АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Серия «Наука и технический прогресс»

Н. Я. ВИЛЕНКИН

В ПОИСКАХ БЕСКОНЕЧНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1983

В-44 **Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности.**— М.: Наука, 1983. 160 с.

За последнее столетие одно из центральных мест в математической науке заняла созданная немецким математиком Г. Кантором теория бесконечных множеств, понятия которой отражают наиболее общие свойства математических объектов. Однако в этой теории был вскрыт ряд парадоксов, вызвавших у многих видных ученых сомнения в справедливости ее основ.

В данной книге излагается в популярной форме, какими путями шла человеческая мысль в попытках понять идею бесконечности как в физике, так и в математике, рассказывается об основных понятиях теории множеств, истории развития этой науки, вкладе в нее русских ученых.

Книга предназначена для широких кругов читателей, желающих узнать, как менялось представление о бесконечности, чем занимается теория множеств и каково современное состояние этой теории.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

А. С. СОЛОДОВНИКОВ

В $\frac{1702010000\text{-}424}{042\,(02)\text{-}83}$ 115-83—IV

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие бесконечности является одним из наиболее важных и в то же время «таинственных» в науке. Еще в древности многие философы и математики задумывались над противоречивостью этого понятия. Как пишет Ф. Энгельс, «противоречием является уже то, что бесконечность должна слагаться из одних только конечных величин, а между тем это именно так. Ограниченность материального мира приводит к не меньшим противоречиям, чем его безграничность, и всякая попытка устранить эти противоречия ведет... к новым худшим противоречиям. Именно *потому*, что бесконечность есть противоречие, она представляет собой бесконечный, без конца развертывающийся во времени и пространстве процесс. Уничтожение этого противоречия было бы концом бесконечности» *.

В математике противоречия, связанные с идеей бесконечности, обострились после создания в конце XIX в. теории бесконечных множеств и последовавшего вскоре за тем открытия парадоксов этой теории. В то время, как многие ученые, не обращая внимания на такие парадоксы, широко используют в своих работах теорию множеств, другие подвергают теоретико-множественные методы в математике жестокой критике. Споры, связанные с теорией множеств, стали еще ожесточеннее после того, как группа французских математиков, пишущих под псевдонимом Николя Бурбаки, попыталась построить все здание математической науки, опираясь лишь на понятие множества. Эта попытка, восторженно встреченная рядом математиков и оказавшая значительное влияние на развитие науки XX в., подвергалась осуждению со стороны других ученых за излишнюю формализацию, попытку оторвать математическую науку от питающих ее животворных практических приложений.

В предлагаемой вниманию читателя книге рассказывается о том, как возникла и развивалась идея бесконечнос-

---

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 51.

ти в физике и математике, как строилась теория бесконечных множеств, к каким успехам и парадоксам привела эта идея, какие значительные усилия были приложены для того, чтобы устранить возникшие противоречия, на каких путях ученые пытаются найти выход из создавшихся осложнений.

В основу данной работы положена вышедшая в 1969 г. в издательстве «Наука» книга «Рассказы о множествах». Однако данная книга значительно отличается как своим содержанием, так и подходом ко многим вопросам. Новой является первая глава, где рассматривается связь между космологией, физикой и понятием бесконечности, в дальнейших главах добавлено много материала о развитии теории множеств в нашей стране, перестроена структура книги (в частности, выделены в особую главу вопросы, связанные с основаниями теории множеств). В связи с необходимостью ограничить объем книги пришлось опустить некоторые вопросы, в частности о связи теории множеств с элементарной математикой.

Глава 1

БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ВСЕЛЕННАЯ

От мифологии к науке. Изучение сделанных из камня изображений и нанесенных охрой и углем рисунков на стенах пещер убедительно показывает, что уже десятки тысяч лет тому назад люди не только накапливали сведения о поведении животных и птиц, свойствах трав и плодов, но и пытались установить закономерности окружающего их мира, понять его происхождение. Так складывались древнейшие мифы о «Великой праматери» — общем предке людей и животных, о тотемах — покровителях племени, а влиянию потусторонних сил приписывал древний человек такие грозные явления природы, как гром и молния, землетрясения и ураганы.

По мере развития земледелия и животноводства возрастала роль наблюдений за небом: положение небесных светил подсказывало, когда надо начинать сеять или убирать урожай, с неба шел дождь, орошавший поля и пастбища, с неба же опускалась на посевы и сады саранча — один из самых опасных врагов древнего земледельца. Поэтому древняя мифология охватывала не только Землю, но и небо.

Неудивительно поэтому, что люди стали обожествлять силы природы и помещать жилище богов на небесах. Так возникли первые мифы о происхождении мира, о взаимосвязи явлений природы. Почти во всех этих мифах первоначальное состояние мира описывалось либо как хаос, либо как океан. А потом происходило разделение неба и земли, воды и суши. Например, в аккадских мифах рассказывается, как бог Мардук победил богиню Тиамат, символизировавшую первоначальный океан, и сотворил небо и землю из ее гигантского тела, разрубив его надвое.

Более символизированный вид имели мифы древней Индии, созданные арийскими племенами, вторгшимися в Индостан где-то между 1500 и 1200 годами до н. э. В них рассказывается о борьбе данавов и адитьев, что можно примерно перевести как *стесненность* и *неограниченность*, или, иначе, как *ограниченное* и *беспредельное*. Победу адитьев обеспечил бог Индра, который, по-видимому, считался сыном Неба и Земли. Когда он чудесным образом вырос до устрашающих размеров, Небо и Земля, испугавшись, разлетелись в разные стороны.

Похожие мифы существовали и у древних иранцев, культура которых в далеком прошлом составляла одно целое с культурой ариев. По их рассказам бог Ормазд сперва создал из сверкающего металла светлое и ясное небо в форме яйца. Вершиной оно достигало до Бесконечного Света, а все творение было создано внутри неба. Землю иранцы считали круглой и висящей в середине неба, как желток находится в середине яйца.

В мифологии древних греков мир распадался на три области — подземное царство, землю и небо, окруженные со всех сторон океаном (это объясняло, почему вода и бьет вверх из источников и падает на землю дождем).

Мифы позволяли людям устанавливать ассоциации между далекими понятиями, осмысливать каким-то образом окружающий их мир. При этом действие в мифах происходило вне времени и пространства и вне ограничений, налагаемых логикой. И поскольку миф отражал опыт предшествующих поколений, его нельзя было опровергнуть тем, что он противоречит опыту отдельной личности.

Но по мере развития производства и усложнения общественных отношений происходил извечный процесс развития понятийного аппарата, появилась возможность проверять непротиворечивость умозаключений с помощью логики, минуя мифологию. Миф начал вступать в противоречие с разумом, с логическими понятиями, сфера мифотворчества стала сужаться, появились первые зачатки науки.

Традиция возводит начало научного осмысления мира к греческому философу Фалесу [1], которому удалось в 585 г. до н. э. предсказать солнечное затмение. Разумеется, это было невозможно, пока Солнце и Луну считали очами Неба или богами Гелиосом и Селеной.

Анаксимандр [2], опираясь на индоиранские учения о борьбе ограниченного с беспредельным, создал учение о том, что вся Вселенная произошла из беспредельного — апейрона. По Анаксимандру, апейрон неисчерпаем, бесконечен и вечен. Он учил, что существуют бесчисленные миры, обособленные друг от друга, причем, по его мнению, в каждом периоде мирообразования они возникают и уничтожаются.

Многое в учениях Фалеса, Анаксимандра и их учеников кажется сейчас наивным (например, предположение Фалеса о том, что люди произошли от рыб.) Но были и гениальные догадки — у них можно найти мысли о шарообразности Земли, об эволюции живых существ и многое другое.

Самое же главное для темы нашей книги то, что в учениях этих философов началось обсуждение понятия беспредельности, бесконечности, выяснение вопроса о конечности или бесконечности Вселенной. Чтобы пояснить идею безграничности, Анаксимандр говорил: «Где бы ни стал воин, он сможет протянуть свое копье еще дальше». То же повторял потом живший в IV в. до н. э. видный математик пифагорейской школы Архит. Знаменитый атомист древности Демокрит считал, что Вселенная не только бесконечна, но и не имеет центра. Эти мысли в стихотворной форме изложил живший несколько столетий спустя римский поэт и философ Тит Лукреций Кар.

Нет и краев у нее, и нет ни конца, ни предела,
И безразлично, в какой ты находишься части Вселенной:
Где бы ты ни был, везде, с того места, что ты занимаешь,
Все бесконечной она остается во всех направленьях.

А еще через несколько столетий великий среднеазиатский поэт Низами вопрошал:

Разве в мире бесконечном направленье есть?
Разве далям бесконечным измеренье есть?

Так возникшая на Востоке идея бесконечности пришла к греческим философам и ученым, была ими изучена и вновь вернулась на Восток. Известный немецкий математик Г. Вейль [3] писал, что интуиция бесконечного, спокойное и не задающееся никакими вопросами признание ее были присущи восточному миру, но на Востоке эта интуиция оставалась лишь чисто абстрактным сознанием. Великим же достижением греческой науки было, по мнению Вейля, преобразование полярной противоположности конечного и бесконечного в плодотворное оружие познания действительности.

Заметим, что на Востоке была создана и идея вечности Вселенной. В глубокой древности там была сложена следующая притча: «Вот алмазная гора высотой в тысячу локтей. Раз в столетие прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первое мгновение вечности» *.

Из древнегреческих философов ярко выразил идею вечности и изменяемости мира со временем Гераклит, учивший, что «все течет, и нельзя дважды войти в одну и ту же реку, ибо входящего будут омывать иные воды». Он говорил также: «Этот космос, один и тот же для всех, не создал никто ни из богов, ни из людей, но он всегда был, есть и будет вечно живым огнем, мерами вспыхивающим и мерами угасающим».

Далеко ушла космология Гераклита от мифов древности! Ведь анализ древних мифов показывает, что когда-то пространство и время казались людям конечными, прерывными, состоящими из качественно различных кусков. В ту далекую эпоху идея развития мира была чужда человеческому разуму, а течение времени представлялось совершающимся по кругу с постоянным повторением времен года и положения планет и звезд (не случайно в древнегреческой мифологии бог времени Кронос был сыном бога неба Урана, а филологи находят, что слова *время* и *вращение* имеют общее происхождение). Даже когда стали представлять себе время текущим в одном направлении, они полагали, что мир имел начало *(сотворение мира)* и будет иметь конец (*страшный суд* в евангельских сказаниях, *гибель богов* в скандинавской мифологии и т. д.). Пространство же казалось ограниченным небесной твердью, где обитали боги. Понадобился поистине революционный переворот в человеческом сознании, чтобы возникло представление о мире, не имеющем границ, о мире без начала и без конца (впрочем, как мы увидим ниже, это представление оказалось слишком смелым даже для многих из лучших умов древнего мира).

«Как число песку на бреге морском». В древности философия, естествознание и математика были столь родственны, что ими, как правило,занимались одни и те же люди. Например, Фалес не только философствовал о беспредельном и предсказывал затмения, но и первым начал доказывать геометрические теоремы, а создателем крупнейшей и влиятельнейшей философской школы в VI в. до н. э. был Пифагор, которому предание приписывает доказательство знаменитой теоремы о прямоугольном треугольнике.

---

* В других вариантах этой притчи гору стачивает фея Лилавати, которая раз в столетие, танцуя, касается ее концом своего шлейфа.

Пифагор учил, что «все есть число», причем некоторые числа (1, 4, 7, 10) играли в его миропонимании особую роль. Впрочем, мнение о мистической роли числа 7 возникло еще у древних шумеров задолго до того, как в Греции начала развиваться математика. В их мифах можно встретить семь духов бурь, семь злых болезней, семь областей подземного мира, закрытых семью дверями, и т. д. Семь небесных тел перемещались по небосводу. А неведомый греческий философ, современник Фалеса и Анаксимандра, учил, следуя шумерам и вавилонянам, что все должно и по внешней форме и по своей внутренней сущности проявлять число 7, и насчитывал семь сфер Вселенной (сферы чистого эфира, звезд, Солнца, Луны, воздуха, воды и земли). Некоторые ученые думают, что мистическая роль семерки связана с тем, что когда-то люди умели считать только до шести, а число семь заменяло понятие *много* (ведь и сейчас мы говорим «семеро одного не ждут», «семь раз отмерь, один раз отрежь», «один с сошкой, семеро с ложкой» и т. д.).

Но выражать очень большие числа не могли ни египетские, ни греческие ученые, так как не владели идеей позиционной записи чисел. Вавилоняне же, которые владели этой идеей, относились к математике слишком утилитарно, чтобы заниматься такими далекими от практики вопросами, как, например, подсчет числа песчинок на берегу моря. Любопытно, что согласно древнеегипетским «Текстам пирамид» перевозчик в загробном мире экзаменует душу умершего царя и проверяет, умеет ли она считать до десяти. На это он получает стихотворный ответ, в котором по порядку перечисляются все пальцы. Это, несомненно, отголосок гораздо более древнего времени, когда даже умение считать на пальцах казалось чем-то граничащим с магией.

И когда люди уже научились выражать числами количество воинов в армии или хлебов, необходимых для прокормления рабов, которые возводили колоссальные храмы и пирамиды, они еще не знали чисел, носящих сейчас названия *миллиард*, *триллион*, *квадрильон* и т. д. Чтобы дать представление о громадных числах, они прибегали к сравнениям: «сколько песка и пыли», «как число песку на бреге морском», «как вес горы, взвешенной на весах», «как листьев на деревьях». Но самый лучший тогдашний ученый не смог бы сказать, например, чего больше: песчинок на морском берегу или листьев в лесу.

В Древней Греции метод называния очень больших чисел был создан Архимедом лишь в III в. до н. э., то есть через два с половиной столетия после того, как философы начали обсуждать понятие беспредельности. В сочинении «Псаммит» («Исчисление песчинок») он развил систему счисления, позволявшую называть числа до $10^{8\cdot 10^{16}}$. Насколько громадно это число, видно из того, что всю нашу Метагалактику можно было бы плотно набить не более чем 10^{150} нейтронами. Если записать число Архимеда в десятичной системе счисления по 400 цифр на каждом метре бумажной ленты, то луч света шел бы вдоль такой ленты около восьми суток.

Но как ни громадно число Архимеда, оно все же, как и все числа, конечно. Записать весь бесконечный ряд натуральных чисел невозможно даже на ленте, смотанной в клубок размером со всю нашу Метагалактику. Нельзя записать его и на ленте, смотанной во столько подобных клубков, каково число Архимеда.

Тягу к большим числам испытывали и древние обитатели Индии. В их сказаниях рассказывается, например, о битвах, в которых приняло участие 10^{23} обезьян, об испытаниях Будды, в ходе которых он называл громадные числа, и о многих таких же вещах. Веселой игре с числами не мешало то обстоятельство, что вся Солнечная система не смогла бы вместить столько обезьян — в ней находила свое воплощение идея о бесконечности, завораживавшая не только греков, но и индийцев. И Архимед, и индийские математики испытывали восторг от мысли, что создано символическое исчисление, позволяющее на небольшой восковой дощечке или листе папируса выразить столь необъятные числа и выйти за пределы данного наглядным созерцанием.

Загадочные апории [4]. Идея бесконечности проникала в науку не только в связи с вопросами о том, есть ли границы у Вселенной, и было ли начало, и будет ли конец мира. Одним из самых жгучих вопросов, над которым билась мысль древнегреческих философов, явилось устройство мира в малом. Повседневный опыт учил, что вынутый из печи хлеб можно разделить между двумя, тремя, от силы десятью участниками трапезы, а если раскрошить его, то получится все же не более мириады, то есть десяти тысяч крошек. Можно ли делить далее этот хлеб, есть ли вообще предел для делимости материальных предметов на части? Ответить на этот вопрос, опираясь только на опыт, было невозможно. Здесь речь шла о столь мелких частицах, что разглядеть их не смог бы и сам рысьеглазый Линкей, легендарный впередсмотрящий на корабле аргонавтов. Поэтому вопрос о пределе делимости вещей перешел из сферы опыта в сферу умозрительных рассуждений.

Одни философы утверждали, что предела делимости вещества нет. Анаксагор говорил, что «в малом не существует наименьшего, но всегда есть еще меньшее. Ибо то, что существует, не может перестать существовать от деления, как бы далеко ни было продолжено последнее». Он считал, что непрерывное не может состоять из дискретных элементов, которые «отделены друг от друга и как бы отрублены друг от друга ударами топора». Надо думать, что собрание отдельных точек представлялось Анаксагору и его сторонникам чем-то вроде кучи пыли, а непрерывное — чем-то вроде бронзового или железного меча.

Другая школа, ведшая свое начало от пифагорейцев, полагала, что существуют наименьшие частицы вещества — *атомы*, которые уже далее не делятся в силу своей твердости (атом и значит по-гречески «неделимый»). Эти идеи были развиты Левкиппом[5] и Демокритом. Атомисты ввели понятие и о неделимых частях пространства *(амерах)*, не имеющих ни частей, ни размеров. Некоторые ученые полагают, что эти идеи восходят к Демокриту, другие приписывают их Эпикуру[6]. Решить этот спор весьма затруднительно, так как до нас дошли лишь скудные отрывки из многочисленных сочинений Демокрита.

Борьба между двумя школами философов обострилась после того, как в середине V в. до н. э. греческий философ Зенон Элейский[7] показал, к каким парадоксальным следствиям ведет при неосторожном обращении предположение о безграничной делимости пространства и времени. Наиболее известны апории Зенона «Стрела» и «Ахиллес и черепаха». В первой из них доказывалось, что... летящая стрела неподвижна. Ведь, говорил Зенон, стрела, прежде чем попасть в цель, должна пролететь половину пути, а до этого — одну четверть пути, еще ранее — одну восьмую пути и т. д. А так как пространство безгранично делимо, то процесс деления пополам никогда не окончится. Поэтому стрела никогда не начнет движения и всегда будет неподвижна. В апории «Ахиллес и черепаха» таким же образом доказывалось, что быстроногий Ахиллес, пробегающий в минуту 10 стадиев, никогда не нагонит медлительную черепаху, делающую 1 стадий в минуту.

Выводы Зенона об отсутствии движения в реальном мире опровергались повседневным опытом. Известный философ-киник Диоген [8], услышав про рассуждения Зенона, просто встал и начал ходить (этому происшествию посвящено известное стихотворение А. С. Пушкина «Движенья нет, сказал мудрец брадатый...»). Тем не менее аргументы Зенона показали, что представления о бесконечности, господствовавшие в тогдашней математике, были весьма наивны. В частности, Зенон впервые показал, что отрезок можно разложить на бесконечное множество частей, каждая из которых имеет ненулевую длину. Если заменить геометрический отрезок конечным отрезком времени, то из его рассуждений вытекало еще более парадоксальное утверждение: за 1 час можно произнести названия всего бесконечного ряда натуральных чисел. Для этого достаточно в течение первого получаса назвать первое число, в течение следующей четверти часа — второе число, за следующую восьмую долю часа — третье число и т. д. Получалось, что бесконечное можно поместить в конечном — бесконечный числовой ряд в конечном промежутке времени.

Разумеется, реальное осуществление такой попытки невозможно — ведь уже число 100 придется произносить за 2^{-100} часа, а самый быстрый из процессов, известных современной науке, длится неизмеримо дольше. Достичь такой быстроты невозможно и потому, что никакая информация не может передаваться со скоростью, большей, чем скорость света, а при попытке делить пространство на все более мелкие части начинают проявляться его квантовые свойства. Но ведь все это соображения, лежащие в области свойств реального мира, а Зенон, как мы бы теперь сказали, исследовал одну из математических моделей этого мира, модель, в которой допускалось неограниченное деление пополам и отрезков, и промежутков времени, так что для него доводы физиков роли не играли.

На протяжении веков много раз менялось отношение к апориям Зенона. Иногда казалось, что они полностью опровергнуты, но внимательный анализ показывал, что на каждом уровне знаний всегда остается что-то невыясненное, какой-то зародыш новых трудностей, новых противоречий и нового знания. Известный специалист по теории бесконечных множеств и основаниям математики А. Френкель [9] писал по этому поводу:

«Преодоление пропасти между областью дискретного и областью непрерывного, или между арифметикой и геометрией, есть одна из главных,— пожалуй, даже самая главная проблема оснований математики... Характер рассуждений теперь, конечно, изменился, но трудности, как и прежде, возникли в связи с пропастью между дискретным и непрерывным — этим неизменным камнем преткновения, играющим в то же время чрезвычайно важную роль в математике, философии и даже физике».

Позднее мы познакомимся с другими парадоксами бесконечного , по сравнению с которыми апории Зенона могут показаться весьма наивными. Но известный советский философ Г. И. Наан [10] заметил, что, возможно, человечество никогда не сможет опровергнуть элейского философа на все сто процентов, поскольку бесконечность неисчерпаема, а Зенону удалось схватить в наивной, но гениальной форме три *вечные* проблемы, тесно связанные друг с другом и с проблемой бесконечности: проблему ничто, проблему непрерывности и проблему существования. Не случайно Аристотель называл Зенона «основателем диалектики», а Гегель видел в нем родоначальника диалектики в современном смысле слова.

Не обошлось, конечно, и без попыток использовать апории Зенона на пользу идеализма. Один видный немецкий философ-идеалист сказал даже, что в этих апориях бесконечность выступает как растворитель действительности.

Мы не будем сейчас подробнее останавливаться на роли апорий Зенона в физике и философии.

Для математики их роль состояла в том, что они вскрыли противоречивость дискретного и непрерывного, показали недопустимость легкомысленного обращения с бесконечностью. После Зенона нельзя уже было по примеру софиста Антифонта [11] считать круг многоугольником с бесконечным числом сторон и таким путем вычислять его площадь. Началась эпоха изгнания бесконечного из математики.

Одну из отчаянных попыток избежать бесконечных процессов в геометрии предпринял Демокрит. Он попробовал построить геометрию на основе своего учения об атомах. Если бы эта попытка удалась, геометрия приняла бы совсем иной вид. Но еще до появления на свет Демокрита в школе Пифагора было доказано, что сторона квадрата несоизмерима с его диагональю. А этого никак не могло случиться, если бы и сторона квадрата и его диагональ состояли из конечного числа неделимых частей. Кроме того, хотя Демокрит и сумел своим методом вычислить объем пирамиды, он не мог понять, равны ли *соседние* сечения пирамиды — если они равны, то пирамида не может сужаться к вершине, а если они различны, то пирамида *шершава*. Поэтому его учебник геометрии был вытеснен знаменитыми «Началами» Евклида, основанными на идее безграничной делимости пространства, а философам пришлось искать иные пути для опровержения апорий Зенона.

На зыбкой почве. Много размышлял о бесконечности и ее свойствах один из величайших философов древности Аристотель. Говоря в своих сочинениях об этом предмете, он предупреждает, что здесь приходится ходить по очень зыбкой почве. Слишком много противоречий накопилось вокруг этого понятия со времен Зенона и Демокрита. Поэтому Аристотель признавал, что «много невозможного следует и за отрицанием существования бесконечного, и за признанием». Он указывал на пять оснований, приводящих к мысли о существовании бесконечности. Четырьмя из них были: бесконечность времени, бесконечное разделение величин, используемое в математике, необходимость бесконечности, чтобы не иссякли возникновение и уничтожение, и то, что конечное всегда граничит с чем-нибудь, а потому не может быть предела конечному. Самым же важным основанием Аристотель считал пятое, а именно что мышление ни на чем не останавливается: и число кажется бесконечным, и математические величины, и то, что лежит за небом. А если лежащее за небом бесконечно, говорил он, то существует множество миров.

И все же, несмотря на такие веские доводы, Философ (так обычно называли в древности Аристотеля) отказался принять идею о существовании бесконечного мира, сказав, что в вопросе о бесконечном доверять мышлению нельзя. Мы не будем следовать за всеми тонкостями рассуждений Аристотеля, в которых он анализирует различные следствия из предположения о существовании бесконечности.

Наиболее важно для нас проведенное им различение двух видов бесконечности: *актуальной* и *потенциальной*, то есть, иначе говоря, существующей и становящейся. Примером актуальной бесконечности может служить совокупность частей отрезка, подвергнутого разбиению по Зенону, а примером потенциальной бесконечности — развивающийся во времени процесс деления этого отрезка. Кроме того, Аристотель различал виды бесконечности, называемые сейчас *экстенсивной* и *интенсивной*. Первая из них возникает при последовательном и безграничном добавлении новых предметов, а вторая — при безграничном углублении в строение изучаемого объекта.

Аристотель признавал существование лишь потенциальной бесконечности и говорил: «Бесконечность не существует актуально, как бесконечное тело или величина, воспринимаемая чувствами... Бесконечное существует потенциально, бесконечное есть движение...».

Аргументы же Зенона он отвергал, говоря, что движущееся движется, не считая. Разумеется, отвергал Аристотель и предположения о бесконечности Вселенной, считая ее ограниченной крайней сферой, за которой уже нет ни тела, ни места. В то же время в отличие от Платона, думавшего, что мир создан неким демиургом (творцом), Аристотель утверждал несотворимость и вечность мира (впоследствии это навлекло на него упреки многих богословов).

После Аристотеля было признано, что «наука истинна лишь постольку, поскольку основывается на предположении, что непрерывное не состоит из неделимого».

Пришлось и математикам отказаться от использования понятия бесконечности в своей науке. Например, в «Началах» Евклида оно не используется даже там, где было бы вполне естественно. Евклид не говорит даже, что простых чисел бесконечно много, а утверждает лишь, что их больше, чем любое заранее заданное натуральное число. Он никогда не пользуется движениями бесконечной плоскости, а передвигает лишь треугольники и другие конечные фигуры, да и этими движениями старается пользоваться поменьше — после Зенона понятие движения считалось логически ненадежным.

Чтобы избежать использования бесконечности, предшественник Евклида греческий математик Евдокс [12] выдвинул особую аксиому, которая по сути дела означала, что не существует ни бесконечно малых, ни бесконечно больших величин: любая величина, повторенная достаточно много раз, может превзойти любую другую величину. Эта аксиома и лежала в основе *метода исчерпывания*, с помощью которого Евклид и Архимед доказывали теоремы о площадях и объемах.

Возрождение бесконечности. Последние столетия античной цивилизации характеризуются упадком науки, распространением суеверий, веры в чудеса и знамения. Постепенно утрачивается устная традиция, позволявшая понимать сложные умозаключения великих ученых периода расцвета, падает авторитет науки и возрастает доверие к различного рода магам, чудодеям и пророкам. Торжество христианского вероучения завершило этот процесс медленного умирания античной философии и науки. В 415 г. н. э. толпа озверевших христианских фанатиков, натравленная александрийским епископом Кириллом, растерзала последнюю представительницу античной культуры Гипатию [13] и сожгла Александрийскую библиотеку, хранившую сокровища древней культуры.

С тех пор на долгие столетия философия становится служанкой богословия, возрождаются древние суеверия о том, что плоская Земля стоит на трех китах. Лозунгом времени становятся слова богослова Тертуллиана: «Верю, потому что абсурдно». Вопрос о бесконечности тоже переходит в плоскость теологии — она становится атрибутом бога.

Но постепенно вновь распространяются идеи Платона и Аристотеля, начинается сложная работа по приведению в соответствие богословских догм с учениями древних философов. И хотя наиболее ревностные богословы отвергают учения философов-язычников, все большее число ученых переходит на точку зрения, высказанную Альбертом Великим [14]: «Мне нет дела до чудес бога, когда я рассуждаю о естественных вещах, следуя естественной логике». Уже в XIV в. отдельные схоласты начинают признавать вечность мира и даже смертность человеческой души.

В спорах богословов и философов возникают новые идеи, подрывающие как религиозные догмы, так и миросозерцание последователей Аристотеля. В 1277 г. парижский епископ Этьен Тампье обрушивается на учение Философа о вечности и несотворенности Космоса и в то же время допускает идею о возможной множественности миров. Более того, он выдвигает мысль, что небесные сферы могут иметь не только круговое, но и прямолинейное движение. Но ведь это значило, что за последней сферой есть пространство! И хотя в учении Тампье нет ни слова о бесконечности космоса, первый шаг был сделан.

А Фома Брадвардин [15] в XIV в. приходит даже к мысли, что может существовать пустота без материи. Более того, нашлись схоласты, которые отвергали положение Аристотеля о несуществовании актуальной бесконечности. Так называемые инфинитисты утверждали, что понятие актуальной бесконечности не содержит в себе никакого противоречия и потому такая бесконечность может существовать. Джон Баконтроп [16] в начале XIV в. утверждал, что актуально бесконечной может быть любая величина: число, время, совокупность тел, а также что тело можно разделить на бесконечно много частей. Это подрывало фундамент всей космологии Аристотеля.

Окончательное разрушение античной космологии произошло в XV—XVI столетиях и связано с именами Николая Кузанского [17] и Джордано Бруно. Первый из них развил учение о максимуме, то есть о том, больше чего ничто не может быть. Оно явилось одним из наивысших достижений диалектической мысли эпохи Возрождения и подготовило революцию не только в космологии, но и в математическом способе мышления. Например, Николай Кузанский утверждал, что прямая является окружностью бесконечного радиуса, и рассматривал не отдельные фигуры, а предельные положения фигур при том или ином изменении их формы.

Понятие бесконечности привлекло к себе внимание и астрономов. В великом творении Николая Коперника утверждается, что расстояние между Землей и Солнцем неощутимо мало по сравнению с высотой небесной тверди. Звездную же сферу он считал в высшей степени подобной бесконечному. Иногда он говорил даже, что Небо неизмеримо велико по сравнению с Землей и представляет бесконечно большую величину. Однако решение вопроса о том, что является ли Вселенная бесконечной или лишь неизмеримо большой, он оставляет другим ученым.

Последний шаг в разрушении старых догм сделал Джордано Бруно, заплативший жизнью за свой научный подвиг. Он писал: «Итак, вселенная едина, бесконечна, неподвижна... Она никоим образом не может быть схвачена и потому неисчислима и беспредельна, а тем самым бесконечна и безгранична и, следовательно, неподвижна. Она не движется в пространстве, ибо ничего не имеет вне себя, куда бы могла переместиться, ввиду того что она является всем. Она не рождается... так как она является всем бытием. Она не уничтожается, так как нет другой вещи, в которую она могла бы превратиться... Она не может уменьшаться или увеличиваться, так как она бесконечна».

Так произошло освобождение человеческого духа от сковывающих его ограничений. Дух нового времени Бруно выразил в следующих стихах:

Кристальной сферы мнимую преграду,
Поднявшись ввысь, я смело разбиваю

И в бесконечность мчусь, в другие дали.
Кому на горе, а кому в отраду,—
Я Млечный Путь внизу вам оставляю...

Конечно, для многих этот открывшийся умственному взору новый мир был весьма неуютен — оказались разрушены небесные сферы, заключавшие в себе упорядоченный космос античности и средневековья. Мир предстал перед человеком как помещенный в ничто, окруженный этим ничто и насквозь пронизанный им. В начале XVII в. парижский парламент издал постановление, предписывавшее предавать смертной казни всех, кто выступит с полемикой против старых и общепризнанных авторов. А святейшая инквизиция провела в то же время два процесса над крупнейшим физиком и математиком того времени Галилео Галилеем и под угрозой сожжения на костре принудила к публичному отречению от идей Коперника и Бруно, а потом приговорила к пожизненному домашнему заключению.

Но времена менялись. Чтобы решать поставленные практикой задачи, ученым все чаще и чаще приходилось применять запрещенные аристотелевой наукой приемы, использовать неделимые и бесконечно малые величины. Вновь усиливается интерес к атомизму Демокрита. Используя «незаконные» приемы, Иоганн Кеплер получил формулы для объемов тел, к вычислению которых ревнители античной строгости не знали, как и подступиться. Эти методы он применил и в своих бессмертных работах, где были установлены законы движения планет вокруг Солнца. Итальянский математик Бонавентура Кавальери [18], используя идеи своего учителя Галилея, написал книгу «Геометрия, изложенная новым методом при помощи непрерывного». В ней он выдвинул принципы, позволявшие общими методами определять площади и объемы различных фигур. К концу XVII в. методы решения самых разнообразных задач, основанные на использовании бесконечно больших и бесконечно малых величин, были систематизированы и упорядочены в работах английского физика и математика Исаака Ньютона и немецкого математика и философа Готфрида Вильгельма Лейбница. Так возникло одно из самых замечательных творений человеческого разума — математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления). С помощью методов математического анализа можно было, зная силы, действующие на движущееся тело, определить его траекторию, в частности определить орбиты планет и комет.

Идеи Коперника и Бруно, Галилея и Ньютона интересовали не только ученых. Французский писатель Фонтенель [19] написал в конце XVII в. сочинение «О множественности миров», переведенное на многие языки.
Немецкий поэт XVIII в. Альберт фон Галлер писал:

Нагромождаю чисел тьму,
Мильоны складываю в гору,
Ссыпаю в кучу времена,
Миров бесчисленных просторы,
Когда ж с безумной высоты
Я на тебя взгляну, то ты —
Превыше не в пример
Всех чисел и всех мер:
Они лишь часть тебя.

В России новые идеи пропагандировал великий основатель русской науки и поэт Михаил Васильевич Ломоносов, выразивший идею бесконечности мира во вдохновенных строках:

Открылась бездна, звезд полна,
Звездам числа нет, бездне — дна.

А поэт А. П. Сумароков изложил эти идеи в ...переводе библейских псалмов. Его соперник Василий Тредьяковский тут же написал донос в святейший синод: «Читая сентябрьскую книжку «Ежемесячных сочинений» 1755 года, нашел я, именованный, в ней оды духовные, сочиненные г. полковником Александром Петровым, сыном Сумароковым, между которыми и оду, написанную из псалма 106; а в ней увидел, что она с осмыя строфа по первую на десять включительно говорит от себя, а не из псаломника, о бесконечности вселенной и действительном множестве миров, а не о возможном по всемогуществу божиему».

Получив этот донос, святые отцы потребовали от императрицы Елизаветы запрещения журнала «Ежемесячные сочинения», в котором, как они писали, «вере святой (много) противного имеется, особенно некоторые переводы и сочинения находятся, многие, а инде и бесчисленные миры быти утверждающие, что и св. писанию и вере христианской крайне противно есть и многим неутвержденным душам причину к натурализму и безбожию подает».

Но шел восемнадцатый век, и императрица оставила покорнейшее прошение святейшего синода «без последствий».

Мир Ньютона. К концу XVII в. и в астрономии, и в физике, и в математике полную победу одержали идеи, так или иначе связанные с применением бесконечности. Сложилась картина мира, управляемого геометрией Евклида и законами движения Ньютона. Ученые полагали, что, зная положение всех материальных тел в данный момент времени, они смогут предсказать их положение в любой последующий момент — ведь для этого надо лишь решить соответствующие дифференциальные уравнения.

При этом два основоположных камня, на которых возводилось все здание, не имели ничего общего друг с другом. Бесконечное пространство никак не соотносилось с наполнявшей его материей, оно было лишь сценой, на которой разыгрывалась мировая драма. По самой своей сущности это пространство безотносительно к чему бы то ни было внешнему оставалось всегда одинаковым и неподвижным — оно не изменилось бы даже, если бы вся материя неожиданно исчезла. Как писал по этому поводу А. Эйнштейн, «Ньютон обнаружил, что наблюдаемые геометрические величины (расстояния между материальными точками) и их изменения во времени в физическом смысле не характеризуют полностью движения... Следовательно, кроме масс и изменяющихся во времени расстояний между точками существует еще нечто такое, что определяет происходящие события; это «нечто» он воспринимал как отношение к абсолютному пространству».

Успехи ньютонианских механики и астрономии сделали предложенную им картину мира общепринятой. Какие-либо сомнения в ней стали считаться чем-то антинаучным.

Картину Вселенной, принимавшуюся всеми в XVIII в., знаменитый немецкий философ Кант описал следующим образом: «В бесконечной дали существует еще много таких звездных систем, и части ее находятся во взаимной связи... Мы видим первые члены непрерывного ряда миров и систем, и первая часть бесконечной прогрессии уже дает нам представление, каково целое. Здесь нет конца, здесь бездна подлинной неизмеримости... Мировое пространство наполнено мирами без числа и без конца...».

Следует отметить, что признание бесконечности Вселенной мирно уживалось в уме Канта и большинства его современников с верой в бога. А некоторые богословы считали, что для сотворения бесконечной Вселенной нужен более могущественный бог, чем для творения конечного мира, и потому усматривали в бесконечности Вселенной «доказательство всемогущества божия». Понадобились полувековая деятельность Вольтера и энциклопедистов, грозы французской революции, чтобы Лаплас смог ответить Наполеону на вопрос, почему в его сочинении о небесной механике не упоминается бог: «Ваше Величество! У меня не возникла необходимость в этой гипотезе».

Новые осложнения. Не зря все-таки Аристотель предупреждал о зыбкости и неясности понятия бесконечности, об осложнениях, к которым оно может привести. Вскоре после создания ньютонианской физики и математического анализа в этих науках возникли первые осложнения.

Ученики и последователи Ньютона и Лейбница с необычайной легкостью пользовались расплывчатыми и полными непостижимой загадочности понятиями бесконечно малого и бесконечно большого, решая с их помощью сложнейшие задачи астрономии, физики и механики. Запросто складывали они бесконечные множества слагаемых, не колеблясь, переносили на такие суммы правила действий над конечными суммами. И хотя основные понятия нового исчисления казались туманными для математиков, воспитанных на античной строгости, практические успехи нового исчисления заставляли всех забывать об этом. «Идите вперед, и вера к вам придет», говаривал своим ученикам видный французский математик XVIII в. Д'Аламбер [20].

Однако к концу XVIII в. появились первые признаки неблагополучия — стали накапливаться случаи, когда некорректное применение бесконечно малых и бесконечно больших величин приводило к парадоксам. Поэтому в начале XIX в. эти величины были вновь изгнаны из математики и их место заняла идея предела. Громадную роль здесь сыграли работы Нильса Хенрика Абеля [21], Огюстена Коши [22] и Карла Фридриха Гаусса [23], которого его современники называли «princeps mathematicorum» (первый среди математиков). Для отношения Гаусса к понятию бесконечности характерен следующий отрывок из его письма к Шумахеру [24], написанного в 1831 г.: «...Я протестую против употребления бесконечной величины как чего-то завершенного, что в математике никогда недопустимо. Бесконечность не нужно понимать буквально, когда речь идет собственно о пределе, к которому сколь угодно близко приближаются определенные отношения, когда другие принимаются неограниченно возрастающими».

Возникли осложнения и в космологии. Естественное предположение о равномерном распределении звезд в бесконечном пространстве неожиданно привело к парадоксу. Оказалось, что их суммарная светимость должна была бы оказаться такой, как если бы в каждой точке неба сверкало по Солнцу. Такую картину много столетий тому назад представил себе индийский поэт, воскликнувший:

> Силой безмерной и грозной небо б над нами сияло,
> Если бы тысяча Солнц разом на нем засверкала.

Кроме этого парадокса, получившего название *фотометрического*, возник другой, названный *гравитационным*. Оказалось, что если бы в бесконечной Вселенной была лишь конечная масса материи, то вся эта материя должна была бы собраться в одном месте, в один ком. А если суммарная масса бесконечна, то при равномерном распределении произошло бы взаимное уравновешивание сил тяготения.

Оба эти парадокса можно устранить, предположив, что материя распределена во Вселенной неравномерно. Но это ведет к гипотезе о существовании центра Вселенной, что не менее удивительно, чем конечность массы во Вселенной. А кроме того, как показали современные наблюдения, в нашей Метагалактике материя распределена более или менее равномерно.

Как фотометрический, так и гравитационный парадоксы оказались устранены лишь после того, как в XX в. была создана новая теория о строении Вселенной, основанная на общей теории относительности Эйнштейна. Прежде чем рассказывать о новых представлениях, сделаем еще один экскурс в математику.

Кривое пространство. В своем романе «Астронавты» писатель-фантаст Станислав Лем писал: «Картина звездного неба менялась очень быстро. Снимки, сделанные еще вчера, не совпадали со снимками, сделанными сегодня. Казалось, что какая-то таинственная сила раздвигает звезды, словно они являются крапинками на поверхности воздушного шарика, который раздувается все сильнее и сильнее. Гравитолог Звездной экспедиции уже несколько дней не отходил от вычислительной машины. Экспедиция приближалась к тяжелой звезде, сильно искривлявшей окружающее пространство. Для определения курса корабля было необходимо непрерывно вычислять эту кривизну. Это была серьезная проверка. Люди впервые сталкивались со столь сильными полями тяготения, со столь большой кривизной. Уравнения, полученные когда-то Эйнштейном, держали теперь экзамен. От них зависел успех экспедиции и даже сама жизнь ее участников».

Наиболее непонятными в этом отрывке для читателя, незнакомого с современной математикой, являются слова о кривизне пространства — вообразить себе кривое пространство куда труднее, чем кривую линию или поверхность. Не зря, когда во второй половине XIX в. возникло это понятие, была сложена эпиграмма:

Die Menschen fassen kaum es,
Das Krümmungsmass des Raumes

(люди никак не могут понять, что такое мера кривизны пространства).

