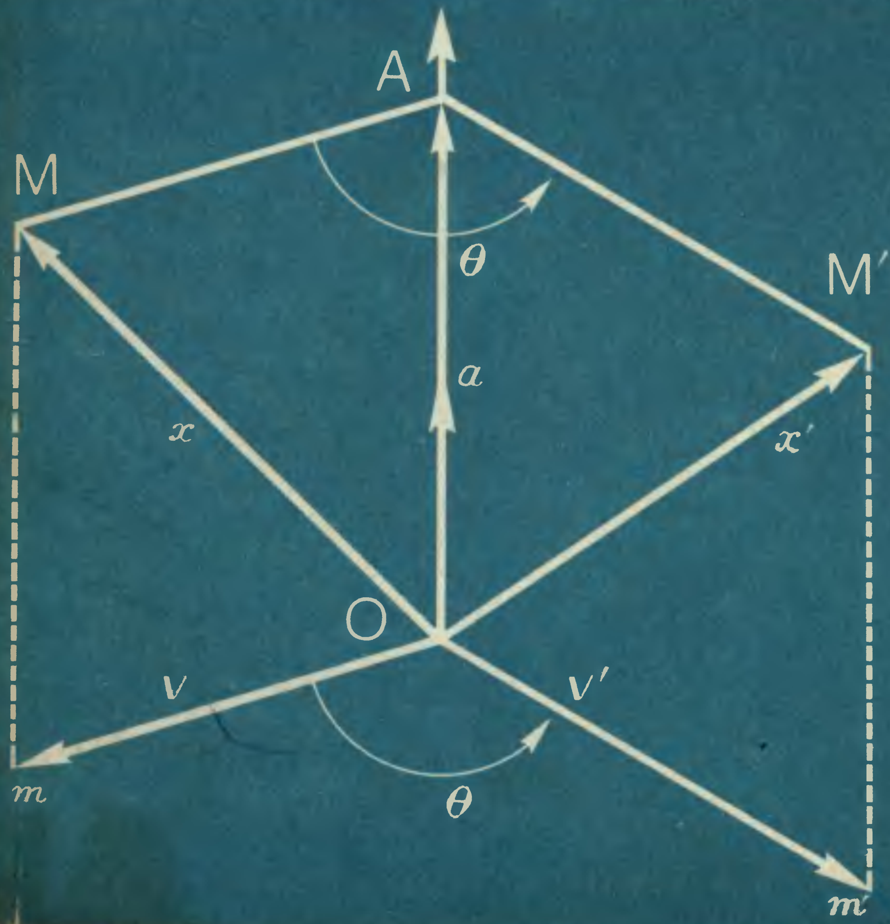
Г. КАЗАНОВА

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА



QUE SAIS-JE?

L'ALGÈBRE VECTORIELLE

GASTON CASANOVA
Agrégé, docteur ès sciences

Presses Universitaires de France
1976

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

Популярная серия

Г. КАЗАНОВА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Перевод с французского

А. В. Булинского

под редакцией

М. К. Поливанова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1979

УДК 512.942 + 539.12

В небольшой по объему книге, вышедшей в популярной серии Издательства французских университетов, рассмотрены применения математического аппарата алгебр Клиффорда в геометрии и физике. Приложения охватывают описание вращений и отражений, уравнения Максвелла, специальную теорию относительности, расчет водородоподобных атомов и классификацию элементарных частиц. Центральное место занимает формулировка дираковой теории электрона и ее обобщений для нуклонов в терминах бикватернионных волновых функций частиц.

Книга, рассчитанная в первую очередь на студентов-физиков, представляет интерес и для научных работников: физиков-теоретиков и математиков.

Редакция литературы по математическим наукам

1702030000

$$К \frac{20203-017}{041(01)-79} 17-79$$

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю книжка Гастона Казанова выпадает из любого привычного жанра. Это не учебник, систематически излагающий предмет, не научная монография, но это и не обычная научно-популярная книжка, которые стараются писать так, чтобы читатель, не прилагая особого труда, узнал бы несколько самых интересных или самых новых фактов и тем самым недорогой ценой расширил свой кругозор. Пожалуй, скорее всего следовало бы назвать ее книжкой для самообразования. Ее нужно читать с карандашом в руках, проводя те несложные алгебраические выкладки, которые в ней встречаются. Если читатель готов проделать такую работу, то он получит не очень систематические, но вполне ясные и конкретные представления сразу о многих предметах, обычно лежащих на самой периферии среднего математического образования, которое получает физик или инженер, – о спинорах, кватернионах, алгебрах Клиффорда.

Далее этот аппарат применяется к физическим задачам. Читателю, знакомому с такими фундаментальными главами современной физики, как преобразования Лоренца и уравнения Дирака, будет интересно узнать, насколько просто и естественно вводятся основные понятия этих теорий с помощью конструкций векторной алгебры.

В несколько особом положении находятся последние главы (IX–XI) этой книги. Излагаемое в них уже не есть просто иллюстрация применений аппарата векторной алгебры. Они целиком основаны на работах автора и, по существу, представляют собой попытку предложить собственную картину некоторых аспектов квантовой теории. Предлагаемая автором интерпретация уходит своими корнями к тем временам, когда казалось, что квантовая механика еще не вполне понятна и отношения между волной и частицей требуют особого исследования. Во Франции благодаря большому личному влиянию

Луи де Бройля эти представления все еще распространены, хотя огромное большинство физиков во всем мире давно приняло основные концепции квантовой механики и не видит в них никаких идейных трудностей.

Здесь не место для критики, укажем лишь, что, по нашему мнению, все содержание указанных глав сводится к некоторой переинтерпретации известных фактов и нуждается в тех же самых исходных гипотезах (в частности, о строении изотопических и странных мультиплетов), что и общепринятый подход.

Французское издание книги вышло в серии «Que sais-je?», имеющей энциклопедический характер и рассчитанной на достаточно широкий круг читателей. Основная (и, на наш взгляд, наиболее интересная) ее часть действительно не требует специальных познаний и написана вполне доступно. Этим и оправдано включение русского издания в популярную серию.

Идеи векторной алгебры находят сейчас прямое приложение в таких новых областях физики элементарных частиц, как теория Янга—Миллса и решения нелинейных классических уравнений, так что мы думаем, что эту книжку (или хотя бы ее основную часть) будет полезно прочитать всем, кто интересуется математикой и ее применениями.

М. К. Поливанов

ВВЕДЕНИЕ

Создание исчисления, позволяющего оперировать геометрическими величинами по правилам алгебры, издавна было целью исследований многих математиков. Об этом мечтал еще Лейбниц, этого пытался добиться Карно. Однако первые действительно важные систематические построения такого рода были сделаны ирландцем У. Р. Гамильтоном (1805–1865), который в поисках объектов, обобщающих комплексные числа, открыл кватернионы (отказавшись при этом от свойства коммутативности произведения), и немцем Х. Грассманом (1809–1877), который около 1844 г. ввел понятия внешнего, а затем и внутреннего произведения для мультивекторов. В 1878 г. англичанину У. К. Клиффорду (1845–1879) удалось объединить эти две разные схемы в рамках единой алгебры, охватывающей и обычное векторное исчисление в пространстве трех измерений, разработанное в окончательном виде американцем Дж. У. Гиббсом (1839–1903). Однако лишь в 1930 г. эта алгебра – творение, в основном, англо-саксонское – приобрела столь важные приложения в физике, что потребовалось ее математически корректное изложение.

Конструкция такой алгебры предполагает, что заданы векторное пространство E_n размерности n над полем действительных чисел и квадратичная форма на E_n. Тогда внутреннее произведение $a \cdot b$ (или $b \cdot a$) двух векторов по определению есть значение симметричной билинейной формы, ассоциированной с данной квадратичной формой, а внешнее произведение, или бивектор, $a \wedge b$ можно рассматривать как геометрический объект: если a и b неколлинеарны, то $a \wedge b$ представляет собой ориентированную плоскость, натянутую на векторы a и b. Направление бивектора определяется ориентацией плоскости векторов a и b, а его величина равняется площади параллелограмма, построенного на a и b. Этот бивектор $a \wedge b$ антисимметричен, т. е. $b \wedge a$ противоположен $a \wedge b$, что записывается так:

$$a \wedge b = -b \wedge a.$$

Теперь можно определить клиффордово произведение векторов a и b, обозначив его просто ab:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

Произведение ab в общем случае не коммутативно, поскольку

$$ba = a \cdot b - a \wedge b,$$

но ассоциативно (если перемножается более двух векторов).

Скаляры называются также 0-векторами, и вообще p-вектором называется внешнее произведение p векторов $a_1, a_2, \ldots, a_p$ из E_n; оно обозначается

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p \quad (p \leqslant n)$$

и геометрически представляет собой ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_p$. Это произведение вполне антисимметрично, т. е. меняет знак при перестановке любых двух соседних сомножителей, и имеет C_n^p компонент, где C_n^p – число сочетаний из n элементов по p. Кроме того, вводится внутреннее произведение вектора и p-вектора, что позволяет определить произведение Клиффорда для произвольного числа векторов, и такое произведение оказывается суммой p-векторов с $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку p-вектор имеет C_n^p составляющих, он является элементом векторного пространства размерности C_n^p, а произведение произвольного набора p-векторов окажется, следовательно, элементом векторного пространства, являющегося прямой суммой $n+1$ своих подпространств и имеющего размерность

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Элементы этого пространства, обозначаемого впредь $\mathscr{C}_n$, называют c-числами или *числами Клиффорда.*

Этот беглый обзор формализма векторной алгебры позволяет читателю понять, о чем пойдет речь; требуемые уточнения будут приведены в дальнейшем. Значение такой алгебры для геометрии и физики проявляется в многочисленных приложениях; в геометрии это описание вращений и инверсии, а в физике область применений включает электромагнетизм, в частности уравнения Лоренца для электрона, лоренцевы вращения в специальной теории относительности и, наконец, уравнение Дирака, которое мы будем записывать в несколько необычной форме, подсказывающей изящное изложение теории.

Однако векторная алгебра есть нечто большее, нежели просто новая форма записи известных результатов, ибо даже в теории Дирака она способствует открытию свойств, которые не были сформулированы с помощью алгебры матриц. Применяя векторную алгебру, можно пойти дальше и записать релятивистское уравнение нуклона, волновая функция которого вследствие существования пионного поля не может быть выражена спинором.

Как увидит читатель, для успешного описания волновых функций элементарных частиц не требуется ни матриц, ни эрмитовых векторных пространств. Понадобятся только операции с произведениями векторов в обычном пространстве-времени, и вместо того, чтобы вводить абстрактное пространство изотопического спина, можно будет получить этот спин с помощью обычного спина посредством вращений и гомотетий-вращений в собственном пространстве частицы. При этом выявляется связь заряда нуклона с компонентами пионного поля. Эти результаты, которые можно получить только с помощью векторной алгебры, представляют собой существенный прогресс уже в познавательном плане.

Не следует относиться безразлично к выбору того или иного математического метода, ибо разные методы не вполне эквивалентны с точки зрения их отношения к реальности. Французская система образования почти не прививает сейчас вкуса к слишком конкретным описаниям, считая их малоадекватными. Происхождение такой ориентации определенно связано с наводнением современной физики абстрактными пространствами и с математизацией все новых научных дисциплин. Однако стоит вспомнить одну очень старую картезианскую традицию: для того чтобы лучше понять явления реального мира, их расчленяют на отдельные части и путем подробного изучения этих частей пытаются найти законы, управляющие явлением в целом. Это, конечно, идет в ущерб более синтетическому изучению, так что в некотором смысле эта маленькая книжка поведет читателя по новым путям.

Глава I

АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

Мы будем строить алгебру Клиффорда над полем действительных чисел на основе n-мерного действительного векторного пространства E_n.

Векторы из E_n будем обозначать строчными буквами a, b, $c, \ldots$, а любые произведения векторов, независимо от числа сомножителей, – заглавными буквами A, B, $C, \ldots$. Предполагается, что

1°. A, B, $C, \ldots$ сами являются элементами действительного векторного пространства $\mathscr{C}_n$, так что

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

и если 0 – нулевой вектор этого пространства, то

$$A + 0 = 0 + A = A.$$

Далее, для действительных чисел λ и μ

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A,$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A,$$

и, кроме того, умножение на число 1 не меняет элементы $\mathscr{C}_n$.

Из этих свойств следует, что если $\lambda A = 0$, то либо $\lambda = 0$, либо $A = 0$.

2°. В $\mathscr{C}_n$ определено ассоциативное умножение, связанное со сложением условиями дистрибутивности (введена структура кольца), т. е. произведение AB также является элементом $\mathscr{C}_n$ и

$$(AB) C = A (BC),$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$C(A + B) = CA + CB.$$

3°. Действительные числа, или скаляры, λ являются элементами $\mathscr{C}_n$ и коммутируют со всеми элементами, т. е.

$$\lambda A = A\lambda.$$

4°. Для любого a из E_n квадрат $a^2 = aa$ является скаляром.

Элементы пространства $\mathscr{C}_n$ называют тогда c-числами или числами Клиффорда.

В случае евклидовых пространств E_n размерности $n \leqslant 3$, а также пространства-времени специальной теории относительности можно определить *произведение двух векторов* как *произведение двух матриц*, сопоставленных векторам; при этом все предыдущие аксиомы очевидным образом выполняются. В общем случае произведения векторов, являющиеся элементами $\mathscr{C}_n$, будут определены как функции по отношению к некоторому базису этого пространства. Тем самым они будут определены сразу во всех базисах, и необходимости обращаться к матричному представлению векторов не возникнет.

Глава II

ВНУТРЕННИЕ И ВНЕШНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Пусть на E_n задана квадратичная форма, которая определяет действительный квадрат a^2 каждого вектора a, необязательно положительный. На основании тождества

$$(a + b)(a + b) = a^2 + b^2 + ab + ba$$

выводим для любых векторов a и b:

$$\frac{1}{2}(ab + ba) = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2}.$$

Из теории квадратичных форм известно, что справа в этом равенстве стоит симметричная билинейная форма, ассоциированная с квадратичной формой a^2. Полагаем

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba). \tag{1}$$

Будем называть $a \cdot b$ *внутренним произведением* векторов a и b. Немедленно замечаем, что

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Если квадратичная форма положительно определена, т. е. a^2 – положительное число для каждого ненулевого вектора a, внутреннее произведение называется скалярным произведением. Отметим еще, что в этом случае всякий ненулевой вектор a имеет обратный a^{-1}, определяемый соотношением $a^{-1} = a/a^2$.

2. КАНОНИЧЕСКИЙ БАЗИС

Векторы a и b называют *сопряженными* относительно квадратичной формы, если

$$a \cdot b = 0,$$

т. е. когда $ab + ba = 0$. Про такие векторы a и b можно еще сказать, что они ортогональны, расширяя смысл понятия ортогональности. Согласно обычной теории квадратичных форм, существует по крайней мере один базис, сопряженный относительно формы, т. е. такой базис, любые два вектора которого сопряжены относительно этой формы. Кроме того, каждому вектору a такого базиса можно сопоставить коллинеарный ему вектор λa (λ действительное), такой, что $\lambda^2 a^2$ равняется по абсолютной величине 1.

Каноническим базисом для квадратичной формы назовем такой базис из векторов γ_i, что $\gamma_i^2 = 1$ (или -1) при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0$ при всех (i, j) с $i \neq j$.

Можно говорить, что это ортонормированный базис, опять же сильно расширяя смысл этого термина.

3. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Пусть $\{\gamma_i\}$ – канонический базис E_n, а $x, y, \ldots, w$ – набор из k векторов пространства E_n. Построим произведение

$$A = xy \ldots w = (\sum_i x_i\gamma_i)(\sum_i y_i\gamma_i) \ldots (\sum_i w_i\gamma_i),$$

принимая во внимание предыдущие аксиомы, выражающие структуру алгебры Клиффорда, и свойства канонического базиса: $\gamma_i^2 = 1$ (или -1) и $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0$. Получим в результате сумму вида

$$A = \sum_P \lambda_P \gamma_P,$$

где через γ_P обозначено произведение $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_p$ с $0 \leqslant p \leqslant k$, в котором все γ_i различны. Через $\{\gamma_P\}$ всегда обозначается просто набор векторов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$.

Множество всевозможных произведений A имеет структуру векторного пространства $\mathscr{C}_n$, которое удобно определенным образом разложить на векторные подпространства. В зависимости от четности числа сомножителей A может иметь компоненты, принадлежащие следующим подпространствам:

(k четно) векторное пространство размерности 1; его элементы, обозначаемые здесь A_S или A_0, – скаляры, или 0-векторы;

(k нечетно) векторное пространство размерности n, совпадающее с E_n; его элементы – векторы A_V или A_1;

(k четно) векторное пространство *бивекторов* A_2 или $A_B = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\gamma_i\gamma_j$;

. . . . . .

(p и k одинаковой четности и $p \leqslant k$) пространство *p-векторов* $A_p = \sum_P \lambda_P \gamma_P$.

Наконец, выделим одномерное векторное подпространство *псевдоскаляров* $A_{\mathscr{P}} = \lambda_N \gamma_N$, где $\gamma_N = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$.

Все коэффициенты λ_P, λ_{ij}, λ_N действительные. Можно проверить, что $\gamma_N^2 = 1$ или -1. Так как у нас в приложениях будет встречаться только случай $\gamma_N^2 = -1$, мы условимся обозначать $\gamma_N = i$, а обычную мнимую единицу во избежание путаницы будем обозначать i'.

Далее будет показано, что γ_P образуют базис $\mathscr{C}_n$; назовем его *базисом, индуцированным* каноническим базисом, введенным в E_n. Отсюда следует, что размерность векторного подпространства p-векторов равняется C_n^p, и, значит, размерность самого пространства $\mathscr{C}_n$ равна

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Замечание. Итак, произведение $A = xy \dots w$ оказывается определенным в некотором базисе $\mathscr{C}_n$, и построение этого базиса и соответствующих компонент A начинается с выбора канонического базиса в E_n. Следовательно, произведение корректно определено как элемент пространства $\mathscr{C}_n$, его можно разложить по любому базису $\mathscr{C}_n$ и A остается инвариантным при заменах базиса E_n, индуцирующих изменения базиса в векторном пространстве $\mathscr{C}_n$.

4. ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Поскольку $ab \in \mathscr{C}_n$ и $a \cdot b \in \mathscr{C}_n$, то и

$$ab - (a \cdot b) = a \wedge b \in \mathscr{C}_n.$$

Тем самым можно принять такое определение внешнего произведения двух векторов a и b:

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba). \tag{2}$$

Свойства антисимметричности ($a \wedge b = -b \wedge a$) и дистрибутивности относительно сложения очевидным образом вытекают из определения (2).

Если a и b коллинеарны, их внешнее произведение $a \wedge b$ равно нулю. Верно и обратное утверждение. Если $ab = ba$, можно взять a в качестве первого вектора канонического базиса и разложить по этому базису b. Тогда $b = \lambda a + c$, где λ – действительное число, а вектор c сопряжен с a. Получим $a \wedge b = a \wedge c = 0$, значит, $ac = ca$, но, поскольку a и c сопряжены, $ac = -ca$. Следовательно, $ac = 0$, так что $a^{-1}ac = 0$, т. е. $c = 0$ и $b = \lambda a$[1].

5. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО КЛИФФОРДА

Пусть $a = \sum_i \lambda_i \gamma_i$ — вектор и $A = b_1 b_2 \ldots b_k = \sum_P \lambda_P \gamma_P$ — некоторый элемент пространства $\mathscr{C}_n$. Для того чтобы образовать aA, достаточно построить произведения $\gamma_i \gamma_P (p \leqslant k)$ и воспользоваться линейностью умножения: $aA = \sum_{i,P} \lambda_i \lambda_P \gamma_i \gamma_P$.

1°. Если $a = \gamma_i \in \{\gamma_P\}$, то $\gamma_i \gamma_P$ является $(p-1)$-вектором, обозначаемым $a \cdot \gamma_P$.

2°. Если $a = \gamma_i \notin \{\gamma_P\}$, то $\gamma_i \gamma_P$ является $(p+1)$-вектором, обозначаемым $a \wedge \gamma_P$.

Следовательно, в общем случае для $a = \sum_i \lambda_i \gamma_i$ можно написать

$$aA = a \cdot A + a \wedge A. \tag{3}$$

Сравним теперь aA и $Aa = \sum_{i,P} \lambda_i \lambda_P \gamma_P \gamma_i$. Легко видеть, что

$$\gamma_P \gamma_i = (-1)^{p-1} \gamma_i \gamma_P, \quad \text{если } \gamma_i \in \{\gamma_P\}, \text{ и}$$

$$\gamma_P \gamma_i = (-1)^{p} \gamma_i \gamma_P, \quad \text{если } \gamma_i \notin \{\gamma_P\}.$$

Это означает, что произведения можно записать так:

$$a \cdot \gamma_P = \frac{1}{2}\left[a\gamma_P - (-1)^p \gamma_P a\right],$$

$$a \wedge \gamma_P = \frac{1}{2}\left[a\gamma_P + (-1)^p \gamma_P a\right].$$

Однако в разложении A по p-векторам могут фигурировать только те γ_P, у которых p имеет ту же четность, что и число k, поэтому в общем случае получаем следующий результат:

$$a \cdot A = \frac{1}{2}\left[aA - (-1)^k Aa\right], \tag{4}$$

[1] Это доказательство проходит, если квадратичная форма в E_n положительно определена, т. е. внутреннее произведение векторов является скалярным произведением.— *Прим. перев.*

а также

$$a \wedge A = \frac{1}{2}[aA + (-1)^k Aa]. \qquad (5)$$

6. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть A – произвольный элемент векторного пространства $\mathscr{C}_n$. Обозначим через $\bar{A}$ число Клиффорда, полученное в результате изменения на противоположное направления каждого вектора, входящего в произведения, которые задают A. Можно записать A в виде суммы четного и нечетного[1] c-чисел:

$$A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}) + \frac{1}{2}(A - \bar{A}).$$

Тогда (4) и (5) можно заменить наиболее общими формулами

$$a \cdot A = \frac{1}{2}(aA - \bar{A}a), \qquad (6)$$

$$a \wedge A = \frac{1}{2}(aA + \bar{A}a). \qquad (7)$$

Заметим еще, что, основываясь на этой выкладке, можно записать $Aa = A \cdot a + A \wedge a$. Это в свою очередь приводит к таким соотношениям для A, имеющего четность $(-1)^p$:

$$A \cdot a = (-1)^{p-1} a \cdot A \text{ и } A \wedge a = (-1)^p a \wedge A.$$

Таким образом, для произвольного A получаются формулы

$$A \cdot a = -a \cdot \bar{A} \text{ и } A \wedge a = a \wedge \bar{A}.$$

Для достижения общности обозначений можно условиться, что (6) и (7) остаются в силе и для скаляров $A = A_S$; при этом полагаем, что $\bar{A}_S = A_S$.

7. РАЗЛОЖЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Дистрибутивность внутреннего произведения непосредственно вытекает из формулы (6). Запишем развернутое выражение внутреннего произведения вектора a на элемент $A = b_1 b_2 \ldots b_p$:

$$a \cdot b_1 b_2 \ldots b_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (a \cdot b_k) b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_{k+1} \ldots b_p. \qquad (8)$$

---

[1] По определению A четно, если $A = \bar{A}$, и нечетно, если $A = -\bar{A}$. Если $A = (-1)^p \bar{A}$, то A имеет четность $(-1)^p$.– *Прим. перев.*

Для доказательства (8) достаточно написать

$$\frac{1}{2}(ab_1b_2 \dots b_p + b_1ab_2 \dots b_p) = (a \cdot b_1)\, b_2 \dots b_p,$$

$$\frac{1}{2}(b_1ab_2 \dots b_p + b_1b_2ab_3 \dots b_p) = (a \cdot b_2)\, b_1b_3 \dots b_p,$$

. . . .

$$\frac{1}{2}(b_1 \dots b_{p-1}ab_p + b_1b_2 \dots b_pa) = (a \cdot b_p)\, b_1b_2 \dots b_{p-1}.$$

Умножив первое из этих равенств на $(-1)^2$, второе на $(-1)^3, \dots,$ а последнее на $(-1)^{p+1}$ и почленно сложив их, получим (8).

8. ВНЕШНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пространство $\mathscr{C}_n$ является прямой суммой векторных подпространств p-векторов (p изменяется от 0 до n). Составляющая произведения $a_1a_2 \dots a_p$, принадлежащая подпространству p-векторов, дает нам внешнее произведение векторов $a_i\,(i = 1, 2, \dots, p)$. Обозначим его

$$A_p = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p.$$

Можно заметить, что формула (5) определяет это внешнее произведение рекуррентным образом. Действительно, достаточно положить

$$A_{p+1} = a \wedge A_p = \frac{1}{2}\left[aA_p + (-1)^p A_p a\right].$$

Дистрибутивность и ассоциативность внешнего произведения выводятся из свойств умножения в алгебре Клиффорда.

9. АЛЬТЕРНИРОВАННОСТЬ

Внешнее произведение изменяет знак при перестановке двух сомножителей (свойство альтернированности).

Теорема верна при $p = 2$. Допустим, что она верна для всех внешних произведений A_p с p сомножителями. Полагаем $A_{p+1} = a \wedge A_p$. Если переставить два вектора, входящие в A_p, то A_{p+1} меняет знак. Если поменять местами a и a_1, то легко заметить, что

$$a \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_p = (a \wedge a_1) \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = \\ = -(a_1 \wedge a) \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p,$$

т. е. окончательно можно записать

$$a \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = -a_1 \wedge a \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p.$$

Повторяя это рассуждение, можно переставить a на любое место.

Следствие

1°. *Если p векторов $a_1, a_2, \ldots, a_p$ линейно зависимы, их внешнее произведение A_p равно нулю.*

В самом деле, так как один из векторов является линейной комбинацией остальных, A_p представляет собой сумму внешних произведений, каждое из которых содержит два одинаковых вектора и потому равно нулю.

2°. В частности, $A_p = 0$, если $p \geqslant n$.

3°. Наоборот, *из условия $A_p = 0$ вытекает, что сомножители a_i линейно зависимы.*

Это утверждение верно для $p = 2$. Предположим, что оно справедливо для всех внешних произведений A_{p-1}. Тогда, если векторы, образующие произведение A_{p-1}, линейно зависимы, то линейно зависим и набор векторов, из которого получается $A_p = A_{p-1} \wedge a_p$, и в этом случае доказательство закончено. Наконец, когда векторы a_i, образующие A_{p-1}, линейно независимы, можно разложить a_p по базису, составленному из этих векторов a_i и из базиса дополнительного подпространства S, состоящего из векторов, сопряженных с a_i, так что

$$a_p = a + b,$$

где a принадлежит подпространству, натянутому на a_i с $i = 1, 2, \ldots, p-1$, и $b \in S$.

Поскольку $A_p = A_{p-1} \wedge a_p = A_{p-1} \wedge b = 0$, то из последнего условия с учетом соотношений (4) и (5) и того, что $A_{p-1} \cdot b = 0$, выводим равенство $A_{p-1} b = 0$, т. е. $b = 0$, так как сейчас $A_{p-1} \neq 0$. Следовательно, векторы a_i, входящие в A_p, линейно зависимы, что и утверждается [1].

