Л. С. Фрейман

ЧТО ТАКОЕ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-
ПОПУЛЯРНАЯ
СЕРИЯ

1. **Введение**

2. **Предварительные сведения**

3. **Производная**

4. **Анализ**

5. **Ряд Маклорена**

6. **Определенный интеграл**

7. **Применение определенного интеграла**

8. **Заключение**

Л. С. ФРЕЙМАН

ЧТО ТАКОЕ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ЧЕМ ОНА ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ ШКОЛЬНОЙ ЗАЧЕМ ОНА НУЖНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва · 1965

ОТ АВТОРА

Эта книга — не учебник. Она не научит читателя высшей математике. Правила, которые он здесь усвоит, не носят обобщающего характера, поэтому их нельзя применять к решению любого примера или задачи, в том числе и практических. Не адресована книга и студенту. Она имеет другую цель: ответить на вопросы, поставленные в заглавии.

И читатель ее совсем другой. Есть учащиеся средней школы, твердо уверенные в своем призвании — быть творцами новой техники или искателями в науке; молодые рабочие и солдаты, рассчитывающие через год-два поступить в техникум или институт; есть пожилые рабочие, строители, механизаторы с пытливым умом и неостывающим интересом к жизни; есть, наконец, люди таких профессий, которым никогда не столкнуться с математикой, но которые хотели бы узнать, что же скрывается за хорошо знакомым названием — «высшая математика». Юристы, врачи, экономисты замечают, что математика «наступает», что ее влияние все больше ощущается в «новинках» их профессии. Всем этим людям и адресована книга. Чтобы ее читать, достаточно знать математику в объеме 7—10 классов средней школы, а главное — проявить внимание и интерес к делу.

Эта книга — не развлечение. Она не относится к типу «занимательных» («Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия» и т. д.). Ее надо читать не спеша, с карандашом и бумагой, решая примеры, приведенные и очень подробно разобранные в тексте, для того, чтобы усвоить теоретические рассуждения.

Автор считает необходимым обратиться с несколькими словами и к читателю математику на случай, если эта книга попадет ему в руки. Специалист заметит без труда, что требования строгости соблюдены далеко не достаточно. Однако наиболее фундаментальные понятия — производная и определенный интеграл — имеют определения, по-видимому, вполне корректные, и ограничены определенными условиями существования. Конечно, условия существования даны в очень узкой редакции и не доказаны — читатель поймет, чем это вызвано.

Некоторые утверждения снабжены ссылками на то, что они имеют доказательства, другие вместо доказательств имеют геометрические пояснения. Так, приведено геометрическое изображение процесса уменьшения погрешности при вычислении площади криволинейной трапеции.

Допущены также некоторые вольности, например, в определении степенной функции. Эти отклонения от общепринятого несущественны и не искажают общий характер математического мышления, который, как надеется автор, выдержан на протяжении всей беседы с читателем.

1.

ВВЕДЕНИЕ

Познакомимся с тремя задачами. Все они взяты из практики, все очень важны, все на первый взгляд довольно просты. К сожалению, ни одну из них нельзя решить *точно* с помощью школьной математики. Слово «точно» подчеркнуто, потому что приближенные решения этих задач известны давным-давно, но современный уровень науки требует, чтобы погрешности в расчетах отсутствовали. Такие расчеты и называются точными.

В последующих главах будет показано, как находятся точные решения этих задач и какие новые приемы надо для этого применить. Эти приемы, новые лишь по отношению к школьной математике, познакомят вас с основными понятиями высшей математики.

ЗАДАЧА ПЕРВАЯ

Скорость переменного движения

Если тело движется так, что все его точки имеют одну и ту же скорость, то для изучения такого движения достаточно, конечно, следить за движением одной какой-нибудь точки. Обычно в качестве такой точки выбирается центр тяжести тела. Считается, что вся масса тела сосредоточена в его центре тяжести. Короче говоря, изучение движения тела заменяется изучением движения материальной точки. Всюду, где в этой книге говорится о движении тела или материальной точки, подразумевается именно такое движение.

Из школьного курса физики известно, что скоростью движения тела называется путь, проходимый в единицу времени. Если скорость тела постоянна, движение называется равномерным, в противном случае — неравномерным, или переменным. Переменное движение характеризуется *средней скоростью* за некоторый промежуток времени; кроме средней скорости, может рассматриваться и *мгновенная*. Мгновенной называется скорость, которую имело тело в некоторый определенный момент. При равномерном движении, т. е. при движении с постоянной скоростью, средняя скорость равна мгновенной, при переменном движении средняя скорость, вообще говоря, отличается от мгновенной.

Обратимся к задаче. Материальная точка движется по закону

$$L = 0{,}1t^3 + 4, \tag{1.1}$$

где время t отсчитывается в секундах, пройденный путь L — в *м*. Найти скорость точки в конце 5-й секунды.

Уравнение (1.1), выражающее закон движения точки, служит для того, чтобы подсчитывать, сколько метров пройдено точкой к некоторому моменту. Так, если желательно знать, сколько пройдено точкой к концу 3-й секунды, то в уравнение (1.1) надо подставить $t = 3$:

$$L = 0{,}1 \cdot 3^3 + 4.$$

Проделав вычисления, узнаем, что к концу 3-й секунды путь равнялся 6,7 *м*. Для удобства дальнейших рассуждений составим с помощью уравнения (1.1) таблицу пройденного пути.

Таблица пройденного пути

Время t, *сек*	Путь L, *м*	Время t, *сек*	Путь L, *м*
0	4,0	4	10,4
1	4,1	5	16,5
2	4,8	6	25,6
3	6,7	. . .	. . .

В левом столбце даны различные значения времени t, в правом — путь точки к концу соответствующего промежутка времени. Например, к концу 2-й секунды путь составлял 4,8 *м*, к концу 5-й — 16,5 *м* и т. д. Многоточия в последней строчке означают, что таблица продолжается дальше.

Приступаем к решению задачи. Средняя скорость точки за некоторый выбранный промежуток времени, например от конца 2-й до конца 5-й секунды, вычисляется следующим образом. Сначала вычисляется путь, пройденный точкой за этот промежуток. Для этого из пути, пройденного за 5 секунд, нужно вычесть путь, пройденный за 2 секунды. Затем найденный путь делится на время. Частное и дает искомую среднюю скорость за выбранный промежуток времени.

По условию задачи надо определить скорость точки в конце 5-й секунды. Следовательно, надо взять промежуток времени, конец которого совпадает с концом 5-й секунды. Взятый выше пример промежутка от 2-й до 5-й секунды отвечает поставленному требованию. Проведем расчеты для этого случая.

Промежуток — от 2-й до 5-й *сек*.

Продолжительность — $5 - 2 = 3$ *сек*.

Путь L_5 к концу промежутка — 16,5 *м*.

Путь L_2 к началу промежутка — 4,8 *м*.

Путь, пройденный за промежуток, — $16{,}5 - 4{,}8 = 11{,}7$ *м*.

Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{11{,}7}{3} = 3{,}9$ *м/сек*.

Ответ получен. Означает ли он, что в конце 5-й секунды точка имела скорость 3,9 *м/сек*? Казалось бы, весь ход нашего решения подтверждает это. Однако не следует торопиться. Надо проделать подобное же вычисление с другим промежутком.

Промежуток — от 3-й до 5-й *сек*.

Продолжительность — $5 - 3 = 2$ *сек*.

Путь L_5 — 16,5 *м*.

Путь L_3 — 6,7 *м*.

Путь, пройденный за промежуток, — $16{,}5 - 6{,}7 = 9{,}8$ *м*.

Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{9{,}8}{2} = 4{,}9$ *м/сек*.

Ответ отличается от предыдущего. Что же получится, если взять другие промежутки? Оказывается, средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за промежуток в 1 секунду (от 4-й до 5-й) равна 6,1 *м/сек*, за полсекунды — 6,8 *м/сек*. И вообще, при каждом новом промежутке получается новая средняя скорость точки. Какая же из них «настоящая»? Школьная математика ответа не дает.

Из рассмотренной задачи как будто вытекает, что школьное определение скорости: «Скорость есть путь, проходимый в единицу времени» не имеет смысла и не может использоваться при решении задач. Такой вывод неверен. Возьмем другой пример.

Материальная точка движется по закону

$$L = 0{,}1t + 4.$$

Надо найти скорость точки в конце 5-й секунды. Порядок решения сохраним тот же, что и в предыдущей задаче.

Таблица пройденного пути

Время t, *сек*	Путь L, *м*	Время t, *сек*	Путь L, *м*
0	4	4	4,4
1	4,1	5	4,5
2	4,2	6	4,6
3	4,3	...	...

1. Промежуток — от 2-й до 5-й *сек.*

Продолжительность — 3 *сек.*

Пройденный путь — 0,3 *м.*

Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$ *м/сек.*

2. Промежуток — от 3-й до 5-й *сек.*

Продолжительность — 2 *сек.*

Пройденный путь — 0,2 *м.*

Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1$ *м/сек.*

Сравнение двух ответов показывает, что средняя скорость получилась одна и та же. Другие вычисления за 1, за 0,5 секунды и т. д. дают тот же результат. Ясно, что он и является ответом. Если точка все время имеет скорость 0,1 *м/сек*, то ту же скорость она имеет и в конце 5-й секунды.

Итак, в одной задаче понятие средней скорости не привело к удовлетворительному решению, в другой же позволило ее решить. Чтобы найти объяснение, достаточно сравнить законы движения:

$$L = 0{,}1t^3 + 4 \text{ и } L = 0{,}1t + 4.$$

Понятие средней скорости оказалось пригодным в случае, где закон движения содержит время t в первой степени. Движение, при котором время входит в уравнение в первой степени, называется равномерным. Итак, рассмотрение двух задач привело нас к следующему выводу.

Определение скорости: «Скорость есть путь, проходимый в единицу времени» может применяться лишь при равномерном движении точки, а для неравномерного движения точки оно не только бесполезно, но вообще теряет смысл.

Высшая математика выработала такое определение скорости, которое пригодно для всех видов и законов движения. В дальнейшем (гл. 3) скорость, которую приобрела материальная точка к моменту истечения 5-й секунды, будет вычислена с абсолютной точностью.

ЗАДАЧА ВТОРАЯ

О наиболее выгодной форме сосуда

Требуется придать цилиндрическому сосуду такие размеры, чтобы при емкости в 1 литр на его изготовление пошло наименьшее количество материала.

Сосуд с крышкой представляет собой прямой круговой цилиндр. Обозначим радиус основания цилиндра r, его высоту — h. Полная поверхность цилиндра S состоит из боковой поверхности $S_б$ и двух оснований $S_о$:

$$S = S_б + 2S_о.$$

Площадь боковой поверхности выражается формулой:

$$S_б = 2\pi rh,$$

площадь двух оснований:

$$2S_о = 2\pi r^2,$$

так что

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2. \qquad (1.2)$$

Вычисления надо производить так, чтобы объем цилиндра V оставался все время одним и тем же:

$$V = 1000\ см^3.$$

Эту величину надо ввести в формулу (1.2). Вспоминая, что объем цилиндра равен

$$V = \pi r^2 h$$

и, следовательно, $$h = \frac{V}{\pi r^2},$$

подставляем вместо h его выражение в формулу (1.2):

$$S = \frac{2\pi r V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Сосуд изготовляется из листового материала. Очевидно, материала пойдет тем меньше, чем меньше поверхность сосуда. Следовательно, предложенную задачу можно задать и в чисто геометрической форме: найти такие размеры цилиндра, чтобы при объеме в 1000 $см^3$ он имел наименьшую полную поверхность.

Если взять очень низкий цилиндр (т. е. малое h), то при данном объеме придется делать основания большой площади; если же взять малый радиус основания, придется делать цилиндр высоким, что тоже потребует излишнего расхода материала. Очевидно, существуют такие размеры r и h, при которых поверхность цилиндра будет наивыгоднейшей с точки зрения расхода материала. Следующая таблица поясняет дело.

Полная поверхность цилиндра емкостью в 1000 $см^3$ при различных значениях r и h

r, *см*	h, *см*	S, *см*^{2}	r, *см*	h, *см*	S, *см*^{2}
1	310	2006	6	8,85	561
4	20	600	7	6,50	594
5	12,7	557	10	3,20	828

Таблица показывает, что поверхность цилиндра сперва уменьшается (и довольно значительно), пока радиус основания не достигнет 5—6 *см*. После этого поверхность снова увеличивается. Отсюда заключаем, что наивыгоднейшие размеры действительно существуют.

Как их определить? Школьная математика подсказывает единственный ответ на этот вопрос: пробовать различные радиусы или, иначе говоря, подбирать нужные размеры. Ясно, что подбор ответа нельзя назвать решением. Позже (гл. 4) задача будет решена средствами высшей математики полностью и совершенно точно.

ЗАДАЧА ТРЕТЬЯ

Вычисление работы

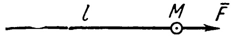
На рис. 1 изображена материальная точка M и приложенная к ней сила F. Под действием силы точка прошла некоторый путь l. Работа силы равна произведению величины силы на длину пути:

$$A = Fl.$$

Сила величиной 10 *кГ* на пути $l = 1,5$ *м* совершает работу $A = 10 \cdot 1,5 = 15$ *кГм*.

Произведение двух величин F и l можно понимать так, как будто длина одной стороны какого-то прямоугольника умножается на длину другой стороны. Такое произведение дает площадь этого прямоугольника. Отличие от обычного вычисления площади состоит в том, что результат получается не в квадратных метрах, а в килограммометрах, т. е. в единицах работы. Можно сказать, что работа силы на некотором пути численно равна

Рис. 1



Точка M прошла путь l под действием приложенной к ней силы $\bar{F}$

Рис. 2

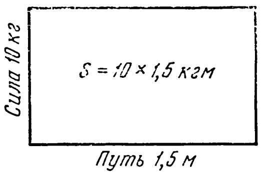
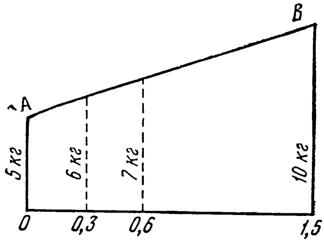


Рис. 3



2. Работа постоянной силы изображается площадью прямоугольника

3. Работа равномерно возрастающей силы изображается площадью трапеции

площади прямоугольника, у которого основанием служит пройденный путь, а высотой — величина силы [1] (рис. 2).

Как вычислить работу непрерывно меняющейся силы? При таком вычислении оказывает большую помощь представление работы как некоторой площади. Вычислим работу переменной силы при следующих условиях (рис. 3).

Материальная точка прошла путь длиной 1,5 *м*. В первый момент движения сила имела величину $F = 5$ *кГ*, в конце движения $F = 10$ *кГ*, причем сила нарастала равномерно, т. е. пропорционально пройденному точкой пути. Когда точка прошла 0,3 *м*, сила имела величину 6 *кГ*, еще через 0,3 *м* величина силы равнялась 7 *кГ* и т. д. (см. рис. 3). Если отложить все значения силы на рис. 3, то геометрическим местом концов отрезков, изображающих силу, будет наклонная прямая AB, идущая от отрезка 5 *кГ* к отрезку 10 *кГ*. Работа силы равна площади трапеции, изображенной на рис. 3.

Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2} h.$$

[1] Расчет сделан для случая, когда сила направлена вдоль пути. Расположение отрезка, изображающего силу, перпендикулярно пути (см. рис. 2), условно.

Здесь a и b — основания трапеции, h — ее высота. В нашем примере $a = 5$ *кГ*, $b = 10$ *кГ*, $h = 1{,}5$ *м*. Поэтому работа силы

$$A = \frac{5+10}{2} \cdot 1{,}5 = 11{,}25 \text{ кГм}.$$

В данном случае удалось вычислить работу переменной силы. Это объясняется простой формой фигуры (трапеции), площадь которой численно равна величине работы. Задача была бы решена, если бы работа соответствовала площади треугольника, ромба, кругового сегмента и вообще фигуры, площадь которой вычисляется в школьной геометрии.