Обычные возражения против искривленности пространства таковы. Кривую линию невозможно совместить с прямой и приходится располагать на плоскости или в пространстве. Точно так же и кривую поверхность невозможно поместить на плоскости — для этого нужно по крайней мере трехмерное пространство. Следовательно, и искривленное трехмерное пространство должно лежать в каком-то объемлющем его пространстве четырех, а то и пяти измерений. А так как никто четырехмерного пространства не наблюдал, то пространство, в котором мы живем, никак не может быть искривленным. Некоторые философы добавляли к этим рассуждениям всякие слова об идеализме, фидеизме и т. д. Зато авторам научно-фантастических рассказов идея четырехмерного пространства очень понравилась. Во многих рассказах и повестях Уэллса происходят путешествия в четвертом измерении.

На самом деле искривленность пространства совсем не связана с четвертым измерением, а является, так сказать, его внутренним делом. И установить искривленность можно не выходя из этого пространства, а лишь проводя измерения внутри него.

Для того, чтобы читателю было яснее, как это делается, расскажем сначала, как установить кривизну поверхности, не покидая ее, а лишь измеряя расстояния между ее точками.

Геометрия на Ялмезе. В течение многих тысячелетий люди думали, что Земля плоская. Однако наблюдения за тенью Земли во время лунных затмений привели древнегреческих ученых к мысли о шарообразности Земли. Эратосфену удалось даже с довольно большой точностью измерить ее радиус. Но после того, как снова воцарилась мысль, что Земля плоская, для доказательства шарообразности Земли понадобилось кругосветное путешествие Магеллана.

А теперь представьте себе планету Ялмез, где живут разумные существа, но небо закрыто вечной пеленой облаков, а океанские путешествия по тем или иным причинам невозможны. Смогли бы жители этой планеты узнать, что они живут не на куске плоскости, со всех сторон окруженном водой, а на сфере? Иными словами, было ли необходимо путешествие Магеллана для того, чтобы доказать шарообразность Земли? *

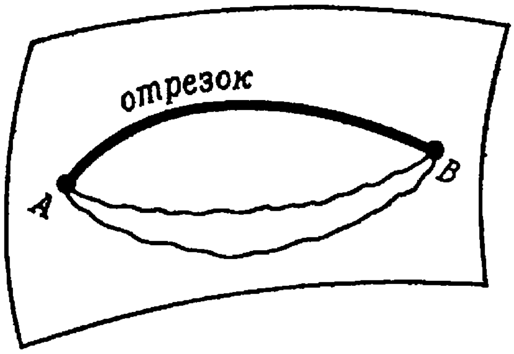


Рис. 1

Чтобы понять, как возникает идея кривизны поверхности, проследим за ходом развития геометрии на планете Ялмез. Геометрия возникает как экспериментальная наука, как теоретическое обобщение многовековых наблюдений над свойствами пространства. Поскольку мы условились считать, что небо планеты покрыто облаками, геометрам Ялмеза пришлось вести наблюдения лишь на поверхности планеты. Оказалось, что среди всех линий, соединяющих две точки этой поверхности, всегда есть наикратчайшая (рис. 1). Наикратчайшие линии и были названы «отрезками прямых». Разумеется, наблюдатель, который посмотрел бы на планету со стороны, сказал бы, что эти линии совсем не прямые, а кривые — это дуги сечений сферы диаметральными плоскостями. Но ялмезяне не могли посмотреть на свою планету со стороны и считали наикратчайшие линии, проведенные на поверхности, прямыми (впрочем, ведь и мы часто говорим «дорога прямая, как стрела», хотя на самом деле она идет по дуге диаметрального сечения).

Затем установили свойства этих «прямых». В самом начале наблюдению была доступна лишь малая часть планеты, а точность измерения оставалась очень небольшой. Поэтому в пределах точности измерения свойства «пря-

* Разумеется, автор не ставит под сомнение ни географическую ценность путешествия Магеллана, ни его историческое значение. Речь идет только о чисто математическом вопросе: как установить искривленность земной поверхности, не совершая кругосветных путешествий?

мых» на поверхности планеты были такими же, как свойства прямых на плоскости: через две точки проходила одна и только одна «прямая», две «прямые» пересекались в одной и только одной точке (вторая точка пересечения, диаметрально противоположная первой, была недосягаема для наблюдателей). Наконец, ялмезянские геометры были уверены, что их «прямые линии» бесконечны. Самая мысль, что при движении по «прямой» в одном и том же направлении они вернутся в исходную точку, казалась дикой, непонятной и противоречащей здравому смыслу. И ялмезянские ученые были убеждены, что поверхность их планеты бесконечна, а тех, кто выдвигал иные идеи, обвиняли во всех смертных грехах...

Дальнейшее изучение свойств «прямых» показало, что в пределах точности измерения сумма углов любого треугольника равна 180°, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов и т. д. Иными словами, жители Ялмеза построили геометрию Евклида и считали, что она полностью приложима к поверхности их планеты.

Вскоре, однако, им пришлось убедиться, что это не так. По мере развития техники удавалось измерить все бо́льшие и бо́льшие куски суши (мы договорились, что океанских плаваний ялмезяне совершать не могли). И эти измерения вступили в противоречие с евклидовой геометрией. Чтобы понять, в чем здесь дело, возьмем на сфере три точки A, B и C (рис. 2, *а*). Эти точки можно соединить «отрезками прямых», а по нашему — дугами меридианов AB и AC и дугой экватора BC. В результате получается треугольник ABC. Легко видеть, что все три угла этого треугольника прямые. Значит, сумма его углов равна 270°, а не 180°, как полагается по геометрии Евклида. На 90° больше, чем нужно.

У других треугольников избыток суммы углов был бы другой. Например, у треугольника ABD (рис. 2, *б*) углы B и D равны 90°, а угол BAD равен 180°. Сумма углов этого треугольника равна 360° — на 180° больше, чем нужно. В дальнейшем число $\alpha+\beta+\gamma-180°$, где α, β, γ — углы сферического треугольника, мы будем для краткости называть *избытком* сферического треугольника.

Поворот параллельных. Но не только наличие избытка у треугольников показало жителям Ялмеза, что они живут не на плоскости, а на кривой поверхности. Неверной оказалась и теорема Пифагора. Например, у треугольника ABC угол A равен 90°, а все его стороны равны друг

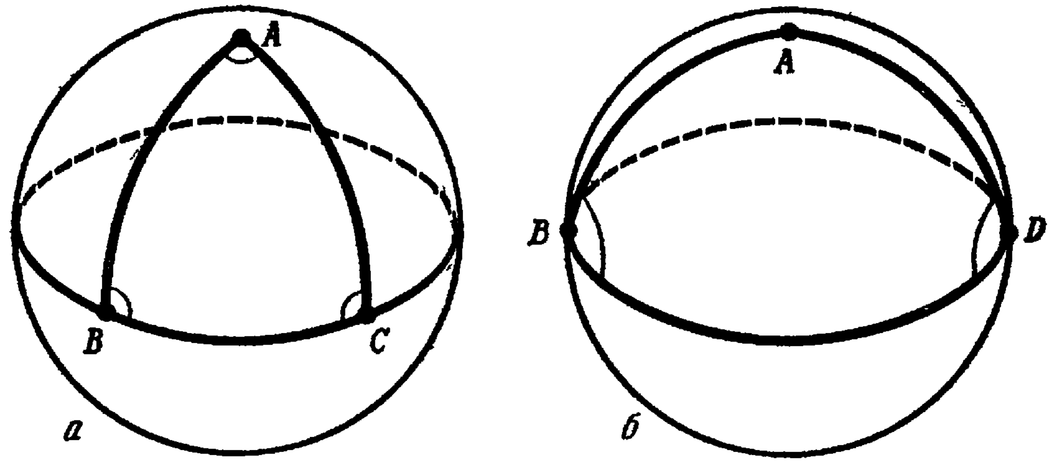


Рис. 2

другу. Вообще, здесь трудно разобрать, где гипотенуза, а где катеты — все углы прямые.

К неожиданным результатам привело и изучение параллельных прямых на поверхности планеты. Ведь если провести на плоскости замкнутую линию, а потом перемещать вдоль нее отрезок так, чтобы он оставался все время параллелен самому себе, то отрезок вернется в исходную точку, не изменив направления (рис. 3, *а*). Измерения на малых участках поверхности планеты, казалось бы, подтверждали этот результат (*параллельными* ялмезяне считали *прямые*, перпендикулярные одной и той же прямой).

Но измерения больших участков поверхности привели совсем к иным результатам. Возьмем, например, треугольник *ABC* (рис. 3, *б*) и проведем в точке *A* «отрезок», перпендикулярный *AB*. Будем переносить этот отрезок вдоль контура треугольника *ABC*, следя за тем, чтобы он оставался все время параллельным самому себе. Когда мы придем в точку *B*, то получим отрезок, направленный по экватору. Так как экватор сам является «прямой», то после параллельного переноса в точку *C* отрезок снова будет направлен по экватору. А когда мы перенесем его еще по меридиану *CA*, то получим отрезок, повернутый на 90° относительно первоначального направления (то есть как раз на величину избытка треугольника *ABC*). А если бы мы переносили отрезок по контуру треугольника *ABD* на рис. 2, *б*, то он повернулся бы на 180°.

Вообще, при параллельном переносе по контуру любого сферического треугольника отрезок поворачивается на угол, равный избытку этого треугольника. Любопытный

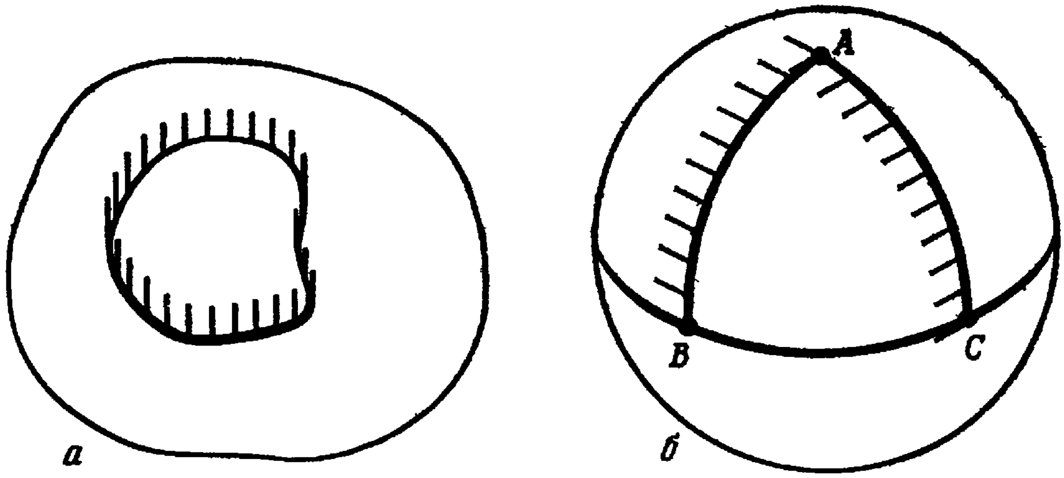


Рис. 3

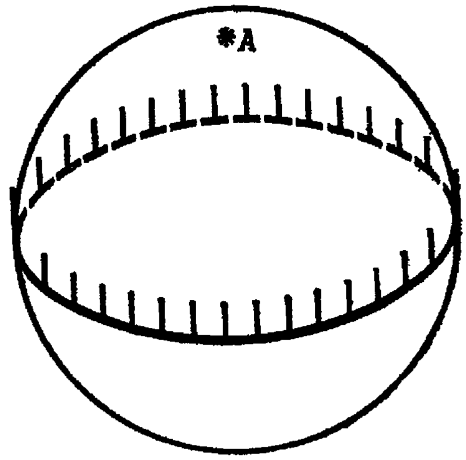


Рис. 4

результат получается, если переносить отрезок вдоль экватора. На первый взгляд кажется, что он возвратится в исходную точку, не повернувшись. Но это неверно. Если все время сносить движущийся отрезок в одну и ту же точку — полюс сферы, то мы увидим, что он повернулся на 360° (рис. 4). Но это и неудивительно. Дополним экватор дугой меридиана AB, пробегаемой в обоих направлениях. Мы получим «треугольник» ABA. В этом треугольнике два угла прямые, а третий равен 360°. Поэтому и его избыток равен 360°.

Измерение кривизны. Итак, измеряя сумму углов треугольника, наблюдая за поворотом параллельных при переносе по замкнутому контуру, проверяя теорему Пифагора, жители планеты убедились, что они живут не на плоскости, а на какой-то искривленной поверхности. За меру кривизны некоторого участка поверхности они приняли угол поворота отрезка, параллельно перенесенного вдоль границы этого участка. Эту кривизну можно было считать и по-другому: разбить участок на треугольники и сложить избытки всех треугольников. Ведь, если два треугольника объединяются в один, то их избытки складываются.

Оказалось, что чем больше площадь участка, тем сильнее он искривлен. Точнее говоря, избыток любого треугольника оказался пропорционален его площади:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=kS \quad (1)$$

(мы будем измерять углы не в градусах, а в радианах; при таком измерении сумма углов плоского треугольника равна π). Отсюда был сделан вывод, что кривизна поверхности на единицу площади всюду одна и та же. Число k и приняли за меру кривизны.

Но среди всех поверхностей есть только одна поверхность, для которой избыток треугольника на единицу площади всегда один и тот же — это сфера. Поэтому геометры Ялмеза установили, что они живут на сфере, а не на какой-нибудь другой поверхности. Без особого труда удалось даже найти радиус этой сферы. Ведь если число k не зависит от выбора треугольника, его достаточно подсчитать для одного треугольника. Возьмем, например, треугольник ABC на рис. 2, *a*. Его избыток равен 90°, или, в радианной мере, $\pi/2$. Площадь же этого треугольника равна 1/8 площади сферы, то есть $\pi R^2/2$. Подставляя эти значения в формулу (1), получаем, что $k=1/R^2$, а потому для любого сферического треугольника

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=S/R^2,$$

где α, β, γ — его углы, S — площадь и R — радиус сферы. Полученная формула позволяет определить радиус сферы путем измерения углов и площади треугольника. Разумеется, этот способ не очень удобен, так как требует весьма большой точности измерения углов. Для измерения радиуса Земли прибегли к иному способу — измерению длины дуги меридиана, что потребовало наблюдений за звездами.

Гауссова кривизна. Формула (1) определяет кривизну k поверхности сферы, отнесенную к единице площади. Как мы видели, она равна $1/R^2$. Иными словами, чем больше радиус сферы, тем меньше искривлен участок ее поверхности, имеющий единичную площадь; поверхность мяча искривлена гораздо больше, чем поверхность Земли.

Гаусс предложил таким же образом измерять кривизну любой поверхности. На любой поверхности можно строить геометрию точно так же, как и на поверхности сферы. Роль прямолинейных отрезков играют при этом *кратчайшие* (их еще называют *геодезическими)* линии, то есть линии, длина которых меньше длины всех остальных линий, соединяющих данные две точки. С ними впервые столкнулись геодезисты при измерении расстояний на поверхности Земли. К слову сказать, и сам Гаусс пришел к занятиям геометрией на поверхностях после того, как он в течение нескольких лет занимался геодезическими измерениями.

Из геодезических линий можно строить треугольники, четырехугольники и т. д. При этом на любой кривой поверхности, как и на сфере, сумма углов треугольника не будет, вообще говоря, равна π. Кривизной треугольника, отнесенной к единице площади, мы снова назовем число $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/S$. Однако на произвольных поверхностях это число будет для различных треугольников различным. Более того, оно может быть для одних треугольников положительным, а для других — отрицательным (треугольники могут иметь не только избыток, но и недостаток).

Чтобы найти кривизну в какой-то точке поверхности, надо брать все меньшие и меньшие треугольники, охватывающие эту точку, и искать их кривизну, отнесенную к единице площади. В пределе мы получим кривизну поверхности в данной точке. Это определение кривизны дал Гаусс, и ее обычно называют *гауссовой кривизной*. Если треугольники имеют избыток, то гауссова кривизна поверхности положительна, а если сумма углов меньше π, то кривизна отрицательна.

Если поверхность выпукла, то ее гауссова кривизна во всех точках положительна, а для бублика, изображенного на рис. 5 (математики называют его *тором*), в одних точках гауссова кривизна положительна, а в других — отрицательна.

Замечательным свойством гауссовой кривизны является то, что она не меняется при изгибании поверхности, то есть при ее преобразованиях, не изменяющих расстояний между точками. Отсюда ясно, например, что во всех точках цилиндра гауссова кривизна равна нулю. Ведь цилиндр получается изгибанием куска плоскости, а кривизна плоскости равна нулю. Равна нулю гауссова кривизна и во всех точках конуса, кроме его вершины.

Псевдосфера и геометрия Лобачевского. На сфере во всех точках кривизна одна и та же, и притом положительна. А есть поверхность постоянной отрицательной кривизны. Ее называют *псевдосферой*. Она получается следующим образом.

Представим себе, что в точке A стоит человек, который держит на поводке собаку (рис. 6). Вначале собака на-

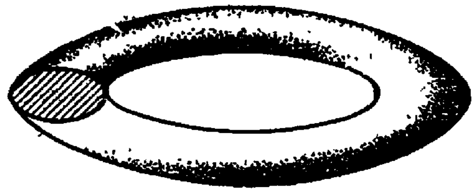


Рис. 5

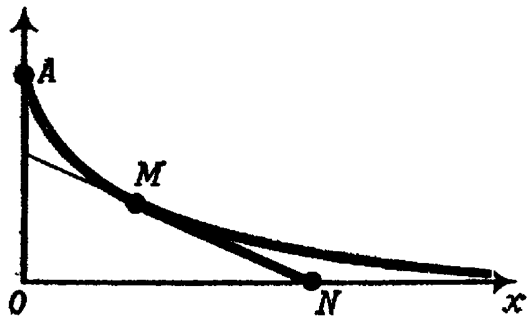


Рис. 6

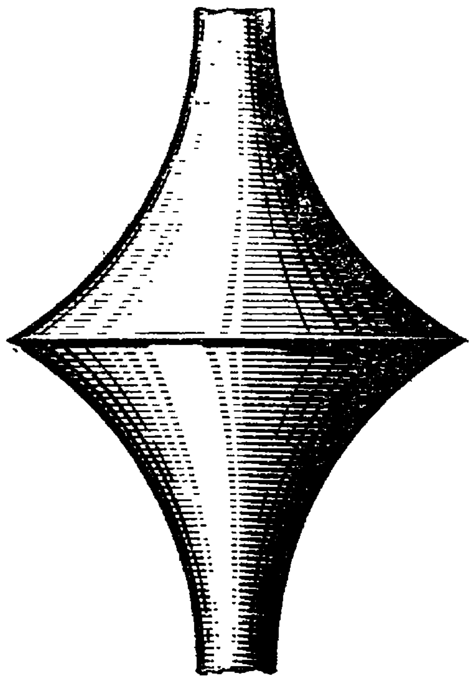


Рис. 7

ходится в точке O. После этого она бежит по прямой Ox с постоянной скоростью, а ее хозяин бежит вслед за ней так, что его скорость все время направлена вдоль поводка. Поэтому сначала хозяин бежит в направлении AO. Но по мере того, как собака продвигается по прямой Ox, направление бега хозяина образует все меньший угол с этой прямой, причем расстояние от бегущего человека до прямой Ox становится все меньше. На рис. 6 изображена линия, по которой бежит человек. Она называется *трактрисой* и обладает следующим замечательным свойством: в какой бы точке M к ней ни провести касательную, отрезок этой касательной между точкой M и осью Ox имеет одну и ту же длину.

Если повернуть трактрису вокруг прямой Ox, то получится псевдосфера (рис. 7). Эта поверхность замечательна тем, что геометрия на ней совпадает с геометрией на куске плоскости Лобачевского. Поэтому открытие псевдосферы было очень важным этапом в развитии неевклидовой геометрии.

Гаусс и Риман. В работах Гаусса был до конца решен вопрос о том, что такое кривизна поверхности. На повестку дня встала проблема, как определить меру кривизны пространства. Это удалось сделать одному из самых замечательных математиков XIX в.— Бернгарду Риману [25].

Проблеме кривизны пространства была посвящена пробная лекция, прочитанная Риманом в 1854 г. Тогда в университетах существовал хороший обычай: начинающий преподаватель должен был прочесть лекцию для членов факультета, чтобы они могли определить его педагогические способности. Риман предложил несколько тем пробных лекций, из которых Гаусс выбрал одну, сильнее всего заинтересовавшую его — «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Надо полагать, что слушатели остались не слишком высокого мнения о педагогических дарованиях Римана: содержание лекции понял до конца лишь один слушатель — Гаусс.

Почти без формул и выкладок Риман развил общие идеи о многомерных многообразиях, об измерении длин в таких многообразиях, их кривизне и т. д. В лекции были поставлены интересующие до сих пор физиков-теоретиков вопросы о том, непрерывно или дискретно наше пространство, применима ли обычная геометрия к бесконечно малым областям пространства. Глубина этих идей захватила Гаусса, и, как рассказывают очевидцы, он ушел домой в глубокой задумчивости.

Кривизна пространства. Как же ответил Риман на вопрос: что такое кривизна пространства и как она измеряется? Он применил тот же способ, каким Гаусс измерял кривизну поверхности: подсчитывал сумму углов треугольника, составленного из отрезков геодезических линий, и смотрел, на сколько она отличается от π. Однако при этом возникло осложнение: ведь в пространстве через точку можно провести много плоскостей и кривизна зависит не только от того, в какой точке ее вычисляют, но и от того, в какой плоскости лежат треугольники. Поэтому Риман говорил не о кривизне в данной точке, а о кривизне в данной точке в направлении данной плоскости.

Если для всех треугольников в пространстве сумма углов равна π, то в этом пространстве верна обычная геометрия Евклида. Такое пространство не имеет кривизны, или, как говорят, оно *плоское*. Если же есть треугольники, сумма углов которых больше π, то кривизна пространства в соответствующих точках положительна; если же сумма углов меньше π, то отрицательна.

Таким образом, понятие кривизны пространства не содержит в себе ничего таинственного, а указывает лишь на то, что сумма углов треугольника может отличаться от предписанного Евклидом значения. Особенно интересными являются пространства, в которых кривизна во всех точках и во всех плоскостях одна и та же. В таких пространствах (их называют *пространствами постоянной кривизны)* тела могут передвигаться из одного места в другое, не меняя своих размеров. Если же кривизна пространства переменна, то тело при перемещении будет менять размеры, искажаться.

Риман поставил вопрос о том, является ли искривленным реальное пространство, в котором мы живем. Он писал: «Или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических соотношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем ее постепенно совершенствовать, руководствуясь фактами, которые ею объяснены быть не могут... Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день».

Путешествие за кривизной. Лишь в начале XX в. начало осуществляться предсказание Римана — вопрос о кривизне пространства перешел из области абстрактных математических рассмотрений в область конкретных физических теорий. Обдумывая причину равенства инертной и гравитационной масс, великий физик Альберт Эйнштейн создал общую теорию относительности, радикально изменившую наши представления о связи материи и пространства. Если, как уже говорилось выше, в физике Ньютона пространство никак не зависело от наполнявшей его материи, то в новой теории оказалось, что пустого пространства, то есть пространства без содержащегося в нем поля, просто не существует. Пространство и время оказались существующими не сами по себе, а лишь в неразрывной связи друг с другом и только как структурное свойство поля.

Построенная Эйнштейном теория была настолько сложна и непривычна, что многие ученые отнеслись к ней с недоверием (а другие попросту не поняли). Вдобавок ко всему, кроме равенства двух видов массы, у Эйнштейна не было никаких экспериментальных доказательств своей теории. А физики обычно признают новую теорию лишь в случае, когда она не только объясняет все известные явления, но и предсказывает новые, еще не наблюдавшиеся.

Но среди многих неожиданных и на первый взгляд парадоксальных выводов из общей теории относительности один сравнительно легко поддавался экспериментальной проверке. По этой теории притягивающие массы должны были искривлять пространство. Поэтому надо было лишь доказать экспериментально кривизну пространства.

Физическими экспериментами было давно установлено, что свет всегда распространяется так, чтобы пройти свой путь за кратчайшее время, причем скорость света в пустоте всегда одна и та же. Поэтому за геодезические линии в пространстве принимали световые лучи (в пустоте).

Теперь для определения кривизны пространства надо было измерить сумму углов треугольника, составленного из световых лучей. Однако даже для треугольников, одной из вершин которых является звезда, эта сумма в пределах ошибок наблюдения не отличается от π. Поэтому можно сказать, что если пространство в целом и искривлено, то эта кривизна очень мала. Заметим, что безуспешные попытки доказать неевклидовость реального пространства путем прямого измерения суммы углов космических треугольников предпринимали еще Гаусс и Н. И. Лобачевский [26].

Эйнштейн предложил вместо определения суммы углов космических треугольников пронаблюдать за изменением хода световых лучей. Из его теории следовало, что если сфотографировать одну и ту же звезду дважды — когда ее луч проходит далеко от Солнца и когда он проходит около Солнца, то мы заметим сдвиг ее положения, вызванный искривлением светового луча.

Впрочем, отклонение должно было иметь место и по обычной физике, но у Эйнштейна оно оказалось вдвое большим. Надо сказать, что и по новой теории отклонение было очень небольшим — меньше двух угловых секунд (под таким углом мы увидим двухкопеечную монету с расстояния в 1200 метров). Но все-таки такое отклонение можно измерить, и хотя вблизи Солнца звезда тонет в сиянии солнечных лучей, во время полных солнечных затмений соответствующие наблюдения удается провести.

Поэтому весной 1919 г. были отправлены две научные экспедиции для измерения кривизны пространства: одна на западное побережье Африки, а другая —в Северную Бразилию. Наблюдения, проведенные ими 29 мая 1919 г., полностью подтвердили предсказание Эйнштейна: смещение звезды оказалось именно таким, каким оно должно было быть по его теории. Тем самым было доказано, что материя искривляет окружающее ее пространство.

Другое доказательство искривленности пространства дали наблюдения за планетой Меркурий. Эта планета находится ближе к Солнцу, чем остальные планеты, и потому испытывает наибольшее влияние искривленности околосолнечного пространства. Из-за этой искривленности после полного оборота Меркурия вокруг Солнца его орбита немного поворачивается. Впрочем, орбита поворачивается и по другой причине — из-за притяжения планет. Поворот орбиты, вызванный притяжением планет, астрономы умели учитывать. Но их расчеты не сходились с действительностью — орбита поворачивалась быстрее, чем нужно, на 41 секунду в сто лет. Когда подсчитали по формулам Эйнштейна, на сколько поворачивается орбита из-за кривизны пространства, ответ был: на 41 секунду в сто лет. Этим была объяснена загадка, долгое время мучившая астрономов, а заодно получено новое подтверждение теории относительности.

Расширяющаяся Вселенная. После появления общей теории относительности перед астрономами встал важнейший вопрос: а как же устроено реальное пространство? Ведь если оно искривлено и кривизна его положительна, то оно может быть устроено примерно как трехмерная сфера, то есть не иметь нигде границ и в то же время иметь конечные размеры. Некоторые философы отрицали самую возможность конечности размеров реального пространства. Но их доводы не более убедительны, чем доказательства ялмезянских ученых, считавших, что они живут на бесконечной плоскости, а не на ограниченной сфере. Ответ на поставленный вопрос должны были дать не умозрительные построения, а астрономические исследования.

Первую попытку построить модель Вселенной на основе новой теории тяготения сделал сам Эйнштейн. Однако она оказалась не слишком удачной. Дело в том, что он попробовал построить модель стационарной Вселенной, не меняющейся с течением времени. Ведь еще Аристотель писал, что «в продолжение всего прошедшего времени, согласно летописям, завещаемым потомкам от поколения к поколению, мы не находим следа изменений ни во всем удаленном небе в целом, ни в одной из подходящих частей неба».

Чтобы построить стационарную модель Вселенной, Эйнштейну пришлось ввести предположение о существовании сил, отталкивающих галактики друг от друга и пропорциональных разделяющему их расстоянию. Существование таких сил не подтверждалось какими-либо известными в то время опытами. Впоследствии Эйнштейну пришлось признать предположение о таких силах отталкивания «самой грубой ошибкой в своей жизни».

Неожиданное решение предложил в 1922 г. молодой ленинградский математик Александр Александрович Фридман [27]. В статье «О кривизне пространства» он доказал, что уравнения общей теории относительности имеют нестационарные решения, то есть решения, при которых Вселенная либо расширяется, либо сжимается. При этом соответственно кривизна и плотность материи должны либо уменьшаться, либо увеличиваться. Любопытно, что теоретическая физика отнюдь не была основным предметом исследований Фридмана — его главные работы лежат в области динамической метеорологии.

Решение, полученное Фридманом, настолько противоречило установившимся взглядам на строение Вселенной, что первой мыслью ученых было предположение о допущенной им ошибке. Именно так отозвался об этой работе Эйнштейн в краткой заметке, помещенной в очередном номере того же физического журнала, где была опубликована статья Фридмана. Вскоре Эйнштейн получил подробное письмо от автора статьи, рассеявшее все сомнения. И хотя Эйнштейн был уже тогда общепризнанным главой физиков, а Фридман — начинавшим исследователем, маститый ученый ни минуты не поколебался в том, как ему следует поступить. 13 мая 1923 г. в редакцию «Физического журнала» поступило следующее письмо Эйнштейна, опубликованное под заголовком «Заметка о работе А. Фридмана о кривизне пространства»: «В предыдущей заметке я критиковал названную работу. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, основывалась на ошибках в вычислениях.

Я считаю результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметрические решения для структуры пространства».

Позднее выяснилось, что на самом деле статических решений не существует — модель Эйнштейна была неустойчивой и потому однородная и изотропная (одинаковая во всех направлениях) модель Вселенной обязана была оказаться нестационарной.

Вслед за Фридманом многие физики и астрономы начали строить динамические модели Вселенной. Так появились модели Леметра [28], де Ситтера [29] и других.

И вновь возник вопрос об экспериментальном подтверждении той или иной модели Вселенной; в частности, надо было выяснить, расширяется она или сжимается. И тут астрономы вспомнили, что еще в начале XX в. американский астрофизик В. М. Слейфер [30] проводил измерения лучевых скоростей галактик. Оказалось, что 36 из 41 исследованных им галактик удаляются от нас, причем некоторые из них — со скоростью 2 000 км/с (впоследствии оказалось, что остальные 5 галактик приближаются к нам из-за собственного движения Солнца в нашей Галактике). Исследования Слейфера были продолжены американским астрономом Э. Хабблом [31], который определил не только скорости галактик, но и их расстояния до Солнца. Проведенные им исследования показали, что имеет место замечательный закон: скорость удаления галактик от нас пропорциональна их расстоянию. Иными словами, быстрее всего удаляются от нас наиболее удаленные галактики.

Этим была убедительно доказана справедливость догадки Фридмана. Оказалось, что Вселенная действительно расширяется. Не следует думать, разумеется, что Земля является тем центром, от которого во все стороны разлетаются галактики. Просто при расширении Вселенной наблюдатель, находящийся в любой точке, увидит одну и ту же картину — разлет галактик во все стороны от точки, где он находится.

Картина расширяющейся Вселенной позволила объяснить как гравитационный, так и фотометрический парадокс. Оказалось, что свет от слишком удаленных звезд не доходит до Земли, что мы можем видеть лишь галактики, находящиеся ближе так называемого *видимого горизонта*. Этим объясняется и то, почему мы наблюдаем расширяющуюся, а не сжимающуюся Вселенную. В периоды сжатия Вселенной (если они существуют) фотометрический парадокс должен проявиться во всю свою силу и поступающий на Землю поток энергии будет таким, что никакая жизнь на ней не будет возможна. Иными словами, жизнь возможна лишь в периоды расширения и невозможна в периоды сжатия.

Былое и будущее Вселенной. После появления нестационарных моделей Вселенной встал ряд вопросов, над которыми сейчас работает мысль физиков-теоретиков: когда начался разлет галактик и что было до этого, будет ли это разбегание продолжаться вечно или оно сменится периодом сжатия и т. д. В настоящее время большинство ученых согласны в том, что много миллиардов лет тому назад Вселенная находилась в сверхплотном состоянии. Плотность сгустка была, по-видимому, больше, чем плотность вещества в ядрах атомов, то есть больше, чем 10^{14} г/см^3. Некоторые подсчеты дают величины порядка 10^{93} г/см^3. Ясно, во всяком случае, что материя находилась в состоянии, совершенно неведомом современным физикам, и к ней не были применимы ни законы гравитации, ни квантовая теория.

Физики-теоретики пытаются, основываясь на наблюдениях над Вселенной в современном состоянии, сделать определенные выводы о ее состоянии во времена, близкие к моменту того «большого взрыва», с которого, как они полагают, началась ее история. Они вычисляют, когда начали образовываться элементарные частицы, когда эти частицы стали складываться в атомы, как менялась температура Вселенной и т. д. На основании этих исследований было доказано, в частности, что если в начале Вселенная была «горячей», то до наших дней должно дойти так называемое реликтовое электромагнитное излучение, температура которого в разных вариантах теории принимала значения от долей градуса до 20—30 градусов Кельвина.

Советские теоретики А. Г. Дорошкевич [32] и И. Д. Новиков [33] рассчитали в 1964 г., насколько интенсивность реликтового излучения должна превышать в сантиметровой области спектра интенсивность других источников. Но эта работа, указывавшая на возможность решающего эксперимента, оказалась не замеченной наблюдателями. Реликтовое излучение было открыто совершенно случайно в 1965 г. при отладке радиоантенны, созданной для наблюдения за спутниками. Температура этого излучения оказалась равной 3 градусам Кельвина. Это открытие делает весьма вероятной модель горячего начального состояния Вселенной.

Мы не будем подробно рассказывать, как возникли и развивались по современным представлениям звезды и галактики. Здесь много спорного, и известный физик Л. Бриллюэн [34] высказался обо всех этих теориях (равно как и о теории «большого взрыва»), что «все это слишком красиво, чтобы быть истинным, и слишком невероятно, чтобы поверить в это». Тем не менее наука в настоящее время не располагает иной теорией, объясняющей такое количество загадочных явлений во Вселенной.

Другой вопрос, интересующий ученых, касается, разумеется, будущего Вселенной. Возможны два варианта: либо Вселенная будет неограниченно расширяться и в невероятно далеком будущем галактики разойдутся друг от друга настолько далеко, что обитатели каждой из них не будут видеть на небе остальных, либо в какой-то момент разбегание галактик остановится и сменится их сближением. Как показали подсчеты ученых, выбор между этими двумя возможностями зависит от средней плотности вещества во Вселенной. Если эта плотность меньше, чем 10^{-29} г/см^3, то расширение будет продолжаться вечно, а если она больше этой величины, то в какой-то момент времени начнется сжатие Вселенной. Некоторые ученые полагают даже, что это сжатие будет продолжаться, пока Вселенная не превратится вновь в сверхплотный сгусток, а потом все начнется сначала. Поневоле вспоминаешь слова Гераклита о закономерно вспыхивающем и закономерно угасающем огне.

Но какова же плотность вещества во Вселенной на самом деле? Ответить на этот вопрос довольно трудно, так как возможно, что большая часть вещества находится в состоянии, недоступном для наблюдения (так называемые *черные дыры*, не испускающие никакого излучения, межгалактический газ, а может быть, нейтрино, обладающие способностью пронизывать громадные массы материи, не взаимодействуя с ней). По принятым сейчас оценкам эта плотность раз в 30 меньше критического значения, так что, вроде бы, опасаться начала сжатия Вселенной не приходится. Но сейчас каждый год приносит так много новых сведений, что окончательный ответ дать преждевременно.

Бесконечна ли Вселенная? Одним из труднейших вопросов космологии, то есть физического учения об отношении всех частей Вселенной к ней как к целому, является проблема, стоящая в заголовке этого раздела. Ведь в зависимости от того, больше средняя плотность материи в Метагалактике критического значения 10^{-29} г/см^3 или меньше, модель Метагалактики получается открытой или закрытой. И если открытая модель может согласоваться с предположением бесконечных размеров Вселенной, то для ее закрытой модели кривизна положительна и потому размеры ограничены сверху каким-то числом. При этом никакими мыслимыми в настоящее время способами невозможно опровергнуть утверждение, согласно которому наша Вселенная в действительности является замкнутой, причем ее размеры не превышают 10^{25} км.

Вопрос о конечности или бесконечности Вселенной осложняется еще и тем, что с точки зрения теории относительности пространство и время не существуют отдельно, а лишь как единое целое. Пользуясь этим, известный советский специалист в области космологии А. Л. Зельманов [35] построил совершенно удивительные модели. В одной из них пространство, объем которого в одной системе отсчета бесконечен, в другой системе отсчета имеет конечный объем. В другом примере, наоборот, пространство, имеющее в одной из систем отсчета бесконечный объем, является частью пространства, объем которого в иной системе конечен. Аналогичные парадоксы имеют место и для времени при наблюдении за гравитационным коллапсом (схлопыванием выгоревшей звезды в точку под действием силы тяготения) — процесс, который в одной системе отсчета укладывается в конечный промежуток времени, в другой длится бесконечно долго.

Таким образом, привычное противопоставление конечности и бесконечности в пространстве, конечности и бесконечности во времени как взаимоисключающих возможностей и вообще привычная нам постановка вопроса о конечности и бесконечности в пространстве и во времени едва ли могут считаться правильными во всех случаях.

Ситуация осложняется еще возможной неоднородностью и анизотропией (различием свойств в разных направлениях) Вселенной, которые могут привести к тому, что ее модель оказалась бы похожа не на трехмерную сферу, а на более сложные геометрические образы (вспомним, что даже среди поверхностей нулевой кривизны есть не только куски плоскости, но и такие поверхности, как цилиндры и конусы). Таким путем возникает бесконечное многообразие возможных моделей Вселенной, которое неизмеримо богаче, но в то же время и неизмеримо сложнее, чем то, что допускалось дорелятивистской космологией.

Все эти сложности показывают, что однозначный ответ на поставленный выше вопрос вряд ли возможен.

Неизмеримо осложнился и вопрос о бесконечной делимости вещества. Если в начале XX в. считали, что оно состоит из неделимых далее атомов, то после открытий Резерфорда оказалось, что атомы сами состоят из ядер и электронов. Потом были открыты протоны, еще через некоторое время — нейтроны и позитроны, и к концу 30-х годов сложилась нейтронно-протонная модель атомного ядра. Эта модель оказалась настолько удачной, что позволила решить проблему освобождения атомной энергии. Но еще до пуска первого реактора появились новые элементарные частицы — мезоны различного рода. А дальше число элементарных частиц росло чуть ли не по показательному закону — антипротоны и антинейтроны, всевозможные гипероны и антигипероны, резонансы и т. д. И при этом оказалось, что нейтроны могут превращаться в протоны, а протоны — в нейтроны, а потому для них понятие «состоит из» потеряло смысл.

Чтобы навести порядок в мире элементарных частиц, были придуманы частицы нового вида — кварки, которых, однако, никто не наблюдал, хотя с их помощью все хорошо объясняется. Они отличаются друг от друга *цветом* (совершенно условное название), и была создана новая область физики — *хромодинамика*. По новейшим воззрениям мы и не сможем никогда увидеть кварки «живьем». Дело в том, что внутри элементарных частиц между кварками действуют силы, которые возрастают по мере увеличения расстояния между ними (как растет сила натяжения пружины, когда ее растягивают). Таким образом, трудно сказать, как теперь надо понимать безграничную делимость вещества.

Глава 2

ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Понятие без определения. О многом и едином рассуждали Пифагор и Зенон, Платон и Аристотель. Еще пифагореец Модерат определял число (разумеется, натуральное), как собрание единиц, а Евклид в VII книге «Начал» прямо пишет, что «Число же — множество, составленное из единиц» (в древнегреческой математике единица числом не считалась).

Но «теоретико-множественный бум», то есть широкое использование теории множеств в самых разных областях науки и техники, возник только в XX в. Почему же раньше обходились без этого понятия? Ответ на этот вопрос весьма несложен: те, кто раньше не знал о множествах, были подобны мольеровскому герою, не знавшему, что он говорит прозой. Они имели дело с множествами на каждом шагу, не называя их лишь по имени.

Экономист, планировавший взаимосвязи между цехами завода, не думал о каждом отдельном станке, он размышлял о всей совокупности токарных или фрезерных станков и об их производительности. Точно так же офицер, готовивший военную операцию, должен был в зависимости от своего ранга обдумывать действия роты или батальона, полка или дивизии, но не действия каждого солдата в отдельности.

Всем им приходилось работать с совокупностями некоторых объектов, изучая их как нечто целое, объединенное в один коллектив. Математик сказал бы, что они имели дело со множествами элементов, а не с отдельными элементами. К сожалению, он не смог бы ответить на вопрос, что же такое множество. Дело в том, что математики привыкли, определяя новое понятие, сводить его к другим, уже известным ранее. Но откуда-то надо начинать, а понятия более первичного, чем множество, в математике нет.

Это и неудивительно, если вспомнить, что почти любая наука начинается с классификации, с объединения в одно целое похожих объектов или понятий и с разграничения непохожих вещей. До того, как возникла биология, люди должны были научиться отличать друг от друга волков и шакалов, зайцев и кроликов. А до создания минералогии надо было много столетий собирать камни и отличать друг от друга граниты и кремни, малахиты и яшмы. Но каждая классификация с точки зрения математики сводится к образованию множеств по некоторым признакам. Поэтому и нельзя свести понятие множества к более простым. Мы ограничимся лишь тем, что приведем еще несколько примеров *множеств*.