4°. В тех случаях, когда $A_p \neq 0$, это произведение по определению представляет собой объем параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_p$, входящих в A_p. У этого объема будет, следовательно, C_n^p компонент. При $p = n$ объем имеет только одну составляющую, и в приложениях, рассматриваемых в следующих главах, она будет совпадать с элементом i.

[1] См. примечание на стр. 15.

5°. Для векторов γ_i канонического базиса равенство

$$\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_p = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_p$$

вытекает прямо из определений.

10. ВНЕШНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МУЛЬТИВЕКТОРОВ

Для двух мультивекторов $A_p = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ и $B_q = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_q$ внешнее произведение можно ввести с помощью рекуррентной процедуры, полагая

$$A_p \wedge B_q = a_1 \wedge (a_2 \wedge \ldots \wedge a_p \wedge B_q).$$

Возможно также эквивалентное прямое определение $A_p \wedge B_q$ как составляющей произведения $a_1 a_2 \ldots a_p b_1 b_2 \ldots b_q$, принадлежащей подпространству $(p+q)$-векторов.

Свойство введенной операции, выражающееся равенством

$$A_p \wedge B_q = (-1)^{pq} B_q \wedge A_p, \qquad (9)$$

очевидно. Для проверки достаточно q раз воспользоваться соотношением

$$a \wedge A_p = (-1)^p A_p \wedge a,$$

которое непосредственно вытекает из альтернированности.

11. БАЗИС

Теперь легко доказать, что γ_P *образуют базис векторного пространства* $\mathscr{C}_n$. В самом деле, допустим, что

$$\sum_P \lambda_P \gamma_P = 0,$$

где коэффициенты λ_P — действительные числа. Умножив это равенство, например, справа на $i = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$, придем к равенству $\lambda_0 i = 0$, из которого вытекает, что $\lambda_0 = 0$. Аналогично показываем, что и остальные коэффициенты нулевые.

12. ВНУТРЕННИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МУЛЬТИВЕКТОРОВ

1°. Рассмотрим выражение (8) и приравняем друг другу $(p-1)$-векторы, фигурирующие в обеих частях равенства. Мы немедленно получаем соотношение, показывающее, что (8) справедливо и для мультивекторов:

$$\begin{aligned} a \cdot A_p &= a \cdot a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = \\ &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \ldots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \ldots \wedge a_p. \end{aligned} \tag{10}$$

2°. В таком случае внутреннее произведение двух мультивекторов A_p и B_q можно определить рекуррентной формулой. Если $p \leqslant q$, полагаем

$$A_p \cdot B_q = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{p-1}) \cdot (a_p \cdot B_q). \tag{11}$$

Таким образом, это внутреннее произведение оказывается $(q-p)$-вектором, и оно дистрибутивно по отношению ко вторым сомножителям B_q. Сохраним свойство дистрибутивности и относительно A_p, полагая по определению

$$(A_p + A'_{p'}) \cdot B_q = A_p \cdot B_q + A'_{p'} \cdot B_q.$$

Наконец, при $p \geqslant q$ зададим $A_p \cdot B_q$ формулой

$$A_p \cdot B_q = (-1)^{(p-1)q} B_q \cdot A_p. \tag{12}$$

Данное определение кажется довольно произвольным, но в его пользу говорит следующее замечание. При $p \geqslant q$ можно определить $A_p \cdot B_q$ посредством рекуррентного соотношения

$$A_p \cdot B_q = (A_p \cdot b_1) \cdot B_{q-1},$$

которое выглядит как естественное обобщение (11). Тогда нетрудно увидеть, что (12) является следствием последней формулы и свойства: $A \cdot a = -a \cdot \bar{A}$.

Для того чтобы оправдать данные определения, необходимо все-таки доказать, что при всех p

$$A_p \cdot B_p = B_p \cdot A_p.$$

Это нетрудно сделать, принимая во внимание свойство дистрибутивности, потому что достаточно проверить равенство

$$\gamma_P \cdot \gamma_{P'} = \gamma_{P'} \cdot \gamma_P.$$

Однако $\gamma_P \cdot \gamma_{P'}$ равняется нулю, если γ_P и $\gamma_{P'}$ содержат неодинаковые γ_i, поэтому остается рассмотреть только случай, когда $\gamma_{P'} = (-1)^r \gamma_P$ при соответствующем целом r. Но тогда $\gamma_P \cdot \gamma_{P'} = (-1)^r \gamma_P^2 = \gamma_{P'} \cdot \gamma_P$, и тем самым коммутативность произведения доказана.

13. ДУАЛЬНОСТЬ

Будем называть *дуальным* числу Клиффорда A произведение iA. Таким образом, дуальным скаляру будет псевдоскаляр, дуальным вектору $(n-1)$-вектор и дуальным p-вектору $(n-p)$-вектор. Можно проверить, что для любых векторов a и b имеют место два полезных соотношения:

$$i(a \cdot b) = (ib) \wedge a,$$

$$(ib) \cdot a = i(b \wedge a).$$

14. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathscr{C}_n$

Это пространство можно разложить в прямую сумму двух дополнительных друг к другу векторных подпространств $\mathscr{C}_n^+$ и $\mathscr{C}_n^-$, которые определяются как множества чисел Клиффорда вида

$$\mathscr{C}_n^+ = \left\{\frac{A+\bar{A}}{2},\ A \in \mathscr{C}_n\right\}, \quad \mathscr{C}_n^- = \left\{\frac{A-\bar{A}}{2},\ A \in \mathscr{C}_n\right\}.$$

Элементами $\mathscr{C}_n^+$ являются четные числа Клиффорда, и так как суммы и произведения четных чисел вновь четны, то структура кольца наследуется, т. е. $\mathscr{C}_n^+$ является подалгеброй $\mathscr{C}_n$.

Алгебра Клиффорда $\mathscr{C}_4$ называется алгеброй Дирака, если соответствующая квадратичная форма в E_4 является формой специальной теории относительности. Элементы $\mathscr{C}_4^+$ образуют алгебру Паули, которая изоморфна алгебре $\mathscr{C}_3$. Из элементов $\mathscr{C}_3^+$ состоит алгебра кватернионов, имеющая подалгебру, изоморфную алгебре комплексных чисел, а последняя имеет подалгебру, изоморфную множеству действительных чисел.

Глава III

АЛГЕБРА ПРОСТРАНСТВА

В этой главе речь пойдет о трехмерном пространстве евклидовой геометрии. Рассмотрим матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где i' – обычная мнимая единица. Эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\,\delta_{jk}I_2,$$

где j, $k = 1,\ 2,\ 3$, $\delta_{jk} = 0$ при $k \neq j$ и $\delta_{jj} = 1$, а I_2 – единичная 2×2-матрица.

Все эти матрицы принадлежат векторному пространству $\mathscr{C}_3$ комплексных 2×2-матриц, и нетрудно проверить, что базис этого пространства образуют матрицы

$$I_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Обозначим $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$; тогда легко видеть, что $i = i'I_2$, так что $i^2 = -I_2$. В дальнейшем мы будем вместо матрицы $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ писать i, а вместо I_2 писать 1, не опасаясь спутать в равенстве $i^2 = -1$ матрицу i с обычной мнимой единицей. Подчеркнем, что впредь σ_1, σ_2, σ_3 будут играть роль векторов обычного евклидова пространства E_3, образующих ортонормированный базис, и при таком соответствии элемент из $\mathscr{C}_3$

$$x = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$$

можно отождествить с вектором x из E_3, имеющим координаты x_1, x_2, x_3 относительно ортонормированного базиса.

Что касается произведений векторов из E_3, то все они принадлежат пространству $\mathscr{C}_3$, каждый элемент которого представи́м в виде суммы следующих слагаемых:

1° скаляра $\lambda_0 = \lambda_0 1 = A_S$;

2° вектора $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3 = A_V$;

3° бивектора $\lambda_4\sigma_1\sigma_2 + \lambda_5\sigma_2\sigma_3 + \lambda_6\sigma_3\sigma_1 = A_B$;

4° псевдоскаляра $\lambda_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \lambda_7 i = A_{\mathscr{P}}$.

Таким образом, если $A \in \mathscr{C}_3$, то

$$A = A_S + A_V + A_B + A_{\mathscr{P}}.$$

Рассмотрим теперь три операции над элементами этой алгебры Клиффорда (две из них упоминались в гл. II).

1°. *Изменение направления* всех векторов на противоположное, в результате чего A преобразуется в

$$\bar{A} = A_S - A_V + A_B - A_{\mathscr{P}}.$$

Элемент A называется четным, если $A = \bar{A}$, и нечетным, если $\bar{A} = -A$.

2°. *Обращение порядка* сомножителей в каждом произведении, которое превращает A в элемент $\tilde{A}$ (читается: A с тильдой):

$$\tilde{A} = A_S + A_V - A_B - A_{\mathscr{P}},$$

потому что

$$\tilde{i} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -i.$$

3°. *Умножение на i,* которое преобразует A в дуальное число Клиффорда $iA = Ai$. В нашем случае i коммутирует со всеми векторами, например

$$i\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1 i.$$

Таким образом, дуальной скаляру величиной оказывается псевдоскаляр и наоборот, в то время как вектор дуален псевдовектору, а псевдовектор – вектору, поскольку на основании соотношений

$$i\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3, \quad i\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1, \quad i\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 \tag{14}$$

имеем

$$i(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3) = \lambda_1\sigma_2\sigma_3 + \lambda_2\sigma_3\sigma_1 + \lambda_3\sigma_1\sigma_2.$$

1. ОБЫЧНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Существует простая связь между обычным векторным исчислением и операциями с векторами, рассматриваемыми как элементы алгебры $\mathscr{C}_3$. В самом деле, образуем произведение $x \wedge y$, где

$$x = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3,$$

$$y = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + y_3\sigma_3.$$

Тогда находим

$$x \wedge y = i\left[(x_2y_3 - x_3y_2)\sigma_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\sigma_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\sigma_3\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках,– это обычное векторное произведение векторов x и y, которое, следовательно, отличается от бивектора $x \wedge y$ и должно обозначаться по-другому. Мы будем записывать его $x \times y$ и пользоваться термином cross-произведение (cross product). Соотношения

$$x \wedge y = i(x \times y), \tag{15}$$

$$x \times y = -i(x \wedge y) \tag{16}$$

показывают; что $x \times y$ – величина, дуальная бивектору,– изменяет свое направление при обращении базисных векторов, т. е. при смене ориентации базиса в E_3, проявляющейся в изменении знака i. В то же время $x \wedge y$, будучи тензором, остается инвариантным при таком преобразовании, поскольку оно не нарушает справедливости (15) и (16). Этим оправдывается название *аксиальный вектор*, которое часто дается cross-произведению в противоположность обычным или полярным векторам, не изменяющимся при изменении ориентации базиса.

2. ДВОЙНОЕ CROSS-ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Разлагая x и y по базису σ_1, σ_2, σ_3, легко проверить справедливость следующих формул:

$$x \times y = iy \cdot x = -y \times x = -ix \cdot y = -x \cdot iy. \tag{17}$$

Отсюда

$$(x \times y) \times z = [-i(x \times y)] \cdot z,$$

и, объединяя этот результат с формулой (14), получим хорошо известную формулу

$$(x \times y) \times z = -(x \wedge y) \cdot z =$$

$$= z \cdot (x \wedge y) = (z \cdot x) y - (z \cdot y) x.$$

3. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Вычислим $x \cdot (y \times z)$, используя формулу (6):

$$2x \cdot (y \times z) = x(y \times z) + (y \times z)x,$$

потому что $y \times z$ является нечетным элементом $\mathscr{C}_3$.

Но, так как i коммутирует со всяким вектором, имеем

$$2x \cdot (y \times z) = -ix(y \wedge z) - i(y \wedge z)x =$$

$$= -i[x(y \wedge z) + (y \wedge z)x] = -2i(x \wedge y \wedge z)$$

и в результате находим смешанное произведение векторов x, y и z:

$$(x, y, z) = x \cdot (y \times z) = -i(x \wedge y \wedge z).$$

Поскольку для векторов канонического базиса $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$, из найденного выражения вновь получаем, что $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$.

4. ГРАДИЕНТ

Употребляя ∂ в качестве символа операции дифференцирования, будем всегда полагать $\partial_k = \partial/\partial x^k$. Далее x^k используется для обозначения контравариантных координат вектора x, т. е. обычных декартовых координат, в отличие от координат ковариантных, обозначаемых x_k, которые для произвольной системы координат вводятся как скалярные произведения x на единичные векторы осей. В случае когда базисные векторы ортонормированы, как у нас, обе системы координат совпадают, так что $x^k = x_k$ для любых $k = 1, 2, 3$. При этом градиент вводим как векторный оператор

$$\nabla = \sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3. \tag{18}$$

Результат его применения к всюду дифференцируемой вектор-функции координат $u = u(x^1, x^2, x^3) = u^1 \sigma_1 + u^2 \sigma_2 + u^3 \sigma_3$ можно представить в виде

$$\nabla u = \nabla \cdot u + \nabla \wedge u.$$

Скалярная функция $\nabla \cdot u$ называется дивергенцией u. Бивектор $\nabla \wedge u$ назовем ротором u. Связь его с обычным ротором векторного поля $u(x^1, x^2, x^3)$ дается правилами (15) и (16):

$$\nabla \wedge u = i(\nabla \times u) \text{ или } \nabla \times u = -i(\nabla \wedge u).$$

Таким образом получается обобщение обычного понятия ротора, применимое не только в трехмерном пространстве.

5. КВАТЕРНИОНЫ

Будем называть кватернионами те $A \in \mathscr{C}_3$, для которых $A = \bar{A} = A_S + A_B$. В таком случае, обозначая скаляр $A_S = s1 = s$, можно представить A в виде

$$A = s + ia\alpha,$$

где a – вектор, квадрат которого равен 1, а α – действительное число.

Мы намереваемся изучить математические структуры, которые связаны с множеством кватернионов.

Прежде всего отметим, что это множество обладает структурой четырехмерного действительного *векторного пространства* и является подпространством $\mathscr{C}_3$. Принадлежащие ему элементы 1, $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$ образуют линейно независимую систему, по которой разлагается любой кватернион. Действительно, равенство

$$s1 + if\sigma_1 + ig\sigma_2 + ih\sigma_3 = 0,$$

с одной стороны, требует, чтобы $s = 0$, а с другой стороны, должно быть $f\sigma_1 + g\sigma_2 + h\sigma_3 = 0$, т. е. в результате $s = 0$, $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$.

Это векторное подпространство $\mathscr{C}_3$ будем обозначать Q_4. Пространство кватернионов Q_4 можно *нормировать*, полагая, например,

$$\text{норма } A = (s^2 + \alpha^2)^{1/2}.$$

Напомним, что введение нормы в векторном пространстве E над полем K (в данном случае это будет поле действительных чисел $\mathbb{R}$) означает задание на E функции, сопоставляющей каждому элементу x неотрицательное число $\|x\|$, таким образом, что

1° $\|x\| = 0$ равносильно условию $x = 0$;
2° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех x, $y \in E$;
3° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ для всех $\lambda \in K$ и всех $x \in E$.

Говорят, что E, снабженное нормой, является *нормированным векторным пространством,* или, короче, *нормированным пространством;* размерность E может быть при этом конечной или бесконечной.

Легко проверить, что $(s^2 + \alpha^2)^{1/2}$ является нормой $A \in Q_4$, но это не единственная норма, возможная в пространстве Q_4. В самом деле, нетрудно убедиться, что можно ввести и другую норму $\nu(A)$ для A, полагая

$$\nu(A) = |s| + |\alpha|;$$

здесь, как и в других местах книги, $|\lambda|$ обозначает абсолютную величину действительного числа λ. Однако эти две нормы *эквивалентны,* иначе говоря, они определяют *одну и ту же топологию* в Q_4. Уточним оба эти момента.

Две нормы ν и ν' называются *эквивалентными*, если существуют два таких положительных числа a и b, что

$$a\nu(x) \leqslant \nu'(x) \leqslant b\nu(x) \text{ для любого } x \in E.$$

Непосредственно усматривается, что всякая норма эквивалентна самой себе ($a = b = 1$). Если ν' эквивалентна ν, то и ν эквивалентна ν', потому что

$$\frac{1}{b}\nu'(x) \leqslant \nu(x) \leqslant \frac{1}{a}\nu'(x).$$

Кроме того, из эквивалентности норм ν и ν' и норм ν' и ν'' вытекает эквивалентность ν и ν''. Действительно, тогда существуют такие положительные числа c и d, что

$$c\nu'(x) \leqslant \nu''(x) \leqslant d\nu'(x),$$

и, следовательно,

$$\nu(x) \leqslant \frac{1}{a}\nu'(x) \leqslant \frac{1}{ac}\nu''(x),$$

в то время как

$$\frac{1}{bd}\nu''(x) \leqslant \frac{1}{b}\nu'(x) \leqslant \nu(x).$$

Таким образом, это понятие действительно определяет отношение эквивалентности на множестве норм.

Остается рассмотреть вопрос о топологиях, индуцированных нормами. Вот точная формулировка важного результата, который может быть при этом получен:

Всякая последовательность Коши, которая сходится по норме ν, *сходится также и по эквивалентной норме* ν'.

Принимая во внимание, что пространство действительных чисел *полно*, так как в нем сходится всякая последовательность Коши, заключаем, что Q_4 также является полным нормированным векторным пространством, т. е. пространством Банаха.

Одну из эквивалентных норм в пространстве Q_4 можно связать со *скалярным произведением* в этом пространстве. В самом деле, отметим, что

$$\| A \| = (s^2 + \alpha^2)^{1/2} = (A\tilde{A})^{1/2},$$

так как $\tilde{A} = s - i a\alpha$ и, следовательно, $A\tilde{A} = s^2 + \alpha^2$.

Определим скалярное произведение $\langle q, q' \rangle$ двух кватернионов, обозначаемых теперь буквами q и q':

$$\langle q, q' \rangle = \frac{1}{2}(q\tilde{q}' + q'\tilde{q}).$$

Векторное пространство Q_4 является евклидовым, поскольку введенное скалярное произведение обладает всеми свойствами евклидова скалярного произведения и норма $(s^2 + \alpha^2)^{1/2}$ евклидова.

Наконец, обсудим еще одно важное обстоятельство: кватернионы, открытые Гамильтоном, дают нам пример *некоммутативного тела.* Для доказательства этого утверждения необходимо лишь показать, что операция умножения превращает Q_4 в некоммутативную группу, так как структура аддитивной группы заложена в структуре векторного пространства, а свойства дистрибутивности, как уже отмечалось, вытекают из структуры алгебры Клиффорда, являющейся ассоциативным кольцом с единицей.

Если q — ненулевой кватернион $s + ia\alpha$, то для него существует обратный элемент

$$q^{-1} = \frac{s - ia\alpha}{\|q\|^2},$$

потому что

$$q^{-1}q = \frac{q\tilde{q}}{\|q\|^2} = qq^{-1} = 1.$$

Однако тело Q_4 некоммутативно, так как для двух кватернионов, записанных в виде

$$q = s + ia\alpha, \quad q' = s' + ia'\alpha',$$

где s, α, s', α' — действительные числа и a, a' — векторы единичной длины, произведение

$$qq' = (s + ia\alpha)(s' + ia'\alpha') = ss' + ia\alpha s' + ia'\alpha' s - aa'\alpha\alpha'$$

в общем случае отличается от $q'q$, ибо из равенства $qq' = q'q$ вытекает условие $aa' = a'a$, равносильное требованию $a \wedge a' = 0$, т. е. требованию коллинеарности векторов a и a'.

Вскоре мы увидим, что кватернионы очень просто связаны с вращениями вокруг начала координат в трехмерном евклидовом пространстве: они явно задают ось вращения и угол поворота, причем направление оси совпадает с направлением вектора a. Произведению двух вращений соответствует кватернион, полученный перемножением двух соответствующих кватернионов, так что два вращения коммутируют только в том случае, когда коммутируют соответствующие кватернионы, и, согласно предыдущим рассуждениям, это означает, что совпадают оси таких вращений. Для того чтобы установить эти результаты, мы будем действовать с экспонентами вида $\exp(ia\theta)$, которые можно ввести в виде ряда

$$\exp(ia\theta) = 1 + ia\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \ldots.$$

Отсюда

$$\exp(ia\theta) = \cos\theta + ia\sin\theta,$$

так что

$$\|\exp(ia\theta)\| = 1,$$

и мы будем называть такие экспоненты унитарными кватернионами. Мы покажем, что между этими унитарными кватернионами и пространственными вращениями существует столь же тесная связь, как между комплексными числами с модулем 1 и вращениями плоскости.

6. ВРАЩЕНИЯ

Пусть векторы x и x' связаны соотношением

$$x' = \exp\left(-\frac{1}{2} ia\theta\right) x \exp\left(\frac{1}{2} ia\theta\right).$$

Полагая $x = u + v$, разложим x так, что

$$u \wedge a = 0, \quad v \cdot a = 0,$$

и аналогичным образом разложим x', представив его в виде $x' = u' + v'$, где

$$u' \wedge a = 0, \quad v' \cdot a = 0.$$

Поскольку u коммутирует с a и i, имеем тогда

$$u' = u = (a \cdot x) a,$$

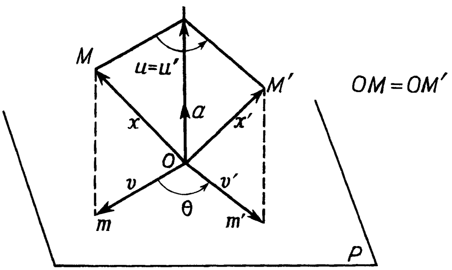


Рис. 1.

а так как v антикоммутирует с a, то

$$v' = \exp(-ia\theta) v,$$

откуда, как в предыдущем разделе, находим

$$v' = v\cos\theta - iav\sin\theta = v\cos\theta + (a \times v)\sin\theta.$$

Полученная связь между векторами v и v' выражает тот факт, что v' получается поворотом v на угол θ вокруг вектора a (рис. 1). Принимая во внимание, что $u = u'$, этот результат можно переписать так:

$$x' = x\cos\theta + (1 - \cos\theta)(x \cdot a)\,a + (a \times x)\sin\theta. \tag{19}$$

Тем самым мы располагаем удобным способом вычисления компонент вектора x', полученного из вектора x при вращении (a, θ), и можем выписать также общий вид матрицы вращения.

В самом деле, пусть (X, Y, Z) – это компоненты вектора x, а (X', Y', Z') – компоненты x' относительно ортонормированного базиса трехмерного евклидова пространства, и пусть (α, β, γ) – компоненты единичного вектора, задающего ось вращения, так что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Равенство (19) позволяет записать уравнения преобразования:

$$X' = X\cos\theta + \alpha(1 - \cos\theta)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (\beta Z - \gamma Y)\sin\theta,$$

$$Y' = Y\cos\theta + \beta(1 - \cos\theta)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (\gamma X - \alpha Z)\sin\theta,$$

$$Z' = Z\cos\theta + \gamma(1 - \cos\theta)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (\alpha Y - \beta X)\sin\theta.$$

Выписать общий вид матрицы вращения теперь не представляет никакого труда.

7. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВРАЩЕНИЙ

Отыскание произведения двух вращений вокруг несовпадающих осей сводится к отысканию произведения соответствующих унитарных кватернионов:

$$\exp\left(\frac{1}{2}ib\varphi\right)\exp\left(\frac{1}{2}ia\theta\right).$$

Сначала производится вращение (a, θ), затем вращение (b, φ), и, как мы видели, эти вращения коммутируют только в том случае, когда a и b коллинеарны. Для того чтобы получить ось $c\,(c^2 = 1)$ и угол ω результирующего вращения, достаточно соответствующий кватернион $\exp\left(\frac{1}{2}ic\omega\right)$ приравнять кватерниону

$$\exp\left(\frac{1}{2}ib\varphi\right)\exp\left(\frac{1}{2}ia\theta\right).$$

Таким образом, получаются два уравнения для определения параметров (c, ω):

$$\cos\frac{1}{2}\omega = \cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\theta - (a\cdot b)\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\theta,$$

$$c\sin\frac{1}{2}\omega = b\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\theta + a\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\theta + \\ + (a\times b)\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Из всех математических методов, позволяющих определить ось и угол для произведения трехмерных вращений, самый элегантный способ решения задачи дается методом умножения кватернионов.

8. СИММЕТРИИ

Пусть u — единичный вектор нормали к плоскости P, которая проходит через начало координат O. Для точек M и M' обозначим

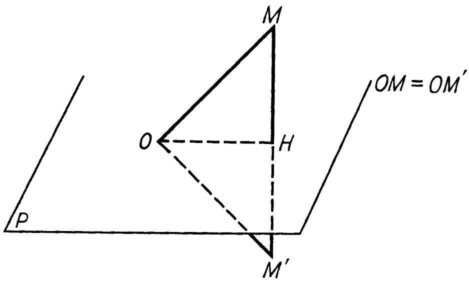


Рис. 2.

жирным шрифтом векторы

$$\mathbf{OM} = x, \quad \mathbf{OM'} = x',$$

а OM и OM' будут обозначать длины x и x'.

Предположим теперь, что x и x' связаны условием

$$x' = -uxu. \tag{20}$$

Разложив правую часть:

$$uxu = u(x \cdot u) + u(x \wedge u) = u(x \cdot u) + u \cdot (x \wedge u) + u \wedge x \wedge u,$$

находим, что

$$x' = -2u(x \cdot u) + x$$

или

$$x' - x = -2u(x \cdot u).$$

Последнее соотношение показывает, что вектор $x' - x$ перпендикулярен P. Докажем, что точка M' симметрична точке M относительно плоскости P; для этого достаточно проверить, что точка H – середина отрезка MM' – принадлежит P.

Но ведь $\mathbf{OH} = \frac{1}{2}(x + x')$, поэтому скалярное произведение

$$u \cdot \mathbf{OH} = u[x - u(x \cdot u)] + [x - u(x \cdot u)]u = ux + xu - 2(x \cdot u),$$

очевидно, равняется нулю.

Установив это, можно сразу же получить выражение для произведения двух симметрий. Если v – единичный вектор нормали ко второй плоскости, проходящей через O, а S – образ точки M' при зеркальном отражении относительно этой плоскости, то, обозначив $\mathbf{OS} = \xi$, запишем связь между ξ и x:

$$\xi = -vx'v = +vuxuv.$$

Пусть угол между векторами u и v равен α, а n – единичный вектор, направленный одинаково с $u \times v$. Тогда можно написать

$$uv = u \cdot v + u \wedge v = u \cdot v + i(u \times v),$$

т. е.

$$uv = \cos\alpha + in\sin\alpha.$$

Это выражение показывает, что uv – унитарный кватернион и вектор $\mathbf{OS}$ получается из $\mathbf{OM}$ поворотом на угол 2α вокруг n.

Этот результат, основанный на том, что произведение двух унитарных кватернионов является унитарным кватернионом, подсказывает нам такое замечание о свойствах нормы в Q_4: *норма произведения кватернионов равна произведению их норм.*

Действительно, рассмотрим кватернионы $A = s + ia\alpha$ и $A' = s' + ia'\alpha'$. Можно выбрать θ, $\varphi \in [0, 2\pi)$ так, чтобы

$$\cos\theta = \frac{s}{\|A\|}, \quad \sin\theta = \frac{\alpha}{\|A\|},$$

$$\cos\varphi = \frac{s'}{\|A'\|}, \quad \sin\varphi = \frac{\alpha'}{\|A'\|}$$

и, следовательно,

$$A = \|A\| \exp(ia\theta), \quad A' = \|A'\| \exp(ia'\varphi).$$

Таким образом,

$$AA' = \|A\| \, \|A'\| \exp(ia\theta) \exp(ia'\varphi)$$

и, значит,

$$\|AA'\| = \|A\| \, \|A'\|,$$

поскольку произведение двух экспонент в правой части является унитарным кватернионом.

