-k)(3-k) + 1 = 0 \implies (k-2)^2 = 0 \implies k_{1,2} = 2, \quad m = 2.$

2. $\{e^{2x},\ xe^{2x}\}.$

3. $y_1 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}, \quad y_2 = b_{21}e^{2x} + b_{22}xe^{2x}.$

$$\frac{d}{dx}\left(C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}\right) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - b_{21}e^{2x} - b_{22}xe^{2x}.$$

$$\begin{array}{rcrcl} e^{2x} & : & 2C_1 + C_2 & = & C_1 - b_{21} \implies b_{21} = -C_1 - C_2\,, \\ e^{3x} & : & 3C_2 & = & C_2 + 2b_{22} \implies b_{22} = -C_2\,. \end{array}$$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} \\ -(C_1 + C_2)e^{2x} - C_2xe^{2x} \end{pmatrix}$ ◁

Лекция 42. Фазовые траектории и особые точки дифференциальных уравнений

На этой лекции мы познакомимся с понятием устойчивости дифференциальных уравнений.

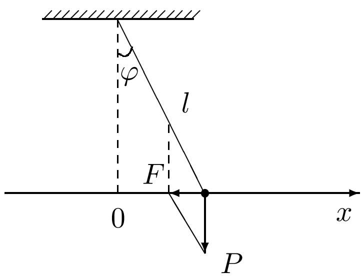
Линейный осциллятор без трения

★ *Линейным осциллятором называется такая система, которая многократно возвращается к одному и тому же состоянию, и описывается линейным дифференциальным уравнением.*

Простейшими примерами линейного осциллятора являются колебательный контур и маятник.

Задача 1

Составить уравнение для линейного осциллятора и решить его.



▶ *Согласно рисунку проекция сил на ось абцисс равна*

$F = -P\,\mathrm{tg}\,\alpha \simeq -xP/l$ *при* $x \ll l$. *Тогда второй закон Ньютона*

$m\ddot{x} = -xP/l$

определяет уравнение движения маятника при его малом отклонении.

Вопрос: Идентифицируйте полученное уравнение.

Ответ: Полученное уравнение линейного осциллятора, которое удобно записать в следующем виде

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0, \quad \text{где} \ \ {\omega_0}^2 = P/(ml),$$

представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. *Характеристическое уравнение:*
$$k^2 + {\omega_0}^2 = 0 \implies k_{1,2} = \pm i\omega_0 \,.$$
2. *Фундаментальная система решений:*
$$\left\{e^{i\omega_0 t},\ e^{-i\omega_0 t}\right\} \iff \{\sin\omega_0 t,\ \cos\omega_0 t\} \,.$$
3. *Общее решение:*
$$x = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t \,.$$
4. *Частное решение:*
$$x = a\cos\omega_0 t$$

для начальных условий: $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = 0.$ ◀

Задача 2

Установить функциональную связь между x *и* $\dot{x}$ *для частного решения* Задачи 1.

▶ *Согласно* Задаче 1

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_0 t \,, \\ \dot{x} = -a\omega_0 \sin\omega_0 t \,. \end{cases}$$

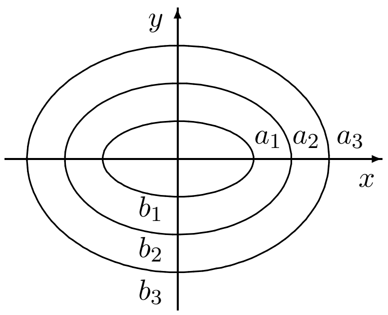
Вопрос: Каким образом исключить переменную t*?*

Ответ: Необходимо воспользоваться теоремой Пифагора.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\omega_0 t \\ -\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0} = \sin\omega_0 t \end{cases} \implies \begin{array}{c} +\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \cos^2\omega_0 t \\ \left(\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0}\right)^2 = \sin^2\omega_0 t \end{cases} \\ \hline \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0}\right)^2 = 1 \end{array}$$
◀

★ *Фазовой траекторией называется кривая, которая описывает зависимость* $\dot{x}$ *и* x.

Вопрос: Что представляет собой фазовая траектория линейного осциллятора?



Ответ: Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

где $y = \dot{x}$, $x = x$, $b = a\omega_0$, а также сумму потенциальной и кинетической энергий.

★ *Пространство переменных* x *и* $\dot{x}$ *называют фазовым пространством.*

Задача 3

Найти фазовую траекторию для линейного осциллятора без трения, не находя фундаментальной системы решений.

► *Сведем дифференциальное уравнение 2-го порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + {\omega_0}^2 x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -{\omega_0}^2 x \end{cases}$$

После исключения переменной t, *задача сводится к решению дифференциального уравнения 1-го порядка.*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{{\omega_0}^2 x}{y} \implies y dy = -{\omega_0}^2 x dx \implies$$

$$\frac{y^2}{2} + {\omega_0}^2 \frac{x^2}{2} = C \implies \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a\omega_0}\right)^2 = 1 \quad ◄$$

Вопрос: Имеется ли точка, где не определена фазовая траектория?

Ответ: Да. Фазовая траектория линейного осциллятора не определена в точке $(0,0)$, где $dy/dx = 0/0$.

★ *Точка, в которой не определен тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории, называется особой.*

Задача 4

Записать в линейном приближении систему нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y)\,, \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

в окрестности особой точки, где $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$.

► Разложим в ряды Тейлора правые части уравнений $(*)$

$P(x,y) = (x-x_0)P'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)P'_y(x_0,y_0) + \varphi(x-x_0, y-y_0)$

$Q(x,y) = (x-x_0)Q'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)Q'_y(x_0,y_0) + \psi(x-x_0, y-y_0)$

Тогда, после введения следующих обозначений

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0,y_0), \quad b = P'_y(x_0,y_0), \quad \xi = x - x_0 \\ c &= Q'_x(x_0,y_0), \quad d = Q'_y(x_0,y_0), \quad \eta = y - y_0 \end{aligned}$$

получим искомый результат

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a\xi + b\eta + \varphi(\xi,\eta)\,, \\ \dot{\eta} = c\xi + d\eta + \psi(\xi,\eta)\,, \end{cases}$$

где $\varphi(\xi,\eta)$ и $\psi(\xi,\eta)$ — ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по ξ и η. ◄

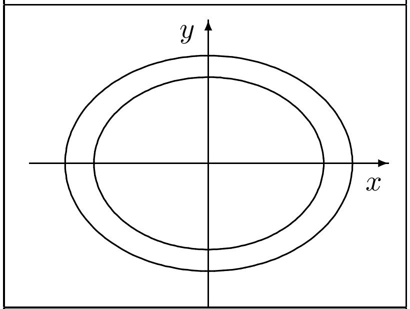
★ *Характеристическим уравнением системы дифференциальных уравнений называется уравнение:*

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \text{ или } \ \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \ \text{ где } \ \begin{array}{l} \sigma = a + d, \\ \Delta = \lambda_1\lambda_2. \end{array}$$

Классификация особых точек

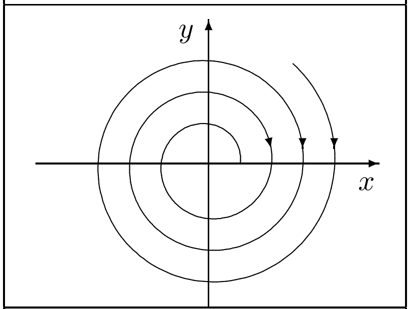
Устойчивость системы дифференциальных уравнений определяется корнями характеристического уравнения.

центр



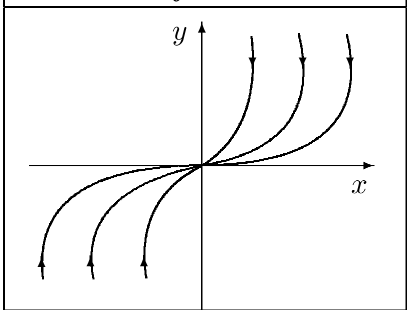
$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta < 0,\ \sigma = 0$

фокус



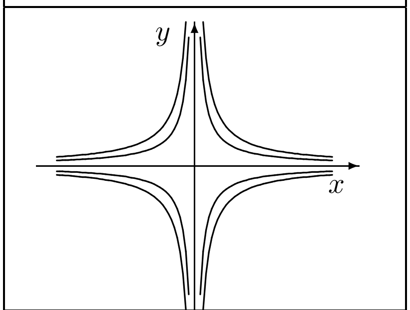
$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta < 0,\ \sigma \neq 0$

узел



$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta > 0$

седло



$\Delta < 0$

• *Согласно Ляпунову, если фазовая траектория замкнута, как в случае линейного осциллятора без трения (эллипс), или направлена к особой точке и проходит через неё, то решение системы нелинейных дифференциальных уравнений устойчиво. Во всех остальных случаях оно неустойчиво. Фазовая траектория направлена к особой точке, если* $\lambda_{1,2} < 0$ *(узел) или* $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ *(фокус).*

“Каждому, кто хоть когда-нибудь изучал математические теории, знакомо то неприятное чувство, когда ... вдруг осознаёшь, что ровным счётом ничего не понял... .

Альберт Эйнштейн

Раздел 6

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Лекция 43. Частные производные

В отличии от функции одной переменной, функция двух переменных описывает не плоскую кривую, а поверхность в трёхмерном пространстве, в каждой точке которой можно провести множество касательных.

Функция нескольких переменных

★ *Пусть задано множество векторов* $\overrightarrow{x} \in R_n$, *и множество чисел* $z \in Z$, *и пусть по определённому закону* $\forall \overrightarrow{x} \in R_n \Longrightarrow z \in Z$, *тогда* R_n — *область определения функции, а*

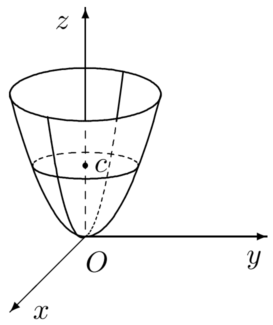
$\boxed{z = f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ — функция n переменных.

Вопрос: Как запишется функция двух переменных?

Ответ: *Если переменные* $x, y \in D$, *то* $\boxed{z = f(x, y)}$ — *функция двух переменных, а* D — *область определения функции.*

Пример 1. *Отобразить* $z = x^2 + y^2$ *и найти* D.

$\triangleright$ *Воспользуемся методом сечений*



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = y^2.$$

В пл. yOz — *парабола.*

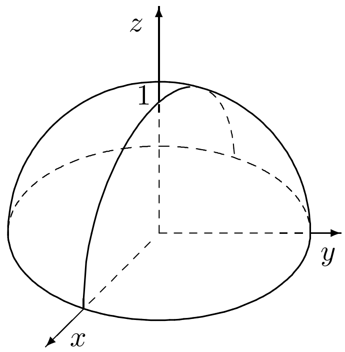
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = x^2.$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = C \end{cases} \Longrightarrow C = x^2 + y^2.$$

В пл. xCy — *окружность.*

Ответ: $D:\ x, y \in (-\infty, \infty)$, $z = x^2 + y^2$ — *параболоид вращения.* $\triangleleft$

Пример 2. *Отобразить* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *и найти* D.



$\triangleright$
$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{1 - y^2}.$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Ответ: $D:\ x, y \in [-1, 1]$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ — *полусфера.* $\triangleleft$

Предел функции нескольких переменных

★ *Число A является пределом функции $f(\overrightarrow{x})$ в точке $\overrightarrow{x^0}$, если функция определена в окрестности этой точки, за исключением, может быть, самой точки $\overrightarrow{x^0}$, и $\forall\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}| < \delta$ выполняется неравенство $|f(\overrightarrow{x}) - A| < \varepsilon$, и записывают*

$$\boxed{\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x^0}} f(\overrightarrow{x}) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to x_1{}^0\\ x_2\to x_2{}^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n{}^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A}.$$

• *Предел существует, если он не зависит от пути устремления $\overrightarrow{x}$ к $\overrightarrow{x^0}$.*

Пример 3. *Вычислить предел $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$.*

▷ *Зададим путь устремления к точке $(0,0)$ по прямым $y = kx$, тогда*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \quad \text{— } \begin{matrix}\text{предел}\\ \text{не существует}\end{matrix} \qquad \triangleleft$$

• *Предел суммы, частного и произведения функций n переменных равен сумме, частному и произведению пределов, если пределы этих функций существуют.*

Непрерывность функции

★ *Функция $f(\overrightarrow{x})$ непрерывна в точке $\overrightarrow{x^0}$, если*

$$\boxed{\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x^0}} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x^0})}.$$

Частное приращение и частная производная

★ *Частным приращением функции n переменных называется изменение функции при заданном приращении только одной переменной*

$$\boxed{\Delta_{x_i} f(\overrightarrow{x^0}) = f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}.$$

★ *Частной производной 1-го порядка функции n переменных называется предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{f'_{x_i}(\overrightarrow{x^0}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\overrightarrow{x^0})}{\Delta x_i} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_i}}.$$

Вопрос: Сколько различных частных производных 1-го порядка можно написать?

Ответ: Это число равно числу переменных функции.

Пример 4. *Вычислить производные* $z = \cos xy^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\triangleright \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin xy^2 \cdot y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin xy^2 \cdot 2xy + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \triangleleft$$

Частные производные высших порядков

★ *Частная производная от частной производной некоторой функции называется частной производной 2-го порядка*

$$\boxed{f''_{x_k x_i}(\overrightarrow{x^0}) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_i}}{\Delta x_k} = \frac{\partial^2 f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_k \partial x_i}}.$$

• *Частная производная 2-го порядка называется смешанной частной производной, если* $x_k \neq x_i$.

Пример 5. *Вычислить смешанную частную производную функции из* Примера 4.

$$\triangleright \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin xy^2 \cdot y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

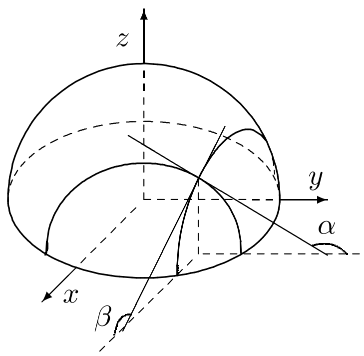
$$= -2y\sin xy^2 - 2xy^3\cos xy^2 - xy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin xy^2 \cdot 2xy + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \triangleleft$$

• *Непрерывная смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования.*

Задача 1

Выяснить геометрический смысл частной производной, воспользовавшись сферической поверхностью (Пример 2).