Можно говорить, например, о множестве стульев в данной комнате, о множестве всех протонов на Юпитере, о множестве слов, встречающихся в произведениях А. С. Пушкина, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех натуральных чисел, о множестве всех точек на плоскости, о множестве всех сфер в пространстве и т. д.

Объекты или понятия, из которых составлено данное множество, называются его *элементами*. Приведенные выше примеры показывают, что этими элементами могут быть как реальные объекты (стулья, протоны, рыбы и т. д.), так и абстрактные понятия (числа, точки, геометрические фигуры и т. д.). В качестве элементов множеств могут выступать даже такие создания человеческой фантазии, как мифологические герои, привидения и боги всевозможных религий.

Если множество состоит из реальных объектов, оно, как правило, *конечно*, то есть содержит конечное число элементов. Конечные множества обычно задают списком их элементов. Например, множество дней недели задается списком

{понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

Разумеется, конечные множества, содержащие слишком много элементов, задать списком невозможно — вряд ли кому-нибудь удастся «переписать» всех рыб в океане или все песчинки на берегу моря.

Конечными могут быть и множества, состоящие из абстрактных понятий или мифологических героев и богов (например, конечны множества четных простых чисел, олимпийских богов и т. д.). А множество натуральных чисел бесконечно, так же как и множество точек на плоскости.

Фигурные скобки, в которые заключен список элементов множества, символизируют объединение этих элементов в одно целое. При этом принадлежность элемента a множеству A записывают с помощью знака $\in$: $a \in A$.

Если же элемент a не принадлежит множеству A, то пишут, что $a \notin A$. Например, если обозначить буквой N множество натуральных чисел, то $6 \in N$, а $3/4 \notin N$ и крокодил $\notin N$. Если A — множество всех месяцев в году, то май $\in A$, а среда $\notin A$.

Итак, говоря о множестве, мы объединяем некоторые элементы или понятия в одно целое и в дальнейшем оперируем этим целостным понятием. Основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор[1] выразил это так: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Для того чтобы наглядно представить себе понятие множества, один из основателей русской теоретико-множественной школы академик Н. Н. Лузин[2] предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы данного множества A и что, кроме них, никаких элементов там не находится. Эта оболочка с находящимися внутри нее предметами и может служить образом множества A, состоящего из этих элементов. Сама же прозрачная оболочка, охватывающая все элементы множества, и только их, изображает тот акт объединения элементов, в результате которого создается множество A.

Множества и свойства объектов. Ни бесконечные множества, ни конечные множества, содержащие очень много элементов, невозможно задать с помощью списков. Чтобы определить такое множество, прибегают к указанию свойства, присущего всем его элементам, но не присущего ни одному элементу, не принадлежащему определяемому множеству. Это свойство элементов множества называется для него *характеристическим*.

Например, для множества простых чисел характеристическим является то, что все его элементы — натуральные числа, имеющие ровно два делителя. Пользуясь этим свойством, можно сразу сказать, что ни число 1, ни число 18, ни, наконец, число 2/3 не являются простыми. Число 1 потому, что оно имеет лишь один, а не два различных делителя, число 18 потому, что у него шесть различных делителей: 1, 2, 3, 6, 9, 18, а число 2/3 потому, что оно не является натуральным. Число же 7 является простым, так как оно имеет ровно два делителя: числа 1 и 7.

В древности философы усиленно искали характеристические свойства различных множеств. Например, знаменитому древнегреческому философу Платону приписывали следующее определение: «Человеком называется двуногое живое существо, лишенное перьев». Рассказывают, что его современник Диоген ощипал петуха и сказал: «Вот человек Платона». Пришлось Платону добавить к своему определению слова «и с широкими ногтями». Теперь уже получилось характеристическое свойство для множества людей, которое, впрочем, никак не раскрывало истинную сущность понятия *человек*.

Если слова «элемент x обладает свойством P» обозначить для краткости $P(x)$, то множество элементов, обладающих этим свойством, обозначают $\{x \mid P(x)\}$. Например, множество $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$ состоит из всех корней уравнения $x^2-3x+2=0$, а множество $B=\{x|x \in N$ и $0<x<3\}$ — из натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $0<x<3$. Оба эти множества состоят из чисел 1 и 2, то есть состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными* и пишут $A=B=\{1, 2\}$. Этот пример показывает, что, хотя понятия множества и его характеристического свойства тесно связаны друг с другом, они отнюдь не являются тождественными — одно и то же множество может задаваться различными характеристическими свойствами. Характеристические свойства, задающие одно и то же множество, называют обычно *равносильными*.

Во многих математических теоремах речь идет о совпадении двух множеств, например множества натуральных чисел, делящихся на 3, и множества натуральных чисел, сумма цифр десятичной записи которых делится на 3, или множества равносторонних треугольников и множества равноугольных треугольников. В некоторых случаях проблема совпадения или различия двух множеств, заданных своими характеристическими свойствами, не решена до сих пор. Например, неизвестно, совпадает ли множество натуральных чисел n, для которых уравнение $x^n+y^n=z^n$ имеет решение в натуральных числах, с множеством $\{1, 2\}$ (так называемая *великая теорема Ферма)*, совпадает ли множество простых чисел p, для которых 2^p-1 делится на p^2, с множеством $\{1093, 3511\}$ и т. д.

Множества и реальный мир. Мы уже говорили, что элементами множеств могут быть объекты самого различного вида. Специалисты в тех или иных областях науки имеют дело с множествами предметов и понятий, рассматриваемых в этих науках. Сейчас теоретико-множественные методы используются и в лингвистике, и в этнографии, и в физике. Лингвисты рассматривают, например, множество глаголов или множество падежей данного языка, этнографы — множество видов родственных отношений для членов данного племени, физики — множество молекул газа в данном объеме.

Все эти множества конечны и потому во многих случаях могут быть заданы своими перечнями. Например, учитель, изучая успеваемость в каком-нибудь классе средней школы, задает множество учеников этого класса их списком в классном журнале, библиотекарь задает списком (каталогом) множество книг в библиотеке, географ задает списком множество государств на земном шаре.

По мере развития физики элементарных частиц оказывается все более сложным делом описывать эти частицы на языке теории множеств, поскольку они все время превращаются друг в друга, причем из протона может получиться нейтрон, а из нейтрона — снова протон, так что слова «состоит из» утрачивают свой наглядный смысл.

При составлении множеств из объектов реального мира приходится обычно отождествлять те или иные предметы или понятия. Например, говоря о множестве слов русского языка, составитель словаря пренебрегает тем, что эти слова по-разному произносятся в разных областях страны. Для него эти варианты произношения несущественны и задают один и тот же элемент множества русских слов. По-иному подходят к тому же множеству диалектологи, для которых наиболее интересны именно различные варианты произношения.

Таким образом, говоря об элементах того или иного множества (как состоящего из реальных объектов, так и составленного из абстрактных понятий), мы осуществляем некоторую операцию отождествления, интуитивно чувствуя, что в данном случае она не приведет к противоречию. Иными словами, множества возникают из более расплывчатых понятий путем отождествления тех или иных элементов.

Другие осложнения при использовании теоретико-множественных понятий для изучения реального мира возникают из-за расплывчатости, нечеткости многих понятий, недостаточной определенности многих свойств предметов, трудности расчленения действительности на отдельные объекты. О некоторых из этих осложнений будет рассказано далее.

Разумеется, все указанные осложнения не могут по-служить причиной для отказа от использования теоретико-множественного языка при описании действительности, при построении научных теорий. Они указывают лишь на то, что теоретико-множественная трактовка той или иной области наук налагает серьезные ограничения на наш подход к изучаемым явлениям, приводит во многих случаях к определенному «огрублению» этих явлений.

В то же время, как указывает Ю. И. Манин [3], понятия теории множеств весьма полезны при построении математических моделей явлений реального мира, так как они дают универсальную базу для определения всех математических конструкций на основе «обобщенно геометрических образов». Он пишет, что эти образы представляют собой вместилище смысла математических формализмов и в то же время средство для отбора содержательных утверждений из всего необозримого моря выводимых математических формул. Поэтому такие образы выступают в роли естественного посредника между математикой и физикой. По его мнению, теоретико-множественный язык хорош тем, что он не вынуждает говорить ничего лишнего.

Множества и язык. Мы уже отмечали, что задание множеств реальных объектов с помощью их характеристических свойств наталкивается на затруднения. Эти затруднения связаны как с большим числом промежуточных форм, так и с недостаточной четкостью обыденного языка. Казалось бы, например, что множество русских слов однозначно определено и всем ясно, что ему принадлежат слова *воин*, *конь*, *стоять* и не принадежат слова table, legen, απειρον. Однако, раскрыв семнадцатитомный словарь русского языка, многие читатели встретят там незнакомые слова, принадлежность которых этому множеству им не была ранее известна. Кроме того, на протяжении веков в русском языке появлялись новые слова, иногда заимствованные из других языков, например *хозяин* или *амбар* — из тюркских языков, *зонтик* — из голландского, *периферия* — из греческого, другие же слова отмирали и исчезали.

Никто теперь не скажет *кмети* вместо *воины*, забыто и не применяется слово *смерды*, долгие споры ведут ученые о том, что значило слово *харалужный*. И всегда существовали слова, относительно которых не было уверенности, вошли ли они уже в словарный состав русского языка или, наоборот, сохранились ли они еще в нем. Например, в начале XIX в. адмирал А. С. Шишков отвергал такие слова, как *галоши* и *горизонт*, предлагая заменить их на *мокроступы* и *окоем*, а в середине того же века много спорили о том, следует ли сохранять в литературной речи слова *сей* и *оный* или они уже устарели. Как пишет в своих воспоминаниях писатель Юрий Трифонов, тонкий знаток русской речи К. А. Федин употреблял слова *заочный* и *заочник*, лишь взяв их в кавычки, поскольку считал, что они чересчур новомодны.

По указанным причинам многие ученые предпочитают не считать совокупность русских слов множеством. В то же время русские слова, содержащиеся в том же семнадцатитомном словаре, несомненно, образуют множество — о каждом слове можно наверняка сказать, встречается оно в этом словаре или нет.

Не является вполне определенным термин *множество планет Солнечной системы*. Не говоря уже о том, что мы не знаем сейчас, существуют ли планеты за Плутоном, надо иметь в виду, что кроме больших планет — Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона — вокруг Солнца обращается около 1600 малых планет, так называемых астероидов. Поперечники некоторых из них, например Цереры, Паллады, Юноны, измеряются сотнями километров, но есть и астероиды, поперечники которых не превышают 1 км. По мере улучшения методов наблюдения астрономы будут открывать небесные тела все меньших размеров, и наконец возникнет вопрос, где же кончаются планеты и начинаются метеориты и космическая пыль.

Впрочем, разница между планетами и метеоритами интересует в основном астрономов и не столь уже важна. Но для юриста разница между грабежом, кражей со взломом, похищением и другими видами преступлений является существенно важной — от той или иной квалификации преступления зависит приговор суда. Поэтому при формулировке законов и постановлений всегда стремятся к четким и недвусмысленным определениям для всех встречающихся в них понятий. Например, определяя, кто имеет право бесплатного проезда по железным дорогам СССР, пишут не «маленькие дети», а «дети до пяти лет». Тем самым четко определено, кто из детей имеет это право, а кто нет. Единственным исключением является случай, когда малолетнему пассажиру доведется праздновать день рождения в пути, но это настолько маловероятно, что правила об этом ничего не говорят. Правда, рассказывают, что один пунктуальный отец включил стоп-кран в момент, когда его сыну исполнилось пять лет, чтобы точно определить оставшийся отрезок пути, за который следовало уплатить.

Нечеткие множества. Оригинальный выход из описанных выше затруднений предложил американский ученый Л. Заде [4]: он ввел понятие *нечеткого* (или иначе *размытого*) *множества* и тесно связанное с ним понятие *лингвистической переменной*. Подобно тому как четким свойствам (быть простым числом, быть треугольником) соответствуют обычные или, иначе, *четкие множества* (множество простых чисел, множество треугольников), нечетким свойствам (например, быть молодым человеком, быть длинной улицей) соответствуют нечеткие множества (молодых людей, длинных улиц). Ведь, например, почтенный академик назовет молодым и сорокалетнего коллегу, а студенту-первокурснику профессор такого возраста кажется пожилым. Каждому человеку (или, точнее, каждому эксперту) соответствует четкое множество людей, которых он считает молодыми. Но тогда каждому человеку x соответствует число m/n, где n — общее число экспертов, а m — число экспертов, считающих, что x молод. Обозначим m/n через $p(x)$ и скажем, что x входит в нечеткое множество молодых людей с *коэффициентом принадлежности* $p(x)$, который, конечно, принимает значения от 0 до 1.

Четкие множества отличаются от нечетких тем, что для них $p(x)$ может принимать лишь два значения: 0 и 1, причем $p(x)=1$, если $x \in A$, и $p(x)=0$, если $x \notin A$. Наличие экспертов позволяет из совокупности четких множеств составить нечеткое множество. Конечно, при всей нечеткости полученного множества можно с уверенностью сказать, что для некоторых x имеем $p(x)=1$ (например, никто не усомнится в молодости новорожденного ребенка), а для некоторых x имеем $p(x)=0$ (например, вряд ли кто-нибудь назовет молодым восьмидесятилетнего старца). Впрочем, рассказывают, что когда гроссмейстеру Тартаковеру было 65 лет, он победил 70-летнего гроссмейстера Бернштейна и воскликнул: «Молодость побеждает!».

Разумеется, созывать каждый раз консилиум экспертов для определения «коэффициентов принадлежности» вряд ли целесообразно. Чаще коэффициенты вводят иным путем, например на основе статистических данных. Но после того, как они выбраны, с их помощью можно получить коэффициенты принадлежности и для других множеств.

На основе понятия нечеткого множества были введены нечеткие отношения и нечеткие алгоритмы. С нечеткими алгоритмами люди имели дело задолго до того, как их определил Л. Заде. В любой поваренной книге найдутся алгоритмы, содержащие советы вида: «Сливки сперва особо взбить, чтобы были весьма густы, потом всыпать в них муку и еще все вместе венчиком хорошенько взбить...». И хотя авторы этих книг не определяли точно, когда сливки надо считать весьма густыми и какое взбивание венчиком надо считать достаточным, надо думать, что блюда по этим рецептам получались совсем неплохими. Любопытно, что теперь нечеткие алгоритмы начали встречаться и в таких разделах науки, как вычислительная математика. Однако только будущее покажет, был ли удачен предложенный Заде метод введения нечетких множеств и какая из него получится польза.

Бесконечные множества. Все то, что говорилось о множествах выше, относилось в основном к множествам, содержащим конечное число элементов. На протяжении тысячелетий изучение бесконечных множеств было изгнано из науки авторитетом Аристотеля. Впрочем, преподававший в Оксфордском университете в XIII в. схоласт Роберт Гроссетет (он был, между прочим, учителем знаменитого Роджера Бэкона) считал, что актуально-бесконечное — это определенное число, которое хотя и не познаваемо для нас, но существует актуально. Более того, Гроссетет считал возможным сравнивать друг с другом две бесконечности. Он полагал, что больше моментов в большем времени, чем в меньшем, и больше точек в большей величине, чем в меньшей. Число «точек в отрезке длиной в локоть» он считал истинной мерой этого отрезка. Тем самым потенциальной бесконечности Аристотеля снова была противопоставлена актуальная бесконечность единиц.

Использование актуальной бесконечности в математике исподволь начинается в XVIII в. (бесконечные ряды фактически рассматривались как суммы бесконечного множества слагаемых), а в XIX в. Гаусс, столь резко возражавший против использования актуальной бесконечности в математике, фактически использует ее в своих теоретико-числовых исследованиях. В более явном виде использование этих же понятий встречается в работах последователей Гаусса немецких математиков Л. Дирихле[5] и Р. Дедекинда[6].

Однако систематически свойства бесконечных множеств почти не изучались. Лишь в 1851 г. была посмертно опубликована книга чешского математика и философа Б. Больцано[7] «Парадоксы бесконечности», в которой он сделал первую попытку исследовать свойства актуальной бесконечности. В этой книге были предвосхищены многие понятия теории бесконечных множеств, однако они не получили еще той точности и ясности, которая была придана им через два десятилетия в работах Г. Кантора.

Занимаясь теорией бесконечных рядов, составленных из тригонометрических функций, Кантор пришел к необходимости разобраться в том, какие множества можно составлять из точек прямой линии (эти множества называют теперь *точечными*). В частности, его заинтересовал вопрос, всегда ли можно перенумеровать все точки таких множеств. Исследуя его, он обнаружил, что свойства конечных и бесконечных множеств совершенно непохожи друг на друга: многие операции, невозможные для конечных множеств, без труда выполняются для бесконечных. Попробуйте, например, поместить в гостиницу, каждый номер которой занят одним постояльцем, еще жильцов, да так, чтобы в каждом номере снова жил лишь один человек. Не получается? Так это только потому, что число номеров в гостинице конечно! А если бы в ней было бесконечно много номеров?.. Но такие гостиницы могут встретиться разве что в рассказах межзвездного скитальца Йона Тихого. Итак, предоставим ему слово.

Необыкновенная гостиница или тысяча первое путешествие Йона Тихого. Домой я вернулся довольно поздно — вечер воспоминаний в клубе «Туманность Андромеды» затянулся далеко за полночь. Всю ночь меня мучили кошмары. То мне снилось, что меня проглотил огромный курдль, то грезилось, что я снова лечу на планету Дурдиотов и не знаю, как избежать тамошней страшной машины, превращающей людей в шестиугольники, то... Неожиданный телефонный звонок вернул меня в мир реальности. Звонил старый друг и коллега по межзвездным странствиям профессор Тарантога.

«Срочное задание, дорогой Йон,— услышал я.— Астрономы обнаружили в космосе какой-то странный объект — от одной галактики до другой тянется таинственная черная линия. Никто не понимает, в чем дело. Самые лучшие радиотелескопы, нейтриноскопы и гравитоскопы не могут помочь в раскрытии тайны. Осталась надежда лишь на тебя. Срочно вылетай в направлении туманности АЦД-1587».

На другой день я получил из ремонта свою старую фотонную ракету, установил на нее ускоритель времени и электронного робота, знавшего все языки космоса и все рассказы о звездопроходцах (это гарантировало от скуки), и вылетел по заданию.

Когда робот исчерпал весь свой запас рассказов и начал повторяться (нет ничего хуже, чем электронный робот, десятый раз повторяющий старую историю), вдали показалась цель моего путешествия. Туманности, застилавшие таинственную линию, оказались позади, и предо мною предстала... гостиница «Космос».

Выяснилось, что межзвездные скитальцы выгонты, которым я когда-то соорудил небольшую планету, растащили и ее на мелкие части и вновь остались без пристанища. Тогда, чтобы больше не скитаться по чужим галактикам, они решили построить грандиозное сооружение — гостиницу для всех путешествующих по космосу. Эта гостиница протянулась через почти все галактики. Говорю «почти все», потому что выгонты демонтировали некоторые необитаемые галактики, а из каждой оставшейся утащили по нескольку плохо лежавших созвездий.

Но гостиницу они отстроили на славу. В каждом номере были краны, из которых текла холодная и горячая плазма. При желании можно было на ночь распылиться, а утром портье собирал постояльцев по их атомным схемам.

А самое главное, в *гостинице было бесконечно много номеров*. Выгонты надеялись, что теперь никому больше не придется слышать порядком надоевшую им за время скитаний фразу: «Свободных номеров нет».

Тем не менее мне не повезло. Когда я вошел в вестибюль гостиницы, первое, что бросилось в глаза, был плакат: «Делегаты съезда космозоологов регистрируются на 127-м этаже».

Так как космозоологи приехали из всех галактик, а их бесконечное множество, то все номера оказались занятыми участниками съезда. Для меня места уже не хватило. Администратор пытался, правда, поселить меня с кем-нибудь из космозоологов. Но когда я выяснил, что один предполагаемый сосед дышит фтором, а другой считает нормальной для себя температуру окружающей среды 860°, то вежливо отказался от столь «приятного» соседства.

К счастью, директором гостиницы был выгонт, хорошо помнивший услуги, которые я когда-то оказал этому племени. Он постарался устроить меня в гостинице — ведь, ночуя в межзвездном пространстве, можно было схватить воспаление легких. После некоторых размышлений он обратился к администратору и сказал:

— Поселите его в № 1.

— Куда же я дену жильца этого номера? — удивленно спросил администратор.

— А его переселите в № 2. Жильца же из № 2 отправьте в № 3, из № 3— в № 4 и т. д.

Тут только я оценил необыкновенные свойства гостиницы. Если бы в ней было лишь конечное число номеров, то жителю последнего номера пришлось бы перебраться в межзвездное пространство. А из-за того, что гостиница имела бесконечно много номеров, всем хватило места, и мне удалось вселиться, не лишив жилища никого из космозоологов.

Я не удивился, когда на другое утро мне предложили переселиться в № 1000000. Просто в гостиницу прибыли запоздавшие космозоологи из галактики ВСК-3472, и надо было разместить еще 999 999 жильцов. Но когда на третий день пребывания в гостинице я зашел к администратору заплатить за номер, у меня потемнело в глазах. К окошку тянулась очередь, конец которой терялся где-то около Магеллановых облаков. Слышались голоса:

«Меняю две марки туманности Андромеды на марку Сириуса!»

«У кого есть марка Кита 57-го года космической эры?»

В недоумении я обратился к администратору и спросил:

— А это кто такие?

— Межгалактический съезд филателистов.

— И много их?

— Бесконечное множество — по одному представителю от каждой галактики.

— Но как же их разместят, ведь космозоологи выедут только завтра?

— Не знаю, об этом сейчас будут говорить на пятиминутке у директора.

Однако задача оказалась весьма сложной, и пятиминутка (как это часто бывает и на Земле) затянулась на целый час. Наконец администратор вышел от директора и приступил к расселению. В первую очередь он приказал переселить жильца из № 1 в № 2. Мне это показалось странным, так как по имевшемуся опыту я знал, что такое переселение освобождало лишь один номер, а разместить надо было ни много ни мало, а бесконечное множество филателистов. Но администратор продолжал командовать:

— А жильца из № 2 переселите в № 4, из № 3 — в № 6, вообще из номера n — в номер $2n$.

Теперь стал ясен его план: таким путем он освободил бесконечное множество нечетных номеров и мог расселять в них филателистов. В результате четные номера оказались занятыми космозоологами, а нечетные — филателистами (о себе не говорю — за два дня знакомства я так подружился с космозоологами, что был выбран почетным председателем их съезда; вместе со всеми космозоологами мне пришлось покинуть обжитый номер и переехать из № 1000000 в № 2000000). А мой знакомый филателист, стоявший в очереди 574-м, занял № 1147. Вообще филателисты, стоявшие в очереди n-ми, занимали номер $2n-1$.

На другой день положение с номерами стало легче — съезд космозоологов окончился, и они разъехались по домам. Я же переехал к директору гостиницы, в квартире которого освободилась одна комната. Но то, что хорошо для постояльцев, не всегда устраивает администрацию. Через несколько дней мой гостеприимный хозяин загрустил.

— В чем дело? — спросил я его.

— Половина номеров пустует. Финансовый план не выполняется.

Я, правда, не совсем понял, о каком финансовом плане шла речь, ведь плата поступала с бесконечного множества номеров, но тем не менее дал совет:

— А Вы переселите постояльцев так, чтобы все номера оказались занятыми.

Это оказалось совсем просто сделать. Филателисты занимали лишь нечетные номера: 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Жильца из № 1 оставили в покое. Из № 3 переселили в № 2, из № 5 — в № 3, из № 7 — в № 4 и т. д. В результате все номера вновь оказались заполненными, хотя ни один новый жилец не въехал.

Но неприятности директора на этом не кончились. Выяснилось, что выгонты не ограничились возведением гостиницы «Космос». Неугомонные строители соорудили еще бесконечное множество гостиниц, каждая из которых имела бесконечно много номеров. При этом они демонтировали так много галактик, что нарушилось межгалактическое равновесие, а это могло повлечь за собой весьма тяжкие последствия. Поэтому им было предложено закрыть все гостиницы, кроме нашей, и вернуть использованный материал на место. Но выполнение этого приказа было затруднено, поскольку все гостиницы (в том числе и наша) были заполнены. Предстояло переселить жильцов из бесконечного множества гостиниц, каждая из которых имела бесконечно много постояльцев, в одну гостиницу, да и та была уже заполнена.

— С меня хватит! — воскликнул директор.— Сначала я в полную гостиницу поместил одного постояльца, потом еще 999 999, потом еще бесконечно много жильцов; а теперь от меня хотят, чтобы в нее вместилось еще бесконечное множество бесконечных множеств жильцов. Нет, гостиница не резиновая, пусть где хотят, там и помещают!

Но приказ есть приказ, и через пять дней надо было все подготовить к встрече новых постояльцев. Эти дни в гостинице никто не работал — все думали, как решить задачу. Был объявлен конкурс с премией — туристическим путешествием по одной из галактик. Но все предлагавшиеся решения отвергались как неудачные. Так, младший повар предложил оставить жильца из первого номера нашей гостиницы в том же № 1, из второго номера переселить в № 1001, из третьего номера — в № 2001 и т. д. После этого поселить жильцов второй гостиницы в № 2, 1002, 2002 и т. д. нашей гостиницы, жильцов третьей гостиницы — в № 3, 1003, 2003 и т. д. Проект был отвергнут, так как уже жители первых 1000 гостиниц займут все номера и некуда будет поселить жителей 1001-й гостиницы.

Мне вспомнилось по этому поводу, что, когда раболепные римские сенаторы предложили императору Тиберию переименовать в его честь месяц сентябрь в «тиберий» (предыдущие месяцы уже получили имена императоров Юлия и Августа), он язвительно спросил их: «А что же вы предложите тринадцатому цезарю?»

Неплохой вариант предложил бухгалтер гостиницы. Он посоветовал воспользоваться свойствами геометрической прогрессии и расселить постояльцев так: жителей первой гостиницы — в № 2, 4, 8, 16, 32 и т. д. (эти числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2). Жителей второй гостиницы — в № 3, 9, 27, 81 и т. д. (а эти числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3). Так же предложил он расселять и жителей остальных гостиниц. Но директор спросил его:

— А для третьей гостиницы надо использовать прогрессию со знаменателем 4?

— Конечно,— ответил бухгалтер.

— Тогда ничего не получится, ведь в четвертом номере уже живет обитатель первой гостиницы, а теперь туда же надо вселить и жителя третьей гостиницы.

Настала моя очередь показать, что не зря в Звездной академии пять лет изучают математику.

— Воспользуйтесь простыми числами! Поселите жителей первой гостиницы в № 2, 4, 8, 16,. . ., второй — в № 3, 9, 27, 81,. . ., третьей — в № 5, 25, 125, 625,. . ., четвертой — в № 7, 49, 343,. . . .

— А не получится ли опять, что в один номер придется помещать двух постояльцев? — спросил директор.

— Нет! Ведь если взять два простых числа, то никакие их степени с натуральными показателями не могут оказаться равными. Если p и q — простые числа, причем $p \neq q$, а m и n — натуральные числа, то $p^m \neq q^n$.

Директор согласился со мной и тут же нашел усовершенствование предложенного способа, при котором использовались лишь два простых числа: 2 и 3. Именно, он предложил поселить жильца из m-го номера n-й гостиницы в номер $2^m\,3^n$. Дело в том, что если $m \neq p$ или $n \neq q$, то $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$. Поэтому в один и тот же номер не поселятся двое.

Это предложение привело всех в восторг. Была решена задача, всем казавшаяся неразрешимой. Но премии не получил ни я, ни директор — при наших решениях слишком много номеров оставались пустыми (у меня такие номера, как 6, 10, 12, и вообще все номера, которые не были степенями простых чисел, а у директора номера, которые нельзя записать в виде $2^m 3^n$). Самое лучшее решение предложил один из филателистов — президент Математической академии галактики Лебедя.

Он посоветовал сначала составить таблицу, занумеровав ее строки номерами гостиниц, а столбцы — номерами комнат. Например, на пересечении четвертой строки и шестого столбца записывается шестая комната четвертой гостиницы. Вот эта таблица (вернее, ее левая верхняя часть, так как для записи всей таблицы надо бесконечно много строк и столбцов):

$$\begin{array}{llllll}
(1,\ 1) & (1,\ 2) & (1,\ 3) & (1,\ 4) & (1,\ 5)\ldots & (1,\ n)\ldots \\
(2,\ 1) & (2,\ 2) & (2,\ 3) & (2,\ 4) & (2,\ 5)\ldots & (2,\ n)\ldots \\
(3,\ 1) & (3,\ 2) & (3,\ 3) & (3,\ 4) & (3,\ 5)\ldots & (3,\ n)\ldots \\
(4,\ 1) & (4,\ 2) & (4,\ 3) & (4,\ 4) & (4,\ 5)\ldots & (4,\ n)\ldots \\
(5,\ 1) & (5,\ 2) & (5,\ 3) & (5,\ 4) & (5,\ 5)\ldots & (5,\ n)\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(m,\ 1) & (m,\ 2) & (m,\ 3) & (m,\ 4) & (m,\ 5)\ldots & (m,\ n)\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

— А теперь расселяйте обитателей по квадратам, — сказал математик-филателист.

— Как? — не понял директор.

— По квадратам! В № 1 поселяется жилец из (1,1), то есть из первого номера первой гостиницы; в № 2 — из (1,2), то есть из второго номера первой гостиницы; в № 3 — из (2,2) — второго номера второй гостиницы и в № 4 — из (2,1) — первого номера второй гостиницы. Тем самым будут расселены жильцы из верхнего левого квадрата со стороной 2. После этого в № 5 поселяем жильца из (1,3), в № 6 — из (2,3), в № 7 — из (3,3), в № 8 — из (3,2), в № 9 — из (3,1). (Эти номера образуют квадрат со стороной 3.)

И, взяв листок бумаги, он набросал на нем следующую схему расселения:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,\ 1) & & (1,\ 2) & & (1,\ 3) & & (1,\ 4) & & (1,\ 5)\ldots & & (1,\ n)\ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(2,\ 1) & \leftarrow & (2,\ 2) & & (2,\ 3) & & (2,\ 4) & & (2,\ 5)\ldots & & (2,\ n)\ldots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(3,\ 1) & \leftarrow & (3,\ 2) & \leftarrow & (3,\ 3) & & (3,\ 4) & & (3,\ 5)\ldots & & (3,\ n)\ldots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(4,\ 1) & \leftarrow & (4,\ 2) & \leftarrow & (4,\ 3) & \leftarrow & (4,\ 4) & & (4,\ 5)\ldots & & (4,\ n)\ldots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
(5,\ 1) & \leftarrow & (5,\ 2) & \leftarrow & (5,\ 3) & \leftarrow & (5,\ 4) & \leftarrow & (5,\ 5)\ldots & & (5,\ n)\ldots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
(n,\ 1) & \leftarrow & (n,\ 2) & \leftarrow & (n,\ 3) & \leftarrow & (n,\ 4) & \leftarrow & (n,\ 5) & \leftarrow\ldots & (n,\ n)\ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

— Неужели для всех хватит места? — усомнился директор.

— Конечно. Ведь в первые n^2 номеров мы поселяем при этой схеме жильцов из первых n номеров первых n гостиниц. Поэтому рано или поздно каждый жилец получит номер. Например, если это жилец из № 136 гостиницы № 217, то он получит номер на 217-м шагу. Легко даже сосчитать этот номер. Он равен $217^2-136+1$. Вообще, если жилец занимает номер n в m-й гостинице, то при $n \geqslant m$ он займет номер $(n-1)^2+m$, а при $n<m$ — номер m^2-n+1.

Предложенный проект и был признан наилучшим: все жители из всех гостиниц были поселены в нашей гостинице и ни один ее номер не пустовал. Математику-филателисту досталась премия — туристическая путевка в галактику ЛЦР-287.

В честь столь удачного размещения директор гостиницы устроил прием, на который пригласил всех ее жильцов. Этот прием также не обошелся без осложнений. Обитатели комнат с четными номерами задержались на полчаса, и, когда они появились, оказалось, что все стулья заняты, хотя гостеприимный хозяин поставил по стулу на каждого гостя. Пришлось подождать, пока все пересели на новые места и освободили необходимое количество стульев (разумеется, ни одного нового стула в зал не внесли). Зато когда стали подавать мороженое, то каждый гость получил по две порции, хотя повар заготовил в точности по одной порции на гостя. Надеюсь, что теперь читатель сам поймет, как все это случилось.

После конца приема я сел в свою фотонную ракету и полетел на Землю. Мне нужно было рассказать всем земным космонавтам о новом пристанище в космосе. Кроме того, я хотел проконсультироваться с виднейшими математиками Земли и моим другом профессором Тарантогой о свойствах бесконечных множеств.

От автора. На этом мы временно расстанемся с нашим героем. Многое в его рассказе вызывает сомнения — ведь по законам теории относительности невозможно передавать сигналы со скоростью, большей чем 300 000 *км/с*. Поэтому даже самая первая команда администратора потребовала бы для своего выполнения бесконечно большого промежутка времени. Но не будем требовать слишком многого от Йона Тихого — в его путешествиях бывали куда более невероятные приключения.

Дальнейшая часть книги посвящается рассказу о теории бесконечных множеств. И хотя события будут развертываться не в межзвездном пространстве, а на отрезке $[0, 1]$ или квадрате со стороной 1, многие из них окажутся не менее необычайными.

Как сравнивать множества. В начале главы мы занимались вопросами, общими для конечных и для бесконечных множеств. Теперь мы займемся свойствами, характерными только для бесконечных множеств. Из рассказа Йона Тихого уже известно, что эти свойства сильно отличаются от свойств конечных множеств — вещи, невозможные для конечных множеств, оказываются возможными для бесконечных.

Первый вопрос, который мы сейчас разберем, это вопрос о сравнении друг с другом бесконечных множеств. Для конечных множеств самой разной природы всегда можно сказать, какое из них содержит больше элементов, а какое меньше. Для бесконечных же множеств этот вопрос становится гораздо более сложным. Например, чего больше, натуральных чисел или рациональных, рациональных или действительных? Где больше точек, на отрезке или на всей прямой, на прямой или в квадрате?

На первый взгляд кажется, что ответить на эти вопросы совсем просто. Ведь множество натуральных чисел является частью множества рациональных чисел, а отрезок — частью прямой. Не ясно ли, что поэтому натуральных чисел меньше, чем рациональных, а точек на отрезке меньше, чем точек на всей прямой? Оказывается, не ясно. Ведь ниоткуда не следует, что при переходе к бесконечным множествам сохранятся законы, выведенные из рассмотрения конечных множеств, например закон о том, что «часть меньше целого».

А самое главное, попытка сравнения бесконечных множеств по тому признаку, что одно является частью другого, заранее обречена на неудачу. Например, где больше точек, в квадрате или на всей бесконечной прямой? Ведь ни квадрат нельзя вложить в прямую линию, ни прямую линию нельзя, не ломая ее, поместить в квадрат. Разумеется, можно разломать прямую линию на отрезки, длина которых равна стороне квадрата, и после этого каждый отрезок поместить в квадрат так, чтобы они не пересекались друг с другом. Но вдруг и квадрат можно как-то разбить на части, а потом эти части положить на прямую, чтобы они не задевали друг друга? А сколько есть бесконечных множеств, не являющихся частями друг друга! Множество квадратов на плоскости и множество кругов на той же плоскости не имеют ни одного общего элемента. Как же сравнить их? Как узнать, чего больше во Вселенной — атомов азота или кислорода?

Итак, задача поставлена. В первую очередь мы выясним, в каком случае надо говорить, что одно множество содержит столько же элементов, сколько и второе. Иными словами, выясним, в каких случаях два бесконечных множества имеют «поровну» элементов.

На танцплощадке. Для конечных множеств задача сравнения решается просто. Чтобы узнать, одинаково ли число элементов в двух множествах, достаточно пересчитать их. Если получатся одинаковые числа, то, значит, в обоих множествах поровну элементов. Но для бесконечных множеств такой способ не годится, ибо, начав пересчитывать элементы бесконечного множества, мы рискуем посвятить этому делу всю свою жизнь и все же не закончить начатого предприятия.

Но и для конечных множеств метод пересчета не всегда удобен. Мы на танцплощадке. Как узнать, поровну ли здесь юношей и девушек? Конечно, можно попросить юношей отойти в одну сторону, а девушек в другую и заняться подсчетом как тех, так и других. Но, во-первых, мы получим при этом избыточную информацию, нас не интересует, сколько здесь юношей и девушек, а интересует лишь, поровну ли их. Во-вторых, не для того собралась молодежь на танцплощадке, чтобы стоять и ждать конца пересчета, а для того, чтобы потанцевать. Удовлетворим их желание и попросим оркестр сыграть какой-нибудь танец, который все умеют танцевать. Тогда юноши пригласят девушек на танец и наша задача будет решена. Ведь если окажется, что все юноши и все девушки танцуют, то есть если вся молодежь разбилась на танцующие пары, то ясно, что на площадке ровно столько же юношей, сколько и девушек.

Совершенно тем же способом можно узнать, что число зрителей в театре равно числу театральных кресел. Если во время спектакля все места заняты, причем никто из зрителей не стоит в проходах и на каждом месте сидит один зритель, то можно быть уверенным, что зрителей ровно столько же, сколько и театральных кресел.

На каждый прилив — по отливу. Мы познакомились с тем, как узнать, что два конечных множества имеют поровну элементов, не прибегая к пересчету этих множеств. Этот способ можно применить и для бесконечных множеств. Только здесь уж не удастся прибегнуть к помощи «оркестра», а придется самим располагать элементы двух сравниваемых множеств в «танцующие пары».

Итак, пусть у нас даны два множества A и B. Говорят, что между ними установлено *взаимно однозначное соответствие*, если элементы этих множеств объединены в пары (a, b) так, что:

1) элемент a принадлежит множеству A, а элемент b — множеству B;

2) каждый элемент обоих множеств попал в одну и только одну пару.

Например, если множество A состоит из юношей на танцплощадке, а множество B — из девушек на той же площадке, то пары (a, b) образуются из танцующих друг с другом юноши и девушки. Если множество A состоит из зрителей, а множество B — из театральных кресел, то пара (a, b) образуется из зрителя и кресла, на котором он сидит. Читатель сам легко придумает разнообразные примеры таких соответствий между множествами равной численности.

Разумеется, не всякое соответствие между множествами является взаимно однозначным. Если множество A состоит из всех деревьев на Земле, а множество B — из растущих на них плодов, то между этими множествами можно установить соответствие: каждому плоду сопоставить дерево, на котором он растет. Но это соответствие не будет взаимно однозначным: на некоторых деревьях растет по многу плодов, а другие сейчас не плодоносят. Поэтому одни элементы a (деревья) будут участвовать во многих парах, а другие элементы a не войдут ни в одну пару.

Существование взаимно однозначного соответствия для конечных множеств равносильно тому, что у них поровну элементов. Важнейшим поворотным пунктом в теории множества был момент, когда Кантор решил применить идею взаимно однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств.

Иными словами, по Кантору, два (быть может, и бесконечных) множества A и B имеют поровну элементов, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обычно математики не говорят, что «множества A и B имеют поровну элементов», а говорят, что «A и B имеют одинаковую *мощность*» или «множества A и B *эквивалентны*».

Таким образом, для бесконечных множеств слово *мощность* значит то же самое, что для конечных множеств «число элементов».

Еще до Кантора к понятию взаимно однозначного соответствия пришел чешский ученый Б. Больцано. Но он отступил перед трудностями, к которым вело это понятие. Как мы вскоре увидим, после принятия принципа сравнения бесконечных множеств с помощью взаимно однозначного соответствия пришлось расстаться со многими догмами.

Равна ли часть целому? Основной догмой, которую пришлось отбросить, было положение, установленное на самой заре развития математики: *часть меньше целого*. Это положение безусловно верно для конечных множеств, но для бесконечных множеств оно уже теряет силу. Вспомните, как расселил директор необыкновенной гостиницы космозоологов по четным номерам. При этом расселении жилец из № n переезжал в № $2n$. Иными словами, расселение шло по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3\ldots & n\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6\ldots & 2n\ldots \end{array}$$

Но эта схема устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

и его частью — множеством четных чисел

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n, \ldots$$

А мы договорились считать, что множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, содержат поровну элементов. Значит, множество натуральных чисел содержит столько же элементов, сколько и его часть — множество четных чисел.

Точно так же можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством чисел вида

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10\,000, \ldots$$

Для этого надо сопоставить каждому натуральному числу n число 10^n:

$$n \to 10^n.$$

Этим желаемое взаимно однозначное соответствие и устанавливается. Аналогично устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством всех квадратов натуральных чисел:

$$n \to n^2$$

или множеством всех кубов натуральных чисел:

$$n \to n^3$$

и т. д.

Вообще между множеством всех натуральных чисел и любой его бесконечной частью всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно перенумеровать по порядку числа из этой части.