9. ИНВЕРСИЯ

Точки M и m связаны преобразованием инверсии, имеющей центр O и показатель (или степень) k, тогда и только тогда, когда

$$Xx = k, \tag{21}$$

где $X = \mathbf{OM}$, $x = \mathbf{Om}$, а k – действительное число. Условие (21) можно переписать в виде $X = kxx^{-2}$, позволяющем заключить, что векторы **Om** и **OM** коллинеарны, а при положительном k и одинаково направлены.

Предположим, что x – дифференцируемая вектор-функция действительной переменной t, так что функция $x(t)$, описывающая дугу пространственной кривой в окрестности точки m, имеет в точке m касательную. Пусть (c) обозначает эту дугу; применив к каждой ее точке наше преобразование инверсии, получим дугу (C) кривой, проходящей через точку M. Продифференцировав (21), приходим к соотношению

$$X'(t)\,x(t) + X(t)\,x'(t) = 0,$$

которое после умножения слева на x переписывается в виде

$$kx'(t) = -x(t)X'(t)x(t).$$

Рассматривая его вместе с (20), убеждаемся, что касательная к (C) в точке M и касательная к (c) в точке m симметричны относительно плоскости, перпендикулярной вектору **mM** и делящей отрезок mM пополам.

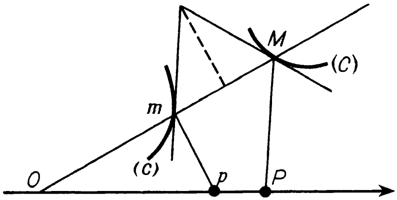


Рис. 3.

Приведем еще одно общее свойство преобразования инверсии. Пусть p и P — вторая пара точек, связанных инверсией (O, k). Полагая $\mathbf{Op} = y$, $\mathbf{OP} = Y$, выводим соотношение

$$(X - Y)^2 = k^2(xx^{-2} - yy^{-2})^2 = k^2(xy^2 - x^2y)^2x^{-4}y^{-4} =$$
$$= k^2x^{-2}(y - x)^2y^{-2}$$

и в результате приходим к хорошо известной формуле, связывающей расстояние между точками и расстояние между их образами при инверсии:

$$MP = |k|\, mp(Om)^{-1}(Op)^{-1}.$$

Преобразование плоскости при инверсии. Запишем уравнение плоскости Q, имеющей вектор нормали u и проходящей через точку m_0 с радиус-вектором $\mathbf{Om}_0 = x_0$:

$$u(x - x_0) + (x - x_0)u = 0.$$

Если обозначить

$$ux_0 + x_0u = 2p,$$

то это уравнение будет выглядеть так:

$$ux + xu - 2p = 0.$$

При преобразовании инверсии (21) образы точек этой плоскости удовлетворяют уравнению

$$k(uX + Xu) - 2pX^2 = 0.$$

Если $p = 0$, то в результате преобразования получается та же плоскость Q.

Если $p \neq 0$, уравнение образа плоскости записывается в виде

$$X^2 - \frac{k}{2p}(Xu + uX) = 0.$$

Поскольку $X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, где X_1, X_2, X_3 – координаты точки M, для которой $\mathbf{OM} = X$, то ясно, что получено уравнение сферы, проходящей через начало координат O. Центр этой сферы находится в точке C с радиус-вектором $ku/2p$; эта точка получается при преобразовании инверсии из точки O' с радиус-вектором $U = 2pu$, которая симметрична точке O относительно плоскости Q.

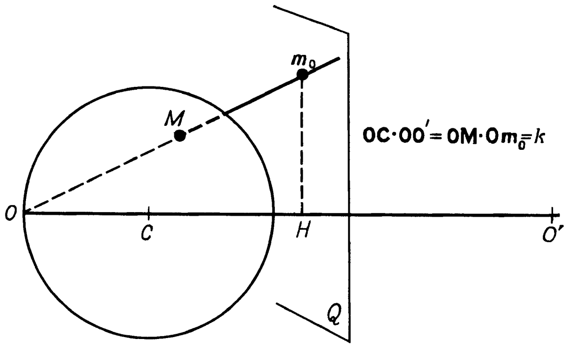


Рис. 4.

Аналогичным образом можно рассмотреть и преобразование сферы при инверсии, а также исследовать свойства произведения инверсий.

10. ВЕКТОРЫ И КВАТЕРНИОНЫ

Применение обычного векторного исчисления в свое время вызвало горячую оппозицию со стороны ортодоксальных «кватернионистов». На самом же деле эти две концепции не противоположны, а дополняют друг друга, объединяясь в структуре алгебры Клиффорда. Обычное векторное исчисление очень полезно в геометрии, механике, гидродинамике и электродинамике, особенно благодаря широкому использованию векторного анализа. В то же время этот метод не является достаточно общим, и, в частности, при изучении пространства-времени специальной теории относительности, а также в теории Дирака и в теории частиц не стоит отказываться от кватернионов.

Глава IV

АЛГЕБРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Эта действительная алгебра конструируется с помощью четырехмерного векторного пространства, обладающего базисом γ_0, γ_k ($k = 1, 2, 3$), в котором временной вектор γ_0 имеет квадрат, равный 1, а три пространственных вектора γ_k имеют квадрат, равный -1. Векторы эти ортогональны друг другу, т. е. удовлетворяют условию

$$\gamma_u\gamma_v + \gamma_v\gamma_u = 0 \quad (u, v = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ и } u \neq v).$$

Прежде всего покажем, что такие четверки векторов существуют, воспользовавшись для этого реализацией векторного пространства как пространства матриц. Рассматривая матричное представление

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $I = I_2$ – единичная 2×2-матрица, а σ_k – матрицы Паули, введенные в предыдущей главе, легко проверить, что упомянутые выше условия для γ_0, γ_k выполняются. Произведения линейных комбинаций таких матриц γ обладают всеми свойствами клиффордовой структуры, перечисленными в первой главе. Что касается размерности соответствующего векторного пространства $\mathscr{C}_4$, то можно отметить, что

I_4, γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, $\gamma_1\gamma_0$, $\gamma_2\gamma_0$, $\gamma_3\gamma_0$, $\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$,

$\gamma_0\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_0\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_0\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$,

$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

образуют базис пространства размерности 16 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Поскольку при вычислении всевозможных произведений в этой алгебре можно систематически пользоваться соотношениями ортогональности для γ, нетрудно показать, что в разложении нулевого элемента $\mathscr{C}_4$ по выписанной системе мультивекторов могут встретиться лишь нулевые коэффициенты. Например, для отыскания коэффициента при I_4 достаточно умножить обе части разложения на γ_5; затем, умножая на $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$, проверим, что коэффициент при γ_0 тоже равен нулю, и т. д.

Убедившись, что

$$\gamma_5^2 = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^2 = -1,$$

мы в дальнейшем заменим γ_5 на i, а единицу I_4 на 1; такая запись не должна вызвать недоразумений, поскольку $\mathscr{C}_4$ является алгеброй над полем действительных чисел, но все-таки важно отметить, что, вычисляя γ_5 с помощью представления (22), мы не получим в результате $i'I_4$. Следовательно, в данном случае замена γ_5 на i является всего лишь удобным обозначением.

Итак, элемент A, принадлежащий пространству $\mathscr{C}_4$, можно представить в виде

$$A = A_S + A_V + A_B + A_T + A_{\mathscr{P}},$$

т. е. A является суммой

скаляра $A_S = \lambda$,

вектора $A_V = \lambda_0\gamma_0 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3$,

бивектора $A_B = \lambda_{10}\gamma_1\gamma_0 + \lambda_{20}\gamma_2\gamma_0 + \lambda_{30}\gamma_3\gamma_0 + \lambda_{12}\gamma_1\gamma_2 + {}$
$+ \lambda_{23}\gamma_2\gamma_3 + \lambda_{31}\gamma_3\gamma_1$,

тривектора $A_T = \lambda_{012}\gamma_0\gamma_1\gamma_2 + \lambda_{013}\gamma_0\gamma_1\gamma_3 + \lambda_{023}\gamma_0\gamma_2\gamma_3 + {}$
$+ \lambda_{123}\gamma_1\gamma_2\gamma_3$,

псевдоскаляра $A_{\mathscr{P}} = \lambda_5\gamma_5 = \lambda_5 i$;

здесь все коэффициенты λ – действительные числа. Далее $A \in \mathscr{C}_4$ будем называть d-числом.

Следует еще упомянуть квадратичную форму, ассоциированную с этой алгеброй. Если

$$x = x^0\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3 = x^\mu\gamma_\mu \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

то $(x)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Положив $x^0 = x_0 = ct$, где t обозначает время, а c – скорость света, и считая x^k координатами в пространстве, получим квадратичную форму специальной теории относительности:

$$c^2t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Теперь введем три важные операции:

1°. *Изменение знака,* т. е. направления каждого вектора, преобразующее A в

$$\bar{A} = A_S - A_V + A_B - A_T + A_{\mathcal{P}}.$$

Если $A = \bar{A}$, то A – четное d-число, а если $\bar{A} = -A$, то нечетное.

2°. *Изменение порядка сомножителей на обратный* во всех произведениях, которое переводит A в

$$\tilde{A} = A_S + A_V - A_B - A_T + A_{\mathcal{P}};$$

так, например,

$$\tilde{i} = \tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_3 = \gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i.$$

3°. *Умножение слева на* i, в результате чего A преобразуется в дуальное d-число iA. Вообще говоря, $iA \neq Ai$, так как i антикоммутирует со всеми векторами. Например,

$$i\gamma_0 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0 i.$$

Следовательно, если $A = \bar{A}$, то i коммутирует с A, но если $A = -\bar{A}$, то i антикоммутирует с A.

Скаляры и псевдоскаляры, векторы и тривекторы дуальны друг другу, а бивекторы дуальны самим себе.

1. ПРИСОЕДИНЕННАЯ АЛГЕБРА ПРОСТРАНСТВА

Каждому временно́му вектору γ_0 сопоставим пространственные векторы σ_k, полагая $\sigma_k = \gamma_k\gamma_0$; при этом квадраты $\sigma_k^2 = \gamma_k\gamma_0\gamma_k\gamma_0 = 1$. По своим алгебраическим свойствам эти σ_k аналогичны рассмотренным ранее векторам, порождающим алгебру пространства $\mathscr{C}_3$, так что элементы $\mathscr{C}_3$ можно считать четными d-числами из пространственно-временной алгебры. Будем говорить, что возникающая алгебра пространства соответствует γ_0, и назовем элементы такой алгебры p-числами. Естественно, что ничем, кроме значений квадратов, пространственные векторы σ_1, σ_2, σ_3 не отличаются от пространственных векторов γ_1, γ_2, γ_3.

Пусть A – произвольный элемент $\mathscr{C}_4$. Его четная часть

Φ, как нетрудно видеть, окажется p-числом. Нечетная же часть Φ' такова, что четно $\Phi'\gamma_0$, и, значит, это произведение тоже является некоторым p-числом χ. Поэтому $\Phi' = \chi\gamma_0$, и можно записать

$$A = \Phi + \chi\gamma_0,$$

где Φ и χ являются p-числами.

Отметим еще, что

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_0 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i.$$

Без этого наши обозначения в главах III и IV не были бы согласованы.

Теперь обратимся к одному свойству этой подалгебры, которое играет важную роль в теории Дирака. Сформулируем его в виде такой теоремы:

Существует линейная биекция между множеством четных d-чисел Дирака и множеством спиноров Дирака, представленных в виде комплексных столбцов.

Обозначим через A произвольное четное d-число Дирака, разложение которого по базису подпространства четных d-чисел имеет вид

$$A = a_1 + d_1\gamma_1\gamma_0 + d_2\gamma_2\gamma_0 + c_1\gamma_3\gamma_0 +$$
$$+ a_2\gamma_2\gamma_1 + b_2\gamma_3\gamma_2 + b_1\gamma_3\gamma_1 + c_2\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Напомним конкретную реализацию γ, переписав (22) (i' – обычная мнимая единица):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i' \\ 0 & 0 & -i' & 0 \\ 0 & -i' & 0 & 0 \\ i' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе γ вычислим произведения векторов, образующие базис для четных d-чисел:

$$\gamma_1\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i' \\ 0 & 0 & i' & 0 \\ 0 & -i' & 0 & 0 \\ i' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2\gamma_1 = \begin{pmatrix} i' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i' \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i' & 0 & 0 \\ i' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i' \\ 0 & 0 & i' & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i' \\ i' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем теперь отображение $\mathcal{T}$ посредством следующих операций:

1°. Сопоставим четному A матрицу M из 4 строк и 4 столбцов, пользуясь матричным представлением (22) векторов γ и вычисленными выше произведениями векторов, образующими базис подпространства четных дираковых d-чисел.

2°. Полученную матрицу M умножим справа на фиксированную матрицу u, имеющую один столбец:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В результате от матрицы M останется ее первый столбец. Обозначим

$$Mu = \Psi.$$

Тогда по определению полагаем

$$\Psi = \mathcal{T}(A).$$

Матрицу M можно выразить через коэффициент разложения A по базису четных d-чисел. Нам достаточно явно выписать только первый столбец:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + i'a_2 \ldots \\ b_1 + i'b_2 \ldots \\ c_1 + i'c_2 \ldots \\ d_1 + i'd_2 \ldots \end{pmatrix}.$$

Согласно данному определению,

$$\Psi = Mu = \begin{pmatrix} a_1 + i'a_2 \\ b_1 + i'b_2 \\ c_1 + i'c_2 \\ d_1 + i'd_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для любых четных d-чисел A_1 и A_2 и произвольных действительных чисел λ и μ

$$\mathscr{T}(\lambda A_1 + \mu A_2) = \lambda \mathscr{T}(A_1) + \mu \mathscr{T}(A_2),$$

так что отображение $\mathscr{T}$ линейно.

Для обращения Ψ в нуль необходимо, чтобы обращались в нуль действительные числа

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0.$$

Это означает, что *ядро* линейного отображения $\mathscr{T}$, т. е. множество всех таких A, образами которых является нулевой спинор, есть нуль, т. е. из равенства нулю $\mathscr{T}(A)$ следует равенство нулю A:

$$\operatorname{Ker} \mathscr{T} = \{0\}.$$

Эта запись означает, что нуль – единственное четное d-число, которое переводится в нулевой спинор при отображении $\mathscr{T}$.

Следовательно, $\mathscr{T}$ *инъективно*, т. е. различные четные d-числа Дирака всегда имеют своими образами при отображении $\mathscr{T}$ несовпадающие спиноры. В самом деле, если $A \neq A'$, то не может оказаться, что

$$\mathscr{T}(A) = \mathscr{T}(A'),$$

потому что из такого равенства вытекало бы, что

$$\mathscr{T}(A - A') = 0.$$

Но тогда, как было показано, $A = A'$ в противоречии с нашим предположением, что $A \neq A'$.

Отображение $\mathscr{T}$ также и *сюръективно*, т. е. является отображением на все векторное пространство спинорных столбцов Ψ, ибо заданием коэффициентов a, b, c, d столбца Ψ определяется четное d-число A с теми же коэффициентами, для которого $\mathscr{T}(A) = \Psi$. Значит, линейное отображение $\mathscr{T}$ инъективно и сюръективно, т. е. биективно, и наша теорема доказана.

Мы увидим, что множество четных d-чисел A имеет структуру кольца, тогда как множество спиноров Ψ подчиняется обычным правилам действий с матрицами, определяющим менее богатую структуру, поскольку не задана операция умножения столбцов, сопоставляющая двум спинорам снова спинор. Поэтому замена спиноров Дирака, действующих в эрмитовом векторном пространстве, четными d-числами, которые являются суммами и произведениями векторов пространства-времени специальной теории относительности, не может не повлечь за собой и физических следствий. Такая замена должна привести к обогащению теории, и впоследствии мы покажем, что, перейдя к представлению волновых функций элементарных частиц не спинорами, а четными d-числами Дирака, мы сможем получить некоторую классификацию фундаментальных частиц.

Нам понадобится еще одно замечание. Пусть A' – нечетное d-число и, стало быть,

$$\bar{A}' = -A'.$$

Введем четное d-число A соотношением

$$A' = \gamma_0 A, \text{ следовательно, } A = \gamma_0 A'.$$

Таким образом устанавливается биекция между множеством четных и нечетных d-чисел, а следовательно, и биекция между множеством d-чисел A' и множеством спиноров Дирака, представленных столбцами из четырех комплексных чисел. Обозначим эту последнюю биекцию $\mathscr{T}'$. Из равенств

$$A'u = \Psi' = \gamma_0 A u = \gamma_0 \Psi$$

выводим, что $\Psi' = 0$ только при условии $A' = 0$, т. е. ядро линейного отображения $\mathscr{T}'$ сводится к единственному d-числу. Это нулевое d-число, одновременно и четное, и нечетное, является общим элементом двух дополнительных подпространств, а именно подпространств $\{A\}$ d-чисел A и $\{A'\}$ d-чисел A', прямая сумма которых образует все пространство d-чисел $\mathscr{C}_4$.

2. ГРАДИЕНТ

Удобно ввести еще четверку базисных векторов:

$$\gamma^0 = \gamma_0, \quad \gamma^1 = -\gamma_1, \quad \gamma^2 = -\gamma_2, \quad \gamma^3 = -\gamma_3$$

и соответствующие координаты x_μ, для которых

$$x_0 = x^0, \quad x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad x_3 = -x^3.$$

Градиентом назовем оператор

$$\square = \gamma^\mu \partial_\mu; \tag{24}$$

индекс суммирования μ принимает значения 0, 1, 2, 3, а операторы дифференцирования ∂_μ имеют тот же самый смысл, как и прежде, в гл. III, т. е.

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Если векторное поле A является дифференцируемой вектор-функцией x^μ, то действие оператора (24) на A представимо в виде следующего разложения:

$$\square A = \square \cdot A + \square \wedge A.$$

Будем называть $\square \cdot A$ *дивергенцией*, а $\square \wedge A$ – *ротором* A. Введенный здесь оператор $\square$ имеет простую связь как с обычным пространственным градиентом ∇, определенным ранее, так и с оператором Даламбера, или *даламбертианом*. Установим эту связь, заметив, что

$$\nabla = \gamma_0 \wedge \square,$$

потому что $\gamma_0 \wedge \square = \gamma_0 \gamma^k \partial_k = \sigma_k \partial_k$, где суммирование по k ведется от 1 до 3. Кроме того, используя ортогональность γ_0 всем γ_k, можно записать

$$\partial_0 = \gamma_0 \cdot \square.$$

Следовательно, возможно такое разложение:

$$\gamma_0 \square = \partial_0 + \nabla. \tag{25}$$

В заключение вычислим квадрат градиента, т. е. оператор

$$\square^2 = (\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = (\gamma^\mu \partial_\mu) \cdot (\gamma^\mu \partial_\mu).$$

Принимая во внимание свойства векторов γ, получим, что

$$\Box^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2,$$

и, таким образом, $\Box^2$ – скалярный оператор, называемый *даламбертианом*.

3. ВЕКТОРЫ И БИВЕКТОРЫ

Пусть $x = x^\mu \gamma_\mu$, где μ, как всегда, есть индекс суммирования, принимающий значения 0, 1, 2, 3. Рассмотрим произведение

$$\gamma_0 x = x_0 - x^1\sigma_1 - x^2\sigma_2 - x^3\sigma_3.$$

Условимся векторы пространства Паули обозначать жирным шрифтом:

$$\mathbf{x} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3,$$

для того чтобы отличать их от векторов пространства-времени, которые всегда обозначаются курсивом. Таким образом,

$$\gamma_0 x = x_0 - \mathbf{x}.$$

Разложим бивектор $B \in \mathscr{C}_4$ по базису подпространства бивекторов:

$$B = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + a_4\gamma_1\gamma_2 + a_5\gamma_2\gamma_3 + a_6\gamma_3\gamma_1.$$

Если для линейных комбинаций векторов σ_k с этими действительными коэффициентами a_k ввести обозначения

$$\sigma = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3,$$

$$\sigma' = -(a_5\sigma_1 + a_6\sigma_2 + a_4\sigma_3),$$

то в силу соотношений

$$-i\sigma_1 = \gamma_2\gamma_3, \quad -i\sigma_2 = \gamma_3\gamma_1, \quad -i\sigma_3 = \gamma_1\gamma_2$$

можно всякий бивектор B записывать как сумму

$$B = \sigma + i\sigma', \tag{26}$$

где σ и σ' – векторы пространства.

Теперь докажем такое утверждение:

Произведение $A\tilde{A}$ четного d-числа A на число A с тильдой представляет собой сумму скаляра и псевдоскаляра.

В самом деле, поскольку A четно, $A = A_S + A_B + A_{\mathscr{P}}$, так что

$$A\tilde{A} = (A_S + A_B + A_{\mathscr{P}})(A_S - A_B + A_{\mathscr{P}}) = (A_S + A_{\mathscr{P}})^2 - A_B^2.$$

Но ведь и $(A_S + A_{\mathscr{P}})^2$, и

$$A_B^2 = \sigma^2 - \sigma'^2 + i(\sigma\sigma' + \sigma'\sigma)$$

являются суммами скаляра и псевдоскаляра; тем самым нужное свойство $A\tilde{A}$ доказано.

Следовательно, при $A\tilde{A} \neq 0$ это произведение представимо в виде

$$A\tilde{A} = a + ia' = \rho\exp(i\beta),$$

если ввести действительные параметры ρ и β соотношениями

$$\rho\cos\beta = a, \quad \rho\sin\beta = a',$$

из которых однозначно определяется $\rho > 0$, а β находится с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Обозначив $R = A[\rho\exp(i\beta)]^{-1/2}$, убеждаемся, что R удовлетворяет двум условиям:

$$R = \bar{R}, \quad R\tilde{R} = 1; \tag{27}$$

как будет показано далее, эти условия характеризуют лоренцевы вращения.

Приведем еще одно следствие (26). Рассмотрим квадрат бивектора

$$B^2 = (\sigma + i\sigma')^2 = \sigma^2 - \sigma'^2 + 2i\sigma\cdot\sigma'.$$

Если $\sigma\cdot\sigma' = 0$, то B^2 – действительное число, и тогда бивектор B называют простым. В таком случае

1°. Если $\sigma^2 > \sigma'^2$, бивектор B называется временны́м.

2°. Если $\sigma^2 = \sigma'^2$, B называется изотропным.

3°. Если $\sigma^2 < \sigma'^2$, B называется пространственным.

Если же $\sigma\cdot\sigma' \neq 0$, то бивектор называется составным. Справедливо такое утверждение:

Каждый составной бивектор B равен сумме $S_1B_1 + S_2iB_1$, где S_1, S_2 – скаляры, один из бивекторов B_1, iB_1 пространственный, а другой временной.

Положим

$$B_1 = \exp(i\varphi)B,$$

где φ – действительное число. Тогда

$$B_1^2 = \exp(2i\varphi)B^2 = \exp(2i\varphi)(\sigma^2 - \sigma'^2 + 2i\sigma\cdot\sigma') =$$

$$= (\sigma^2 - \sigma'^2)\cos 2\varphi - 2\sigma\cdot\sigma'\sin 2\varphi +$$

$$+ 2i\sigma\cdot\sigma'\cos 2\varphi + i(\sigma^2 - \sigma'^2)\sin 2\varphi.$$

Выберем φ таким образом, чтобы B_1^2 оказался скаляром, т. е. так, чтобы обратилось в нуль выражение

$$2\sigma\cdot\sigma'\cos 2\varphi + (\sigma^2 - \sigma'^2)\sin 2\varphi.$$

Такой выбор всегда возможен, так как по предположению B – составной бивектор. Проделав это, запишем

$$B = \exp(-i\varphi)B_1 = B_1\cos\varphi - iB_1\sin\varphi.$$

Мы получим нужную линейную комбинацию бивекторов, положив

$$S_1 = \cos\varphi, \quad S_2 = -\sin\varphi.$$

4. БИКВАТЕРНИОНЫ

Предыдущие рассуждения показывают, что каждое четное число Дирака A при $A\tilde{A} \neq 0$ можно привести к каноническому виду

$$A = [\rho\exp(i\beta)]^{1/2}R, \tag{28}$$

и в этом выражении R – четное d-число, удовлетворяющее условиям (27), а именно

$$R = \bar{R}, \quad R\tilde{R} = 1.$$

Далее мы проверим, что такие числа R являются экспонентами от бивекторов и представляют вращения в действительном пространстве-времени теории относительности, подобно тому как экспоненты от пространственных бивекторов, являющиеся унитарными кватернионами, представляют пространственные вращения. Записав теперь волновую функцию в каноническом виде (28), мы можем в общих чертах объяснить ее физический смысл и тем самым отчасти оправдать предыдущее построение.

1°. В каждой точке $O(x)$ пространства-времени неотрицательная величина $\rho(x)$ задает плотность вероятности присутствия частицы, и эта вероятность должна быть нормирована во всем пространстве формулой

$$\int_{\Omega} \rho \, d\tau = 1$$

(здесь $d\tau$ – элемент объема трехмерного пространства, а интеграл берется по всему пространству Ω). Эта формула означает, что присутствие частицы где-либо в пространстве – достоверное событие.

2°. В каждой точке $O(x)$, если известно d-число $R(x)$, можно с помощью вращения фиксированной системы отсчета в пространстве векторов γ перейти к новой системе, которая называется *собственной системой* отсчета для частицы. Базисные векторы собственной системы связаны с плотностями характеристик поля (ток, спин, электромагнитные моменты), и требуется, чтобы градиенты этих величин можно было находить как функции характеристических параметров частицы (масса, заряд) и внешнего электромагнитного поля, в которое помещена частица. Мы увидим, что в теории Дирака эти градиенты позволяют описать эволюцию частицы.

3°. Остается интерпретировать угол $\beta(x)$ в любой пространственно-временной точке $O(x)$. Это довольно тонкая задача, поскольку значение $\beta(x)$ оказывается связанным с различными состояниями частицы, имеющими отрицательную энергию.

Итак, приведение волновой функции к каноническому виду (28) играет важнейшую роль. Эта функция составляется из элементов, которые имеют прямой и точный смысл, физический или геометрический, поэтому в результате сама волновая функция утрачивает тот несколько мистический характер, который она носит при стандартном подходе. Применяемый математический аппарат оказывается более адекватным реальной действительности.

Важное значение четных d-чисел до недавнего времени не было выявлено, вот почему для них не существует общепринятого специального наименования. Их нельзя назвать спинорами, потому что они не подходят под определение спиноров, которое будет приведено в дальнейшем. На самом деле такое число является суммой положительного и отрицательного спиноров. Естественно было бы назвать их октанионами, чтобы напомнить о восьми компонентах, а еще лучше *бикватернионами* в соответствии с их структурными свойствами, детальным анализом которых мы теперь займемся.

Прежде всего отметим, что название «бикватернион» оправдывается следующим разложением (с учетом (26)):

$$A = a + \sigma + ib + i\sigma';$$

здесь a и b – действительные числа, и тем самым

$$A = q + iq',$$

где q и q' – два кватерниона.