► *Согласно определению частной производной*

$$\Delta_x z \underset{x\to x_0}{\simeq} f'_x(x_0,y_0)(x-x_0),$$

а значит

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)$$

определяет уравнение касательной в плоскости xy_0z, *где*

$$f'_x(x_0,y_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}.$$

Таким образом частная производная $f'_x(x_0,y_0)$ *равна тангенсу угла наклона касательной* $\operatorname{tg}\beta$ *в плоскости* xy_0z. *Аналогично показывается, что* $f'_y(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\alpha$ *в плоскости* yx_0z. ◄

Лекция 44. Полный дифференциал

Для функции n переменных различают два вида дифференциалов: полный и частные.

Задача 1

Посредством частных приращений функции двух переменных выразить её полное приращение.

★ *Полным приращением функции нескольких переменных называется изменение функции при заданных приращениях всех переменных*

▶ $\Delta z = z - z_0 = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) + \Delta_x f(x_0, y_0) \quad ◀$$

Задача 2

Выразить полное приращение функции двух переменных через частные производные.

▶ *Согласно предыдущей лекции частные производные выражаются через частные приращения следующим образом*

$$\Delta_x f(x_0, y_0) \underset{\Delta x \to 0}{\simeq} f'_x(x_0, y_0)\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) \underset{\Delta y \to 0}{\simeq} f'_x(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y.$$

Если частная производная непрерывна, то

$$f'_x(x_0 + \Delta x, y_0) = f'_x(x_0, y_0) + o(1)\,.$$

Воспользовавшись результатом Задачи 1 *получим*

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y) + o(1)\Delta y \quad ◀$$

★ *Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется простейшая эквивалентная полного приращения этой функции*

$$\boxed{df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy},$$

и он равен сумме частных дифференциалов

$$\boxed{dz = \partial_x z + \partial_y z}.$$

Задача 3

Найти уравнение касательной плоскости к поверхности, описываемой уравнением $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

▶ *Вопрос: Как запишется уравнение касательной прямой через дифференциал функции одной переменной?*

Ответ: $\Delta z = df(x_0)$.

Вопрос: Как запишутся уравнения касательных прямых через частные дифференциалы функции двух переменной?

Ответ: $\Delta z = \partial_x f(x_0, y_0)$ *в пл.*zy_0x, $\Delta z = \partial_y f(x_0, y_0)$ *в пл.*zx_0y.

★ *Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется такая плоскость, которая содержит множество касательных к этой точке.*

Следовательно, уравнение касательной плоскости, которая содержит множество касательных прямых, имеет вид:

$$\boxed{\Delta z = df(x_0, y_0)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0} \quad ◀$$

Задача 4

Найти уравнение нормали к поверхности, описываемой уравнением $z = f(x, y)$, в точке (x_0, y_0).

★ *Нормалью к поверхности называется прямая, ортогональная касательной плоскости.*

▶ *Вопрос:* *Чему равен нормальный вектор к касательной плоскости?*

Ответ: *Согласно* Задаче 3 *он равен*

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},\ -1 \right).$$

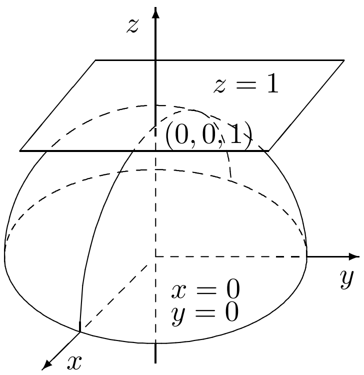
Вопрос: *Каким уравнением прямой следует воспользоваться?*

Ответ: *Каноническим уравнением, которое в данном случае имеет вид:*

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = -\frac{z - z_0}{1}} \quad \text{— уравнение нормали}$$

◀

Пример 1. *Найти уравнение касательной плоскости и нормали к сфере с $R = 1$ в точке $(0, 0, 1)$ и отобразить их.*



▷ *Из уравнения сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

следует

$$2x_0 + 2z_0 z'_x = 0 \implies z'_x = 0,$$

$$2y_0 + 2z_0 z'_y = 0 \implies z'_y = 0.$$

Значит уравнение нормали

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = -\frac{z - 1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Касательная плоскость: $0 \cdot x + 0 \cdot y - (z - 1) = 0 \Rightarrow z = 1$ ◁

Применение полного дифференциала для приближённого вычисления

Задача 5

Найти приближённое значение функции в точке (x, y) через значение функции в точке (x_0, y_0) с помощью полного дифференциала.

▶ *Согласно определения полного дифференциала*

$$z - z_0 = \Delta f(x_0, y_0) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\simeq} df(x_0, y_0).$$

Отсюда

$$f(x, y) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\simeq} f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Окончательно получим

$$\boxed{f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}$$ ◀

Пример 2. *Вычислить:* $(1.02)^{3.04}$.

▷ 1. *Сопоставим вычисляемому выражению функцию*

$$f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}.$$

2. *Выберем значения* x_0 *и* y_0

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1, & y_0 = 3, & z_0 = 1, \\ \Delta x = 0.02, & \Delta y = 0.04. & \end{array}$$

3. *Вычислим частные производные*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = y x^{y-1}\Big|_{(1,3)} = 3 \cdot 1^2 = 3\,,$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x\Big|_{(1,3)} = 0\,.$$

4. *Согласно формуле:* $z \approx 1 + 3 \cdot 0.02 + 0 \cdot 0.04 = 1.06.$ ◁

Лекция 45. Дифференциальные операторы

На этой лекции мы познакомимся с несколькими важными понятиями функции нескольких переменных: градиентом, дивергенцией, ротором.

Производная по направлению

★ *Производной по направлению называется выражение следующего вида*

$$\boxed{\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial \overrightarrow{n}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{n}) - f(\overrightarrow{x})}{\varepsilon},} \tag{$*$}$$

где $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — *направляющий единичный вектор (см.* Лекцию 9*), а* $\overrightarrow{x} = (x,\ y,\ z)$ — *радиус-вектор точки в трёхмерном пространстве.*

Задача 1

Показать, что производная по направлению удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\cos\gamma,$$

если функция $f(\overrightarrow{x})$ *имеет непрерывные частные производные.*

▶ *Согласно определению дифференциала*

$$f(\overrightarrow{x} + \Delta\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) = df(\overrightarrow{x}) + o(\Delta\overrightarrow{x}) =$$

$$= \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}dy + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}dz + o(\Delta\overrightarrow{x}).$$

Поскольку в данном случае

$$\Delta\overrightarrow{x} = \varepsilon\overrightarrow{n} \iff (dx,\ dy,\ dz) = (\varepsilon\cos\alpha,\ \varepsilon\cos\beta,\ \varepsilon\cos\gamma),$$

то обращаясь к определению $(*)$, *получим*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}\varepsilon\cos\alpha + \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\varepsilon\cos\beta + \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\varepsilon\cos\gamma + o(\Delta\overrightarrow{x})}{\varepsilon} =$$

$$= \boxed{\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma} \quad ◀$$

Задача 2

Представить производную по направлению в виде скалярного произведения двух векторов.

▶ *Вопрос: Как выглядит скалярное произведение двух векторов?*

Ответ: $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

Очевидно, что производная по направлению представляет собой скалярное произведение двух векторов, один из которых направляющий единичный вектор $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, *а другой образован из частных производных* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ *и имеет специальное обозначение* $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$*:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\overrightarrow{n}} \quad ◀$$

★ *Градиентом функции называется вектор*

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \overrightarrow{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \overrightarrow{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}\,,}$$

в который входит дифференциальный оператор

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\,\frac{\partial}{\partial z}} \text{ — оператор набла}$$

Вопрос: Записать скалярное произведение операторов набла.

Ответ: $\boxed{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}}$ — оператор Лапласа

Задача 3

Показать, что $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$ *определяет максимальную скорость изменения функции как по величине, так и по направлению.*

★ *Производная по направлению определяет скорость изменения функции в направлении вектора* $\overrightarrow{n}$.

▶ *Воспользуемся решением* Задачи 2

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cos\varphi = \left\{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab\cos\varphi\right\} =$$

$$= \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| \cos\varphi.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}\right)_{\max} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| \quad \textit{при} \quad \varphi = 0 \quad ◀$$

Пример 1. *Вычислить в точке $A(-1, 0, 2)$ производную функции $f(\overrightarrow{x}) = x + xy + xyz$ по направлению $\overrightarrow{n} = (1,\ 2,\ 3)$, а также градиент функции и его модуль.*

▷ 1. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y + yz\Big|_A = 1 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = x + xz\Big|_A = -3 \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = xy\Big|_A = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| = \sqrt{10} \end{aligned}$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = (1\ \ -3\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{-5}{\sqrt{14}}$$ ◁

Дивергенция и ротор

В предыдущем параграфе мы рассмотрели, как оператор набла действует на скалярную функцию. Оператор набла может действовать и на векторную функцию.

Вопрос: Составить простейшие комбинации оператора набла и векторной функции.

Ответ: Скалярное произведение:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{W}\right) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \operatorname{div} \overrightarrow{W}}$$ — дивергенция

Векторное произведение:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = \left[\overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{W}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \overrightarrow{W}}$$ — ротор

Частные производные неявно заданных функций

Задача 4

Пусть $F(x,y,z)=0$. *Найти:* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

► *Очевидно, что*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0\,.$$

При вычислении частных производных по определению дифференциалы всех переменных кроме двух рассматриваемых полагаются равными нулю. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad ◄$$

Полная производная сложной функции

Задача 5

Найти $\dfrac{df}{dt}$, *если функция* $f(x,y,z)$ — *сложная функция, причём* $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

► *Для решения задачи достаточно выписать полный дифференциал функции и поделить его на дифференциал аргумента, тогда*

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}} \quad ◄$$

Пример 2. *Самостоятельно показать, что* $f(x,y)=\mathrm{arctg}(y/x)$ *удовлетворяет уравнению Лапласа:*

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0}\,.$$

Лекция 46. Безусловный экстремум

Для функции n переменных, в отличие от функции одной переменной, различают два вида экстремумов: безусловный и условный.

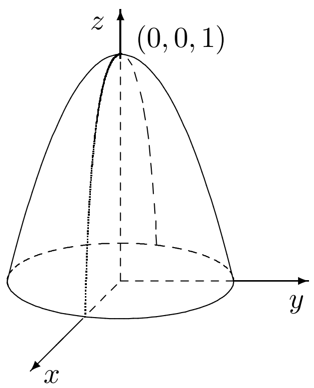
★ *Точка* $\overrightarrow{x^0}$ *называется точкой локального максимума или минимума функции* $f(\overrightarrow{x})$, *если в* δ*-окрестности этой точки функция непрерывна и удовлетворяет неравенству:*

$$\boxed{\text{или} \quad \begin{array}{l} f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x^0}) \ — \ \max \\ f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x^0}) \ — \ \min \end{array} \quad \text{при} \quad \begin{array}{c} \left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right| < \delta \\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x^0} \end{array}}$$

★ *Локальный максимум или минимум функции* $f(\overrightarrow{x})$ *называют локальным безусловным экстремумом.*

• *Определение безусловного экстремума по сути совпадает с определением экстремума функции одной переменной.*

Пример 1. *Найти экстремум функции* $z = 1 - x^2 - y^2$ *путём построения её графика.*



$\triangleright$ $\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow z = 1 - x^2.$

$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow z = 1 - y^2.$

$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Ответ: $(0, 0, 1)$ — max. $\triangleleft$

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Задача 1

Пусть функция $f(\overrightarrow{x})$ непрерывна и сколь угодное число раз дифференцируема в области D. Найти эквивалентную приращения функции в точке $\overrightarrow{x^0} \in D$ в виде многочлена n-ой степени.

► *Согласно* Лекции 21

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + o\left((x - x_0)^n\right) =$$

$$= df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Очевидно следующее обобщение этой формулы для функции нескольких переменных

$$\boxed{\begin{gathered} f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\overrightarrow{x^0})}{k!} + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^n\right) = \\ = df(\overrightarrow{x^0}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\overrightarrow{x^0}) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^n\right) \end{gathered}},$$

куда входят полные дифференциалы. Полный дифференциал первого порядка для функции двух переменных был получен нами в Лекции 44

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy.$$

Вопрос: Как запишется для функции двух переменных полный дифференциал второго порядка?

Ответ: Полный дифференциал второго порядка определяется как дифференциал дифференциала

$$d^2 f = d(df) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy,$$

и, как легко видеть, равен

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}. \quad ◀$$

Необходимое условие экстремума

Задача 2

Получить необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

▶ *Для определенности положим, что в точке* (x_0, y_0) *имеет место максимум* $f(\overrightarrow{x})$. *Тогда из определения экстремума и приращения функции следует*

$$\left.\begin{array}{l} f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) < 0 \\ f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = df(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow df(\overrightarrow{x^0}) \leqslant 0.$$

Поскольку в δ*-окрестности точки* (x_0, y_0) *знаки* dx *и* dy *любые, то требуемое неравенство может выполняться только при*

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0} \quad \text{— необходимое условие экстремума}$$

★ *Точка, в которой все частные производные 1-го порядка равны нулю, называется стационарной.*

Достаточное условие экстремума

Задача 3

Определить на языке дифференциалов достаточное условие экстремума функции.

► *В окрестности стационарной точки формула Тейлора*

$$f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = \underbrace{df(\overrightarrow{x^0})}_{=0} + \frac{1}{2!}d^2 f(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^2\right)$$

приводит к следующему выводу:

если $d^2 f(\overrightarrow{x^0}) > 0$, *то* $f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x^0})$ — $\overset{+}{\smile}$ min

если $d^2 f(\overrightarrow{x^0}) < 0$, *то* $f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x^0})$ — $\underset{-}{\frown}$ max ◄

• *Стационарная точка является точкой экстремума, если в её окрестности дифференциал второго порядка знакопостоянен.*

• *Если дифференциал второго порядка в стационарной точке больше нуля, то имеет место минимум, а если меньше нуля, то максимум.*

• *Мнемоническое правило: если плюс — котелок наполняется, если минус — опустошается.*

Задача 4

Выяснить, при каких условиях дифференциал второго порядка сохраняет свой знак независимо от знака dx и dy.

► *Перепишем дифференциал второго порядка*

$$d^2 f(\overrightarrow{x^0}) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{a} dx^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{b} dxdy + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{c} dy^2$$

с новой переменной $\xi = dx/dy$ в следующем виде

$$d^2 f(\overrightarrow{x^0}) = dy^2\Big(a\xi^2 + b\xi + c\Big).$$

Вопрос: При каком условии квадратный трёхчлен имеет постоянный знак?

Ответ: Если дискриминант меньше нуля

$$\boxed{D = b^2 - 4ac < 0} \quad \text{— достаточное условие экстремума}$$

Вопрос: Как определить имеет место максимум или минимум?

Ответ: Знак дифференциала второго порядка, если дискриминант меньше нуля, определяется знаком a:

$$\boxed{a < 0 \ \text{—}\ \max, \quad a > 0 \ \text{—}\ \min}. \quad ◀$$

Пример 2. *Исследовать на экстремум* $z = 1 - x^2 - y^2$.