Впрочем, не зря говорят, что ничто не ново под луной, а новое — это только хорошо забытое старое. Еще в начале XVII в. Галилей размышлял о противоречиях бесконечного и обнаружил возможность взаимно однозначного соответствия между множеством натуральных чисел и множеством их квадратов. В его книге «Беседы и математические доказательства, относящиеся к механике по местному движению» (1638 г.) приведен диалог, в котором Сальвиати, выражающий мысли самого Галилея, говорит:

«Сказанное нами относится к числу затруднений, происходящих вследствие того, что, рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем последнему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как бóльшая и меньшая величина и равенство, неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой или равна ей».

В подтверждение своей мысли Сальвиати отмечает, что, с одной стороны, «квадратов столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень — свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня, и ни один корень — более одного квадрата... * При этом число корней равно количеству всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-нибудь квадрата; установив это, приходится сказать, что число квадратов равно общему количеству всех чисел...»

С другой стороны, Сальвиати отмечает, что «количество всех чисел вместе — квадратов и неквадратов — больше, нежели одних только квадратов», причем «числа квад-

* Здесь имеются в виду только натуральные числа.

ратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывают по мере того, как мы переходим к большим числам». В качестве единственного выхода из обнаруженного противоречия Сальвиати предлагает следующее:

«Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что бесконечно количество чисел вообще, бесконечно число квадратов, бесконечно и число корней. Нельзя сказать, что число квадратов меньше количества всех чисел, а последнее больше: в конечном выводе свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам».

Мы видим, что Галилей, по сути дела, владел идеей взаимно однозначного соответствия и видел, что такое соответствие можно установить между множеством всех натуральных чисел и множеством квадратов, а потому эти множества можно считать имеющими одинаковое количество элементов. Понимал он и то, что для бесконечных множеств часть может быть равной целому. Но отсюда он сделал неверный вывод, что все бесконечности одинаковы: он имел дело лишь с бесконечными подмножествами натурального ряда, а их можно перенумеровать.

Галилей не мог себе представить, что множество всех точек отрезка перенумеровать нельзя (это вскоре будет показано). Подобно атомистам древности, он полагал, что отрезок складывается из поддающейся пересчету бесконечной совокупности атомов.

Счетные множества. Все множества, которые имеют столько же элементов, сколько имеет множество натуральных чисел, называют *счетными*. Иными словами, множество называется счетным, если оно бесконечно, но его элементы можно перенумеровать натуральными номерами. Например, множество четных чисел, множество нечетных чисел, множество простых чисел, да и вообще любая бесконечная часть множества натуральных чисел являются счетными множествами.

Иногда, для того чтобы установить счетность того или иного множества, надо проявить изобретательность. Возьмем, например, множество всех целых чисел (как положительных, так и отрицательных):

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Если мы попробуем нумеровать его по порядку, начиная с какого-нибудь места, то никогда эту нумерацию не закончим. Поэтому все числа до выбранного места останутся незанумерованными. Чтобы не пропустить при нумерации ни одного числа, надо записать это множество в виде двух строк

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7,\ldots \end{array}$$

и нумеровать по столбцам. При этом 0 получит № 1, —1 — № 2, 1 — № 3, —2 — № 4 и т. д. Иными словами, все положительные числа и нуль нумеруются нечетными числами, а все отрицательные целые числа — четными. Это похоже на то, как директор гостиницы поместил всех филателистов в гостиницу, заполненную космозоологами.

Но если в то, что множество всех целых чисел счетно, легко поверить, то в счетность множества рациональных чисел поверить труднее. Ведь рациональные числа расположены очень густо — между любыми двумя рациональными числами найдется еще бесконечно много рациональных чисел. Поэтому совершенно непонятно, как их нумеровать; кажется, что между любыми двумя числами надо перенумеровать еще бесконечно много чисел и этот процесс никогда не закончится. И действительно, занумеровать рациональные числа в порядке возрастания их величины невозможно.

Однако если отказаться от расположения рациональных чисел в порядке возрастания, то занумеровать их все же удается. Сделаем так: выпишем сначала все положительные дроби со знаменателем 1, потом все положительные дроби со знаменателем 2, потом со знаменателем 3 и т. д. У нас получится таблица следующего вида:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, & \ldots \\ \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, & \ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, & \ldots \\ \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, & \ldots \\ \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{5}, & \ldots \end{array}$$

Ясно, что в этой таблице мы встретим любое положительное рациональное число, и притом не один раз. Например, число 3 встретится и в виде дроби 3/1, и в виде дроби 6/2, и в виде дроби 9/3.

Теперь приступим к нумерации. Для этого вспомним последний подвиг директора необыкновенной гостиницы, который расселил в ней жителей из бесконечного множества таких же гостиниц. Он тогда воспользовался нумерацией по квадратам. Точно так же поступим и мы, только с тем осложнением, что некоторые дроби будем пропускать (например, так как 1/1 получила уже № 1, то дроби 2/2, 3/3 и т. д. пропустим: они выражают то же самое число). Получится следующая нумерация положительных рациональных чисел: $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$

Мы занумеровали, таким образом, все положительные рациональные числа. А теперь уже легко понять, как нумеруются все (то есть положительные и отрицательные) рациональные числа. Для этого надо записать их отдельно в виде двух таблиц и числа одной таблицы нумеровать четными номерами, а второй — нечетными (и еще оставить один номер для нуля).

Вообще, складывая счетное множество счетных множеств, мы снова получим счетное множество. Это доказывается тем же самым приемом нумерации по квадратам.

Алгебраические числа. Нам удалось занумеровать все рациональные числа. Но рациональные числа получаются из натуральных чисел с помощью лишь одной операции — деления (и еще, быть может, изменения знака). А теперь мы добавим еще операцию извлечения корня и будем рассматривать все числа, которые можно получить из натуральных чисел с помощью этой операции и арифметических действий. Среди этих чисел будут такие, как $\sqrt[3]{2}+1$, $\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}$, и даже такие «монстры», как

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[15]{147+\sqrt{3}}-\sqrt[14]{6+\sqrt{2}}}{\sqrt[21]{289-\sqrt[5]{4+\sqrt{2}}}+1}}.$$

Возникает вопрос: можно ли занумеровать множество всех таких чисел? Это кажется еще более трудным, чем занумеровать множество рациональных чисел. В самом деле, какому числу надо приписать меньший номер: $\sqrt[3]{2}$ или $\sqrt{3}$? Но оказывается, что и это множество счетно, то есть его элементы можно перенумеровать.

Чтобы доказать это утверждение, отметим сначала, что каждое число рассматриваемого вида является корнем алгебраического уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа. Например, 3/7 — корень уравнения $7x-3=0$, $\sqrt[3]{5}$ — корень уравнения $x^3-5=0$, а $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ — корень уравнения $x^6-6x^4+12x^2-11=0$. Иногда бывает очень трудно написать уравнение, которому удовлетворяло бы число описанного выше вида, но тем не менее это всегда возможно.

Заметим, что далеко не все корни уравнений вида (1), где $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа, выражаются через натуральные числа с помощью арифметических действий и операции извлечения корня. Например, корни уравнения

$$x^5-3x+3=0$$

нельзя выразить в таком виде, оно, как говорят, не решается в радикалах. Все числа, являющиеся корнями уравнений вида (1) с целыми коэффициентами, называют *алгебраическими числами*. Таким образом, множество алгебраических чисел содержит в себе множество всех чисел, выражаемых через натуральные с помощью арифметических действий и извлечений корней. Поэтому если нам удастся перенумеровать все алгебраические числа, то тем более мы решим задачу, поставленную в начале этого пункта.

Но прежде чем нумеровать алгебраические числа, надо перенумеровать сами алгебраические уравнения вида (1), А тогда задача будет уже решена. Ведь каждое алгебраическое уравнение n-й степени имеет не более n корней. Поэтому после того, как все уравнения с целыми коэффициентами будут перенумерованы, мы составим таблицу, в первой строке которой будут все различные корни первого уравнения, во второй — все различные корни второго уравнения, не попавшие в первую строку, в третьей — все различные корни третьего уравнения, не попавшие в первую или вторую строку, и т. д. Таблица получится такая:

$$\begin{array}{l} a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to \\ \to b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_l \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \to c_1 \to c_2 \ldots \to c_m \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Теперь ясно, как нумеруются все числа этой таблицы (порядок нумерации указан стрелками).

Итак, займемся нумерацией множества алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Для этого применим идею, с помощью которой пробовал решить самую трудную задачу директор гостиницы. Напомним, что он предложил воспользоваться числами вида 2^m3^n. Чтобы решить нашу задачу, придется использовать все простые числа. Читатель, конечно, помнит, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых множителей.

Поступим следующим образом. Сначала перенумеруем все целые числа (это мы уже умеем делать). Номер целого числа a обозначим через $\boldsymbol{a}$. Каждому уравнению вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ (где, напомним, $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа) поставим в соответствие число

$$2^{\boldsymbol{a}_n}3^{\boldsymbol{a}_{n-1}} \ldots p_{n+1}^{\boldsymbol{a}_0}$$

(через p_{n+1} здесь обозначено $(n+1)$-е простое число). Например, уравнению $3x^2-2=0$ ставим в соответствие номер $2^4 3^1 5^6=150\,000$, потому что целое число -2 имеет номер 4, нуль — номер 1, а целое число 3 — номер 5. Теперь каждое уравнение получило свой номер, причем разным уравнениям соответствуют разные номера (каждый номер N единственным образом разлагается на простые множители, то есть единственным образом задает числа $\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_0$; этим же числам соответствуют определенные целые числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, а тем самым и определенное уравнение $a_0x^n+\ldots+a_n=0$).

Неравные множества. Мы уже выяснили, что значат слова «два множества имеют поровну элементов».

А теперь выясним, что значит «одно множество имеет больше элементов, чем второе». Для конечных множеств это тоже можно выяснить, не прибегая к счету. Вспомним пример с танцплощадкой.

Если после того, как заиграет оркестр и юноши пригласят девушек танцевать, некоторые нерасторопные юноши окажутся не у дел, то ясно, что юношей больше. Если же часть девушек будет с грустью наблюдать за своими танцующими подругами, то ясно, что больше девушек.

В этих случаях мы поступали так: устанавливали взаимно однозначное соответствие между одним множеством и частью другого множества. Если это удавалось, то отсюда следовало, что второе множество содержит больше элементов, чем первое. Пользуясь этим методом, легко установить, например, что рыб в океане меньше, чем атомов на земном шаре (хотя оба эти множества и конечны, их вряд ли возможно пересчитать). Для этого достаточно каждой рыбе поставить в соответствие один атом, входящий в состав ее тела. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех рыб и частью множества всех атомов на земном шаре.

К сожалению, для бесконечных множеств так просто поступить нельзя. Ведь мы уже видели, что множество может иметь столько же элементов, сколько и его часть. Поэтому только из того, что множество A имеет столько же элементов, сколько часть множества B, еще нельзя заключить, что оно имеет меньше элементов, чем все множество B.

Мы скажем, что если A можно поставить во взаимно однозначное соответствие с частью множества B, то множество B имеет *не меньше элементов, чем множество* A. Можно доказать, что это отношение обладает всеми свойствами неравенств:

1) каждое множество имеет не меньше элементов, чем оно само;

2) если в одном множестве не меньше элементов, чем во втором, а во втором — не меньше элементов, чем в третьем, то первое множество имеет не меньше элементов, чем третье;

3) если каждое из двух множеств имеет не меньше элементов, чем другое, то оба имеют поровну элементов (то есть между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие).

Первое свойство вытекает из того, что, ставя в соответствие каждому элементу множества A сам этот элемент, получаем взаимно однозначное отображение A на себя. Прозрачен и смысл второго свойства: если A можно взаимно однозначно отобразить на часть множества B, а B — на часть множества C, то существует взаимно однозначное отображение A на часть C.

А вот третье свойство при всей простоте его формулировки означает довольно сложное утверждение: если можно взаимно однозначно отобразить множество A на часть множества B, а множество B на часть множества A, то существует и взаимно однозначное отображение всего множества A на B. То, что дело обстоит таким образом, с самого начала подозревал Г. Кантор. Однако ему в течение долгого времени не удавалось найти доказательства этого утверждения. О своих затруднениях он рассказал в 1897 г. на лекциях по теории множеств для студентов университета в Галле. Через несколько дней один из слушателей, 19-летний Феликс Бернштейн [8], принес Кантору доказательство этого утверждения, основанное на той же идее, с помощью которой директор космической гостиницы помещал в нее новых постояльцев. Поэтому сейчас это утверждение называют *теоремой Кантора—Бернштейна*. Лишь через много лет в оставшихся после смерти немецкого математика Дедекинда бумагах нашли полученное им еще в 1887 г. доказательство той же теоремы.

Выясним теперь, в каких же случаях говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B. Может случиться, что множество B имеет не меньше элементов, чем множество A, но эти множества не эквивалентны. Иными словами, может случиться, что есть взаимно однозначное соответствие между множеством A и частью B_1 множества B, но не существует взаимно однозначного соответствия между A и всем множеством B. Вот в этом случае мы и будем говорить, что A имеет меньше элементов, чем B.

Счетное множество — самое маленькое из бесконечных. Мы уже говорили, что любая бесконечная часть множества натуральных чисел счетна. Это означает, что не может существовать бесконечное множество, мощность которого была бы меньше мощности счетного множества. Докажем теперь, что в каждом бесконечном множестве есть счетное подмножество. Отсюда будет следовать, что мощность счетного множества не больше мощности любого бесконечного множества, то есть что эта мощность — самая маленькая из бесконечных.

Чтобы выбрать счетное подмножество из бесконечного множества A, поступим так. Выберем один элемент x_1 — это можно сделать, так как множество A бесконечно и, во всяком случае, не пусто. Ясно, что после удаления элемента x_1 множество A не исчерпывается, и мы сможем выбрать из него второй элемент x_2. После этого выберем третий элемент x_3 и т. д. В результате мы извлечем из множества A счетное подмножество занумерованных элементов

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Немного усовершенствовав это доказательство, можно добиться, чтобы после удаления счетного подмножества осталось бесконечное множество. Для этого надо после извлечения подмножества X вернуть обратно все элементы с четными номерами. В результате получится, что мы извлекли счетное подмножество

$$Y=\{x_1, x_3, x_5, \ldots\},$$

а оставшееся множество еще содержит бесконечное множество элементов $\{x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$ и, быть может, еще много других элементов.

Нетрудно доказать следующие теоремы.

Мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счетного множества.

Мощность несчетного множества не меняется от удаления из него счетного множества.

Эти теоремы еще раз подтверждают, что счетные множества — самые малые из бесконечных множеств.

Несчетные множества. Все построенные до сих пор множества оказались счетными. Это наводит на мысль: а не являются ли вообще все бесконечные множества счетными? Если бы это оказалось так, то жизнь математиков была бы легкой: все бесконечные множества имели бы поровну элементов и не понадобился бы никакой анализ бесконечности. Но выяснилось, что дело обстоит куда сложнее: несчетные множества существуют и притом могут иметь самые разные мощности. Одно несчетное множество всем хорошо знакомо — это множество всех точек на прямой линии. Но прежде чем говорить об этом множестве, мы расскажем о другом, тесно связанном с ним множестве A вариантов заполнения необыкновенной гостиницы.

Заметим, что доказать несчетность какого-то множества вообще нелегко. Ведь доказать, что какое-то множество счетно, это значит просто придумать правило, по которому нумеруются его элементы. А доказать несчетность какого-то множества, это значит доказать, что такого правила нет и быть не может. Иными словами, какое бы правило мы ни придумали, всегда найдется незанумерованный элемент множества. Чтобы доказывать несчетность множеств, Кантор придумал очень остроумный способ, получивший название *диагонального процесса*. Метод доказательства Кантора станет ясен из следующего рассказа Йона Тихого.

Несостоявшаяся перепись. До сих пор я рассказывал об удачах директора необыкновенной гостиницы: о том, как ему удалось вселить в заполненную гостиницу еще бесконечно много постояльцев, а потом даже жителей из бесконечного множества столь же необычных гостиниц. Но был случай, когда и этого мага и чародея постигла неудача.

Из треста космических гостиниц пришел приказ составить заранее все возможные варианты заполнения номеров. Эти варианты потребовали представить в виде таблицы, каждая строка которой изображала бы один из вариантов. При этом заполненные номера должны были изображаться единицами, а пустые нулями. Например, вариант

101010101010...

означал, что все нечетные номера заняты, а все четные пустые, вариант

1111111111...

означал заполнение всей гостиницы, а вариант

000000000000...

означал полный финансовый крах — все номера пустовали.

Директор был перегружен работой и поэтому придумал простой выход из положения. Каждой дежурной по этажу было поручено составить столько вариантов заполнения, сколько номеров было в ее ведении. При этом были приняты меры, чтобы варианты не повторялись. Через несколько дней списки были представлены директору, и он объединил их в один список.

— Уверены ли Вы, что этот список полон? — спросил я директора.— Не пропущен ли какой-нибудь вариант?

— Не знаю,— ответил он.— Вариантов в списке бесконечно много, и я не понимаю, как проверить, нет ли еще какого-нибудь варианта.

И тут у меня блеснула идея (впрочем, быть может, я несколько преувеличиваю свои способности, просто беседы с профессором Тарантогой о бесконечных множествах не прошли бесследно).

— Могу ручаться, что список неполон. Я берусь указать вариант, который наверняка пропущен.

— С тем, что список неполон, я еще соглашусь. А вот пропущенного варианта указать не удастся — ведь здесь уже бесконечно много вариантов.

Мы заключили пари. Чтобы выиграть его, я предложил прибить каждый вариант на дверь того номера, которому он соответствовал (если читатель помнит, вариантов было составлено именно столько, сколько было номеров в гостинице). А потом я поступил очень просто. Подойдя к двери первого номера, я увидел, что соответствующий вариант начинается с цифры 0. Немедленно в блокноте появилась цифра 1; это и была первая цифра варианта, который мне хотелось составить.

Когда я подошел к двери второго номера, то первая цифра соответствующего варианта меня не интересовала, ведь первая цифра моего варианта была уже написана. Поэтому все внимание было обращено на вторую цифру. Увидев, что эта цифра 1, я записал в своем блокноте цифру 0. Точно так же, обнаружив, что третья цифра варианта, прибитого к двери третьего номера, тоже 1, я записал в блокноте цифру 0. Вообще, если я обнаруживал, что n-я цифра n-го варианта есть 0, то писал в своем блокноте на n-м месте цифру 1, если же n-я цифра n-го варианта была 1, то я писал у себя 0.

Когда я обошел все номера гостиницы, то в блокноте оказалась записанной последовательность нулей и единиц.

Войдя в кабинет директора, я сказал:

— Вот, полюбуйтесь на пропущенный вариант.

— А откуда известно, что он пропущен?

— Он не может быть первым, так как отличается от него первой цифрой, не может быть вторым, так как отличается от него второй цифрой, третьим, так как отличается от него третьей цифрой, и вообще n-м, так как отличается от него n-й цифрой.

Пари было выиграно, и я получил вечное право бесплатного проживания в этой гостинице.

Но одновременно стало ясно, что какое бы счетное множество вариантов ни взять, всегда найдется вариант, не вошедший в это множество (эти варианты всегда можно развесить по дверям номеров). А это и значит, что множество всех вариантов заполнения гостиницы несчетно, задача, поставленная перед директором, оказалась невыполнимой.

Было решено дать об этом телеграмму. Надо сказать, что и телеграф в необыкновенной гостинице был тоже необычным, он передавал телеграммы, состоящие не из конечного, а из бесконечного (точнее говоря, счетного) множества точек и тире. Например, они имели такой вид:

—.——.———. и т. д.

Я сразу сообразил, что и множество таких телеграмм тоже несчетно, ведь вместо точек и тире можно ставить нули и единицы, а тогда не будет никакой разницы между телеграммами со счетным множеством знаков и множеством всех вариантов заполнения гостиницы.

Отправив телеграмму, я тепло попрощался с директором гостиницы и полетел в галактику РГЦ-8067, где должен был произвести астрографическую съемку...

Несчетность континуума. Теперь уже несложно доказать, что множество всех точек на прямой линии несчетно. Вместо этого множества можно говорить о множестве всех действительных чисел, так как каждой точке прямой соответствует действительное число и обратно.

Каждое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби вида

$$a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

Некоторые из них имеют даже по две записи; например, 0,500000... и 0,49999999...— это одно и то же число. Для определенности будем пользоваться записью с нулями.

Предположим, что нам удалось каким-то образом перенумеровать все действительные числа. Чтобы доказать, что это предположение неверно, достаточно построить хоть одно незанумерованное число. Следуя примеру Йона Тихого, поступим следующим образом.

Сначала напишем нуль и поставим после него запятую. Потом возьмем число, получившее первый номер, и посмотрим на его первый десятичный знак после запятой (то есть на число десятых). Если эта цифра отлична от 1, то в числе, которое мы пишем, поставим после запятой 1, а если эта цифра равна 1, то поставим после запятой 2. Затем перейдем к числу, получившему второй номер, и посмотрим на его вторую цифру после запятой. Снова если эта цифра отлична от единицы, то в числе, которое мы пишем, поставим на месте сотых цифру 1, если же эта цифра является единицей, то поставим цифру 2. Точно так же будем действовать и дальше, каждый раз обращая внимание лишь на n-ю цифру числа, получившего n-й номер. В результате мы выпишем некоторое число, например

$$N = 0{,}1121211\ldots$$

Ясно, что это число не получило никакого номера: в первом десятичном знаке оно отличается от числа с номером 1, во втором — от числа с номером 2, ..., в n-м — от числа с номером n и т. д.

Чтобы читателю стало яснее, как выписывается число, не получившее номера, предположим, что при выбранной нумерации первые пять чисел имеют следующий вид:

$$\begin{array}{r} 4{,}27364\ldots \\ -1{,}31226\ldots \\ 7{,}95471\ldots \\ 0{,}62419\ldots \\ 8{,}56280\ldots \end{array}$$

Тогда число, не получившее номера, будет начинаться со следующих десятичных знаков:

$$0{,}12121\ \ldots$$

Разумеется, не только это, но и многие другие числа не получили номеров (мы могли бы заменять все цифры, кроме 2, на 2, а цифру 2 на 7 или выбрать еще какое-нибудь правило). Но нам достаточно существования одного-единственного числа, не получившего номера, чтобы опровергнуть гипотезу о возможности нумерации всех действительных чисел.

Существование трансцендентных чисел. Мы говорили, что *алгебраическими числами* называют числа, являющиеся корнями уравнений

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Числа же, не являющиеся корнями таких уравнений, называют *трансцендентными*.

В течение долгого времени математики имели дело лишь с алгебраическими числами, такими, как $\frac{7}{15}$, $\sqrt[8]{10}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ и т. д. Лишь ценой больших усилий французскому математику Лиувиллю[9] удалось найти в 1844 г. несколько трансцендентных чисел. А доказательство трансцендентности числа π, проведенное Линдеманом[10] в 1882 г. было большим научным событием: ведь из него следовала невозможность квадратуры круга.

И вдруг оказалось, что алгебраические числа, которые встречаются на каждом шагу, на самом деле являются величайшей редкостью, а трансцендентные числа, которые так трудно строить,— обычным правилом. В самом деле, мы уже видели, что алгебраические числа образуют лишь счетное множество. Множество же всех действительных чисел, как мы только что обнаружили, несчетное. Значит, несчетна и разность множества действительных чисел и множества алгебраических чисел, а это и значит, что множество трансцендентных чисел несчетно.

Это доказательство существования трансцендентных чисел, полученное Кантором в 1873 г., отличалось от доказательства Лиувилля тем, что опиралось лишь на общие соображения о счетности и несчетности множеств, а не на специальные свойства алгебраических чисел. Из теорем Лиувилля вытекает, например, что число 0,1010010000001..., в десятичной записи которого после n-й единицы стоит $n!$ нулей, трансцендентно. А для того чтобы получить пример трансцендентного числа исходя из доказательства Кантора, придется пройти гораздо более длинный путь: сначала занумеровать все алгебраические числа, потом записать их в виде десятичных дробей и, наконец, строить диагональным процессом искомое число. Вряд ли за обозримый промежуток времени удастся ответить, чему равен, например, десятичный знак этого числа с номером 10^{100}. А метод Лиувилля позволяет строить трансцендентные числа, для которых, хотя и с трудом, ответить на такие вопросы можно. Таким образом, общность метода доказательства оборачивается его слабостью при переходе к конкретным вопросам.

На длинном и коротком отрезках поровну точек. До тех пор пока читатель не познакомился с удивительными свойствами бесконечных множеств, ответ на вопрос: «Где больше точек, на отрезке длиной в 1 мм или на отрезке длиной в 1 м?» — вряд ли вызвал бы у него хоть тень сомнения. Ясно, что на отрезке в 1 м куда больше точек, он ведь в 1000 раз длиннее. Но теперь, вероятно, читатель поостережется делать столь безапелляционные заявления — уж слишком непохожи свойства бесконечных множеств на то, чему учит обыденная жизнь. И действительно, на очень коротком и очень длинном отрезках точек поровну! Иными словами, всегда можно установить взаимно однозначное соответствие между точками этих отрезков. Как это сделать, лучше всего видно из рис. 8. Центральная проекция из точки O ставит в соответствие точке A точку C, точке B — точку $Д$ и т. д. В результате

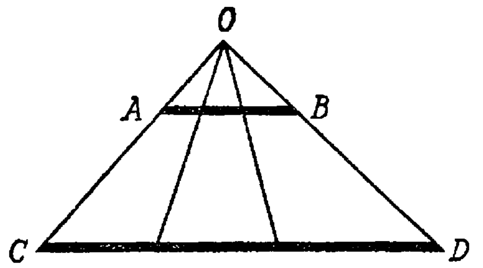
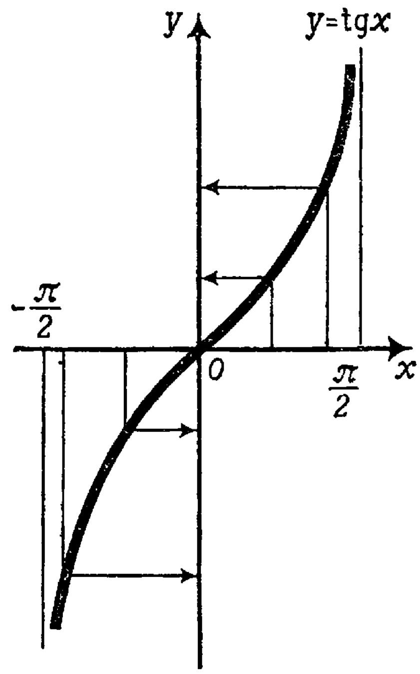


Рис. 8



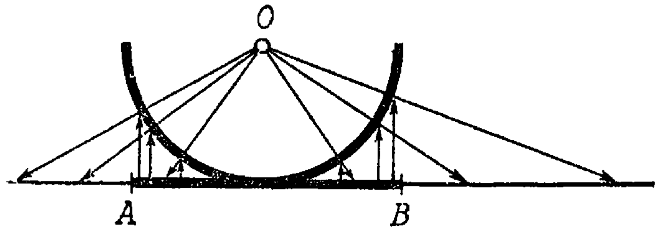


Рис. 9

Рис. 10

каждой точке отрезка AB соответствует одна и только одна точка отрезка CD.

Трудно примириться с мыслью, что дорога длиной в миллион световых лет имеет столько же точек, сколько и радиус атомного ядра!

Но еще неожиданнее оказалось то, что даже на всей бесконечной прямой не больше точек, чем на отрезке, то есть что между множеством точек на прямой и множеством точек на отрезке можно установить взаимно однозначное соответствие.

Мы возьмем даже не весь отрезок, а выбросим из него концы (как говорят, возьмем не отрезок, а промежуток). Как установить взаимно однозначное соответствие между промежутком и прямой, видно из рис. 9. Сначала точки промежутка отображают на полуокружность, а потом проектируют полуокружность на прямую. Ясно, что при этом каждой точке промежутка соответствует одна и только одна точка прямой, причем ни одна точка на прямой не пропущена.

Впрочем, это соответствие можно установить и по-другому, с помощью кривой — тангенсоиды, графика функции $y=\operatorname{tg}x$ (рис. 10).

Отрезок и квадрат. С тем, что на бесконечной прямой столько же точек, сколько и на отрезке, математики, скрепя сердце, примирились. Но следующий результат

Кантора оказался еще более неожиданным. В поисках множества, имеющего больше элементов, чем отрезок, он обратился к множеству точек квадрата. Сомнения в результате не было: ведь отрезок целиком размещается на одной стороне квадрата, а множество всех отрезков, на которые можно разложить квадрат, само имеет ту же мощность, что и множество точек отрезка.

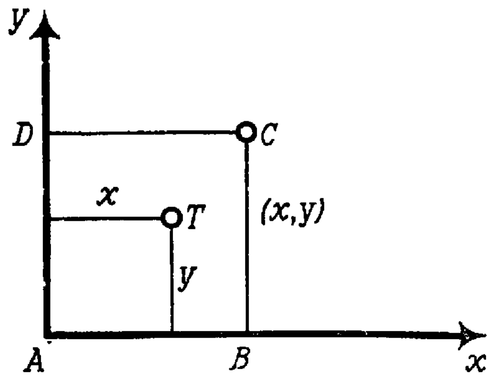


Рис. 11

На протяжении трех лет (с 1871 по 1874 г.) Кантор искал доказательство того, что взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата невозможно.

Шли годы, а желанный результат не получался. И вдруг совершенно неожиданно ему удалось построить соответствие, которое он считал невозможным! Сначала он сам не поверил себе. Своему другу и единомышленнику Дедекинду он писал: «Я вижу это, но не верю».

Но все же пришлось смириться с тем, что интуиция подвела и здесь — в квадрате оказалось ровно столько же точек, сколько и на отрезке. Строгое доказательство этого утверждения несколько осложняется из-за неоднозначности десятичной записи чисел. Поэтому мы дадим лишь эскиз доказательства Кантора.

Возьмем отрезок $[0, 1]$ и квадрат со стороной 1. Этот квадрат можно считать расположенным так, как на рис. 11. Нам надо установить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата. Проектирование точек квадрата на отрезок AB здесь не помогает, ведь при проектировании в одну точку отрезка перейдет бесконечное множество точек квадрата (например, в точку A — все точки отрезка DA).

Решение получается следующим образом. Каждую точку T квадрата $ABCD$ можно задать двумя числами — ее координатами x и y (или попросту ее расстояниями до сторон AB и AD). Эти числа можно записать как бесконечные десятичные дроби. Так как x и y не больше 1, то эти дроби имеют вид

$$x=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \qquad (1)$$
$$y=0,\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots \qquad (2)$$

(для простоты мы не берем точки квадрата, лежащие на его сторонах, а берем лишь внутренние точки). Здесь α_n и β_n — десятичные знаки чисел x и y, например, если $x=0{,}63205\ldots$ и $y=0{,}21357\ldots$, то $\alpha_1=6$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=2$ и т. д., а $\beta_1=2$, $\beta_2=1$, $\beta_3=3$ и т. д.

Нам надо теперь найти точку Q отрезка AB, соответствующего точке T. Достаточно указать длину отрезка AQ. Мы выберем эту длину равной числу z, десятичные знаки которого получаются путем «перетасовывания» десятичных знаков чисел x и y. Иными словами, сделаем из двух записей (1) и (2) третью, написав их десятичные знаки через один:

$$z=0,\ \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots\alpha_n\beta_n\ldots$$

Например, если

$$x=0{,}515623\ldots$$

и

$$y=0{,}734856\ldots,$$

то

$$z=0{,}571354682536\ldots$$

Точка z лежит на отрезке $[0,\ 1]$, и ясно, что различным точкам квадрата соответствуют при этом разные точки отрезка. Ведь если точки T и T' не совпадают, то в десятичных записях чисел x и x' или y и y' хоть один знак будет разный. Но это приведет к тому, что десятичные записи соответствующих чисел z и z' не совпадут. Несколько более подробный анализ показывает, что тогда не совпадают и сами эти точки.

Всех точек отрезка мы не получим. Например, точка $z=0{,}191919\ldots$ должна была бы получиться из пары $x=0{,}111\ldots$, $y=0{,}999\ldots$, соответствующей точке на стороне квадрата, а такие точки мы условились не брать. Поэтому при отображении квадрата на отрезок точка z не будет образом ни одной точки квадрата.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и *частью* точек отрезка $[0,\ 1]$. Это показывает, что множество точек квадрата имеет не большую мощность, чем множество точек отрезка. Но его мощность и не меньше, а потому эти мощности совпадают.

Не только квадрат, но и куб имеет столько же точек, сколь и отрезок. Вообще любая геометрическая фигура, содержащая хоть одну линию, имеет столько же точек, сколько и отрезок. Такие множества называют множествами мощности *континуума* (от латинского continuum — непрерывный).

Существует ли множество самой большой мощности? Пока что самой большой мощностью, которую мы знаем, является мощность множества точек на прямой, то есть мощность континуума. Ни множество точек квадрата, ни множество точек куба не имеют большей мощности. Не является ли мощность континуума самой большой? Оказывается, что нет. Более того, вообще нет множества самой большой мощности. Для любого множества A есть множество, мощность которого больше мощности A. Этим множеством является, например, множество B всех функций, заданных на множестве A и принимающих значения 0 и 1.

Покажем сначала, что мощность множества B не меньше, чем мощность множества A. Для этого каждой точке α множества A поставим в соответствие функцию $f^a(x)$, принимающую в этой точке значение 1, а в остальных точках значение 0. Ясно, что разным точкам соответствуют разные функции. Например, если множество A состоит из трех точек 1, 2, 3, то точке 1 соответствует функция, принимающая в этой точке значение 1, а точке 2 — функция, принимающая в точке 1 значение 0. Эти функции не равны друг другу.

Итак, мощность множества B не меньше мощности множества A. Покажем теперь, что эти мощности не равны друг другу, то есть что нет взаимно однозначного соответствия между элементами множеств A и B.

В самом деле, предположим, что такое соответствие существует. Обозначим тогда функцию, соответствующую элементу a из A, через $f_a(x)$. Напомним, что все функции $f_a(x)$ принимают только два значения: 0 и 1.

Составим новую функцию $\varphi(x)$, заданную равенством

$$\varphi(x)=1-f_x(x).$$

Таким образом, чтобы найти значение функции $\varphi(x)$ в некоторой точке a из A, надо найти сначала соответствующую этой точке функцию $f_a(x)$ и вычесть из 1 значение этой функции при $x=a$. Ясно, что функция $\varphi(x)$ также задана на множестве A и принимает значения 0 и 1. Следовательно, $\varphi(x)$ является элементом множества B. Но тогда, по предположению, $\varphi(x)$ соответствует некоторой точке b из A, а значит,

$$\varphi(x)=f_b(x).$$

Учитывая первое равенство для $\varphi(x)$, получаем, что для всех x из A

$$1-f_x(x)=f_b(x).$$

Положим в этом равенстве $x=b$. Мы найдем тогда, что

$$1-f_b(b)=f_b(b),$$

и потому

$$f_b(b)=\frac{1}{2}.$$

Но это противоречит тому, что значения функции $f_b(x)$ равны 0 и 1. Полученное противоречие показывает, что взаимно однозначного соответствия между множествами A и B быть не может.

Итак, для любого множества A можно построить множество B большей мощности. Поэтому *множества самой большой мощности не существует.* Отправляясь от самой малой из бесконечных мощностей — мощности множества натуральных чисел, мы получим сначала мощность континуума, потом мощность множества всех функций, заданных на множестве действительных чисел, и будем без конца подниматься вверх по этой головокружительной лестнице все увеличивающихся бесконечных мощностей.

Арифметика бесконечности. Арифметика натуральных чисел не сводится к простому счету «один, два, три...» Натуральные числа можно складывать и вычитать, умножать и возводить в степень. Эти операции тесно связаны с операциями над конечными множествами. Складывая натуральные числа m и n, мы подсчитываем число элементов в объединении двух множеств, одно из которых содержит m элементов, а другое — n элементов (при этом, конечно, нужно, чтобы объединяемые множества не имели общих элементов — иначе получится меньше элементов, чем нужно). А умножая m на n, мы подсчитываем число пар (a, b), первый элемент которых принадлежит множеству A, состоящему из m элементов, а второй — множеству B, содержащему n элементов. В математике множество таких пар называют *декартовым произведением* множеств A и B и обозначают $A \times B$.

Обозначим объединение множеств A и B, не имеющих общих элементов, через $A+B$, а мощность множества A —

через $|A|$. Тогда сказанное выше можно записать так:

$$|A+B|=|A|+|B|,$$
$$|A\times B|=|A||B|.$$

Но левые части этих равенств имеют смысл и для бесконечных множеств. Это позволяет определить операции сложения и умножения для бесконечных мощностей. С их помощью установленные ранее утверждения о мощностях можно записать в виде формул, где через N обозначено множество натуральных чисел, а через Δ — множество точек отрезка [0; 1]:

$$n+|N|=|N|,\quad |N|+|N|=|N|,\quad |N|\ |N|=|N|,$$
$$|N|+|\Delta|=|\Delta|,\quad |N||\Delta|=|\Delta|,\quad |\Delta||\Delta|=|\Delta|$$

и т. д. Например, равенство $|N||N|=|N|$ означает, что счетное множество счетных множеств счетно, а равенство $|\Delta|\ |\Delta|=|\Delta|$,— что квадрат имеет столько же точек, что и отрезок.

Для бесконечных мощностей можно определить и операцию возведения в степень с бесконечным же показателем. Несложно доказать, что число отображений множества A в множество B равно $|B|^{|A|}$. Поэтому и для бесконечных мощностей смысл записи $|B|^{|A|}$ определяется аналогичным образом. Например, равенство $2^{|N|}=|\Delta|$ означает, что множество бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц, имеет мощность континуума.

Далеко не все законы обычной арифметики переносятся в область арифметики натуральных чисел. Кантор говорил, что законы арифметики бесконечности коренным образом отличаются от зависимостей, царящих в области конечного.

Трансфинитные числа. Натуральные числа применяют не только для ответа на вопрос «сколько?», но и для ответа на вопрос «какой по счету?» Иными словами, их используют не только как *количественные*, но и как *порядковые числа*. Мощности можно использовать лишь как количественные числа. Для описания порядка нужны иные понятия. Даже самое простое из бесконечных множеств — множество N натуральных чисел — можно упорядочить бесчисленной совокупностью возможностей. Кроме стандартного расположения 1,2,3,4,5,6,. . . можно поступить и так: сначала взять все нечетные числа (с их обычным порядком), а потом все четные: 1,3,5,. . .,2,4,6,. . .Но при попытке перенумеровать числа в таком порядке нас постигнет неудача — все номера окажутся затраченными на нечетные числа, а на долю четных чисел ничего не останется. Поэтому кроме обычных номеров понадобятся символы новой природы. Кантор предложил при таком порядке расположения чисел нумеровать число 2 символом ω, число 4 — символом $\omega+1$ и т. д.

Еще больше символов понадобится, если сначала выписать все числа, делящиеся на 3, потом дающие при делении на 3 остаток 1, и, наконец, числа, дающие при таком делении остаток 2:3,6, 9,. . ., 1,4,7,. . ., 2,5,8,. . . Здесь для нумерации числа 2 понадобится символ $\omega\cdot 2$, число 5 будет занумеровано символом $\omega\cdot 2+1$ и т. д. А если выписать сначала все простые числа, потом числа, разлагающиеся в произведение двух простых множителей, трех простых множителей и т. д., а в самом конце записать число 1, которое не относится ни к простым, ни к составным числам, то для обозначения последнего элемента придется применить совсем новый символ ω^{ω}.

Кантор придумал еще много различных расположений множества натуральных чисел, причем все они (как и разобранные выше) обладали следующим свойством: каждая часть множества натуральных чисел имела в таком расположении наименьший элемент. Он назвал множества, элементы которых расположены в одном из этих порядков, *вполне упорядоченными* (термин применяется и для несчетных множеств), а символы, введенные им для нумерации элементов вполне упорядоченных множеств,— *трансфинитными числами* (от латинских слов *trans* — за и *finitae* — конечный). Изучая свойства трансфинитных чисел, Кантор пришел к следующей проблеме: какую мощность имеет множество всех *счетных* трансфинитов? Легко показать, что она несчетна, но не превосходит мощности континуума. А вот равна ли она этой мощности или меньше ее, на этот вопрос не смогли дать ответ ни сам Кантор, ни его многочисленные ученики и последователи. О современном состоянии указанной проблемы, называемой *проблемой континуума*, будет рассказано в главе 4.

В начале XX в. теория бесконечных множеств превратилась в модную область математической науки. Некоторые специалисты придавали очень большое значение исследованиям в этой области. Например, А. Френкель писал: «Завоевание актуальной бесконечности методами теории множеств можно рассматривать как расширение нашего научного кругозора, не меньшее по значению, чем коперникова система в астрономии и теория относительности и даже квантовая теория в физике».

Но самый строгий судья научных теорий — время ставит в конце концов все на свои места. Постепенно все реже и реже стали появляться работы, в которых бы использовались трансфинитные числа, исследовались мощности, отличные от счетной или континуальной. Множества с такими мощностями можно получить, рассматривая, например, все части плоскости или все функции на отрезке [0; 1]. Но дело в том, что и в теоретических исследованиях, и для решения практических проблем, нужны не любые части плоскости и не любые функции, а лишь получаемые с помощью фиксированных процессов из некоторых простейших. А множества таких «хороших» частей или функций имеют мощность континуума.