Такое разложение всегда возможно, и оно единственно. Отсюда немедленно выводим, что

1°. Множество таких A имеет структуру восьмимерного векторного пространства над полем действительных чисел.

2°. Это множество обладает структурой *кольца*, так как произведение двух кватернионов является кватернионом, и, следовательно, записав

$$A_1 = q_1 + iq'_1, \quad A_2 = q_2 + iq'_2,$$

можно произведение A_1A_2 представить в виде

$$A_1A_2 = (q_1 + iq'_1)(q_2 + iq'_2) = (q_1q_2 - q'_1q'_2) + i(q'_1q_2 + q_1q'_2).$$

Тем самым показано, что определена операция внутреннего умножения элементов.

Перейдем теперь к доказательству того, что бикватернионы не образуют тело. Для этого проверим, можно ли найти бикватернион $Q + iQ'$, который был бы правым обратным для бикватерниона $A = q + iq'$. Значит, нам надо исследовать равенство

$$(q + iq')(Q + iQ') = 1,$$

для справедливости которого требуется, в силу единственности разложения A на два кватерниона, выполнение двух равенств:

$$\begin{cases} qQ - q'Q' = 1, \\ q'Q + qQ' = 0. \end{cases}$$

Но кватернионы образуют тело, поэтому из второго уравнения выводим в случае ненулевого q, что

$$Q' = -q^{-1}q'Q,$$

и, подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получаем

$$(q + q'q^{-1}q')Q = 1.$$

Так как $q + q'q^{-1}q'$ – кватернион, такой Q существует и притом единствен тогда и только тогда, когда

$$q + q'q^{-1}q' \neq 0. \tag{28'}$$

В таком случае Q' также существует, и поэтому существует единственный правый обратный бикватернион $Q + iQ'$. Наконец, если $q = 0$, а $q' \neq 0$, то из условия $q'Q = 0$ вытекает, что $Q = 0$, а условие $-q'Q' = 1$ при $q' \neq 0$ определяет Q', и тем самым определен обратный элемент iQ'.

В итоге получаем: если $A \neq 0$, то правый обратный элемент существует в том и только том случае, когда выполняется условие (28′).

Таким образом, для описания множества тех *бикватернионов, для которых не существует правых обратных*, нам остается изучить ограничение, налагаемое этим условием (28′).

Введем

$$x = q^{-1}q';$$

тогда невыполнение (28′) означает, что $x^2 = -1$. Но ведь, будучи кватернионом, x представим в виде $x = a - i\sigma$, где a и σ^2 – действительные числа. Значит, равенство $x^2 = -1$ можно переписать в виде

$$a^2 - \sigma^2 - 2a i\sigma = -1,$$

а это равносильно требованию

$$a = 0 \text{ и } \sigma^2 = 1,$$

потому что при действительном a альтернатива $\sigma = 0$ исключается.

Следовательно, $x = q^{-1}q' = -i\sigma$ и $q' = -iq\sigma$ и, стало быть, общий вид бикватерниона, не имеющего правого обратного, таков:

$$q + iq' = q(1 + \sigma).$$

Отметим еще, что $A = q(1 + \sigma)$ удовлетворяет условию $A\tilde{A} = 0$ и, как будет показано ниже, множество таких бикватернионов изоморфно множеству спиноров.

Можно проверить, что у этих бикватернионов не существует и левых обратных, а значит, множество всех бикватернионов не образует тела.

Векторное пространство бикватернионов можно *нормиро-*

вать, вводя для $A = q + iq'$ норму $\|A\|$ либо формулой

$$\|A\|^2 = q\tilde{q} + q'\tilde{q}',$$

либо формулой

$$\|A\|^2 = (A\gamma_0\tilde{A}\gamma_0)_S,$$

где S обозначает скалярную часть бикватерниона, заключенного в скобки. Обе формулы определяют одну и ту же величину $\|A\|$, потому что

$$A\gamma_0\tilde{A}\gamma_0 = (q + iq')\gamma_0(\tilde{q} + i\tilde{q}')\gamma_0 = (q + iq')(\tilde{q} - i\tilde{q}') =$$
$$= q\tilde{q} + q'\tilde{q}' + i(q'\tilde{q} - q\tilde{q}')$$

и, значит, скалярная часть этого произведения совпадает с первым выражением для $\|A\|^2$. Отметим еще, что

$$\|A\|^2 = \|q\|^2 + \|q'\|^2.$$

Таким образом, из $\|A\| = 0$ вытекает, что $\|q\| = 0$ и $\|q'\| = 0$, следовательно, $A = 0$, т. е. выполняется первое свойство, фигурирующее в определении нормы.

Второе и третье характеристические свойства нормы проверяются без труда. Можно доказать, что действительное векторное пространство бикватернионов является пространством Банаха, так как оно нормировано и имеет конечную размерность (и, стало быть, все нормы эквивалентны), а потому это пространство окажется и полным.

Поскольку введенная норма евклидова, парам бикватернионов можно сопоставить скалярное произведение, удовлетворяющее неравенству Шварца. По определению

$$\langle A_1, A_2\rangle = \frac{1}{2}(q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{q}_1 + q_1'\tilde{q}_2' + q_2'\tilde{q}_1'),$$

иначе говоря,

$$\langle A_1, A_2\rangle = \langle q_1, q_2\rangle + \langle q_1', q_2'\rangle.$$

Все свойства скалярного произведения (симметричность, билинейность, положительная определенность соответствующей квадратичной формы) легко проверяются.

Глава V

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ФОТОН

1. УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА

Пусть в каждой точке пространства-времени заданы бивектор F, описывающий электромагнитное поле, и вектор плотности тока J. Мы сейчас покажем, что уравнения Лоренца можно записать в простой форме, предложенной М. Риссом:

$$\square F = J. \tag{29}$$

Уравнение (29) распадается на два:

$$\square \cdot F = J \text{ и } \square \wedge F = 0.$$

Отметим, что в разложении (26) бивектора F

$$F = \mathbf{E} + i\mathbf{H} \tag{30}$$

векторы трехмерного пространства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ описывают соответственно электрическое и магнитное поле.

Умножим (29) слева на γ_0 и введем обозначение

$$\gamma_0 J = q - \mathbf{j}.$$

С учетом (25) получим

$$(\partial_0 + \nabla)(\mathbf{E} + i\mathbf{H}) = q - \mathbf{j},$$

т. е.

$$\partial_0 \mathbf{E} + \nabla \mathbf{E} + i\partial_0 \mathbf{H} + i(\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \wedge \mathbf{H}) = q - \mathbf{j}.$$

Выделяя в этом уравнении его скалярную, векторную, бивекторную и псевдоскалярную части, приходим к четырем уравнениям:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \mathbf{E} = q, \quad \partial_0 \mathbf{E} + i\nabla \wedge \mathbf{H} = -\mathbf{j}, \\ i\partial_0 \mathbf{H} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0, \qquad i\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Воспользовавшись тем, что для пространственного вектора $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{H}$) операция $i\nabla \wedge \mathbf{E}$ сводится к взятию ротора $\nabla \times \mathbf{E}$, приведем эти уравнения к привычному виду:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=q,\quad \partial_0\mathbf{E}-\nabla\times\mathbf{H}=-\mathbf{j},$$
$$\partial_0\mathbf{H}+\nabla\times\mathbf{E}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{H}=0.$$

Как и утверждалось вначале, получены уравнения Лоренца для движущегося электрона.

2. ПОТЕНЦИАЛЫ

Следствием (29) является закон сохранения электрического заряда. Согласно (29),

$$\square^2 F=\square J=\square\cdot J+\square\wedge J.$$

Но ведь $\square^2$ – скалярный оператор, поэтому должно выполняться условие $\square\cdot J=0$, т. е.

$$(\square J)_S=(\gamma_0\square J\gamma_0)_S=[(\gamma_0\square)(J\gamma_0)]_S=0,$$

где индекс S, как всегда, означает взятие скалярной части d-числа.

Последнее равенство переписывается в виде

$$[(\partial_0+\nabla)(q+\mathbf{j})]_S=0,$$

или

$$\partial_0 q+\nabla\cdot\mathbf{j}=0.$$

Это уравнение и имеют в виду, говоря о сохранении заряда.

Можно представить F как градиент некоторого векторного поля A (потенциала):

$$F=\square A=\square\cdot A+\square\wedge A.$$

Учитывая, что F – бивектор, имеем

$$\square\cdot A=0 \text{ и } F=\square\wedge A.$$

Подставив это выражение в (29), получим волновое уравнение для A:

$$\square^2 A=J.$$

Вектор A определен неоднозначно. В самом деле, рассмотрим

$$A'=A+\square\chi,$$

выбрав скаляр χ так, чтобы $\Box^2\chi = 0$. Тогда

$$\Box A' = \Box A,$$

и это называется калибровочной инвариантностью.

В заключение покажем, что **E** и **H** можно находить как функции потенциалов. Пусть

$$A\gamma_0 = A_0 + \mathbf{A},$$
$$F = (\Box\gamma_0)(\gamma_0 A) = (\partial_0 - \nabla)(A_0 - \mathbf{A}) = \mathbf{E} + i\mathbf{H}.$$

Отсюда выводим выражение для полей через потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\partial_0\mathbf{A} - \nabla A_0, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{32}$$

3. СИЛА ЛОРЕНЦА

Четырехмерной силой Лоренца называют вектор

$$K = F \cdot J.$$

Но

$$F \cdot J = -J \cdot F = -\frac{1}{2}(JF - FJ).$$

Поэтому

$$(F \cdot J)\gamma_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + i\mathbf{H})J\gamma_0 - \frac{1}{2}J\gamma_0(-\mathbf{E} + i\mathbf{H}).$$

Однако

$$J\gamma_0 = q + \mathbf{j} \quad \text{и} \quad K\gamma_0 = K_0 + \mathbf{K}.$$

Следовательно,

$$K_0 + \mathbf{K} = q\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \frac{i}{2}(\mathbf{H}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{H}),$$

а это приводит к двум уравнениям:

$$K_0 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j},$$
$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} + i\mathbf{H} \wedge \mathbf{j} = q\mathbf{E} - \mathbf{H} \times \mathbf{j} = q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}.$$

В пространственном векторе **K** мы узнаем обычное выражение для силы Лоренца.

4. ФОТОНЫ

Уравнения Максвелла в пустоте получим, приравняв нулю вектор тока:

$$\Box F = 0. \tag{33}$$

Будем искать его решение в виде плоских волн, положив

$$F(x) = f\exp[i(k \cdot x)],$$

где f — постоянный бивектор, а $k = k^\mu \gamma_\mu$ — постоянный вектор. Так как $\Box = \gamma^\mu \partial_\mu$, получаем, что

$$\Box F = \gamma^\mu f \partial_\mu \exp[i(k \cdot x)] = \gamma^\mu i f k_\mu \exp[i(k \cdot x)],$$

потому что $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$ — индекс суммирования). Отсюда

$$\Box F = kif\exp[i(k \cdot x)],$$

поскольку скаляры k_μ коммутируют со всеми произведениями векторов. Из (33) вытекает, что $kf = 0$, а следовательно, $\gamma_0 kf = 0$, т. е.

$$(k_0 - \mathbf{k})f = 0. \tag{34}$$

Умножая обе части этого соотношения слева на $k_0 + \mathbf{k}$, найдем, что

$$(k_0^2 - \mathbf{k}^2)f = 0, \quad \text{т. е. } k_0^2 = \mathbf{k}^2.$$

Чтобы получить дальнейшее представление об этих монохроматических решениях, разложим f в сумму $\mathbf{e} + i\mathbf{b}$ и подставим в (34). Это даст

$$(k_0 - \mathbf{k})(\mathbf{e} + i\mathbf{b}) = 0,$$

или

$$k_0\mathbf{e} + ik_0\mathbf{b} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{k} \wedge \mathbf{e} + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) + i(\mathbf{k} \wedge \mathbf{b}).$$

Отделяя скалярную и псевдоскалярную части полученного равенства, приходим к соотношениям

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

показывающим, что поля $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны направлению распространения волны $\mathbf{k}$. Оставшаяся часть равенства имеет вид

$$k_0\mathbf{e} + ik_0\mathbf{b} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e} - \mathbf{k} \times \mathbf{b}.$$

Отсюда выводим, что

$$k_0\mathbf{e} = -\mathbf{k} \times \mathbf{b},$$

$$k_0\mathbf{b} = \mathbf{k} \times \mathbf{e},$$

так что $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны друг другу, направление $\mathbf{k}$ перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}$, а $\mathbf{e}^2 = \mathbf{b}^2$.

Таким образом, мы получили все известные свойства монохроматических электромагнитных волн.

Глава VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА

1. ВРАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Пусть x – вектор пространства-времени; сопоставим ему

$$x' = Rx\tilde{R}, \tag{35}$$

где R – такой бикватернион, что

$$\bar{R} = R, \quad R\tilde{R} = 1.$$

Векторы пространства-времени характеризуются двумя свойствами:

$$\bar{x} = -x, \quad \tilde{x} = x.$$

Но, поскольку

$$\bar{x}' = R\bar{x}\tilde{R} = -x' \text{ и } \tilde{x}' = R\tilde{x}\tilde{R} = x',$$

x' тоже является вектором. Вычислим

$$x'^2 = Rx\tilde{R}\,Rx\tilde{R} = Rx^2\tilde{R} = x^2.$$

Следовательно, преобразование пространства-времени, задаваемое формулой (35), изометрично. К тому же любой x' оказывается образом единственного вектора x, который определяется соотношением

$$\tilde{R}x'R = x.$$

Значит, преобразование (35) биективно. С другой стороны, оно не изменяет ориентацию базиса, так как

$$Ri\tilde{R} = R\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\tilde{R} = i.$$

Тем самым это преобразование является вращением пространства-времени, или, иначе говоря, лоренцевым вращением.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ

Прежде всего докажем такую теорему:

Существует такой бивектор B, *что либо* $R = \exp B$, *либо* $R = -\exp B$, *причем в последнем случае* $B^2 = 0$.

Поскольку d-число R четно, оно представляет собой сумму скаляра S, бивектора W и псевдоскаляра P:

$$R = S + W + P. \tag{36}$$

Если $W^2 \neq 0$, то на основании теоремы из гл. IV существуют такие скаляры S_1 и S_2, что

$$W = (S_1 + iS_2)\,w$$

и w^2 – действительное число.

Условие $R\tilde{R} = 1$ поэтому означает, что

$$(S + S_1 w + iS_2 w + P)(S - S_1 w - iS_2 w + P) = 1,$$

т. е.

$$(S + P)^2 - (S_1 + iS_2)^2 w^2 = 1.$$

Вводя p соотношением $P = ip$, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} S^2 + P^2 + (S_2^2 - S_1^2)\,w^2 = 1, \\ Sp - S_1 S_2 w^2 = 0. \end{cases}$$

Возьмем $w^2 = p$ и $S = S_1 S_2$. Тогда система сведется к единственному условию

$$S_1^2 S_2^2 - p^2 + w^2 (S_2^2 - S_1^2) = 1,$$

которое можно переписать в виде

$$(S_1^2 + w^2)(S_2^2 - w^2) = 1. \tag{37}$$

Предположим теперь, что $p > 0$. Это не ограничивает общности рассмотрения, так как в левой части (37) фигурируют и p, и $-p$. Попытаемся удовлетворить (37), выбрав

$$S_1 = a \cos w_1, \quad w = a \sin w_1, \quad a > 0, \tag{38}$$

где $w_1 = \lambda w$, а λ – действительное число,

$$aS_2 = \operatorname{ch} w_2, \quad aw = \operatorname{sh} w_2, \tag{39}$$

где $w_2 = \mu w$, μ – действительное число.

Уравнения

$$S^2a^2 = (a^2 - p)(1 + pa^2),$$

$$\lambda \sqrt{p} = \operatorname{Arc\,sin} \frac{\sqrt{p}}{a}, \quad \mu \sqrt{p} = \operatorname{Ar\,sh}(a \sqrt{\mu})$$

определяют величины a, λ и μ, а S_1 и S_2 находим из уравнений

$$S_1 = a \cos(\lambda \sqrt{p}), \quad aS_2 = \operatorname{ch}(\mu \sqrt{p}).$$

Следовательно,

$$S_1 + iw = \exp(iw_1), \quad S_2 + w = \exp(w_2),$$

и так как w_1 и w_2, будучи коллинеарны w, коммутируют, то

$$R = S_1S_2 + (S_1 + iS_2)w + ip = \exp(iw_1)\exp(w_2) = \exp(iw_1 + w_2),$$

т. е.

$$R = \exp B, \text{ а } B = w_2 + iw_1 = (\mu + i\lambda)w,$$

причем w^2 – положительное число.

Значит, возможно представление

$$B = (\theta + i\varphi)b,$$

где θ и φ – действительные числа, а b – бивектор, квадрат которого равен 1. В результате для R получаем каноническое разложение

$$R = (\operatorname{ch}\theta + b \operatorname{sh}\theta)(\cos\varphi + ib \sin\varphi), \tag{40}$$

и здесь $b^2 = 1$.

Остается рассмотреть случай $W^2 = 0$. Тогда из условия $(S + P)^2 = 1$ вытекает, что

$$S^2 - p^2 = 1 \text{ и } Sp = 0.$$

Значит, с необходимостью $p = 0$, а следовательно, $S = \pm 1$.

Если $S = 1$, то $R = 1 + W = \exp W$, поскольку $W^2 = 0$. Тогда $R = \exp B$, где $B = W$.

Если же $S = -1$, то

$$R = -1 + W = -(1 - W) = -\exp(-W)$$

и $R = -\exp B$, а $B = -W$.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

К ним мы приходим, рассматривая вращения вида

$$\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta + \sigma_3 \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta;$$

соответствующее преобразование (35) записывается тогда как

$$x' = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta + \sigma_3 \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta\right) x \left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta - \sigma_3 \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta\right).$$

Введем обозначения:

$$x = \gamma_0 ct + \gamma^1 X + \gamma^2 Y + \gamma^3 Z = \gamma_0 ct + \gamma^3 Z + u,$$

$$x' = \gamma_0 ct' + \gamma^1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma^3 Z' = \gamma_0 ct' + \gamma^3 Z' + u';$$

смысл символов u и u' очевиден. Поскольку σ_3 коммутирует с u и антикоммутирует с $\gamma_0 ct + \gamma^3 Z$, то из выражения для x' получаем

$$x' = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta + \sigma_3 \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta\right)(u + \gamma_0 ct + \gamma^3 Z)\left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta - \sigma_3 \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta\right),$$

$$x' = u + (\operatorname{ch}\theta + \sigma_3 \operatorname{sh}\theta)(\gamma_0 ct + \gamma^3 Z) = u' + \gamma_0 ct' + \gamma^3 Z'.$$

Следовательно, $u' = u$, а

$$\gamma_0 ct' + \gamma^3 Z' = (\operatorname{ch}\theta)\gamma_0 ct - \gamma_0 Z \operatorname{sh}\theta + \gamma_3 ct \operatorname{sh}\theta - \gamma_3 Z \operatorname{ch}\theta.$$

Таким образом, мы приходим к формулам

$$\begin{cases} X' = X, \\ Y' = Y, \\ Z' = Z \operatorname{ch}\theta - ct \operatorname{sh}\theta, \\ ct' = ct \operatorname{ch}\theta - Z \operatorname{sh}\theta. \end{cases}$$

Перепишем два последних равенства:

$$\begin{cases} Z' = \operatorname{ch}\theta\,(Z - ct \operatorname{th}\theta), \\ t' = \operatorname{ch}\theta\,(t - (Z/c)\operatorname{th}\theta). \end{cases} \tag{41}$$

При фиксированном параметре θ из формул преобразования вытекает, что если

$$Z = ct \operatorname{th}\theta, \quad X = Y = 0,$$

то $Z' = X' = Y' = 0$. Это показывает, что преобразование состоит в равномерном и прямолинейном сдвиге выделенных в пространстве координатных осей вдоль направления оси Z.

Для такой трансляции приведенная скорость v/c равняется, следовательно, $\operatorname{th}\theta$, откуда немедленно вытекает условие $v^2 < c^2$.

Кроме того,

$$\operatorname{ch}\theta = (1 - \operatorname{th}^2\theta)^{-1/2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

так что формулами (41) задается хорошо известное специальное преобразование Лоренца – Эйнштейна. Следовательно, физическая интерпретация параметра θ установлена.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Аналогичным образом можно рассмотреть и соответствующее преобразование бивектора поля F:

$$F' = RF\tilde{R} = \mathbf{E}' + i\mathbf{H}',$$

или

$$\mathbf{E}' + i\mathbf{H}' = R(\mathbf{E} + i\mathbf{H})\tilde{R}.$$

Вводя компоненты векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ в декартовой прямоугольной системе координат: E_x, E_y, E_z и т. п., отсюда получим, что

$$E'_z = E_z$$

и, так как $i\mathbf{H} = H_x\sigma_2\sigma_3 + H_y\sigma_3\sigma_1 + H_z\sigma_1\sigma_2$,

$$H'_z = H_z$$

и

$$E'_x\sigma_1 + E'_y\sigma_2 + H'_x\sigma_2\sigma_3 + H'_y\sigma_3\sigma_1 =$$
$$= (\operatorname{ch}\theta + \sigma_3\operatorname{sh}\theta)(E_x\sigma_1 + E_y\sigma_2 + H_x\sigma_2\sigma_3 + H_y\sigma_3\sigma_1).$$

Это приводит к системе обычных формул, описывающих преобразование электромагнитного поля:

$$\begin{cases} E'_x = \operatorname{ch}\theta\left(E_x + \dfrac{v}{c}H_y\right), & E'_y = \operatorname{ch}\theta\left(E_y - \dfrac{v}{c}H_x\right), \\ H'_x = \operatorname{ch}\theta\left(H_x - \dfrac{v}{c}E_y\right), & H'_y = \operatorname{ch}\theta\left(H_y - \dfrac{v}{c}E_x\right). \end{cases}$$

Глава VII

СПИНОРЫ

Алгебра Клиффорда $\mathscr{C}_n$, построенная на основе пространства E_n, обладает структурой кольца. Действительно, $\mathscr{C}_n$, будучи векторным пространством, является абелевой аддитивной группой, а закон умножения элементов, вообще говоря, некоммутативен, но дистрибутивен по отношению к сложению. В таких кольцах существуют идеалы. Умножая специально выделенный элемент $\mathscr{C}_n$ слева на произвольные элементы кольца, получим тот идеал, элементы которого называют *спинорами.* Если во всех этих произведениях изменить порядок множителей, т. е. умножать на произвольные элементы справа, то получается другой идеал $\mathscr{C}_n$. Такой правый идеал называют сопряженным исходному левому идеалу, а его элементы именуют сопряженными спинорами.

1. СПИНОРЫ ПАУЛИ

Пусть Ψ – элемент $\mathscr{C}_3$, а σ_3 – выбранный в этой алгебре базисный вектор единичной длины. Говорят, что Ψ является положительным спинором, если $\Psi\sigma_3 = \Psi$, и отрицательным спинором, если $\Psi\sigma_3 = -\Psi$.

Произвольно заданному p-числу Ψ из $\mathscr{C}_3$ всегда можно сопоставить левый идеал положительных спиноров, выбрав в качестве фиксированного элемента, по которому строится идеал,

$$\Psi_+ = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_3).$$

Ведь тогда

$$\Psi_+\sigma_3 = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_3)\sigma_3 = \Psi_+,$$

и равенство сохранится при умножении обеих частей слева на любые $\Psi' \in \mathscr{C}_3$.

Можно также построить левый идеал отрицательных спиноров, умножая слева элементы $\mathscr{C}_3$ на

$$\Psi_- = \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_3),$$

потому что

$$\Psi_-\sigma_3 = \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_3)\sigma_3 = -\Psi_-.$$

Ясно, что Ψ есть сумма положительного и отрицательного спиноров, так как

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_3) = \Psi_+ + \Psi_-.$$

Идеалы положительных и отрицательных спиноров независимы. Для доказательства достаточно проверить, что из

$$\lambda\Psi_+ + \mu\Psi_- = 0$$

следует, что $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. Действительно, умножим предыдущее равенство справа на σ_3. Получается соотношение

$$\lambda\Psi_+ - \mu\Psi_- = 0,$$

и простая комбинация двух равенств дает

$$\lambda\Psi_+ = 0, \quad \mu\Psi_- = 0,$$

т. е. $\lambda = 0$ и $\mu = 0$, поскольку и $\Psi_+ \neq 0$, и $\Psi_- \neq 0$.

Определим базисы линейных подпространств спиноров Ψ_+ и Ψ_-. Для этого элементы $\Psi \in \mathscr{C}_3$ разложим следующим образом:

$$\Psi = a_0 + a_k\sigma_k$$

(индекс суммирования k пробегает значения 1, 2, 3), где a_0 и a_k являются суммами скаляров и псевдоскаляров.

Тогда

$$\Psi_+ = \frac{1}{2}(a_0 + a_k\sigma_k)(1 + \sigma_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_0 + a_3)(1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(a_0 + ia_2)(1 - \sigma_3)\sigma_1,$$

т. е. числа Паули $1 + \sigma_3$ и $(1 - \sigma_3)\sigma_1$ образуют базис для Ψ_+. Аналогично получаем, что базис для Ψ_- образуют $1 - \sigma_3$ и $(1 + \sigma_3)\sigma_1$.

2. СПИНОРЫ ДИРАКА

Для d-числа φ положим

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}\varphi(1+\sigma_3), \quad \text{так что } \varphi_+\sigma_3 = \varphi_+,$$

и назовем φ_+ положительным спинором.

Полагая $\varphi_- = \dfrac{1}{2}\varphi(1-\sigma_3)$, имеем $\varphi_-\sigma_3 = -\varphi_-$, где φ_- – отрицательный спинор.

Из тождества

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi(1+\sigma_3) + \frac{1}{2}\varphi(1-\sigma_3) = \varphi_+ + \varphi_-$$

вытекает, что φ есть сумма положительного и отрицательного спиноров. Независимость этих двух идеалов проверяется так же, как прежде. Кроме того, φ_+ и φ_- можно разложить на четную и нечетную части, представив φ в виде $\varphi = \Phi + \chi\gamma_0$, где Φ и χ – числа Паули.

В таком случае

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}\varphi(1+\sigma_3) = \frac{1}{2}\Phi(1+\sigma_3) + \frac{1}{2}\chi\gamma_0(1+\sigma_3).$$

Но $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$, $\chi = \chi_+ + \chi_-$; поэтому

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\Phi_+ + \Phi_-) + \frac{1}{2}(\Phi_+ - \Phi_-) + \\ + \frac{1}{2}(\chi_+ + \chi_-)\gamma_0 + \frac{1}{2}(-\chi_- + \chi_+)\gamma_0.$$

В результате получаем

$$\varphi_+ = \Phi_+ + \chi_-\gamma_0. \qquad (42)$$

Точно так же находим соотношение

$$\varphi_- = \Phi_- + \chi_+\gamma_0,$$

связывающее спиноры Дирака и спиноры Паули через посредство временно́го вектора γ_0.

Если φ – бикватернион, то он является суммой положительного и отрицательного спиноров. Но, как мы видели, существует биекция множества бикватернионов на множество дираковых спинорных столбцов. Эта биекция сохраняет структуру действительного векторного пространства, но не сохраняет структуру кольца, поскольку умножение во множестве спиноров-столбцов не определено. Это обстоятельство объясняет, почему бикватернионы, объекты более общей природы, не следует называть спинорами.