▷ 1. $$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -2x = 0\\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -2y = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ — \textit{стационарная точка.}}$$

2. $$a = -2,\ b = 0,\ c = -2 \ \Rightarrow \begin{array}{c} D = -16 < 0, \\ a = -2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} (0,0,1) \\ \max \end{array} \quad ◁$$

Пример 3. *Найти экстремум* $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

▷ 1. $$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0\\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

Нахождение стационарной точки сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \Longrightarrow$$

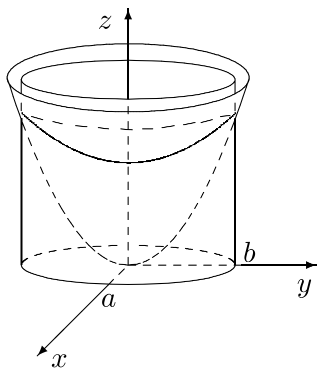
$x = \Delta_x/\Delta = 0, \quad y = \Delta_y/\Delta = 3 \Rightarrow \ (0,3)$ — *стационарная точка.*

2. $$\begin{array}{l} a = z''_{xx} = 2, \\ b = 2z''_{xy} = 2, \\ c = z''_{yy} = 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} D = -12 < 0, \\ a = 2 > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} (0,3,-9) \\ \min \end{array} \quad ◁$$

Лекция 47. Условный экстремум

Всякая деятельность или движение предопределены условиями их протекания. Эта лекция даст ключ к решению таких задач как распределения тока в цепи или получение максимальной прибыли предприятием.

Пример 1. *Найти графически экстремальные точки функции $z = x^2 + y^2$, при условии, что эти точки удовлетворяют уравнению: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(b > a)$.*



▷ *Вопрос: На какой кривой будут лежать экстремальные точки?*

Ответ: Эта кривая образуется пересечением двух заданных поверхностей: параболоида вращения и эллиптического цилиндра, и описывается алгебраической системой заданных нелинейных уравнений.

Очевидно, что точки максимума $\left(0, \pm b, b^2\right)$ лежат в плоскости yOz, а в плоскости xOz лежат точки минимума $\left(\pm a, 0, a^2\right)$. ◁

★ *Точка $\overrightarrow{x_0}$ называется точкой условного экстремума непрерывной функции $f(\overrightarrow{x})$, если выполняется*

$$\boxed{\text{или} \quad \begin{array}{l} f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x_0}) \quad - \quad \max \\ f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x_0}) \quad - \quad \min \end{array} \quad \text{при} \quad \begin{array}{c} \left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\right| < \delta \\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x_0} \end{array}}$$

при этом $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x_0}$ удовлетворяют уравнениям связи

$$\boxed{\Phi_i(\overrightarrow{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}.}$$

Необходимое и достаточное условия условного экстремума

Условным экстремумом функции $f(x,y)$ является экстремум этой функции при заданном уравнении связи $\Phi(x,y)=0$.
Для нахождения условного экстремума вводится

$$\boxed{L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\Phi(x,y)} \quad \text{— функция Лагранжа}$$

где λ — множитель Лагранжа, *а затем её исследуют на безусловный экстремум.*

Задача 1

Записать необходимое и достаточное условия для функции Лагранжа.

► *Необходимое условие:*

$$\boxed{dL(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \implies \frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0}.$$

Достаточное условие:

$$\boxed{d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0 \ \text{—}\ \min, \quad d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0\ \text{—}\ \max}. \quad ◄$$

• *Следует иметь в виду, что дифференциалы переменных dx и dy в $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ зависимы, и эта зависимость диктуется уравнением связи.*

• *Поскольку λ не является обычной переменной, то при определении знака $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ величины $d\lambda$ не учитываются, т.е. полагается*

$$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2.$$

Пример 2. *Найти аналитически точки условного экстремума для* Примера 1.

▷ *Функция Лагранжа, для нашего примера, запишется следующим образом*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

1. *Согласно необходимому условию полагаем*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0,\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Нахождение стационарных точек сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

a. *Пусть* $x \neq 0$, *тогда*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 &&\Longrightarrow\quad \lambda = -a^2\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0 &&\Longrightarrow\quad y = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} - 1 = 0 &&\Longrightarrow\quad x = \pm a \end{aligned}\right\}$$

первая пара стационарных точек

b. *Пусть* $y \neq 0$, *тогда*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0 &&\Longrightarrow\quad \lambda = -b^2\\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0 &&\Longrightarrow\quad x = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 &&\Longrightarrow\quad y = \pm b \end{aligned}\right\}$$

вторая пара стационарных точек

Являются ли найденные стационарные точки точками экстремума позволяет определить достаточное условие.

2. *Вычисление производных второго порядка*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right), \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right),$$

позволяет выразить дифференциал второго порядка в виде

$$d^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2.$$

Для первой пары стационарных точек:

$$d^2 L(\pm a, 0, -a^2) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2 > 0 \quad \text{—} \quad \min.$$

Для второй пары стационарных точек:

$$d^2 L(0, \pm b, -b^2) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 < 0 \quad \text{—} \quad \max. \quad \lhd$$

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, необходимо:

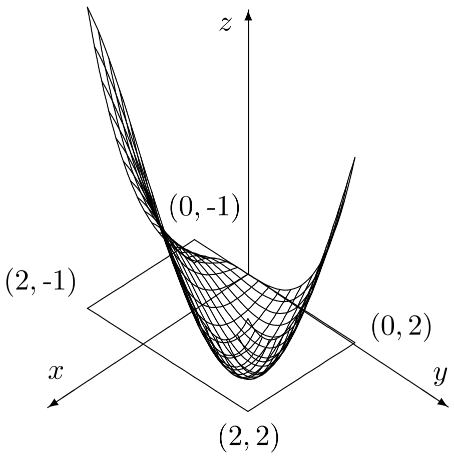
1. *Найти стационарные точки в этой области и вычислить в них значения функции.*
2. *Найти наибольшие и наименьшие значения функции на границах области.*
3. *Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.*

Пример 3. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $z = x^3 + y^3 - 3xy$ *в области* $D: \ x \in [0, 2], \ y \in [-1, 2]$.

$\rhd$ 1.
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &y = x^2, \\ &x^4 - x = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &(0, 0) \Rightarrow z_1 = 0, \\ &(1, 1) \Rightarrow z_2 = -1. \end{aligned}$$

Вопрос: *Что представляют из себя границы области D и сколько их?*

Ответ: *Область D — это прямоугольник и границами его являются четыре отрезка.*



2а. $x = 0$, *тогда*

$z = y^3$, где $y \in [-1, 2]$.

$\dfrac{dz}{dy} = 3y^2 = 0 \Rightarrow$ *снова* z_1.

На концах отрезка $[-1, 2]$:

$z\Big|_{(0,-1)} = -1, \ z\Big|_{(0,2)} = 8.$

2б. $y = 2$, *тогда*

$z = x^3 - 6x + 8$, где $x \in [0, 2]$.

$\dfrac{dz}{dx} = 3x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow$

$x = +\sqrt{2} \in [0, 2], \ z_3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = -4\sqrt{2} + 8; \quad z\Big|_{(2,2)} = 4.$

2в. $x = 2$, *тогда* $z = y^3 - 6y + 8$, где $y \in [-1, 2]$.

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 - 6 = 0 \Longrightarrow y = +\sqrt{2} \in [-1, 2].$$

$$z_4 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = -4\sqrt{2} + 8; \quad z\Big|_{(2,-1)} = 13.$$

2г. $y = -1$, *тогда* $z = x^3 + 3x - 1$, где $x \in [0, 2]$.

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow \text{ нет корней.}$$

На концах отрезка $x \in [0, 2]$ *все значения* z *уже вычислены.*

3. *Ответ:* $(1, 1, -1)$ *и* $(0, -1, -1)$ — *наименьшее;*
$(2, -1, 13)$ — *наибольшее.* $\triangleleft$

Лекция 48. Условный экстремум в физике и экономике

Большое число задач из самых различных областей знания сводится к нахождению условного экстремума.

Задача 1

Дана некоторая система n проводников, каждый из которых имеет своё сопротивление R_i ($R_1 \neq R_2 \neq \cdots \neq R_n$). Требуется найти распределение токов в этой системе, т.е. I_i, если известно, что сумма этих токов постоянна.

▶ *Вопрос:* Какое отношение данная задача имеет к условному экстремуму?

Ответ: В этой задаче имеется следующее уравнение связи:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = I = \text{const}\,.$$

Вопрос: Согласен, но экстремум какой функции вы будете искать?

Ответ: В природе существует принцип наименьшего действия. Применительно к данной задаче он будет выражаться в том, что токи в цепи распределятся таким образом, чтобы количество выделяемого тепла было минимальным. Из школьного курса физики известно, что количество тепла, выделяемого в n проводниках определяется формулой

$$Q = \sum_{i=1}^{n} {I_i}^2 R_i\,.$$

Вопрос: Что вы намерены делать дальше?

Ответ: Запишем функцию Лагранжа

$$L(I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n,\ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} {I_i}^2 R_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} I_i - I \right),$$

и исследуем её на экстремум.

1. $$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial I_i} = 2I_iR_i - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} I_i - I = 0. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} I_i = -\frac{\lambda}{2R_i},\ \sum_{i=1}^{n} I_i = I \\ \text{стационарная точка} \end{gathered}$$

2. $$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 L}{\partial {I_i}^2} = 2R_i > 0, \\ &\frac{\partial^2 L}{\partial I_i \partial I_k} = 0,\ \text{при } i \neq k. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} d^2L = \sum_{i=1}^{n} 2R_i d{I_i}^2 > 0 \\ \text{минимум} \end{gathered}$$

Ответ: Токи в проводниках распределятся следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} &I_1R_1 = I_2R_2 = \cdots = I_nR_n\,, \\ &\text{при}\ \ I_1 + I_2 + \cdots + I_n = I\,. \end{aligned}} \quad ◀$$

• *Найденное нами распределение токов известно в электротехнике как закон Киргофа для параллельного соединения проводников, который был получен им экспериментально.*

Задача 2

Фирма решила ежемесячно ассигновать сто тысяч доларов на производство некоторой продукции. Пусть средняя заработная плата по фирме 2000\$, а стоимость единицы сырья — 1000\$. Требуется определить какое количество рабочих K и какое количество сырья C необходимо приобрести фирме для получения наибольшего объёма продукции Q, если известно, что он им прямо пропорционален, с коэффициентом пропорциональности равным 5.

▶ *Вопрос: Какую математическую задачу вы будете решать?*

Ответ: *Это вновь задача об условном экстремуме*

$$\underbrace{Q(K,C) = 5KC, \quad 2000K + 1000C = 100000.}$$

$$\Downarrow$$

$$L = 5KC + \lambda(2K + C - 100)$$

• *При составлении функции Лагранжа в уравнении связи был опущен общий множитель.*

1. $$\frac{\partial L}{\partial K} = 5C + 2\lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial C} = 5K + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2K + C - 100 = 0. \quad \Rightarrow \begin{cases} & 5C & +2\lambda & = 0, \\ 5K & & +\lambda & = 0, \\ 2K & +C & & = 100. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20;$$

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 100 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 500; \qquad \Delta_C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 100 & 0 \end{vmatrix} = 1000;$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 100 \end{vmatrix} = -2500;$$

Стационарная точка: $K = 25, \ C = 50, \ \lambda = -125.$

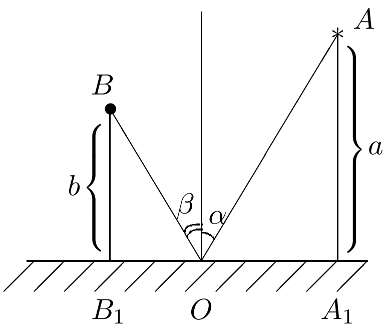
2. $$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial C^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial C} = 5 \ \Rightarrow \ d^2L = 10dKdC.$$

Поскольку $2dK = -dC$, *то* $d^2L = -20dK^2 < 0$ — $\max$.

Ответ: 25 *рабочих и* 50 *единиц сырья.* ◄

Задача 3

Пусть даны источник света и наблюдатель, которые расположены соответственно на расстоянии a и b от зеркальной поверхности. Найти соотношение между углом падения α и углом отражения β луча света, если известно, что луч движется по кратчайшему расстоянию.



► *Вопрос: Каковы уравнения траектории,связи и Лагранжа?*

Ответ: $AO + OB = f(\alpha, \beta) = \dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\cos\beta},$

$$A_1B_1 = a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = c = \text{const},$$

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \lambda(a\cos\alpha + b\cos\beta - c).$$

1. $$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{a\lambda}{\cos^2\alpha} = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{b\sin\beta}{\cos^2\beta} + \frac{b\lambda}{\cos^2\beta} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} -\lambda = \sin\alpha = \sin\beta \\ \textit{стационарная точка} \end{gathered} \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta - c = 0. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{a}{\cos\alpha} > 0, \\ &\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = \frac{b}{\cos\beta} > 0, \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} d^2L = \frac{a}{\cos\alpha}d^2\alpha + \frac{b}{\cos\beta}d^2\beta > 0 \\ \textit{минимум} \end{gathered} \\ &\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: Угол падения равен углу отражения: $\alpha = \beta$ *— это известный в оптике закон Снеллиуса.* ◄

“Не ошибается тот,
кто ничего не делает,
хотя это и есть его основная ошибка.”

Алексей Толстой

Раздел 7

Интегральное исчисление функции нескольких переменных

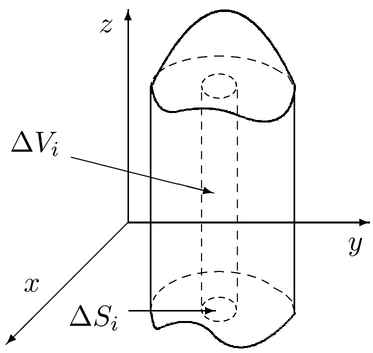
Лекция 49. Кратные интегралы

Интегрирование может проводиться не по одной, а по двум и более переменным; и такие интегралы называются кратными.

Задача 1

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D площади S. Найти объём тела, основанием которого служит область D на плоскости $z = 0$, боковая поверхность цилиндрическая, а сверху тело ограничено поверхностью $z = f(x, y)$.

▶ *Вопрос:* *Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*



Ответ: Объём сколь угодно тонкого цилиндра

$$\Delta V_i = \Delta S_i f(x_i, y_i),$$

где ΔS_i — площадь основания, а $f(x_i, y_i)$ — высота цилиндра.

Вопрос: Что делать дальше?