Когда же сила изменяется так, что требуется вычислить площадь более сложной фигуры, школьная математика формул для вычисления не дает. Задача кажется неразрешимой. Впоследствии (гл. 7) будет показано, как решает ее высшая математика.

Мы рассмотрели три задачи. Каждая из них представляет обширную группу однотипных задач, имеющих большое распространение в науке и практике. Несмотря на простоту, эти задачи непосильны для школьной математики.

Тем более она не может решать сложные задачи, стоящие перед современными наукой и техникой. Например, какое количество горючего надо затратить, чтобы вывести искусственный спутник на орбиту? Как расположить железнодорожную сеть между заданными пунктами, чтобы транспортные расходы на перевозку грузов были наименьшими? Для того чтобы решать такие задачи, надо усвоить некоторые новые идеи, познакомиться с новыми понятиями, которые и составляют основу высшей математики.

2.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены некоторые понятия, играющие в дальнейшем изложении важную роль.

Функция и ее график

Из курса средней школы известно, что́ называется функциональной зависимостью. Примером может служить зависимость между радиусом круга и его площадью

$$S = \pi r^2. \tag{2.1}$$

Здесь S — площадь круга, r — его радиус. Если увеличить r в два раза, то S увеличится в четыре раза; если уменьшить r в три раза, то S уменьшится в девять раз. Вообще всякому изменению радиуса круга соответствует изменение его площади. Существенно при этом, что каждому значению радиуса отвечает одно и только одно значение площади этого круга. Можно сказать, что площадь круга зависит от его радиуса. Эта зависимость и называется функциональной. Площадь круга есть *функция*, радиус — *аргумент* этой функции.

Вот еще пример функциональной зависимости одной величины от другой. Чем глубже погружается тело (например подводная лодка) в воду, тем сильнее давит на него вода. Изменится глубина погружения — изменится и давление воды. Величина давления воды на тело зависит от глубины погружения этого тела. Другими словами, давление воды есть функция глубины погружения. Величина, управляющая изменением функции, называется *аргументом*. В первом примере аргументом служит радиус, функцией — площадь круга; во втором примере глубина погружения — аргумент, давление воды — функция. Читатель легко найдет среди окружающих явлений примеры функциональных зависимостей. Радиус шара и его объем; высота над уровнем моря и давление воздуха; время дня и высота солнца над горизонтом — все это примеры зависимости одной величины от другой.

Функциональную зависимость можно задавать аналитически, формулой, которая указывает, какие математические действия надо произвести над аргументом, чтобы получить то или иное значение функции.

Например, чтобы получить площадь круга по его радиусу, надо проделать то, что предписывается формулой (2.1), а именно: возвести численное значение радиуса в квадрат, затем результат этого действия умножить на $\pi = 3{,}14$; объем шара можно вычислить по формуле, в которой радиус шара r играет роль аргумента, а объем шара V — роль функции:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

При изучении функции огромную пользу приносит ее геометрическое изображение, называемое графиком функции. Его получают следующим образом [1].

Выбирают две взаимно перпендикулярные прямые—оси координат (рис. 4). Одна из осей (обычно горизонтальная) называется осью абсцисс (ось Ox), другая — осью ординат (ось Oy). Точка пересечения осей называется началом координат (она обозначена на рисунке буквой O). В качестве единицы выбирается отрезок произвольной длины. На рис. 4 такой единицей служит отрезок AB.

Построим график функции

$$y = 0{,}5x + 0{,}8. \tag{2.2}$$

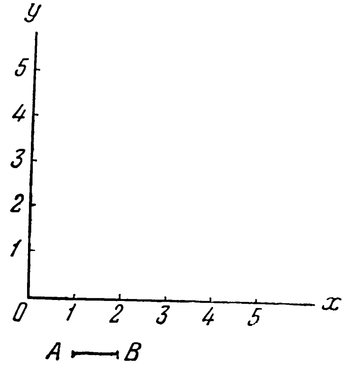
Аргументу x дается какое-нибудь численное значение, например $x = 0{,}5$. Из формулы видно, что это значение надо умножить на 0,5:

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Полученное произведение 0,25 надо сложить с 0,8. Получается справа от знака равенства 1,05. Значит и слева от

[1] Изложение вопросов, связанных с графиками функции, несколько отличается от того, которое принято в школе. Оно более соответствует излагаемому в дальнейшем.

Рис. 4



Система прямоугольных координат с выбранным масштабом $\overline{AB} = 1$

знака равенства 1,05. Но слева стоит функция y. Отсюда следует, что при значении аргумента $x = 0{,}5$ его функция принимает значение $y = 1{,}05$. Этот результат переносится на график (рис. 5). На оси x откладывается численное значение аргумента $x = 0{,}5$. Для этой цели от начала координат O откладывается вдоль оси x отрезок, длина которого равна половине единицы AB. Это — отрезок Oa_1. Из точки a_1 восставляется перпендикуляр a_1b_1. Этот перпендикуляр, очевидно, параллелен оси y, так как последняя тоже перпендикулярна оси Ox. На перпендикуляре a_1b_1 откладывается от точки a_1 отрезок длины 1,05. Пусть этот отрезок — a_1M_1. Выполненное построение позволяет наглядно представить связь между численным значением аргумента (отрезок Oa_1 или просто точка a_1) и соответствующим значением функции (отрезок a_1M_1 или просто точка M_1). Построение следующей точки M_2 производится подобным же образом. Аргументу x задается новое численное значение, например $x = 1{,}0$. Это значение x умножается на 0,5:

$$0{,}5 \cdot 1{,}0 = 0{,}5.$$

Результат умножения складывается с 0,8, что дает 1,3 справа от знака равенства. Значит и слева от него 1,3. Следовательно, при $x = 1{,}0$ функция принимает значение $y = 1{,}3$. На оси x откладывается от точки O отрезок, длина которого равна единице. Это будет отрезок Oa_2, причем точка a_2, очевидно, совпадет с точкой 1. Из точки a_2 восставляется перпендикуляр a_2b_2. На перпендикуляре откладывается от точки a_2 отрезок a_2M_2, длина которого равняется численному значению функции при значении аргумента $x = 1$, т. е. 1,3. Точки a_2 и M_2, как и точки a_1 и M_1, показывают зависимость функции от ее аргумента.

Пусть теперь $x = 2,0$; умножим 2,0 на 0,5 и результат сложим с 0,8; получим $y = 1,8$ при $x = 2$. На графике на оси x отложим отрезок Oa_3 длиной в две единицы; из точки a_3 восставим перпендикуляр a_3b_3 и на нем отложим отрезок a_3M_3 длиной 1,8. Получим точку M_3. Точка M_4 находится совершенно так же. Можно было бы продолжать построение, находя значения функции при $x = 5$, $x = 6$ и т. д., но для общего знакомства с функцией

$$y = 0,5x + 0,8$$

достаточно того, что уже выполнено. Отрезки a_1M_1, a_2M_2 и т. д. показывают, как ведет себя изучаемая функция при изменении аргумента. Верхние точки отрезков M_1, M_2,... лежат на прямой. Для изучения функции отрезки a_1M_1 и т. д., собственно, не нужны. Если на чертеже отложить только точки M_1, M_2,..., то этого уже достаточно. Во-первых, для любого x по соответствующей

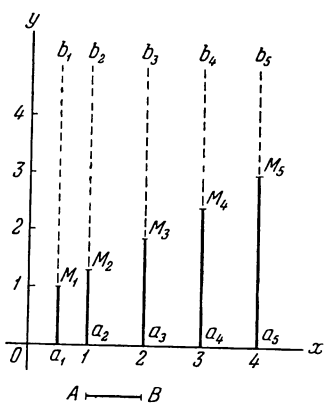


Рис. 5

5 точек, отложенных в системе координат и соответствующих заданному уравнению

Рис. 6

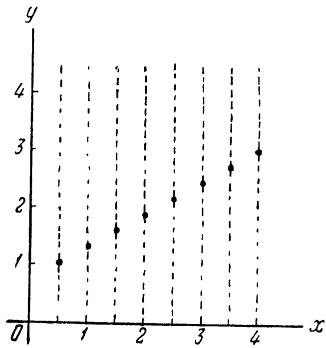
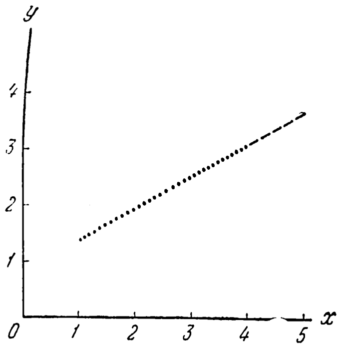


Рис. 7



6. 8 точек наглядно представляют прямую, которую описывает то же уравнение

7. Можно сказать, что 25 точек уже сами образуют прямую $y = 0{,}5x + 0{,}8$

точке M находится y. Например, задается $x = 2$ (точка a_3); для определения y надо измерить расстояние от M_3 до a_3 по перпендикуляру к оси x. Во-вторых, глядя на расположение точек M на графике, можно и без отрезков a_1M_1, a_2M_2 и т. д. утверждать, что точки M лежат на прямой. На графике отложено только 5 точек от M_1 до M_5. Но можно нанести на том же промежутке и 8 точек (рис. 6). Их расположение на прямой выступает при этом еще явственнее. При 25 точках не только видно, что они лежат на прямой; они, можно сказать, сами образуют прямую (рис. 7). Ясно, что, задавая аргументу x все новые и новые промежуточные значения, можно вычислить сколько угодно значений функции y. Точки, изображающие на графике эти значения функции, будут ложиться на прямую как угодно плотно. Поэтому уравнение (2.2) называется уравнением прямой. Эта прямая и считается графиком функции

$$y = 0{,}5x + 0{,}8.$$

О графиках важнейших функций

Прямая

Выше было подробно описано построение графика функции, имеющего форму прямой линии. Имеются ли еще функции, кроме $y = 0{,}5x + 0{,}8$, у которых графики — прямые? Если имеются, то по каким признакам следует отличать функцию, имеющую своим графиком прямую, от функции с графиком другой формы? Ответы на эти вопросы можно получить, если произвести в уравнении (2.2) некоторые изменения и проследить, как эти изменения отразятся на форме графика.

Предварительно надо вычислить значение функции в одной важной точке, а именно при $x = 0$. Для этой цели подставляется в уравнение (2.2) $x = 0$. Всякое число, умноженное на нуль, дает в произведении нуль. Поэтому

$$y = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}8 = 0 + 0{,}8,$$

или

$$y = 0{,}8.$$

Как известно из построения графика той же функции, для нанесения точки на график откладывается отрезок, изображающий x, на оси x от точки O. В данном случае, когда $x = 0$, длина отрезка, отложенного на оси x, равна нулю. Конец отрезка совпадает с его началом — с точкой O. Затем восставляется перпендикуляр к оси Ox. Он ляжет на ось y. На этом перпендикуляре откладывается отрезок, длина которого равна 0,8. Обозначим конец его M_0. В этом случае говорят, что прямая отсекает на оси y отрезок, равный 0,8. Слагаемое в уравнении, не содержащее x, называется свободным членом. В уравнении (2.2) свободный член равен 0,8. Он как раз и дает длину отрезка, отсекаемого графиком функции на оси y. Итак, при любом графике функции свободный член в уравнении функции определяет длину отрезка, отсекаемого графиком на оси ординат.

У функции $y = 0{,}5\,x + 1{,}5$ график отсекает на оси y отрезок, равный 1,5.

Это можно утверждать, если даже о форме графика мы ничего больше не знаем. Из сказанного ясно, что в каче-

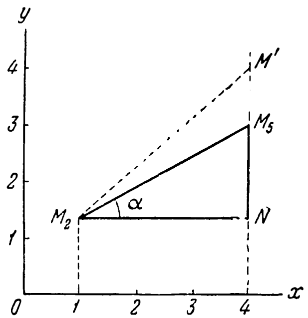


Рис. 8

Роль углового коэффициента в уравнении прямой

стве свободного члена может встретиться любое число. Оно обозначается обычно буквой b.

Для того чтобы установить роль множителя 0,5 и его влияние на форму графика, можно, например, рассмотреть треугольник M_2NM_5 на рис. 8. Гипотенуза M_2M_5 взята по рисункам 5—7. Катет M_2N имеет длину 3 единицы; длину катета NM_5 легко найти, если из отрезка a_5M_5 вычесть отрезок a_2M_2. Длина первого из них равна 2,8, длина второго — 1,3. Отсюда $NM_5 = 2{,}8—1{,}3 = 1{,}5$. Если разделить NM_5 на NM_2, то получится

$$\frac{1,5}{3,0} = 0,5,$$

т. е. тот множитель, который стоит при x в первом слагаемом правой части уравнения (2.2). Известно, что частное $\frac{NM_5}{NM_2}$ есть тангенс угла α — угла при вершине M_2. Следовательно, коэффициент при x есть тангенс угла наклона прямой [1]. Теперь нетрудно установить влияние этого коэффициента на положение прямой. Если он положительный, то угол наклона — острый; прямая поднимается, если идти вдоль оси x слева направо. Если коэффициент

[1] Угол наклона отсчитывается от оси x, но так как отрезок M_2N параллелен оси, то α и есть этот угол.

отрицательный, то угол наклона тупой: прямая опускается, если идти слева направо в прежнем направлении. На том же рис. 8 есть еще треугольник M_2NM'. Катет NM' больше катета NM_5, и частное $\frac{NM'}{NM_2}$ больше частного $\frac{NM_5}{NM_2}$. Таким образом, у прямой, на которой лежит гипотенуза M_2M', коэффициент при x больше, чем у прямой $y = 0{,}5x + 0{,}8$. Коэффициент при x определил крутизну прямой или угол ее наклона. Он называется угловым коэффициентом прямой. У прямых с разными углами наклона угловые коэффициенты могут быть самые разнообразные. Угловой коэффициент принято обозначать буквой k. Итак, вместо уравнения (2.2), пригодного для единственной прямой, получено уравнение

$$y = kx + b, \tag{2.3}$$

носящее название уравнения прямой с угловым коэффициентом. Оно пригодно для всякой прямой (кроме прямых, параллельных оси y): вместо буквы k надо поставить тангенс угла наклона прямой, вместо буквы b — свободный член или длину отрезка, отсекаемого прямой на оси y. Подведем итог сказанному: уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет в левой части функцию y, в правой части — сумму двух слагаемых. Первое из них содержит аргумент x, умноженный на угловой коэффициент, второе — свободный член. Угловой коэффициент определяет угол наклона прямой по отношению к оси x, или крутизну прямой. Свободный член дает величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Парабола

Параболы образуют многочисленную группу кривых. Их уравнения в основных чертах сходны между собою. Уравнение параболы [1]:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2.4}$$

Сопоставление уравнений (2.3) и (2.4) позволяет установить различия между ними.

[1] Существуют параболы с уравнениями другого вида.

Рис. 9

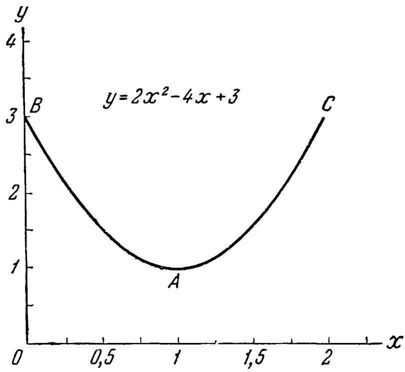


График функции
$y = 2x^2 - 4x + 3$

Главное отличие параболы от прямой заключается в том, что в уравнении параболы имеется член, содержащий x^2, которого в уравнении прямой нет. В уравнении параболы имеется три числовых коэффициента. В том случае, когда $a = 0$, уравнение параболы переходит в уравнение прямой:

$$y = bx + c.$$

При исследовании уравнения прямой была установлена роль коэффициентов k и b и их влияние на расположение прямой. Для параболы провести такое исследование значительно сложнее. Ниже приводятся основные результаты.