Наконец, отметим, что если ненулевой бикватернион φ является спинором, то, как всякий спинор, он должен удовлетворять условию $\varphi\tilde{\varphi} = 0$, а следовательно, φ нельзя привести с помощью лоренцева вращения к каноническому виду (28).

Глава VIII

ТЕОРИЯ ДИРАКА

1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Это уравнение

$$\Box\,\Psi = (m\Psi\gamma_0 + eA\Psi)\,\gamma_2\gamma_1. \tag{43}$$

Здесь γ_μ – векторы некоторого неподвижного базиса $\mathscr{B}$, A обозначает потенциал, являющийся вектором в пространстве-времени, а параметры m и e просто выражаются через собственную массу и заряд электрона. Искомая функция бикватернион Ψ – волновая функция частицы.

Необходимо показать, что это векторное уравнение эквивалентно уравнению Дирака в обычной матричной форме. С этой целью сначала заменим векторы γ_μ соответствующими матрицами, которые были определены в гл. IV соотношениями (22). Заметим, что если u – столбец, определенный формулой (23) той же главы, то эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_0 u = u, \quad \gamma_2\gamma_1 u = i'u, \tag{44}$$

где, как всегда, i' – обычная мнимая единица. В подробной записи эти соотношения выглядят так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Затем умножим обе части (43) на u и положим

$$\Phi = \mathscr{T}(\Psi) = \Psi u, \tag{45}$$

где $\mathscr{T}$ – линейное биективное отображение, определенное в гл. IV.

С учетом соотношений (44) уравнение (43) превратится в уравнение

$$\Box\,\Phi = (m\Phi + eA\Phi)\,i'. \tag{46}$$

Пусть e^- – заряд электрона, а m_0 – его собственная масса, h – постоянная Планка и c – скорость света; положим

$$e = e^- \frac{2\pi}{hc}, \quad m = m_0 \frac{2\pi c}{h}, \quad \varkappa = 2\,i'\frac{\pi}{h}.$$

Перепишем (46) в виде

$$\Box\,\Phi = \left(\varkappa m_0 c + \varkappa\frac{e^-}{c}A\right)\Phi.$$

Наконец, поскольку $A = A_\mu\gamma^\mu = A^\mu\gamma_\mu$ (т. е. $A_0 = A^0$, $A_k = -A^k$), исходное уравнение (43) преобразуется к виду

$$\left[\frac{\partial}{c\partial t}\gamma_0 - \varkappa\frac{e^-}{c}A_0\gamma_0 - \left(\varkappa\frac{e^-}{c}A^k\gamma_k + \gamma_k\partial_k\right) - \varkappa m_0 c\right]\Phi = 0$$

(здесь индексы суммирования принимают значения $\mu = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$).

Умножая полученное уравнение слева на γ_0, приводим его к обычной форме уравнения Дирака

$$\left[\frac{\partial}{c\partial t} - \varkappa\frac{e^-}{c}A_0 - \left(\gamma_0\gamma_k\partial_k + \varkappa\frac{e^-}{c}A^k\gamma_0\gamma_k\right) - \varkappa m_0 c\gamma_0\right]\Phi = 0, \tag{47}$$

ибо $(\gamma_0\gamma_k)^2 = 1$ и $\gamma_0^2 = 1$, так что фигурирующие в (47) матрицы удовлетворяют условиям Дирака.

Из этого рассмотрения вытекает, что каждому бикватерниону Ψ, являющемуся решением (43), сопоставляется при отображении $\mathscr{T}$ такой столбец Φ из комплексных чисел, т. е. такой спинор Дирака, который является решением матричного уравнения (47); при этом в (43) и (47) используется одна и та же базисная система $\mathscr{B}$ γ-матриц. Таким образом, каждому «векторному» решению (43) соответствует «матричное» решение (47).

Теперь для доказательства эквивалентности уравнений (43) и (47) следует показать, что каждому решению (47) можно сопоставить решение (43). Пусть Φ – решение (47), записанное относительно некоторого базиса $\mathscr{B}$. При отображении $\mathscr{T}^{-1}$ столбцу

Φ соответствует бикватернион Ψ. Обозначив векторы $\mathscr{B}$ символами $\{\gamma\}$ так, чтобы

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_k^2 = -1,$$

положим

$$C = \square\Psi - (m\Psi\gamma_0 + eA\Psi)\gamma_2\gamma_1.$$

Затем, как уже делалось выше, перейдем к матричному представлению (22) для векторов $\{\gamma\}$ и образуем столбец Cu. Обозначая в соответствии с (45) $\Phi = \mathscr{T}(\Psi)$, получаем

$$Cu = \square\Phi - \left(\varkappa m_0 c + \varkappa \frac{e^-}{c} A\right)\Phi.$$

Но в правой части этого равенства стоит нуль, так как Φ является решением (47), и, следовательно,

$$Cu = 0.$$

Однако C – нечетное d-число, поэтому

$$Cu = 0 \text{ влечет за собой равенство } C = 0.$$

В результате оказывается, что $\Psi = \mathscr{T}^{-1}(\Phi)$ служит решением уравнения (43), записанного в том же базисе $\mathscr{B}$, что и матричное уравнение (47). Значит, эквивалентность уравнений установлена, и потому все результаты теории Дирака можно получить с помощью аппарата векторной алгебры.

В заключение еще раз подчеркнем, что в дальнейшем i всюду обозначает единичный псевдоскаляр, т. е. матрицу γ_5, так что его не следует путать с обычной мнимой единицей, обозначаемой i'.

2. ПОЛЕВЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Потенциалы электромагнитного поля определены с точностью до калибровки, поэтому уравнение (43) должно обладать калибровочной инвариантностью. Подвергая A калибровочному преобразованию: $A' = A + \square\chi$, $\square^2\chi = 0$, можно убедиться, что (43) не изменится, если вместо Ψ взять

$$\Psi' = \Psi\exp(i\sigma_3 e\chi).$$

В самом деле, тогда

$$\square\Psi' = (\square\Psi)\exp(i\sigma_3 e\chi) + e(\square\chi)\Psi i\sigma_3\exp(i\sigma_3 e\chi),$$

и для проверки утверждения достаточно подставить в (43) A' и Ψ' вместо A и Ψ.

Полевые величины $g(d)$ являются числами Дирака; поэтому их можно представить в виде

$$g(d) = \Psi d \tilde{\Psi}$$

и, предполагая $g(d)$ известными, можно находить d с помощью этого соотношения. Учитывая, что величины $g(d)$ должны быть инвариантными при калибровочных преобразованиях, мы приходим к требованию

$$\Psi' d \tilde{\Psi}' = \Psi \exp(i\sigma_3 e\chi)\, d \exp(-i\sigma_3 e\chi) \tilde{\Psi} = \Psi d \tilde{\Psi}.$$

Это условие эквивалентно коммутативности d и $i\sigma_3$. Кроме того, будучи действительными, полевые величины не должны отличаться от дуальных им величин. Таким образом, среди чисел d могут остаться только следующие базисные векторы $\mathscr{C}_4$:

$$1,\ \gamma_0,\ \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_3,\ i.$$

Мы сохранили взаимно дуальные d-числа 1 и i, потому что физическую интерпретацию получат только скалярные части соответствующих им $g(d)$.

Указанные d-числа определяют следующие физические величины [1]:

скаляр $\Omega = (\Psi\tilde{\Psi})_S$ и *скаляр* $\bar{\Omega} = (\Psi i \tilde{\Psi})_S$;
вектор тока $J_0 = \Psi\gamma_0\tilde{\Psi}$;
бивектор $F = \Psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\Psi}$;
спин $J_3 = \Psi\gamma_3\tilde{\Psi} = s$.

Займемся теперь интерпретацией канонической формы (28) бикватерниона:

$$\Psi = \rho^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right) R.$$

Так как R задает лоренцево вращение, то в каждой точке x пространства-времени с его помощью определяется *собственный базис* e_μ, связанный с базисом γ_μ выбранной вначале неподвижной системы отсчета преобразованием

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}. \tag{48}$$

Этот базис и соответствующая ему система отсчета называ-

[1] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **267** (1968), 1551.

ются собственными из-за того, что в этой системе равна нулю трехмерная пространственная скорость частицы. В самом деле, вектор e_0 интерпретируется как четырехмерная скорость. Но его квадрат равен 1:

$$e_0^2 = R\gamma_0\tilde{R}R\gamma_0\tilde{R} = \gamma_0^2 = 1,$$

и, следовательно, пространственная составляющая e_0 должна обращаться в нуль.

Что касается величины ρ, то ею определяется плотность вероятности присутствия электрона в точке x, в то время как угловая переменная β оказывается равной углу Такабаяси[1]; смысл β будет разъяснен в дальнейшем.

Принимая во внимание (48), можно выражения для полевых величин записать в виде

$$\begin{gathered} \Omega = \rho\cos\beta, \quad \bar{\Omega} = -\rho\sin\beta, \quad J_0 = \rho e_0, \\ F = \rho\exp(i\beta)e_1e_2 = -\bar{\Omega}e_3e_0 - i\Omega e_3e_0, \\ J_3 = \rho e_3. \end{gathered} \tag{49}$$

Тем самым мы ввели два трехмерных пространственных вектора **e** и **h**, описывающие плотности электрического и магнитного моментов, а именно

$$\mathbf{e} = -\bar{\Omega}e_3e_0, \quad \mathbf{h} = -\Omega e_3e_0.$$

Плотность спина σ является пространственным вектором:

$$\sigma = se_0 = \rho e_3e_0.$$

Нетрудно убедиться в выполнении соотношений Паули — Кофинка, так что по аналогии с обычной теорией Дирака можно получить следующую физическую интерпретацию рассматриваемых полевых величин:

1°. J_0 есть вектор потока плотности вероятности; F через посредство векторов **e** и **h** связывается с плотностью моментов электрического и магнитного поля электрона, причем последнюю необходимо умножить на магнетон Бора:

$$B = e^- h/4\pi m_0c = ehc/4\pi m.$$

После умножения на $h/4\pi$ s представляет собой плотность

[1] См. работу, указанную в предыдущем примечании.

спина, так что в единицах $h/2\pi$ электрон обладает спином половина.

2°. Эти плотности должны быть проинтегрированы по областям пространства для получения средних значений физических величин. Именно эти средние имеют прямой физический смысл. Однако не они, а соответствующие плотности обладают простыми трансформационными свойствами релятивистских величин. В частности, волновая функция должна быть нормирована путем интегрирования плотности в неподвижной системе отсчета. В сочетании с условием $\square \cdot J_0 = 0$, которое далее будет выведено, это гарантирует сохранение нормировки в процессе эволюции изучаемой физической системы.

3°. С собственной системой отсчета можно связать четверку векторов:

$$J_\mu = \rho e_\mu,$$

но лишь два из них, J_0 и J_3, определяются независимо от выбора калибровки. Роторы и дивергенции этих векторов имеют прямое отношение к задачам теории электрона.

3. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Интересно получить решения в отсутствие внешнего поля, когда уравнение имеет вид

$$\square \Psi = m\Psi\gamma_0\gamma_2\gamma_1. \qquad (50)$$

Решения эти записываются в форме

$$\Psi^+ = \rho^{1/2} u \exp\left[i\sigma_3 (p \cdot x)\right], \qquad (51)$$

где ρ, u и p не зависят от x, причем u задает вращение пространства-времени, а постоянный вектор p находится из соотношения

$$p = mu\gamma_0\tilde{u} = me_0 = p_\mu\gamma^\mu. \qquad (52)$$

Для проверки достаточно вычислить

$$\square \Psi^+ = \rho^{1/2}\gamma^\mu\partial_\mu u \exp\left[i\sigma_3 (p \cdot x)\right] = \rho^{1/2}\gamma^\mu u \partial_\mu \exp\left[i\sigma_3 (p \cdot x)\right];$$

в последнем равенстве учтено, что u – постоянное d-число. Однако

$$\partial_\mu \exp\left[i\sigma_3 (p \cdot x)\right] = \partial_\mu \left[\cos(p \cdot x) + i\sigma_3 \sin(p \cdot x)\right],$$

а $p \cdot x = p_\mu x^\mu$. Отсюда

$$\partial_\mu [\cos(p_\mu x^\mu) + i\sigma_3 \sin(p_\mu x^\mu)] = p_\mu [-\sin(p \cdot x) + i\sigma_3 \cos(p \cdot x)] =$$
$$= p_\mu i\sigma_3 [\cos(p \cdot x) + i\sigma_3 \sin(p \cdot x)],$$

поскольку $(i\sigma_3)^2 = -1$, и в результате

$$\partial_\mu \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)] = p_\mu i\sigma_3 \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)].$$

Теперь достаточно заметить, что p_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) являются скалярами, коммутирующими с u, так что можно записать

$$\Box \Psi^+ = \rho^{1/2} \gamma^\mu p_\mu u i\sigma_3 \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)] = \rho^{1/2} p u i\sigma_3 \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)].$$

Следовательно, Ψ^+ удовлетворяет (50) тогда и только тогда, когда

$$\rho^{1/2} p u i\sigma_3 \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)] = m\rho^{1/2} u \exp[i\sigma_3 (p \cdot x)] \gamma_0 i\sigma_3.$$

Но, учитывая, что γ_0 коммутирует с $i\sigma_3$, после умножения последнего равенства справа на $\exp[-i\sigma_3 (p \cdot x)]$ получаем

$$p u i\sigma_3 = m u \gamma_0 i\sigma_3.$$

Поскольку $u\tilde{u} = 1$, отсюда вытекает, что

$$p u = m u \gamma_0 \text{ и } p = m u \gamma_0 \tilde{u},$$

т. е. получено условие (52).

Проверка завершена, однако указанными решениями (51) не исчерпываются все решения уравнения (50), которые представляют собой плоские волны. Действуя так же, как выше, можно убедиться, что функции

$$\Psi^- = \rho^{1/2} u i \exp[-i\sigma_3 (p \cdot x)] \tag{53}$$

тоже являются решениями (50). Такие плоские волны получаются из функций (51) в результате изменения знака вектора p, следовательно, они являются решениями прежнего вида, но отвечающими уравнению, в котором отрицателен параметр m и, стало быть, собственная масса m_0. По этой причине говорят, что решения (53) соответствуют состояниям частицы с «отрицательной энергией». Вместе с волнами, имеющими положительную энергию, они образуют полную систему, т. е. произвольное решение уравнения Дирака можно с помощью процедуры разложения представить как суперпозицию плоских волн с положительными и отрицательными энергиями.

Если теперь сравнить выражения (51) и (53) с канонической формой (28), то можно заметить, что в (51) $\beta = 0$, в то время как в (53) $\beta = \pi$. Это наводит на мысль о связи величины β со знаком энергии, однако к интерпретации β мы еще вернемся в общем случае, т. е. при наличии внешнего поля.

4. МЕТОД НЕПОДВИЖНОЙ СОБСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Существование собственных систем отсчета позволяет нам ввести в качестве базиса $\{\gamma_\mu\}$ неподвижный собственный репер. Изучение локальных деформаций собственного репера, взятого в произвольной пространственно-временной точке O, оказывается полезным при рассмотрении ряда общих проблем теории электрона. Такой метод можно применять лишь в рамках векторной интерпретации уравнения Дирака, и поэтому он специфичен для этого подхода.

С локальными деформациями базиса связан тензор вращений Ω, составляющие которого Ω_μ задаются выражением

$$\Omega_\mu = 2(\partial_\mu R)\tilde{R}.$$

Мы увидим, что эти величины Ω_μ полностью определяются, если известны роторы векторов, образующих собственный репер, и в качестве следствия сможем определить *тензор Тетроде,* который играет важную роль в анализе общих проблем.

Итак, поместим начало отсчета ($x = 0$) в некоторую произвольную точку пространства-времени O, выбранную так, чтобы гарантировать общность рассмотрения. Взяв в качестве *неподвижного базиса*[1)] собственный базис $\{\gamma_\mu\}$ в этой точке O, запишем уравнение Дирака (43). В точках, отличных от O (для них $x \neq 0$), векторы e_μ собственного базиса всегда определяются согласно (48), т. е.

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}.$$

[1)] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **280** (1975), sér. A, 299.

Для большей ясности будем постоянно придерживаться следующего соглашения: отмечать индексом 0 значения физических величин в начале системы отсчета O. Таким образом, $\gamma_\mu = (e_\mu)_0$, поскольку $\{\gamma_\mu\}$ обозначает сейчас собственный базис в точке O, и поэтому R_0 будет лоренцевым вращением, обеспечивающим переход от собственного базиса $\{\gamma_\mu\}$ к собственному базису $\{\gamma_\mu\}_0$, так что $R_0 = 1$.

Теперь представим R в виде

$$R = S\exp(\gamma_2\gamma_1 a), \tag{54}$$

где a – скалярная функция, обращающаяся в точке O в нуль (т. е. $a_0 = 0$); другие свойства a уточним позже. Из свойства $R\tilde{R} = 1$ выводим, что $S\tilde{S} = 1$, и так как $S = \bar{S}$, поскольку $R = \bar{R}$, то, как нам известно, существует такой бивектор B, что

$$S = \pm \exp B.$$

Следовательно, если $B^2 \neq 0$, то найдутся бивектор b, имеющий квадрат 1, и такие скаляры θ и φ, что

$$S = (\operatorname{ch}\theta + b\operatorname{sh}\theta)(\cos\varphi + ib\sin\varphi).$$

Из условия $R_0 = 1$ выводим, что

$$(\operatorname{ch}\theta\cos\varphi)_0 = 1, \quad (\operatorname{sh}\theta\sin\varphi)_0 = 0,$$

откуда $\theta_0 = 0$, а $\varphi_0 = 0$ с точностью до слагаемого, кратного 2π. Кроме того, S является суммой скаляра S_1, бивектора S_2 и псевдоскаляра S_3.

При этом $S_1 = \operatorname{ch}\theta\cos\varphi$ и, значит,

$$(\partial_\mu S_1)_0 = (\partial_\mu\theta)_0\operatorname{sh}\theta_0\cos\varphi_0 - (\partial_\mu\varphi)_0(\operatorname{ch}\theta_0\sin\varphi_0),$$

так что $(\partial_\mu S_1)_0 = 0$ и $(\square S_1)_0 = 0$.

Точно так же $S_3 = i\operatorname{sh}\theta\sin\varphi$ и

$$(\partial_\mu S_3)_0 = i(\partial_\mu\theta)_0\operatorname{ch}\theta_0\sin\varphi_0 + i(\partial_\mu\varphi)_0\operatorname{sh}\theta_0\cos\varphi_0,$$

значит, $(\partial_\mu S_3)_0 = 0$ и $(\square S_3)_0 = 0$.

Следовательно,

$$(\square S)_0 = (\square S_2)_0, \tag{55}$$

и так как S_2 – бивектор, то $(\square \cdot S)_0 = (\square \cdot S_2)_0$ – вектор, а $(\square \wedge S)_0 = (\square \wedge S_2)_0$ – тривектор.

Аналогично, если $B^2 = 0$, то, разлагая экспоненту от B, получаем $S = \pm(1 + B)$ и $(\square S)_0 = \pm(\square B)_0 = (\square S_2)_0$.

Теперь вычислим $\Box R$. Отправляясь от выражения (54), получаем

$$\Box R = (\Box S)\exp(\gamma_2\gamma_1 a) + \gamma^\mu S(\partial_\mu a)\gamma_2\gamma_1\exp(\gamma_2\gamma_1 a),$$

и, так как величины $\partial_\mu a$ – скаляры, они коммутируют с S. Таким образом,

$$\Box R = (\Box S)\exp(\gamma_2\gamma_1 a) + (\Box a)S\gamma_2\gamma_1\exp(\gamma_2\gamma_1 a);$$

поэтому в точке O, где $S_0 = 1$, получается выражение

$$(\Box R)_0 = (\Box S)_0 + (\Box a)_0\gamma_2\gamma_1.$$

Выберем теперь a так, что

$$(\Box a)_0 = m\gamma_0\cos\beta_0 + eA_0;$$

здесь A_0 – значение вектор-потенциала в точке O.

Для этого достаточно выбрать в качестве скаляра a

$$a = (m\cos\beta_0 + eA_0^0)x_0 + eA_0^1x_1 + eA_0^2x_2 + eA_0^3x_3.$$

Условие $a_0 = 0$ тогда тоже выполняется. Напомним, что $A = A^\mu\gamma_\mu$.

Возьмем волновую функцию Ψ в канонической форме

$$\Psi = \rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)R$$

и, пользуясь введенными обозначениями, подставим результаты проделанных выкладок в уравнение Дирака (43) для функции Ψ. Тогда

$$\Box\Psi = \{\Box[\rho\exp(i\beta)]^{1/2}\}R + \rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)(\Box R),$$

потому что векторный оператор $\Box$ антикоммутирует с i. Тем самым

$$\Box\Psi = \left\{\Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)\right]\right\}S\exp(\gamma_2\gamma_1 a) +$$
$$+ \rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)(\Box S)\exp(\gamma_2\gamma_1 a) +$$
$$+ \rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)(\Box a)S\gamma_2\gamma_1\exp(\gamma_2\gamma_1 a).$$

Обозначив $C = (\Box\,\Psi)\exp(-\gamma_2\gamma_1 a)$, видим, что

$$C = \Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\right] + \\ + \rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)(m\cos\beta_0)\gamma_0 S\gamma_2\gamma_1 + \\ + \rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)(eA_0)S\gamma_2\gamma_1.$$

Можно найти C, и воспользовавшись уравнением Дирака:

$$C = m\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + eA\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\gamma_2\gamma_1.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\right] = m\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)[\exp(i\beta)S\gamma_0 - \\ - (\cos\beta_0)\gamma_0 S]\gamma_2\gamma_1 + e\rho^{1/2}(A - A_0)\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\gamma_2\gamma_1, \quad (56)$$

и, значит, в уравнении Дирака явно выделено значение вектор-потенциала в точке O.

Совершим теперь предельный переход, устремляя аргументы всех функций в (56) к точке O, т. е. выпишем локальные соотношения между величинами. Тогда

$$\left\{\Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)S\right]\right\}_0 = -m\rho_0^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta_0\right)(\sin\beta_0)\gamma_3. \quad (57)$$

Разложив левую часть этого равенства в окрестности точки O, имеем

$$(\Box\,\rho)_0 - i\rho_0(\Box\,\beta)_0 + 2\rho_0(\Box\,S)_0 = -2m\rho_0(\sin\beta_0)\gamma_3. \quad (57')$$

Это уравнение распадается на векторную и тривекторную части:

$$(\Box\,\rho)_0 + 2\rho_0(\Box\cdot S)_0 = -2m\rho_0(\sin\beta_0)\gamma_3, \quad (58)$$

$$-i(\Box\,\beta)_0 + 2(\Box\wedge S)_0 = 0. \quad (59)$$

Полученные уравнения вполне аналогичны уравнениям Лоренца и в точности совпадают с ними, если $\beta = 0$ (или π) в некоторой окрестности точки O; в таком случае бивектор электромагнитного поля равен S_2, а вектор тока $-\frac{1}{2}(\Box\,\rho)_0\,\rho_0^{-1}$.

Теперь можно вычислить градиенты векторов собственного базиса в точке O, т. е. величины $(\Box e_\mu)_0$, и в результате найти градиенты векторов тока $(\Box J_\mu)_0$.

Действительно, пользуясь соотношением

$$\Box e_0 = \Box(R\gamma_0\tilde{R}) = \Box(S\gamma_0\tilde{S}) = (\Box S)\gamma_0\tilde{S} + \gamma^\mu S\gamma_0(\partial_\mu\tilde{S}),$$

выводим

$$(\Box e_0)_0 = (\Box S)_0\gamma_0 + \gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu\tilde{S})_0.$$

Записав выражение для второго слагаемого в виде

$$\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu\tilde{S})_0 = -\gamma_0(\Box\tilde{S})_0 + 2(\partial_0\tilde{S})_0,$$

получаем

$$(\Box e_0)_0 = (\Box S)_0\gamma_0 - \gamma_0(\Box\tilde{S})_0 + 2(\partial_0\tilde{S})_0.$$

Однако условие $S\tilde{S} = 1$ требует, чтобы

$$(\partial_\mu S)\tilde{S} + S(\partial_\mu\tilde{S}) = 0,$$

и, следовательно,

$$(\partial_\mu\tilde{S})_0 = -(\partial_\mu S)_0.$$

В результате уравнение для $(\Box e_0)_0$ преобразуется к виду

$$(\Box e_0)_0 = (\Box S)_0\gamma_0 + \gamma_0(\Box S)_0 - 2(\partial_0 S)_0.$$

Его можно переписать, с учетом выражения для скалярного произведения, и так:

$$(\Box e_0)_0 = 2\gamma_0\cdot(\Box S)_0 - 2(\partial_0 S)_0.$$

Но, поскольку $(\partial_0 S)_0 = (\partial_0 S_2)_0$ — бивектор, полученное уравнение можно разложить в систему двух уравнений:

$$(\Box\cdot e_0)_0 = 2\gamma_0\cdot(\Box\cdot S)_0,$$
$$(\Box\wedge e_0)_0 = 2\gamma_0\cdot(\Box\wedge S)_0 - 2(\partial_0 S)_0.$$

Совершенно аналогично проводится вычисление $(\Box e_3)_0$, так как

$$e_3 = R\gamma_3\tilde{R} = S\gamma_3\tilde{S},$$

а γ_3 коммутирует с $\gamma_2\gamma_1$. Значит, можно получить уравнения

$$(\square \cdot e_3)_0 = 2\gamma_3 \cdot (\square \cdot S)_0,$$
$$(\square \wedge e_3)_0 = 2\gamma_3 \cdot (\square \wedge S)_0 - 2(\partial_3 S)_0.$$

Напротив, вычисления $(\square\, e_1)_0$ и $(\square\, e_2)_0$ несколько отличаются от предыдущих, потому что

$$e_1 = R\gamma_1\tilde{R} = S\exp(2\gamma_2\gamma_1 a)\gamma_1\tilde{S}.$$

Следовательно,

$$(\square\, e_1)_0 = (\square\, S)_0\gamma_1 + 2(\square\, a)_0\gamma_2\gamma_1\gamma_1 + \gamma^\mu\gamma_1(\partial_\mu\tilde{S})_0,$$

т. е., проделывая аналогичные преобразования, получим уравнение

$$(\square\, e_1)_0 = 2\gamma_1 \cdot (\square\, S)_0 - 2(\partial_1 S)_0 - 2(\square\, a)_0\gamma_2,$$

которое можно разложить на два:

$$(\square \cdot e_1)_0 = 2\gamma_1 \cdot (\square \cdot S)_0 - 2(\square\, a)_0 \cdot \gamma_2 = 2\gamma_1 \cdot (\square \cdot S)_0 + 2eA_0^2$$

и

$$(\square \wedge e_1)_0 = 2\gamma_1 \cdot (\square \wedge S)_0 - 2(\partial_1 S)_0 + 2\gamma_2 \wedge (\square\, a)_0.$$

Точно так же проводятся вычисления $(\square\, e_2)_0$; они приводят к выражению

$$(\square \cdot e_2)_0 = 2\gamma_2 \cdot (\square \cdot S)_0 + 2(\square\, a)_0 \cdot \gamma_1,$$

или

$$(\square \cdot e_2)_0 = 2\gamma_2 \cdot (\square \cdot S)_0 - 2eA_0^1,$$

а также

$$(\square \wedge e_2)_0 = 2\gamma_2 \cdot (\square \wedge S)_0 - 2(\partial_2 S)_0 - 2\gamma_1 \wedge (\square\, a)_0.$$

Все полученные результаты (при $\mu = 0$, 1, 2, 3) можно свести в две общие формулы.