Ответ: Запишем интегральную сумму:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

а затем возьмём её предел при стремлении максимального линейного размера $\Delta l_i = \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2}$ площади основания i-того цилиндра к нулю

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \boxed{\lim_{\max\ \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)\, dS} \quad ◀$$

★ *Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральных сумм при стремлении максимального линейного размера площади основания i-того цилиндра к нулю.*

Свойства двойного интеграла

1. Пусть $f(x, y) = Af_1(x, y) + Bf_2(x, y)$, тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = A\iint\limits_D f_1(x, y)\, dS + B\iint\limits_D f_2(x, y)\, dS.$$

2. Пусть область D разбита на две подобласти D_1 и D_2, т.е. $D = D_1 \cup D_2$, тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

3. *Если подынтегральные функции удовлетворяют неравенству* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$*, тогда такому же неравенству удовлетворяют двойные интегралы*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_{D} g(x,y)\,dS.$$

4. *Модуль двойного интеграла не больше двойного интеграла от модуля*

$$\left|\iint\limits_{D} f(x,y)\,dS\right| \leqslant \iint\limits_{D} |f(x,y)|\,dS.$$

5. *Двойной интеграл от единицы равен площади области* D

$$\iint\limits_{D} dS = S.$$

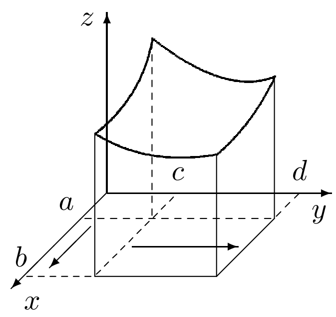
Вопрос: Можете ли вы указать аналоги этих свойств?

Ответ: Приведённые свойства аналогичны свойствам определённого интеграла (Лекция 27, Задача 4).

Выражение двойного интеграла через повторный

Задача 2

Пусть функция $f(x,y)$ *определена и непрерывна в области* D*, которой является прямоугольник площади* S*. Выразить двойной интеграл через* повторный, представляющий собой последовательно вычисляемые однократные определённые интегралы.



► $D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d. \end{cases}$

Вопрос: Чему равен элемент площади в декартовой системе координат?

Ответ: $dS = dxdy$.

Вопрос: Выразите площадь прямоугольника через двойной интеграл и повторные.

Ответ: Поскольку площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон

$$S = \iint\limits_D dS = (b-a)(d-c),$$

то, вспоминая формулу Ньютона-Лейбница, получим

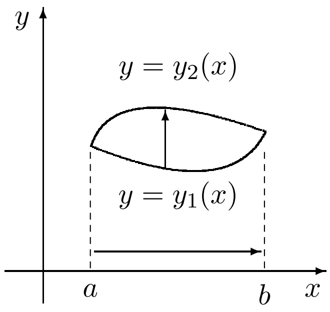
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy.$$

Очевидно, что те же пределы останутся, если подынтегральная функция отлична от единицы

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \quad ◄$$

Задача 3

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D, которая представляет собой криволинейную трапецию площади S. Выразить двойной интеграл через повторный.



► $D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x). \end{cases}$

Вопрос: Выразите площадь криволинейной трапеции через двойной интеграл и повторный.

Ответ: Совершим переход от однократного интеграла (Задача 1 Лекция 31) *к повторному*

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \iint_D dS.$$

Можно показать, что те же пределы останутся, если подынтегральная функция отлична от единицы

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy} \quad ◄$$

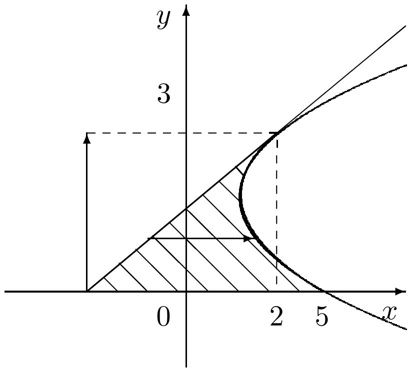
• *При нахождении пределов интегрирования полезно отмечать направление интегрирования стрелками, причём внешний интеграл всегда в постоянных пределах.*

Пример 1. *Вычислить площадь области D, если она ограничена кривой $(y-2)^2 = x - 1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью абсцисс.*

▷ *Вопрос: Как выглядет уравнение касательной?*

Ответ: Поскольку функция $y(x)$, соответствующая заданной кривой, неоднозначна, то в качестве функции будем брать $x(y)$

$$x - x_0 = x'(y_0)(y - y_0) \implies x = 2y - 4.$$



Вопрос: *Интеграл от какой переменной возьмём в качестве внешнего?*

Ответ: *Интеграл по* y

$$S=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx,$$

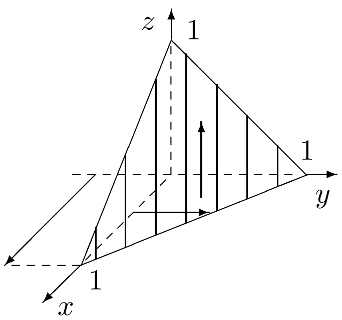
поскольку в противном случае пришлось бы вычислять три повторных интеграла.

• *Область интегрирования должна быть правильна, т.е. внутренняя стрелка может пересекать границу области только два раза.*

$$S=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{2y-4}^{y^2-4y+5}dx=\int\limits_0^3[(y^2-4y+5)-(2y-4)]\,dy=9\quad\triangleleft$$

Пример 2. *Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле, если область интегрирования* D *ограничена поверхностями*

$$D:\ \begin{cases} x=0, & z=0,\\ y=0, & x+y+z=1.\end{cases}$$



$$\triangleright\quad \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}f(x,y,z)\,dz\quad\triangleleft$$

Лекция 50. Замена переменных в кратных интегралах

Замена переменных в кратных интегралах связана с переходом от одной системы координат к другой, и осуществляется с помощью определителя Якоби.

Задача 1

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D площади S. Записать двойной интеграл в полярной системе координат.

▶ *Вопрос:* Представить элемент площади в декартовой системе координат в виде модуля векторного произведения.

Ответ: Поскольку

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\,x + \overrightarrow{j}\,y + \overrightarrow{k}\,z,$$

то диффенциал радиуса-вектора равен

$$d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dy + \overrightarrow{k}\,dz = d_x\overrightarrow{r} + d_y\overrightarrow{r} + d_z\overrightarrow{r}.$$

Следовательно

$$dS = \left|d_x\overrightarrow{r} \times d_y\overrightarrow{r}\right| = \left\|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{array}\right\| = dxdy.$$

Вопрос: Представьте теперь элемент площади в полярной системе координат.

Ответ: Поскольку

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\,\rho\cos\varphi + \overrightarrow{j}\,\rho\sin\varphi + \overrightarrow{k}\,z,$$

то очевидно

$d_\rho \overrightarrow{r} = (\overrightarrow{i} \cos\varphi + \overrightarrow{j} \sin\varphi) d\rho, \quad d_\varphi \overrightarrow{r} = (-\overrightarrow{i} \sin\varphi + \overrightarrow{j} \cos\varphi)\rho d\varphi.$

Таким образом

$$dS = \left| d_\rho \overrightarrow{r} \times d_\varphi \overrightarrow{r} \right| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{matrix} \right\| \rho d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

В результате

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho d\rho d\varphi} \quad ◀$$

Задача 2 (о вычислении интеграла Пуассона)

Найти массу плоского бесконечного листа, если её плотность описывается распределением Гаусса

$$\sigma(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$

▶ *Вопрос: К вычислению какого интеграла сводится данная задача?*

Ответ: К вычислению интеграла Пуассона:

$$m = \iint\limits_D \sigma(x,y)\, dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = J^2\,.$$

Вопрос: Что делать дальше?

Ответ: Вычислить интеграл в полярной системе координат

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho = \pi \int\limits_0^{\infty} e^{-u}\, du = \pi = J^2\,. \quad ◀$$

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}} \quad \text{— интеграл Пуассона}$$

Задача 3

Преобразовать двойной интеграл от декартовой (x, y) к произвольной системе координат (u, v).

▶ *Вопрос: Представить элемент площади в произвольной системе координат.*

Ответ: Поскольку полный дифференциал $\overrightarrow{r}$ равен сумме частных дифференциалов

$$d\overrightarrow{r} = d_u\overrightarrow{r} + d_v\overrightarrow{r} = \left(\overrightarrow{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \overrightarrow{j}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\overrightarrow{i}\frac{\partial x}{\partial v} + \overrightarrow{j}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$$

то искомый дифференциал площади примет вид

$$dS = \left|d_u\overrightarrow{r} \times d_v\overrightarrow{r}\right| = \left\|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{matrix}\right\| dudv = I\,dudv,$$

где

$$\boxed{I = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\|} \quad \text{— модуль определителя Якоби.}$$

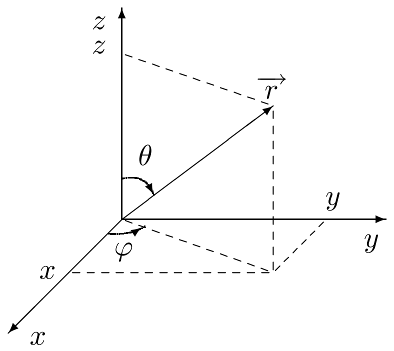
Следовательно

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,I\,dudv} \quad ◀$$

- *В полярной системе координат определитель Якоби равен ρ.*

Задача 4

Записать тройной интеграл в сферической системе координат.



▶ *Вопрос: Выразить аналитически связь декартовой системы координат* (x, y, z) *со сферической* (r, θ, φ).

Ответ: Согласно рисунку

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Вопрос: Чему равен модуль определителя Якоби, описывающий связь тех же систем координат?

Ответ: Действуя согласно предыдущей задаче

$$I = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{matrix} \right\| = r^2\sin\theta$$

Следовательно, если при $(x, y, z) \Longrightarrow (r, \theta, \varphi)$ *подынтегральная функция* $f(x, y, z) \Longrightarrow g(r, \theta, \varphi)$, *то*

$$\boxed{\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{D'} g(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi} \quad ◀$$

Пример 1. *Показать, что объём шара определяется формулой* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ *(с помощью только что полученной формулы вы это сделайте за пару минут).*

Лекция 51. Криволинейные интегралы первого и второго рода

Если областью интегрирования является не отрезок прямой, а дуга кривой, то интеграл называют криволинейным.

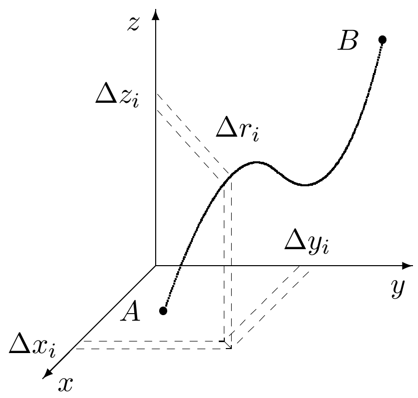
Криволинейные интегралы первого рода

Задача 1

Пусть вдоль дуги $\smile{AB}$ пространственной кривой L, описываемой радиусом-вектором

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i}\,x(t) + \overrightarrow{j}\,y(t) + \overrightarrow{k}\,z(t), \quad \textit{при} \;\; t_A \leqslant t \leqslant t_B,$$

распределены массы плотностью $f(x, y, z)$. Найти массу материальной нити, распределённую вдоль дуги $\smile{AB}$.



▶ *Вопрос: Как в этом случае будет выглядеть интегральная сумма?*

Ответ: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta r_i$

где (см. лекцию 31)

$\Delta r_i = \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2 + \Delta {z_i}^2}$.

Предел данной интегральной суммы определяет криволинейный интеграл первого рода:

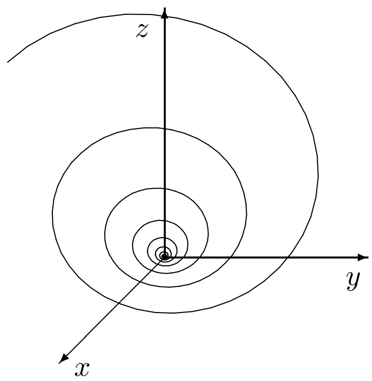
$$\boxed{m = \lim_{\max\ \Delta r_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta r_i = \int\limits_{\smile{AB}} f(x, y, z)\, dr}$$

Вопрос: А как вычислять такой интеграл?

Ответ: Нужно расписать дифференциал дуги

$$\boxed{m = \int\limits_{t_A}^{t_B} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt}\,. \quad ◄$$

Пример 1. *Вычислить массу дуги* $\smile{AB}$ *конической винтовой линии* $L: \ \{x = \sqrt{3}e^t \cos t, \ y = \sqrt{3}e^t \sin t, \ z = \sqrt{3}e^t\}$, *если плотность описывается функцией* e^t, *а* $A = (0,0,0)$, $B = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$.



▷ *Вопрос: Чему равны пределы интегрирования?*

Ответ: $(0,0,0) \implies t_A = -\infty,$

$$(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}) \implies t_B = 0.$$

В результате имеем

$$m = \int\limits_{-\infty}^{0} e^t\sqrt{3\cdot 3e^{2t}}\, dt = \frac{3}{2}. \quad ◁$$

Криволинейные интегралы второго рода

Задача 2

Пусть вдоль дуги $\smile{AB}$ *пространственной кривой* L, *описываемой радиусом-вектором*

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i}\, x(t) + \overrightarrow{j}\, y(t) + \overrightarrow{k}\, z(t), \quad \text{при } \ t_A \leqslant t \leqslant t_B,$$

на единичную массу действует силовое поле

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i}\, P(x,y,z) + \overrightarrow{j}\, Q(x,y,z) + \overrightarrow{k}\, R(x,y,z).$$

Найти работу, совершаемую силовым полем по перемещению единичной массы вдоль дуги $\smile{AB}$.

► *Вопрос:* *Чему равна работа, если перемещение тела происходит вдоль прямой, а сила постоянна?*

Ответ: *Скалярному произведению силы на перемещение.*

Вопрос: *Как бы вы подсчитали работу, если перемещение тела происходит не вдоль прямой, а сила не постоянна?*

Ответ: *В этом случае придётся составить интегральную сумму*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta \overrightarrow{r_i},$$

а затем вычислить её предел.

$$\lim_{\max \ \Delta \overrightarrow{r_i} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta \overrightarrow{r_i} = \int\limits_{\smile{AB}} \overrightarrow{F}(x, y, z)\, d\overrightarrow{r}.$$

Вопрос: *А как вычислять такой интеграл?*

Ответ: *Нужно расписать скалярное произведение векторной функции и дифференциала радиуса-вектора под знаком интеграла. В результате получим интеграл, который называют криволинейным интегралом второго рода:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + \int\limits_{\smile{AB}} Q\,dy + \int\limits_{\smile{AB}} R\,dz = \\ &\qquad = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]\, dt. \end{aligned}}$$ ◄

Вопрос: *В чём вы видете отличие криволинейного интеграла второго рода от первого рода?*

Ответ: *В криволинейном интеграле второго рода интегрируется векторная, а не скалярная функция; а кроме того в него входит дифференциал радиуса-вектора, а не его модуль.*

Свойства криволинейных интегралов

1. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления интегрирования вдоль дуги*

$$\int\limits_{\smile\atop AB} F(x,y,z)\,dr = \int\limits_{\smile\atop BA} F(x,y,z)\,dr,$$

поскольку он зависит от модуля дифференциала дуги.