И хотя, по словам П. С. Александрова [11] и А. Н. Колмогорова [12], «огромное влияние теории множеств на развитие математики последнего полустолетия является в настоящее время общепризнанным фактом», в настоящее время это влияние идет совсем по иным каналам. В следующей главе мы расскажем о том, как изменилось лицо некоторых областей математики под влиянием теоретико-множественных концепций.

Глава 3

УДИВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ЛИНИИ, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУНСТКАМЕРЕ

Общий фундамент. Через всю историю развития математической науки проходят диалектические противоположность и единство двух ее частей, одна из которых изучает числа, а другая — фигуры. Натуральные числа отличаются друг от друга своими свойствами: одни из них четны, а другие нечетны, одни являются простыми, а другие — составными, одни могут быть представлены в виде суммы двух квадратов, а другие так не представляются. Это бесконечное разнообразие свойств, столь разительно меняющихся при добавлении к числу хотя бы одной единицы, придает прелесть занятиям теорией чисел. Разумеется, столь же разнообразны по своим свойствам геометрические образы — треугольники и квадраты, окружности и параболы, астроиды и кардиоиды. Но все же каждая отдельно взятая линия, например прямая или окружность, состоит из совершенно одинаковых по своим свойствам точек.

По-разному проявляется в этих частях математики и идея бесконечности. В арифметике она воплощается как бесконечность натурального ряда чисел, а в геометрии — как бесконечность пространства и, в то же время как возможность неограниченного деления фигур на части. И все же, несмотря на эту, казалось бы, непреодолимую пропасть, связанную, быть может, с какими-то глубинными свойствами человеческого разума, на протяжении всей истории математики не прекращались попытки связать друг с другом арифметику и геометрию и постараться вывести всю математическую науку из единого основания.

В эпоху, когда математика была не столько наукой, сколько ремеслом, которым занимались египетские и вавилонские писцы, единство между арифметикой и геометрией проявлялось в наивной форме — среди различных задач рассматривали и задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Первая попытка теоретического объединения арифметики и геометрии была предпринята в VI в. до н. э. в школе древнегреческого математика и философа Пифагора. Одно из дошедших до нас изречений Пифагора гласит: «Все есть число». Он не только пытался «поверить алгеброй гармонию», создав одну из первых математических теорий музыкальной гаммы, но и хотел свести к натуральным числам науку об измерении геометрических величин. Поэтому для всего миросозерцания пифагорейцев оказалось катастрофой сделанное одним из них открытие несоизмеримости стороны и диагонали квадрата (в течение длительного времени они скрывали этот факт от непосвященных).

После того как стала ясной невозможность построить геометрию на основе понятия натурального числа, древнегреческие математики, наоборот, стали выражать в геометрических терминах соотношения между любыми величинами. Хотя дискретное лучше поддавалось логическому анализу, непрерывное лучше охватывалось интуицией. На языке геометрии греческие ученые выражали алгебраические закономерности (именно с тех пор в математике укоренились термины *квадрат числа*, *куб числа*, *среднее геометрическое*, *геометрическая прогрессия* и т. д.), исследовали квадратические иррациональности, решали кубические уравнения. Саму же геометрию греческие ученые строили на идее о безграничной делимости линий, фигур и тел. Они создали абстрактные понятия о точке, не имеющей размеров, о линии, имеющей лишь длину, о геометрической поверхности. И хотя эти понятия были лишь смелым теоретическим обобщением представлений о реальных точках, линиях и поверхностях, они верно служили ученым в их исследованиях и позволяли получать с их помощью правильные формулы для площадей и объемов.

После падения античной цивилизации центр математических исследований переместился в арабоязычные страны. Ученые этих стран были знакомы не только с наследием древних греков, но и с шедшей от вавилонских писцов традицией, содержавшей общие методы решения арифметических задач. Оказали на них влияние и открытия индийских математиков, которые создали десятичную систему счисления и, в отличие от древнегреческих ученых, свободно пользовались в своих работах отрицательными числами. Все это подготовило почву для создания алгебры, которая возникла в IX в. н. э. как наука о решении уравнений. Математики той эпохи, многие из которых жили в Средней Азии, не слишком задумывались над тонкостями, связанными с несоизмеримыми отрезками, и свободно использовали числа при изучении проблем геометрии.

Через несколько столетий начались исследования по алгебре и в Западной Европе (сначала в Италии), где были получены формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней, начато изучение комплексных чисел и стала развиваться буквенная символика. Буквенное исчисление сначала, в соответствии с древнегреческими традициями, носило геометрическую форму, что препятствовало рассмотрению выражений, содержавших слагаемые различных степеней.

Перед математической наукой возникла необходимость построить алгебру без опоры на геометрические понятия, освободить ее от несвойственной ей геометрической терминологии. Решающий шаг в этом направлении сделал Декарт [1]. На первый взгляд в его предложении не было ничего особенного — он просто предложил зафиксировать один отрезок e и назвать его *единичным*. Но это позволило рассматривать произведение двух отрезков a и b не как площадь прямоугольника с соответствующими сторонами, а как длину такого отрезка c, что $a : e = c : b$ (заметим, что теория пропорций была тщательно разработана еще древнегреческими учеными). А квадратный корень из a получил истолкование как среднее геометрическое отрезков a и e. После Декарта математики могли свободно пользоваться любыми алгебраическими выражениями, не задумываясь над их геометрическим смыслом. С работ Декарта начался длившийся более двухсот лет процесс «арифметизации» математики, ее переноса с геометрического фундамента на арифметический.

В конце концов было получено свободное от геометрии определение действительных чисел. Это сделали в 70-х годах XIX в. Кантор, Вейерштрасс [2], Дедекинд и Мэре [3]. Они определили действительные числа, опираясь лишь на понятие натурального числа. Поскольку со времен Декарта математики умели задавать геометрические объекты наборами действительных чисел (например, точки — их координатами), появилась возможность «арифметизировать» и геометрию. Так возникло новое единство математики, построенной на арифметическом фундаменте. Ученые этой эпохи полагали, что им удалось свести непрерывное к дискретному.

Не случайно одним из создателей арифметического построения действительных чисел был создатель теории множеств Кантор, другим — его учитель и вдохновитель Вейерштрасс, а третьим — Дедекинд, который в своих работах очень близко подошел к идеям теории множеств. Хотя конструкции в предложенных определениях отличались друг от друга, в любой из них действительное число определялось как некоторое бесконечное множество рациональных чисел. Например, в теории Вейерштрасса действительные числа определялись как бесконечные десятичные дроби. Но чтобы задать такую дробь, надо указать десять подмножеств натурального ряда чисел: для каждой цифры — множество номеров мест, на которых она написана. А в теории Дедекинда действительное число α прямо определялось с помощью разбиения всего множества рациональных чисел на два подмножества — одно из них содержит числа, не превосходящие числа α, а второе — большие, чем α.

Одновременно с этим в работах Г. Фреге [4] была сделана попытка построить на основе понятия множества саму арифметику натуральных чисел. Тем самым теория бесконечных множеств становилась общей основой как арифметики, так и геометрии, как дискретного, так и непрерывного. Получалось, что сначала надо изучить бесконечные множества, а потом выделить в их теории небольшой уголок, где скромно ютились бы конечные множества, и уже тогда получать натуральные числа. Как сказал Гильберт [5], «благодаря гигантской совместной работе Фреге, Дедекинда и Кантора бесконечное было возведено на трон и наслаждалось временем своего полного триумфа. Бесконечное в своем дерзком полете достигло головокружительной высоты успеха».

Однако не все ученые безоговорочно принимали новую точку зрения на математику. Вначале открытия Кантора натолкнулись на недоверие и даже прямой антагонизм многих математиков и безразличие со стороны подавляющего большинства философов. Оппозицию новым воззрениям возглавил один из виднейших алгебраистов тех лет Л. Кронекер [6]. По его убеждениям, предметом математики могло быть лишь то, что выражалось через натуральные числа за конечное число шагов. Он говорил: «Натуральные числа создал господь бог, а все остальное — дело человеческих рук». Поэтому отвергалась не только теория бесконечных множеств, считавшаяся вообще чем-то сумасбродным, но и новомодная теория действительных чисел.

Сдержанность, с которой многие математики приняли работы Кантора, объяснялась отчасти тем, что сама идея рассматривать бесконечность как нечто завершенное противоречила установившимся взглядам, и потому многие ученые считали исследования в области бесконечных множеств чем-то далеким от насущных задач науки. Большую роль в этом неприятии сыграл стиль работ Кантора, представлявший собой смесь математических исследований с философско-теологическими отступлениями. Трансфинитные числа настораживали тем, что с их помощью нельзя было ни вычислить какой-нибудь головоломный интеграл, ни просуммировать сложный ряд, ни решить дифференциальное уравнение. Успехи же Кантора в области конкретной математики (например, доказательство существования трансцендентных чисел) не казались слишком впечатляющими.

Но была в математике область, для которой теория множеств явилась хлебом насущным — новейшая для той поры теория функций действительного переменного. Чтобы понять, почему именно в этой области идеи Кантора оказались особенно полезными, нам придется вспомнить ход развития понятия функции.

Как развивалось понятие функции. Большинство математических понятий прошло долгий путь развития. Первоначально они возникали как обобщение каких-то наглядных представлений, повседневного опыта. Потом из этих наглядных представлений путем отбрасывания частностей и случайных черт выкристаллизовывались точные математические определения. Но часто оказывалось, что эти определения охватывают не только те объекты, изучение которых привело к формулировке данного определения, но и многие объекты, о которых раньше и не думали. Начиналось изучение этих новых объектов, переход к абстракции более высокого уровня, а потом на этой базе — расширение первоначально введенных определений. При этом в математические понятия вкладывался все более широкий смысл, они охватывали все большую совокупность объектов, получали все более разнообразные приложения.

Сложный путь прошло и понятие функции. Идея зависимости некоторых величин восходит, по-видимому, к древнегреческой науке, где она применялась в геометрии. В начале XVII в. Галилей, Кеплер и другие ученые стали развивать кинематику — науку о движении тел. Исходя из этих работ, Декарт ввел в математику общее понятие переменной величины. Фридрих Энгельс так оценивал значение этого события:

«Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало ... *необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» .

С помощью переменных величин ученые XVII в. описывали самые разнообразные движения, в результате чего геометрический язык сменился в математике языком механики. Например, вводя в науку логарифмическую функцию, Непер [7] пользовался изучением движения точек по

---

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 573.

прямой линии, а Ньютон считал, что математический анализ должен изучать зависимость от времени тех или иных величин, характеризующих движение (пути, скорости, ускорения и т. д.). Впрочем, до поры до времени сохранялся и геометрический язык. Например, рассматривали не тригонометрические функции числового аргумента, а длины некоторых отрезков в круге как функции угла. Даже само понятие функции Лейбниц ввел первоначально как связь между собой некоторых отрезков, характеризующих точки на кривой линии (абсциссы и ординаты, абсциссы и отрезка касательной между точкой касания и осью абсцисс и т. д.).

Но уже в 1718 г. И. Бернулли [8] дал определение функции, свободное от геометрических образов: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». А Эйлер [9] определял функцию так: «Величины, зависящие от других так, что с изменением вторых меняются и первые, принято называть их функциями». Эйлеру же удалось освободить и тригонометрию от геометрического языка — он ввел общее понятие тригонометрической функции числового переменного.

В эпоху Эйлера считали, что функция должна быть выражена единой формулой, в противном случае ее рассматривали как «сшитую» из нескольких функций. Например, функция

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ x^2, & \text{если } x\geqslant 0, \end{cases}$$

считалась состоящей из двух различных функций.

Вскоре выяснилось, что дело обстоит значительно сложнее. Решая задачу о колебании струны, Д. Бернулли [10] получил ответ в виде суммы бесконечного ряда, членами которого были произведения двух тригонометрических функций, одна из которых зависела от момента времени t, а вторая — от координаты точки струны. Согласно принятому в ту эпоху мнению это означало, что отклонение струны является функцией двух переменных, имеющей, как и положено, единое выражение.

Ту же самую задачу решил Д'Аламбер, но его решение имело совсем иной вид, чем у Бернулли,— при разных значениях аргументов оно задавалось различными формулами. Перед математикой XVIII в. возникло казавшееся неразрешимым противоречие: для одной и той же зависимости получилось два результата, причем один из них для всех значений аргументов выражался одной и той же формулой, а другой — несколькими формулами. Из-за этого решение Д. Бернулли было подвергнуто сомнению: думали, что он нашел не все решения задачи, а лишь решения, выражающиеся одной формулой. Возник ожесточенный спор, в котором приняли участие все крупнейшие математики XVIII в.— Эйлер, Д'Аламбер и др.

По сути дела, спор шел о понятии функции, о связи между функциональной зависимостью и возможностью выразить эту зависимость формулой. Окончательное решение вопроса было получено в начале XIX в., когда Ж. Фурье [11] показал, что сумма бесконечного ряда, состоящего из тригонометрических функций, может на различных участках выражаться различными формулами. После этого он дал новое определение функции, подчеркнув в нем, что главным является задание значений функции, а совершается ли это задание некоторой единой формулой или нет, несущественно.

Результаты Фурье были уточнены немецким математиком Дирихле, который показал, что графиком суммы тригонометрического ряда может быть любая, произвольно проведенная линия. Требуется лишь, чтобы число максимумов и минимумов на этой линии было конечным и линия не поднималась бесконечно высоко.

После длительного обсуждения, в котором приняли участие многие выдающиеся ученые (в том числе Н. И. Лобачевский), стало общепринятым следующее определение функции: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y».

В этом определении ни слова не говорилось о том, что функция должна задаваться одной и той же формулой на всем отрезке, где она определена. С современной точки зрения недочетом этого определения можно считать лишь то, что в нем идет речь о переменных величинах. Ведь с точки зрения «чистой математики» это понятие не имеет четкого определения. В начале XIX в. ученые ограничивались тем, что давали примеры переменных величин, встречающихся в физике (температура остывающего тела, путь или скорость неравномерного движения и т. д.). Они считали, что этим переменным величинам можно поставить в соответствие некую математическую переменную, изменение которой описывает ход изменения физической величины. Но при этом получалось, что одно из основных понятий математики как бы опирается на физическую идею времени.

Создание во второй половине XIX в. теории действительных чисел и построение теории множеств позволили арифметизировать и расплывчатое понятие переменной величины. Оказалось, что под переменной следует понимать букву, вместо которой можно подставлять числа, принадлежащие некоторому числовому множеству X. Разумеется, такой подход к понятию переменной был более статичным, чем принятый у ученых начала XIX в., в нем не было чувства движения, изменения. Но зато он позволил дать определение функции, свободное от лежащих вне математики понятий: «Функцией f, заданной на числовом множестве X, называется соответствие (правило), которое каждому числу x из этого множества сопоставляет число $f(x)$».

Столь общее определение позволило связать понятие функции с понятиями отображения, преобразования, оператора и т. д. Например, с этой точки зрения, сопоставляя каждому треугольнику его площадь, мы получаем функцию, заданную на множестве треугольников и принимающую значения в множестве положительных чисел. А сопоставляя треугольнику вписанную в него окружность, мы получаем функцию, заданную на том же множестве треугольников, но принимающую значения в множестве окружностей. Поскольку на координатной плоскости и треугольники, и окружности задаются некоторыми наборами чисел, то эти функции можно свести к некоторым числовым функциям. Вообще, числовые функции — один из важнейших видов функций, и потому в дальнейшем изложении мы ограничимся рассмотрением лишь таких функций, да к тому же заданных лишь на числовых множествах.

Под микроскопом. Уточнение математических понятий — дело обоюдоострое. При этом, конечно, устраняются многие неясности, повышается четкость математической речи, становятся более убедительными доказательства теорем. Но такие достижения влекут за собой и определенные потери. То, что выигрывает наука в строгости, она часто теряет в наглядности. Кроме того, всегда возникает вопрос, соответствуют ли понятия, получившие строгие определения, тем грубым, наглядным образам, которые они призваны моделировать в математике. Тем самым камни преткновения, убранные с поля математики, обычно не исчезают, а лишь оказываются перенесенными на границу между этой наукой и ее приложениями.

Но для математической науки точные определения являются насущной необходимостью. Изучая свойства определяемых ими понятий, ученые узнают свойства тех математических моделей, с помощью которых они пытаются описывать реальный мир. И если эти свойства оказываются непохожими на ожидаемые, то это значит лишь, что модель не вполне удачна, что при ее построении были пропущены какие-то важные стороны объектов, для описания которых она была предназначена.

Поэтому, после того как было уточнено понятие функции, математики начали его изучать со всех сторон. И тут оказалось, что под введенное определение подпадают и объекты, которые математики прошлых столетий вряд ли стали бы рассматривать. Например, уже Дирихле отметил, что функцией является и соответствие, определяемое следующим правилом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число},\\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число}. \end{cases}$$

Ни одному математику XVIII в. не пришло бы в голову рассматривать такие соответствия. Они изучали лишь функции, которые описывали зависимости между физическими или геометрическими величинами. Но любое измерение конкретных величин производится с некоторой погрешностью, и потому для таких величин бессмысленно ставить вопрос, является ли их значение рациональным или иррациональным числом. Разумеется, на это можно возразить, что и значение функции

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ 1, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

не слишком точно определено вблизи точки $x=0$ — небольшая ошибка в измерении может превратить отрицательный ответ в положительный, резко изменив значение функции. Но математики XVIII в. знали, что такие функции, как $\operatorname{sgn} x$, являются лишь идеализированным представлением непрерывной функции, круто поднимающейся вверх на участке вблизи точки $x=0$. Функция же Дирихле не годилась для самого идеализированного описания какого-либо реального процесса.

Даже добавление условия непрерывности не слишком помогало. Пользуясь обретенной свободой, математики начали строить замысловатые примеры непрерывных функций, которые противоречили всем привычным для их предшественников представлениям. Изменение, происшедшее во взглядах ученых на понятие функции в конце XIX в., Анри Пуанкаре[12] охарактеризовал следующими словами: «Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретают специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов; никакого иного вывода, кроме этого, из них извлечь нельзя».

Дальнейший ход развития математики показал, что мнение Пуанкаре было односторонним — в современной физике приходится иметь дело с функциями и линиями, обладающими весьма странными свойствами. Но путь до этих приложений был еще весьма далек, и в конце XIX в. математики с увлечением исследовали свойства самых чудовищных функций, которые их предшественники поместили бы разве что в кунсткамеру; не зря новую теорию функций некоторые из математиков классического направления называли «тератологий функций» (тератология — учение об уродствах).

Математики конца XIX в. как бы положили функции под микроскоп логического анализа, в то время как их предшественники смотрели невооруженным глазом и не могли открыть тонкости «микроскопического строения» этих функций. Хотя математики XVIII в. теоретически понимали, что график функции, как и всякая линия, толщины не имеет, они, думая о функциях, воспринимали их графики как начерченные на бумаге карандашом или рейсфедером, то есть имеющие некоторую толщину. А такие линии были кусочно-монотонными, то есть их графики состояли из конечного числа кусков, на которых они либо поднимались, либо опускались. Всюду, за исключением нескольких точек, к этим графикам можно было провести касательную, любые две линии в ограниченной части плоскости имели лишь конечное число общих точек и т. д.

Математики той эпохи не подозревали, что существуют функции и линии, свойства которых совсем не похожи на свойства таких «добропорядочных» функций, как многочлены, тригонометрические, показательные функции и т. д.

Но в разработанном ими математическом аппарате уже содержался динамит, который впоследствии и взорвал кажущееся благополучие. Этим динамитом оказалась теория бесконечных рядов. Первоначально такие ряды возникли, чтобы облегчить вычисление значений функций. Но потом они превратились в способ получения новых функций. И тут оказалось, что при сложении столь хороших функций, как многочлены, по мере добавления новых членов начинают выступать все более мелкие дрожания будущей бесконечной суммы, и в конце концов получается функция, совсем не похожая по своим свойствам на те, которыми занимался классический анализ. Поведение таких функций напоминало математикам-классикам сумасшедший дом. Так что и здесь понятие бесконечности, идея о возможности сложить бесконечно много слагаемых, оказало революционизирующее влияние на развитие науки.

А теперь позвольте пригласить вас на прогулку по математической кунсткамере, где собраны некоторые экспонаты, которые столь же отличаются от знакомых со школьных или вузовских времен математических образов, как ихтиозавры или какие-нибудь трицератопсы от современных животных.

Джинн выходит из бутылки. Необычной является уже сама функция Дирихле, о которой говорилось выше. Ведь на самом маленьком отрезке оси абсцисс бесконечно много и рациональных чисел и иррациональных чисел. Но функция Дирихле для рациональных чисел равна единице, а для иррациональных — нулю. Поэтому когда x пробегает ось абсцисс, то значение функции все время прыгает от 0 к 1 и обратно. Построить график этой функции совершенно невозможно, потому что эта функция во всех точках разрывна.

Но и среди непрерывных функций есть функции с неожиданными свойствами. Например, может ли непрерывная функция иметь на конечном отрезке бесконечно много максимумов и минимумов? На первый взгляд это совершенно невозможно. Ведь функция должна успеть опуститься из точки максимума в точку минимума, потом опять подняться в точку максимума и т. д. Как же ей сделать все это на конечном отрезке? Тем не менее оказалось, что такие странные функции существуют, причем построить их совсем нетрудно.

Построим такую функцию на отрезке $[0, 1]$. Для этого разделим отрезок пополам и построим на левой половине равносторонний треугольник. Теперь разделим оставшуюся правую половину снова на две равные части и на части [1/2, 3/4] построим второй равносторонний треугольник. Выполним описанную операцию бесконечно много раз. У нас получится «горная цепь», состоящая из бесконечного числа вершин, постепенно опускающаяся к точке 1

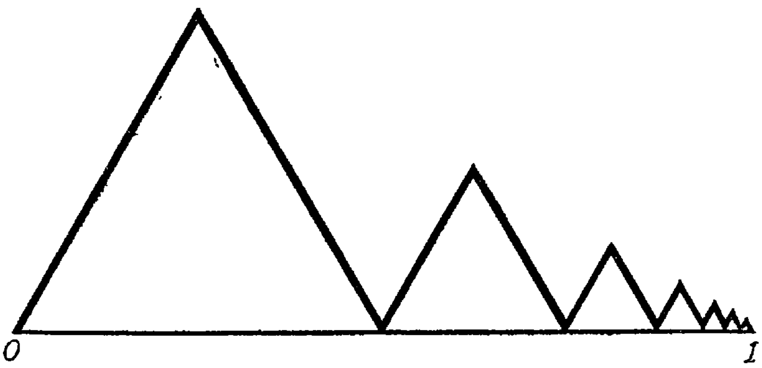


Рис. 12

(рис. 12). Примем полученную ломаную за график функции $f(x)$. Тогда функция будет определена в каждой точке отрезка [0, 1], за исключением крайней правой точки 1. В этой точке положим $f(1)=0$.

Так как при приближении к точке 1 высоты вершин стремятся к нулю, полученная нами функция непрерывна во всех точках отрезка [0, 1]. А число максимумов и минимумов на этом отрезке бесконечно велико!

Математику XVIII в., чтобы построить такую странную функцию, понадобилось бы долго комбинировать различные функции, прежде чем он догадался бы, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cos(\pi/x), & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases}$$

имеет бесконечно много максимумов и минимумов на отрезке [0, 1].

Но функции с бесконечным числом максимумов и минимумов были лишь началом неприятностей, ожидавших математиков. Джинн только начал выходить из бутылки.

«Мокрые точки». У функции, которую мы построили в предыдущем пункте, есть лишь одна точка, около которой бесконечно много максимумов и минимумов, а именно точка 1. Сейчас мы построим другую функцию, у которой таких точек будет куда больше.

Предположим, что на отрезок [0, 1] оси абсцисс падает сверху дождь. Для защиты от дождя поступим следующим образом. Разделим отрезок [0, 1] на три равные части и возведем над средней частью палатку в форме равностороннего треугольника. Она защитит от дождя все точки средней части (кроме концов этой части, то есть точек 1/3 и 2/3). Теперь каждую из оставшихся двух частей снова разделим на три равные части и защитим средние части палатками той же формы (но втрое меньшего размера).

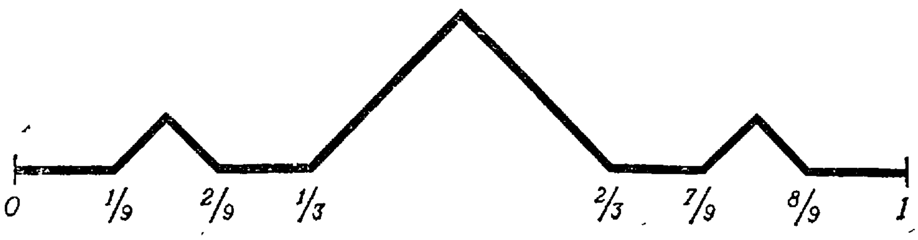


Рис. 13

У нас получится линия, изображенная на рис. 13. На третьем шаге процесса мы построим еще четыре палатки, потом еще восемь и т. д.

Возникает вопрос: все ли точки отрезка защищены получившейся пилообразной линией или остались точки, которые дождь намочит? Некоторые из таких «мокрых» точек указать легко — ими являются концы защищаемых отрезков (то есть такие, как 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9 и т. д.). Все эти точки остаются без защиты при возведении соответствующей палатки, а последующие палатки их тоже не защищают. Легко видеть, что таких концов будет бесконечное, но счетное множество.

Оказывается, что кроме этого счетного множества «мокрых» точек найдется еще целый континуум таких точек. Чтобы описать их, удобно прибегнуть к троичной системе счисления, в которой все числа записываются с помощью всего лишь трех цифр: 0, 1 и 2. В этой системе счисления число «семь» записывается в виде 21, а дробь 1/4 — в виде 0,02020202... (чтобы убедиться в этом, надо вспомнить правило суммирования геометрической прогрессии).

Теперь мы уже можем точно сказать, какие точки останутся «мокрыми» после того, как все защитные палатки будут построены. Первая палатка защищает точки, лежащие между 1/3 и 2/3. Но это те самые точки, которые в троичной системе имеют запись вида

0,1... ,

где точками обозначена любая комбинация цифр 0, 1 и 2 (точно так же, как в десятичной системе счисления между точками 1/10 и 2/10 лежат все точки, десятичная запись которых начинается с цифры 1, то есть имеет вид 0,1...).

После первого шага «мокрыми» останутся точки, троичная запись которых имеет вид

0,0...

или вид

0,2...

Точно так же доказывается, что после возведения двух палаток на втором шаге мокрыми остаются лишь точки, троичная запись которых начинается с одной из следующих четырех комбинаций:

0,00...
0,02...
0,20...
0,22...

Итак, шаг за шагом защищаются от дождя точки, в троичную запись которых входят единицы. В конце концов останутся «мокрыми» лишь точки, которые можно записать в троичной системе счисления, не используя 1.

А теперь уже ясно, почему множество «мокрых» точек имеет мощность континуума. Ведь это множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством бесконечных телеграмм. Для этого нужно лишь каждой точке вида

0,20220200...

поставить в соответствие бесконечную телеграмму, заменив 0 на точку, а 2 — на тире. При этом разным числам будут соответствовать разные телеграммы. Мы знаем, что множество бесконечных телеграмм имеет мощность континуума. Поэтому и множество «мокрых» точек имеет ту же мощность.

Множество точек, которые мы назвали «мокрыми», впервые построил Кантор, и его называют *канторовым множеством*. Из построения палаток видно, что около каждой точки канторова множества есть бесконечно много максимумов и минимумов пилообразной линии.

Чертова лестница. С тем же самым канторовым множеством связана еще одна интересная функция. Она строит-

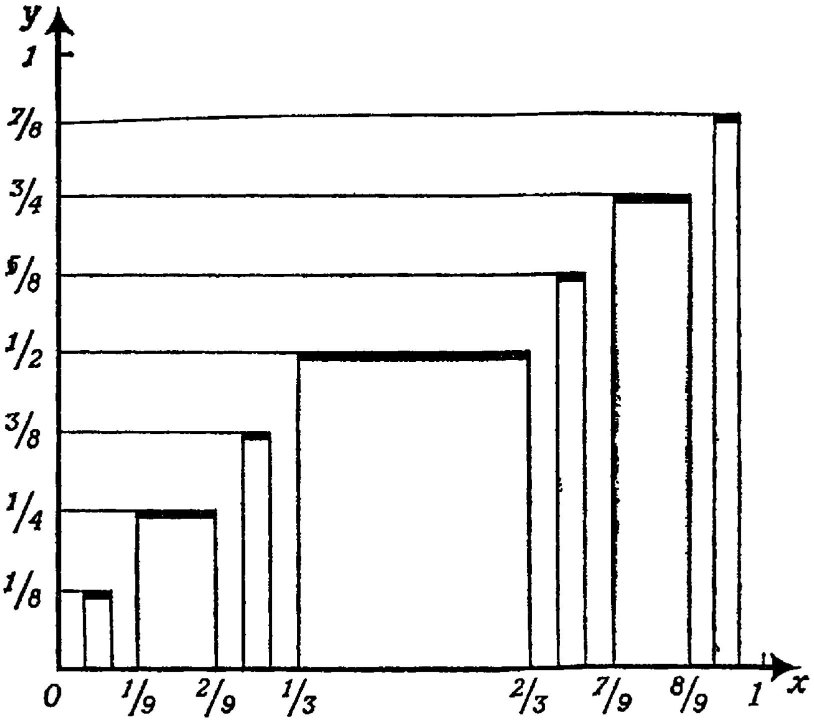


Рис. 14

ся следующим образом. Снова разделим отрезок [0, 1] на три равные части и положим, что во всех точках средней части наша функция равна 1/2. Потом левую и правую трети снова разделим на три равные части и положим, что от 1/9 до 2/9 функция равна 1/4, а от 7/9 до 8/9 она равна 3/4. Теперь у нас остались четыре отрезка, на которых функция еще не определена:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Разделим каждый из них на три равные части и на каждой из средних частей положим функцию равной соответственно

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \text{ и } \frac{7}{8}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим функцию, которая определена во всех «сухих» точках, то есть во всех точках, не принадлежащих канторову множеству. Ее легко определить и в точках этого множества так, чтобы она стала после этого непрерывной и неубывающей. График получившейся функции приближенно изображен на рис. 14. Он имеет вид лестницы с бесконечным числом ступенек (на графике изображены не все ступени).

Впрочем, после того как мы познакомились с линиями, имеющими бесконечно много максимумов и минимумов, лестницей с бесконечным числом ступенек вряд ли кого удивишь. Но удивительно другое. Подсчитаем общую длину всех ступенек нашей лестницы. Первая ступень имеет длину 1/3, две вторые — по 1/9, следующие четыре ступени имеют длину по 1/27 и т. д. Таким образом, сумма длин всех ступеней выражается бесконечной геометрической прогрессией

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$$

Сумма этой прогрессии равна 1:

$$\frac{1/3}{1-2/3}=1.$$

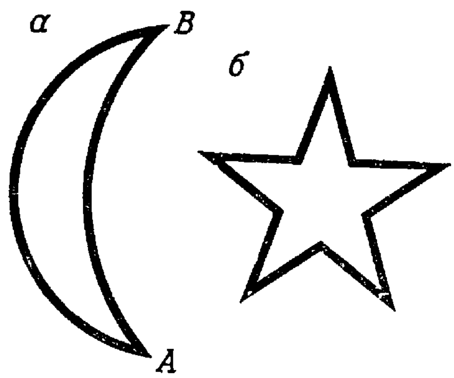


Рис. 15

Таким образом, общая длина всех ступеней равна 1. Но на этих ступеньках функция совсем не поднимается вверх, весь ее подъем сосредоточен в точках канторова множества. А на долю этого множества осталось очень «мало» точек: хотя его мощность и равна континууму, но длина равна нулю! (Длина всего отрезка [0, 1] равна 1, и общая длина ступенек тоже равна 1, так что на долю канторова множества остается лишь нулевая длина.) Таким образом, наша функция умудряется подняться вверх на 1, хотя растет только на множестве нулевой длины и не делает нигде скачков! Не правда ли, удивительно?

Колючая линия. На протяжении многих столетий математики имели дело лишь с линиями, почти в каждой точке которых можно было провести касательную. Если и встречались исключения, то только в нескольких точках. В этих точках линия как бы ломалась, и потому их называли точками излома. Линия, изображенная на рис. 15, *а*, имеет две точки излома, а линия, изображенная на рис. 15, *б*,— десять точек излома.

Но линии, которые мы только что построили, имеют уже бесконечно много точек излома, например линия на рис. 13 ломается во всех точках канторова множества, а кроме того, в вершинах всех треугольников. Однако даже линия на рис. 13 имеет изломы на сравнительно «маленьком» множестве точек, длина которого равна нулю.

В течение долгого времени никто из математиков не верил, что может существовать непрерывная линия, целиком состоящая из зубцов, изломов и колючек. Велико было

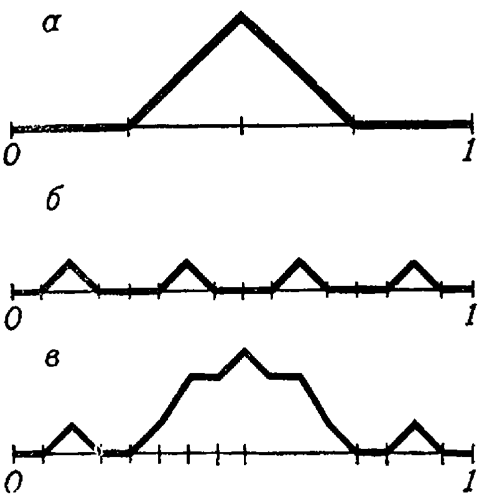


Рис. 16

изумление, когда удалось построить такую линию, более того, функцию, график которой был такой колючей изгородью. Первым сделал это Больцано. Но его работа осталась неопубликованной, и впервые такой пример опубликовал Вейерштрасс. Однако пример Вейерштрасса очень трудно изложить — он основан на теории тригонометрических рядов. Пример же Больцано напоминает линии, которые мы строили раньше.

Вот этот пример с небольшими изменениями. Разделим отрезок [0, 1] на четыре равные части и над двумя средними частями построим равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 16, *а*). Получившаяся линия является графиком некоторой функции, которую обозначим через $y=f_1(x)$.

Разделим теперь каждую из четырех частей еще на четыре равные части и в соответствии с этим построим еще четыре равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 16, *б*). Мы получим график второй функции $y=f_2(x)$. Если сложить эти две функции, то график суммы $y=f_1(x)+$ $+f_2(x)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 16, *в*. Видно, что получившаяся линия имеет уже больше изломов и эти изломы гуще расположены. На следующем шаге мы снова разделим каждую часть еще на четыре части, построим 16 равнобедренных прямоугольных треугольников и прибавим соответствующую функцию $y=f_3(x)$ к функции $y=f_1(x)+f_2(x)$.

Продолжая этот процесс, мы будем получать все более и более изломанные линии. В пределе получится линия, у которой излом в каждой точке и ни в одной точке к ней нельзя провести касательную.

Похожий пример линии, нигде не имеющей касательной, построил голландский ученый Ван-дер-Варден [13]. Он взял равносторонний треугольник, разделил каждую его сторону на три равные части и на средних частях построил новые равносторонние треугольники, смотрящие наружу. У него получилась звезда. Теперь каждую из двенадцати сторон этой звезды он разделил еще на три части и снова

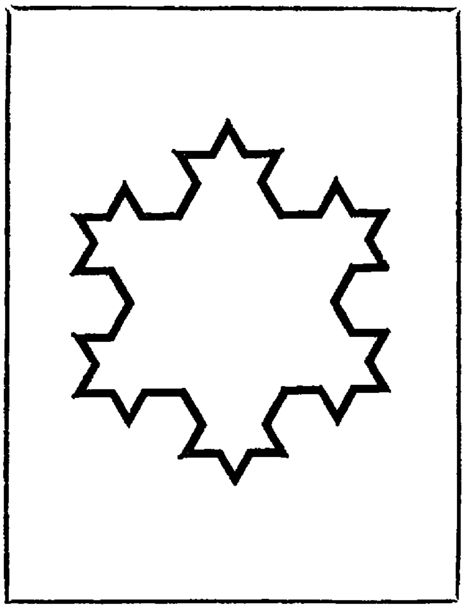
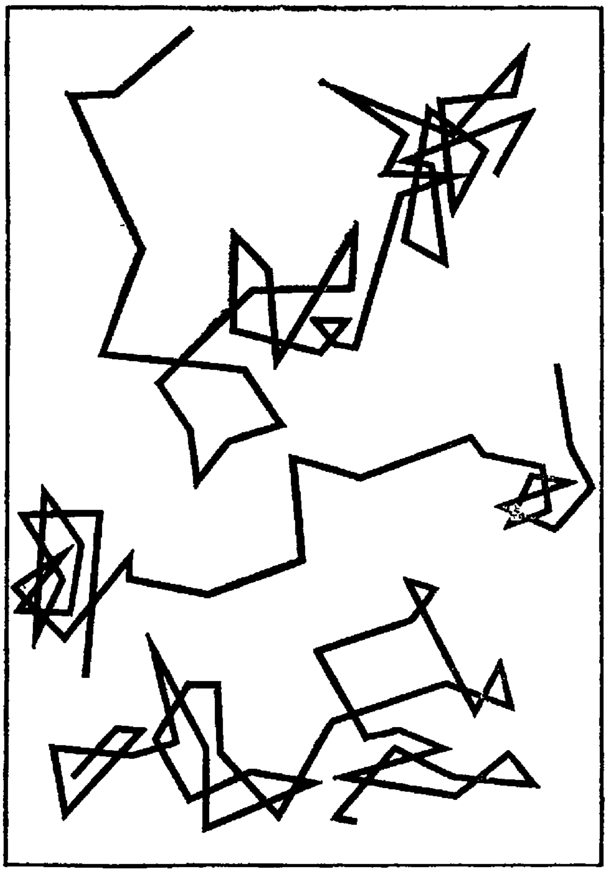


Рис. 17

Рис. 18



на каждой из средних частей построил правильный треугольник. Получилась еще более колючая линия, изображенная на рис. 17. После бесконечного числа делений и построений правильных треугольников получилась линия, в каждой точке которой есть излом, колючка.

Математики построили много непрерывных функций, графики которых не имели касательной ни в одной точке, и начали изучать их свойства. Эти свойства совсем не походили на свойства «добропорядочных» гладких функций, с которыми они до тех пор имели дело. Поэтому математики, воспитанные в классических традициях, с изумлением смотрели на новые функции. Более того, виднейший представитель классического математического анализа Шарль Эрмит [14] так писал своему другу, голландскому математику Стилтьесу [15]. «Я с ужасом отворачиваюсь от этой достойной сожаления язвы непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке» (то есть, как мы их называли, всюду колючих линий).

В физике встречаются линии, очень напоминающие колючие линии Ван-дер-Вардена и других. Это — траектории частиц, совершающих под ударами молекул броуновское движение. Французский ученый Ж. Перрен [16] сделал зарисовки движения таких частиц. Он наблюдал их положения через каждые полминуты и соединял полученные точки прямолинейными отрезками. В результате у него получились запутанные ломаные, вроде изображенных на рис. 18. Но не следует думать, что в действительности между отдельными наблюдениями частица двигалась по прямой. Если бы Перрен наблюдал ее не через полминуты, а через полсекунды, то каждый прямолинейный отрезок пришлось бы заменить ломаной, столь же сложной, как и ломаные на рис. 18. И чем меньше были бы промежутки между наблюдениями, тем сложнее и «колючее» становилась бы ломаная. Американский математик Н. Винер [17] показал, что движение броуновской частицы, настолько малой, что ее инерцией можно пренебречь, совершается по линии, нигде не имеющей касательной.

Замкнутая линия бесконечной длины. С линиями бесконечной длины мы встречаемся часто — бесконечную длину имеют прямая линия, парабола, гипербола и т. д. Все эти линии уходят в бесконечность, а потому и неудивительно, что их длина бесконечна. Впрочем, нетрудно построить и линию, целиком лежащую в конечной части плоскости, но имеющую бесконечную длину. Для этого надо взять окружность и намотать на нее спираль с бесконечным числом оборотов. Так как число оборотов бесконечно, а длина каждого витка больше длины окружности, то длина всей спирали бесконечна.

Но может ли существовать замкнутая линия бесконечной длины? Обычные замкнутые линии: окружность, эллипс, кардиоида — имеют конечную длину. Длина же колючей линии Ван-дер-Вардена бесконечна.

В самом деле, легко подсчитать, что после n-го шага получается линия, имеющая периметр $3 \cdot (4/3^n)$. Но при возрастании n это выражение стремится к бесконечности. Отсюда и вытекает, что длина линии Ван-дер-Вардена бесконечна.

Математический ковёр. Рассказывают, что Екатерина II однажды спросила какого-то генерала, в чем разница между мортирой и гаубицей. Растерявшийся генерал ответил: «А видишь ли, государыня-матушка, мортира-то она особь статья, а гаубица — особь статья». Примерно столь же содержательный ответ можно получить, если спросить далекого от математики человека, в чем разница между линией, поверхностью и телом. Более того, он удивится, как можно спрашивать о столь очевидных вещах. Ведь всякому ясно, что линия, поверхность и тело — совсем разные вещи, и никто не назовет окружность поверхностью или сферу линией.