Для дивергенций общее выражение имеет вид

$$(\square \cdot e_\mu)_0 = 2\gamma_\mu \cdot (\square \cdot S)_0 + 2ei(\gamma_3 \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_\mu \wedge A)_0,$$

причем при $\mu = 0$, 3 последний член, очевидно, равен нулю. Вычисления показывают, что при $\mu = 1$ он равен $2eA_0^2$, а при $\mu = 2$, как и должно быть, получим $-2eA_0^1$.

Для роторов имеем формулу

$$(\square \wedge e_\mu)_0 = 2\gamma_\mu \cdot (\square \wedge S)_0 - 2(\partial_\mu S)_0 + 2i(\gamma_\mu \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) \wedge (\square a)_0,$$

и, стало быть, при $\mu = 0, 3$ последний член справа равен нулю. Кроме того,

$$2i(\gamma_1 \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) = 2\gamma_2,$$

$$2i(\gamma_2 \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) = -2\gamma_1,$$

т. е. при $\mu = 1, 2$ получаются ранее найденные выражения для роторов $(\square \wedge e_\mu)_0$.

Из этих формул можно вывести выражения для *дивергенций и роторов векторов тока*, потому что

$$(\square J_\mu)_0 = (\square \rho e_\mu)_0 = (\square \rho)_0 \gamma_\mu + \rho_0 (\square e_\mu)_0,$$

и отсюда для дивергенций получаем

$$(\square \cdot J_\mu)_0 = (\square \rho)_0 \cdot \gamma_\mu + \rho_0 (\square \cdot e_\mu)_0.$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения найдем, умножив скалярно на γ_μ обе части (58). Тем самым

$$(\square \cdot J_\mu)_0 = -2m(\sin\beta_0)\gamma_3 \cdot (J_\mu)_0 + 2ei[\gamma_3 \wedge \gamma_0 \wedge (J_\mu)_0 \wedge A_0]. \quad (60)$$

При $\mu = 0$ получается условие сохранения нормировки волновой функции, так как

$$(\square \cdot J_0)_0 = 0,$$

а при $\mu = 3$ приходим к формуле Уленбека и Лапорта для дивергенции вектора спинового тока

$$(\square \cdot J_3)_0 = 2m\rho_0(\sin\beta_0).$$

Что касается общей формулы для роторов, то она переписывается в виде

$$(\square \wedge J_\mu)_0 = (\square \rho)_0 \wedge \gamma_\mu + (J_\mu)_0 \cdot i(\square \beta)_0 -$$
$$- 2\rho_0(\partial_\mu S)_0 + 2(\square a)_0 \wedge i[(J_\mu)_0 \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_0]. \quad (61)$$

В частности,

$$(\square \wedge J_0)_0 = (\square \rho)_0 \wedge \gamma_0 + \rho_0\gamma_0 \cdot i(\square \beta)_0 - 2\rho_0(\partial_0 S)_0,$$

и столь же просто получить аналог этого выражения для $(\square \wedge J_3)_0$, так как вновь последний член в (61) будет равен нулю.

Формула (61) содержит величины $(\partial_\mu S)_0$, но их можно исключить, умножая (61) на γ^μ и проводя затем суммирование по μ. Тем самым в правой части появится градиент $(\Box S)_0$, который можно исключить с помощью уравнения (57′). Преобразуем слагаемое

$$\gamma^\mu [(\Box \rho)_0 \wedge \gamma_\mu]_0 = \gamma^\mu \cdot [(\Box \rho)_0 \wedge \gamma_\mu]_0 + \gamma^\mu \wedge (\Box \rho)_0 \wedge \gamma_\mu.$$

Последний член здесь равен нулю, так что

$$\gamma^\mu \cdot [(\Box \rho)_0 \wedge \gamma_\mu]_0 = [\gamma^\mu \cdot (\Box \rho)_0]\, \gamma_\mu - 4(\Box \rho)_0 = (\partial_\mu \rho)_0 \gamma^\mu - 4(\Box \rho)_0,$$

т. е. в результате имеем

$$\gamma^\mu [(\Box \rho)_0 \wedge \gamma_\mu]_0 \quad -3(\Box \rho)_0.$$

После этого надо вычислить величину

$$\gamma^\mu [\rho_0 \gamma_\mu \cdot i(\Box \beta)_0];$$

предварительно можно ее преобразовать, разложив в сумму

$$\gamma^\mu \cdot [\rho_0 \gamma_\mu \cdot i(\Box \beta)_0] + \gamma^\mu \wedge [\rho_0 \gamma_\mu \cdot i(\Box \beta)_0].$$

Здесь первый член равен нулю, а для нахождения второго сначала выпишем выражение для $i(\Box \beta)_0$, затем отыщем скалярные произведения внутри квадратных скобок порознь для $\mu = 0, 1, 2, 3$ и просуммируем по μ. Проделав эти вычисления, получим

$$\gamma^\mu [\rho_0 \gamma_\mu \cdot i(\Box \beta)_0] = 3i\rho_0 (\Box \beta)_0.$$

Остается только при $\mu = 1, 2$ преобразовать выражение

$$2\gamma^\mu \{(\Box a)_0 \wedge i[(J_\mu)_0 \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_0]\};$$

находим, что оно равно

$$2\rho_0 e A_0^2 \gamma_1 - 2\rho_0 e A_0^1 \gamma_2 + 4\rho_0 \gamma_2 \wedge \gamma_1 \wedge (\Box a)_0.$$

Подставляя в конце концов все эти результаты в уравнение (61), предварительно умноженное на γ^μ, убедимся, что после суммирования по μ получится

$$\begin{aligned} \gamma^\mu (\Box \wedge J_\mu)_0 = {} & -2(\Box \rho)_0 + 2i\rho_0 (\Box \beta)_0 + \\ & + 2m\rho_0 \gamma_3 \sin \beta_0 + 2\rho_0 e A_0^2 \gamma_1 - \\ & - 2e\rho_0 A_0^1 \gamma_2 + 4\rho_0 \gamma_2 \wedge \gamma_1 \wedge (\Box a)_0. \end{aligned} \quad (62)$$

Это уравнение естественным образом распадается на свою векторную и тривекторную части, и, таким образом, в нашем распоряжении оказываются два уравнения для роторов векторов тока, полученные с помощью техники векторной алгебры. Эти новые уравнения дополняют известные результаты для дивергенций.

Градиент поля частицы. С точностью до числового множителя, равного магнетону Бора, бивектор f собственного поля частицы задается, как было указано выше, выражением

$$f = \Psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\Psi} = \rho\exp(i\beta)e_1e_2.$$

Для отыскания градиента f сначала находим величину

$$\{\Box\,[\rho\exp(i\beta)e_1e_2]\}_0;$$

это делается теми же методами, что и раньше, и особых трудностей не представляет.

Следовательно, можно будет поставить вопрос: при каком дополнительном условии эти поля f, т. е. плотности собственных моментов, удовлетворяют уравнениям Лоренца? Таким необходимым и достаточным условием оказывается обращение в нуль тривекторной части предыдущего выражения. Этот результат, в общем случае довольно сложный, значительно упрощается, когда $\beta = 0$ (или π) в некоторой окрестности точки O. Указанное необходимое и достаточное условие тогда имеет вид

$$(\Box\,\rho)_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 - \rho_0\gamma_2 \wedge (\Box \wedge e_1)_0 - \rho_0\gamma_1 \wedge (\Box \wedge e_2)_0 = 0,$$

и в таком случае можно найти соответствующий вектор тока.

Тензор вращений. Компоненты этого тензора легко выразить через вращения собственной системы отсчета. В самом деле,

$$(\partial_\mu R)_0 = (\partial_\mu S)_0 + (\partial_\mu a)_0\gamma_2\gamma_1,$$

а так как

$$(\Omega_\mu)_0 = 2(\partial_\mu R)_0,$$

то, воспользовавшись (59), получим

$$(\Omega_\mu)_0 = \gamma_\mu \cdot i(\Box\,\beta)_0 + 2i(\gamma_\mu \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) \wedge (\Box\,a)_0 +$$
$$+ 2(\partial_\mu a)_0\gamma_2\gamma_1 - (\Box \wedge e_\mu)_0.$$

В частности, при $\mu = 0, 3$ имеем

$$(\Omega_0)_0 = \gamma_0 \cdot i(\Box \beta)_0 + \\ + 2(m\cos\beta_0 + eA_0^0)\gamma_2\gamma_1 - (\Box \wedge e_0)_0,$$

$$(\Omega_3)_0 = \gamma_3 \cdot i(\Box \beta_0) + 2eA_0^3\gamma_1\gamma_2 - (\Box \wedge e_3)_0.$$

5. УСКОРЕНИЕ

Метод неподвижного собственного базиса позволяет также вычислить четырехмерный вектор ускорения, который имеет вид

$$(\partial_0 e_0)_0 = [\partial_0(R\gamma_0\tilde{R})]_0 = [\partial_0(S\gamma_0\tilde{S})]_0 = \\ = (\partial_0 S)_0\gamma_0 + \gamma_0(\partial_0\tilde{S})_0 = \\ = (\partial_0 S)_0\gamma_0 - \gamma_0(\partial_0 S)_0,$$

откуда

$$(\partial_0 e_0)_0 = -2\gamma_0 \cdot (\partial_0 S)_0.$$

Для $(\Box \wedge e_0)_0$ нам известно такое выражение:

$$(\Box \wedge e_0)_0 = 2\gamma_0 \cdot (\Box \wedge S)_0 - 2(\partial_0 S)_0.$$

Таким образом, получаем, что

$$(\partial_0 e_0)_0 = \gamma_0 \cdot (\Box \wedge e_0)_0 - 2\gamma_0 \cdot [\gamma_0 \cdot (\Box \wedge S)_0];$$

однако последний член равен нулю и, следовательно,

$$(\partial_0 e_0)_0 = \gamma_0 \cdot (\Box \wedge e_0)_0.$$

Далее рассмотрим

$$\gamma_0 \cdot (\Omega_0)_0 = \gamma_0 \cdot [\gamma_0 \cdot i(\Box \beta)_0] - \gamma_0 \cdot (\Box \wedge e_0)_0;$$

так как первое слагаемое в правой части равно нулю, то

$$(\Omega_0)_0 \cdot \gamma_0 = (\partial_0 e_0)_0. \tag{63}$$

Это общее уравнение обнаруживает простую связь между ускорением и проекцией временно́й составляющей тензора вращений на ось времени.

6. ТЕНЗОР ТЕТРОДЕ

В формализме векторной алгебры выражение для тензора Тетроде в точке O записывается в виде[1])

$$T_0(\gamma_\nu) = -\gamma^\mu[\gamma_\nu(\partial_\mu\Psi)_0 i\gamma_3\tilde{\Psi}_0]_S - \rho_0 e(v_\nu)A_0,$$

где $\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, $(v_0)_0 = 1$, $(v_1)_0 = (v_2)_0 = (v_3)_0 = 0$; по μ, как всегда, проводится суммирование, а индекс S обозначает, что рассматривается лишь скалярная часть выражения, стоящего в скобках.

Поэтому, в частности,

$$T_0(\gamma_3) = -\gamma^\mu[\gamma_3(\partial_\mu\Psi)_0 i\gamma_3\tilde{\Psi}_0]_S;$$

значит,

$$T_0(\gamma_3) = -\gamma^\mu\left[\gamma_3(\partial_\mu\Psi)_0 i\gamma_3\rho_0^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta_0\right)\right]_S.$$

Однако

$$(\partial_\mu\Psi)_0 = \left\{\partial_\mu\left[\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta\right)\right]\right\}_0 + \rho_0^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta_0\right)(\partial_\mu R)_0,$$

так что в выражении для $T_0(\gamma_3)$ внутри квадратных скобок стоит

$$\left\{\partial_\mu\left[\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta\right)\right]\right\}_0 i\rho_0^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}i\beta_0\right) + \rho_0\gamma_3(\partial_\mu R)_0 i\gamma_3.$$

Скалярная часть последнего члена равна нулю, поскольку из проведенных рассуждений вытекает, что $(\partial_\mu R)_0$ является бивектором. Останется поэтому лишь

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)_0 i + \rho_0\left(-\frac{1}{2}i\right)(\partial_\mu\beta)_0 i,$$

а так как нужно взять только скалярную часть этой величины, получается такой результат:

$$T_0(\gamma_3) = -\frac{1}{2}\gamma^\mu\rho_0(\partial_\mu\beta)_0 = -\frac{1}{2}\rho_0(\square\,\beta)_0.$$

---

[1]) R. Boudet, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **278** (1974), ser. A, 1063.

7. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Покажем, что уравнение для собственных значений энергии имеет вид

$$(\partial_0 \Psi)\gamma_1\gamma_2 = E\Psi. \tag{64}$$

Умножив справа обе части (64) на употреблявшийся ранее столбец u с элементами 1, 0, 0, 0, получаем, учитывая соотношения (44), уравнение

$$(\partial_0 \Psi)\gamma_1\gamma_2 u = E\Psi u.$$

Пользуясь обозначениями (45), его можно переписать:

$$-i'\partial_0 \Phi = E\Phi,$$

т. е. привести к виду уравнения на собственные значения энергии для волновой функции Φ, являющейся спинором Дирака.

Рассмотрим уравнение (64) в точке O:

$$(\partial_0 \Psi)_0 \gamma_1\gamma_2 = E\Psi_0.$$

Преобразуем его левую часть, воспользовавшись тем, что $(\partial_0 \rho)_0$ и $(\partial_0 \beta)_0$ равны нулю, если физическая система находится в стационарном, иначе говоря, не зависящем от времени, состоянии. Таким образом, для отыскания уровней энергии имеем соотношение

$$2(\partial_0 R)_0 = 2E\gamma_2\gamma_1 = (\Omega_0)_0.$$

8. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ β

Естественно попытаться вывести на основе уравнения Дирака такое уравнение, в котором фигурировала бы сила Лоренца, действующая на электрон во внешнем поле потенциала A. С этой целью возьмем градиент от обеих частей уравнения (43), причем вычисления проведем в формализме векторной алгебры, пользуясь методом неподвижного собственного репера. Провести подобные вычисления, употребляя матричную технику, было бы крайне сложно и вряд ли даже удалось бы получить окончательный результат.

Итак, будем оперировать с уравнением (56), которое перепишем, умножив справа на $\gamma_1\gamma_2$. Получим

$$B = \square\left[\rho^{1/2} S \exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\gamma_1\gamma_2 =$$

$$= m\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta\right)[\exp(i\beta) S\gamma_0 - (\cos\beta_0)\gamma_0 S] +$$

$$+ e\rho^{1/2}(A - A_0)\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right) S.$$

Обозначим правую часть $C + D$, полагая

$$C = m\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta\right)[\exp(i\beta) S\gamma_0 - (\cos\beta_0)\gamma_0 S],$$

$$D = e\rho^{1/2}(A - A_0)\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right) S.$$

Возьмем градиенты от обеих частей равенства $B = C + D$ и умножим их на $[\rho\exp(i\beta)]^{-1/2}$. Далее перейдем к пределу, устремляя точку, в которой рассматриваются все эти величины, к O; получим

$$(\square B)_0 \exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right)\rho_0^{-1/2} = (\square C)_0 \exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right)\rho_0^{-1/2} +$$

$$+ (\square D)_0 \exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right)\rho_0^{-1/2}. \quad (65)$$

При вычислении $\square B$ заметим, что вследствие ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда можно записать

$$\square B = \square\left[\square\,\rho^{1/2} S \exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\gamma_1\gamma_2 = \square^2\left[\rho^{1/2} S\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\gamma_1\gamma_2,$$

где $\square^2$ – скалярный оператор. Таким образом,

$$\left\{\square^2\left[\rho^{1/2} S\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\right\}_0 = (\square^2\rho^{1/2})_0 \exp\left(\frac{1}{2} i\beta_0\right) +$$

$$+ \rho_0^{1/2}\left[\square^2 \exp\left(\frac{i}{2}\beta\right)\right]_0 + \rho_0^{1/2}(\square^2 S)_0 \exp\left(\frac{1}{2} i\beta_0\right),$$

и в результате имеем

$$(\Box B)_0 \rho_0^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right) = (\Box^2 \rho^{1/2})_0 \rho_0^{-1/2} \gamma_1\gamma_2 +$$
$$+ \frac{i}{2}(\Box^2 \beta)_0 \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{4}(\Box \beta)_0^2 \gamma_1\gamma_2 + (\Box^2 S)_0 \gamma_1\gamma_2.$$

Теперь переходим к вычислениям в правой части равенства:

$$\Box C = m\left\{\Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\right\}[\exp(i\beta) S\gamma_0 - (\cos\beta_0)\gamma_0 S] +$$
$$+ m\rho^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)\{[\Box \exp(i\beta)] S\gamma_0 +$$
$$+ \exp(-i\beta)(\Box S)\gamma_0 - (\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)\}.$$

Взятое в точке O, это выражение упрощается и имеет вид

$$(\Box C)_0 = m\left(\Box\left[\rho^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta\right)\right]\right)_0 i(\sin\beta_0)\gamma_0 +$$
$$+ m\rho_0^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2} i\beta_0\right)\{[\Box \exp(i\beta)]_0 \gamma_0 +$$
$$+ \exp(-i\beta_0)(\Box S)_0\gamma_0 - (\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)_0\}.$$

Отметим, что в фигурных скобках здесь стоит четное d-число. Первое слагаемое в правой части последнего равенства записывается в виде

$$\frac{1}{2} m(\Box \rho)_0 \rho_0^{-1/2} i(\sin\beta_0)\gamma_0 \exp\left(\frac{1}{2} i\beta_0\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} m\rho_0^{+1/2}(\Box \beta)_0 (\sin\beta_0)\gamma_0 \exp\left(\frac{1}{2} i\beta_0\right),$$

так что после умножения его справа на $\rho_0^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right)$ получаем

$$(\Box C)_0 \rho_0^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right) = \frac{1}{2} m(\Box \rho)_0 \rho_0^{-1} i(\sin\beta_0)\gamma_0 +$$
$$+ \frac{1}{2} m(\Box \beta)_0 (\sin\beta_0)\gamma_0 +$$
$$+ m\{[\Box \exp(i\beta)]_0 \gamma_0 + \exp(-i\beta_0)(\Box S)_0\gamma_0\} -$$
$$- m(\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)_0.$$

Заменяя здесь $(\Box S)_0$ с помощью формулы (57′), придем к выражению

$$\frac{1}{2}m(\Box\rho)_0\rho_0^{-1}i(\sin\beta_0)\gamma_0+\frac{1}{2}m(\Box\beta)_0(\sin\beta_0)\gamma_0-$$
$$-mi(\Box\beta)_0\exp(i\beta_0)\gamma_0+$$
$$+m\exp(-i\beta_0)\left[-m(\sin\beta_0)\gamma_3+\frac{1}{2}i(\Box\beta)_0-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\Box\rho)_0\rho_0^{-1}\right]\gamma_0-m(\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)_0,$$

которое после упрощений перепишется в виде

$$-\frac{1}{2}m(\cos\beta_0)(\Box\rho)_0\rho_0^{-1}\gamma_0-\frac{1}{2}im(\cos\beta_0)(\Box\beta)_0\gamma_0-$$
$$-m^2\exp(-i\beta_0)(\sin\beta_0)\gamma_3\gamma_0-m(\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)_0.$$

Преобразуем последний член:

$$-m(\cos\beta_0)\gamma^\mu\gamma_0(\partial_\mu S)_0=m(\cos\beta_0)\gamma_0(\Box S)_0-2m(\cos\beta_0)(\partial_0 S)_0=$$
$$=m(\cos\beta_0)\gamma_0\left[-m(\sin\beta_0)\gamma_3+\frac{1}{2}i(\Box\beta)_0-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\Box\rho)_0\rho_0^{-1}\right]-2m(\cos\beta_0)(\partial_0 S)_0.$$

Следовательно, получаем

$$(\Box C)_0\rho_0^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}i\beta_0\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}m(\cos\beta_0)\rho_0^{-1}[(\Box\rho)_0\gamma_0+\gamma_0(\Box\rho)_0]-$$
$$-\frac{1}{2}im(\cos\beta_0)[(\Box\beta)_0\gamma_0+\gamma_0(\Box\beta)_0]+$$
$$+im^2(\sin\beta_0)\gamma_3\gamma_0-2m(\cos\beta_0)(\partial_0 S)_0=$$
$$=-m(\cos\beta_0)\rho_0^{-1}(\partial_0\rho)_0-im(\cos\beta_0)(\partial_0\beta)_0+$$
$$+im^2(\sin\beta_0)\gamma_3\gamma_0-2m(\cos\beta_0)(\partial_0 S)_0.$$

Нам остается только вычислить

$$\square D = \frac{1}{2} e\rho^{-1/2}(\square \rho)(A - A_0)\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)S +$$
$$+ e\rho^{1/2}(\square A)\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)S + e\rho^{1/2}\gamma^{\mu}(A - A_0)\left\{\partial_{\mu}\left[\exp\left(\frac{1}{2} i\beta\right)S\right]\right\}.$$

В точке O последнее выражение сильно упрощается:

$$(\square D)_0\, \rho_0^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2} i\beta_0\right) = e(\square A)_0.$$

Для вектор-потенциала, как известно,

$$\square \cdot A = 0,$$

следовательно, $\square A$ – бивектор.

Теперь мы знаем все члены выражения (65), однако ограничимся рассмотрением его *бивекторной* части. Удерживая только бивекторные составляющие всех членов, получаем соотношение

$$(\square^2 \rho^{1/2})_0\rho_0^{-1/2}\gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{4}(\square \beta)_0^2\gamma_1\gamma_2 +$$
$$+ \frac{i}{2}(\square^2 \beta)_0\gamma_1\gamma_2 + [(\square^2 S)_0\gamma_1\gamma_2]_B =$$
$$= im^2(\sin\beta_0)\gamma_3\gamma_0 - 2m(\cos\beta_0)(\partial_0 S)_0 + e(\square A)_0; \qquad (66)$$

здесь индекс B обозначает бивекторную часть выражения в квадратных скобках. Выражение для силы Лоренца в точке O записывается в соответствии с уравнением (33):

$$e(\square A)_0 \cdot \gamma_0.$$

Приравняем внутренние произведения обеих частей (66) на вектор γ_0; замечая, что

$$i\gamma_3\gamma_0 \cdot \gamma_0 = \gamma_2\gamma_1 \cdot \gamma_0 = 0,$$

получим (с учетом найденного ранее выражения для ускорения)

$$[(\square^2 S)_0\gamma_1\gamma_2]_B \cdot \gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_3(\square^2 \beta)_0 =$$
$$= -m(\cos\beta_0)(\partial_0 e_0)_0 + e(\square A)_0 \cdot \gamma_0.$$

Обратим внимание, что в это уравнение в качестве собственной массы явно входит не m, а величина $m \cos \beta_0$. В правой части наряду со слагаемым $e(\Box A)_0 \cdot \gamma_0$, дающим выражение для силы Лоренца, фигурирует произведение этой собственной массы $m \cos \beta_0$ на ускорение. Но ведь основное уравнение релятивистской динамики частицы, записанное в собственной системе отсчета, не отличается от уравнения механики Ньютона, поскольку в этой системе трехмерная скорость частицы равна нулю. Следовательно, для электрона с собственной массой $m \cos \beta_0$, подчиняющегося релятивистской динамике Лоренца, второй член должен быть нулем, т. е.

$$e(\Box A)_0 \cdot \gamma_0 = m \cos \beta_0 (\partial_0 e_0)_0.$$

Поток собственной массы $m\rho_0 (\cos \beta_0) e_0$ должен сохраняться в соответствии с требованиями релятивистской инвариантности, так что его дивергенция равна нулю, а это в силу соотношения $\Box \cdot J_0 = 0$ приводит к условию $(\partial_0 \beta)_0 = 0$. Заменяя правую часть нашего уравнения нулем, получаем такое условие:

$$[(\Box^2 S)_0 \gamma_1 \gamma_2]_B \cdot \gamma_0 - \frac{1}{2} \gamma_3 (\Box^2 \beta)_0 = 0,$$

и можно сказать, что эта величина служит «мерой отклонения» электродинамики Лоренца от квантовой электродинамики.

Вводя таким образом собственную массу $m \cos \beta$, можно дать интерпретацию угла Такабаяси β. Действительно, непотенциальная энергия может изменяться в пределах от m ($\beta = 0$) до $-m$ ($\beta = \pi$), и, следовательно, β служит мерой смешивания волн, у которых непотенциальная энергия положительна и отрицательна. Такие волны с отрицательными энергиями связаны с виртуальными, ненаблюдаемыми, состояниями, однако они совершенно необходимы с точки зрения теории и позволяют объяснить прохождение электрона сквозь потенциальный барьер (туннельный эффект); такое преодоление барьера в классической механике невозможно, если непотенциальная энергия отрицательна (*парадокс Клейна*). Равным образом интересно сопоставить этим волнам с отрицательной энергией состояния античастицы. Из общих соображений инвариантности относительно обращения времени[1] приходится интегрировать такие волны с отрицательной энергией не только по положительным

[1] G. Casanova, Renversement du temps, Centro superiore di Logica e Scienze Comparate, Bologne, Italia, 1972.

объемам, как это делалось при изучении двух предыдущих эффектов, но и по отрицательным объемам. При таком интегрировании изменятся знаки интегралов по пространству, в частности знаки заряда и собственной массы, которые будут обозначены e^+ и m и сопоставлены не частице, а античастице. Так может быть получена интерпретация состояний, обладающих отрицательной непотенциальной энергией.

Отметим еще, что если $\Psi(m)$ является решением уравнения (43), то $\Psi(-m)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box\Psi(-m) = [-m\Psi(-m)\gamma_0 + eA\Psi(-m)]\gamma_2\gamma_1$$

и, следовательно, $i\Psi(-m)$ также удовлетворяет (43). Таким образом, каждому решению $\Psi(m)$ уравнения Дирака для частицы с собственной массой m (реальный, или наблюдаемый, электрон) сопоставляется решение $i\Psi(-m)$ с собственной массой $-m$ (электрон виртуальный, или недоступный прямым наблюдениям). При этом общее решение (43) является смесью волн с непотенциальной энергией противоположных знаков, если интегрирование в пространстве проводится по положительным объемам. При интегрировании по отрицательным объемам осуществляется переход к *позитрону* с зарядом $-e$ и массой m, а уравнение Дирака, таким образом, одинаково пригодно для частиц с зарядом e и $-e$, и это обеспечивает инвариантность уравнения при обращении времени.

9. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Так как сумма двух бикватернионов Ψ_1 и Ψ_2 является бикватернионом[1], то и $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ можно привести к каноническому виду

$$\Psi = [\rho \exp(i\beta)]^{1/2} R;$$

пусть при этом

$$\Psi_1 = [\rho_1 \exp(i\beta_1)]^{1/2} R_1, \quad \Psi_2 = [\rho_2 \exp(i\beta_2)]^{1/2} R_2;$$

здесь R, R_1, R_2 — лоренцевы вращения, ρ, ρ_1, ρ_2 — плотности вероятности, а β, β_1, β_2 — соответствующие углы. Мы рассмотрим только суперпозиции волн с положительной непотенциальной энергией, так что можно считать $\beta_1 = \beta_2 = 0$, и наложим такое условие $\beta = 0$ и на результирующую волну. Про-

[1] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **268** (1969), sér A, 437.