Свободный член c так же, как свободный член b в уравнении прямой, определяет отрезок, отсекаемый параболой на оси y. В этом легко убедиться, если положить $x = 0$. Члены ax^2 и bx обращаются в нуль, и остается $y = c$. Уравнение (2.5) дает пример уравнения параболы:

$$y = 2x^2 - 4x + 3. \tag{2.5}$$

График этой параболы приводится на рис. 9.

В примере вместо буквы c стоит число 3 (короче говоря, так: c равно 3). Отрезок на оси y должен равняться трем.

Следующая характерная точка кривой — ее вершина A (наиболее низко расположенная точка кривой). Расстояние этой точки от оси y вычисляется по формуле:

$$x_A = -\frac{b}{2a}.$$

В примере $a = 2$ и $b = -4$; следовательно,

$$x_A = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1.$$

Расстояние той же точки от оси x дается формулой:

$$y_A = c - \frac{b^2}{4a};$$

для параболы (2.5) эта формула дает:

$$y_A = 3 - \frac{16}{4 \cdot 2} = 3 - 2 = 1,$$

что подтверждается графиком этой параболы на рис. 9.

Еще одно число может служить характеристикой параболы: длина хорды BC, проведенной на уровне точки B, в которой кривая пересекает ось y,

$$l = \left| \frac{b}{a} \right|,$$

где l — длина хорды. Из уравнения (2.5) берутся $b = -4$ и $a = 2$; тогда

$$l = \frac{4}{2} = 2.$$

Синусоида

Уравнение кривой имеет следующий вид:

$$y = \sin x. \tag{2.6}$$

В этом уравнении аргумент x — угол. Он измеряется в градусах или радианах. Для того чтобы вычертить график кривой (2.6), надо задавать углу x разные значения и находить в таблице соответствующие значения синусов. Ниже даны некоторые углы и соответствующие им значения синусов.

$x°$	$y = \sin x$	$x°$	$y = \sin x$	$x°$	$y = \sin x$	$x°$	$y = \sin x$
0	0,000	60	0,866	150	0,500	270	—1,000
15	0,259	90	1,000	180	0,000	300	—0,866
30	0,500	120	0,866	210	—0,500	330	—0,500
45	0,707	135	0,707	240	—0,866	360	0,000

В таблице имеются отрицательные значения функции (между 180° и 360°). Для изображения их продолжают ось y вниз (рис. 10) и откладывают единицы того же масштаба, что и на положительной части оси y. Отрицательные значения y откладывают ниже оси x. График пересекает ось x в тех точках, где $y = 0$. Из таблицы видно, что $y = 0$ в точках $x = 0°$, $x = 180°$, $x = 360°$. Хотя выписка из тригонометрической таблицы заканчивается на $x = 360°$, ясно, что $\sin x = 0$ при $x = 360° + 180°$, $x = 360° + 360°$ и т. д. На рис. 10 отложены значения $\sin x$ от $x = 0°$ до $x = 360°$.

Характерные свойства кривой следующие.

Рис. 10

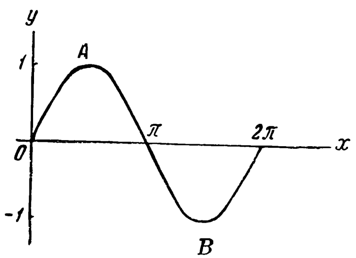
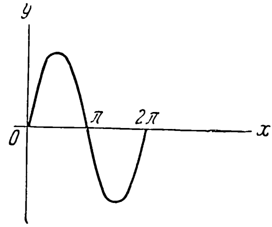


Рис. 11



10. График функции $y = \sin x$

11. График функции $y = \sin x$ при другом масштабе на оси x

Имеется точка, в которой функция достигает своего наибольшего значения (точка A). В этой точке $\sin x = 1$. Как известно, аргумент при этом равен 90°. Есть точка B, в которой функция имеет наименьшее значение: при $x = 270°$ синус угла равен —1. Для графика функции точка B — наинизшая, а точка A — наивысшая.

График функции, заданный уравнением (2.2), был прямой линией. Он не был ни выпуклым, ни вогнутым именно потому, что прямая есть единственная линия, которая не выгибается ни кверху, ни книзу. Парабола (2.5) имела график вогнутый. График функции $y = \sin x$ имеет участки выпуклости и вогнутости. Первый располагается между точками $x = 0°$ и $x = 180°$, второй относится к значениям x от 180° до 360°. Точки пересечения с осью x не относятся ни к участку выпуклости, ни к участку вогнутости. Говорят, что они отделяют участки выпуклости от участков вогнутости (или наоборот).

В предыдущих примерах графики функций вычерчивались в осях, на которых откладывались длины. При построении графика функции $y = \sin x$ на оси y откладываются длины, а на оси x — углы. В данном случае масштабы на осях не зависят один от другого. Поэтому одна и та же синусоида может выглядеть по-разному. На рис. 11 дан график той же функции

$$y = \sin x,$$

но размеры по оси x сжаты в два раза. Внешний вид кривой сильно изменился, хотя функция, для которой кривая служит графиком, осталась той же.

Этот пример показывает, что кривая характеризуется не внешним видом, а своими свойствами: расположением высших и низших точек, участками выпуклости и вогнутости, точками, отделяющими одни участки от других, и т. д. Эти свойства не зависят от выбора масштабов и осей.

Через некоторое время мы вернемся к вопросу о прямой, параболе и синусоиде и исследуем их свойства более глубоко, но уже средствами и способами высшей математики.

Приращение аргумента и приращение функции

В этом параграфе читатель познакомится с новыми понятиями. В школьной математике они даже не упоминаются, а в высшей играют основную роль. Речь идет о приращениях.

Для наглядности остановимся на знакомой функции, например на прямой

$$y = 0{,}5x + 0{,}8.$$

Пусть аргумент x имеет некоторое численное значение, например $x = 2$. Функция y при этом равна 1,8, как было вычислено раньше. Изменим величину аргумента. Для этого надо отнять или прибавить к $x = 2$ какое-нибудь число. Прибавим, например, 1, так что $x = 3$. При этом y тоже изменится: при $x = 3$ или $2 + 1$ получим $y = 2{,}3$ или $1{,}8 + 0{,}5$. Первоначальные значения аргумента и функции назовем старыми, значения, которые получают аргумент и функция после прибавлений, назовем новыми. Сами прибавления (1 для x и 0,5 для y в данном примере) назовем приращениями. Новое значение аргумента равно старому значению плюс приращение. Обозначим новые значения x_1 и y_1, приращения— Δx и Δy [1]. Ясно, что

$$x_1 = x + \Delta x \text{ и } y_1 = y + \Delta y$$

или иначе

$$\Delta x = x_1 - x \text{ и } \Delta y = y_1 - y \qquad (2.7)$$

Важнейшее свойство всякой функции есть ее связь с собственным аргументом. Связь эта выражается уравнением функции, например (2.2), (2.5) и т. д. Но еще более важна для изучения функции связь между ее приращением и приращением аргумента. Посмотрим, как эта связь устанавливается. Напишем уравнение прямой при

---

[1] Греческая буква Δ (дельта) использована здесь как первая буква слова «дифференция» (разность или приращение). Символ Δx читается «дельта икс». Нельзя считать его произведением Δ и x. Это слитный символ, вроде $\lg x$ или $\sin x$.

[2] Равенства (2.7) объясняют, почему наряду с названием «приращения» Δx и Δy имеют еще название «разности».

старых и новых значениях x и y:

$$y = 0{,}5x + 0{,}8,$$

$$y_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}8.$$

Вычтем верхнее уравнение из нижнего:

$$y_1 - y = 0{,}5\,(x_1 - x).$$

С помощью формулы (2.7) заменим $y_1 - y$ и $x_1 - x$ через Δy и Δx:

$$\Delta y = 0{,}5\Delta x. \tag{2.8}$$

Эта формула легко проверяется: когда аргументу было дано приращение 1,0, приращение функции оказалось равным 0,5.

Связь между приращением аргумента и приращением функции можно установить и для параболы. Следуем тому же порядку, что и в предыдущем расчете.

При старых значениях аргумента x и функции y:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2.9}$$

Даем x и y приращения Δx и Δy. Старые значения заменяются новыми: $y_1 = y + \Delta y$ и $x_1 = x + \Delta x$:

$$y + \Delta y = a\,(x + \Delta x)^2 + b\,(x + \Delta x) + c. \tag{2.10}$$

Выражение $(x + \Delta x)^2$ может быть заменено следующим выражением:

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Подставим эту замену в уравнение (2.10):

$$y + \Delta y = a\,[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + b\,(x + \Delta x) + c.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$y + \Delta y = ax^2 + 2ax\ \Delta x + a\,(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c. \tag{2.11}$$

Вычитаем уравнение (2.9) из уравнения (2.11):

$$(y + \Delta y) - y = ax^2 + 2ax\Delta x + a\,(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c - {}$$
$$- ax^2 - bx - c.$$

После приведения подобных членов получается следующее выражение:

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x.$$

Вынесем общий множитель Δx

$$\Delta y = (2ax + b)\,\Delta x + a(\Delta x)^2. \qquad (2.12)$$

Справедливость полученной только что формулы (2.12) легко проверить на известной нам параболе (2.5). В этом примере $a = 2$, $b = -4$, поэтому

$$\Delta y = (2\cdot 2\cdot x - 4)\,\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Например, при $x = 1$ и $\Delta x = 1$:

$$\Delta y = (4\cdot 1 - 4)\,\Delta x + 2(1)^2.$$

Первое слагаемое равно нулю. Остается

$$\Delta y = 2. \qquad (2.13)$$

Полученную величину Δy можно вычислить непосредственно по уравнению (2.5). Если взять $x = 1$, то

$$y = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 1.$$

Если увеличить x на 1 ($\Delta x = 1$), то

$$y_1 = 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 3.$$

Приращение функции:

$$\Delta y = y_1 - y = 3 - 1 = 2. \qquad (2.14)$$

Сравнивая (2.14) с (2.13), видим, что результаты обоих расчетов совпадают.

Зависимость между приращениями Δx и Δy очень удобно изучать на чертеже (рис. 12). При некотором значении аргумента x функция y изображается точкой M. Когда аргумент получает приращение Δx (см. на чертеже отрезок между точками x и x_1), функция переходит в точку M_1. Для того чтобы выделить приращение функции Δy, надо из нового значения y_1 вычесть старое y:

$$\Delta y = y_1 - y.$$

Рис. 12

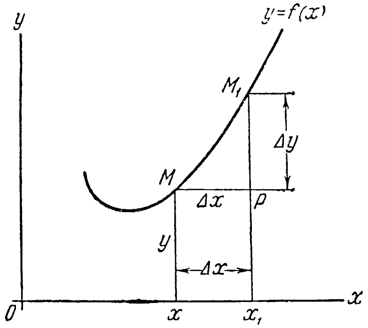
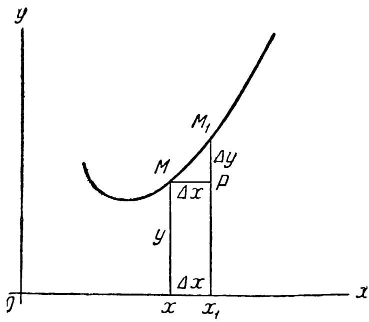


Рис. 13



12. Зависимость между приращениями Δx и Δy

13. Уменьшение Δy при уменьшении Δx у непрерывной функции

На чертеже это вычитание производится следующим образом. Через точку M проводится отрезок MP параллельно оси x. В прямоугольнике xx_1PM сторона xM равна x_1P. А так как отрезок xM равен значению функции y в точке x, то отрезок x_1P есть старое значение y. Поэтому отрезок PM_1 есть разность между новым значением функции x_1M_1 и старым значением xM. Отсюда следует, что приращение функции Δy изображается отрезком PM_1.

Связь между обоими приращениями выступает на чертеже очень явственно: Δx и Δy служат катетами в треугольнике MPM_1.

Возвратимся к формулам (2.8) и (2.12), которые дают ту же связь в виде формул, необходимых для расчетов. Надо обратить особое внимание на то, что в правой части обоих равенств нет слагаемых, не содержащих множителя Δx. В самом деле, в формуле (2.8) в правой части один член, и в нем имеется множитель Δx; в формуле (2.12) в правой части два слагаемых, и оба содержат Δx. Следствием этого важного обстоятельства является то, что с уменьшением длины отрезка Δx обязательно уменьшается и длина Δy. Мало того, если длина Δx неограниченно уменьшается до нуля, то и Δy обязательно уменьшается до нуля. Рис. 12 и 13 поясняют это интересное явление. На обоих рисунках даны графики одной и той же функции и на них — одна и та же точка M при одинаковых значениях аргумента x. Различаются же между собою приращения Δx. На рис. 13 Δx меньше, чем на рис. 12. Оказывается, что с уменьшением Δx уменьшилось и Δy. Из чертежа видно также, что с приближением Δx к нулю приращение Δy тоже неограниченно приближается к нулю. Это замечательное свойство функций называется непрерывностью. Не все функции обладают непрерывностью. Все содержание нашей книги относится только к непрерывным функциям — самым простым и наиболее важным для практики.

3.

ПРОИЗВОДНАЯ

В этой главе читатель познакомится с одним из важнейших понятий высшей математики—с производной, с помощью которой высшая математика решает многочисленные задачи.

Мгновенная скорость как предел средней

При первом знакомстве со средней скоростью оказалось, что это—понятие довольно неопределенное и во всяком случае не дающее ответа на вопрос, какую скорость имеет тело в определенный момент. Но так ли уж необходимо знать скорость тела именно в определенный момент? Нельзя ли удовольствоваться знанием средней скорости за 1 *сек* или за 0,5 *сек* и т. д.? Оказывается, что знание средней скорости во многих случаях не может дать удовлетворительного решения задачи. В самом деле, допустим, что надо вычислить бронебойную силу снаряда. Ясно, что она зависит от той скорости, которую имеет снаряд именно в момент удара, и что скорость, которую он имел за секунду до удара, не имеет никакого значения. Итак, предстоит решить задачу о мгновенной скорости тела (точнее говоря, материальной точки). Именно эта задача привела Исаака Ньютона к открытию производной.

Для нахождения мгновенной скорости надо вычислять средние скорости, но ход рассуждений несколько отличается от того, который был применен во «Введении». Возьмем тот же пример, $L = 0{,}1t^3 + 4$, и определим скорость в тот же момент — последнее мгновение 5-й секунды. Будем назначать все более короткие промежутки времени, как бы прижимая их к заданному мгновению. Естественно считать, что чем меньше промежуток, на протяжении которого вычислена средняя скорость, тем ближе ее значение к искомой мгновенной скорости. Однако в прошлый раз на этом пути возникли затруднения: оказалось, что чем меньше промежуток, тем больше средняя скорость. Не получится ли так, что при дальнейшем уменьшении промежутка средняя скорость по-прежнему будет расти и не даст ничего определенного?

Ответ на этот вопрос дают следующие расчеты.

Средняя скорость за время от 4,500 *сек* до 5,0 *сек* составляет 6,775 *м/сек*, от 4,800 *сек* до 5,0 *сек* — 7,204 *м/сек*. Средняя скорость возросла настолько сильно, что изменились все цифры, в том числе и первая.

Средняя скорость за время от 4,900 *сек* до 5,0 *сек* равняется 7,351 *м/сек*, от 4,950 *сек* до 5,0 *сек* — 7,425 *м/сек*. Средняя скорость изменяется уже не так быстро, как раньше: первая цифра не меняется. Следовательно, из енения стали в десять раз меньше. Ведь каждая единица первой цифры после запятой имеет в 10 раз меньшее значение, чем единица перед запятой.

Средняя скорость за время от 4,98 *сек* до 5,0 *сек* равняется 7,470 *м/сек*, от 4,99 *сек* до 5,0 *сек* — 7,490 *м/сек*. Теперь уже и вторая цифра не изменяется. Следовательно, изменения средней скорости стали еще в 10 раз слабее, а всего с начала вычисления — в 100 раз.