Но один остроумный шахматный гроссмейстер сказал, что разница между мастером и начинающим шахматистом состоит в том, что начинающему все ясно в позиции, где для мастера все полно тайны. Так же обстоит дело и с нашим вопросом. Конечно, относительно таких геометрических фигур, как квадрат или окружность, ни у кого не возникает сомнений, линии они или поверхности. Но в ходе развития науки после открытий Кантора появилось много самых причудливых геометрических фигур, относительно которых не только школьник, но и умудренный знаниями профессор математики не сразу ответит, что это такое — линия, поверхность или тело.

Вот некоторые из этих фигур. Возьмем квадрат со стороной 1, разделим его на 9 равных квадратиков и выкинем среднюю часть (оставив ее стороны). После этого разделим каждый из оставшихся квадратов снова на 9 равных квадратиков и снова удалим центральные квадратики. Еще один такой шаг приведет к фигуре, изображенной на рис. 19, где заштрихованы все выброшенные квадратики. Ясно, что эта фигура еще является поверхностью. Но мы не остановимся и будем бесконечно много раз делить квадратики на 9 равных частей, после чего выбрасывать среднюю часть. В конце концов у нас получится геометрическая фигура, которую называют *ковром Серпинского* по имени придумавшего ее польского ученого.

Эта фигура похожа на ткань, сотканную сумасшедшим ткачом. Вдоль и поперек идут нити основы и утка́, сплетаясь в очень симметричные и красивые узоры. Но сама получившаяся ткань весьма дырява — ни одного целого куска в ней нет, каждый самый маленький квадратик подвергался вырезанию центральной части. И совсем неясно, чем является этот ковер — линией или поверхностью? Ведь, с одной стороны, он не содержит ни одной целой части, а потому вряд ли является поверхностью, а с другой — образующие его нити сплелись в настолько сложный узор, что вряд ли кто-нибудь без колебаний назовет ковер Серпинского линией. Во всяком случае, нарисовать эту «линию» было бы невозможно.

А ковер Серпинского — не самая сложная из геометрических фигур. Вместо квадрата мы разделим кубик на 27

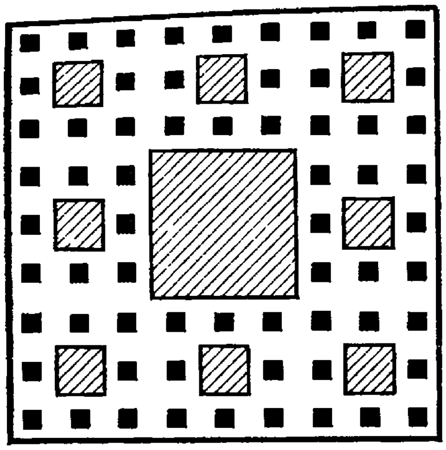


Рис. 19

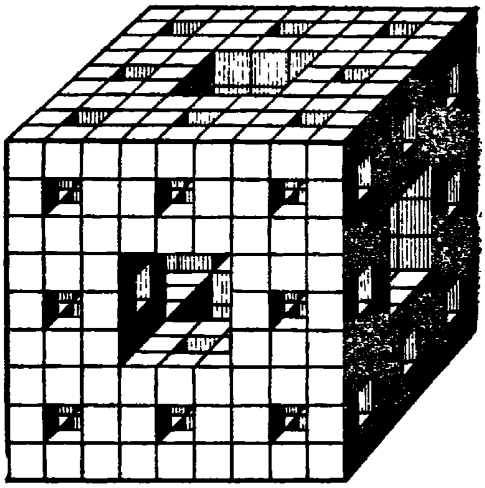


Рис. 20

равных кубиков и выбросим центральный кубик вместе с шестью прилегающими к нему кубиками. После этого разделим каждый оставшийся кубик еще на 27 частей и продолжим операцию выбрасывания (на рис. 20 изображено тело, остающееся после двух выбрасываний). Проделаем эту операцию бесконечно много раз. Чем является оставшаяся после всех выбрасываний геометрическая фигура — линией, поверхностью или телом?

Евклид отказывает в помощи. Когда перед математиками прежних времен вставал сложный геометрический вопрос, они в первую очередь отправлялись смотреть, что написано об этом у Евклида. Ведь на протяжении почти двух тысячелетий Евклид был эталоном математической строгости и энциклопедией геометрической мудрости. Не зря даже философы, стремясь обезопасить себя от упреков в нестрогости рассуждений, прибегали к языку Евклида и формулировали свои утверждения как аксиомы, леммы и теоремы.

Но как раз по интересующему нас вопросу у Евклида написано нечто совсем невнятное. Первые строки книги Евклида «Начала» гласят следующее:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же — длина без ширины.
3. Оконечность же линии — точка.
4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
5. Оконечность же поверхности — линия.
6. Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.

7. Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

Нет, как хотите, а это что угодно, но не строгие математические определения. Человек, не знающий, что такое точка, линия, поверхность, вряд ли почерпнет полезные для себя сведения из этих «определений», напоминающих ответ растерявшегося генерала («Линия — это особь статья, а поверхность — особь статья»). И уж во всяком случае из этих определений не удастся узнать, что такое ковер Серпинского — линия или поверхность, есть ли у него только длина без ширины или и длина, и ширина.

Но во времена Евклида таких сложных фигур, как ковер Серпинского, не знали, а для простых фигур определения были не слишком нужны: всякий и так мог увидеть, где на чертеже линия, а где поверхность. Впрочем, и сам Евклид, по-видимому, чувствовал, что с определениями основных понятий у него не все ладно. Во всяком случае, приведя эти определения в начале книги, он потом начисто о них забыл и ни разу на протяжении всего труда ими не воспользовался.

Нужны ли строгие определения? На протяжении двух тысячелетий авторитет Евклида стоял совершенно незыблемо. Усомниться в каком-нибудь его положении означало окончательно и бесповоротно подорвать свою математическую репутацию. Один из величайших математиков XIX в. Карл Фридрих Гаусс, еще до Лобачевского пришедший к идеям неевклидовой геометрии, не решился опубликовать свои исследования, опасаясь, как он писал одному другу, крика беотийцев *. И только научный подвиг великого русского геометра Николая Ивановича Лобачевского, который опубликовал свои открытия, невзирая на насмешки не понимавших его ученых, сделал неевклидову геометрию всеобщим достоянием.

После появления трудов Н. И. Лобачевского стало ясно, что существуют две геометрии, одинаково безупречные логически, но приводящие к совершенно различным теоремам. Но если это так, то всякие ссылки на «геометрическую очевидность» полностью потеряли цену. Каждое геометрическое утверждение надо было основывать на строгих определениях, безупречных логических утверж-

* Беотийцы — греческое племя, которое считалось весьма экономно наделенным умственными способностями.

дениях. И уж во всяком случае основным геометрическим понятиям — линии, фигуре, телу — надо было дать точные определения, ничем не напоминающие определения типа «это — особь статья, а то — особь статья».

Стремление к строгим определениям характеризовало не только геометрию, но и математический анализ XIX в.

С помощью дифференциального и интегрального исчислений, созданных трудами Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лагранжа [18] и других великих математиков XVII и XVIII вв., удалось решить самые разнообразные задачи — от расчета траектории артиллерийского снаряда до предсказания движений планет и комет. Но основные понятия, с помощью которых достигались эти замечательные результаты, были определены крайне нестрого. Основа тогдашнего математического анализа — понятие бесконечно малой величины казалось чем-то стоящим на грани бытия и небытия, чем-то вроде нуля, но не совсем нуля. И математики XVIII в. были вынуждены ободрять своих сомневающихся учеников словами: «Работайте, и вера к вам придет».

Но ведь математика не религия, строить ее на вере нельзя. А самое главное — методы, дававшие столь замечательные результаты в руках великих мастеров, стали приводить к ошибкам и парадоксам, когда ими стали пользоваться менее талантливые ученики. Мастеров оберегала от ошибок их абсолютная математическая интуиция, то подсознательное чувство, которое часто приводит к правильному ответу скорее, чем длинные логические рассуждения. Ученики же такой интуицией не обладали, и конец XVIII в. ознаменовался неслыханным скандалом в математике — наплывом формул, стоивших меньше, чем бумага, на которой они были напечатаны, и сомнительных теорем, область приложимости которых была совершенно неясна.

И, подобно детям, ломающим красивую игрушку, чтобы посмотреть, как она устроена, математики XIX в. подвергли жестокой критике все применявшиеся до того понятия, стали перестраивать математику на базе строгих определений. Ссылки на наглядность отвергались, вместо нее требовали строжайшей логики. Но требованиям логики не удовлетворяли самые простые фразы из курса математического анализа, например такие, как:

«Рассмотрим область G, ограниченную замкнутой линией Γ».

Что такое замкнутая линия? Почему она является границей области? На сколько частей замкнутая линия разбивает плоскость и какую из этих частей рассматривают?

На все эти вопросы математики XVIII в. не давали ответа. Они просто рисовали овал и думали, то этим все сказано. А в XIX в. рисункам уже не верили. Для аналитиков вопрос «что такое линия?» тоже стал одним из самых жгучих.

Однако прошло много времени, прежде чем удалось дать на него исчерпывающий ответ.

Линия — след движущейся точки. Для того чтобы дать строгое определение линии, надо было исходить из тех наглядных образов, которые привели к созданию этого математического понятия: длинных и тонких нитей, лучей света, длинных и узких дорог. Во всех этих случаях длина настолько больше ширины, что шириной можно пренебречь. В результате математической идеализации мы и приходим к понятию линии, не имеющей ширины.

Первым попытался дать строгое определение того, что такое линия, Камилл Жордан [19]. Линией он называл траекторию движущейся точки. При этом точка должна была двигаться непрерывно, не делая скачков.

Более точно определение Жордана звучало следующим образом. Для того чтобы задать положение движущейся точки, надо задать ее координаты в каждый момент движения. Так как движение продолжается какой-то конечный промежуток времени, то, не теряя общности, можно считать, что этим промежутком является $[0, 1]$. Иными словами, точка начинает двигаться в некоторый момент времени, принимаемый за начало отсчета, и кончает движение по истечении некоторой единицы времени (одной секунды, минуты, года и т. д.). В каждый момент времени t в течение этого промежутка задаются координаты движущейся точки. Таким образом, координаты точки зависят от момента времени t, являются его функциями. Обозначим эти функции (для случая, когда движение точки происходит в одной плоскости) через $f(t)$ и $g(t)$: $x=f(t)$, $y=g(t)$. Условие, что точка движется непрерывно, означает, что функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны в каждой точке отрезка $[0, 1]$. Грубо говоря, при малом изменении t функции $f(t)$ и $g(t)$ должны мало изменяться.

Определение Жордана оказалось довольно удачным. Дуги всех линий, с которыми имели дело математики того времени, оказались кривыми в смысле Жордана, или, как говорят, *жордановыми кривыми*. Даже линии, составленные из дуг различных кривых, относятся к этому классу.

Теорема очевидна, доказательство — нет. Жордану удалось, используя введенное им понятие кривой, уточнить смысл той самой фразы из учебников математического анализа, о которой мы уже говорили: «Пусть замкнутая линия Г ограничивает область G». Замкнутая жорданова кривая — это кривая, которая при $t=1$ попадает в ту же точку, где она была при $t=0$. Если при этом различным моментам времени t_1 и t_2, лежащим между 0 и 1, соответствуют разные точки кривой, то эта кривая не пересекает саму себя.

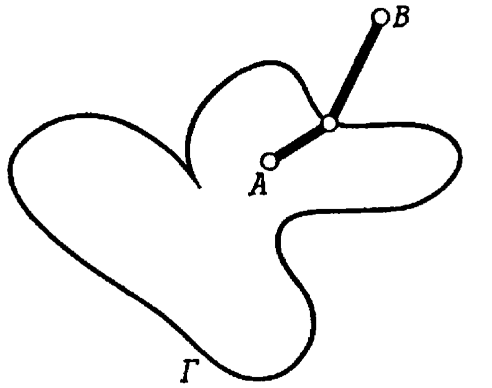


Рис. 21

Жордан доказал следующую теорему.

Замкнутая жорданова кривая Г, не имеющая точек самопересечения, разбивает всю плоскость на две части. Две точки, принадлежащие одной и той же части, можно соединить ломаной, не пересекающей кривую Г, а точки из разных частей нельзя соединить такой ломаной, любая соединяющая их ломаная пересекает кривую Г (рис. 21).

Эта теорема кажется совершенно очевидной. Однако ее доказательство потребовало очень тонких рассуждений. Даже в случае, когда линия Г является замкнутым многоугольником, доказательство остается очень сложным.

Две части, на которые замкнутая жорданова линия разбивает плоскость, называют внутренней и внешней областями, ограниченными этой линией. Таким образом, понятие области, ограниченной замкнутой линией, приобрело точный смысл.

Кривая проходит через все точки квадрата. Когда Жордан дал свое определение кривой, то сначала казалось, что цель достигнута, получено строгое определение понятия линии, не опирающееся на наглядность. Но вскоре оказалось, что это не так. Определение Жордана охватывало не только привычные для математиков линии, но и фигуры, которые никто бы линиями не назвал. Уж со всюду колючими линиями математики как-нибудь примирились бы. Но назвать линией квадрат, на это ни у кого не хватило бы духу. А оказалось, что и квадрат, и треугольник (не периметр треугольника, а сам треугольник со всеми его внутренними точками), и круг являются линиями в смысле Жордана. Доказал это итальянский математик Пеано [20].

Мы уже рассказывали, что Кантор установил взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата, то есть показал, что отрезок содержит ровно столько же точек, что и квадрат. Построенное им соответствие не было непрерывным. Когда точка двигалась по отрезку, соответствующая ей точка на квадрате не ползла подобно жуку, а прыгала как блоха. В самом деле, возьмем на отрезке точки

0,50000000... и 0,4999999990000000...

Эти точки довольно близки друг к другу. Но соответствующие им точки на квадрате далеки друг от друга. Ведь первой из них соответствует точка (0,50000... , 0,0000...), лежащая на нижней стороне квадрата, а второй — точка (0,4999000... , 0,9999000...), лежащая у самой верхней стороны квадрата. И если мы будем увеличивать число девяток у второй точки, приближая ее к первой, то соответствующие точки квадрата и не подумают приближаться друг к другу.

Таким образом, канторово отображение отрезка на квадрат хотя и было взаимно однозначным, но не было непрерывным. Оно не давало, таким образом, жордановой кривой. Пеано удалось построить другое отображение множества точек отрезка на множество точек квадрата, при котором близким точкам на отрезке соответствовали близкие точки квадрата. Иными словами, Пеано удалось построить кривую линию (в смысле Жордана), которая прошла через все точки квадрата!

Разумеется, мы не можем нарисовать кривую Пеано, разве что, подражая художнику-абстракционисту, нарисуем черный квадрат. Но ведь на этом квадрате все равно нельзя будет понять, где начинается кривая, где она кончается, как она обходит квадрат. Поэтому последуем примеру не художника-абстракциониста, а физика Перрена и будем приближенно изображать путь точки в виде ломаной. Чем меньше будут промежутки времени между отдельными «наблюдениями», тем точнее получившаяся ломаная изобразит кривую Пеано.

Сначала будем отмечать положение движущейся точки через каждые 1/4 с. Иными словами, отметим ее положение в начале движения, через 1/4 с после начала движения, через 1/2 с после начала движения, через 3/4 с и в конце движения. Мы получим 5 точек. Соединив их, получаем линию *ABCDE*, изображенную на рис. 22, *а*.

Разумеется, эта линия не проходит через все точки квадрата. Но мы уменьшим промежутки времени между отдельными наблюдениями и будем отмечать положение точки каждые 1/16 с. Линия станет более извилистой, увеличится число изломов, и она примет вид, изображенный

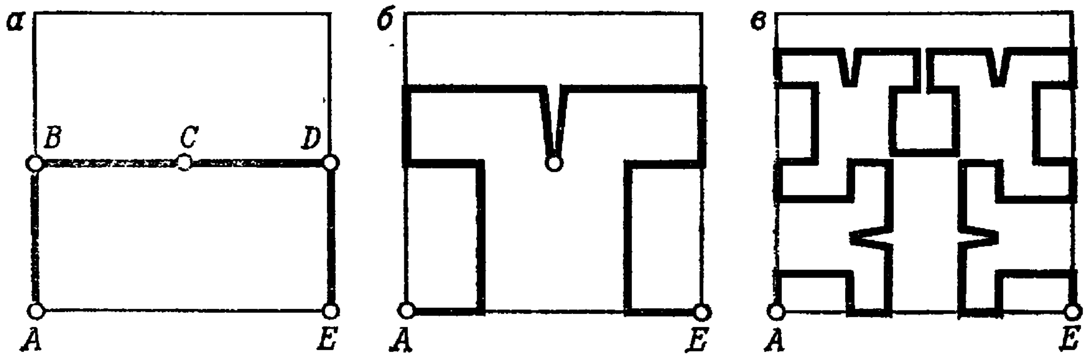


Рис. 22

на рис. 22, *б*. Если еще чаще отмечать положение движущейся точки, то получим линию, изображенную на рис. 22, *в*. Мы видим, что линия все плотнее и плотнее заполняет квадрат, все ближе и ближе подходит к каждой его точке. В пределе, если все время наблюдать за движущейся точкой, мы получим линию, проходящую через все без исключения точки квадрата.

Надо отметить, что, выиграв по сравнению с Кантором в том, что его линия оказалась непрерывной, Пеано потерял в другом. Его линия уже не задавала в з а и м н о о д н о з н а ч н о г о отображения отрезка на квадрат. Через некоторые точки квадрата она проходила по нескольку раз. Позже было доказано, что невозможно сохранить одновременно и непрерывность, и взаимную однозначность соответствия: не существует жордановой кривой, проходящей через все точки квадрата в точности по одному разу!

Все лежало в развалинах. Трудно передать словами впечатление, произведенное на математический мир результатом Пеано. Казалось, что все рухнуло, что самые основные математические определения потеряли всякий смысл, не было видно различия между линией и поверхностью, поверхностью и телом (результат о невозможности взаимно однозначного и непрерывного соответствия между отрезком и квадратом еще не был известен). Пуанкаре с горечью воскликнул: «Как могла интуиция до такой степени обмануть нас!»

Стало ясно, что жорданово определение кривой не безупречно. С одной стороны, оно слишком широко: под него подходит и кривая Пеано. А с другой стороны, оно слишком узко — даже окружность с намотанной на нее спиралью уже не является жордановой кривой.

Итак, снова встал вопрос: что же такое линия и чем она отличается от поверхности? Ответ на него был связан с общими исследованиями Кантора о геометрических фигурах.

Как делают статуи. Создав теорию множеств, Кантор перешел к вопросу о том, *что такое геометрическая фигура?* Самый общий ответ на этот вопрос гласил: геометрическая фигура — это любое множество точек пространства. Если это множество лежит на плоскости, то получается плоская геометрическая фигура. Но такой ответ был бы слишком общим — у «фигур» в этом смысле нет почти никаких достаточно интересных свойств.

Поэтому надо было в первую очередь ограничить совокупности изучаемых множеств, выделить из них те, которые ближе всего по своим свойствам к обычным геометрическим фигурам.

Чтобы выделить такой класс фигур, выясним, что общего имеют друг с другом обычные фигуры, такие, как квадрат, круг, отрезок прямой, астроида и т. д. Оказывается, все эти фигуры можно получить единообразным процессом.

Про многих знаменитых скульпторов рассказывают, что на вопрос, как удается делать столь замечательные статуи, следовал ответ: «Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее». В разных книгах это можно прочитать о Микеланджело, о Торвальдсене, о Родене.

Тем же самым способом можно получить любую ограниченную плоскую геометрическую фигуру: надо взять какой-нибудь квадрат, в котором она лежит, а потом отсечь все лишнее. Однако отсекать надо не сразу, а постепенно, на каждом шагу отбрасывая кусочек, имеющий форму круга. При этом сам круг выбрасывается, а его граница — окружность — остается в фигуре.

На первый взгляд кажется, что так можно получить лишь фигуры такого вида, как на рис. 23. Но все дело в том, что отбрасывают не один и не два круга, а бесконечное, точнее говоря, счетное множество кругов. Таким путем можно получить любую фигуру. Чтобы убедиться в этом,

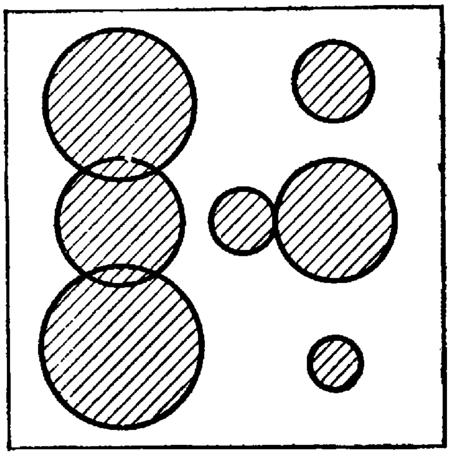


Рис. 23

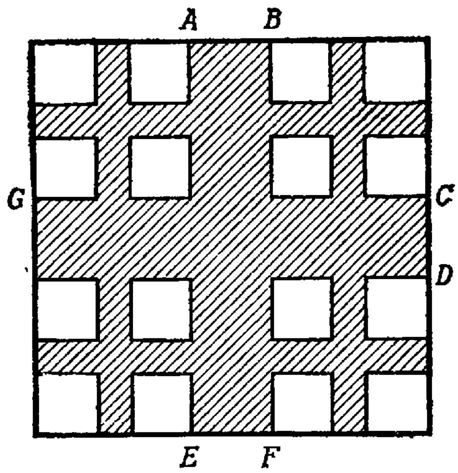


Рис. 24

достаточно принять во внимание, что множество кругов, у которых рациональны и радиус и обе координаты центра, счетное (это легко доказывается описанными во второй главе методами). А теперь, чтобы получить любую фигуру, достаточно взять содержащий ее квадрат («глыбу мрамора») и отбросить все круги указанного выше вида, которые не содержат ни одной точки нужной нам фигуры. Если же выбрасывать круги не из квадрата, а из всей плоскости, то описанным приемом можно получить и неограниченные фигуры.

С помощью описанного выше метода можно получить круги и квадраты, эллипсы и астроиды, любые правильные многоугольники и звезды. Но получить таким путем квадрат с выброшенной вершиной не удастся — при попытке вырезать эту вершину придется удалить и какую-то ее окрестность. В математике фигуры, получаемые из плоскости вырезанием счетного множества кругов (напомним, что при этом граница выбрасываемого круга остается нетронутой), называют *замкнутыми*.

Континуумы. Оказывается, что кроме обычных геометрических фигур с помощью выбрасывания счетного множества кругов (квадратов и т. д.) можно получать и другие множества, не слишком похожие на обычные фигуры, но все же обладающие многими интересными свойствами. Например, ковер Серпинского, о котором мы уже говорили, получается именно таким путем: из квадрата со стороной 1 выбрасывают один за другим маленькие квадратики, причем их стороны остаются.

Однако путем выбрасывания можно получить и «фигуры», не состоящие из одного куска. Например, если удалять «кресты» *, как на рис. 24, то получится в конце концов множество, не содержащее ни одного целого куска (как говорят, *вполне несвязное*). Поэтому мы введем ограничение, что после каждого выбрасывания должно оставаться множество, состоящее из одного куска. Тогда и после всех выбрасываний останется множество из одного куска (то есть, как говорят математики, *связное*). Кроме того, получающееся множество ограничено, то есть целиком лежит в некотором квадрате.

Итак, рассматриваемые множества удовлетворяют следующим условиям:

1) множество F получается из квадрата выбрасыванием счетного множества кругов с оставлением их границ, то есть замкнуто;

2) множество F состоит из одного куска, то есть связно.

Эти множества Кантор и назвал *континуумами* (напомним, что латинское слово continuum означает непрерывный). Континуумы и оказались наиболее общими множествами, свойства которых очень близки к свойствам обычных геометрических фигур.

Канторовы линии. Теперь мы уже готовы ответить на вопрос, что же такое плоская линия. Так как плоские линии должны быть геометрическими фигурами, то ясно, что искать их надо среди континуумов. Но континуумами являются и круг, и квадрат, а эти фигуры никак не назовешь линиями. Поэтому надо добавить еще какое-то условие, которое отмело бы такие фигуры.

Заметим, что и круг, и квадрат содержат «сплошные» куски плоскости. А линии сплошных кусков плоскости не содержат; какой бы маленький квадратик мы ни взяли, всегда на нем найдутся точки, не принадлежащие линии (рис. 25). Вот это и является нужным нам дополнительным условием: *плоской линией в смысле Кантора* называют лежащий на плоскости *континуум, не заполняющий ни одного сплошного куска плоскости* (то есть такой, что в каждом квадрате есть точки, не принадлежащие этой линии).

Например, отрезок, контур треугольника, окружность, четырехлепестковая роза — все это линии. Линией является и ковер Серпинского. Так как при его построении мы

* При этом вместе с каждым крестом удаляются его концевые промежутки, например промежутки AB, CD, EF, GH.

продырявили *все* квадраты, получавшиеся при делении, то ни одного целого куска плоскости он не содержит. Канторовой линией является и окружность вместе с намотанной на нее спиралью, и пилообразная линия на рис. 26 вместе с отрезком [0, 1] оси ординат. Вообще все фигуры, являющиеся линиями в наглядном, наивном понимании,

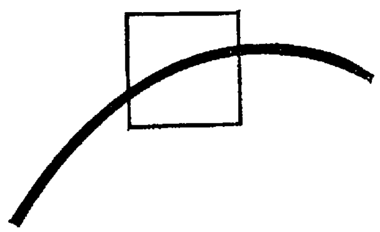


Рис. 25

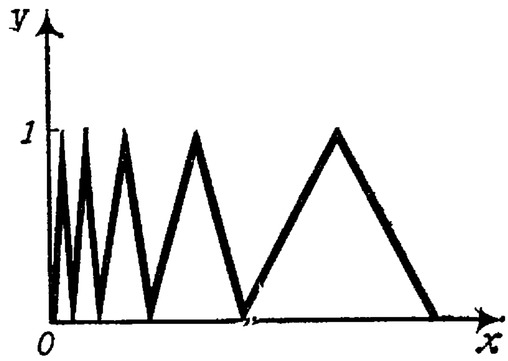


Рис. 26

являются линиями и в смысле Кантора. А фигуры, содержащие хоть один целый кусок плоскости, не относятся к числу канторовых линий.

Но и среди канторовых линий есть такие, что их свойства совершенно непохожи на свойства обычных линий. Сейчас мы расскажем о некоторых таких линиях.

Всегда ли площадь линии равна нулю? Конечно, после того как читатель познакомился с линиями, проходящими через все точки квадрата, он может ожидать чего угодно. Но все же, может ли линия иметь площадь? Ведь еще Евклид говорил, что линия — это длина без ширины. А там, где нет ширины, нет, казалось бы, и площади. Да и в определении канторовой линии сказано, что она не содержит ни одного целого куска плоскости. Откуда же в этом случае взяться площади? Но мы уже много раз видели, что применение бесконечных процессов приводит к совсем неожиданным результатам.

Прежде чем исследовать вопрос, надо договориться о точном смысле употребляемых слов. Что значат слова *«линия имеет нулевую площадь»* или *«линия имеет ненулевую площадь»?* Возьмем самую обычную линию — прямолинейный отрезок. Так как его ширина равна нулю, то отрезок можно поместить внутрь прямоугольника сколь угодно малой площади, нужно лишь выбрать ширину этого прямоугольника достаточно малой. Точно так же и окружность можно поместить внутрь многоугольника со сколь угодно малой площадью. Для этого достаточно вписать в нее правильный многоугольник с очень большим числом сторон и описать аналогичный многоугольник. Область, заключенная между этими двумя многоугольниками, будет иметь малую площадь (тем меньшую, чем больше сторон у наших многоугольников), а окружность целиком лежит в этой области (рис. 27).

Теперь уже ясно, что означают слова *линия имеет нулевую площадь*. Они значат, что, какое бы маленькое положительное число ε мы ни взяли, найдется многоугольная область, содержащая линию и такая, что площадь области меньше, чем ε. А если хоть для одного положительного ε такой области не удастся найти, тогда площадь линии не равна нулю.

Применим теперь это определение не к таким простым линиям, как отрезок или окружность, а к более сложным, например к ковру Серпинского. Простой подсчет показывает, что после n выбрасываний остается фигура, площадь которой равна $(8/9)^n$. Но 8/9 — правильная дробь, а при возведении такой дроби в степень с увеличением показателя результат уменьшается и стремится к нулю. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ после достаточно большого числа шагов получится многоугольная область, площадь которой меньше, чем ε. А эта область целиком накрывает ковер Серпинского. Выходит, площадь ковра Серпинского равна нулю.

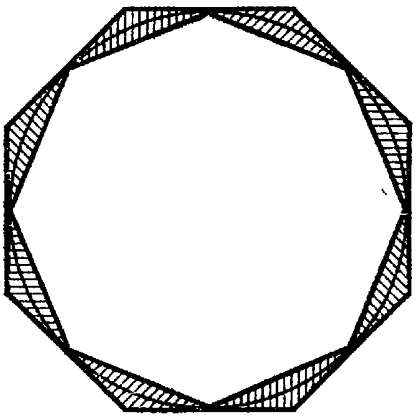


Рис. 27

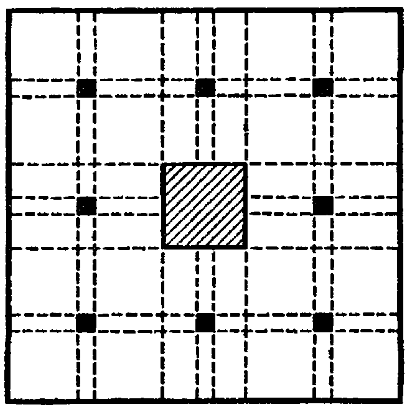


Рис. 28

Казалось бы, полный триумф определения Евклида. Даже у такой сложной линии, как ковер Серпинского, площадь равна нулю. Но праздновать победу преждевременно. Ведь никто не заставлял нас выбрасывать такие большие куски. На рис. 28 изображен более экономный способ

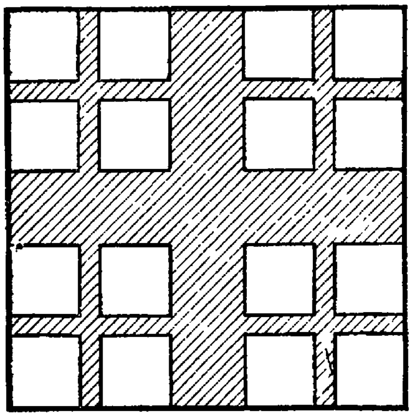


Рис. 29

выбрасывания квадратиков. Подбирая должным образом их размеры, можно добиться того, чтобы общая площадь выброшенных фигур не превышала 1/2. Но тогда на каждом шагу описанного процесса будет оставаться многоугольная область, площадь которой никак не меньше, чем 1/2. Отсюда легко следует, что остаток, получающийся после всех выбрасываний, не удастся покрыть многоугольной областью, если ее площадь окажется меньше, чем 1/2. Значит, о нем нельзя сказать, что его площадь равна нулю. А ведь этот остаток, как и ковер Серпинского, является кривой (в смысле Кантора) — при его построении мы дырявили каждый прямоугольник и ни одного целого прямоугольника не оставили.

Выходит, таким образом, что кривая в смысле Кантора может иметь ненулевую площадь!

Области без площади. Все же разобранный пример еще не слишком убедителен: полученная линия сплошь состоит из точек самопересечения и не ограничивает никакой области. Поэтому возникает вопрос: а может ли «хорошая» кривая, не имеющая точек самопересечения, то есть замкнутая жорданова кривая без самопересечений, иметь ненулевую площадь? Оказывается, может!

Чтобы построить такую кривую, изменим немного проводившееся построение. Сначала построим множество, в котором не только что целого куска плоскости, а и целого куска линии не найдешь, но площадь которого не равна нулю. Для этого надо выбрасывать не только центральные квадратики, а целые кресты, как это показано на рис. 29. При этом размеры удаляемых фигур подберем так, чтобы общая площадь их оказалась меньше половины площади всего квадрата. Тогда на долю остатка придется по крайней мере половина всей площади квадрата. Но при построении остатка мы выбрасывали целые кресты, безжалостно кромсая квадрат. Никакие две точки этого остатка нельзя соединить линией, даже линией в смысле Кантора; всякая связь между его точками отсутствует. Как говорят математики, остаток является вполне несвязным множеством. А площадь этого множества, не содержащего ни целого куска плоскости, ни дуги кривой, отлична от нуля; никакой многоугольной областью, площадь которой меньше 1/2, это множество не накроешь.

Теперь уже легко построить пример несамопересекающейся замкнутой кривой, имеющей ненулевую площадь. Для этого нужно соединить полученные точки точно так же, как мы проводили кривую через все точки квадрата. Из-за того, что на каждом шагу мы выбрасывали целые кресты, получающаяся линия не имеет самопересечений (этим она и отличается от кривой Пеано). Но так как она проходит через все точки множества, площадь которого по крайней мере равна 1/2, то и площадь полученной линии по крайней мере равна 1/2.

Теперь уже ничего не стоит построить область, не имеющую площади. Для этого надо соединить точки A и B полученной кривой какой угодно линией, например полуокружностью. Тогда полученная линия Г ограничивает какую-то область G. Чему же равна ее площадь? Ответ получится разный в зависимости от того, присоединим мы к этой области ее границу или нет — ведь сама граница имеет площадь, по крайней мере равную 1/2. Ясно, что обычной площади наша область не имеет. Такие области, не имеющие обычной площади, в математике называют *неквадрируемыми*.

А все-таки их можно измерить. Над тем, что такое площадь фигуры, математики задумались еще до открытия неквадрируемых областей. До этого на протяжении многих тысячелетий ученые пользовались понятиями длины, площади, объема, не подвергая их строгому критическому анализу. Рассказывают, что когда один французский генерал принес в Парижскую академию наук свое «решение» проблемы квадратуры круга, его спросили, а что именно он понимает под площадью круга. «Площади не определяют, их вычисляют!» — воскликнул бравый генерал. И такая точка зрения была распространена тогда даже среди математиков. Они считали, что площадь — это число, сопоставленное геометрической фигуре и обладающее очевидными свойствами (площадь целого равна сумме площадей частей, конгруэнтные фигуры имеют равные площади и т. д.). Ни на одну минуту они не сомневались в том, что любая плоская геометрическая фигура имеет площадь (быть может, равную нулю или бесконечности).

Но характерной чертой математики является то, что наряду с созданием новых методов решения практических задач она изучает и оттачивает применяемый ею инструментарий, для каждого возникающего понятия ищет наиболее широкую и естественную область его применимости, для каждой доказанной теоремы — наиболее общие условия, при которых она справедлива. И это не пустые занятия математических снобов, а необходимость. Только установив понятия и теоремы в наибольшей общности, освободив их от ненужных ограничений, связанных с той конкретной задачей, из которой они возникли, можно увидеть связи между далекими друг от друга областями науки, научиться применять созданные методы в ситуациях, не имеющих на первый взгляд ничего общего с первоначальными источниками этих методов.

Поэтому столь очевидные, казалось бы, понятия, как длина, площадь, объем (позднее все эти понятия стали называть одним словом — мера), были подвергнуты тщательнейшему анализу. Одна из первых работ по уточнению понятия меры принадлежала Жордану. В течение многих десятилетий он читал в Париже курс математического анализа, построенный на самых точных определениях, безупречных доказательствах и строжайшей логике. И, конечно, он не мог пользоваться в этом курсе расплывчатым понятием площади. Придуманное им определение площади можно сформулировать так: площадь фигуры — это число, которое лежит между множеством площадей многоугольников, содержащихся в этой фигуре, и множеством площадей многоугольников, содержащих ту же фигуру. Оказалось, что площадь по Жордану имеют те и только те плоские фигуры, граница которых имеет нулевую площадь. К сожалению, слишком много фигур не поддавалось измерению по Жордану; в частности, нельзя было измерить описанные выше неквадрируемые области.

За решение возникших проблем взялись молодые ученые, вдохновленные лекциями Жордана. Одно из первых определений, применимых к весьма широкому классу фигур, предложил в конце XIX в. Эмиль Борель [21]. Он заметил, что все возникавшие в науке фигуры на прямой, плоскости и в пространстве могли быть получены из простейших фигур — отрезков, квадратов и кубов с помощью двух основных операций: образования дополнения к множеству и объединения счетной совокупности множеств (в частности, как мы видели выше, таким путем получаются все замкнутые множества). Чередуя эти операции и продолжая такой процесс трансфинитным образом, можно получать на каждом шагу все более сложные множества, названные в честь Бореля борелевскими, или, иначе, B-множествами (отметим, что, применяя идею Зенона, можно получить каждое такое множество за конечный промежуток времени, удваивая на каждом шагу скорость применяемых операций).

Оказалось, что любому борелевскому множеству можно приписать меру исходя из следующих двух принципов:

а) *если множество А представимо в виде объединения счетной совокупности подмножеств, имеющих меру, причем никакие два из них не имеют общих точек, то мера всего множества равна сумме ряда, составленного из мер подмножеств;*

б) *мера дополнения к подмножеству, имеющему меру, получается путем вычитания меры этого подмножества из меры целого.*

Из принципов Бореля вытекало, в частности, что любое счетное множество имеет нулевую меру — ведь оно является объединением счетной совокупности точек, а мера каждой из этих точек равна нулю.

К сожалению, позднее выяснилось, что предложенный Борелем процесс измерения множеств обладал существенным недостатком. Дело в том, что одно и то же множество может быть разными способами составлено из простейших, а потому предстояло доказать, что все эти способы дадут одно и то же значение для меры данного множества. Такого доказательства Борель не смог получить.

Иначе подошел к проблеме измерения множеств начинавший в те годы свою научную деятельность Анри Лебег [22]. Уже первые работы Лебега разгневали математиков классического направления. Само название одной из них «О нелинейчатых развертывающихся поверхностях» казалось им столь же противоестественным, как, например, название «О газообразном льде» для физика или «О рыбообразных слонах» для биолога. Самый слабый студент знал, что любая поверхность, которую можно развернуть на плоскость (цилиндр, конус и т. д.), соткана из прямых линий, то есть может быть получена движением прямолинейной образующей. Но все дело было в том, что молодой автор по-иному понимал развертывающиеся поверхности, чем геометры-классики. Он считал такими не только поверхности, получаемые аккуратным изгибанием листа бумаги, но и поверхности, которые получатся, если этот лист бумаги скомкать (поясняя свою работу одному из друзей, Лебег сказал: «Представь себе скомканный носовой платок»). Он доказал, что кусок плоскости можно так «скомкать», чтобы после этого на нем не оказалось ни одного прямолинейного отрезка. Разумеется, получившаяся поверхность вся состояла из складок и изломов. Поэтому ее и пропустили геометры, классифицировавшие развертывающиеся поверхности: они занимались лишь гладким случаем.

От изучения произвольных развертывающихся поверхностей Лебег перешел к общему вопросу, как определить площадь поверхности, если эта поверхность не является гладкой, если к ней нигде нельзя провести касательную плоскость. Для скомканной развертывающейся поверхности задача решается просто: надо расправить ее и подсчитать площадь получившегося куска плоскости. Но этот ответ нельзя было получить по формулам, которые давала классическая математика: они годились лишь для гладких поверхностей.

Не удалась бы и попытка измерять площади поверхностей, вписывая в них многогранники и переходя к пределу при уменьшении размеров всех граней. Немецкий математик Г. Шварц [23] показал, что таким путем нельзя найти площадь самого обычного цилиндра — вписанный в него многогранник может оказаться настолько складчатым, что площадь его поверхности куда больше площади цилиндра. Лебегу удалось придумать определение площади поверхности, которое не требовало проведения касательных плоскостей, но в то же время обходило все трудности, связанные с «гармошкой Шварца». Решая эту частную задачу, Лебег пришел к общим идеям о том, что такое мера множества, как измерять длины, площади и объемы самых причудливых фигур.

Взяв от Бореля идею суммирования рядов, он видоизменил определение меры, предложенное Жорданом, разрешив использовать кроме многоугольников и фигуры, получаемые из них с помощью объединения счетных совокупностей. Именно, назовем фигуру *ε-покрываемой по Лебегу*, если существует счетная система многоугольников, объединение которых покрывает эту фигуру, причем сумма ряда, составленного из их площадей, меньше, чем ε. Далее, назовем множество X *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно представить в виде многоугольника A_ε, к которому присоединено одно ε-покрываемое множество и от которого отброшено другое ε-покрываемое множество. Если меру многоугольника A обозначить через $|A|$, то ясно, что мера множества X должна быть заключена между числами $|A_\varepsilon|-\varepsilon$ и $|A_\varepsilon|+\varepsilon$. Оказалось, что для измеримых по Лебегу множеств всегда существует одно и только одно число, обладающее этим свойством, какое бы $\varepsilon>0$ мы ни выбрали и какой приближающий многоугольник A_ε ни взяли. Это-то число и называют *мерой Лебега* множества X.

После создания понятия меры Лебега оказалось, что для нее нет никаких осложнений, причем по Лебегу можно измерить все встретившиеся до того в науке множества. Позднее были построены примеры неизмеримых множеств, но они используют так называемую *аксиому выбора*, о которой будет идти речь ниже. Построенные с ее помощью примеры не являются конструктивными. Поэтому можно сказать, что Лебег решил проблему измерения всех множеств, которые могут встретиться в практической работе математиков.