2. *Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления интегрирования вдоль дуги*

$$\int\limits_{\smile\atop AB} \overrightarrow{F}(x,y,z)\,d\overrightarrow{r} = -\int\limits_{\smile\atop BA} \overrightarrow{F}(x,y,z)\,d\overrightarrow{r},$$

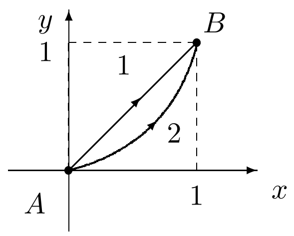
поскольку он зависит от вектора дифференциала дуги.

3. *Криволинейный интеграл равен сумме интегралов*

$$\int\limits_{\smile\atop AB} = \int\limits_{\smile\atop AC} + \int\limits_{\smile\atop CB},$$

если точка C лежит на дуге $\overset{\smile}{AB}$.

Пример 2. *Вычислить работу, совершаемую силовым полем $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i}\,x^2y + \overrightarrow{j}\,x^3/3$ по перемещению тела единичной массы из точки $A(0,0)$ в точку $B(1,1)$ двумя различными путями, по кривым:* 1. $y=x$, 2. $y=x^2$.



$\triangleright$ 1. $d\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dx$

$$\int\limits_{\smile\atop 1} = \int\limits_0^1 \frac{4}{3}x^3\,dx = \frac{1}{3};$$

2. $d\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dx^2$

$$\int\limits_{\smile\atop 2} = \int\limits_0^1 \frac{5}{3}x^4\,dx = \frac{1}{3} \quad \triangleleft$$

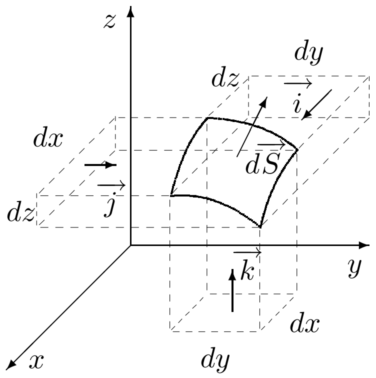
Лекция 52. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Если подынтегральная функция задана не на отрезке прямой, и не на дуге кривой, а на поверхности, то интеграл называют поверхностным.

Поверхностные интегралы первого рода

Задача 1

Пусть вдоль поверхности S, заданной функцией $z = f(x, y)$ и ограниченной областью D $(x, y \in D)$, распределены массы плотностью $\rho(x, y, z)$. Найти полную массу этой поверхности.



► *Вопрос:* Чему равен вектор дифференциала поверхности в декартовой системе координат?

Ответ: Поскольку дифференциал плоской площади равен $dxdy$, а нормальный единичный вектор её $\overrightarrow{k}$, то вектор дифференциала поверхности равен

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{i}\,dydz + \overrightarrow{j}\,dxdz + \overrightarrow{k}\,dxdy.$$

Вопрос: Чему равен модуль дифференциала поверхности S в декартовой системе координат?

Ответ: Поскольку поверхность S определена $z = f(x, y)$, то

$$dS = |d\overrightarrow{S}| = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}dxdy.$$

Вопрос: Чему равна масса однородной пластинки плотности ρ и площади S?

Ответ: *Для однородной пластинки это произведение $\rho \cdot S$, а для неоднородной поверхности её масса равна поверхностному интегралу первого рода:*

$$\boxed{\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D \rho(x,y,z)\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}\,dxdy}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, заключённой внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.*

$\triangleright$ *Вопрос:* *Какой функцией описывается поверхность цилиндра?*

Ответ: $y(x,z) = \pm\sqrt{Rx-x^2}$.

Вопрос: *Чему равны её частные производные?*

Ответ: $y'_x = \pm\dfrac{R/2-x}{\sqrt{Rx-x^2}}, \quad y'_z = 0.$

Вопрос: *Какими линиями ограничена область D?*

Ответ: *Область интегрирования определяется решением следующей системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^2+y^2=Rx, \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=\pm\sqrt{R^2-Rx}, \\ 0\leqslant x\leqslant R. \end{cases}$$

Таким образом осталось вычислить двойной интеграл

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz = R\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx-x^2}} =$$

$$= 2R\sqrt{R}\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R^2. \quad \triangleleft$$

Поверхностные интегралы второго рода

Задача 2

Пусть через поверхность S, заданной функцией $F(x,y,z)=0$ и ограниченной плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0$, проходит поток жидкости единичной плотности со скоростью

$$\overrightarrow{v}(x,y,z)=\overrightarrow{i}P(x,y,z)+\overrightarrow{j}Q(x,y,z)+\overrightarrow{k}R(x,y,z).$$

Найти поток жидкости через эту поверхность.

• *Вектор дифференциала поверхности, определённый в предыдущей задаче, соответствует положительно ориентированной поверхности; для отрицательно ориентированной поверхности знак вектора дифференциала меняется на противоположный.*

► *Вопрос: Чему равен элемент потока?*

Ответ: Скалярному произведению вектора скорости на вектор дифференциала поверхности

$$\overrightarrow{v}(x,y,z)d\overrightarrow{S}=P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

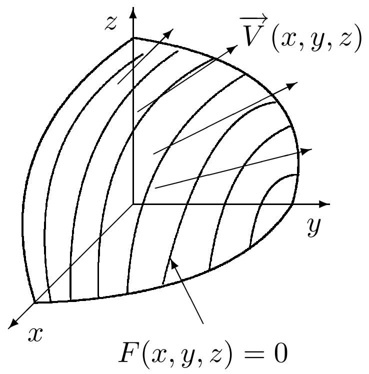
Весь поток равен поверхностному интегралу второго рода:

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_S \overrightarrow{v}(x,y,z)\,d\overrightarrow{S}=\\ =\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dxdz+R(x,y,z)\,dxdy.\end{gathered}}$$

Вопрос: Как вычислять этот интеграл?

Ответ: Поверхностный интеграл второго рода для не замкнутой поверхности сводится к трём двойным интегралам

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_S \overrightarrow{v}(x,y,z)\,d\overrightarrow{S}=\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz+\\ +\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz+\iint\limits_{D_z} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.\end{gathered}}$$



Переход от трёх переменным к двум переменным в каждом из двойных интегралов диктуется уравнением заданной поверхности $F(x,y,z)=0$, при этом границы области интегрирования:

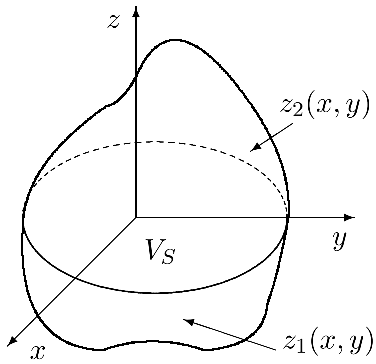
$D_x: \ F(0,y,z)=0, \ y=0, \ z=0;$

$D_y: \ F(x,0,z)=0, \ x=0, \ z=0;$

$D_z: \ F(x,y,0)=0, \ x=0, \ y=0.$

Пример 2. *Показать, что поток радиуса-вектора через замкнутую поверхность S, равен утроенному объёму, ограниченному этой поверхностью, т.е.*

$$\iint\limits_S \overrightarrow{r}\, d\overrightarrow{S} = \iint\limits_S z\,dxdy + x\,dydz + y\,dxdz = 3V_S.$$



$\triangleright$ *Если поверхности, ограничивающие объём V_S соответственно снизу и сверху определяются*

$$z = z_1(x,y) \text{ и } z = z_2(x,y),$$

тогда

$$\iint\limits_S z\,dxdy = \iint\limits_{D_{z+}} z_2(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_{z-}} z_1(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{z+}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = V_S.$$

Совершенно аналогично можно показать, что второй и третий интегралы также равны объёму V_S (см. Лекцию 50*).* $\triangleleft$

“Единственная практическая проблема —
Что делать дальше?”

Энон

Раздел 8
Теория рядов

Лекция 53. Сходимость и сумма числового ряда

Из этой лекции станет ясно, что не всякая сумма бесконечного числа слагаемых равна бесконечности.

★ *Формальная сумма элементов* $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ *числовой последовательности называется числовым рядом,*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots} \quad \text{— числовой ряд,}$$

при этом слагаемые называют членами ряда, а u_n *— общим членом ряда.*

★ *Сумма первых* n *слагаемых ряда называется* n*-ой частичной суммой*

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \quad \text{— } n\text{-ая частичная сумма}$$

★ *Если все члены ряда положительны, то ряд будем называть знакоположительным.*

★ *Если предел частичных сумм существует и конечен, то ряд называется сходящимся, в противном случае говорят, что ряд расходится.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S} \quad \text{— сумма ряда}$$

Ряд геометрической прогрессии

★ *Рядом геометрической прогрессии называется следующий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \ ,$$

где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Задача 1

Показать, что n-ая частичная сумма ряда геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}.}$$

► *Доказательство этой формулы проводится методом математической индукции, но ещё проще её можно получить прямым делением*

$$\begin{array}{l|l}
a - aq^n & 1-q \\ \cline{2-2}
\underline{a - aq} & a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\
\quad aq - aq^n & \\
\quad \underline{aq - aq^2} & \\
\qquad \cdots & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad aq^{n-1} - aq^n & \\
\qquad\quad \underline{aq^{n-1} - aq^n} & \\
\qquad\qquad\quad 0. &
\end{array}$$

◄

Задача 2

Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда геометрической прогрессии $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$.

▶ 1. $|q| < 1 \implies$ *сходится.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}}_{=0} = \frac{1}{1-q}.$$

$\boxed{S = \dfrac{1}{1-q}}$ — сумма ряда геометрической прогрессии

2. $|q| > 1 \implies$ *расходится.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}}_{=\infty} = \infty.$$

3. $q = 1 \implies$ *расходится.*

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

4. $q = -1 \implies$ *расходится.*

$S_n = \underbrace{1 - 1 + \cdots \pm 1}_{n} = 0$ *или* 1; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *не существует* ◀

Необходимое условие сходимости числового ряда

Задача 3

Показать, что если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

▶ *По условию задачи* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *но тогда*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n-1\to\infty}} S_{n-1} = S.$$

Вопрос: Какое соотношение связывает S_n *и* S_{n-1}*?*

Ответ: $S_n = S_{n-1} + u_n$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n \implies S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \implies$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0} \text{ — необходимое условие сходимости } \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1000n}$.

$\triangleright \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000n} = \frac{1}{1000} \neq 0$ — *расходится* $\triangleleft$

Гармонический ряд

★ *Гармоническим рядом называется числовой ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots}\ .$$

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости гармонического ряда?

Ответ: Только невыполнение необходимого условия сходимости позволяет делать определённый вывод, а его выполнение, как в данном случае, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, *не позволяет судить о сходимости.*

- *В дальнейшем мы сможем показать, что этот ряд расходится.*

Достаточные признаки сходимости

Вопрос: Как вы думаете, для чего нужны достаточные признаки сходимости числовых рядов?

Ответ: Прежде чем вычислять сумму ряда, необходимо убедиться, что он сходится. Иначе большие усилия можно затратить на вычисление того, чего не существует.

Признак сравнения

Задача 4

Пусть заданы два числовых ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) *и пусть* $u_k \geqslant v_k \geqslant 0$. *Показать, что тогда из сходимости ряда* (1) *следует сходимость ряда* (2), *а из расходимости ряда* (2) *следует расходимость ряда* (1).

► $u_k \geqslant v_k \implies \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \implies \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k.$

1. *Если ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k\,,$$

что означает сходимость ряда (2).

2. *Если ряд* (2) *расходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \infty\,,$$

что означает расходимость ряда (1). ◄

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

▷ *Распишем этот ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n} + \cdots.$

Вопрос: С каким рядом данный ряд вы думаете сравнивать?

Ответ: С рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. *Поскольку начиная с* $k = 2$ *выполняется неравенство* $1/2^n \geqslant 1/n^n$, *то заданный ряд сходится.* ◁

Лекция 54. Достаточные признаки сходимости рядов

Как мы увидим, вопрос о сходимости числовых рядов как правило сводится к вычислению предела.

Предельный признак сравнения

Задача 1

Пусть заданы два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ (1) *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_k$ (2) *и пусть* $u_k, v_k \geqslant 0$. *Показать, что если предел отношения общих членов этих рядов существует и конечен* $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A}$, *то ряды* (1) *и* (2) *сходятся или расходятся одновременно.*

► *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A \iff \quad A - \varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < A + \varepsilon \quad \text{при} \;\; k > N$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(A-\varepsilon)v_k <}_{1} u_k \underbrace{< (A+\varepsilon)v_k}_{2}$$

1. *Пусть ряд* (2) *сходится, тогда ряд* $(A+\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, *отличающийся от* (2) *на множитель, также сходится. Теперь из признака сравнения, согласно неравенству* 2, *ряд* (1) *сходится.*

2. *Пусть ряд* (1) *сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 1, *ряд* (2) *сходится.*

3. *Пусть ряд* (1) *расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 2, *ряд* (2) *расходится.*

4. *Пусть ряд* (2) *расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 1, *ряд* (1) *расходится.* ◄

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

▷ *Вопрос: Какой ряд имеет смысл сопоставить данному?*

Ответ: Расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2} \text{ — ряд расходится} \quad \triangleleft$$

Признак Даламбера

Задача 2

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_k$ (1) $(u_k>0)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=l$. *Показать, что если* $l<1$, *то ряд сходится, а если* $l>1$, *то ряд расходится.*

▶ *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=l \iff \quad l-\varepsilon<\frac{u_{k+1}}{u_k}<l+\varepsilon \quad \text{при } k>N$$

$$\Downarrow$$

$$(l-\varepsilon)u_k<u_{k+1}<(l+\varepsilon)u_k$$

Поскольку по определению предела ε *— произвольная постоянная, то мы выбираем её такой, чтобы при* $l<1$ *и* $l+\varepsilon<1$, *а при* $l>1$ *и* $l-\varepsilon>1$. *Далее сопоставим заданному ряду* (1) *ряды геометрической прогрессии* (2) *и* (2′) :

$$\sum_{k=N}^{\infty}u_k=u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots. \tag{1}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty}v_k=u_N+u_N(l+\varepsilon)+u_N(l+\varepsilon)^2+\cdots. \tag{2}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty}v'_k=u_N+u_N(l-\varepsilon)+u_N(l-\varepsilon)^2+\cdots. \tag{2'}$$

удовлетворяющие неравенствам $v'_k\leqslant u_k\leqslant v_k$.