Средняя скорость за время от 4,995 *сек* до 5,0 *сек* равняется 7,495 *м/сек*. Третья цифра перестала изменяться. Это «замораживание» одной цифры за другой показывает, что средняя скорость приближается к какому-то устойчивому значению. По мере уменьшения промежутка времени, в дроби 7,49... будет устанавливаться все больше цифр, т. е. средняя скорость в своем замедляющемся изменении будет приближаться к какому-то значению.

Но как же все-таки получить мгновенную скорость? Ведь для этого надо уменьшить промежуток, на котором вычисляется средняя скорость, до нуля, а при этом, разумеется, и пройденный путь будет равен нулю. Делить нуль на нуль — может ли это иметь смысл?

Для того чтобы ответить на этот решающий вопрос, составим формулу для вычисления средней скорости.

$$\textit{Средняя скорость} = \frac{\textit{пройденный за промежуток времени путь}}{\textit{промежуток времени.}}\ .$$

Формула пути

$$L = 0{,}1t^3 + 4.$$

Через некоторый промежуток времени путь L примет новое значение. Обозначим его L_1. Время t тоже будет иметь другое значение, которое обозначим t_1. При таких обозначениях прошедший промежуток времени будет

$$t_1 - t.$$

Пройденный за это время путь равен

$$L_1 - L.$$

Используем введенные ранее обозначения:

$$t_1 - t = \Delta t; \; L_1 - L = \Delta L.$$

Подставляя эти выражения в формулу средней скорости, получим:

$$\text{средняя скорость} = \frac{\Delta L}{\Delta t},$$

или, обозначая среднюю скорость $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \tag{3.1}$$

Средние скорости, приведенные на стр. 34, вычислялись по этой формуле. Например, средняя скорость за промежуток от 4,9 *сек* до 5,0 *сек* получена так:

приращение времени $\Delta t = 5{,}0 - 4{,}9 = 0{,}1$ *сек*,
приращение пути $\Delta L = 16{,}5000 - 15{,}7649 = 0{,}7351$ *м*,

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0{,}7351}{0{,}1} = 7{,}351 \text{ м/сек}.$$

Когда в формуле (3.1) уменьшается знаменатель, то одновременно уменьшается и числитель. Частное (т. е. средняя скорость) приближается к какому-то значению, по-видимому, недалеко отстоящему от чисел 7,490 или 7,495.

Как же разыскать это значение? Вычисление уже доведено до $\Delta t = 0{,}01$ *сек*. Неужели вычислять при $\Delta t = 0{,}001$, $\Delta t = 0{,}0001$ и т. д.? Где же конец вычислениям? И есть ли он?

Ответы на эти вопросы существуют. Конец вычислениям есть. Но для этого надо сформулировать задачу по-новому.

Дано отношение приращения пути к приращению времени (т. е. дана дробь $\frac{\Delta L}{\Delta t}$). Нужно найти предел, к которому стремится это отношение, когда Δt стремится к нулю.

Эта задача выходит за рамки школьной математики. Она является ключевой задачей высшей математики. Решив ее, мы приобретем универсальное средство для решения огромного количества задач из всех областей науки.

Приступаем к решению [1]. Найдем развернутое выражение для пути ΔL, пройденного за промежуток времени Δt. Такое развернутое выражение необходимо для того, чтобы подставить в формулу (3.1). Чтобы получить ΔL, надо из нового значения пути L_1 вычесть его старое значение L. Старое значение L имеется:

$$L = 0{,}1t^3 + 4.$$

Чтобы получить новое, L_1, надо вместо времени t подставить новое — t_1. Из формулы (2.7) следует, что $t_1 = t + \Delta t$. Этой суммой и заменим t в формуле; тогда и L заменится на L_1.

$$L_1 = 0{,}1\,(t + \Delta t)^3 + 4. \qquad (3.2)$$

Развернем $(t + \Delta t)^3$ по формуле куба суммы:

$$L_1 = 0{,}1\,[t^3 + 3t^2(\Delta t) + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3] + 4$$

и после раскрытия скобок:

$$L_1 = 0{,}1t^3 + 0{,}3t^2(\Delta t) + 0{,}3t(\Delta t)^2 + 0{,}1\,(\Delta t)^3 + 4. \qquad (3.3)$$

Вычитая L из L_1, получаем ΔL:

$$\Delta L = [0{,}1t^3 + 0{,}3t^2(\Delta t) + 0{,}3t(\Delta t)^2 + 0{,}1\,(\Delta t)^3 + 4] - [0{,}1t^3 + 4] = 0{,}3t^2(\Delta t) + 0{,}3t(\Delta t)^2 + 0{,}1\,(\Delta t)^3. \qquad (3.4)$$

Для вычисления $v_{\text{ср}}$ требуется найти отношение $\frac{\Delta L}{\Delta t}$; используя для ΔL полученное выражение (3.4), получим:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0{,}3t^2(\Delta t) + 0{,}3t(\Delta t)^2 + 0{,}1\,(\Delta t)^3}{\Delta t}. \qquad (3.5)$$

[1] Конечно, в данном случае задача решается лишь в применении к частному примеру. В следующем параграфе дается решение в общем виде.

Разделив на Δt, найдем:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0{,}3t^2 + 0{,}3t(\Delta t) + 0{,}1(\Delta t)^2. \tag{3.6}$$

После того как отношение $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ приняло форму (3.6), можно обратиться к поставленным выше вопросам: до каких пор нужно уменьшать промежуток Δt и приведет ли такое уменьшение к результату, имеющему какую-нибудь ценность?

Анализ формулы (3.6) дает простой ответ: да, достаточно только предположить, что Δt неограниченно уменьшается (математики говорят: «Δt стремится к нулю, как к своему пределу»), чтобы сразу получить результат. Прежде всего, левая часть равенства (3.6) из средней скорости $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt превратится в мгновенную, так как при $\Delta t = 0$ промежуток времени обращается в нуль. Затем, второй член в правой части, т. е. $0{,}3t\ (\Delta t)$, обратится в нуль, так как множитель Δt будет равен нулю. В третий член $0{,}1(\Delta t)^2$ этот множитель входит даже во второй степени, и весь член тем более обращается в нуль. Но самое важное в правой части выражения (3.6) заключено в первом слагаемом. Это слагаемое не содержит множителя Δt. Поэтому стремление Δt к нулю никак не отражается на нем. Когда Δt стремится к 0, правая часть (3.6) стремится к $0{,}3t^2$. В левой же части, как сказано выше, при этом средняя скорость переходит в мгновенную. Окончательно получим:

$$v = 0{,}3t^2. \tag{3.7}$$

Таким образом, нами решена задача об отыскании предела отношения $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю. В то же время решена и чисто механическая задача: найдена мгновенная скорость тела (материальной точки), движущегося по закону $L = 0{,}1t^3 + 4$. Для получения численного ответа достаточно в формулу (3.7) подставить $t = 5$:

$$v = 0{,}3 \cdot 5^2 = 7{,}5\ м/сек. \tag{3.8}$$

Теперь понятно, почему средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за промежутки $\Delta t = 0{,}01$ *сек*, $\Delta t = 0{,}005$ *сек* и т. д., выражается числами: 7,4900; 7,4950; 7,4980; 7,4990 и т. д.

Здесь ясно видно, что средняя скорость приближается к своему пределу — мгновенной скорости, величина которой, как установлено с помощью формулы (3.8), равна 7,5000 *м/сек*.

В заключение подчеркнем, что решение задачи о пределе отношения $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ дало гораздо больше, чем ожидалось. В самом деле, с какой целью предприняты были розыски этого предела? Надо было получить мгновенную скорость в конце пятой секунды. Получили же формулу мгновенной скорости (3.7), которую можно применить к вычислению мгновенной скорости в любой момент t. Для этой цели достаточно в формулу (3.7) подставить вместо t его численное значение. Если, например, нужно вычислить мгновенную скорость в конце 3-й *сек*, то подставляем $t=3$: $v = 0{,}3 \cdot 3^2 = 2{,}7$ *м/сек* и т. д.

Производная

Выше говорилось, что решение задачи о пределе отношения ΔL к Δt откроет путь к решению множества задач из разных областей науки. Ясно, что найденному решению необходимо придать такую форму, чтобы оно не было связано ни с путем, ни со временем, а имело наиболее общий вид. Для достижения этого вместо аргумента — времени — вводится аргумент без конкретного физического содержания, аргумент вообще. Вместо функции — пути — вводится функция без конкретного содержания, функция вообще. Обозначаются эти переменные, как обычно, x и y, приращение аргумента Δx, приращение функции Δy, отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Решение задачи требует разыскания предела указанного отношения при условии, что Δx уменьшается до нуля.

Если искомый предел существует[1], то он называется производной. Производная — основное понятие высшей математики. Значение ее огромно. Поэтому необходимо дать возможно более точное определение для этого важ-

[1] Более строгое изучение функций обнаруживает, что такой предел существует не у всех функций. У функций, имеющих такой предел, могут быть при некоторых значениях аргумента точки, у которых предела нет.

нейшего понятия. Итак: производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Это же определение записывается в виде формулы:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.9}$$

Здесь y' (произносится «игрек штрих») есть обозначение производной функции y, $\lim$ — первые буквы французского слова «лимит» (предел). Символ $\Delta x \to 0$ означает, что приращение аргумента Δx стремится к нулю. Если сказать словами то, что записано формулой (3.9), получится в точности тот же текст, которым передано определение производной. Для задачи, решение которой найдено в виде уравнения (3.7), формула (3.9) принимает следующий вид:

$$L' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0{,}3t^2.$$

Пока что найдена производная только одной функции:

$$y = 0{,}1x^3 + 4.$$

В качестве примеров дальнейшего применения формулы (3.9) вычислим еще несколько производных других функций. Они будут использованы при решении более сложных задач.

Производная степенной функции

Степенной называется функция, содержащая аргумент в какой-нибудь степени. Когда степенная функция представляется в общем виде, то, конечно, вместо чисел пишутся буквы:

$$y = ax^n + b. \tag{3.10}$$

Чтобы найти производную функции (3.10), надо применить выражение (3.9). Для этого необходимо задать аргументу приращение Δx и вычислить приращение функции Δy.

Когда x переходит в $x_1 = x + \Delta x$, y принимает новое значение y_1:

$$y_1 = a(x + \Delta x)^n + b. \tag{3.11}$$

Скобка в этом равенстве развертывается по формуле бинома Ньютона:

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots$$

Многоточие в правой части последнего равенства показывает, что разложение продолжается. Скоро выяснится, что для нахождения производной нет надобности выписывать обязательно все члены разложения. При этом важно отметить, что во всех ненаписанных членах обязательно присутствует множитель Δx, причем уже в первом ненаписанном члене Δx находится в третьей степени, а в дальнейших — еще в более высоких степенях. Последний член разложения — $(\Delta x)^n$.

Все это разложение подставляется вместо скобки $(x+\Delta x)^n$ в (3.11):

$$y_1 = a[x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (\Delta x)^n] + b. \qquad (3.12)$$

После раскрытия скобок в (3.12) получим:

$$y_1 = ax^n + anx^{n-1}\Delta x + a\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a(\Delta x)^n + b. \qquad (3.13)$$

Для получения Δy надо из нового значения y_1, т. е. из выражения (3.13), вычесть старое значение (3.10):

$$\Delta y = y_1 - y = ax^n + anx^{n-1}\,\Delta x + a\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots +$$
$$+ a(\Delta x)^n + b - ax^n - b = anx^{n-1}\,\Delta x + \ldots + a(\Delta x)^n. \qquad (3.14)$$

Теперь можно составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, для чего достаточно равенство (3.14) разделить на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{anx^{n-1}(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{a\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2}{\Delta x} + \ldots + \frac{a(\Delta x)^n}{\Delta x}.$$

Все слагаемые правой части, как написанные, так и замененные многоточием, содержат множитель Δx в числителях и имеют то же приращение Δx в качестве знаменателя.

На это приращение можно дроби сократить. Только в первом слагаемом при сокращении не остается Δx, во всех остальных множитель Δx сохранится.

После этого получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = anx^{n-1} + \frac{an(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + a(\Delta x)^{n-1}. \quad (3.15)$$

После того как отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ найдено, можно приступить к отысканию предела при $\Delta x \to 0$.

В левой части (3.15) отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ переходит в производную y', в правой части все слагаемые, в которых имеются множители Δx, $(\Delta x)^2$ и т. д., стремятся к нулю, когда Δx приближается к своему пределу, т. е. к нулю. Только одно слагаемое не исчезает вместе с Δx. Это то слагаемое, которое не содержит Δx. Окончательно найдем:

$$y' = anx^{n-1}. \quad (3.16)$$

Найдена производная степенной функции (3.10). Так как численные коэффициенты заменены буквенными, то полученная формула (3.16) пригодна при всех численных значениях величин a, n и b[1].

Сравнивая заданную степенную функцию (3.10) и ее производную (3.16), легко получить следующее правило образования производной степенной функции.

Постоянный коэффициент a переходит из функции в ее производную без изменения.

Наряду с коэффициентом a появляется еще один множитель — показатель n аргумента x.

Сам аргумент x получает показатель $n-1$ — на единицу меньший, чем в заданной функции.

Свободный член функции b в производную не переходит.

Пример

Из физики известно, что путь свободно падающего тела выражается формулой:

$$H = g\frac{t^2}{2}.$$

[1] При выводе формулы (3.16) использована формула бинома Ньютона, в которой показатель n — целое и положительное число. Однако можно доказать, что, несмотря на это, формула (3.16) справедлива при любых n — целых, дробных, положительных, отрицательных и иррациональных.

Здесь H — пройденный путь, g — ускорение силы тяжести, равное 9,81 *м/сек*^{2}, и t — время в секундах. Формула выведена в предположении, что тело падает на землю в пустоте, так что воздух не мешает падению. В действительности все тела падают в воздухе. Но если тело невелико и, главное, сделано из тяжелого материала, то сопротивление воздуха настолько незначительно, что его можно во внимание не принимать. Например, для свинцового шарика сопротивление воздуха почти неощутимо.

Найдем скорость свободно падающего свинцового шарика в конце 3-й секунды; сопротивление воздуха учитывать не будем.

Выше было выяснено, что скорость движения есть производная пути по времени. Следовательно, чтобы решить предложенную задачу, надо найти производную пути H по времени.

Из формулы видно, что путь есть степенная функция времени. Правило для отыскания производной степенной функции известно. Применим его к данному случаю.

Постоянный коэффициент $\frac{g}{2}$ переходит из функции в ее производную без изменения.

Наряду с коэффициентом $\frac{g}{2}$ появляется еще один множитель — показатель 2 аргумента t.

Аргумент t получает показатель 1.

Свободного члена нет, да он и не вошел бы в производную.

В результате применения правила получена производная пути по времени:

$$H' = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot t = gt.$$

Эта производная дает скорость падения шарика. Чтобы вычислить скорость в конце 3-й секунды, достаточно подставить в формулу $t = 3$:

$$H' = 9{,}81 \cdot 3 = 29{,}43 \text{ м/сек}.$$

Пример

Найти производную функции

$$y = \sqrt[5]{\frac{a}{b^2x^4}}.$$

Решение

Хотя предложенная функция по своему виду сильно отличается от функции (3.10), ее нетрудно привести к той же форме. Это необходимо сделать, чтобы можно было применить правило отыскания производной степенной функции. Представим корень из частного как частное двух корней:

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b^2x^4}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b^2x^4}}.$$

Из алгебры известно, что корень любой степени можно записать в виде степени с дробным показателем:

$$\sqrt[5]{b^2x^4} = (b^2x^4)^{\frac{1}{5}} = b^{\frac{2}{5}}\,x^{\frac{4}{5}}.$$

Это выражение стоит в знаменателе функции. Алгебра разрешает переносить всякое выражение из знаменателя дроби в ее числитель (и обратно), если при этом изменить знак у показателя на противоположный. Сделаем так:

$$y = \frac{\sqrt[5]{a}}{b^{\frac{2}{5}}x^{\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{a}\cdot b^{-\frac{2}{5}}\cdot x^{-\frac{4}{5}}.$$

В этом виде заданная функция уже повторяет форму степенной функции (3.10). Роль постоянного коэффициента a здесь играет более сложное выражение $\sqrt[5]{a}b^{-\frac{2}{5}}$, а показателем у аргумента x служит отрицательная дробь $-\frac{4}{5}$. Установив такое соответствие между коэффициентами формулы (3.10) и данного примера, можно применить правило отыскания производной степенной функции.