С помощью введенного им понятия меры Лебег сумел найти интегралы всех разрывных функций, которые можно было построить известными в то время методами (интеграл Лебега).

Триумф идей Лебега привел к тому, что даже один из вождей математиков-классиков Гастон Дарбу [24] изменил свое мнение и, выступая в 1908 г. на Математическом конгрессе в Риме, говорил о пламенном и пытливом духе математики XX в., о науке, ведущей свои изыскания в абсолютно новой области с неизведанными перспективами. Он подчеркнул, что наука XX в. не боится атаковать основы построений, которые столь долго казались непоколебимыми.

Позднее идеи, приведшие к созданию меры и интеграла Лебега, позволили А. Н. Колмогорову построить аксиоматику теории вероятностей, а Норберту Винеру — определить понятия меры и интеграла для пространств, состоящих из функций. Всюду, куда проникали идеи меры, использовались конструкции и теоремы, восходящие к Лебегу. После упомянутых выше работ А. Н. Колмогорова эти идеи стали широко использоваться в теории вероятностей и ее приложениях, в частности в статистической физике. Применялись они и при изучении динамических систем. А уж о теоретической математике не приходится и говорить — без интеграла Лебега многие ее важнейшие результаты невозможно даже и сформулировать. Недаром в гимне «Лузитании» — группы молодых советских математиков, посвятивших себя в 20-е годы изучению новейшей теории функций, пелось: «Наш бог — Лебег, Кумир наш — интеграл». Но о «Лузитании» названной в честь общего учителя этих математиков, основателя русской школы теории функций действительного переменного Николая Николаевича Лузина, надо сказать подробнее — ее роль в изучении математических проблем, связанных с бесконечными множествами, трудно переоценить.

«Лузитания». После описанных выше работ, приведших к созданию новой теории функций, интерес к этой теории необычайно возрос во всем мире. В Геттингене Д. Гильберт и его ученики применяли новое понятие интеграла для изучения круга вопросов, связанных с так называемыми интегральными уравнениями, ряд интереснейших теорем доказали итальянские математики.

В XIX в. общепризнанным центром русской науки был Петербург, где в стенах Петербургской академии наук свято хранили традиции Эйлера и Д. Бернулли, где трудились замечательные русские математики М. В. Остроградский [25] и П. Л. Чебышев [26], А. А. Марков [27] и А. М. Ляпунов [28], В. А. Стеклов [29] и А. Н. Коркин [30]. Всех их объединяла искренняя любовь к исследованиям в области математического анализа и его приложений, к решению трудных конкретных проблем математики. А вот новомодные исследования по теории множеств и теории разрывных функций никакого отклика в их сердцах не находили. Слишком далекими казались им эти исследования от тех задач, которыми они занимались (хотя впоследствии полученные на этих новомодных путях результаты оказались полезными как раз во многих традиционных областях математики).

Иначе сложилось дело в древней столице России. Здесь в стенах прославленного Московского университета уже в начале XX в. стали читаться курсы по теории множеств, а в 1907 г. московский ученый И. И. Жегалкин [31] защитил магистерскую диссертацию по трансфинитным числам. Внимание этому кругу вопросов уделил и один из крупнейших московских математиков того времени Д. Ф. Егоров [32], хотя основным делом его жизни были исследования по дифференциальной геометрии. Ему удалось доказать теорему о сходимости рядов, которая стала одним из важнейших орудий во всех исследованиях по теории функций. Но самое главное было в том, что он привлек к этим исследованиям своих молодых учеников и в том числе начинавшего в те годы свою научную карьеру Н. Н. Лузина.

В это время многие ученые пытались понять, как связаны «дикие» функции, открытые Дирихле и Риманом, Борелем и Лебегом, с функциями, которыми занимались предшествующие поколения ученых. Лузин доказал, что путем «исправления» разрывной функции на множестве сколь угодно малой меры из нее можно получить непрерывную функцию. А непрерывную функцию можно с любой степенью точности приблизить многочленом. Тем самым наиболее запутанно устроенные функции в некотором смысле слова сводились к наиболее изученным — многочленам.

Одновременно с этим Лузин изучал проблемы, связанные с тригонометрическими рядами,— вопросом, который традиционно интересовал специалистов по теории функций действительного переменного еще со времен самых первых работ Кантора. Здесь он также доказал ряд интереснейших теорем, выявивших тонкие механизмы, управляющие сходимостью таких рядов. Эти и многие другие доказанные Лузиным теоремы легли в основу представленной им на соискание ученой степени магистра чистой математики диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд». Научные достоинства этой диссертации были настолько высоки, что, несмотря на сопротивление некоторых математиков классического направления, ему была присуждена сразу ученая степень доктора чистой математики — случай, весьма редкий в практике русских университетов.

Научный энтузиазм Лузина, новизна его идей, незаурядный педагогический талант привлекали к нему многих наиболее талантливых молодых математиков, большинство из которых примкнуло к нему еще на студенческой скамье. Многие из них еще до окончания университета получили крупные научные результаты. Многие годы ученые пытались доказать, что если тригонометрический ряд сходится к нулю почти всюду (то есть всюду, кроме множества нулевой меры), то все его коэффициенты равны нулю. Ко всеобщему изумлению студент Дмитрий Евгеньевич Меньшов [33] показал, что это не так. Построенный им пример был весьма замысловат, как и многие примеры, которые с таким блеском строил и сам Николай Николаевич, и его ученики. С работы Меньшова начался ряд исследований по открытой им проблематике. Сильные результаты получила в этой области Нина Карловна Бари [34], которая позднее написала прекрасную книгу о тригонометрических рядах. Рядом вопросов теории таких рядов занимался в студенческие годы Андрей Николаевич Колмогоров. Ему принадлежит удивительный пример интегрируемой по Лебегу функции, для которой соответствующий тригонометрический ряд всюду расходится.

Другое направление работ учеников Лузина было связано с исследованием строения борелевских множеств. Чтобы доказать, что любое такое множество либо счетно, либо содержит подмножество мощности континуума, Павел Сергеевич Александров придумал еще на студенческой скамье остроумнейшую конструкцию, с помощью которой можно было получить любое такое множество (в его честь ее называют теперь А-операцией). Через некоторое время другой молодой ученик Лузина, Михаил Яковлевич Суслин [35], доказал, что с помощью А-операций можно получать и некоторые множества, не являющиеся борелевскими. Возник вопрос об описании этого класса множеств, называемых теперь *суслинскими*. К сожалению, безвременная смерть от сыпного тифа в 1919 г. прервала исследования Суслина. Решением возникших проблем занялся сам Лузин, к которому потом примкнули Петр Сергеевич Новиков [36] и Людмила Всеволодовна Келдыш [37]. Полученные ими результаты стали основой, на которой выросло новое направление математики — *дескриптивная теория множеств*. Дальнейшие исследования в этом направлении затронули самую сущность основ теории множеств, показали границы теоретико-множественного мышления. Многие из проблем, решенных в настоящее время, были поставлены в работах Лузина, причем получаемые результаты подтверждают его глубокие предвидения.

Большое внимание уделял Лузин приложению своих идей к вопросам классического анализа, в частности, к теории функций комплексного переменного.

В результате деятельности Лузина и его учеников Москва стала общепризнанным центром научных исследований в области теории функций действительного переменного. Этому не смогли помешать ни первая мировая и гражданская войны, ни интервенция, ни блокада. В Польше идеи Лузина развивал Вацлав Серпинский [38], который в годы первой мировой войны жил в Москве и общался с Лузиным.

Можно было бы назвать многих и многих учеников Лузина, большинство из которых являются славой и гордостью советской науки. Многие из них стали впоследствии действительными членами и членами-корреспондентами АН СССР, математиками с мировой известностью. Так возникла одна из самых замечательных научных школ, которая, как уже говорилось выше, получила по имени своего основателя и главы название «Лузитания». Это было сообщество молодых математиков, связанных друг с другом горячей любовью и живым бескорыстным интересом к математической науке.

Следует отметить, что из-за чрезмерной поглощенности проблемами теории множеств и функций действительного переменного лузитане иногда недооценивали важность классических направлений в математике. Но впоследствии научные интересы многих из них сдвинулись в области, лежавшие гораздо ближе к практическим задачам. Например, как уже упоминалось, А. Н. Колмогоров применил идеи лебеговой меры в теории вероятностей, а потом стал заниматься практическими приложениями этой теории. Даже такой видный представитель прикладной математики, как Михаил Алексеевич Лаврентьев [39], в молодые годы занимался тончайшими исследованиями по теории множеств.

Большие ирригационные работы. Проследить в рамках этой книги за всеми областями математики, которыми стали заниматься бывшие лузитане, совершенно невозможно — для этого надо было бы написать книгу по истории советской математики. Мы расскажем лишь о том, как идеи теории бесконечных множеств были применены в *топологии* — науке о свойствах фигур, остающихся неизменными при преобразованиях самого общего вида. Надо только, чтобы эти преобразования были взаимно однозначными и чтобы не было ни разрывов, ни склеек. Первоначально топологи изучали лишь фигуры, которые можно разбить на конечное число простейших фигур, называемых *симплексами* (точек, отрезков, треугольников, тетраэдров). Но потом они применили свои идеи к множествам гораздо более сложного строения. И тут выяснилось, что геометрическая интуиция, верно служившая им раньше, дает неверные ответы на многие вопросы.

Несколько удивительных примеров кривых и областей на плоскости построил голландский математик Брауэр [40]. Мы расскажем сейчас об одном из самых удивительных среди этих примеров. Нарисуем карту какой-нибудь страны и сопредельных с ней стран. Почти каждая точка границы этой страны принадлежит двум и только двум странам: данной и одной из сопредельных. Поэтому в каждой точке границы стоят два пограничника: один из этой страны, а другой — из сопредельной. Есть на карте несколько точек, где сходятся три страны (рис. 30). В таких точках стоят уже три пограничника. Но таких мест на карте лишь конечное число. И кажется совершенно очевидным, что такие точки не могут заполнить всю границу страны, то есть что не может быть трех областей (трех стран), имеющих одну и ту же общую границу. Иными словами, кажется очевидным, что три пограничника из трех разных стран не могут стоять в каждой точке границы.

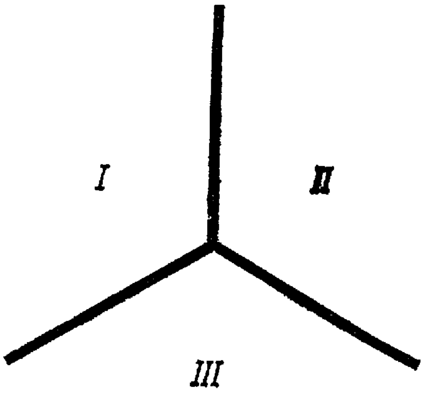


Рис. 30

А Брауэр построил такие три области. Чтобы понять этот пример, представим себе, что в океане есть остров, на котором находятся два озера с пресной водой. Только в одном озере вода холодная, а в другом — теплая. Теперь проведем следующие ирригационные работы. В течение первых суток проведем каналы от океана и от обоих озер так, чтобы каждый из этих каналов был «слепым» (то есть только заливом соответствующего водоема), чтобы эти каналы нигде не соприкасались друг с другом и чтобы в результате расстояние каждой точки суши до океанских вод, а также до вод обоих озер было меньше 1 километра (рис. 31).

В следующую половину суток продолжим эти каналы так, что они по-прежнему остаются «слепыми» и не соприкасаются между собой, а расстояние от каждой точки суши до любого из трех каналов становится меньше, чем $^1/_2$ километра. При этом, конечно, каналы должны стать более узкими, чем ранее. В следующую четверть суток каналы продолжаются дальше так, чтобы каждая точка суши отстояла от любого канала меньше, чем на $^1/_4$ километра, и т. д. С каждым шагом каналы становятся все извилистее и извилистее, все у́же и у́же. Через двое суток такой работы весь остров будет пронизан этими тремя каналами и превратится в канторову линию. Стоя в любой точке этой линии, можно зачерпнуть, по желанию, соленой, теплой пресной или холодной пресной воды. При этом воды не смешиваются друг с другом. Если бы вместо океана и озер мы взяли три страны, то получили бы ту удивительную картину, о которой говорили вначале,— в каждой точке границы можно поставить трех пограничников — по одному от каждой страны.

«Недиссертабельная» тема. У канторова определения

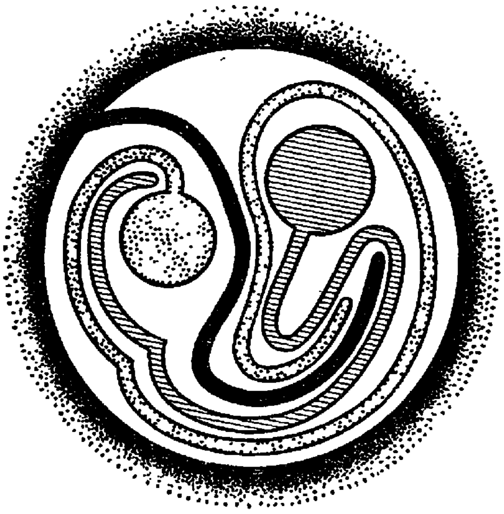


Рис. 31

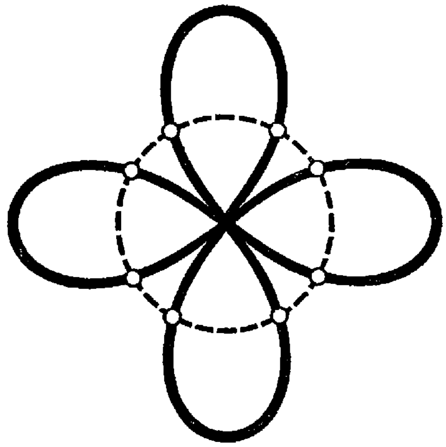


Рис. 32

линии был один недостаток — оно совсем не годилось для пространственных кривых. А уж что такое поверхность в пространстве, определить таким образом было весьма сложно, так как и кривые, и поверхности являются континуумами без внутренних точек. Эту задачу — выяснить, чем отличаются в пространстве кривые от поверхностей,— поставил летом 1921 г. Д. Ф. Егоров перед П. С. Урысоном [41] (как видно, он больше думал о математической значительности проблемы, чем, как теперь иногда говорят, о «диссертабельности» темы — задача-то была одной из труднейших!).

Вскоре Урысон понял, что задача Егорова лишь частный случай гораздо более общей проблемы: что такое размерность геометрической фигуры, то есть сколько измерений она имеет, почему надо говорить, что отрезок или окружность имеют размерность 1, квадрат — размерность 2, а куб или шар — размерность 3? Вот как вспоминает об этом периоде жизни П. С. Урысона его ближайший друг П. С. Александров: «...Все лето 1921 года прошло в напряженных попытках найти «настоящее» определение (размерности), причем П. С. переходил от одного варианта к другому, постоянно строя примеры, показывавшие, почему тот или иной вариант надо отбросить. Это были два месяца действительно всепоглощающих размышлений. Наконец, в одно утро в конце августа П. С. проснулся с готовым, окончательным и всем теперь хорошо известным индуктивным определением размерности... В то же утро во время купания в Клязьме П. С. Урысон рассказал мне свое определение размерности и тут же, во время этого разговора, затянувшегося на несколько часов, набросал план всего построения теории размерности с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами, за которые неизвестно было, как и взяться, и которые затем доказывались одна за другой в течение последующих месяцев. Никогда потом я не был участником или свидетелем математического разговора, который состоял бы из такого сплошного потока новых мыслей, как в то августовское утро. Вся набросанная тогда программа полностью осуществилась в течение зимы 1921/22 года; к весне 1922 года вся теория размерности была готова...».

Основная идея определения размерности по Урысону заключается в следующем. Чтобы отделить часть линии от всей остальной линии обычно достаточно двух или нескольких точек (на рис. 32 часть четырехлепестковой розы, содержащая центр, отделяется от остальной розы восемью точками). Но часть поверхности уже невозможно отделить от всей поверхности несколькими точками — для этого обязательно потребуется целая линия: сколько бы точек ни взять на поверхности, их всегда можно обойти. Точно так же часть трехмерного пространства отделяется от всего остального пространства поверхностью.

Все это надо было еще уточнить: на некоторых линиях для отделения части требуется бесконечно много точек, но эти точки не образуют в совокупности никакой линии. Урысону удалось точно сформулировать все нужные определения. В каком-то смысле его определения напоминали определения Евклида (оконечность линии — точки, оконечность поверхности — линии). Но это сходство примерно такое же, как между греческой триерой и современным океанским лайнером.

Уточним эти определения. Назовем *границей* точечного множества A в объемлющем его точечном множестве X совокупность всех точек на X, сколь угодно близко к которым есть как точки, принадлежащие A, так и точки из X, которые A не принадлежат. Например, для квадрата на плоскости граница совпадает с его обычной границей, а для того же квадрата в пространстве — с ним самим. Множество A называется *открытым* в X, если оно не содержит ни одной точки своей границы в X. Примером такого множества может служить круг на плоскости, если отбросить граничную окружность.

Множество X имеет *размерность нуль*, если любая его точка содержится в сколь угодно малом множестве, граница которого в X пуста. Примерами таких множеств могут служить любое конечное множество точек, точки с рациональными координатами на прямой, канторово множество и т. д.

Далее, множество X имеет *размерность один*, если оно не является нуль-мерным, но любая его точка может быть заключена в сколь угодно малое открытое в X множество, граница которого в X нуль-мерна.

Оказалось, что не только все обычные линии (окружности, отрезки прямых, эллипсы и т. д.) имеют размерность единица по Урысону, но и все канторовы линии имеют ту же размерность. Поэтому можно было определить понятие не только плоской, но и пространственной линии:

Линией называется континуум размерности единица.

А теперь было уже ясно, как определять поверхности, трехмерные тела и вообще множества любой размерности. Поскольку Урысон дает сначала определение размерности 0, затем с помощью этого определения — определение размерности 1, затем точно так же — определение размерности 2 и т. д., введенное Урысоном общее определение размерности называют *индуктивным*.

Работу надо не рецензировать, а печатать! Урысон доказал много интереснейших теорем, связанных с введенным им понятием размерности. Но одну самую главную теорему ему никак не удавалось доказать: не получалось доказательство того, что самый обычный куб имеет размерность 3. После длительных усилий он нашел замечательный выход из положения, придумав новое определение размерности. Мы не будем детально излагать это определение, а поясним его на простейших фигурах.

Если взять отрезок или окружность, то их можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая точка принадлежит не более чем двум кусочкам (рис. 33). При этом надо брать кусочки вместе с их границами (то есть конечными точками). Квадрат уже так разбить нельзя. На первый взгляд кажется, что при разбиении квадрата на куски всегда будут точки, принадлежащие четырем частям (рис. 34, *а*). Но если уложить части так, как кладут кирпичи на стройке, то удается добиться, чтобы каждая точка принадлежала не более чем трем различным частям (рис. 34, *б*). Точно так же у куба есть разбиение на маленькие параллелепипеды, при котором каждая точка принадлежит не более чем четырем параллелепипедам.

Именно это свойство и принял Урысон за новое определение размерности. Фигура называется имеющей размерность n, если ее можно разбить на сколь угодно малые

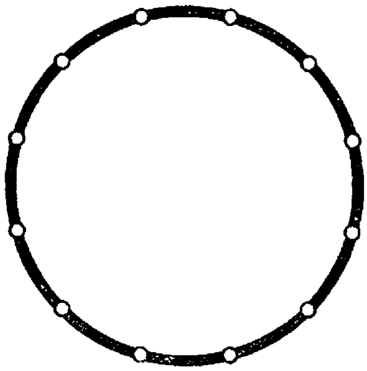


Рис. 33

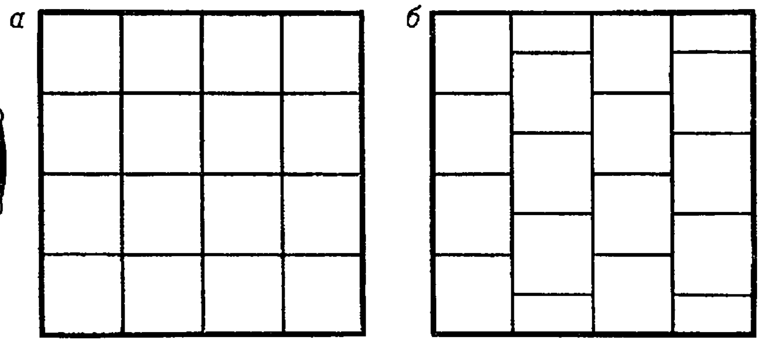


Рис. 34

замкнутые части так, чтобы ни одна точка не принадлежала $n+2$ различным частям, но при любом достаточно мелком разбиении найдутся точки, принадлежащие $n+1$ различным частям.

Используя это определение размерности, Урысон доказал, что размерность квадрата равна 2, куба — 3 и т. д. А потом он показал, что это определение равносильно первоначально данному.

Построенная Урысоном теория размерности произвела глубокое впечатление на весь математический мир. Об этом ярко говорит следующий эпизод. Во время заграничной командировки Урысон сделал доклад о своих результатах в Геттингене. До прихода нацистов к власти Геттингенский университет был одним из основных математических центров. После доклада руководитель геттингенской математической школы знаменитый Давид Гильберт сказал, что эти результаты надо опубликовать в журнале «Mathematische Annalen» — одном из главных математических журналов того времени. Через несколько месяцев Урысон снова делал доклад в Геттингене и Гильберт спросил у своего помощника по журналу, напечатана ли уже работа Урысона. Тот ответил, что работа рецензируется. «Но я же ясно сказал, что ее надо не рецензировать, а печатать!» — воскликнул Гильберт. После столь недвусмысленного заявления статья была немедленно напечатана.

В течение трех лет продолжалась не имеющая равных по глубине и напряженности научная деятельность Урысона (за это время он опубликовал несколько десятков научных работ). Трагический случай оборвал его жизнь — он утонул 17 августа 1924 г., купаясь во время шторма в Бискайском заливе. За день до смерти он закончил очередную научную работу.

После смерти П. С. Урысона остались многочисленные черновики и наброски неопубликованных результатов. Его ближайший друг (и соавтор по многим работам) Павел Сергеевич Александров, отложив на некоторое время свои исследования, подготовил эти работы к печати, сделав тем самым и эти результаты Урысона достоянием всех математиков. В настоящее время теория размерности стала важной главой математики.

Глава 4

В ПОИСКАХ АБСОЛЮТА

Новые осложнения. Успехи, достигнутые в исследовании функций и линий при помощи теории множеств, сделали ее полноправным членом семьи математических наук. Это признание было зафиксировано на состоявшемся в 1897 г. Первом Международном конгрессе математиков, проходившем в швейцарском городе Цюрихе. В докладах виднейших специалистов по математическому анализу А. Гурвица [1] и Ж. Адамара [2] были показаны самые разнообразные применения множеств, вскрыта их связь с общей теорией так называемых аналитических функций. На проведенном через три года Втором Международном математическом конгрессе Давид Гильберт поставил среди 23 важнейших нерешенных проблем математики и вопросы, связанные с теорией множеств. Высоко оценил работы Кантора в своем выступлении на том же конгрессе Анри Пуанкаре. Говоря о роли интуиции и логики в математике, он сказал, что в теории множеств математика обрела совершенно прочный и надежный фундамент и теперь в математике остаются только натуральные числа и конечные или бесконечные системы таких чисел. По его мнению, математика стала полностью арифметизированной и в ней, наконец, достигнута абсолютная строгость.

При такой оценке теории множеств, данной ведущими учеными того времени, неудивительно, что на ее создателя Георга Кантора дождем посыпались академические награды — он был избран почетным членом Лондонского королевского общества, членом-корреспондентом Института науки, литературы и искусства в Венеции, почетным доктором математики университета в Христиании (ныне Осло) и т. д.

Но английская пословица гласит, что «каждая семья имеет свой скелет в шкафу» (то есть свои тайны, до поры до времени неизвестные окружающим). Таким скелетом, вываливающимся из шкафа в самые неподходящие моменты, была на протяжении многих тысячелетий развития математики противоречивость самого понятия бесконечности. С тех пор, как эта противоречивость была осознана Зеноном, делались неоднократные попытки снова привести все в норму, причем каждый раз шкаф пытались сделать все прочнее и надежнее. После первой их них, сделанной Евдоксом и Евклидом, прошло два тысячелетия, прежде чем Вейерштрассу и Кантору пришлось предпринимать вторую попытку. И, как мы видели, самые лучшие математики той эпохи считали, что достигнут полный успех. Однако «скелет» оказался на этот раз весьма беспокойным и вновь вывалился из шкафа уже через два с небольшим десятилетия. Как писал по этому поводу Давид Гильберт, «произошло нечто, аналогичное тому, что случилось при развитии исчисления бесконечно малых. На радостях по поводу новых богатых результатов стали явным образом недостаточно критически относиться к законности умозаключений; поэтому уже при простом образовании понятий и применении умозаключений, постепенно ставших обычными, выявились противоречия, сначала единичные, а потом все более серьезные... На учение Кантора с различных сторон были произведены бурные нападки. Контрдвижение было столь стремительно, что общеупотребительнейшие и плодотворнейшие понятия математики, простейшие и важнейшие ее умозаключения оказались под угрозой и применение их запрещалось».

Первым сигналом о неблагополучии в самих основах теории множеств оказался парадокс, открытый впервые самим Кантором в 1895 г. и опубликованный два года спустя итальянским математиком Бурали-Форти [3]. Речь шла о множестве, составленном из всех трансфинитных чисел. По своему определению оно было не хуже, чем любое иное множество, так как являлось многим мыслимым как единое. Но у этого множества оказался существеннейший недостаток. Оно само вполне упорядочено и потому должно выражаться каким-то трансфинитным числом Ω. Но тогда Ω должно было оказаться больше всех трансфинитных чисел, а потому и больше самого себя, что, очевидно, невозможно.

Как выяснилось позднее, столь же противоречиво и множество, составленное из всех множеств. Ведь этому множеству должны принадлежать все его подмножества, что невозможно, так как множество всех подмножеств любого множества имеет бо́льшую мощность, чем само это множество (см. с. 79).

Еще один удивительный пример противоречиво определенного множества опубликовал в 1903 г. Бертран Рассел [4]. Как правило, множества не являются своими собственными элементами (например, множество всех натуральных чисел не является натуральным числом, множество всех треугольников не является треугольником и т. д.).

Однако бывают и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов. Скажем, множество абстрактных понятий само является абстрактным понятием (не правда ли?). Так как такие множества рассматриваются редко, назовем их *экстраординарными*, а все остальные множества — *ординарными*.

Образуем теперь множество A, элементами которого являются в с е ординарные множества. На первый взгляд кажется, что в этом определении нет ничего плохого; не видно, почему фраза «множество всех ординарных множеств» хуже, чем фраза «множество всех треугольников». Но на самом деле здесь возникает серьезное логическое противоречие. Попробуем выяснить, каким же является само полученное множество A — ординарным или экстраординарным. Если оно ординарно, то оно входит в себя как один из элементов (мы ведь собрали вместе все ординарные множества). Но тогда, по определению, оно является экстраординарным. Если же множество A экстраординарно, то по определению экстраординарности оно должно быть своим собственным элементом, а среди элементов множества A есть лишь ординарные множества, экстраординарных множеств мы не брали!

Получилось логическое противоречие — множество A не может быть ни ординарным, ни экстраординарным. Впрочем, такие логические противоречия возникают и в гораздо более простых случаях. Например, одному солдату приказали брить тех и только тех солдат его взвода, которые не бреются сами. Возник вопрос, как ему поступать с самим собой. Если он будет брить себя, то его следует отнести к числу солдат, которые бреются сами, а брить таких солдат он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то его придется отнести к числу солдат, которые сами не бреются, а тогда по приказу он должен себя брить.

Известны и другие примеры, когда множество, на первый взгляд вполне определенное, оказывается определенным очень плохо, а лучше сказать — совсем неопределенным. Например, пусть множество A состоит из всех рациональных чисел, которые можно определить при помощи не более чем двухсот русских слов (включая сюда и слова «нуль», «один», «два» и т. д.).

Так как множество всех русских слов конечно (для простоты будем считать, что берутся лишь слова из словаря Ожегова и их грамматические формы), то и множество таких чисел конечно. Пусть это будут числа $r_1, r_2, \ldots, r_N$. Определим теперь рациональное число r следующим образом:

$$r=0,\ n_1,\ n_2 \ldots,\ n_N,$$

где n_i (i-й десятичный знак числа r) равен 1, если i-й десятичный знак числа r_i отличен от единицы, в противном же случае $n_i=2$.

Число r не совпадает с r_1, так как отличается от него первым десятичным знаком, не совпадает с r_2, так как отличается от него вторым десятичным знаком, и т. д. Поэтому число r не входит в множество A. Между тем это число определено нами при помощи не более чем двухсот слов.

С этим парадоксом тесно связан следующий.

Каково то *наименьшее целое число, которое нельзя определить при помощи фразы, имеющей менее ста русских слов*?

Такое число существует, поскольку число слов в русском языке конечно, а значит, есть числа, которые нельзя определить фразой, имеющей менее ста слов. Но тогда среди этих чисел есть наименьшее.

С другой стороны, такого числа не существует, ибо оно определяется фразой из менее чем ста слов, напечатанной выше курсивом, а по смыслу этой фразы оно не может быть определено подобным образом.

А вот более сложный пример конечного множества, относительно которого оказывается невозможным сказать, содержит ли оно данный элемент. Разделим все прилагательные в русском языке на два класса. К первому классу отнесем все прилагательные, для которых выражающее их слово само обладает свойством, описываемым этим прилагательным, а ко второму — все остальные прилагательные. Например, прилагательное «русское» отнесем к первому классу, так как слово «русское» принадлежит к словарному запасу русского языка. К тому же классу отнесем и прилагательное «пятисложное», так как в слове «пятисложное» именно пять слогов. А прилагательное «немецкое» отнесем во второй класс, так как слово «немецкое» входит в словарный состав русского, а не немецкого языка. Во второй класс попадет и слово «односложное», так как в этом слове не один, а пять слогов. Туда же попадет и слово «синее», так как это слово само цветом не обладает, а только выражает некоторый цвет.

Казалось бы, все в полном порядке и каждое прилагательное нашло свое место. Но, для того чтобы отличить полученные два класса друг от друга, введем еще два прилагательных. Назовем все прилагательные первого класса *автологичными* (от греческих слов *авто* — сам и *логос* — смысл, закон), а прилагательные второго класса *гетерологичными* (*гетерос* — другой). Слова *автологичный* и *гетерологичный* являются прилагательными, и их надо разместить по нашим классам. Со словом *автологичный* трудностей не возникает — его надо отправить в первый класс, и тогда оно будет обладать именно тем свойством, которое само выражает,— ведь в первом классе собраны именно автологичные слова. А вот слово *гетерологичный* доставляет те же трудности, что и взводный парикмахер.

Это слово нельзя отнести в класс автологичных слов, так как тогда слово *гетерологичный* должно было бы само обладать выражаемым им свойством, а оно заключается в том, что этому слову надлежит быть не в первом, а во втором классе. Нельзя отнести слово *гетерологичный* и во второй класс, так как тогда оно должно было бы не обладать выражаемым им свойством гетерологичности, а потому быть автологичным, в то время как второй класс не содержит автологичных слов.

Эти и аналогичные им парадоксы восходят к древнему парадоксу «Лжец», который приписывают греческому философу Евбулиду из Милета. Он состоит в том, что человек, говорящий «я лгу», не может быть ни говорящим правду, ни лжецом: если, произнося эти слова, он говорит правду, то он лжет, а если он, произнося эти слова, лжет, то он говорит правду.

Конечно, проще всего было бы сказать, что в теории множеств не рассматриваются столь причудливые множества. Однако, если не дать точного определения, какие же множества следует рассматривать, а какие отбросить, можно оказаться в положении человека, который, беседуя с длинноносым собеседником, сказал, «говоря о носах, я не имею в виду столь несуразно длинные». Это далеко не лучший способ избежать щекотливой темы.

Одна задача почему-то не выходит. Открытие парадоксов теории множеств произвело глубочайшее впечатление на математиков. Если, например, Пуанкаре до этого положительно относился к теории Кантора, то после опубликования теоретико-множественных парадоксов он стал насмешливо отзываться о ней, заявляя, что актуальной бесконечности не существует. Фреге, получив от Рассела письмо, содержавшее его парадокс, оказался вынужден сделать к выходившей уже из печати книге замечание, по сути дела зачеркивающее все ее содержание. Особенно тяжело отразилось открытие парадоксов на самом Канторе — он погрузился в размышления о том, как их устранить и, не достигнув в этом успеха, тяжело заболел и прекратил научную деятельность за много лет до смерти. Гильберт восклицал: «Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности,— образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?»

Но на фоне триумфальных успехов математического анализа, основанных на теоретико-множественных концепциях, у большинства математиков выявленные парадоксы теории Кантора не вызывали вначале никакой тревоги, кроме разве что некоторого беспокойства за самые окраинные области математики.

Значительно большей неприятностью оказалось возникновение в теории множеств проблем, не получавших разрешения на протяжении длительного времени. Многие из них были связаны с казавшейся уже навсегда преодоленной пропастью между дискретным и непрерывным, арифметикой и геометрией. Из двух главных видов мощностей, изученных Кантором,— счетной и континуальной — первая шла от арифметики, от понятия натурального числа, а вторая — от понятия континуума, от непрерывности. И, естественно, возник вопрос о взаимоотношении этих мощностей.

Наиболее естественным было предположение, что мощность континуума непосредственно следует за счетной, то есть что не может быть несчетного множества, мощность которого меньше континуальной. Если бы эта гипотеза оказалась верной, мощность континуума заняла бы свое место и на шкале трансфинитных чисел, она выражалась бы первым трансфинитным числом, идущим за всеми трансфинитными числами счетного типа. Мощность всех счетных трансфинитных чисел получила название *алеф первый*, и вопрос состоял в том, равна ли этому алефу мощность континуума. Этот вопрос получил название *проблемы* или *гипотезы континуума*, и над ним долгие годы думал Георг Кантор. Много раз ему казалось, что проблема решена, однако все попытки в конце концов оказались безуспешными.

Не большего успеха добились и другие ученые, пытавшиеся доказать или опровергнуть гипотезу континуума, и она по праву занимала первое место в списке проблем Гильберта. В течение долгих лет думал о ней Н. Н. Лузин, но и от него решение ускользало, как мираж в пустыне.

Однажды к Лузину привели пятнадцатилетнего мальчика Льва Шнирельмана [5], обладавшего исключительными математическими способностями. Чтобы проверить способности юного математика, Н. Н. Лузин предложил ему тридцать труднейших задач. Решения 29 задач он знал, а одной была... проблема континуума. Но, увы, через неделю молодой математик пришел к Лузину и грустно сказал: «Одна задача почему-то не выходит».

Отчаявшись в решении этой проблемы, Лузин говорил своим ближайшим ученикам, что не знает, почему континуум должен обязательно совпадать с алефом первым. «Кто знает,— грустно шутил он,— может быть континуум вообще окажется алефом семнадцатым».

Позднее обнаружились другие проблемы, которые никак не удавалось решить в рамках обычной теории множеств. Среди них были и различные обобщения гипотезы континуума, а также различные ее видоизменения, были и иные предположения, которые также не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

Непонятная аксиома. Неудача, постигавшая всех ученых, думавших над проблемой континуума, привела к тому, что возник вопрос, а можно ли вообще вполне упорядочить множество точек отрезка, есть ли у континуума вообще место на шкале трансфинитных чисел. Кантор с 1883 г. был убежден в том, что ответ на этот вопрос положителен. По его мнению, любое множество, а не только континуум можно было вполне упорядочить. Однако и здесь ему никак не удавалось найти подходы к проблеме.

Неожиданно простое и короткое решение опубликовал в 1904 г. Цермело [6], которому удалось доказать возможность полного упорядочивания любого множества. Однако не все математики согласились с ним. И дело было не в том, что Цермело допустил где-то ошибку в рассуждениях. Он рассуждал совершенно логично и даже подчеркнул, что в ходе доказательства было использовано одно утверждение, которым математики широко пользовались и до того, хотя и не высказывали в явной форме. Это утверждение, названное впоследствии *аксиомой выбора* или *аксиомой Цермело*, заключается в следующем.

Представьте себе, что перед вами лежат несколько кучек яблок. Ясно, что можно выбрать по одному яблоку из каждой кучки и сложить их в новую кучку. Казалось бы, то же самое можно сделать и в случае, когда каждая кучка содержит бесконечно много яблок, а самих кучек тоже бесконечно много. В этом и состоит аксиома выбора: *Если дано бесконечное множество бесконечных множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу, не указывая заранее закона выбора.*

Вот в этих-то последних словах все дело — аксиома выбора приводит к совершенно неконструктивным доказательствам: удается, например, доказать, что не может быть, чтобы множество нельзя было вполне упорядочить, но никакого конкретного способа упорядочения из этого доказательства не извлекается. Долгие годы математики пользовались аксиомой выбора, считая ее совершенно очевидной. Но когда над ней стали глубже задумываться, она стала казаться все более и более загадочной. Многие из теорем, доказанных с ее помощью, совершенно противоречили наглядности. Поэтому Бертран Рассел так высказался о ней. «Сначала она кажется очевидной; но чем больше вдумываешься в нее, тем более странными кажутся выводы из этой аксиомы: под конец же перестаешь понимать, что же она означает».

А Лузин признавался: «Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело. Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!»

Здесь поневоле вспоминаются слова Мефистофеля из «Фауста» Гете:

Понять ее пытаться — труд напрасный,
Глупец и умный с толку будет сбит
Противоречий массою ужасной.

Правда, к противоречиям эта аксиома не приводила, но непонятных следствий из нее можно было получить сколько угодно.

Из одного яблока — два. Расскажем об одном из самых удивительных следствий аксиомы выбора. Вам, вероятно, приходилось наблюдать, как работает на эстраде ловкий фокусник. Вот он показал зрителям пустой мешочек, потом опустил туда шарик, а вынул... два; опустив два шарика, он вынимает четыре, опустив четыре, вынимает восемь. Конечно, все понимают, что здесь нет никаких чудес, а только, как говорится, ловкость рук. Но в теории множеств такие чудеса бывают.

Возьмем самое обычное яблоко и разрежем его любым образом на четыре части. Кажется ясным, что если взять только две из этих частей, то из них нельзя составить целое яблоко (точно так же, как, съев половину апельсина, нельзя составить из оставшихся долек целый апельсин).

Однако математикам удалось так разбить шар на четыре равные части, что из двух частей можно составить целый шар того же радиуса, ничего к ним не прибавив, а только двигая их, как твердые тела. Из двух других частей можно составить второй точно такой же шар. Таким образом, из одного шара получилось два равных ему шара.

Разумеется, это утверждение имеет чисто теоретическое значение, и надеяться сделать с его помощью из одного яблока два, а потом из двух — четыре и т. д. было бы по меньшей мере наивно. Ведь это противоречило бы закону сохранения материи. Но математика изучает не непосредственно материальный мир, а лишь его математические модели. Поэтому если получаются результаты, противоречащие физической интуиции, то ответственность за это несет не математическая наука, а неудачный выбор модели.

Поэтому наш странный результат, как и некоторые другие парадоксальные выводы из аксиомы выбора, показывает лишь, что к ней надо относиться с известной осторожностью. Некоторые математики стараются четко отделять утверждения, при выводе которых была использована эта аксиома, от остальных. Но, как это ни печально, некоторые фундаментальные утверждения математического анализа нельзя доказать без ссылки на эту злополучную аксиому.

Квинтет демонов. Одной из причин, по которой виднейшие математики отказались поверить в возможность полного упорядочивания континуума, было именно отсутствие какой-либо обозримой конструкции для такого упорядочивания. В связи с этим возникло оживленное обсуждение вопроса, что же значит в математике слово «существует». Означает ли это выражение, что соответствующий математический объект допускает определенную конструкцию или можно рассматривать и множества, существующие лишь в силу аксиомы выбора? Какой смысл имеет понятие множества всех подмножеств континуума, если мы не можем описать конструктивно большую часть этих подмножеств? После некоторого «инкубационного периода» болезнь вышла наружу и в 1905 г. известнейшие французские математики (Адамар, Борель, Бэр [7], Лебег) опубликовали свою переписку о том, что такое бесконечность и какие бесконечные множества следует считать существующими. Этими же вопросами усиленно занимались Гильберт и молодой голландский математик Брауэр.

Каждый из споривших давал свой ответ на возникшие вопросы, не соглашаясь с мнением других. Споры шли весьма оживленно, поскольку, по словам Гильберта, с давних пор никакой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном: бесконечное действовало на разум столь побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно понятие не нуждалось, по мнению Гильберта, так сильно в разъяснении, как бесконечность.

Спор между математиками становился временами очень острым — ведь спорили сами боги математического Олимпа. Чтобы дать читателю представление о точках зрения разных ученых, приведем яркую цитату из книги Н. Н.