изведение $R_1\tilde{R}_2$ также определяет лоренцево вращение, поэтому можно представить его в виде $R_1\tilde{R}_2 = \exp(-B)$ с $B = (\theta + i\varphi)\,b$, где θ и φ — действительные числа, а b — бивектор, имеющий квадратом 1.

При наложенных условиях соотношение $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 + 2(\rho_1\rho_2)^{1/2}\operatorname{ch}\theta\cos\varphi, \\ 0 = \operatorname{sh}\theta\sin\varphi. \end{cases} \tag{67}$$

Вообще говоря, θ и $\sin\varphi$ не обязаны равняться нулю, и последнее уравнение не удовлетворяется, так что наложенных ограничений недостаточно. Потребуем, чтобы волны Ψ_1 и Ψ_2 имели одинаковые энергии; тогда, выбрав в качестве системы отсчета собственную систему для Ψ_1, получаем условие

$$e_0^2 = e_0 \cdot e_0',$$

где векторы e_0 и e_0' суть 4-скорости для частиц Ψ_1 и Ψ_2 в одной и той же пространственно-временной точке. Значит, R_1 и R_2 могут отличаться друг от друга только вращением пространства. Вычисления показывают, что в таком случае $\theta = 0$ и (67) сводится к единственному условию

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + 2(\rho_1\rho_2)^{1/2}\cos\varphi, \tag{68}$$

а это не что иное, как формула дифракции.

Пусть, например, взяты плоские монохроматические волны:

$$\Psi_1 = \rho_1^{1/2}\,u\exp[i\sigma_3(p\cdot x)],$$
$$\Psi_2 = \rho_2^{1/2}\,u\exp[i\sigma_3(p\cdot x + \varphi)],$$

где φ обозначает разность фаз. Все наложенные условия оказываются выполненными, и (68) превращается в формулу, описывающую дифракцию электронов в релятивистской теории Дирака.

Глава IX

АТОМ ВОДОРОДА

Будем называть скалярным потенциалом произведение $U\gamma_0$, где U – потенциал поля электрического заряда, помещенного в начале неподвижной системы координат, оси которой направлены вдоль векторов γ_μ. Решения уравнения (43) для движения в таком внешнем поле будем искать в виде

$$\Psi = L\exp(i\sigma_3 E x_0),$$

считая L бикватернионом, зависящим только от пространственных координат. Тогда в соответствии с уравнением (63) E оказывается собственным значением энергии в стационарном состоянии.

Уравнение Дирака (43) записывается в виде

$$\Box\Psi = (m\Psi\gamma_0 + U\gamma_0\Psi)\, i\sigma_3.$$

Преобразуем его, умножив слева на γ_0 и справа на $\exp(-i\sigma_3 E x_0)$:

$$\gamma_0\Box L = \nabla L = [m\gamma_0 L\gamma_0 + (U - E)L]\, i\sigma_3. \tag{69}$$

Разложив L в сумму кватернионов M и N:

$$L = M + iN,$$

после ряда простых преобразований сведем уравнение (69) к эквивалентной системе из двух уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} \nabla M &= (m + E - U)\, N\sigma_3, \\ \nabla N &= (m - E + U)\, M\sigma_3. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

1. ПЛОСКИЕ РЕШЕНИЯ

Уровни энергии. Существуют плоские решения (70), т. е. не зависящие от одной из пространственных координат; их легко получить как в формализме векторной алгебры [1], так и с

[1] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **270** (1970), sér. A, 1202.

помощью алгебры матриц. Отыскивая такие решения, мы вновь находим известные точные значения уровней энергии. Достаточно рассмотреть функции M и N вида

$$M = G(r)\, r^{1/2} f, \quad N = F(r)\, r^{1/2} \sigma_3 u f,$$

где r является расстоянием от переменной точки, лежащей в плоскости $z = 0$, до начала координат, $u = \sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора точки, f равняется $\exp(i\sigma_3 j\varphi)$, а j — это так называемое внутреннее квантовое число, принимающее только полуцелые положительные значения: $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, ... Оператор градиента запишем в полярных координатах (r, φ):

$$\nabla = u\partial/\partial r + (v/r)\,\partial/\partial\varphi,$$

где $v = -\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi$.

Подставив указанные выражения в (70), легко получить хорошо известную систему дифференциальных уравнений Дирака:

$$\begin{aligned} dG/dr - \left(j - \frac{1}{2}\right) G/r + (m + E - U)\, F = 0,\\ dF/dr + \left(j + \frac{3}{2}\right) F/r - (E - U - m)\, G = 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Для отыскания ее решений воспользуемся стандартным методом. Так как мы ищем положительные значения E, которые меньше, чем m, то окажутся положительными числа

$$m + E = A^2, \quad m - E = B^2;$$

возьмем $A > 0$, $B > 0$. Неизвестные функции F и G представим в виде

$$\begin{cases} F = \exp(-ABr)(a_0 + a_1 r + \ldots + a_m r^m + \ldots + a_p r^p)\, r^\gamma,\\ G = \exp(-ABr)(b_0 + b_1 r + \ldots + b_m r^m + \ldots + b_p r^p)\, r^\gamma. \end{cases} \tag{72}$$

Подчеркнем, что в этих выражениях γ обозначает некоторое действительное число, а не вектор, индекс m принимает целочисленные значения от 1 до p и все числа a_m и b_m действительные.

Кроме вытекающего из такого представления условия обращения M и N в нуль на бесконечности ($r = +\infty$), наложим еще условие обращения в нуль в начале координат ($r = 0$).

Далее запишем

$$U = -Zee^{-}/r = -Z\alpha/r,$$

где Z – атомный номер, а α – постоянная тонкой структуры, значение которой близко к $^{1}/_{137}$.

Подставив выражения (72) в (71), найдем, что

$$\gamma = -1 + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2},$$

и, кроме того, получим рекуррентные соотношения, позволяющие путем итераций определить a и b с точностью до множителя, который будет найден впоследствии из условия нормировки. Таким образом удается получить выражение для уровней энергии, учитывающее тонкую структуру подуровней, отвечающих одному и тому же значению главного квантового числа $n = p + j + \dfrac{1}{2}$:

$$E = m\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(p + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right]^{-1/2}.$$

Для практических расчетов часто достаточно ограничиться в этом выражении двумя первыми членами разложения по степеням малого параметра α. В таком приближении для основного состояния ($n = 1$, $j = {}^{1}/_{2}$) значение энергии равняется

$$E(1) = RZ^2\left[1 + \alpha^2/4Z^2\right],$$

где R – постоянная Ридберга для неподвижного ядра. Мы предполагали, что центральный заряд неподвижен, тогда как на самом деле неподвижен центр тяжести системы ядро – отрицательный электрон, т. е. ядро вовлекается в движение; для учета этого эффекта при приближенных вычислениях надо в выражении для E правую часть умножить на $1 + P/1840$, где P – атомный вес.

Приняв фундаментальную постоянную E_h для атома водорода равной 13,5378, получаем для $Z - 1$ раз ионизованных атомов с $Z \leqslant 10$ значения уровней энергии, которые хорошо воспроизводят величины из «Таблицы констант» Бауэра и

Сюрдена [1], так что абсолютная погрешность не превосходит 0,02 эВ. Однако если взять для E_h величину 13,605 эВ, то при $Z = 10$ отклонение составит 6,75 эВ, так что, если считать формулы теории Дирака точными, приходится сделать вывод: либо экспериментальные величины из упомянутой Таблицы несколько занижены, особенно при больших значениях Z, либо чересчур велико это второе значение фундаментальной постоянной для атома водорода.

2. ПОЛЕВЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определим прежде всего собственную вероятность для плоских решений. Так как

$$\rho \exp(i\beta) = \Psi\tilde{\Psi} = r(G + iF\sigma_3 u)(G - iF\sigma_3 u) = r(G^2 - F^2),$$

то $\rho \sin\beta = 0$. Предположим сначала, что $\beta = 0$; тогда с необходимостью $F^2 < G^2$ и это условие выполняется, как легко видеть, в некоторой окрестности начала координат. Можно полагать F и G равными соответственно

$$G = (\rho/r)^{1/2} \operatorname{ch}\frac{1}{2}\delta, \quad F = (\rho/r)^{1/2} \operatorname{sh}\frac{1}{2}\delta.$$

Вычисляя четырехмерную скорость e_0, получим

$$e_0 = \gamma_0 \operatorname{ch}\delta - v\gamma_0 \operatorname{sh}\delta.$$

Следовательно, приведенная скорость по абсолютной величине равна $|\operatorname{th}\delta|$, так что условие нормировки, записанное в неподвижной системе отсчета, выглядит так же, как в обычном формализме:

$$1 = \int_0^{+\infty} r(G^2 + F^2)\,dr,$$

т. е. в этой неподвижной системе вероятность присутствия частицы никогда не может обратиться в нуль. Напротив, для собственной системы следует рассмотреть и уравнение $G^2 = F^2$, которое могло бы иметь решения только при положительных p, так как при $p = 0$ решений не существует, а также следовало бы рассмотреть случай $G^2 < F^2$, когда с необходимостью $\beta = \pi$. Однако результаты обсуждения этих случаев не могут повлиять

[1] Bauer et Surdin, Table des constantes, G. Villars, Paris, 1942.

на вычисленные значения уровней энергии, ибо они от β не зависят, так же как не зависит от β и условие нормировки, записанное в неподвижной системе отсчета.

3. МОМЕНТЫ ИМПУЛЬСА

То обстоятельство, что рассматриваются плоские решения, позволяет вычислить для них орбитальные моменты. Проведем интегрирование плотностей момента в каждой из плоскостей; по крайней мере это нетрудно сделать в нерелятивистском приближении, когда можно пренебречь F^2 по сравнению с G^2, и тогда для величины орбитального момента импульса получим

$$\frac{h}{2\pi}\left(j+\frac{1}{2}\right)\sigma_3.$$

Полный момент импульса найдем, прибавляя к этой величине или вычитая из нее $h/4\pi$ в зависимости от направления спина. Различные возможные расположения плоскостей орбит в пространстве квантуются: рассматривая направление σ_3 как выделенное направление в пространстве, можно утверждать, что проекции на σ_3 упомянутого полного момента являются целыми кратными $h/2\pi$. Квантование описывается следующей формулой, в которой a обозначает угол, образованный плоскостью орбиты с плоскостью $z=0$, перпендикулярной σ_3:

$$\cos a = m'\bigg/\left(l+\frac{1}{2}\right); \tag{73}$$

здесь m' — целое число, $|m'| \leqslant j$ и возможны два случая: $j = l \pm {}^1/_2$.

Анализируя эту формулу, можно прийти к правилу Стонера, а также получить формулу Ланде для сдвига уровней, вызванного слабым магнитным полем [1].

4. ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Используя плоские решения, можно развить метод приближенных вычислений невозбужденных нижних уровней для атомов более сложных, чем атом водорода. Сначала рассмотрим чисто умозрительную орбиту радиуса r для уровня энергии E, когда заряд ядра равен $Z'e^+$, а для энергии взято выражение

$$E = -Z'^2E_h/n^2 = -Z'^2(e^-)^2/2r,$$

[1] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **271** (1970), sér. A, 817.

в котором E_h – фундаментальная постоянная атома водорода.

Затем, учитывая, что в основном состоянии n равняется $j + {}^1/_2$, будем считать, что значения 1, 2, ... квантового числа n соответствуют стандартным спектроскопическим обозначениям орбитальных уровней K, L, ... А так как в квантовой механике при каждом значении n возможно только $2n$ различных положений плоскости орбиты в пространстве, то предположим, что на одном уровне пребывает n электронов с плоскими орбитами, и частицы эти могут считаться независимыми, если принять, что каждая из них находится в центральном поле приведенного заряда

$$Z'e^+ = (Z - k)e^+.$$

Введенный для учета экранирования ядра член k соответствует результирующей центральных сил, созданных остальными электронами в направлении радиус-вектора OA, проведенного из центра ядра O в ту точку орбиты A, где расположен рассматриваемый электрон.

Затем надо минимизировать силы взаимодействия, т. е. выбрать для попарно взаимодействующих электронов такие положения на орбитах, когда они максимально удалены друг от друга.

Проделать соответствующие вычисления для случая $Z - 2$ раз ионизованного атома с зарядом ядра Z довольно просто, потому что при $n = 1$, $j = {}^1/_2$ оказывается, что $l = 0$ или $l = 1$, так что углы, которые плоскости двух орбит могут образовывать с σ_3, определяются на основании (73) соответственно из условий $\cos a = 1$ или $\cos a = {}^1/_3$. Коэффициент взаимодействия k в таком случае равен $\sqrt{6}/8$, а полная энергия двух электронов равняется

$$E = 2(Z - \sqrt{6}/8)^2 E_h. \tag{74}$$

Прежде чем перейти к обоснованию этой формулы, отметим, что в случае таких двухэлектронных систем при корректном решении волнового уравнения Шредингера с помощью последовательных приближений по методу Хиллерааса получаются значения энергии, довольно близкие к экспериментальным данным. Так, для атома гелия, если ограничиться первым квантовомеханическим приближением, выбирая в качестве приближенной волновой функции системы частиц произведение экспонент, которое соответствует минимуму энергии взаимодействия, то расчетное значение энергии 77 эВ, найденное при $E_h = 13{,}5378$, оказывается несколько меньше экспериментального значения 78,63 эВ.

Применяя формулу (74), получим значение 77,69 эВ, которое оказывается лучшим приближением. Однако предложенный нами метод не позволяет улучшать этот результат. Можно, однако, отметить, что принципиальная схема нашего расчета энергий основных состояний может быть использована и в более общих случаях для атомов, ионизованных $Z - 3$ раз и даже $Z - 10$ раз, и при этом получаются хорошие результаты. Для атомов, ионизованных $Z - p$ раз (p целое, $3 < p < 10$), совпадение результатов с экспериментальными значениями в большинстве случаев очень хорошее, но иногда минимуму энергии могут отвечать несколько различных конфигураций, т. е. задача вырождена, и тогда экспериментальные значения чаще всего оказываются близки к расчетным величинам, усредненным по различным возможным состояниям [1)].

Теперь займемся выводом формулы (74).

Пусть в общем случае электрон A находится в плоскости $z = 0$ (рис. 5), а электрон B – в плоскости $P(\cos a)$ и длины

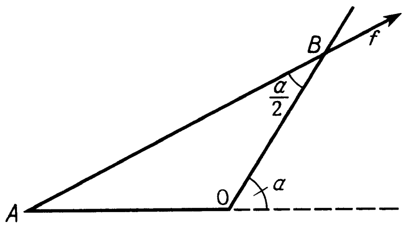


Рис. 5.

векторов $OA = OB = r$. Сила отталкивания между электронами f минимальна при $\angle BOA = \pi - a$, и в таком случае

$$f = (e^-)^2/4r^2 \cos^2 \frac{1}{2} a.$$

Ее составляющая $f \cos \frac{1}{2} a$ вдоль OB обусловливает изменение эффективного заряда, действующего на B, в приближении цент-

---

[1)] *C. R. Acad. Sc. Paris*, **275** (1972), sér. B, 53, 121, 267, 399.

рального поля:

$$Z' = Z - k_{BA} = Z - 1/4 \cos\frac{1}{2}a.$$

Предположим еще, что вследствие устойчивости плоскости орбиты составляющая f, перпендикулярная OB, уничтожается.

Для атомов, ионизованных $Z-2$ раз, $\cos a = {}^1/_3$ и, следовательно,

$$Z' = Z - \sqrt{6}/8,$$

так что полная энергия двух электронов находится по формуле (74). Если выбрать для фундаментальной постоянной E_h значение 13,54, то для энергии E основного состояния двухэлектронной системы в поле ядра получим следующую таблицу, в которой E' представляет экспериментальное значение энергии в электронвольтах, заимствованное из Бауэра и Сюрдена:

$Z=2$	(He)	$E=$ 77,69	$E'=$ 78,63
$Z=3$	(Li)	$E=$ 196,51	$E'=$ 197,12
$Z=4$	(Be)	$E=$ 369,49	$E'=$ 369,74
$Z=5$	(B)	$E=$ 596,62	$E'=$ 596,56
$Z=6$	(C)	$E=$ 877,92	$E'=$ 877,56
$Z=7$	(N)	$E=$ 1213,38	$E'=$ 1212,81
$Z=8$	(O)	$E=$ 1602,99	$E'=$ 1602,31

Как только число электронов p превосходит 2, квантовая механика вынуждена обращаться к приближенным методам решения задачи[1]. Покажем, каким образом рассмотренный выше метод позволяет очень легко получать приближенные решения.

Для электрона C, принадлежащего оболочке L, $n=2$ и $j={}^3/_2$, так что $\cos a = 1$. Пусть в плоскости $z=0$ расположены электроны A и B. Орбиты электронов A и B, принадлежащих оболочке K, предполагаем удаленными на расстояние r от начала координат, и пусть радиус орбиты электрона C из оболочки L равен R. Введем число u соотношением $r=uR$ и попытаемся его определить, напомнив, что мы считаем радиусы орбит пропорциональными n^2/Z'. Ограничимся случаем $p=3$.

---

[1] E. U. Condon, G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge, 1970.

Действие A на C, очевидно, окажется минимальным, когда A и C диаметрально противоположны (рис. 6), и коэффициент k_{AC} задается формулой

$$k_{AC} = \frac{R^2}{(R+r)^2} = \frac{1}{(1+u)^2}.$$

Минимальному воздействию C на A соответствует значение коэффициента

$$k_{CA} = \frac{r^2}{(R+r)^2} = \frac{u^2}{(1+u)^2}.$$

Не следует, конечно, упускать из виду, что в квантовой механике рассмотрение орбит – это всегда чистейшая спекуля-

Рис. 6.

ция, орбиты не соответствуют истинному движению электронов и существуют только в качестве наглядных образов, с помощью которых удобно проводить математические оценки величины взаимодействия.

Введем теперь из соображений симметрии

$$k_{CA} = k_{CB} \text{ и } k_{AC} = k_{BC},$$

так как электроны A и B играют одинаковые роли и тем самым неразличимы.

Таким образом, для определения u получаем уравнение

$$4u\left(Z - \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{u^2}{(1+u)^2}\right) = Z - \frac{2}{(1+u)^2},$$

которое при каждом Z имеет только один положительный корень, причем его значение не превосходит 0,25. Энергию одного электрона C найдем, вычитая $2\left(Z - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2$ из полной энергии трехэлектронной системы; тогда в единицах E_h получается выражение

$$E = \frac{1}{4}\left(Z - \frac{2}{(1+u)^2}\right)^2 - \frac{4u^2\left(Z - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)}{(1+u)^2} + \frac{2u^4}{(1+u)^4}.$$

Результаты вычислений по этой формуле сведены в таблицу, в которой E' обозначает экспериментальное значение энергии, взятое у Бауэра и Сюрдена:

$Z = 3$	(Li)	$E = 5{,}04$	$E' = 5{,}37$
$Z = 4$	(Be)	$E = 17{,}62$	$E' = 18{,}13$
$Z = 5$	(B)	$E = 37{,}11$	$E' = 37{,}74$
$Z = 6$	(C)	$E = 63{,}41$	$E' = 64{,}17$
$Z = 7$	(N)	$E = 96{,}53$	$E' = 97{,}40$
$Z = 8$	(O)	$E = 136{,}46$	$E' = 137{,}42$
$Z = 9$	(F)	$E = 183{,}12$	$E' = 184{,}26$
$Z = 11$	(Na)	$E = 296{,}84$	$E' = 298{,}39$

Относительная точность приближения тем лучше, чем больше номер Z.

Применение изложенного метода приводит к хорошим результатам, особенно для $p = 4$ и $p = 10$. При $p = 4$ нужному уровню отвечают $n = 2$, $j = 3$, так что квантовое число l принимает значения 1 и 2, а для $\cos a$ возможны четыре значения. Будем говорить, что атом находится в нормальном состоянии, если при $p = 4$ два электрона из оболочки L движутся в одной плоскости. Согласие с опытом получается тогда очень хорошим, за исключением случая $Z = 7$, соответствующего четырежды ионизованному азоту, когда приходится предположить, что электроны оболочки L движутся в разных плоскостях, т. е. имеет место вырождение.

5. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Волновые функции плоских решений не обладают свойством однозначности из-за присутствия нецелого множителя j в показателе экспоненты. Эти волновые функции изменяют знак при изменении угла φ на 2π, так что не имеет смысла говорить о значении этой функции в каждой точке пространства. Уже по этой причине они не могут рассматриваться как вполне реальные объекты. Но при такой смене знака не меняются полевые величины, которые представляют собой квадратичные формы от волновых функций, и именно эти величины имеют точный физический смысл. В привычной теории Дирака можно строить однозначные волновые функции в эрмитовом векторном пространстве, вводя решения, выражающиеся через сферические гармоники. Применяя векторную алгебру, следует заменить такие функции волновыми функциями, представляющими собой бикватернионы в пространстве-времени[1)].

Два уравнения (65) всегда остаются в силе, и мы будем искать их решения, полагая

$$M = G(r)S\sigma_3, \quad N = F(r)P \text{ и } S = nP.$$

В задаче, обладающей сферической симметрией, r обозначает радиус-вектор, а P является функцией единичного вектора n, направленного вдоль радиус-вектора. Следовательно, можно записать

$$n = \sigma_3 \cos\theta + u \sin\theta,$$

и это выражение вводит широту θ наряду с долготой φ, фигурировавшей в определении u, приведенном в начале этой главы.

Подставляя эти выражения в (70), получим дифференциальную систему Дирака (71). Решениями ее окажутся функции

$$S = (C\sigma_3 + Du)\exp(i\sigma_3 m\varphi),$$

где m – целое число, а C и D выражаются с помощью функций Лежандра:

$$C = \omega P_l^m(\cos\theta), \quad D = P_l^{m+1}(\cos\theta),$$

если l – целое положительное число или нуль. Кроме того, должны выполняться соотношения

$$|m| < l \text{ и } \omega = l - m$$

или

$$\omega = -(l + m + 1).$$

С точностью до числовых множителей полиномы Лежандра от действительной переменной x определяются равенством

$$P_l(x) = d^l(1 - x^2)^l/dx^l,$$

а функции Лежандра – равенством

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} d^m P_l(x)/dx^m.$$

Эти числовые множители можно определить из приводившегося ранее условия нормировки, записанного в неподвижной системе отсчета.

[1)] R. Boudet, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **278** (1974), sér. A, 1064.

Вычисление угла β показывает, что он имеет величину порядка приведенной скорости v/c, так что в нерелятивистском приближении всегда можно полагать массу равной m, а не $m \cos \beta$; впрочем, на собственных значениях энергии, не зависящих от β, это обстоятельство не скажется.

Таким образом, применяя векторную алгебру, можно решать задачи теории Дирака, и решения имеют ясный физический смысл.

Глава X

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ НУКЛОНА

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НУКЛОНА

Запишем наше уравнение для нуклона в виде

$$\square B = \{mB\gamma_0 + e(\cos\theta/2)A\exp[i(B\gamma_1\gamma_0 B^{-1})\theta/2]B\}\gamma_2\gamma_1 + Bpi, \tag{75}$$

где бикватернион B обозначает волновую функцию нуклона, A описывает электромагнитное поле, а p – пионное поле, которое вводится формулой

$$p = p^1\gamma_1 + p^2\gamma_2 + p^3\gamma_3.$$

Кроме того, e – заряд протона, m – масса нейтрона $m(N)$, а безразмерная величина θ – угловая переменная. Легко видеть, что уравнение (75) при обращении пионного поля в нуль переходит в уравнение Дирака для электрона, если m считать массой электрона и взять $\theta = 0$.

Уравнение (75) инвариантно относительно произвольного постоянного лоренцева вращения, которое будет обозначаться R_1. В самом деле, заменяя в уравнении B на $B'R_1$ и умножая (75) справа на $\tilde{R}_1$, получим в результате для B' такое же уравнение (75), в котором векторы γ_μ заменены векторами $\gamma'_\mu = R_1\gamma_\mu\tilde{R}_1$, так как

$$B'R_1\gamma_1\gamma_0(B'R_1)^{-1} = B'R_1\gamma_1\tilde{R}_1R_1\gamma_0\tilde{R}_1B'^{-1} = B'\gamma'_1\gamma'_0B'^{-1}.$$

Компоненты пионного поля при таком преобразовании не изменяются, и это обстоятельство должно иметь физический смысл, который проявится в дальнейшем. Отметим еще, что пионное поле не обладает свойством калибровочной инвариантности.

2. ИЗОВЕКТОРЫ

Решение $B(x)$ рассматриваемого уравнения можно записать в форме

$$B = [\rho \exp(i\beta)]^{1/2} Q, \tag{76}$$

где Q – вращение Лоренца, а ρ – собственная плотность вероятности в точке x. Далее мы увидим, что угол β допускает ту же интерпретацию, что и в теории Дирака. Введем четверку векторов i_μ соотношением

$$i_\mu = Q\gamma_\mu \tilde{Q} = B\gamma_\mu B^{-1}$$

и еще четыре вектора

$$I_\mu = B\gamma_\mu \tilde{B} = \rho i_\mu.$$

Затем зададим лоренцево вращение R, полагая

$$R = \exp\left[i(i_1 i_0)\frac{\theta}{2}\right] Q,$$

где $i_1 i_0 = Q\gamma_1\gamma_0\tilde{Q} = B\gamma_1\gamma_0 B^{-1}$, и введем векторы

$$J_\mu = \rho e_\mu = \rho R\gamma_\mu \tilde{R} = \exp\left[i(i_1 i_0)\frac{\theta}{2}\right] I_\mu \exp\left[-i(i_1 i_0)\frac{\theta}{2}\right].$$

Временной вектор J_0 интерпретируется как ток плотности вероятности нуклона, пространственный вектор J_3 задает распределение вероятности спина нуклона. Простые вычисления показывают, что в каждой точке x пространства-времени $J_0 = I_0$ и $J_1 = I_1$, однако векторы I_α $(\alpha = 2, 3)$ получаются в результате вращения векторов J_α вокруг пространственного вектора $i_1 i_0$ в положительном направлении на угол θ; вращения совершаются в собственном пространстве, взятом в точке x. Все векторы I_μ называются *изовекторами*, а вектор I_3 называется *изоспином* в точке x.

Мы хотим теперь обобщить уравнение (75), подставляя туда вместо i_1 пространственный вектор j, по определению равный

$$j = s^1 i_1 + s^2 i_2 + s^3 i_3,$$

где s^1, s^2, s^3 – действительные числа. Тогда

$$j i_0 = s^1 i_1 i_0 + s^2 i_2 i_0 + s^3 i_3 i_0.$$

Кроме того,

$$ji_0 = Q(s^1 i_1 i_0 + s^2 i_2 i_0 + s^3 i_3 i_0)\tilde{Q} = B(s^1\sigma_1 + s^2\sigma_2 + s^3\sigma_3)B^{-1}.$$

Уравнение (75), подвергнутое такому преобразованию, будет именоваться уравнением (75′).