Коэффициент производной будет состоять из коэффициента функции $\sqrt[5]{a}b^{-\frac{2}{5}}$ и показателя аргумента $-\frac{4}{5}$.

Показатель степени в производной получается из показателя степени в функции, который уменьшается на единицу:

$$-\frac{4}{5}-1=-\frac{9}{5}.$$

Свободного члена нет.

Производная заданной функции будет:

$$y'=-\frac{4}{5}\sqrt[5]{a}\,b^{-\frac{2}{5}}x^{-\frac{9}{5}}.$$

После преобразований получается окончательный результат:

$$y'=-\frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{a}{b^2}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[5]{x^4}}.$$

Пример

Тело движется по закону

$$L=0{,}5t^4-2t+6.$$

Требуется получить общую формулу для ускорения тела.

Решение

В механике доказывается, что ускорение есть производная скорости по времени. Но так как скорость сама есть производная, то ускорение оказывается второй производной пути по времени.

Заданную функцию L можно рассматривать как сумму двух степенных функций:

$$L=(0{,}5t^4)+(-2t+6).$$

Производная суммы функций равна сумме производных [1]. Если применить штрих для обозначения производных не только в левой части равенства, но и в правой, то производная пути будет выглядеть: $L'=(0{,}5\,t^4)'+(-2t+6)'$. Требуется найти производные двух степенных функций. Опять применим найденное правило отыскания производной.

[1] Это правило можно доказать.

Для первой функции правило дает: коэффициент, умноженный на показатель 4, будет $0,5 \cdot 4$; аргумент t возводится в степень $4 - 1 = 3$. Производная функция $0,5t^4$ равна $2t^3$.

Применим правило ко второй функции. Коэффициент -2 умножается на показатель степени, т. е. на 1: $-2 \cdot 1 = -2$; аргумент t в производную входит с показателем, на единицу меньшим показателя в функции. Но в функции t стоит в первой степени, значит в производной — в степени $1-1$, т. е. в нулевой. Однако известно, что всякое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице, поэтому производная функция $-2t + 6$ будет:

$$(-2t + 6)' = -2.$$

Чтобы получить L', надо сложить найденные производные:

$$L' = 2t^3 - 2\ [1].$$

Но L' есть скорость, по условию же задачи требуется найти ускорение, т. е. производную скорости. Обозначая производную скорости тоже штрихом, получим:

$$(L')' = L''.$$

Снова надо вычислить производную степенной функции $2t^3 - 2$.

Применим правило отыскания производной. Коэффициент 2 умножим на показатель 3; аргумент получит показатель $3 - 1 = 2$; свободный член -2 в производную не переходит. Получим:

$$L'' = 2 \cdot 3t^{3-1} = 6t^2.$$

Для нахождения ускорения тела в определенный момент достаточно в последнем выражении заменить t соответствующим числом. Найдем, например, ускорение тела в конце 4-й секунды:

$$L'' = 6 \cdot 4^2 = 96\ \text{м/сек}^2.$$

Производная синуса переменного угла

Производная функции

$$y = \sin x \tag{3.17}$$

[1] Попутно получено важное свойство аргумента: $t' = 1$, т. е. производная самого аргумента равна единице.

вычисляется по той же схеме, что и производная степенной функции. Аргументу x[1] задается приращение Δx. Новое значение угла x_1 равно $x + \Delta x$, при изменении угла изменится и его синус, т. е. функция y. Новое значение функции y_1 будет:

$$y_1 = \sin(x + \Delta x).$$

Чтобы получить приращение функции Δy, надо из нового значения функции y_1 вычесть ее старое значение y. Поэтому:

$$\Delta y = y_1 - y = \sin(x + \Delta x) - \sin x. \qquad (3.18)$$

По правилу вычисления производной полученное значение Δy надо разделить на величину Δx. Предварительно приходится преобразовать правую часть последнего равенства так, чтобы было удобно переходить к пределу при стремлении Δx к нулю. Для этой цели используется известная формула тригонометрии:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (3.19)$$

В формуле (3.18) роль α играет угол $x + \Delta x$, а роль β — угол x. Правую часть формулы (3.18) можно написать в следующей форме:

$$2\sin\left[\frac{(x + \Delta x) - x}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(x + \Delta x) + x}{2}\right].$$

Если провести все упрощения, то получим:

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Теперь можно разделить Δy на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

В числителе правой части равенства стоит произведение. Чтобы разделить произведение на Δx, достаточно разделить только один множитель, какой именно —

[1] В этой функции аргумент x есть угол. Он должен задаваться в радианах.

безразлично. Разделим на Δx синус угла; получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos\,\frac{2x+\Delta x}{2}. \tag{3.20}$$

Переходим к отысканию предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю. Угол $\frac{2x+\Delta x}{2}$, стоящий под знаком косинуса, при $\Delta x=0$ обратится в $\frac{2x}{2}$, т. е. в x; $\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$ перейдет в $\cos x$. Сложнее обстоит дело с синусом. Для того чтобы найти предел выражения $2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$, рассмотрим рис. 14. Здесь R — радиус окружности, l — длина дуги, d — длина стягивающей дугу хорды и Δx — центральный угол. Из геометрии известно, что длина хорды вычисляется по формуле:

$$d=2R\sin\frac{\Delta x}{2},$$

длина дуги:

$$l=R\Delta x.$$

Если составить отношение $\frac{d}{l}$, то получится:

$$\frac{2R\sin\frac{\Delta x}{2}}{R\Delta x}=2\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

т. е. как раз то выражение, предел которого требуется отыскать. Из сравнения рис. 14 и рис. 15 видно, что при уменьшении угла Δx длина дуги приближается к длине хорды. Однако пока Δx еще не нуль, длина дуги отличается от длины хорды и их отношение $\frac{d}{l}$ не равно единице. Только при достижении Δx своего предела, т. е. нуля, оно в точности равно единице. В курсах высшей математики это положение доказывается совершенно строго. Здесь нет возможности привести доказательства. Удовлетворимся тем, что проследим по таблице, как отношение $\frac{d}{l}$ приближается к 1 по мере того, как Δx приближается к нулю.

Когда $\Delta x=1{,}000$, отношение $\frac{d}{l}=0{,}95886$, при $\Delta x=$ $=0{,}400$, $\frac{d}{l}=0{,}99035$.

Рис. 14

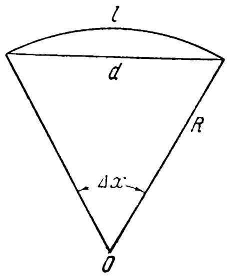
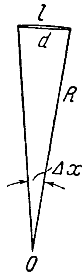


Рис. 15



14. Связь между дугой окружности l и хордой d

15. При уменьшении угла Δx длина хорды d приближается к длине дуги l

Мы видим, что первая девятка не изменяется, но следующие цифры не закреплены. Отношение возрастает еще быстро. Продолжим наблюдение: когда $\Delta x = 0{,}200$, отношение $\frac{d}{l} = 0{,}99830$, при $\Delta x = 0{,}100$, $\frac{d}{l} = 0{,}99960$. Уже три девятки зафиксированы. Если продолжать уменьшать Δx, то $\frac{d}{l}$ будет все больше приближаться к единице. Это позволяет принять, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{d}{l} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 1. \tag{3.21}$$

Возвращаемся к выражению (3.20). Предел левой части будет производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

как то установлено формулой (3.9); предел правой части состоит из предела $2 \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$ и предела $\cos \frac{2x + \Delta x}{2}$. Только что было установлено, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2 \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = 1$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = \cos x.$$

Окончательно получаем:

$$y' = \cos x. \tag{3.22}$$

Мы нашли простое правило для вычисления производной функции $y = \sin x$, т. е. производная синуса переменного угла равняется косинусу того же угла [1].

Заметим попутно, что производная синуса постоянного угла всегда равна нулю по той причине, что синус постоянного угла и сам — постоянная величина, а приращение постоянной величины равно нулю, т. е. $\Delta y = 0$, значит и $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Применим полученный результат к решению нескольких примеров.

Пример

Точка движется по прямой линии так, что ее расстояние от начального положения изменяется по закону синуса:

$$d = A \sin t.$$

Построить графики расстояния точки от начала координат и ее скорости в зависимости от времени.

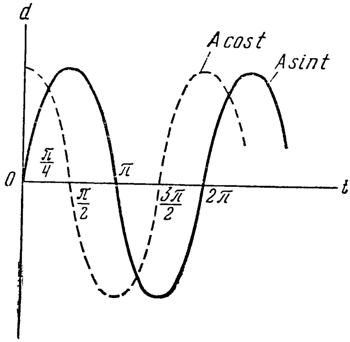
Для вычерчивания графика расстояния d в зависимости от времени используется такая же система двух взаимно перпендикулярных осей, как и раньше, но по горизонтальной оси откладывается аргумент t, по вертикальной — расстояние d (рис. 16). Время t входит под знаком синуса, поэтому его надо рассматривать как угол [2]. Разметка оси t

---

[1] Это правило справедливо лишь для синуса с аргументом x. Если угол под знаком синуса выражается более сложно, например $\sin x^2$ или $\sin(\lg x)$ и т. п., то полученное правило непригодно.

[2] Например, 1 *сек* считать за 1 радиан.

Рис. 16



Графики: синусоида и косинусоида

делается так, чтобы было удобно пользоваться таблицей тригонометрических величин: откладываются не 1, 2, 3 и т. д., а $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$, т. е. 45°, 90°, 135°,... Для каждого значения угла находится в тригонометрической таблице соответствующее значение синуса. Это значение умножается на коэффициент A [1]. Полученная величина и будет значением функции d, соответствующим данному значению аргумента t. Имея таблицу значений t и отвечающих им значений d, строим по известным правилам график функции

$$d = A \sin t,$$

как это сделано на рис. 16 (сплошная линия).

Для построения графика скорости v надо взять производную от d, так как скорость есть производная от пути по времени:

$$v = d' = (A \sin t)'.$$

Если повторить для $(A \sin t)'$ весь вывод, который применен для $(\sin t)'$, то легко убедиться, что постоянный множитель A не войдет ни в одно из преобразований. Его можно не принимать во внимание при нахождении про-

[1] Коэффициент при синусе угла называется амплитудой. То же относится к косинусу.

изводной $\sin t$, а просто приписать множителем при результате:

$$d' = A (\sin\ t)'.$$

Известно, что $(\sin\ t)' = \cos\ t$. Следовательно,

$$v = A \cos t.$$

Надо построить график этой функции. Легко сообразить, что никаких новых вычислений не требуется. Из тригонометрии известно:

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin (90° - t),$$

а это значит, что график $A\cos t$ будет получен, если график $A\sin t$ передвинется влево на 90°. График скорости на рис. 16 выполнен штриховой линией.

Найдем производную функции

$$y = \sin\ kx,$$

где k — постоянный коэффициент.

Если бы под знаком синуса стоял аргумент x, то можно было бы применить формулу (3.22) и получить ответ. Постоянный множитель k не позволяет поступить так просто. Приходится воспользоваться обходным маневром. Вместо аргумента x введем новый аргумент kx, который обозначим, например, z:

$$z = kx. \tag{3.23}$$

Функция $y = \sin\ kx$ переходит в функцию

$$y = \sin\ z,$$

поэтому можно применить формулу (3.22):

$$y' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = \cos z. \tag{3.24}$$

Для того чтобы от аргумента z вернуться к аргументу x, надо в формуле (3.24) выразить Δz через Δx. Представим себе, что коэффициент k равен, например, 3, так что угол $z = 3x$. Когда угол x получает приращение Δx, $3x$ получат, очевидно, приращение, в три раза большее, так что $\Delta z = 3\Delta x$. Подставляя в формулу (3.24), найдем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{3\Delta x} = \cos 3x.$$

Множитель $\frac{1}{3}$ под знаком предела не оказывает влияния на переход $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ к пределу, и его, как постоянный множитель, можно вынести за знак предела:

$$\frac{1}{3}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos 3x,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3\cos 3x;$$

вспомнив, что 3 введено вместо k, окончательно получим:

$$y'=(\sin kx)'=k\cos kx. \qquad (3.25)$$

Заметим (без доказательства), что производная функции $\cos kx$ выражается формулой:

$$y'=(\cos kx)'=-k\sin kx. \qquad (3.26)$$

Пример

Точка движется по закону

$$y=10\sin\frac{t}{20},$$

где амплитуда дана в сантиметрах, время — в секундах. Найти скорость и ускорение точки в конце 3-й секунды.

Решение

Скорость v есть производная пути по времени. Ускорение точки — вторая производная пути по времени. Постоянный множитель 10 на отыскание производной не влияет. Производную функции $\sin\frac{t}{20}$ находим по формуле (3.25). Коэффициент k равен $\frac{1}{20}$.

$$\left(\sin\frac{t}{20}\right)'=\frac{1}{20}\cos\frac{t}{20}.$$

Скорость движения:

$$v=y'=10\,\frac{1}{20}\cos\frac{t}{20}=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{20}.$$

Ускорение w находится как производная скорости; предварительно найдем производную $\cos\frac{t}{20}$ по формуле (3.26):

$$\left(\cos\frac{t}{20}\right)' = -\frac{1}{20}\sin\frac{t}{20},$$

и, значит, ускорение w дается формулой:

$$w = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\sin\frac{t}{20} = -\frac{1}{40}\sin\frac{t}{20}.$$

Скорость и ускорение в конце 3-й секунды получим, если вместо t подставим его численное значение $t = 3$:

$$v = \frac{1}{2}\cos\frac{3}{20} = \frac{1}{2}\cos 0{,}15,$$

$$w = -\frac{1}{40}\sin\frac{3}{20} = -\frac{1}{40}\sin 0{,}15.$$

По таблице тригонометрических величин[1] находим: $\sin 0{,}15 = 0{,}149$ и $\cos 0{,}15 = 0{,}989$. Подстановка в формулы скорости и ускорения дает:

$$v = 0{,}494 \ \textit{см/сек};$$
$$w = -0{,}0037 \ \textit{см/сек}^2.$$

[1] Речь идет о таблицах, в которых углы выражены в радианах. См., например: И. Н. Бронштейн и Н. А. Семендяев. Справочник по математике. М., 1957, стр. 52.

4.

АНАЛИЗ

Общие соображения

Когда изучается какое-нибудь явление из области физики, механики, астрономии и т. д., оно переводится на язык математики. Это значит, что взаимодействие между величинами, характеризующими данное явление, выражается в виде функциональной зависимости. Так, в механике, например, устанавливается функциональная зависимость между силами, действующими на тело, и характеристиками его движения; в физике — связь между количеством распадающегося радиоактивного вещества и временем и т. д. Чем объясняется стремление описывать физический процесс математически? Тем, что если функция правильно отражает свойства явления, то изучение явления можно в значительной степени заменить изучением функции. Если явление усиливается, то функция возрастает; если явление достигает наибольшего возможного для него развития, то и функция достигает наибольшей возможной для нее величины; когда условия таковы, что явление делается невозможным, функция перестает существовать. Вообще функция, хорошо согласованная с явлением, отражает все его фазы развития. Чем лучше научимся мы изучать функцию или, как говорят математики, исследовать функцию, тем тоньше и глубже роникнем в сущность явления. Вот почему анализ, или исследование функций, считается одной из важнейших областей высшей математики. Долгое время вся высшая математика называлась математическим анализом.