1. *Пусть* $l < 1$ *и* $l + \varepsilon < 1$, *тогда ряд* (2) *сходящийся, а значит, согласно второму неравенству и признаку сравнения ряд* (1) *сходится.*

2. *Пусть* $l > 1$ *и* $l - \varepsilon > 1$, *тогда ряд* $(2')$ *расходящийся, а значит, согласно первому неравенству и признаку сравнения ряд* (1) *расходится. Итак,*

$$\boxed{\text{если} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = l, \ \text{то} \begin{cases} \text{при} \ \ l < 1 \ - \ \text{ряд сходится;} \\ \text{при} \ \ l > 1 \ - \ \text{ряд расходится.} \end{cases}} \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

$$\triangleright \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 = l < 1 \ \text{— ряд сходится} \quad \triangleleft$$

Признак Коши

Задача 3

Пусть дан ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_k$ (1) $(u_k \geqslant 0)$ *и пусть* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$. *Показать, что если* $l < 1$, *то ряд сходится, а если* $l > 1$, *то ряд расходится.*

$\blacktriangleright$ *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l \iff l - \varepsilon < \sqrt[k]{u_k} < l + \varepsilon \ \text{при} \ k > N$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(l-\varepsilon)^k <}_{1} u_k \underbrace{< (l+\varepsilon)^k}_{2}$$

Вопрос: Что вы предлагаете делать дальше?

Ответ: *В данной задаче достаточно просуммировать неравенства* (1) *и* (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^k < \sum_{n=1}^{\infty}u_k < \sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^k,$$

откуда следует

$$\boxed{\text{если} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=l, \ \text{то} \begin{cases} \text{при} \ \ l<1 \text{ — ряд сходится;} \\ \text{при} \ \ l>1 \text{ — ряд расходится.} \end{cases}} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. *Исследовать на сходимость ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}$.

$\triangleright$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}}=0<1$ — *ряд сходится* $\triangleleft$

Пример 4. *Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots .$$

$\triangleright$ 1. *Воспользуемся признаком Даламбера*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1=l\,.$$

• *Если* $l=1$, *то признак Коши или Даламбера не позволяет судить о сходимости ряда.*

2. *Найдём* n*-ую частичную сумму и вычислим её предел.*

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1 \text{ — ряд сходится} \quad \triangleleft$$

Лекция 55. Ряд Дирихле. Знакопеременные ряды

Мы убедимся, что известное утверждение: от перестановки слагаемых сумма не меняется — имеет свою границу.

Интегральный признак сходимости

Задача 1

Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, *где* $f(k)$ *знакоположительная, невозрастающая функция. Показать, что если ему сопоставить несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, *то этот ряд и этот несобственный интеграл сходятся или расходятся одновременно.*

► *По условию задачи*

$$f(k+1) \leqslant f(\xi) \leqslant f(k), \text{ при } \xi \in [k,\ k+1].$$

Вопрос: Воспользовавшись теоремой о среднем (Лекция 28), *представить* $f(\xi)$ *в виде определённого интеграла.*

Ответ:

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = f(\xi)(k+1-k) = f(\xi), \text{ при } \xi \in [k,\ k+1].$$

Вопрос: Как будет выглядеть исходное неравенство после его суммирования с учётом найденного обстоятельства?

Ответ:
$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$$
$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leqslant \int\limits_{1}^{\infty}}_{1} f(x)\ \underbrace{dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k)}_{2}$$

1. *Пусть правый ряд сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, несобственный интеграл сходится.*

2. *Пусть несобственный интеграл сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, ряд сходится.*

3. *Пусть левый ряд расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, несобственный интеграл расходится.*

4. *Пусть несобственный интеграл расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, ряд расходится.* ◄

Ряд Дирихле

★ *Рядом Дирихле называется знакоположительный ряд*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{k^{\alpha}} + \cdots} \text{ — ряд Дирихле}$$

• *При* $\alpha = 1$ *ряд Дирихле становится гармоническим.*

Задача 2

Исследовать на сходимость ряд Дирихле.

► *Вопрос: Какой признак сходимости вы будете использовать?*

Ответ: Интегральный признак сходимости, согласно которому

$$\text{ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \text{интеграл} \quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости этого несобственного интеграла?

Ответ: Согласно частному предельному признаку сходимости для интеграла с неограниченным пределом интегрирования (Лекция 32) *такой интеграл сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$. ◄

• *В данной задаче доказано, что гармонический ряд расходится, причём логарифмически.*

Пример 1. *Подсчитать N-ую частичную сумму расходящегося гармонического ряда, если число слагаемых в нём равно числу атомов во вселенной.*

▷ *Вопрос: Чему равно число атомов во вселенной, если известно, что радиус вселенной равен десять миллиардов световых лет, а средняя плотность вещества во вселенной равна одному атому в кубическом сантиметре?*

Ответ: $N \sim 10^{84}$.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \simeq \int\limits_{1}^{N} \frac{dk}{k} = \ln N = \ln 10^{84} \simeq 194 \quad \triangleleft$$

Знакопеременные ряды

★ *Числовой ряд называется знакопеременным, если он содержит как положительные так и отрицательные слагаемые.*

★ $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k, \ \text{где } u_k > 0}$ — знакочередующийся ряд

Признак Лейбница

Задача 3

Пусть знакопеременный ряд удовлетворяет следующим условиям:

— *ряд знакочередующийся;*
— *ряд не возрастающий* $u_{k+1} \leqslant u_k$*;*
— *выполняется необходимое условие* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Показать, что в этом случае ряд сходится, причём его сумма не превышает первое слагаемое $u_1 > 0$.

► *Если число слагаемых чётно, то*

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots - u_{2n-2} + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{>0} - \cdots - \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{>0} - u_{2n} < u_1 \implies$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} S_{2n} < u_1.$$

Вопрос: А если число слагаемых нечётно?

Ответ: Тогда воспользуемся необходимым условием

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}}_{=0} = S < u_1. \quad ◄$$

• *Условия решённой задачи составляют признак Лейбница.*

Абсолютная и условная сходимость

★ *Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его слагаемых.*

★ *Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если он сходится (например, по признаку Лейбница), но ряд из модулей его слагаемых расходится.*

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

$\triangleright$ 1. *Вопрос: Удовлетворяет ли этот ряд признаку Лейбница?*
Ответ: Да, он удовлетворяет всем трём его условиям.

2. *Проверим, сходится ли ряд из модулей его слагаемых*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \implies \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Ответ: Данный ряд сходится условно. $\triangleleft$

Задача 4

Показать на примере знакочередующегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$, *что сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка суммирования слагаемых этого ряда.*

$\blacktriangleright$ *Переставим члены ряда и сгруппируем их по трое*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots =$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})} +$$

$$+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})}+\cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}S. \blacktriangleleft$$

• *От перестановки слагаемых сумма условно сходящегося ряда меняется, а сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется.*

Лекция 56. Функциональные ряды

Подобно тому, как для функции мы интересуемся областью её определения, так для функционального ряда нас должна интересовать его область сходимости.

★ *Функциональным рядом называется такой ряд*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,}$$

каждое слагаемое которого является функцией x.

★ *Функциональный ряд называется сходящимся в области D, если существует конечный предел частичной суммы его, т.е.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \text{при } \forall x \in D.}$$

★ *Множество всех значений x, при которых ряд сходится, называют областью сходимости.*

★ *Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области D, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое N, что выполняется неравенство*

$$\boxed{|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \text{при } n > N,}$$

где N не зависит от x.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно при $x \in D$, если ему можно сопоставить сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, такой, что выполняется $|u_k(x)| \leqslant v_k$.

Задача 1

Применить признак сходимости Даламбера для функционального ряда.

► *Сопоставим функциональному ряду ряд из модулей его членов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|.$$

Такой ряд для каждого конкретного x является знакоположительным числовым рядом к которому применим признак Даламбера

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} < 1.$$

При всех значениях x, когда предел меньше единицы, функциональный ряд сходится, причём абсолютно, а само множество этих значений x является его областью сходимости. ◄

Область сходимости степенного ряда

★ *Если $u_k(x) = a_k x^k$, то ряд называется степенным.*

Задача 2

Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти область сходимости степенного ряда.

► *По условию задачи $u_k(x) = a_k x^k$, и тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} < 1 \Rightarrow |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1,$$

откуда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R} \quad \text{— радиус сходимости по Даламберу} \quad ◄$$

• *В интервале $(-R,\ R)$ степенной ряд сходится абсолютно.*

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$.

$\triangleright$ 1. *Находим радиус сходимости степенного ряда*

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1} = 1\,.$$

2. *На границах области сходимости проводим дополнительное исследование*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k = 1 \pm 1 + 1 \pm \cdots \quad \text{— расходится.}$$

Вопрос: Не напоминает ли вам что-нибудь этот степенной ряд?

Ответ: По сути это ряд геометрической прогрессии, который, как ещё раз мы установили, абсолютно сходится при $x \in (-1,\ 1)$, *и расходится при* $|x| \geqslant 1$. $\triangleleft$

Задача 3

Получить радиус сходимости степенного ряда, используя признак сходимости Коши.

$\blacktriangleright$ *Вопрос: Как будет выглядеть признак Коши для функционального ряда?*

Ответ: $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|} < 1$.

Для степенного ряда то же неравенство принимает вид:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1 \Rightarrow |x|\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

откуда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R} \quad \text{— радиус сходимости по Коши} \qquad \blacktriangleleft$$

Разложение функций в степенные ряды

Вопрос: Чему равна эквивалентная функции в окрестности точки x_0, если функция в этой точке n раз дифференцируема?

Ответ: Многочлену Тейлора (Лекция 21).

★ *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 и $|f^{(k)}(x_0)| \leqslant M$, тогда в окрестности этой точки функция раскладывается в степенной ряд*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k} \quad \text{— ряд Тейлора}$$

Вопрос: Как выглядит ряд Тейлора при $x_0 = 0$?

Ответ: $$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} \quad \text{— ряд Маклорена}$$

Пример 2. *Разложить e^x в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость.*

▷ 1. $f^{(k)}(0) = (e^x)^{(k)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1 \Longrightarrow e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$.

2. $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)!}{k!} = \lim\limits_{k\to\infty} (k+1) = \infty$

Ответ: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, *при* $D:\ (-\infty,\ \infty)$. ◁

Пример 3. *Разложить $\sin x$ в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость (самостоятельно).*

▷ *Ответ:* $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *при* $D:\ (-\infty,\ \infty)$. ◁

Лекция 57. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов позволяет заданные ряды сводить к уже известным рядам, например, вычислить сумму такого ряда: $1+2\cdot 0.3+3\cdot(0.3)^2+4\cdot(0.3)^3+\cdots$.

Задача 1 (об интегрировании рядов)

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{1}$$

равномерно сходится. Показать, что в этом случае ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = V(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{2}$$

будет сходиться, если

$$v_k(x) = \int\limits_a^x u_k(t)\,dt, \quad \text{причём} \quad V(x) = \int\limits_a^x S(t)\,dt.$$

► *Поскольку ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \implies |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

при этом, согласно определению равномерной сходимости, ε *не зависит от* x *при* $n > N$. *Покажем, что*

$$|V_n(x) - V(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,\ x \in [a,\ b].$$

Вопрос: Чему равна n-ая частичная сумма ряда (2)?

Ответ:

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x u_k(t)\,dt = \int\limits_a^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,dt = \int\limits_a^x S_n(t)\,dt.$$

Вопрос: Какую цепочку соотношений теперь нужно записать?

Ответ:

$$\left|\int\limits_a^x S_n(t)\,dt - \int\limits_a^x S(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_a^x \Big(S_n(t) - S(t)\Big)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^x |S_n(t) - S(t)|\,dt < \int\limits_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leqslant \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Вычислить:* $0.3 + \dfrac{(0.3)^2}{2} + \dfrac{(0.3)^3}{3} + \cdots.$

$\triangleright$ 1. *Сопоставим заданному числовому ряду степенной ряд*

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

2. *Исследуем этот ряд на сходимость*

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1\,.$$

3. *Вопрос: Какому степенному ряду он всего ближе?*

Ответ: Ряду геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

который равномерно сходится при $|x| \leqslant r < 1$.

Вопрос: Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?

Ответ: Да, это можно сделать посредством интегрирования.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int\limits_0^x 1\,dt + \int\limits_0^x t\,dt + \int\limits_0^x t^2\,dt + \cdots & = & \displaystyle\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} \\ & \Downarrow & \\ \displaystyle x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots & = & -\ln|1-x| \end{array}$$

Ответ: $V(0.3) = -\ln|1-0.3| = -\ln 0.7 \approx 0.35 \quad \triangleleft$

Пример 2. *Разложить в степенной ряд* $\operatorname{arctg} x$ *для* $|x| < 1$.

$\triangleright$ *Вопрос: Можно ли* $\operatorname{arctg} x$ *записать в виде определённого интеграла?*

Ответ: Да, причём $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x$.

Вопрос: Можно ли подынтегральное выражение представить в виде ряда?

Ответ: Подынтегральное выражение — это сумма ряда геометрической прогрессии с $q = -x^2$*:*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots .$$

Вопрос: Можно ли проинтегрировать этот ряд?

Ответ: Да, поскольку ряд геометрической прогрессии равномерно сходится при $|x| \leqslant r < 1$.

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots . \quad \triangleleft$$

Задача 2 (о дифференцировании рядов)

Пусть задан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \quad \textit{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{1}$$

и пусть ряд из его производных $w_k(x) = u_k'(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) = W(x) \quad \textit{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{2}$$

равномерно сходится. Показать, что $S'(x) = W(x)$.

$\blacktriangleright$ *Поскольку ряд* (2) *равномерно сходится, то его можно, согласно* Задачи 1 *проинтегрировать, причём*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x w_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x)-u_k(a)) =$$

$$= S(x) - S(a) = \int_a^x W(t)\,dt \implies S'(x) = W(x). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. *Вычислить:* $1+2\cdot 0.3+3\cdot(0.3)^2+4\cdot(0.3)^3+\cdots.$

$\triangleright$ 1. *Сопоставим заданному числовому ряду степенной ряд.*

$$1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k \quad (x=0.3).$$

2. *Очевидно, что ряд сходится при* $|x|<1$.

3. *Вопрос: Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?*

Ответ: Да, посредством дифференцирования.