Лузина «Современное состояние теории функций действительного переменного», где он использовал введенный когда-то Максвеллом образ «демона», который открывает и закрывает перед молекулами отверстия и этим путем отделяет быстрые молекулы от медленных, нагревая газ в одной части сосуда и охлаждая его в другой. Лузин писал: «Если анализировать взгляды творцов современной теории функций, легко подметить, что каждый из них в процессе своей работы исходит из определенной концепции возможного и допустимого, за пределами которого кончается область математики и начинается область, лежащая, по выражению Бореля, вне математики... Если, следуя примеру Максвелла, приписать область возможного и исполнимого того или иного автора соответствующему воображаемому существу, то получится следующая схема:

1. «Демон» Брауэра. Его область есть область целого * конечного и притом ограниченного путем указания верхнего конечного предела. За этой областью все лежит «вне математики».

2. «Демон» Бэра. Его область есть просто область целого конечного без указания верхней конечной границы. Бесконечное — это лишь façon de parler ** и находится «вне математики».

3. «Демон» Бореля. Его область есть область счетной бесконечности. Всякое несчетное множество — «вне математики».

4. «Демон» Лебега. Его область есть область мощности континуума: всякая операция, требующая континуум простых шагов, доступна этому «демону»...

5. «Демон» Цермело. Его поле операций — всякие мощности; в частности, всякое множество «демон» Цермело может сделать вполне упорядоченным».

Разница в силе «демонов» Бореля и Лебега видна из следующего примера. Пусть надо узнать, выполняется ли для всех элементов множества X неравенство $x \leqslant a$. Если множество X счетно, то с решением проблемы справится «демон» Бореля, так как придется рассмотреть вопрос о выполнении счетного множества неравенств $x_k \leqslant a$, а это ему по силам. Если же X несчетно, то «демон» Бореля не сумеет ответить на поставленный вопрос, а для «де-

* То есть натурального.
** Оборот речи.

мона» Лебега задача окажется доступной — ведь он может выполнить и континуум операций.

Точка зрения самого Лузина по дискутируемым проблемам не была однозначной. Чаще всего он стоял на позициях Бореля, указывая, что «понятие несчетной бесконечности является чисто отрицательным понятием, не имеющим никакой объективной реальности; это понятие, вызванное лишь человеческой способностью создавать доказательства «от противного», не соответствует никакой достижимой реальности...». Однако иногда он склонялся больше к точке зрения Бэра, утверждая, что мы не имеем достаточно ясной концепции актуальной бесконечности, хотя это понятие и может быть определено в терминах абстрактной логики. Польскому же математику Куратовскому [8] он писал: «Несмотря ни на что, я не могу рассматривать как данное множество целых положительных чисел, потому что самая идея актуальной бесконечности мне кажется мало естественной, чтобы рассматривать ее в себе». И далее: «Фундаментальная проблема состоит в том, чтобы выяснить, является ли последовательность целых положительных чисел вполне объективной. Кажется, что она почти объективна и что имеются следы несомненной субъективности, такой, что нельзя говорить о последовательности целых положительных чисел всегда, во всех случаях, в одном и том же смысле». Он считал, однако, что еще преждевременно ставить жгучую проблему о единственности последовательности целых положительных чисел и говорить о конечных числах, недостижимых, если отправляться от 1.

Прямой противоположностью взглядам Лузина на сущность математических проблем является точка зрения Николя Бурбаки [9]. Он утверждает существование всего непротиворечивого и потому стоит на позициях Цермело, допуская любые мощности, признавая без ограничений аксиому выбора и все ее следствия, включая парадокс о разбиении сферы и утверждение о полной упорядочиваемости континуума. Вопрос же, приложима ли такая математика к познанию реального мира, его, кажется, совсем не интересует.

Всегда допускал работу с множествами произвольно высокой мощности и П. С. Александров. Например, он обобщил понятие размерности на очень широкий класс пространств, не удовлетворяющих никаким условиям счетности, развил в таких пространствах геометрию и т. д.

Таким образом, «демон» Цермело позволяет, с одной стороны, получать чрезвычайно красивые результаты, а с другой — ведет к утверждениям, наглядный смысл которых невозможно понять.

Выбор «демона» из описанного выше квинтета осложняется парадоксом, который заключается в том, что все «неприятности», возникающие для множеств сколь угодно высокой мощности, можно смоделировать уже для счетных множеств. Получается, что за осложнения в математике несет ответственность не применение множеств слишком высокой мощности, а сама идея актуальной бесконечности.

Изгнание бесконечности. Смелую и чрезвычайно глубокую попытку справиться с трудностями теории бесконечных множеств предпринял Давид Гильберт. Расставаться с достижениями этой теории он никак не хотел, заявляя, что никто не выгонит математиков из рая, который создал для них Георг Кантор. В своей работе «О бесконечном» Гильберт отметил, что, хотя бесконечно малые и бесконечно большие величины были удалены из математического анализа, бесконечное все же пробралось в него в виде бесконечных последовательностей, с помощью которых определяют действительные числа, а затем в виде понятия системы действительных чисел, воспринимаемой как готовая и законченная совокупность.

Вейерштрасс сводил понятия о бесконечно малых и бесконечно больших к неравенствам, связывающим конечные величины. Подобно этому Гильберт хотел изгнать из математики бесконечные множества. Он считал, что в тех случаях, когда они встречаются в математических рассуждениях, их следует понимать как оборот речи, позволяющий коротко говорить о сложных свойствах конечных множеств. По его мнению, бесконечного нет в природе и потому оно недопустимо как основа разумного мышления. В этом Гильберт усматривал замечательную гармонию между бытием и мышлением. Оперирование с бесконечным могло, по его мнению, стать надежным лишь через конечное.

Эту точку зрения называют *финитарной*. Для строгого ее проведения Гильберт дал четко ограниченный список допустимых символов. А для того чтобы помешать проникновению в математику каких-либо представлений о бесконечном, связанных с наглядностью, с использованием интуиции, он разработал специальную теорию формальных доказательств. В этой теории символы, выражающие логические утверждения, преобразуются по точно сформулированным правилам, подобно тому как в обычной алгебре преобразуются алгебраические выражения.

Первой целью нового исчисления было объявлено формальное доказательство непротиворечивости арифметики натуральных чисел. Более двух десятилетий Гильберт и его ученики неустанно искали пути для решения этой задачи. Хотя они добились многих успехов, окончательный успех никак не приходил.

В 1931 г. появилась статья Курта Гёделя [10], которая прозвучала как гром с ясного неба. Тончайшим образом усовершенствовав и формализовав аргументы, восходившие по сути дела к древнему парадоксу «Лжец», он доказал удивительный результат: в любой формальной системе, содержащей арифметику натуральных чисел, можно сформулировать утверждение, которое в этой системе нельзя ни доказать, ни опровергнуть. В то же время если принять существование всего бесконечного множества натуральных чисел, то это утверждение должно быть либо истинным, либо ложным, а потому «демон» Бореля, способный сделать счетное множество проверок, смог бы узнать, какой из этих двух случаев имеет место.

Открытие Гёделя было одним из крупнейших достижений логики за двухтысячелетний период ее существования — оно вскрыло пропасть между истинным и доказуемым. Правда, однажды Гёделю довелось услышать на одной из конференций по логике доклад, в котором утверждалось, что со времен Аристотеля никаких достижений в этой науке не было.

Мы не будем углубляться в круг вопросов, связанных с открытием Гёделя, и отошлем читателя к прекрасной книге Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое», вышедшей в 1979 г. в издательстве «Советское радио».

Хотя после работы Гёделя стало ясно, что намеченная Гильбертом программа невыполнима, его усилия не пропали даром — в ходе исследований возникла новая ветвь математики, касавшаяся теории доказательств и получившая название *метаматематики*. Это привело к невиданному углублению идей и развитию методов математической логики, что оказалось потом полезным при разработке алгоритмических языков для быстродействующих вычислительных машин.

Аксиоматизация бесконечности. Иной путь преодоления трудностей теории бесконечных множеств выбрали математики, начавшие строить для нее систему аксиом. Одна из этих систем была предложена в 1908 г. Цермело и усовершенствована потом А. Френкелем. В аксиоматике Цермело — Френкеля описываются свойства отношения принадлежности $x \in y$, с помощью которого определяются отношения включения $x \subset y$ для множеств и понятие равенства множеств. Формулируются аксиомы, утверждающие, что два множества, содержащие одни и те же элементы, равны, а равные множества содержатся в одних и тех же множествах. Далее идут аксиомы, кодифицирующие правила составления множеств — образование пары множеств и объединения любой совокупности множеств. Кроме того, вводится аксиома о существовании множества, составленного из всех подмножеств данного множества. Наконец, к той же группе аксиом относится правило, позволяющее выделять из данного множества его подмножество, зная некоторые свойства его элементов. Эта аксиома отсекает парадоксальные множества, предложенные Кантором, Бурали-Форти и Расселом,— все они задавались свойствами своих элементов, но не были подмножествами какого-то «законного» множества.

Из указанных выше аксиом можно получить существование пустого множества, а также из каждого множества x получить новое множество $\{x\}$, единственным элементом которого является x. В систему аксиом Цермело — Френкеля входит, разумеется, аксиома выбора. Кроме того, в этой системе содержится аксиома о том, что образ множества при некотором отображении является множеством. Наконец, в этой системе есть аксиома бесконечности, которая по сути дела утверждает, что существует бесконечное множество натуральных чисел (хотя в ее формулировку это понятие и не входит).

Для любой системы аксиом критическими являются два вопроса: нельзя ли вывести из нее два противоречащих друг другу утверждения и можно ли с ее помощью доказать или опровергнуть любое утверждение, формулируемое в относящихся к ней терминах? Сторонники системы аксиом Цермело — Френкеля усматривают доказательство ее непротиворечивости в том, что до сих пор из нее не удалось вывести противоречивых утверждений (что, впрочем, не гарантирует того же в дальнейшем). В качестве же проверки силы этой системы аксиом был поставлен вопрос о возможности доказать или опровергнуть на ее основе континуум-гипотезу Кантора. Однако и в этом направлении исследования привели к совершенно удивительным результатам.

Началось с того, что в 1939 г. тот же Курт Гёдель доказал невозможность опровержения гипотезы континуума. Присоединив к системе аксиом теории множеств утверждение Кантора, он получил непротиворечивую систему аксиом (разумеется, эта непротиворечивость имела относительный характер при условии, что все остальные аксиомы этой системы не противоречили друг другу).

Но уже давно Лузин предвидел, что может возникнуть парадоксальная ситуация, когда аксиомам теории множеств не будут противоречить ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание. В 1963 г. Поль Коэн [11] доказал, что дело обстоит именно так. Ему удалось доказать, что из системы аксиом Цермело — Френкеля нельзя вывести континуум-гипотезу. Кроме того, оказалось, что аксиома выбора не зависит от остальных аксиом Цермело — Френкеля подобно тому, как аксиома о параллельных не может быть ни доказана, ни опровергнута на основе остальных аксиом геометрии. При этом выяснилось, что к системе аксиом, полученной из системы Цермело — Френкеля заменой аксиомы выбора на ее отрицание, можно без противоречия присоединить и утверждение о невозможности полной упорядоченности континуума. Почти одновременно с Коэном близкие (и даже более сильные) результаты получил чешский математик П. Вопенка.

Положение в математике, создавшееся после работ Геделя, Коэна и Вопенки, отчасти напоминает ситуацию, сложившуюся в геометрии после работ Н. И. Лобачевского и Я. Больяи [12]. Но евклидова и неевклидова геометрии были разными математическими моделями реального мира, и выбор между ними касался физики, а не математики — основы математики не были затронуты этими открытиями. Теперь же дело идет именно об этих основах — ведь оказалось, что математик может по своему произволу решать, какая теория множеств ему больше нравится — та, в которой верны аксиома выбора и гипотеза континуума, или та, в которой аксиома выбора отвергается, а континуум нельзя даже вполне упорядочить. Ему предоставляются и иные возможности, например принять аксиому выбора и отвергнуть гипотезу континуума, хотя в этом случае он и обязан считать, что континуум имеет свое место на шкале трансфинитов, но где оно находится, неизвестно.

А если принять во внимание, что теория множеств претендует на роль основы всей математической науки, то получается, что существует не одна математика, а много различных наук, носящих это имя, и выбор между ними — дело исследователя. Разумеется, каждая из математик дает свою математическую модель реального мира, но различие между ними слишком глубоко и затрагивает самые фундаментальные вопросы теории познания. Можно полагать, что если бы Гильберт дожил до работ Коэна, он взял бы назад свои гордые слова: «Математика есть наука, в которой отсутствует гипотеза. Для ее обоснования я не нуждаюсь ни, как Кронекер, в господе-боге, ни, как Пуанкаре, в предположении об особой, построенной на принципе математической индукции, способности разума, ни, как Брауэр, в первоначальной интуиции, ни, наконец, как Рассел и Уайтхед [13], в аксиомах бесконечности, редукции и полноты, которые являются подлинными гипотезами содержательного характера и, сверх того, вовсе неправдоподобными».

Теперешнему математику ближе точка зрения, высказанная известным американским математиком и логиком Куайном [14]:

«С 1901 года появилось большое число теорий множеств, но ни одна из них не имела бесспорного преимущества перед другими. Даже вопрос о том, свободны ли они от собственных противоречий, является спорным в рамках такого рассмотрения, поскольку мы не можем больше доверять здравому смыслу при установлении правдоподобия тех или иных предложений. Теория множеств дискредитирована парадоксами, и в качестве основания математики она оказывается гораздо менее надежной, чем ее надстройка.

Таким образом, теорию множеств, очевидно, не следует рассматривать как основание математики, надеясь на то, что она избавит нас от опасений за прочность классической математики. При разработке всевозможных систем мы пытаемся лишь найти схему, которая воспроизводила бы при соответствующей надстройке принятые законы классической математики. На данном этапе мы рассматриваем теорию множеств как удобный краткий словарь математических терминов, используемый для формулирования общей системы аксиом классической математики».

Приведем еще мнение по этому вопросу академика А. Н. Колмогорова:

«Выяснение вопроса о том, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно абстрагирование от процесса их образования, еще нельзя считать законченным».

Проигранное пари. Нам осталось рассказать об одной попытке вывести теорию множеств, а с нею и всю математическую науку из затянувшегося состояния кризиса. Ее предпринял в 1907 г. Брауэр, который в значительной степени опирался на мнения, неоднократно высказывавшиеся Кронекером и Пуанкаре. По мнению Брауэра и его последователей, начиная с XVII столетия в математическом анализе и геометрии совершенно игнорировался особый характер понятия бесконечности. Поэтому они считали, что слывшие строгими методы теории действительных чисел и математического анализа, введенные в математику учеными XIX в., не только не достигали поставленных перед ними целей, но привели к созданию разработанной системы, основанной на совершенно ошибочной тенденции обращаться с бесконечностью с помощью средств, выработанных для конечных совокупностей. Тем самым отвергалась в целом вся концепция математики, шедшая от Коши, Вейерштрасса и Кантора.

Брауэр и его школа полагали, что эта концепция действительного числа и функции лишь маскирует опасности, таящиеся в понятии бесконечности, изобилует порочными кругами в рассуждениях и претендует на чрезмерную общность, что неизбежно приводит к противоречиям. Тем самым полностью отвергался прогресс в деле укрепления основ классической математики, достигнутый в XIX в., а канторовская теория множеств рассматривалась как «любопытный патологический казус» в истории математики, от которого грядущие поколения, вероятно, придут в ужас. Особенно интересно во всем этом то, что сам Брауэр имел значительные достижения в области теоретико-множественной математики.

Чтобы поставить математику на правильный, по их мнению, путь, надо было опираться на интуицию — отсюда идет и название этого направления в науке — *интуиционизм*. Интуиционисты отказывались рассматривать континуум как множество, состоящее из точек, поскольку считали понятие континуума более первичным, чем понятие точки. Они говорили, что континуум — это среда свободного становления точек, а не множество точек.

Придирчивой критике интуиционисты подвергли самую логику, которой пользовались все математики XIX в., да и предшествующих столетий. В частности, они категорически отвергли один из основных законов аристотелевой логики, а именно *закон исключенного третьего*, который состоит в том, что любое высказывание является либо истинным, либо ложным. По мнению интуиционистов, этот закон был выведен из наблюдений над конечными совокупностями предметов и имеет место лишь для утверждений, касающихся таких совокупностей. Например, чтобы убедиться в истинности высказывания: «Среди людей, проживавших на земном шаре 1 января 1983 г., не было двухсотлетних», достаточно проверить возраст каждого человека, жившего в этот день. Но такой метод проверки не годится для выяснения свойств элементов бесконечных множеств — эти элементы не построишь в ряд и не устроишь поголовную проверку документов.

Таким образом, из арсенала интуиционистов выпало столь сильное средство доказательства, как доказательство от противного. Они отвергали «чистые доказательства существования» и требовали каждый раз предъявления конкретного примера объекта, обладающего данным свойством. Иными словами, в качестве доказательства существования чего-либо они принимали лишь описание конструкции соответствующего объекта. Германн Вейль, примкнувший к движению интуиционистов, сравнивал конкретные утверждения с сокровищами, а теоремы существования — с бумагами, содержащими указания, где надо искать сокровища. Доведение теоремы существования до конструкции завершало поиск сокровища.

Иными словами, интуиционисты требовали от утверждений вида «существуют четные числа» переходить к утверждениям «число 2 — четное».

В одном из докладов об интуиционизме Брауэр привел в качестве примера утверждения, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть, следующее: «В десятичном разложении числа π идут десять цифр 9 подряд». В те времена было известно лишь 707 десятичных знаков для π (да и то большая часть из них оказалась неверной). Сейчас с помощью ЭВМ найдено неизмеримо больше десятичных знаков для π, так что среди них уже есть, быть может, идущие подряд 10 девяток. Но если заменить число 10 на 10^{1000}, то можно быть уверенным, что задача вычисления необходимого для проверки нашей гипотезы количества десятичных знаков окажется неразрешимой для любых машин, которые когда-либо будут построены. А так как теоретически решить проблему тоже невозможно, то утверждение о наличии в десятичном разложении числа π 10^{1000} идущих подряд девяток заведомо непроверяемо. Правда, один из математиков, присутствовавших на докладе Брауэра, сказал, что хотя мы и не знаем, верно это утверждение или нет, но господь-бог знает. «Я не имею прямой связи с богом»,— сухо возразил Брауэр.

Вся математика получила в руках интуиционистов иной вид. Например, в их анализе нет разрывных функций, а в их арифметике из равенства нулю произведения еще не следует обращение в нуль хотя бы одного из множителей. Вообще, почти каждое утверждение классической математики приходилось заменять весьма непривычно звучащим интуиционистским аналогом, а от многого надо было отказаться. «Я не считаю неприкосновенными все теоремы из обычных учебников»,— заявил интуиционист Сколем.

Призыв к столь коренным преобразованиям нашел признание лишь у небольшой (хотя и весьма влиятельной) группы ученых. Яростным противником брауэровских реформ был Гильберт. Он говорил: «То, что делают Вейль и Брауэр, есть не что иное, как возрождение идей Кронекера! Они стремятся спасти математику, выбрасывая за борт то, что вызывает беспокойство... Они крошат и рубят науку. Если бы мы приняли такую реформу, которую они предлагают, то подверглись бы риску потерять большую часть наших ценных сокровищ».

Гильберт гневно утверждал, что отнять у математиков закон исключенного третьего все равно, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользоваться кулаками. Он писал, что запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки, а жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом результаты, которые были выработаны интуиционистами, не могут идти ни в какое сравнение с могуществом современной математики. Горько сетовал Гильберт на то, что в среде математиков смогла иметь невероятнейшее и эксцентричнейшее влияние сила гипноза одного темпераментного и остроумного человека.

Не оставались в долгу и интуиционисты, утверждая, что программа спасения математики, предложенная Гильбертом, ведет к тому, что из науки изгоняется смысл. Однако большинство математиков примкнуло в данном вопросе к точке зрения Гильберта, полагая, что само существование математики и обширность ее приложений в течение многих столетий свидетельствуют о том, что она не столь уж нелепа и бессодержательна, и для того, чтобы вылечить палец, незачем ампутировать ногу.

Несмотря на то что большинство математиков отвергало идеи интуиционистов, те были уверены в своей грядущей победе. В 1918 г. Германн Вейль предложил своему другу известному венгерскому математику Дьердю Пойа [15] пари, что через 20 лет идеи интуиционизма восторжествуют. В качестве критерия он указал две теоремы классического анализа, которые можно найти в любом учебнике высшей математики, но которые не имеют смысла в математике интуиционистов. По его мнению, через двадцать лет эти теоремы должны были исчезнуть из общепризнанной математики. Однако по истечении этого срока Вейль признал, что пари проиграно (хотя и уговорил Пойя не публиковать соответствующего заявления, что предусматривалось условиями пари).

Следует отметить, что за последние десятилетия интерес к интуиционизму снова возрастает, причем многие выдающиеся логики явно или неявно примыкают к этому течению математической мысли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы закончили наше путешествие по извилистым путям, которые прошла человеческая мысль, пытаясь овладеть противоречивейшим понятием бесконечности, «приручить» его и использовать для познания действительности. От древнейших мифов через первые научные искания Фалеса и Пифагора, Зенона и Аристотеля человечество пришло к столь впечатляющим достижениям, как современные космологические теории, сложнейшие построения математического анализа, теория бесконечномерных пространств.

В некоторых из этих творений человеческого разума уже почти не чувствуется сложность заложенных в них концепций. Выполняя в ходе технических расчетов привычные операции дифференцирования и интегрирования функций, инженер не задумывается над тем, что когда-то эти операции казались почти непостижимыми. Как писал Ф. Энгельс, «когда в математику были введены переменные величины и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого, —тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания, и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического... ушло в прошлое; наступила эра разногласий...» *. Теперь эти слова кажутся почти пророческим предсказанием того состояния, в котором находятся современные исследования по глубинным проблемам теории бесконечных множеств.

Вероятно, в процессе чтения книги читатель неоднократно задавал себе вопрос, каково же практическое значение описанных в ней исканий, могут ли применяться на практике мощности бесконечных множеств, трансфинитные числа, необычайные функции и линии из матема-

---

* *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 88—89.

тической кунсткамеры и т. д. Этот вопрос является одним из сложнейших в большинстве научных исследований. Недаром Майкл Фарадей на вопрос какого-то лорда, что дадут для практики исследования по электромагнетизму, ответил: «А что можно сказать о будущности новорожденного ребенка?» Обвинениям в отрыве от практики подвергались в свое время исследования по генетике, теории относительности, квантовой физике и т. д. Многим казались беспочвенными мечтания К. Э. Циолковского о межпланетных путешествиях.

При решении вопроса о практической значимости теоретико-множественных исследований надо иметь в виду, что теория множеств имеет три существенно различных аспекта: изучение операций над множествами, мощностей бесконечных множеств и теоретико-множественный подход к математике в целом. Первый из них уходит корнями в глубокую древность, поскольку уже силлогизмы Аристотеля выражают по сути дела определенные отношения между множествами и операции над ними. Теоретико-множественные операции необходимы, например, для того, чтобы ЭВМ могли выполнять работу по сбору и переработке информации, и потому они предусматриваются в алгоритмических языках. Мы уже не говорим о том, что эти операции широко используются в современной математической литературе — безнадежной была бы попытка переписать без символов включения, объединения и пересечения множеств многие классические сочинения по математике XX в.

Сложнее обстоит дело с практической значимостью теории бесконечных множеств. Ее роль более опосредована и состоит скорее в том, что теоретико-множественные понятия лежат в основе многих часто используемых математических теорем. Примерами могут служить теорема о неподвижной точке, лежащая в основе многих вычислительных процессов, теорема о компактности произведения компактных пространств и т. д. Одно из важнейших понятий современной математики — бесконечномерное гильбертово пространство — возникло в результате исследований Гильберта в области теории систем уравнений с бесконечным множеством неизвестных. При этом важнейшая модель таких пространств состоит из разрывных функций, интегрировать которые возможно лишь с помощью интеграла Лебега. В гильбертовом же пространстве лежит одно из самых удивительных образований — спираль Винера, направления которой в любых двух ее точках перпендикулярны друг другу. Несмотря на свою причудливость, эта спираль является геометрическим образом важного для приложений понятия теории вероятностей — случайных процессов с независимыми приращениями.

Не следует забывать при этом, что концепции математической логики, играющие столь важную роль в теории алгоритмических языков, были в значительной мере созданы в ходе осмысления парадоксов, которые возникли в теории бесконечных множеств. За последние годы приобретают практическое значение и иные аспекты этой теории. Известный американский специалист в области прикладной математики Р. Рихтмайер полагает, что в ближайшее время в обиход физики войдут концепции, которые будут заимствованы, в частности, и из теории множеств. Вообще, по его мнению, нет такого раздела математики, который не представлял бы потенциального интереса для физики.

Наиболее спорным является третий аспект теории множеств — попытка построения всей математики на теоретико-множественной основе (так называемый «бурбакизм»). По этому вопросу мнения ученых бывают иногда противоположными. Одни ученые полагают, что эта попытка дает возможность трактовать с единой точки зрения различные математические проблемы и применять методы, созданные для решения одних вопросов, к изучению проблем, которые кажутся весьма далеко лежащими от этих вопросов. Другие математики (обычно более близко связанные с прикладными сторонами науки), обвиняют этот подход в излишнем формализме, несоответствии применяемых средств изучаемым проблемам. Корни этих разногласий лежат в несовпадении математического мировоззрения спорящих сторон, в различной оценке важности тех или иных проблем и достижений математической науки. Быть может, истинным окажется какой-то диалектический синтез точек зрения, которые сейчас представляются противоположными.

Но независимо от исхода этих споров возникновение и развитие теории множеств явилось одним из важнейших этапов в истории математики, в процессе овладения человечеством понятием бесконечности. А этот процесс никогда не окончится, так как неисчерпаема сама идея бесконечности, в которой человеческий ум неизменно открывает все новые и новые стороны.

ПРИМЕЧАНИЯ

К главе 1

1 Фалес Милетский (ок. 625—547 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Впервые ввел в математику понятие доказательства и доказал некоторые простейшие геометрические теоремы.

2 Анаксимандр Милетский (ок. 585—525 до н. э.) — древнегреческий философ, ученик Фалеса. Впервые высказал догадку о бесконечности миров и Вселенной.

3 Вейль Герман (1885—1955) — немецкий математик, автор выдающихся работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, алгебре и теории чисел. Много занимался философией математики, является одним из создателей интуиционизма.

4 Апория — кажущееся трудно разрешимым, непреодолимым логическое затруднение.

5 Левкипп (предположительно 500—440 до н. э.) — древнегреческий философ, атомист.

6 Эпикур (ок. 341—271 до н. э.) — древнегреческий философ, атомист.

7 Зенон Элейский (ок. 490—430 до н. э.) — древнегреческий философ, автор апорий, направленных против множественности, бесконечности, движения и наивного представления о континууме.

8 Диоген Самосский (ок. 414—323 до н. э.) — древнегреческий философ.

9 Френкель Абрагам (1891—1965) немецкий математик, автор работ по математической логике.

10 Наан Густав Иоганович (р. 1919) — советский философ, занимающийся философскими проблемами естествознания.

11 Антифонт (2-я половина V в. до н. э.) — древнегреческий философ-софист.

12 Евдокс Книдский (ок. 408— ок. 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном, создатель теории несоизмеримых величин и «метода исчерпывания» для доказательства теорем о площадях и объемах.

13 Гипатия из Александрии (370—415) — философ, математик и астроном. По наущению архиепископа Кирилла зверски растерзана толпой христианских фанатиков.

14 Альберт Великий (ок. 1193—1280) — немецкий философ, естествоиспытатель, богослов и логик. Пытался в теологических целях использовать учение Аристотеля.

15 Брадвардин Томас (1300—1349) — английский математик, автор «Трактата о континууме», впервые применил в математическом смысле слово «иррациональный».

16 Баконтроп Джон — английский схоласт XIV в.

17 Николай Кузанский (1401—1464) — немецкий философ и теолог.

Его работы подготовили ренессансный пантеизм и создали предпосылки для обоснования бесконечности Вселенной.

[18] Кавальери Бонавентура (1598—1647) — итальянский математик, ученик Галилея, создатель метода неделимых для отыскания площадей и объемов.

[19] Фонтенель Бернар (1657—1757) — французский литератор и популяризатор науки, один из пионеров просветительской философии.

[20] Д'Аламбер Жан (1717—1783) — французский математик, механик и философ, один из создателей математической физики.

[21] Абель Нильс (1802—1829) — норвежский математик, доказал невозможность решения уравнений 5-й степени в радикалах, один из создателей современных критериев строгости рассуждений в математическом анализе.

[22] Коши Огюстен (1789—1857) — французский математик, создатель теории функций комплексного переменного. Построил математический анализ на основе понятия предела.

[23] Гаусс Карл (1777—1855) — крупнейший немецкий математик XIX столетия. Получил ряд результатов фундаментального значения в алгебре, геометрии, теории чисел, математическом анализе.

[24] Шумахер Генрих (1780—1850) — немецкий астроном.

[25] Риман Бернгард (1826—1866) — немецкий математик, получил ряд замечательных результатов в теории функций комплексного переменного, геометрии и других областях математики. Один из создателей общего понятия многомерного пространства (риманова геометрия).

[26] Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — русский математик, творец неевклидовой геометрии. Является также одним из создателей современного определения функции.

[27] Фридман Александр Александрович (1888—1925) — советский физик и космолог.

[28] Леметр Жорж (1894—1966) — бельгийский астроном и астрофизик, автор теории расширяющейся Вселенной.

[29] Ситтер де, Виллем (1872—1934) — голландский астроном, один из пионеров применения теории относительности к космологии.

[30] Слейфер Весто (1875—1969) — американский астроном, впервые измеривший лучевые скорости туманностей.

[31] Хаббл Эдвин (1889—1953) — американский астроном, установил, что туманности являются звездными системами.

[32] Дорошкевич Андрей Георгиевич (р. 1937) — советский физик и космолог.

[33] Новиков Игорь Дмитриевич (р. 1935) — советский астрофизик и космолог.

[34] Бриллюэн Леон (1889—1969) — французский физик, автор работ по квантовой механике, теории информации, философии науки.

[35] Зельманов Абрам Леонидович (р. 1913) — советский космолог.

К главе 2

[1] Кантор Георг (1845—1918) — немецкий математик, создатель теории множеств.

[2] Лузин Николай Николаевич (1883—1950) — советский математик, один из основателей Московской математической школы, автор ряда выдающихся работ по теории множеств и теории функций действительного переменного.

[3] Манин Юрий Иванович (р. 1937) — советский математик, автор работ по алгебре и приложениям математики к современной физике.
[4] Заде Лотфи (р. 1918) — американский математик, создатель теории нечетких множеств.
[5] Дирихле Лежен (1805—1859) — немецкий математик, автор работ по теории чисел, математической физике, теории рядов.
[6] Дедекинд Рихард (1831—1916) — немецкий математик, один из создателей современной алгебры. В своих работах близко подошел к идеям теории множеств.
[7] Больцано Бернард (1781—1848) — чешский математик, философ и логик, автор ряда работ по основам математического анализа и теории бесконечных множеств.
[8] Бернштейн Феликс (1878—1956) — немецкий математик.
[9] Лиувилль Жозеф (1809—1882) — французский математик, автор работ по математическому анализу и теории чисел.
[10] Линдеман Карл (1852—1939) — немецкий математик, доказал трансцендентность числа π.
[11] Александров Павел Сергеевич (1896—1982) — советский математик, создатель советской топологической школы.
[12] Колмогоров Андрей Николаевич (р. 1903) — советский математик, автор ряда замечательных работ в области теории функций действительного переменного, теории вероятностей, топологии.

К главе 3

[1] Декарт Рене (1596—1650) — французский математик и философ, создатель аналитической геометрии, ввел понятие переменной величины, изучал зависимости между величинами.
[2] Вейерштрасс Карл (1815—1897) — немецкий математик, один из создателей теории функций комплексного переменного. Построил арифметическую теорию действительных чисел и на ее основе перестроил изложение математического анализа.
[3] Мерэ Шарль (1835—1911) — французский математик, построил арифметическую теорию действительных чисел одновременно с Вейерштрассом.
[4] Фреге Готлоб (1848—1925) — немецкий математик и логик.
[5] Гильберт Давид (1862—1943) — крупнейший немецкий математик XX в. Автор замечательных работ в области теории инвариантов, теории алгебраических чисел, вариационного исчисления, оснований математики, функционального анализа. Ввел понятие бесконечномерного пространства.
[6] Кронекер Леопольд (1823—1891) — немецкий математик, работавший в области алгебры и теории чисел.
[7] Непер Джон (1550—1617) — шотландский математик, создатель теории логарифмов.
[8] Бернулли Иоганн (1667—1748) — швейцарский математик, один из создателей математического анализа, внес большой вклад в развитие понятия функции.
[9] Эйлер Леонард (1707—1783) — математик, физик, механик и астроном. Родился в Швейцарии, большую часть жизни прожил в России. Автор замечательных работ по математическому анализу, в которых он развил общие методы интегрирования и решения дифференциальных уравнений, изучал функции комплексного переменного.
[10] Бернулли Даниил (1700—1782) — физик и математик, сын Иоган-

на Бернулли. Автор ряда работ в области математической физики.

[11] Фурье Жозеф (1768—1830) — французский математик. Изучал уравнения математической физики, широко используя для их решения тригонометрические ряды.

[12] Пуанкаре Анри (1854—1912) — французский математик, физик, астроном и философ, один из крупнейших математиков XX в. Ему принадлежат выдающиеся работы почти во всех областях математической науки.

[13] Ван-дер-Варден Бартел (р. 1903) — голландский математик, работал в области алгебры, статистики, истории математики.

[14] Эрмит Шарль (1822—1901) — французский математик, автор многочисленных исследований по математическому анализу, алгебре, теории чисел.

[15] Стилтьес Томас (1856—1894) — голландский математик, автор ряда работ по математическому анализу.

[16] Перрен Жан (1870—1942) — французский физик и физико-химик, экспериментально изучал броуновское движение.

[17] Винер Норберт (1894—1964) — американский ученый, «отец кибернетики». Ряд его работ посвящен функциональному анализу и изучению бесконечномерных пространств.

[18] Лагранж Жозеф (1736—1813) — французский математик и механик, один из создателей вариационного исчисления, автор ряда работ в области математического анализа и его приложений.

[19] Жордан Камилл (1838—1922) — французский математик, один из создателей теории групп.

[20] Пеано Джузеппе (1858—1932) — итальянский математик, занимался теорией дифференциальных уравнений и формально-логическим обоснованием математики.

[21] Борель Эмиль (1871—1956) — французский математик, автор работ по теории функций действительного переменного и многим областям математического анализа.

[22] Лебег Анри (1875—1941) — французский математик. Ввел обобщение понятия интеграла, широко используемое в современной математике.

[23] Шварц Герман (1843—1921) — немецкий математик, автор работ в области математического анализа.

[24] Дарбу Гастон (1842—1917) — французский математик, автор работ по дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений и другим областям математики.

[25] Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862) — русский математик, один из основателей петербургской математической школы, автор выдающихся работ по уравнениям математической физики, математическому анализу, теоретической механике.

[26] Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) — русский математик и механик, основатель петербургской математической школы, автор замечательных работ по математическому анализу, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов.

[27] Марков Андрей Андреевич (1856—1922) — русский математик, автор выдающихся работ по теории чисел, математическому анализу, теории вероятностей.

[28] Ляпунов Александр Михайлович (1857—1918) — русский математик и механик, автор выдающихся работ в области теории потенциала, устойчивости движения, теории равновесия фигур вращающейся жидкости, теории вероятностей.

[29] Стеклов Владимир Андреевич (1864—1926) — русский и советский математик, автор выдающихся работ по математической физике.
[30] Коркин Александр Николаевич (1837—1908) — русский математик, автор работ по теории чисел и по уравнениям в частных производных.
[31] Жегалкин Иван Иванович (1869—1947) — советский математик, автор работ по математической логике, основаниям математики, теории множеств.
[32] Егоров Дмитрий Федорович (1869—1931) — советский математик. автор работ по дифференциальной геометрии, теории интегральных уравнений и теории функций действительного переменного.
[33] Меньшов Дмитрий Евгеньевич (р. 1892) — советский математик, автор выдающихся работ по теории тригонометрических и ортогональных рядов.
[34] Бари Нина Карловна (1901—1961) — советский математик, автор работ по теории тригонометрических рядов.
[35] Суслин Михаил Яковлевич (1894—1919) — русский математик, один из создателей дескриптивной теории множеств.
[36] Новиков Петр Сергеевич (1901—1975) — советский математик, автор выдающихся работ по дескриптивной теории множеств и математической логике.
[37] Келдыш Людмила Всеволодовна (1904—1976) — советский математик, автор работ по дескриптивной теории множеств.
[38] Серпинский Вацлав (1882—1969) — польский математик, основатель польской математической школы. Автор работ по теории функций действительного переменного, топологии, теории чисел.
[39] Лаврентьев Михаил Алексеевич (1900—1980) — советский математик и механик, один из основателей Сибирского отделения АН СССР. Автор выдающихся работ в области теории функций, квазиконформных отображений, аэро- и гидродинамики.
[40] Брауэр Лёйтзен (1881—1966) — голландский математик, автор важных результатов в области топологии, функционального анализа, математической логики.
[41] Урысон Павел Самуилович (1898—1924) — советский математик, автор важных работ в области теоретико-множественной топологии, один из создателей общей теории размерности.

К главе 4

[1] Гурвиц Адольф (1859—1919) — немецкий математик, автор работ в области математического анализа, теории функций, алгебры и теории чисел.
[2] Адамар Жак (1865—1963) — французский математик, автор выдающихся работ в области математической физики, теории функций, теории чисел.
[3] Бурали-Форти Чезаро (1861—1931) — итальянский математик.
[4] Рассел Бертран (1872—1970) — английский логик, философ, математик и общественный деятель. Основатель логического течения в обосновании математики, пытающийся свести математику к логике.
[5] Шнирельман Лев Генрихович (1905—1938) — советский математик, автор выдающихся работ по теории чисел, топологии, топологическим и качественным методам математического анализа.
[6] Цермело Эрнест (1871—1953) — немецкий математик, автор работ

по теории множеств, вариационному исчислению и теории вероятностей.

[7] Бэр Рене (1874—1932) — французский математик, работал в области теории функций действительного переменного.

[8] Куратовский Казимеж (1896—1980) — польский математик, автор работ в области топологии, теории функций действительного переменного, математической логики.

[9] Бурбаки Николя — коллективный псевдоним группы современных французских математиков, публикующих многотомный трактат «Элементы математики».

[10] Гёдель Курт (р. 1906) — австрийский математик и логик.

[11] Коэн Поль (р. 1934) — американский математик, получивший решение проблемы континуума.

[12] Больяи Янош (1802—1860) — венгерский математик. Независимо от Н. И. Лобачевского (но несколько позже) создал неевклидову геометрию.

[13] Уайтхед Альфред (1861—1947) — английский математик и логик. Совместно с Б. Расселом написал книгу «Принципы математики».

[14] Куайн Виллард (р. 1908) — американский математик, один из крупнейших специалистов в области математической логики и оснований математики.

[15] Пойа Дьердь (р. 1887) — венгерский математик, автор работ по функциональному анализу, математической статистике и комбинаторике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виленкин Наум Яковлевич

В ПОИСКАХ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Утверждено к печати
редколлегией научно-популярной литературы Академии наук СССР

Редактор издательства В. П. Лишевский. Художник С. Б. Воробьев
Художественный редактор Н. А. Фильчагина
Технический редактор В. Д. Прилепская
Корректоры Г. Н. Лаш, Н. В. Несмеева

ИБ № 27362

Сдано в набор 23.03.83. Подписано к печати 18.07.83. Т-16604. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага типографская №. 2. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 9,1. Усл. кр. отт. 8,72. Тираж 43000 экз. Тип. зак. № 3271 Цена 55 коп.

Издательство «Наука». 117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
Набрано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Н.Я.ВИЛЕНКИН

В ПОИСКАХ БЕСКОНЕЧНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ·НАУКА·

55 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
ГОТОВИТСЯ
К ПЕЧАТИ
КНИГА:

ГЕГУЗИН Я. Е.
Почему и как исчезает пустота.
2-е изд. 10 л. 65 к.

В книге рассказывается об истории развития физических идей современной теории спекания, т. е. теории тех процессов, которые могут, изгнав пустоту из груды спрессованных порошков, превратить ее в плотный монолит. Физика спекания — основа технологического процесса порошковой металлургии и производства огнеупорных материалов. Показано, как в тесной взаимосвязи теории, эксперимента и технологии формировались новые идеи в области физики спекания. Прослежена судьба многих научных исследований. Рассказано об ученых, оказавших влияние на развитие науки о спекании.
Для широкого круга читателей.

Заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов «Книга — почтой» «Академкнига»:
480091 Алма-Ата, 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 Баку, 5, ул. Джапаридзе, 13; 320093 Днепропетровск, проспект Ю. Гагарина, 24; 734001 Душанбе, проспект Ленина, 95; 252030 Киев, ул. Пирогова, 4; 277012 Кишинев, проспект Ленина, 148; 443002 Куйбышев, проспект Ленина, 2; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7; 220012 Минск, Ленинский проспект, 72; 117192 Москва, В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 Новосибирск, Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137; 700187 Ташкент, ул. Дружбы народов, 6; 450059 Уфа, 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42; 310078 Харьков, ул. Чернышевского, 87.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»