Цель настоящей главы состоит в том, чтобы показать, как используется производная функции в этой важной отрасли математики.

Возрастание и убывание функций

Определение

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на промежутке ab, если для любых двух значений x_1 и x_2, взятых на этом промежутке, y_2 больше y_1, когда x_2 больше x_1.

Другими словами,

$$y_2 - y_1 > 0,$$

когда

$$x_2 - x_1 > 0.$$

На рис. 17 изображена возрастающая функция на промежутке от $x = 1$ до $x = 6$. Показано, что если взять $x_1 = 2$, то $y_1 = 3$ и если $x_2 = 3$, то $y_2 = 4{,}5$; x_2 больше x_1 и y_2 больше y_1.

Читатель легко убедится, что на выбранном промежутке всегда y_2 будет больше y_1, если x_2 выбрано больше x_1. Это свидетельствует о том, что условия, приведенные в определении, соблюдаются, поэтому функция рис. 17 возрастает на промежутке от $x = 1$ до $x = 6$.

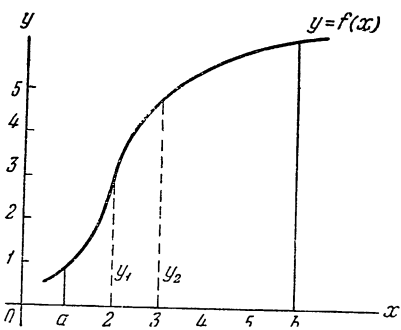


Рис. 17

График возрастающей функции на отрезке [а, в]

Определение

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на промежутке ab, если для любых двух значений x_1 и x_2, взятых на этом промежутке, y_2 меньше y_1, когда x_2 больше x_1.

На рис. 18 изображена функция, убывающая на промежутке от $x = 1$ до $x = 5$. Взяты значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Функция соответственно равна 5 и 3, т. е. y_2 меньше y_1. Из графика видно, что где бы ни взять x_2 и x_1, y_2 всегда будет меньше y_1, если x_2 выбрано больше x_1. За пределами указанного промежутка функция может изменить свое поведение и из убывающей стать возрастающей, как, например, на рис. 18 после $x = 6$. Однако то, что происходит за пределами рассматриваемого промежутка значений аргумента, не влияет на результаты рассмотрения.

О поведении функции во всех точках промежутка можно судить на основании следующей теоремы.

Теорема

Если во всех точках промежутка производная функции положительна, то функция на этом промежутке возрастает.

Доказательство

Допустим, что нам не известно, возрастает или убывает функция на данном промежутке. Известно только, что ее производная в любой точке промежутка положительна. Докажем, что этого достаточно для того, чтобы функция была на промежутке возрастающей.

Если производная положительна, то положительна и дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (это можно высказать в более строгой редакции, но здесь в ней нет необходимости). Известно, что знаменатель этой дроби положителен, так как $\Delta x = x_2 - x_1$, а x_2 и x_1 выбираются так, чтобы x_2 было больше x_1. Если дробь положительна, то значит числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Но знаменатель Δx положителен, следовательно, и числитель Δy положителен. А так как $\Delta y = y_2 - y_1$, то y_2 больше y_1. Согласно определению, такая функция — возрастающая. Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеется для убывающей функции. Коротко говоря, отрицательная производная указывает на то, что функция убывает. Точная формулировка и ход доказательства такие же, как для предыдущей теоремы.

Обе теоремы используются в следующих примерах.

Пример

Дана функция

$$y = -0{,}3x^3 + 2x + 6.$$

Определить, убывает она или возрастает на промежутках: от $x = 0{,}75$ до $x = 1{,}2$; от $x = 3{,}00$ до $x = 4{,}0$; от $x = -3{,}0$ до $x = -2{,}0$; от $x = -1{,}0$ до $x = 0{,}0$.

Заметим, что на поставленные вопросы можно ответить и не применяя методов высшей математики. Для этого надо вычертить график функции и рассмотреть его на указанных участках. Однако такой способ громоздок и неудобен. Во-первых, надо вычислить координаты большого числа точек, затем по точкам построить кривую. Во-вторых, нет гарантии, что между соседними найден-

Рис. 18

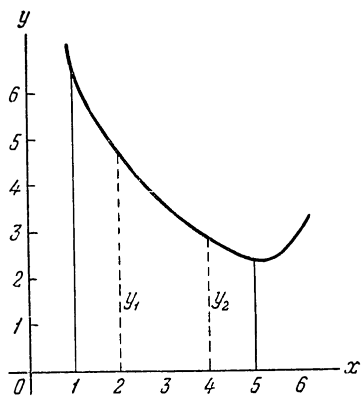


График убывающей функции на отрезке [1, 5] ными точками не пропущена какая-нибудь важная деталь кривой, например, острый пик или впадина и т. п. Читатель убедится, что применение производной позволит решить пример без чертежей и вполне надежно.

Решение

По известным правилам образования производной степенной функции находим производную заданной функции:

$$y' = -0{,}3 \cdot 3x^2 + 2 = -0{,}9x^2 + 2.$$

С помощью этой производной будет определяться поведение функции на заданных промежутках.

1. От $x = 0{,}75$ до $x = 1{,}2$. В самой левой точке промежутка, при $x = 0{,}75$, $y' = -0{,}9\,(0{,}75)^2 + 2 = 1{,}494$, т. е. производная положительна, значит, в этой точке функция возрастает. В крайней правой точке промежутка, при $x = 1{,}2$,

$$y' = -0{,}9\,(1{,}2)^2 + 2 = 0{,}704,$$

т. е. производная положительна. При любом значении x между 0,75 и 1,2 производная будет положительной. На промежутке от $x = 0{,}75$ до $x = 1{,}2$ функция возрастает.

2. От $x = 3{,}00$ до $x = 4{,}0$. При $x = 3$ $y' = -0{,}9 \cdot 3^2 + 2 = -8{,}1 + 2 = -6{,}1$, производная отрицательна, значит, в этой точке функция убывает.

При $x = 4$ $y' = -0{,}9 \cdot 4^2 + 2 = -14{,}4 + 2 = -12{,}4$. Функция и в этой точке убывает. В промежуточных точках, как легко убедится читатель, производная всюду отрицательна, поэтому функция убывает на всем промежутке.

3. От $x = -3{,}0$ до $x = -2{,}0$. Сделав такие же вычисления, как на предыдущих промежутках, получим: при $x = -3{,}0$ производная $y' = -6{,}1$, при $x = -2{,}0$ производная $y' = -1{,}6$, т. е. на всем промежутке функция убывает.

4. От $x = -1{,}0$ до $x = 0{,}0$. Здесь производная будет 1,1 и 2,0, т. е. на всем промежутке функция возрастает.

Как видно из проведенного исследования, ответы получены без помощи чертежа и с затратой ничтожно малого труда. Правда, график функции изучен не во всех подробностях. Но это дело дальнейшего анализа.

Пример

Программное устройство задает нагревательной печи изменение температуры в течение смены по закону:

$$T = 750 \sin \frac{4\pi}{7} t.$$

Здесь T — температура в рабочей камере печи, t — время от начала смены в часах. Определить, в какие промежутки (считая от начала смены) печь разогревается (температура в камере растет).

Решение

Температура задана как функция времени. Когда температура возрастает, ее производная должна быть положительной. Вопрос, поставленный задачей, можно сформулировать так: определить, на каких промежутках функция имеет положительную производную.

Производная синуса берется по формуле (3.25):

$$\left(\sin \frac{4\pi}{7} t\right)' = \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} t.$$

Производная функции T отличается лишь постоянным множителем 750:

$$T' = 750 \cdot \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} t.$$

Амплитуда косинуса $\left(750 \frac{4\pi}{7}\right)$ — величина положительная. Знак производной зависит только от знака косинуса: когда косинус положителен, производная положительна, при отрицательном косинусе производная отрицательна.

Известно, что косинус положителен в первой и четвертой четвертях, т. е. при углах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) и от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (от 270° до 360°). Заметим, что за время смены косинус успевает пройти два полных периода, так как $\cos \frac{4\pi}{7} t = \cos 4\pi$ при $t = 7$ часам. Это значит, что в конце смены под знаком косинуса стоит угол 4π (760°) — точно два периода.

За время смены радиус-вектор пробегает первую четверть не один раз, а дважды. То же надо сказать и о четвертой четверти. Найдем соответствующие значения времени.

Первый промежуток. Угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Неизвестное время — t_1. В момент начала смены угол равен нулю.

Получаем уравнение:

$$\frac{4\pi}{7}t_1 = 0,$$

отсюда

$$t_1 = 0.$$

В момент, когда угол достигает значения $\frac{\pi}{2}$, время равно t_2:

$$\frac{4\pi}{7}t_2 = \frac{\pi}{2};$$

отсюда

$$t_2 = \frac{7}{8}\ \text{ч}.$$

От начала смены температура растет в течение $\frac{7}{8}$ часа (52,5 *мин*), после чего начинает падать. Следующий подъем начнется в момент, когда радиус-вектор попадет в четвертую четверть:

$$\frac{4\pi}{7}t_3 = \frac{3\pi}{2},$$

откуда

$$t_3 = \frac{21}{8}\ \text{ч}.$$

Четвертая четверть заканчивается при угле 2π:

$$\frac{4\pi}{7}t_4 = 2\pi,$$

что дает:

$$t_4 = \frac{14}{4}\ \text{ч}.$$

Температура растет на промежутке от $t_3 = 2$ *ч* 37,5 *мин* до 3 *ч* 30 *мин*, т. е. опять в течение 52,5 *мин*. На этом заканчивается первый период косинуса. Первая четверть второго периода продолжается от угла 2π до угла $2\pi + \frac{\pi}{2}$, т. е. до $\frac{5\pi}{2}$. Получаем:

$$\frac{4\pi}{7} t_5 = 2\pi,$$

откуда

$$t_5 = \frac{14}{4} \text{ } ч = 3 \text{ } ч \text{ } 30 \text{ } мин.$$

При угле $\frac{5\pi}{2}$:

$$\frac{4\pi t_6}{7} = \frac{5\pi}{2}$$

получаем

$$t_6 = \frac{35}{8} = 4 \text{ } ч \text{ } 22{,}5 \text{ } мин.$$

Третий раз (за смену) печь разогревается от 3 *ч* 30 *мин* до 4 *ч* 22,5 *мин* или опять в течение 52,5 *мин*. Третий промежуток разогрева, вплотную примыкающий ко второму, образует вместе с ним фактически один промежуток удвоенной длительности 105 *мин*. Последний промежуток разогрева приходится на углы от $\frac{7\pi}{2}$ до 4π:

$$\frac{4\pi}{7} t_7 = \frac{7\pi}{2} \quad и \quad \frac{4\pi}{7} t_8 = 4\pi,$$

откуда

$$t_7 = \frac{49}{8} \text{ } ч = 6 \text{ } ч \text{ } 7{,}5 \text{ } мин \text{ и } t_8 = 7 \text{ } ч \text{ — конец смены.}$$

Последние 52,5 *мин* смены печь разогревается.

Пример показывает, что «поведение» промышленного устройства не обязательно изучать на самом устройстве. Изучение можно провести с помощью функции. Функция является как бы моделью самого объекта, его макетом. Это позволяет установить подробности «поведения» промышленного объекта, когда его еще нет в натуре, когда он находится в стадии проектирования.

Экстремум

Латинское слово «экстремум» означает «крайний». Экстремумом называют такое значение функции, которое больше (или меньше) ее соседних значений, расположенных слева и справа от этого значения.

Например, функция

$$y = \sin x$$

имеет экстремум при $x = \frac{\pi}{2}$. Действительно, для этого угла синус равен 1, а при всех других достаточно близко расположенных значениях угла синус меньше 1. Другой экстремум синуса расположен при $x = \frac{3\pi}{2}$ (при $x = 270°$). В этой точке $\sin x = -1$. Это наименьшее возможное значение синуса. При взгляде на график (см., например, рис. 16) видно, что $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ — точки, в которых функция имеет экстремумы.

Экстремум бывает двух видов: максимум и минимум. Максимумом называют такой экстремум, при котором данное значение больше соседних; минимумом — когда данное значение меньше соседних.

Исследование функций на экстремум принадлежит к важнейшим операциям анализа. Объясняется это огромной ролью экстремумов при решении практических задач. Значительная часть деятельности человека направлена на то, чтобы добиться экстремума в той или иной области. В самом деле, что такое хорошая организация работы, как не усилие добиться максимума результатов при минимуме затрат? К чему стремится проектировщик тепловой электростанции? К тому, чтобы станция выработала максимальное количество электроэнергии на единицу израсходованного топлива. Что такое «рациональный раскрой»? Это такой раскрой, когда из данной площади листового материала получается максимальное количество заготовок. Читатель и сам без труда укажет примеры, показывающие важную роль экстремумов в разных областях практики. В этом параграфе приводятся способы, при помощи которых высшая математика разыскивает эти столь важные значения функций.

Все рассуждения будут проведены в применении к максимуму. Минимум находится совершенно так же, и читатель может вывести соответствующие правила самостоятельно.

Итак, дана функция

$$y = f(x).$$

Имеет ли она максимум? Если имеет, то один или несколько и сколько именно? Как разыскать те точки, в которых расположены максимумы?

Рис. 19

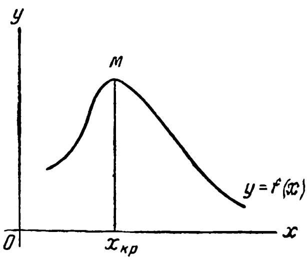
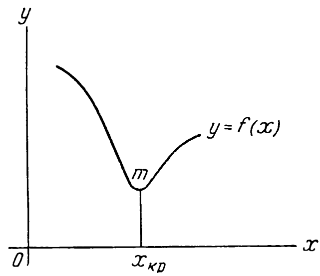


Рис. 20



19. В точке $x_{кр}$ функция $y = f(x)$ имеет максимум

20. В точке $x_{кр}$ функция $y = f(x)$ имеет минимум

Допустим, что задача решена, и максимум оказался, например, в точке $x = x_{кр}$ [1] (рис. 19). Точка M, согласно определению максимума, лежит выше соседних точек, расположенных слева и справа от нее. Это значит, что слева от $x_{кр}$ функция возрастает. Если же функция возрастает, то ее производная положительна. Итак, слева от точки максимума производная положительна [2]. Справа от точки максимума функция убывает. Ее производная отрицательна. Рассмотрим производную в самой точке $x_{кр}$, где производная не может быть положительной. В самом деле, допустим противное и положим, что производная в точке $x_{кр}$ положительна. Это означало бы, что функция в точке $x_{кр}$ возрастает. Но это невозможно: если бы функция в этой точке возрастала, то справа от $x_{кр}$ она имела бы значение больше M, и $x_{кр}$ не была бы точкой максимума. Значит, в точке $x_{кр}$ функция не может возрастать и производная в этой точке не может быть положительной. Она не может быть и отрицательной. Допустим про-

[1] Значок «кр» означает «критическое». Так называют те значения x, при которых функция имеет экстремум.

[2] Рассуждение относится только к таким функциям, которые имеют производную.

тивное. Это значило бы, что в точке $x_{кр}$ функция убывает и, следовательно, слева от $x_{кр}$ имеются значения функции больше M. Таким образом, доказано, что в точке $x_{кр}$ производная функции не может быть ни положительной, ни отрицательной. Остается единственная возможность: производная равна нулю. Так как из предположения наличия максимума получен новый вывод, то этот вывод необходим. Итак, необходимое условие максимума состоит в следующем: в точке максимума функции ее производная равна нулю.

Совершенно такое же рассуждение относительно точки минимума функции (рис. 20) приводит к необходимому условию минимума: в точке минимума функции ее производная равна нулю.