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+\cdots)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \\ &\Downarrow \\ 1+2\cdot x+3\cdot x^2+\cdots &= \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } W(0.3) = \frac{1}{(1-0.3)^2} = \frac{1}{0.49} \approx 2.04 \quad \triangleleft$$

Пример 4. *Выразить интеграл вероятности* $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ *в виде степенного ряда.*

$$\triangleright \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \left\{e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \quad \triangleleft$$

Лекция 58. Вычисление иррациональных чисел и определённых интегралов

Такие известные со школы числа как e, π, $\sqrt{2}$ вычисляются с помощью рядов.

Задача 1 (о вычислении e)

Вычислить e с точностью 0.1.

▶ *Вопрос: Какой степенной ряд имеет отношение к числу e?*

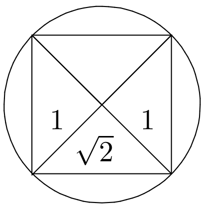
Ответ: Ряд Маклорена $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, *с радиусом* $R = \infty$.

Вопрос: Какой числовой ряд равен числу e?

Ответ: $$e = e^x\Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \approx$$
$$\approx 2 + 0.5 + 0.166 + 0.041 \approx 2.7 \quad ◀$$

Задача 2 (о вычислении $\sqrt{2}$)

Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью 0.01.



▶ *Вопрос: Какой степенной ряд имеет отношение к числу $\sqrt{2}$?*

Ответ: Таким рядом будет разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^p$. Так как

$$((1+x)^p)^{(k)}\Big|_{x=0} = p(p-1)\cdots(p-k+1),$$

то биноминальный ряд имеет вид:

$$\boxed{(1+x)^p = 1 + \tfrac{p}{1!}x + \tfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k + \cdots}$$

Вопрос: Каков радиус сходимости биноминального ряда?

Ответ: $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{k+1}{p-k}\right| = 1,$

т.е. необходимо представить искомое число в виде биноминального ряда при $|x| < 1$. *Легко убедиться, но тяжело догадаться, что ключом решения является равенство:*

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1+x}, \text{ где } x = -0.02.$$

Таким образом, по формуле биноминального ряда

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{2}0,02 - \frac{1}{8}0.0004 - \cdots\right) = \frac{10}{7}(1-0.01) \approx 1.41 \quad \blacktriangleleft$$

Задача 3 (о вычислении π)

Вычислить π *с точностью* 0.01.

▶ *Вопрос: Какой ряд можно использовать для вычисления числа* π*?*

Ответ: Любую обратную тригонометрическую функцию.

Вопрос: Какое из равенств вы предпочли бы использовать для вычисления π : $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ *или* $\arcsin 0.5 = \pi/6$*?*

Ответ: Конечно второе, поскольку при меньшем аргументе степенной ряд сходится быстрее.

Вопрос: Каким образом можно найти первые члены ряда $\arcsin x$*?*

Ответ: С помощью интегрирования биноминального ряда

$$\pi = 6\arcsin 0.5 = 6\int\limits_0^{0.5}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 6\int\limits_0^{0.5}[1+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}t^4+\frac{5}{16}t^6+\cdots]\,dt =$$

$$= 6[t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + \frac{5}{102}t^7 + \cdots]\Big|_0^{0.5} = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \cdots \approx 3.14 \quad \blacktriangleleft$$

Вычисление определённых интегралов

Задача 4 (о вычислении интегрального синуса)

Вычислить $\int\limits_0^{0.2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ *с точностью до* 0.001.

$$\blacktriangleright \quad \int\limits_0^{0.2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\{ \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad R=\infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{0.2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\Big|_0^{0.2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0.2^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(0.2)^5}{5\cdot 5!} - \cdots =$$

$$= 0.2 - \frac{4}{9}10^{-3} + \frac{16}{3}10^{-7} - \cdots \approx 0.199 \quad \blacktriangleleft$$

Задача 5

Вычислить $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx$ *с точностью до* 0.01.

$$\blacktriangleright \quad \int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx = \left\{ e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k k!}, \quad R=\infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{3^k k!(2k+1)}\Big|_0^{1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k k!(2k+1)} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\cdot 2\cdot 5} - \frac{1}{27\cdot 6\cdot 7} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{90} - \frac{1}{1134} + \cdots \approx 1 - 0.11 + 0.01 = 0.90 \quad \blacktriangleleft$$

Лекция 59. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

В тех случаях, когда не удаётся проинтегрировать дифференциальное уравнение, его можно решить с помощью рядов.

Точное решение дифференциального уравнения или метод неопределённых коэффициентов

Задача 1 (общее решение дифференциального уравнения)

Решить уравнение: $y'' - x^2 y = 0$.

▶ *Вопрос: Идентифицируйте данное уравнение.*

Ответ: Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Оно не соответствует ни одному из трёх типов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Вопрос: С помощью неопределённых коэффициентов представьте в виде степенных рядов искомую функцию и её производные.

Ответ:
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$
$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1},$$
$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}.$$

Вопрос: Найдите реккурентные соотношения между неопределёнными коэффициентами.

Ответ: Подстановка рядов в уравнение даёт тождество, где проведено переобозначение идексов суммирования

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \equiv 0,$$

которое верно, если

$$\begin{array}{ll} x^0: & a_2 2\cdot 1 = 0 \\ x^1: & a_3 3\cdot 2 = 0 \\ x^2: & a_4 4\cdot 3 - a_0 = 0 \\ x^3: & a_5 5\cdot 4 - a_1 = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \boxed{a_2 = 0} \\ \boxed{a_3 = 0} \end{array}$$

С учётом полученных соотношений, то же тождество можно переписать иначе

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+4}(k+4)(k+3)x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \equiv 0,$$

откуда следует реккурентное соотношение

$$\boxed{a_{k+4} = \frac{a_k}{(k+4)(k+3)}}.$$

Вопрос: Выразите все коэффициенты через a_0 и a_1.

Ответ: Очевидно, что через a_0 выразятся коэффициенты с индексами 4, 8, 12, 16 и т.д., а через a_1 выразятся коэффициенты с индексами 5, 9, 13, 17 и т.д., при этом они равны

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{4k} = \dfrac{a_0}{4k(4k-1)\cdots 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}\,, \\ a_{4k+1} = \dfrac{a_1}{(4k+1)4k\cdots 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}\,. \end{array}}$$

В результате общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k}x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k+1}x^{4k+1} =$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_0 x^{4k}}{4k(4k-1)\cdots 4\cdot 3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 x^{4k+1}}{(4k+1)4k\cdots 5\cdot 4} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 (задача Коши)

Решить уравнение: $y'' - xy' + y = 1$ *при* $y(0) = y'(0) = 0$.

► 1. *Это уравнение того же типа, что и в* Задаче 1, *с тем несущественным для нас отличием, что коэффициенты его линейные функции* x. *Поэтому, поступаем аналогично*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \; y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \; y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}.$$

2. *Начальные условия позволяют найти обе константы интегрирования*

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0, \\ y'(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k 0^{k-1} = 0 \end{aligned}\right. \implies \begin{array}{|c|} \hline a_0 = 0 \\ \hline a_1 = 0 \\ \hline \end{array}$$

3. *Подстановка рядов в уравнение даёт тождество*

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - a_{k+1}(k+1)x^{k+1} + a_k x^k] \equiv 1,$$

которое верно, если

$$\begin{aligned}
x^0 &: \; a_2 2\cdot 1 + a_0 = 1 && \implies a_2 = \frac{1}{2\cdot 1} \\
x^1 &: \; a_3 3\cdot 2 - a_1 + a_1 = 0 && \implies a_3 = 0 \\
x^2 &: \; a_4 4\cdot 3 - a_2 2 + a_2 = 0 && \implies a_4 = \frac{a_2}{4\cdot 3} \\
x^3 &: \; a_5 5\cdot 4 - a_3 3 + a_3 = 0 && \implies a_5 = 0 \\
x^4 &: \; a_6 6\cdot 5 - a_4 4 + a_4 = 0 && \implies a_6 = \frac{3a_4}{6\cdot 5}
\end{aligned}$$

Итак, $a_{2k} = \dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!}$, где $\boxed{(2k-3)!! = (2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$

В результате частное решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!} x^{2k} \quad ◄$$

Приближённое решение задачи Коши

Задача 3 (приближённое частное решение)

Найти приближённое решение уравнения:

$$y'' = x + y^2, \text{ если } y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

в виде степенного многочлена.

► *Вопрос: Найдите первые пять отличных от нуля коэффициентов многочлена, являющегося приближённым решением.*

Ответ: Для этого воспользуемся многочленом Маклорена

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

в котором предстоит найти первые пять отличных от нуля производных.

Вопрос: Как найти эти производные?

Ответ: Это легко сделать, последовательно подставляя в исходное уравнение начальные условия, и его дифференцируя

$$\begin{aligned} y''(0) &= x + y^2\Big|_0 = 0, & y^{(4)}(0) &= 2y'^2 + 2yy''\Big|_0 = 2, \\ y'''(0) &= 1 + 2yy'\Big|_0 = 1, & y^{(5)}(0) &= 6y'y'' + 2yy'''\Big|_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(6)}(0) &= 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)}\Big|_0 = 8, \\ y^{(7)}(0) &= 20y''y''' + 10y'y^{(4)} + 2yy^{(5)}\Big|_0 = 20. \end{aligned}$$

Таким образом получаем приближённое решение:

$$y(x) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + 0 + \frac{8}{6!}x^6 + \frac{20}{7!}x^7.$$

Проверка:

$$y'' \approx x + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \approx x + y^2 \approx x + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \quad ◄$$

Лекция 60. Тригонометрические ряды

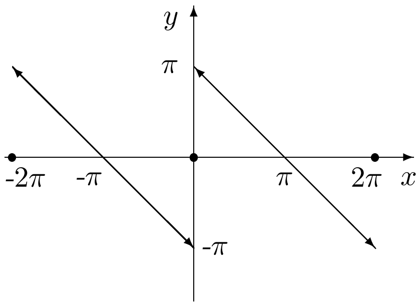
Периодическую кусочно-гладкую функцию лучше описывать не степенным, а тригонометрическим рядом.

★ *Функция называется периодической кусочно-гладкой функцией, если она определена, непрерывна и дифференцируема на всей действительной оси за исключением заданных точек, в которых терпит разрыв первого рода, и удовлетворяет равенству:*

$$\boxed{f(x) = f(x+T)}\,, \quad \text{где } T \text{ —период.}$$

Пример 1. *Построить график периодической кусочно-гладкой функции с периодом равным 2π.*

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in (0, 2\pi)\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$



▷ *Вопрос: Чему равна эта функция при $x = \pm 2\pi$?*

Ответ: По определению

$$f(0) = 0 \ \ \text{и} \ \ T = 2\pi,$$

следовательно

$$f(\pm 2\pi) = 0. \quad \triangleleft$$

Задача 1

Графически отобразить сумму тригонометрического ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

► *Вопрос: Каким образом можно решить эту задачу?*

Ответ: *Построим графики первых трёх слагаемых этого ряда*

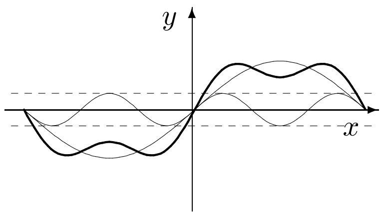
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots .$$

и сложим их.

Вопрос: *Каков период* $\sin 3x$*?*

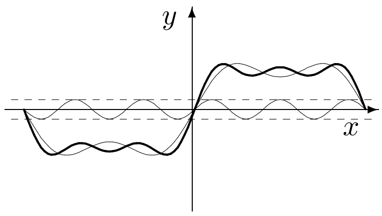
Ответ: *Поскольку* $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, *то*

$$\sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3(x + \frac{2\pi}{3}) \implies T = \frac{2\pi}{3}$$



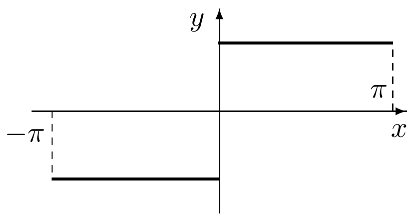
На первом рисунке представленна сумма первых двух гармоник.

Вопрос: *Каков будет ваш следующий шаг?*



Ответ: *К полученному графику следует прибавить график следующей гармоники.*

Вопрос: *Если продолжить суммирование гармоник, каков будет окончательный результат?*



Ответ: *Очевидно, что результатом суммирования будет ступенчатая функция:*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi), \\ -1 & xin(-\pi, 0), \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Величина $\pi/4$ *следует не из построения, а из* Задачи 4. ◄

Ряд Фурье

Задача 2

Показать, что если подынтегральная функция и её первообразная являются периодическими функциями, то определённый интеграл равен нулю, если отрезок интегрирования равен периоду T.

$$\blacktriangleright \quad \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = F(a+T) - F(a) = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Задача 3

Определить коэффициенты тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

если заданная функция $f(x)$ является периодической кусочно–гладкой функцией с периодом равным 2π.

▶ *Вопрос: Каким образом будем находить коэффициенты $a_0,\ a_k,\ b_k$?*

Ответ: Интегрируя исходное равенство с различными весовыми функциями: $1,\ \cos mx,\ \sin mx$.

1. $a_0 =?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \right).$$

Согласно Задаче 2 *интегралы по периоду от косинусов и синусов равны нулю. В результате*

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,.}$$

2. $a_k = ?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,dx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\,dx\right)$$

Первый интеграл равен нулю, а для интегрирования двух последних вспомним тригонометрические формулы:

$$\cos mx\cos kx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right)$$
$$\cos mx\sin kx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-k)x + \sin(m+k)x\right)$$

Очевидно, что интегралы от всех функций равны нулю, исключая только единственный

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(m-k)x\,dx = \begin{cases}\pi, & \text{при } m = k,\\ 0, & \text{при } m \neq k.\end{cases}$$

В результате

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,.}$$

2. $b_k = ?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin mx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mx\,dx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mx\,dx\right)$$

Для вычисления последнего интеграла потребуется ещё одна тригонометрическая формула

$$\sin mx \sin kx = \frac{1}{2}\left(\cos{(m-k)x} - \cos{(m+k)x}\right)$$

согласно которой он отличен от нуля только при $m = k$. *Таким образом*

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.} \quad \blacktriangleleft$$

★ *Тригонометрический ряд с определёнными выше коэффициентами называется рядом Фурье.*

Задача 4

Разложить в ряд Фурье периодическую кусочно-гладкую функцию, т.е. решить задачу почти обратную к Задаче 2.

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\begin{cases} 1 & x \in (0,\pi), \\ -1 & x \in (-\pi,0), \\ 0 & x = 0. \end{cases} = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x \quad \textit{при} \quad x \in (-\pi,\pi).$$

► 1. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x}_{\textit{нечет}}\,dx = 0$

2. $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x\cos kx}_{\textit{нечет}}\,dx = 0$

3. $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x\sin kx}_{\textit{чет}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx, dx =$

$$= -\frac{1}{2k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos k\pi - 1}{2k} = \frac{1}{k} \quad \textit{если} \quad k\textit{−нечётное.}$$

$$\textit{Ответ:} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \quad \blacktriangleleft$$

Лекция 61. Комплексный ряд Фурье

А в комплексных числах ряд Фурье значительно короче.