Введем еще величины R' и J'_μ, полагая

$$R' = \exp[i(ji_0)\theta/2]\,Q, \quad J'_\mu = \rho R'\gamma_\mu \tilde{R}'.$$

Подчеркнем, что всегда $J'_0 = I_0$, поскольку iji_0 коммутирует с γ_0, и поэтому

$$\Box\cdot J'_0 = \Box\cdot I_0.$$

Для сохранения вероятности необходимо, чтобы дивергенция вектора тока J'_0 была равна нулю в каждой точке x, и мы рассмотрим, при каких условиях это свойство может быть выполнено в нашей теории нуклона. Для этого найдем дивергенции изовекторов I_μ, применив метод мгновенной собственной системы отсчета в произвольной точке O, взятой в качестве начала координат ($x = 0$). Выбираем в каждой точке x собственный базис, определяемый лоренцевым вращением Q; при этом

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 = 1$$

и, следовательно,

$$(i_\mu)_0 = \gamma_\mu, \quad (i_1 i_0)_0 = \gamma_1\gamma_0 = \sigma_1,$$
$$(ji_0)_0 = s_0^1\sigma_1 + s_0^2\sigma_2 + s_0^3\sigma_3 = \sigma,$$

а $(\Box\cdot i_0)_0 = 2\gamma_0\cdot(\Box\cdot Q)_0$, так как $(\partial_\mu Q)_0$ является бивектором.

Из (76) выводим, что

$$\Box B = \frac{1}{2}(\Box\,\rho)\rho^{-1/2}\exp(i\beta/2)Q -$$
$$- \frac{i}{2}\rho^{1/2}(\Box\,\beta)\exp(i\beta/2)Q + \rho^{1/2}\exp(-i\beta/2)(\Box\,Q),$$

и, рассматривая это соотношение в начале O, получаем локальное равенство

$$(\Box\,B)_0 = \frac{1}{2}(\Box\,\rho)_0\,\rho_0^{-1/2}\exp(i\beta_0/2) -$$
$$- \frac{i}{2}\rho_0^{-1/2}(\Box\,\beta)_0\exp(i\beta_0/2) + \rho_0^{1/2}\exp(-i\beta_0/2)(\Box\,Q)_0. \quad (77)$$

Подсчитаем теперь $(\Box B)_0$ с помощью (75'). Получаем

$$(\Box B)_0 = \left[mB_0\gamma_0 + e(\cos\theta_0/2)A_0\exp\left(\frac{i}{2}\sigma\theta_0\right)B_0\right]\gamma_2\gamma_1 + B_0p_0 i =$$

$$= m\rho_0\exp\left(\frac{i}{2}\beta_0\right)\gamma_0\gamma_2\gamma_1 +$$

$$+ e\rho_0^{1/2}\cos(\theta_0/2)A_0\exp\left(\frac{i}{2}\sigma\theta_0\right)\exp\left(\frac{i}{2}\beta_0\right)\gamma_2\gamma_1 +$$

$$+ \rho_0^{1/2}p_0\exp\left(-\frac{i}{2}\beta_0\right)i. \tag{78}$$

Исключив из (77) и (78) $(\Box B)_0$ и умножив найденное соотношение справа на $\exp(-i\beta_0/2)$, получим, заметив, что $(\Box Q)_0$ — нечетное d-число, уравнение

$$(\Box \rho)_0\rho_0^{-1/2} - i\rho_0^{1/2}(\Box \beta)_0 + 2\rho_0^{1/2}(\Box Q)_0 =$$

$$= 2m\rho_0^{1/2}\exp(i\beta_0)\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + 2e\rho_0^{1/2}(\cos\theta_0/2)A_0\exp\left(\frac{i}{2}\sigma\theta_0\right)\gamma_2\gamma_1 +$$

$$+ 2\rho_0^{1/2}p_0\exp(-i\beta_0)i. \tag{79}$$

Для нахождения $(\Box\cdot Q)_0$ отделим в полученном равенстве векторную часть; приходим к соотношению

$$(\Box \rho)_0\rho_0^{-1} + 2(\Box\cdot Q)_0 = -2m\gamma_3\sin\beta_0 +$$

$$+ 2p_0\sin\beta_0 + \left[2e(\cos\theta_0/2)A_0\exp\left(\frac{i}{2}\sigma\theta_0\right)\gamma_2\gamma_1\right]_V, \tag{80}$$

где индекс V означает, что берется только векторная часть выражения в квадратных скобках.

Эту векторную часть выпишем, предварительно разложив вектор σ. Ясно, что

$$[2e\cos^2(\theta_0/2)A_0\gamma_2\gamma_1 - e(\sin\theta_0)A_0(s_0^1\sigma_1\sigma_3 + s_0^2\sigma_2\sigma_3 + s_0^3)]_V =$$

$$= 2e\cos^2(\theta_0/2)(A_0^1\gamma_2 - A_0^2\gamma_1) - e(\sin\theta_0)A_0 s_0^3 - e(\sin\theta_0)A_0 s_0^1\gamma_3 +$$

$$+ e(\sin\theta_0)A_0^3\gamma_1 s_0^1 - e(\sin\theta_0)A_0^2 s_0^2\gamma_3 + e(\sin\theta_0)A_0^3 s_0^2\gamma_2.$$

Так как, кроме того, $(\Box\cdot I_0)_0 = \gamma_0\cdot(\Box \rho)_0 + \rho_0(\Box\cdot i_0)_0 = \gamma_0\cdot(\Box \rho)_0 + 2\rho_0\gamma_0(\Box\cdot Q)_0$, то в результате имеем

$$(\Box \rho)_0\rho_0^{-1}\cdot\gamma_0 + 2\gamma_0\cdot(\Box\cdot Q)_0 = -e(\sin\theta_0)A_0^0 s_0^3 = (\Box\cdot I_0)_0\rho_0^{-1}.$$

Очевидно, что условие $s_0^3 = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы дивергенция I_0 обращалась в нуль при наличии любого электромагнитного поля. Естественно включить это условие в нашу теорию, положив

$$\sigma = \sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi,$$

где φ — некоторый угол. Теперь мы можем разложить $\exp(-i\sigma\theta_0/2)$, а поэтому и B окажется разложенным на три части, но в таком случае можно рассматривать (75′) как уравнение для триплета барионов Σ.

Однако в теории нуклона достаточно выбрать $\sigma = \sigma_1$, как мы уже делали вначале. Вот почему мы вычисляем в дальнейшем дивергенции векторов I_μ, заменяя в равенствах (78) и (79) σ на σ_1. Таким образом, вместо (80) получим

$$(\Box\,\rho)_0\rho_0^{-1} + 2(\Box\cdot Q)_0 = -2m\gamma_3\sin\beta_0 + 2p_0\sin\beta_0 + \\ + 2e\cos^2(\theta_0/2)(A_0^1\gamma_2 - A_0^2\gamma_1) + e(\sin\theta_0)(A_0^3\gamma_1 - A_0^1\gamma_3).$$

Из равенства $(\Box\cdot i_\mu)_0 = 2\gamma_\mu\cdot(\Box\cdot Q)_0$ сначала выводим, что

$$(\Box\cdot I_\mu)_0 = \gamma_\mu\cdot(\Box\,\rho)_0 + \rho_0(\Box\cdot i_\mu)_0 = \gamma_\mu\cdot(\Box\,\rho)_0 + 2\,\rho_0\gamma_\mu\cdot(\Box\cdot Q)_0,$$

а затем, что

$$(\Box\cdot I_\mu)_0 = (I_\mu)_0\cdot[-2\,m\gamma_3\sin\beta_0 + 2\,p_0\sin\beta_0 + \\ + 2\,e\cos^2(\theta_0/2)(A_0^1\gamma_2 - A_0^2\gamma_1) + e(\sin\theta_0)(A_0^3\gamma_1 - A_0^1\gamma_3)].$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} (\Box\cdot I_1)_0 &= -2\rho_0 p_0^1\sin\beta_0 + 2\,e\rho_0\cos^2(\theta_0/2)\,A_0^2 - e\rho_0(\sin\theta_0)\,A_0^3, \\ (\Box\cdot I_2)_0 &= -2\,\rho_0 p_0^2\sin\beta_0 - 2\,e\rho_0\cos^2(\theta_0/2)\,A_0^1, \qquad (81) \\ (\Box\cdot I_3)_0 &= -2\,\rho_0 p_0^3\sin\beta_0 + 2\,m\rho_0\sin\beta_0 + e\rho_0(\sin\theta_0)\,A_0^1. \end{aligned}$$

Заметим, что если $\theta = 0$, $p = 0$ и если m равна массе электрона, то эти уравнения, как и следует, совпадут с уравнениями для дивергенций в теории Дирака.

3. КОМПОНЕНТЫ ПИОННОГО ПОЛЯ

Определим локальные компоненты пионного поля, т. е. компоненты по отношению к базису собственной системы для нуклона, которая задается условием $Q_0 = 1$. С этой целью запишем два уравнения Дирака, для протона и нейтрона соответственно. Введем обозначение

$$B = B^{+} + B^{0},$$

полагая

$$\begin{aligned} B^{+} &= \cos(\theta/2)\exp[i(i_1 i_0)\,\theta/2]\,B = \cos(\theta/2)\,[\rho\exp(i\beta)]^{1/2} R, \\ B^{0} &= -\,i(i_1 i_0)\sin(\theta/2)\exp[i(i_1 i_0)\,\theta/2]\,B = \\ &= \sin(\theta/2)\,[\rho\exp(i\beta)]^{1/2}\exp\left[-\,i(i_1 i_0)\frac{\pi}{2}\right] R, \end{aligned}$$

и будем сопоставлять волновую функцию B^{+} протону, а B^{0} нейтрону.

Из этих определений вытекает, что для протона и нейтрона собственная плотность вероятности присутствия в точке x равняется соответственно $\cos^2(\theta/2)$ и $\sin^2(\theta/2)$. Переход от собственной системы для протона к собственной системе для нейтрона осуществляется вращением на угол $-\pi/2$ вокруг вектора $i_1 i_0$.

Полагая еще, что масса протона $m(P)$ равна $m(N) - \delta m$, запишем уравнения Дирака для протона и нейтрона:

$$\begin{aligned} \Box B^{+} &= [m(N) - \delta m]\,B^{+}\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + eAB^{+}\gamma_2\gamma_1, \\ \Box B^{0} &= m(N)\,B^{0}\gamma_0\gamma_2\gamma_1. \end{aligned}$$

Сложив эти два уравнения, видим, что волновая функция нуклона B удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Box B = [m(N)B - (\delta m)B^{+}]\,\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + \\ + e\,\{\cos(\theta/2)\,A\exp[i(i_1 i_0)\,\theta/2]\}\,B\gamma_2\gamma_1. \end{aligned}$$

Но, рассматривая это уравнение в начале координат O, можно отождествить его с локальным уравнением, выведенным из (75), если считать, что

$$p_0^1 = 0, \quad p_0^2 = (\delta m)\cos(\theta_0/2)\sin(\theta_0/2), \quad p_0^3 = (\delta m)\cos^2(\theta_0/2). \tag{82}$$

По существу мы убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} -\,(\delta m)\,B_0^{+}\gamma_0\gamma_2\gamma_1 &= -\,(\delta m)\cos(\theta_0/2)\exp(i\sigma_1\theta_0/2)\,B_0\gamma_0\gamma_2\gamma_1 = \\ &= B_0\,(p_0^1\gamma_1 + p_0^2\gamma_2 + p_0^3\gamma_3)\,i, \end{aligned}$$

откуда и выводятся равенства (82) после упрощения, связанного с четностью B_0.

Теперь можно дать интерпретацию углу β. Так же, как и в теории Дирака, легко проверить, что $iB(-m)$ удовлетворяет уравнению (75) в каждой точке пространства-времени, если решением (75) является $B(m)$. Мы знаем, что в теории Дирака собственная масса равна $m\cos\beta_0$; следовательно, это верно и для теории нуклона, поскольку локальное уравнение для нуклона получается в результате сложения двух локальных уравнений Дирака, в которых параметр β_0 принимает одно и то же значение.

Тем самым $\beta_0 = 0$ соответствует состоянию с положительной энергией $B(m, \delta m)$, т. е. отвечает частице, в то время как $\beta_0 = \pi$ соответствует состоянию с отрицательной энергией $iB(-m, -\delta m)$, т. е. отвечает виртуальной частице, если интегрирования проводятся по положительным объемам, и античастице при интегрировании по отрицательным объемам.

Определим заряд нуклона q, который должен выражаться через волновую функцию протона B^+. Положив $e = 1$, запишем $q_0 = (B^+\tilde{B}^+)_0 = \cos^2(\theta_0/2) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos\theta_0)$, а затем, предположив, что фактически в точке O наблюдается один нуклон, получим в результате, что $\rho_0 = 1$, а $\beta_0 = 0$. Таким образом, $q_0 = 0$, если $\theta_0 = \pi$ $(B_0^0 = 1,\ B_0^+ = 0)$, и $q_0 = 1$, если $\theta_0 = 0$ $(B_0^0 = 0, B_0^+ = 1)$, а появление постоянного слагаемого $^1/_2$ в выражении для q_0 отнесем на счет барионного числа, равного 1 для нуклона.

Наконец, из последнего выражения выводим, что

$$\operatorname{tg}(\theta_0/2) = p_0^2/p_0^3,$$

а

$$q_0 = (p_0^3)^2/[(p_0^2)^2 + (p_0^3)^2],$$

т. е. заряд можно выразить через компоненты пионного поля.

Прибавим к этому еще важный физический аргумент. Применение локальных уравнений оправдывается таким экспериментальным фактом: пионные взаимодействия эффективно проявляются на расстояниях, меньших радиуса Юкавы, так что взаимодействующие частицы будут локализованы в течение очень коротких промежутков времени.

4. ДУБЛЕТ Ξ

Применявшееся выше разложение функции B было до некоторой степени произвольным, и мы с тем же успехом можем предположить, что

$$B^0 = \cos(\theta/2)\exp[i(i_1 i_0)\theta/2]\,B,$$
$$B^+ = -\,i(i_1 i_0)\sin(\theta/2)\exp[i(i_1 i_0)\theta/2]\,B.$$

В таком случае заряд станет принимать значения

$$q_0' = \pm\sin^2(\theta_0/2).$$

Полученный таким образом дублет частиц назовем Ξ-частицами. Если заменить в (75) θ на $\theta+\pi$, то Ξ будет удовлетворять этому уравнению. Назовем Ξ-частицу «сопряженной» нуклону. Если $\theta_0 = 0$, то получается незаряженный барион Ξ^0, а если $\theta_0 = \pi$, получим заряженный барион Ξ. Дадим определение странности Ξ-частицы: это целое число S, равное удвоенной разности зарядов q_0' и q_0, т. е.

$$S = 2(q_0' - q_0) = 2[\pm\sin^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta_0/2)].$$

Очевидно, что подходит только выбор знака минус в этой формуле, так что $S = -2$, и заряженным барионом будет Ξ^-.

Как показывает эксперимент, $m(P) < m(N)$, и мы сможем убедиться, что $m(P)$ соответствует скалярной части кватерниона $\exp[-i(i_1 i_0)\theta/2]$, тогда как $m(N)$ соответствует его векторной части. Если руководствоваться таким правилом, то следует записать

$$m(\Xi^0) < m(\Xi^-),$$

поскольку $m(\Xi^0)$ соответствует скалярной части, а $m(\Xi^-)$ – векторной. Этот результат согласуется с экспериментом.

Глава XI

СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Наша классификация основана на рассмотрении троек целых чисел, которые сопоставляются частицам. Это их электрический заряд q, принимающий значения -1, 0, 1, барионное число N, равное 0 или 1, и странность S. Для каждой частицы с параметрами (q, N, S) должна существовать античастица $(-q, -N, -S)$. Масса и спин частиц в нашей классификации не участвуют, и этим она отличается от возможных более тонких классификаций, охватывающих, например, η-мезон, который у нас рассматривается как резонансное состояние.

Предлагаемая теория полностью согласуется с идеей считать волновые функции не только электрона и нуклона, но и любой стабильной частицы бикватернионами. Однако такая гипотеза не выступает явно в процессе дальнейшего изложения, потому что для построения нашей классификации достаточно принять два следующих принципа:

a) *Для каждого целого $k \geqslant 1$ должны существовать либо k частиц, либо k античастиц, таких, чтобы нашлась их суперпозиция $E_q(k)$, которая имеет нулевую странность* $(S = 0)$. *Наряду со смесью $E_q(k)$ должна существовать сопряженная смесь $E_{q'}(k)$ из k частиц, имеющая заряд q', барионное число N' и странность S', которые удовлетворяют соотношениям*

$$S' = 2(q' - q) + N - N' \text{ и } N \leqslant N'.$$

b) *Странность S' должна быть отрицательной для частиц, которые сопряжены частицам, и положительной для тех частиц, которые сопряжены античастицам.*

Подобные условия легко записать и для античастиц, которые сопряжены либо частицам, либо античастицам, изменив знаки у всех целочисленных параметров.

1. ТРИПЛЕТЫ

При фиксированных N и S может существовать не более чем триплет зарядов; следовательно, число k частиц в смеси $E_q(k)$ может равняться 1, 2, 3. Покажем, что если триплет $E_q(3)$ предполагается нестранным, то он не может быть барионным. В самом деле, заряды соответствующих смесей q и q' принимают свои значения в промежутке $[-1,\ 1]$ и являются целыми числами, так что $q = q'$, поскольку на основании а) разность $q' - q$ должна быть константой, не зависящей от смеси зарядов. Из этого следует, что если N равняется 1, то всегда в силу а) должны выполняться условия $N' + S' = 1$ и $N' = 1$, а значит, $S' = 0$. Но это невозможно, потому что сопряженной смеси полагается быть странной ($S' \neq 0$), и, следовательно, необходимо, чтобы $N = 0$. Таким образом, может существовать только один триплет $E_q(3)$ нестранных частиц, который к тому же оказывается одновременно и триплетом античастиц, поскольку $N = S = 0$. Отождествим этот триплет с триплетом пионов Π^-, Π^0, Π^+.

Для доказательства существования такого триплета тем не менее необходимо проверить, что для него можно найти сопряженный триплет с ненулевой странностью. Поскольку $q = q'$, то, согласно а), параметры сопряженного триплета должны удовлетворять условию $N' + S' = 0$. Единственным набором целых чисел, удовлетворяющих этому уравнению, будет $N' = 1$, $S' = -1$. Триплет, для которого $N' = 1$, $S' = -1$, отождествляем с тройкой странных барионов Σ^-, Σ^0, Σ^+.

2. ДУБЛЕТЫ

Прежде всего надо отметить, что дублет $(-1,\ +1)$ в действительности является не зарядовым дублетом, а частью триплета зарядов, потому что в смеси противоположных зарядов обязательно присутствует и нулевой заряд.

1°. *Существует нестранный дублет зарядов* (0, 1).

Сначала докажем, что если такой дублет существует, то он может состоять только из барионов. Действительно, если предположить, что для него $N = 0$, то в таком случае будет существовать дублет античастиц с зарядами $(-1,\ 0)$, которые не являются барионами и не имеют странности. Такой дублет античастиц является одновременно дублетом частиц, поскольку

$N = S = 0$, так что дублет (0, 1) окажется не чем иным, как частью триплета, который мы ранее отождествили с триплетом пионов. Следовательно, условие $N = 1$ необходимо. Итак, дублет (0, 1) существует, если существует его сопряженный дублет.

Теперь покажем, что если такой сопряженный дублет найдется, то он будет состоять из зарядов $(-1, 0)$. В силу a) он должен иметь $N' = 1$, так как $N = 1$. Кроме того, если предположить, что $q' = q$, то получилось бы, что $S' = 0$, но это не согласуется с тем, что дублет сопряженный и, следовательно, странный. Остается в качестве решения единственное: $q' = -q = -1$. Отсюда $S' = -2$.

Значит, нестранный дублет (0, 1) существует, и мы отождествляем его с нуклоном, в то время как сопряженный дублет отождествляется с Ξ-частицами.

2°. *Не существует нестранного дублета* $(-1, 0)$.

Рассуждая, как в пункте 1°, мы убедимся, что если бы такой дублет существовал, то он состоял бы из барионов. Покажем, что в таком случае не может существовать сопряженный дублет, состоящий из частиц. В самом деле, для него N' было бы равно 1 в соответствии с a). Так как равенство $q = q'$ неприемлемо из-за того, что S' тогда будет равняться нулю, то пришлось бы потребовать, чтобы $q' - q = 1$, а это приводит к тому, что $S' = 2$ в противоречии с b). Таким образом, дублет нестранных частиц $(-1, 0)$ не может существовать, раз для него нет сопряженного дублета.

3°. Следовательно, не существует дублета античастиц $(-1, 0)$, состоящего из нестранных антибарионов. Сопряженный с ним дублет частиц должен был бы удовлетворять условию $N' + S' = -1$, если $q = q'$. Тогда $N' = 0$ и соответствующее значение $S' = -1$, равно как и пара чисел $N' = 1$, $S' = -2$, не подходят на основании b). Остается предположить, что $q' - q = 1$, следовательно, в силу a) $N' + S' = 1$, и тогда единственно возможный вариант: $N' = 0$, $S' = 1$. Такой дублет отождествим с *дублетом мезонов*, и входящие в него частицы обозначим K^0 и K^+, потому что $q' = q + 1$, т. е. это дублет (0, 1).

3. СИНГЛЕТЫ

Будем приписывать значения N и S не только барионам, но и лептонам и фотону. Однако при этом обобщении N и S

не обязаны иметь прежний физический смысл, и в новых ситуациях мы будем числа N и S считать просто математическими параметрами. *Лептоном* будем называть любой зарядовый синглет, которому соответствует индекс $N = 0$. Предположим, что все нестранные синглеты являются лептонами. Заряженная частица не может составлять синглет, потому что, согласно теории Дирака, каждому заряду можно сопоставить противоположный заряд, приписываемый античастице. Будем считать, что слияние таких противоположных зарядов возможно только при $S = 0$. Следовательно, триплет зарядов отождествляется с триплетом электрон, фотон и позитрон. Этот триплет отличается от триплета пионов, в котором нейтральная частица в отличие от фотона не получается в результате слияния заряженных. Заметим, что условие $S = 0$ для слияния придает некоторый физический смысл странности лептонов.

Таким образом, остается рассмотреть синглет

$$q = 0, \quad N = 0, \quad S = 0,$$

который назовем *нейтрино;* он отличается от фотона, поскольку не получается в результате слияния. Обсудим возможность существования для него сопряженных синглетов.

1°. $q' = 0$, следовательно, $N' + S' = 0$, откуда единственным решением является $N' = 1$, $S' = -1$. Таким образом, получается единственная частица, барион Λ^0.

2°. $q' = -1$ и, следовательно, $N' + S' = -2$. Возможны два случая. В первом $N' = 1$, $S' = -3$ и получается частица Ω^-. Во втором $N' = 0$ и $S' = -2$ и получается отрицательный *мюон* μ^-, который является лептоном, так как $N' = 0$.

3°. $q' = 1$, значит, $N' + S' = 2$ в силу a), но это свойство для всякой частицы противоречило бы b).

Подводя итоги, мы констатируем, что классификация охватывает все стабильные частицы, но не включает резонансы. Приведенные результаты подтверждают важность понятия сопряженной частицы и справедливость высказанных принципов a) и b), которые подтверждаются известными нам экспериментальными данными.

4. ИЗОСПИН

Вращение (σ, θ) задает направление вектора изоспина, но, вообще говоря, не фиксирует его длину I. Измеряя ее в единицах $h/2\pi$, полагаем по определению

$$I = q - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}S. \tag{83}$$

Тем самым в нашей теории гарантируется выполнение формулы Гелл-Манна и Нишиджимы. Эта формула представляет собой равенство (83), применяемое к адронам, т. е. к барионам и мезонам, однако мы намерены распространить ее и на лептоны и фотон. Для каждого k-плета ($k = 1, 2, 3$) частиц числа N и S известны, так что I можно вычислить.

Отметим, что одинаковый изоспин имеют те и только те пары мультиплетов, которые сопряжены друг другу согласно а). Напомним еще раз, что изовекторы были выражены в алгебре пространства-времени через векторы в собственной системе частицы.

5. РАЗНОСТИ МАСС ВНУТРИ МУЛЬТИПЛЕТА

Применяя локальное уравнение для нуклона и классификацию частиц, которая подсказывается этим уравнением, автору удалось рассчитать разности масс между заряженными и нейтральными частицами, входящими в один мультиплет; при этом получалось хорошее согласие с экспериментальными данными [1]. Предположив, что радиус пионного взаимодействия r совпадает с радиусом Юкавы, который берется равным

$$0{,}81\,(h/2\pi)/c\mu_0$$

(μ_0 – масса заряженных пионов), получаем для нуклона разность масс, равную по абсолютной величине $\alpha\mu_0/0{,}81$, где α – постоянная тонкой структуры, т. е. разность равна $9\cdot 10^{-3}\,\mu_0$.

Для мультиплетов гиперонов Ξ и Σ и для мезонных мультиплетов (пионы и каоны) поле пионов заменяется полем каонов, так что вместо μ_0 берется величина $3{,}5\,\mu_0$, масса заряженных каонов. В результате для разностей масс получается значение

$$3{,}15\cdot 10^{-2}\,\mu_0.$$

Необходимо еще определить знаки этих разностей, и для этого используется приведенная классификация частиц в сочетании с правилом знаков, утверждающим, что разности масс для сопряженных дублетов отличаются знаком.

Все эти результаты хорошо согласуются с экспериментом.

[1] *C. R. Acad. Sc. Paris*, sér. A, **282** (1976), 349, 665.

Список литературы

J. Gibbs, The scientific Papers of J. W. Gibbs, New York, Dover, 1961.

H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862.

W. K. Clifford, *Amer. J. of Math.*, 1878.

A. Delachet, Le calcul vectoriel, Presses Universitaires de France, «Que sais-je?», n° 418.

M. Riesz, Clifford Numbers and Spinors, 1958.

F. Gürsey, Rev. Fac. Sci. Istanbul, 1956.

D. Hestenes, Space – Time Algebra, New York, Gordon & Breach, 1966.

D. Hestenes, J. of Math. Physics, New York, 1967, vol. 8, n° 4; et 1975, vol. 16, n° 3.

P. Quilichini, C. R. Acad. Sc. Paris, 1971, t. 273, série B, p. 829.

R. Boudet, C. R. Acad. Sc. Paris, 1971, t. 272, série A, p. 767.

G. Casanova, C. R. Acad. Sc. Paris (см. подстрочные примечания).

R. Daudel, Les fondements de la chimie théorique, Paris, G. Villars, 1956.

L. de Broglie, Introduction à la nouvelle théorie des particules, Paris, G. Villars, 1961.

T. Kahan, Les particules élémentaires, Presses Universitaires de France, «Que sais-je?», n° 1293.

E. U. Condon et G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, 1970.

Оглавление

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Г. Казанова

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Старший научный редактор Н. Плужникова
Младший научный редактор Л. Суркова
Художник А. Шипов
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор И. Борисова
Корректор Т. Пашковская

ИБ № 1476

Сдано в набор 01.09.78.
Подписано к печати 28.04.79.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Бумага офсетная № 1.
Гарнитура таймс. Печать офсетная
Объем 1,88 бум. л. Усл.-печ. л. 6,30
Уч.-изд. л. 4,67. Изд. № 1/9843. Тираж 19000 экз.
Цена 35 коп. Зак. 394.

Издательство «Мир»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.

Отпечатано на Можайском полиграфкомбинате Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Можайск, 143200, ул. Мира, 93.