Применим полученные выводы к решению примера. Ранее изучалось возрастание и убывание функции

$$y = -0{,}3x^3 + 2x + 6.$$

При исследовании этой функции оказалось, что на некоторых промежутках она убывает, на других — возрастает. Естественно предположить, что на границах между участками возрастания и убывания расположены экстремумы. Поэтому представляет интерес исследовать функцию на максимум и минимум.

Решим эту задачу.

1. Находим производную функции:

$$y' = -0{,}3\cdot 3x^2 + 2.$$

2. В точках экстремума производная равна нулю. Следовательно, если положить

$$-0{,}3\cdot 3x^2 + 2 = 0,$$

то это равенство будет справедливо только в тех точках, в которых возможен экстремум. Величины x в этих точках обозначены $x_{кр}$, значит:

$$0{,}9x_{кр}^2 - 2 = 0. \tag{4.1}$$

Найдем из этого уравнения $x_{кр}$:

$$x_{кр}^2 = \frac{2}{0{,}9} \approx 2{,}22.$$

Функция обладает двумя критическими точками. Первая критическая точка:

$$x_{1\,\text{кр}} = -\sqrt{2,22} \approx -1,49,$$

вторая:

$$x_{2\,\text{кр}} \approx 1,49.$$

Необходимое условие экстремума позволило определить две точки, в которых можно ожидать максимум и минимум функции. Ни в каких других точках эта функция иметь экстремум не может. Выше было показано, что равенство производной нулю — необходимое условие, без которого, очевидно, экстремум невозможен. Исследуемая же функция имеет производную, равную нулю, только в двух точках: — 1,49 и 1,49; в других точках экстремум невозможен.

Можно ли быть уверенным, что в найденных точках экстремумы действительно существуют? Нет, нельзя. Необходимое условие может не быть достаточным. Может случиться, что в некоторой точке какая-нибудь функция имеет производную, равную нулю, а экстремума нет. Следующий пример пояснит сказанное.

Дана функция

$$y = x^3.$$

Ее производная:

$$y' = 3x^2.$$

Найдем критические точки. Для этого приравняем производную нулю:

$$3x^2_{\text{кр}} = 0.$$

Отсюда находим, что $x_{\text{кр}} = 0$. Функция может иметь экстремум в точке $x_{\text{кр}} = 0$. Имеет ли она его в действительности? Достаточно взглянуть на график функции (рис. 21), чтобы ответить на вопрос отрицательно. Никакого экстремума в точке $x_{\text{кр}} = 0$ функция не имеет. Этот пример показывает, что найти критические точки еще не значит решить вопрос. Надо предварительно испытать на наличие экстремума каждую точку. Для этого используется достаточное условие экстремума.

Вернемся к рис. 19. Выше было выяснено, что слева от критической точки производная функции положительна, справа — отрицательна. Это означает, что в критической

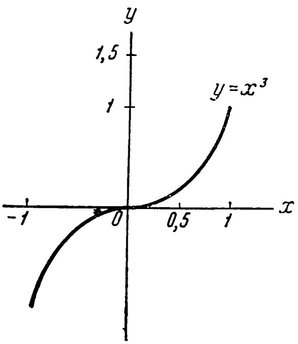


Рис. 21

Функция $y = x^3$
не имеет
ни максимума,
ни минимума

точке происходит смена знака производной. Это условие может быть достаточным, если быть уверенным, что при отсутствии этого условия экстремум невозможен. Рис. 21 показывает, что это так и есть. Функция $y = x^3$ возрастает и слева от критической точки $x_{кр} = 0$ и справа от нее. Следовательно, производная положительна по обе стороны от критической точки. Нет смены знака производной — нет и экстремума. Проведенное рассуждение дает условие экстремума: для того чтобы функция имела экстремум в критической точке, достаточно, чтобы производная при переходе через эту точку меняла знак. Аналогично рассуждая относительно минимума (рис. 20), получим следующее правило. Если производная слева от критической точки положительна, а справа от нее отрицательна, то функция в этой точке имеет максимум; если производная слева от критической точки отрицательна, а справа от нее положительна, то функция в этой точке имеет минимум.

Располагая необходимым и достаточным условиями экстремума, можно провести полное исследование функции на экстремум. Налагая на функцию необходимое условие экстремума, определяют критические точки, т. е. точки, в которых экстремумы возможны; применяя к этим точкам достаточные условия, выясняют, действительно ли экстремумы существуют и, если существуют, то в каких точках максимумы и в каких минимумы.

Возвращаемся к примеру. Функция

$$y = -0{,}3x^3 + 2x + 6$$

имеет две критические точки: $x_{1\text{кр}} \approx -1{,}49$ и $x_{2\text{кр}} \approx 1{,}49$. Сделаем проверку первой из них. Для этой цели отступим от критической точки влево и определим знак производной; затем отступим вправо и снова определим знак производной. Если окажется, что знак производной не изменился, то никакого экстремума нет; если же знак производной изменился, то экстремум есть.

Найдем значение производной при $x = -1{,}50$. Получим:

$$y' = -0{,}9(-1{,}50)^2 + 2 = -0{,}025.$$

Найдем теперь значение производной при $x = -1{,}48$:

$$y' = -0{,}9(-1{,}48)^2 + 2 = 0{,}029.$$

При переходе через критическую точку произошла смена знака производной. Это показывает, что в первой критической точке имеется экстремум функции. Какой именно? Так как при следовании слева направо знак изменился с минуса на плюс, то при $x_{1\text{кр}}$ функция имеет минимум.

Проверка критической точки $x_{2\text{кр}} \approx 1{,}49$ производится в том же порядке. Сначала отступим влево, т. е. возьмем $x = 1{,}48$:

$$y' = -0{,}9(1{,}48)^2 + 2 = 0{,}029,$$

т. е. производная положительна. Затем отступим вправо; возьмем $x = 1{,}50$:

$$y' = -0{,}9(1{,}50)^2 + 2 = -0{,}025.$$

В этой критической точке производная тоже изменила знак, но на этот раз с плюса на минус. Функция в этой точке имеет максимум.

Замечание. Исследование производной на изменение знака потребовало выполнения четырех вычислений. Если функция имеет значительное число критических точек, то эти вычисления становятся обременительными. Можно провести исследование без всяких вычислений. Ниже описывается соответствующий прием в применении к тому же примеру в точке $x_{2\text{кр}} \approx 1{,}49$.

Чтобы отступить от критической точки немного влево, отнимаем от 1,49 малое число, обозначенное буквой h:

$$1{,}49 - h.$$

Это число подставляем в производную:

$$y' = -0{,}9\,(1{,}49 - h)^2 + 2.$$

В сущности прием уже применен. Остается проделать алгебраические преобразования для упрощения дальнейших рассуждений. Раскроем скобки:

$$y' = -0{,}9\cdot 1{,}49^2 + 0{,}9\cdot 2\cdot 1{,}49\cdot h - 0{,}9\cdot h^2 + 2.$$

Перегруппируем члены правой части:

$$y' = (-0{,}9\cdot 1{,}49^2 + 2) + 0{,}9\,(2\cdot 1{,}49\cdot h - h^2).$$

Выражение в первых скобках правой части есть не что иное, как левая часть уравнения (4.1), в которое подставлен один из корней этого уравнения, следовательно, оно равно нулю. Из вторых скобок можно вынести общий множитель h. Производная в точке $1{,}49 - h$ принимает вид:

$$y' = 0{,}9h\,(2\cdot 1{,}49 - h).$$

Подчеркнем, что никаких вычислений до настоящего момента не было, были только алгебраические преобразования. Приступаем к выяснению знака производной, что тоже будет проделано без вычислений.

Производная в последнем выражении представлена в виде произведения: $0{,}9\,h$ умножается на выражение в скобках. Множитель $0{,}9\,h$ положителен. Если выражение в скобках имеет знак плюс, то и все произведение имеет знак плюс, и производная положительна. В противном случае производная отрицательна. В скобках первый член положителен, второй — отрицателен. Но второй член содержит малое число h. Мы можем его выбрать настолько малым, чтобы он был меньше $2\cdot 1{,}49$. Тогда выражение в скобках будет положительным, значит положительной будет и производная y'. Чтобы отступить от критической точки вправо, надо к 1,49 прибавить малое число h: $1{,}49 + h$ и подставить в производную:

$$y' = -0{,}9\,(1{,}49 + h)^2 + 2.$$

Проделаем все преобразования в том же порядке еще раз и получим:

$$y' = -0{,}9h(2\cdot 1{,}49 + h).$$

Снова производная представлена в виде произведения, но теперь выражение в скобках заведомо положительно, и, следовательно, знак производной определяется знаком минус, стоящим перед $0{,}9h$. Производная справа от критической точки отрицательна.

В результате исследования функции

$$y = -0{,}3x^3 + 2x + b$$

стало известно следующее:

на промежутке от —3 до —2 функция убывает;

в точке $x \approx -1{,}49$ функция имеет минимум;

на промежутке от —1 до 0 функция возрастает;

на промежутке от 0,75 до 1,2 функция возрастает;

известно, что между 0 и 0,75 функция не имеет ни максимума, ни минимума. Следовательно, функция возрастает на всем промежутке от —1 до 1,2;

на промежутке от 3 до 4 функция убывает.

Хотя анализ функции проведен не полностью, мы узнали достаточно, чтобы построить ее график. Он позволит получить наглядное представление о поведении функции.

Значения функции в точках экстремума получим, если в уравнение функции подставим значения $x_{1кр}$ и $x_{2кр}$.

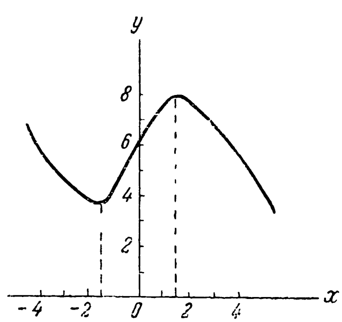


Рис. 22

График функции
$y = -0{,}3x^3 + 2x + 6$

В первой критической точке:

$$y = -0{,}3(-1{,}49)^3 + 2(-1{,}49) + 6 = 3{,}99.$$

Во второй критической точке:

$$y = -0{,}3(1{,}49)^3 + 2(+1{,}49) + 6 = 8{,}00.$$

Воспользуемся еще тем, что значение функции в точке $x = 0$ вычисляется просто:

$$y = +0{,}3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 = 6.$$

График функции приведен на рис. 22.

Пример

Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 0{,}5x + 0{,}8.$$

Этот пример интересен тем, что на нем выяснится, как обнаружить отсутствие экстремума функции.

Необходимое условие экстремума заключается в том, что первая производная функции равна нулю. Находим ее:

$$y' = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5.$$

Величина производной не зависит от x и ни при каком значении x обратиться в нуль не может, поэтому функция экстремумов не имеет.

Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^2 - 4x + 3.$$

Определим, имеет ли парабола экстремумы, сколько и где. Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = 2 \cdot 2 \cdot x_{\text{кр}} - 4 \cdot 1 = 0,$$

откуда

$$4x_{\text{кр}} = 4; \quad x_{\text{кр}} = 1.$$

Оказалось, что парабола может иметь один экстремум и что экстремум, если он есть, расположен в точке $x = 1$.

Выясним характер экстремума. Для этого от $x_{кр} = 1$ отнимем малое число h и подставим в выражение y':

$$y' = 4(1 - h) - 4 = -4h.$$

Производная слева от $x_{кр}$ отрицательна. Чтобы отступить от $x_{кр}$ вправо, надо прибавить к $x_{кр} = 1$ малое число h и подставить в производную:

$$y' = 4(1 + h) - 4 = 4h.$$

Оказалось, что справа от $x_{кр}$ производная положительна. Смена знака производной указывает, что экстремум действительно имеется. Изменение знака с минуса на плюс указывает, что экстремум — минимум. Вычислим значение функции в точке минимума. Для этого в уравнение функции подставим $x = 1$:

$$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1.$$

Теперь можно сравнить полученные здесь результаты с данными графика той же параболы на рис. 9.

До сих пор примеры отыскания экстремума имели, так сказать, тренировочный характер. Они показывали, как следует применять необходимое и достаточное условия экстремума. Переходим к практическим задачам.

Применение теории к практике

ЗАДАЧА ПЕРВАЯ

О размерах сосуда

В главе I была поставлена задача: найти такие размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала. Там же было показано, что средствами школьной математики эту задачу решить нельзя.

Ниже приводится решение, полученное с помощью анализа. Процесс решения делится на три части. Во-первых, надо выразить площадь поверхности сосуда как функцию его размеров, во-вторых, найти минимум этой функции; наконец, проверить, что вычисленное количество действительно минимально.

В главе I выведена формула (1.3), связывающая площадь поверхности S с радиусом основания r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Первая часть решения выполнена.

Теперь отыскиваем экстремум функции S. Находим производную функции S, для чего переписываем ее в таком виде, чтобы оба слагаемых имели форму степенных функций:

$$S = 2\pi r^2 + 2Vr^{-1}. \qquad (4.2)$$

Производная будет:

$$S' = 2\cdot 2\cdot \pi\cdot r^{2-1} + 2(-1)Vr^{-2} = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2}. \qquad (4.3)$$

Приравняем производную нулю:

$$4\pi r_{\text{кр}} - \frac{2V}{r_{\text{кр}}^2} = 0, \qquad (4.4)$$

отсюда

$$r_{\text{кр}}^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

Перейдем от радиуса к диаметру основания:

$$2r_{\text{кр}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

$$d_{\text{кр}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}. \qquad (4.5)$$

Эта формула дает наиболее выгодный диаметр, т. е. именно тот диаметр, при котором сосуд емкостью V кубических единиц требует наименьшего количества материала.

Надо еще получить формулу для высоты сосуда наиболее выгодного размера. Воспользуемся выражением

$$V = \pi\frac{d^2}{4}h$$

и подставим его в формулу (4.5), получим:

$$d_{\text{кр}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi d_{\text{кр}}^2}{4}h_{\text{кр}}\right)}.$$

Возведем обе части равенства в куб; это даст

$$d_{\text{кр}}^3 = d_{\text{кр}}^2 h_{\text{кр}},$$
$$d_{\text{кр}} = h_{\text{кр}}. \tag{4.6}$$

Последнее равенство служит ответом на поставленный вопрос: наивыгоднейшим с точки зрения экономии материала будет тот сосуд, у которого высота равна диаметру.

Проверим, действительно ли в критической точке $d_{\text{кр}}$ имеется экстремум и, если имеется, то именно минимум. Для этого надо исследовать знаки производной. В выражение (4.4) подставляем $r_{\text{кр}} - h$:

$$2\pi (r_{\text{кр}} - h)^3 - V.$$

После раскрытия скобок[1] получим:

$$2\pi r_{\text{кр}}^3 - V - 6\pi r_{\text{кр}}^2 h + 6\pi r_{\text{кр}} h^2 - 2\pi h^3.$$

Первые два члена представляют собой левую часть равенства (4.4), следовательно, в сумме равны нулю. В остающихся трех членах можно вынести за скобки $2\pi h$, после чего выражение примет вид:

$$2\pi h (-3r_{\text{кр}}^2 + 3r_{\text{кр}} h - h^2).$$

Величина $2\pi h$ положительна и знак произведения определяется знаком скобок. В скобках первое слагаемое отрицательно; второе и третье содержат h и h^2. Эти величины можно выбрать как угодно малыми, поэтому они не могут влиять на знак многочлена в скобках. Итак, произведение — отрицательно, производная слева от критической точки отрицательна.

Возьмем теперь сумму $r_{\text{кр}} + h$, подставим в (4.4) и сделаем необходимое преобразование. Получим выражение:

$$2\pi h (3r_{\text{кр}}^2 + 3r_{\text{кр}} h + h^2),$$

в котором в скобках положительное число. Значит, и само произведение положительно. Производная справа от критической точки положительна.

---

[1] Малая величина h в этом исследовании не имеет, конечно, ничего общего с высотой h сосуда.