★ *Комплексным рядом называют такой числовой или функциональный ряд, членами которого в общем случае являются комплексные числа.*

★ *Комплексный ряд сходится, если сходятся как его действительная, так и мнимая части.*

Задача 1

Преобразовать ряд Фурье к комплексному ряду Фурье для периодической кусочно-гладкой функции с периодом, равным 2π.

▶ *Вопрос: Как выглядит ряд Фурье в действительной форме?*

Ответ:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \\ a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx. \end{gathered}}$$

Вопрос: Как выглядят в комплексной форме синус и косинус?

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi=\dfrac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}.$

После их подстановки в ряд Фурье он приобретёт вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{\mathrm{i}kx}+e^{-\mathrm{i}kx}}{2}+b_k\frac{e^{\mathrm{i}kx}-e^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}e^{\mathrm{i}kx}+\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}e^{-\mathrm{i}kx}\right).$$

Вопрос: Как можно упростить коэффициенты ряда Фурье?

Ответ: Если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{\pm \mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi, \quad \text{то}$$

$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos kx - \mathrm{i}\sin kx)\;dx = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx.$$

Очевидно, что

$$\frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2} = {c_k}^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{\mathrm{i}kx}\,dx = c_{-k}$$

Вопрос: Как можно представить ряд Фурье в виде суммы от одной функции?

Ответ:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}e^{-\mathrm{i}kx} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{\mathrm{i}kx} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx. \end{aligned}}$$

— ряд Фурье в комплексных числах ◄

Задача 2

Показать, что система функций $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\right\}$ *на отрезке* $[-\pi,\ \pi]$, *где* $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, *является ортогональной и нормированной на единицу.*

★ *Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется ортогональной и нормированной на единицу на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, если эти функции удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^*(x)\varphi_m(x)\,dx = (\varphi_k(x),\ \varphi_m(x)) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

▶ 1. *Если $k = m$, то равенство интеграла единице очевидно.*

2. *Если $k \neq m$, то согласно* Задаче 3 Лекции 60

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}(k-m)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-m)x - \mathrm{i}\sin(k-m)x]\,dx = 0$$

Следовательно, $$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}(k-m)x}\,dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}}$$ ◀

Задача 3

Определить аргумент тригонометрической функции, период которой равен $T = \dfrac{2l}{k}$.

▶ *Вопрос: Чему равен период $\cos kx$?*

Ответ: Поскольку $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, то

$$\cos kx = \cos(kx + 2\pi) = \cos k(x + \frac{2\pi}{k}) \implies T = \frac{2\pi}{k}$$

Вопрос: Чему равен период $\cos k\alpha x$?

Ответ: Очевидно $T = \dfrac{2\pi}{k\alpha}$.

Вопрос: При каком α период $\cos k\alpha x$ равен $T = \dfrac{2l}{k}$?

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{k\alpha} = \dfrac{2l}{k} \implies \alpha = \dfrac{\pi}{l}$

Ответ: $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ имеет период $T = \dfrac{2l}{k}$. ◀

Задача 4

Пусть функция $f(x)$ является периодической кусочно-гладкой функцией с периодом, равным $2l$. Разложить её в ряд Фурье.

► *Подобная задача решалась в* Задаче 2 Лекции 61, *с тем отличием, что $T = 2\pi \to T = 2l$. Как показано в предыдущей задаче, тригонометрические функции с периодом $\dfrac{2l}{k}$ должны иметь аргумент $\dfrac{k\pi x}{l}$. Тем самым нам остаётся записать искомый ряд Фурье:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \quad ◄$$

Задача 5

Пусть функция $f(x)$ является периодической кусочно-гладкой функцией с периодом равным $2l$. Записать ряд Фурье для этой функции в комплексной форме.

► *Вопрос: Чем будет отличаться искомый ряд от ряда полученного в* Задаче 1*?*

Ответ: Очевидно, только заменой:

$$kx \to \frac{k\pi x}{l}, \quad \pi \to l.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье равен:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\,dx.} \quad ◄$$

Лекция 62. Интеграл Фурье

Если для периодических функций используют ряд Фурье, то для непериодических функций используют интеграл Фурье.

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ — непериодическая, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая функция, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Представить такую функцию в виде интеграла Фурье, преобразовав соответствующий ряд Фурье.

▶ *Вопрос: При каком периоде функция перестанет быть периодической?*

Ответ: Если период станет равен ∞, т.е. при $l \to \infty$. Таким образом, если мы запишем ряд Фурье, а затем перейдём к пределу при $l \to \infty$, то мы решим поставленную задачу.

1. *Запишем ряд Фурье*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

2. *Подставим все коэффициенты в ряд Фурье*

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right)f(t)dt =$$

$$= f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi(x-t)}{l}f(t)\,dt$$

3. *Введём частоту гармоники* $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$. *Тогда сдвиг частот между соседними гармониками равен* $\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega_k = \dfrac{\pi}{l}$, *а сама функция примет вид*

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\omega_k(x-t)f(t)\,dt\Delta\omega_k$$

4. *Перейдём к пределу при* $l \to \infty$. *При этом*

$$\omega_k \to \omega, \quad \Delta\omega_k \to d\omega, \quad \lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \to \int\limits_{0}^{\infty}$$

Таким образом получим

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\omega_k(x-t)f(t)\,dt\Delta\omega_k =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)f(t)\,d\omega dt.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)f(t)\,dt}$$ — интеграл Фурье ◄

Задача 2

Найти интегралы Фурье для чётных и нечётных функций.

► 1. *Пусть функция* $f(x)$ *чётная.*

Тогда в соответствующем ряде Фурье $b_k = 0$, *и получим прямое* *и обратное косинус-преобразования Фурье:*

$$\boxed{F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t)\cos\omega t\, d\omega, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega\,.}$$

2. *Пусть функция $f(x)$ нечётная.*

Тогда в соответствующем ряде Фурье $a_k = 0$, и получим прямое и обратное синус-преобразования Фурье:

$$\boxed{F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t\, d\omega, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega\,.} \blacktriangleleft$$

Задача 3

Преобразовать комплексный ряд Фурье в интеграл Фурье.

► *Вопрос: Как вы будете решать эту задачу?*

Ответ: Так же, как Задачу 1, *с тем отличием, что исходить будем из ряда Фурье в комплексной форме.*

1. $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\, dx.$

2. $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{\mathrm{i}\frac{k\pi(x-t)}{l}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{\mathrm{i}\omega_k(x-t)}\, dt\Delta\omega_k$

3. $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{\mathrm{i}\omega_k(x-t)}\, dt\Delta\omega_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\, dtd\omega$

• *Интеграл Фурье можно записать в виде двух интегралов,*

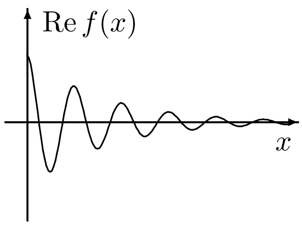
$$\boxed{C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{\mathrm{i}\omega x}\, d\omega.}$$

при этом первый интеграл называется прямым преобразованием Фурье или спектральной функцией, а второй — обратным преобразованием Фурье. ◄

Задача 4

Получить спектральную функцию $C(\omega)$, *если*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\nu x + \mathrm{i}\omega_0 x} & x \geqslant 0\,, \quad (\nu > 0) \\ \quad 0 & x < 0\,. \end{cases}$$



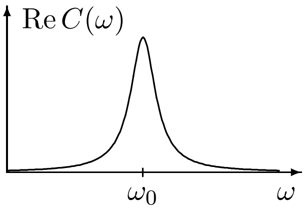
► *Вопрос: Какой процесс описывает заданная функция?*

Ответ: Заданная функция описывает затухающий периодический процесс, что демонстрирует график $\operatorname{Re} f(x)$.

Согласно формуле, полученной в Задаче 3

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\nu t + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-\nu t + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)t}}{-\nu + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)} \right|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\nu - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)}{\nu^2 + (\omega_0 - \omega)^2}.$$



Реальная часть спектральной функции

$$\operatorname{Re} C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

определяет вклад гармоник в исходную функцию. ◄

Указатель обозначений

$\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft$	начало и конец задачи
$\triangleright$ и $\triangleleft$	начало и конец примера
$\bigstar$	определение понятия
$\bullet$	замечание
$\boxed{}$	рамка важной формулы
$\Longrightarrow$	следует
$\alpha \Longleftrightarrow \beta$	из α следует β и наоборот
$\longrightarrow$	стремится
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$A \subset B$	A включено в B
$B \supset A$	B включает в себя A
$\forall$	для всякого
$\varnothing$	пустое множество
$=$	равно
$\equiv$	тождественно равно
$\approx$	приближённо равно
$\simeq$	эквивалентно (асимптотически равно)
$\geqslant$	больше или равно
$\leqslant$	меньше или равно
a	скаляр или тензор нулевого ранга
$\overrightarrow{a}$ или a_i	вектор или тензор первого ранга

A или $\widehat{a}$ или a_{ij}	матрица или тензор второго ранга
$(m \times n)$	размерность матрицы
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	матрица (2×2)
$\lvert \overrightarrow{a} \rvert$ или a	модуль вектора
$\det A$ или Δ	детерминант (определитель) матрицы A
Δ_i	дополнительный определитель
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	определитель 2-го порядка
A^{-1}	обратная матрица
A^T	транспонированная матрица
Λ	диагональная матрица
E или $\widehat{1}$	единичная матрица
r_A	ранг матрицы A
R_n	пространство n-мерное
$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$	декартов базис
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	сумма от единицы до n
$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$	скалярное произведение векторов
$\text{пр}_{\vec{k}}\, \overrightarrow{a}$	проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{k}$
$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$	векторное произведение векторов
$\parallel$	знак коллинеарности
$\perp$	знак перпендикулярности
$\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$	смешанное произведение векторов
$\sqrt{}$	квадратный корень

$\sqrt[n]{}$	корень n-ой степени
i	мнимая единица
$z = a + \mathrm{i}b = \|z\|e^{\mathrm{i}\varphi}$	комплексное число
$z^* = a - \mathrm{i}b = \|z\|e^{-\mathrm{i}\varphi}$	комплексно сопряжённое число
$\|z\| = \sqrt{zz^*}$	модуль комплексного числа
$\{x_n\}$	последовательность
Δx	приращение аргумента
$f(x)$	функция одной переменной
$F(x, y) = 0$	неявно заданная функция одной переменной
$f(x, y)$	функция двух переменных
$\Delta f(x_0)$	приращение функции в т. x_0
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	предел функции в т. x_0
$o(g(x))$ при $x \to x_0$	бесконечно малая относительно $g(x)$ в окрестности т. x_0
$f'(x_0)$ и $f''(x_0)$	производные $f(x)$ первого и второго порядка в т. x_0
$f'(x_0 \pm 0)$	правая (левая) производная $f(x)$ в т. x_0
$f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$	производная $f(x)$ n-го порядка в т. x_0
$\max$	максимум
$\min$	минимум
$\inf$	нижняя грань (наинизшее)
$\sup$	верхняя грань (наивысшее)
dx	дифференциал аргумента
$df(x_0)$	дифференциал функции в т. x_0
$d^n f(x_0)$	дифференциал функции n-го порядка в т. x_0

∞	бесконечность
π	$3.141596\ldots$
e	$2.718281\ldots$
$\int$	интеграл
$\int_a^b$	определённый интеграл
$L_n = \frac{d^n}{dx^n} + \ldots + {}$ $+p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)$	линейный дифференциальный оператор
$S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$	интегральная сумма
$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]$	определитель Вронского
$R_n(k) = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j k^j$	характеристический многочлен
k_j, где $j = \overline{1,n}$	корни характеристического уравнения
$\overline{y}$	решение линейного однородного уравнения
$\dot{x},\ \ddot{x}$	производные по времени
$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	функция n переменных
$\Delta_{x_i} f(\overrightarrow{x^0})$	частное приращение функции n переменных
$f'_{x_i}(\overrightarrow{x^0})$	частная производная функции n переменных
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	смешанная частная производная функции n переменных
$\Delta f(\overrightarrow{x^0})$	полное приращение функции n переменных
$\partial_{x_i} f(\overrightarrow{x^0})$	частный дифференциал функции n переменных

$df(\overrightarrow{x^0})$	полный дифференциал функции n переменных
$\dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial \overrightarrow{n}}$	производная по направлению $\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$	градиент функции
$\overrightarrow{\nabla}$	оператор набла
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \Delta$	оператор Лапласа
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{W} = \mathrm{div}\, \overrightarrow{W}$	дивергенция
$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = \mathrm{rot}\, \overrightarrow{W}$	ротор
$\dfrac{df(x,y,z)}{dt}$	производная сложной функции
$L(x,y,\lambda)$	функция Лагранжа
λ	множитель Лагранжа
$\iint\limits_D f(x,y)\, dS$	двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в области D
$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$	повторный интеграл в двухмерном пространстве
$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dxdydz$	тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ в области D
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\, x + \overrightarrow{j}\, y + \overrightarrow{k}\, z$	радиус-вектор точки в декартовой системе координат
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\, \rho \cos\varphi + {}$ $+ \overrightarrow{j}\, \rho \sin\varphi + \overrightarrow{k}\, z$	радиус-вектор точки в цилиндрической системе координат
$\iint\limits_D g(\rho,\varphi)\, \rho d\rho d\varphi$	двойной интеграл в в полярной системе координат
$= \{\cdots\cdots\cdots\} =$	комментарий

I	определитель Якоби
$\int\limits_{\smile AB} F(x,y,z)\,dr$	криволинейный интеграл первого рода
$\int\limits_{\smile AB} \overrightarrow{F}(x,y,z)\,d\overrightarrow{r}$	криволинейный интеграл второго рода
$\iint\limits_S v(x,y,z)\,dS$	поверхностный интеграл первого рода
$\iint\limits_S \overrightarrow{v}(x,y,z)\,d\overrightarrow{S}$	поверхностный интеграл второго рода
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$	n-частичная сумма
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$	числовой ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$	ряд геометрической прогрессии
q	знаменатель геометрической прогрессии
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$	гармонический ряд
$R = \lim\limits_{k\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \right\rvert$	радиус сходимости по Даламберу
$\operatorname{sign} x$	знаковая функция
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{\mathrm{i\omega x}}\,d\omega$	преобразование Фурье
$C(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i\omega t}}\,dt$	спектральная функция

Предметный указатель

Предметный указатель