При переходе через критическую точку производная меняет знак, поэтому экстремум имеется. Знак изменился с минуса на плюс — функция имеет минимум.

Остается проверить, что найденные диаметр и высота действительно наивыгоднейшие. Для проверки надо положить $V = 1000$ *см*^{3} и вычислить $d_{\text{кр}}$, $h_{\text{кр}}$ и с помощью их значений подсчитать полную поверхность S. Затем взять диаметр, меньший, чем $d_{\text{кр}}$, и снова подсчитать S; потом задаться диаметром, большим, чем $d_{\text{кр}}$, и т. д. Ввиду того, что эти подсчеты не выходят за рамки школьной геометрии, читатель без труда проделает их самостоятельно.

ЗАДАЧА ВТОРАЯ

О наивыгоднейшей скорости

Затраты во время хода корабля складываются из стоимости топлива и некоторых других расходов. Стоимость топлива A связана со скоростью хода корабля следующей формулой:

$$A = 0{,}03V^3,$$

где V — скорость корабля в *км/час*. Остальные расходы пусть составляют B рублей на каждый час хода. Необходимо определить скорость, при которой расходы, приходящиеся на каждый пройденный километр, будут наименьшими.

Объяснение

При очень малой скорости расход топлива невелик, но корабль будет так долго в пути, что другие расходы непомерно возрастут. При большой скорости время хода уменьшится, зато количество топлива будет намного больше. Поэтому должна существовать такая скорость, при которой сумма расходов $A + B$ окажется наименьшей. Работники водного транспорта называют эту скорость экономической. В предложенной задаче требуется найти экономическую скорость данного корабля.

Решение

Выразим расходы как функцию скорости. Полную стоимость одного часа хода обозначим S *руб/час*. Тогда:

$$S = A + B$$

или

$$S = 0{,}03V^3 + B \;\text{\textit{руб/час}}.$$

Расходы на 1 *км* пройденного пути получим, если расходы, приходящиеся на один час, разделим на число пройденных за час километров. Но скорость V как раз и есть число километров, проходимых в час. Поэтому, если обозначить s стоимость одного километра пройденного пути, то

$$s = \frac{S}{V}$$

или

$$s = \frac{0{,}03V^3 + B}{V} = 0{,}03V^2 + \frac{B}{V}.$$

Расходы на 1 *км* пути получены как функция скорости. Найдем теперь минимум функции. Перепишем s в форме степенной функции:

$$s = 0{,}03V^2 + BV^{-1}.$$

Производная будет:

$$s' = 0{,}06V - BV^{-2}.$$

Приравняем ее нулю:

$$0{,}06V_{\text{кр}} - \frac{B}{V_{\text{кр}}^2} = 0.$$

Отсюда

$$V_{\text{кр}}^3 = \frac{B}{0{,}06}.$$

Если B, например, равно 480 руб., то

$$V_{\text{кр}} = 20 \;\text{\textit{км/час}}.$$

При этой скорости расходы, приходящиеся на 1 *км* пройденного пути, будут наименьшими.

Предлагаем читателю проверить и убедиться в том, что функция s действительно имеет экстремум при $V = 20$ *км/час* и что этот экстремум — минимум. Кроме того, надо вычислить расход на 1 *км* при скорости $V = 20$ *км/час* и убедиться, что при всякой другой скорости (как меньшей, так и большей) расход возрастет.

ЗАДАЧА ТРЕТЬЯ

О свойствах числа

Разложить число 8 на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Объяснение

Разложим число 8 на слагаемые 7 и 1. Сумма их кубов равна $7^3 + 1^3 = 344$. Если разбить 8 на 6 и 2, то сумма кубов будет $6^3 + 2^3 = 224$; видим, что сумма уменьшается. Если продолжать уменьшать первое слагаемое и увеличивать второе, то придем к такому положению, когда первое слагаемое будет 1, а второе — 7, и сумма их кубов снова будет 344. Ясно, что где-то между этими разложениями должно иметься такое, при котором сумма кубов — наименьшая.

Решение

Выразим сумму кубов как функцию слагаемых. Пусть одно неизвестное слагаемое равно x. Тогда второе будет $8 - x$. Сумму их кубов обозначим S:

$$S = x^3 + (8 - x)^3 = 8^3 - 3 \cdot 64x + 24x^2.$$

Найдем производную:

$$S' = -3 \cdot 64 + 2 \cdot 24 \cdot x.$$

Приравняем ее нулю:

$$48x_{\text{кр}} - 192 = 0,$$

откуда:

$$x_{\text{кр}} - 4 = 0,$$

$$x_{\text{кр}} = 4.$$

Одно слагаемое равно 4, следовательно, и второе равно 4. Сумма кубов будет:

$$S = 4^3 + 4^3 = 128.$$

Всякое другое разложение приведет к сумме, превышающей найденную.

Любопытно, что найденное разложение, т. е. $x_{\text{кр}} = 4$, продолжает давать минимум S даже в том случае, если разложить 8 так, чтобы одно из слагаемых было больше 8; второе при этом должно быть, конечно, отрицательным. Пусть одно слагаемое равно 10; второе -2, так что их сумма действительно равна 8:

$$10 + (-2) = 8.$$

Такое разложение дает:

$$S = 10^3 + (-2)^3 = 1000 + (-8) = 992,$$

что намного превосходит найденную выше минимальную сумму $S = 128$.

5.

РЯД МАКЛОРЕНА

Высшая математика располагает замечательным способом вычисления функций. Это — способ рядов.

Рядом называется сумма членов вида

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

Точки читаются «и так далее». За членом u_2 идет u_3, затем u_4 и так продолжается до бесконечности. На первый взгляд может показаться, что бесконечное число слагаемых не дает ничего, кроме бесконечно большой величины. Но если вспомнить, что бесконечная убывающая геометрическая прогрессия как раз и является рядом с бесконечно большим количеством членов, а между тем имеет конечную сумму, то обращение с бесконечными рядами не покажется таким уж бесполезным делом.

Знакомство с рядами полезно начать с их роли в следующей задаче. Вернемся к понятию функции. Чтобы выразить зависимость одной переменной величины от другой, пишут формулу, например:

$$y = -0{,}3x^3 + 2x + 6. \tag{5.1}$$

Правая часть указывает, какие действия надо выполнить над x, чтобы получить y. К сожалению, это бывает не всегда.

Вот простой пример:

$$y = \sin\frac{\pi}{2}. \tag{5.2}$$

Известно, что $\sin\frac{\pi}{2}$ равен единице, но не известно, какие действия требуется выполнить над $\frac{\pi}{2}$, чтобы получить единицу. Этим и отличается запись функции (5.2) от записи (5.1). Можно, правда, сказать, что нет никакой необходимости в действиях над $\frac{\pi}{2}$, достаточно измерить линию синуса в тригонометрическом круге и разделить ее длину на радиус круга. Если угол равен $\frac{\pi}{2}$, то длина линии синуса будет в точности равна радиусу и их частное даст искомую единицу.

Такое возражение, хотя и верно, но слишком ограниченно. Как, например, получить синус угла

$$\alpha = 32°17'24'',3?$$

Не говоря о том, что измерение линии синуса пришлось бы проделать с недостижимой точностью, еще перед измерением потребовалось бы отложить угол с точностью до десятых долей секунды. Современная техника не может выполнить такой задачи.

В таком случае возникает вопрос: как же вычислить синус приведенного выше угла? Как вообще вычисляются таблицы синусов и других тригонометрических функций, таблицы логарифмов и вообще многочисленные таблицы, без которых немыслима работа астрономов, геодезистов, артиллеристов, топографов и многих других специалистов?

Все эти таблицы составляются при помощи рядов. Если бы ряды использовались только при составлении таблиц, то этого уже было бы достаточно для того, чтобы придавать им важнейшее значение в математике. На самом деле их роль гораздо шире. Поэтому необходимо познакомиться хотя бы в самом сжатом виде с этим математическим понятием.

Ряды бывают самые разнообразные, но наиболее употребительные из них требуют применения только хорошо известных простейших действий: сложения, умножения и возведения в степень, заменяющих те не известные нам действия, с помощью которых следовало бы для угла $\frac{\pi}{2}$ получить его синус, равный 1, или для числа 2 — его логарифм, равный 0,30103 и т. д.

Вывод формулы

Ставится следующая задача: представить некоторую функцию $y = f(x)$ в виде суммы бесконечно большого числа слагаемых:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \qquad (5.3)$$

Каждое слагаемое состоит из коэффициента a_n и множителя x^n. Если считать a_0 — нулевым членом, a_1x — первым и т. д., то можно заметить, что порядковый номер члена есть значок коэффициента a и степень аргумента x; например, третий член содержит a_3 и x^3 и т. д. Задачу можно перефразировать: говорят, что необходимо разложить функцию $f(x)$ по степеням x или представить $f(x)$ в виде бесконечного степенного ряда. Точки в конце правой части указывают, что вслед за написанными членами стоят члены a_4x^4, a_5x^5 и так до бесконечности.

Почему речь идет о бесконечно большом числе слагаемых? Дело в том, что в выражении (5.3) между $f(x)$ и суммой членов стоит знак равенства. В теории рядов доказывается, что функцию $f(x)$ можно приблизительно представить и в виде конечного числа слагаемых, однако это приблизительное представление будет содержать некоторую погрешность. Эта погрешность тем меньше, чем больше членов в сумме. Погрешность окончательно исчезает только тогда, когда число членов ряда делается бесконечно большим. Здесь уместно ответить на вопрос, неизбежно возникающий у каждого, кто впервые встречается с бесконечными рядами. Допустим, удастся представить $f(x)$ в виде бесконечного ряда. Неужели потребуется вычислить бесконечное количество слагаемых и, мало того, сложить их? Посильное ли это дело?

Никакой необходимости вычислять бесконечное число членов нет (это, кстати, и невозможно). Всякий ряд имеет смысл лишь тогда, когда его члены достаточно [1] быстро убывают. Если, например, 3-й член составляет 10% 2-го, а 4-й член — 10% 3-го, то, значит, 4-й составляет только 1% 2-го, 5-й—0,1% 2-го и т. д. Отсюда ясно, что нет необходимости вычислять больше членов, чем это требуется. Надо только довести вычисление до той точности, которая соответствует поставленной задаче. Так, например, конструкторские расчеты обычно выполняются с точностью около 1%. Если первые пять членов обеспечивают эту точность, то на пятом члене и следует закончить разложение функции $f(x)$. На примере это будет показано.

Обращаемся к выводу формулы. Вывод состоит в том, чтобы для каждой функции $f(x)$ найти присущие ее разложению коэффициенты a_0, a_1, a_2, . . .

[1] Как понимать «достаточно», можно было бы уточнить, но это выходит за рамки нашей книги.

Определение a_0. Исходим из предположения, что ряд (5.3) изображает функцию $f(x)$ при различных значениях x, в том числе и при $x = 0$. Нулевой член a_0 — единственный член, не содержащий множителя x. Поэтому, если в формулу (5.3) подставить $x = 0$, то исчезнут все члены ряда, кроме a_0, а $f(x)$ примет значение $f(0)$. Равенство (5.3) дает:

$$f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots$$

откуда:

$$f(0) = a_0. \tag{5.4}$$

Пусть, например, определяется a_0 в разложении функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots$$

Подставляем в равенство $x = 0$:

$$\cos 0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots$$

Известно, что $\cos 0 = 1$. Следовательно,

$$1 = a_0.$$

Нулевой член ряда определен. Точно так же для $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

получаем

$$\sin 0 = a_0, \text{ т. е. } a_0 = 0.$$

В разложении $\sin x$ нулевой член отсутствует. Можно сформулировать правило: чтобы получить нулевой член разложения a_0, нужно найти значение функции при $x = 0$.

Определение a_1. Коэффициент a_1 можно определить тем же способом, если предварительно удастся сделать два упрощения: избавиться от a_0 (потому что a_0 не исчезнет при подстановке $x = 0$) и освободить a_1 от сомножителя x (в противном случае при $x = 0$ исчезнет весь член и a_1 вместе с ним). Все это достигается отысканием производных от обеих частей равенства (5.3). Производная функции $f(x)$ в левой части равенства (5.3) обозначена штрихом при функции $f'(x)$. В правой части стоит некоторое количество слагаемых. Известно, что производная суммы равна сумме производных. Каждое слагаемое в правой части (5.3) есть степенная функция, производная которой берется по известному правилу. Приступаем к вычислению производных. Производная нулевого члена равна нулю, так как нулевой член есть величина постоянная. Производная первого члена равна a_1:

$$(a_1x)' = a_1.$$

Производная второго члена:

$$(a_2x^2)' = a_2\cdot 2\cdot x^{2-1} = 2a_2x.$$

Производная третьего члена:

$$(a_3x^3)' = a_3\cdot 3x^{3-1} = 3a_3x^2.$$

Вообще всякий член вида a_nx^n дает производную

$$(a_nx^n)' = na_nx^{n-1}.$$

Теперь можно написать:

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots \quad (5.5)$$

Переход от самой функции $f(x)$ к ее производной $f'(x)$ действительно избавил правую часть от a_0 и коэффициент a_1 от x. Подставим $x = 0$:

$$f'(0) = a_1 + 2a_2\cdot 0 + 3a_3\cdot 0 + 4a_4\cdot 0 + \ldots$$

Отсюда:

$$f'(0) = a_1.$$

Рассмотрим пример. Найдем a_1 в разложении $\sin x$:

$$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Производные левой и правой частей будут:

$$\cos x = 0 + a_1\cdot 1 + a_2\cdot 2\cdot x + a_3\cdot 3\cdot x^2 + \ldots$$

Подставим в это равенство $x = 0$:

$$\cos 0 = a_1 + a_2\cdot 2\cdot 0 + a_3\cdot 3\cdot 0 + \ldots,$$

что дает:

$$a_1 = 1.$$

Свободный член a_0 для разложения $\sin x$ был определен раньше. Известны уже два члена разложения:

$$\sin x = 0 + 1\cdot x + \ldots$$

Теперь можно сформулировать правило: чтобы получить коэффициент a_1 первого члена разложения, достаточно взять производную функции и подставить в нее $x = 0$.

Определение a_2. Найдем снова производную, теперь уже от (5.5). В левой части получится $[f'(x)]'$, т. е. производная от производной. Она называется второй производной функции и обозначается $f''(x)$. В правой части нужно найти производные всех членов. Производная a_1 равна нулю. Следующий член $2a_2x$ дает производную $2a_2$; член, содержащий x^2, имеет в производной x в первой степени; следующий член $4a_4x^3$ дает в производной x^2; дальнейшие члены будут иметь x^3, x^4 и т. д. Получается следующее равенство:

$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4\cdot a_4x^2 + 4\cdot 5\cdot a_5x^3 + \ldots \quad (5.6)$$

После подстановки $x = 0$ равенство (5.6) определяет a_2:

$$f''(0) = 2a_2,$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Сформулируем еще правило: чтобы получить коэффициент a_2 второго члена разложения, достаточно взять вторую производную разлагаемой функции, подставить в нее $x = 0$ и разделить на 2.

Чтобы получить коэффициент a_3, надо взять производную от равенства (5.6). В левой части получится третья производная функции, $f'''(x)$, в правой части исчезнет a_2, а $2.3\,a_3$ избавится от множителя x. Затем, при подстановке $x = 0$, получим:

$$f'''(0) = 2\cdot 3\cdot a_3,$$

откуда

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{2\cdot 3}.$$

Нетрудно установить, что

$$a_4 = \frac{f''''(0)}{2\cdot 3\cdot 4},$$

и вообще

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot 3\ldots n}. \quad (5.7)$$

Последняя формула дает возможность вычислить коэффициент любого члена. Для этого надо взять производную, порядок которой равнялся бы номеру члена, затем подставить в нее $x = 0$ и разделить на последовательное произведение всех целых чисел от 1 до номера n. Такое последовательное произведение называется факториалом и обозначается числом с восклицательным знаком. Например, 5! читается «пять факториал» и равняется $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Формула (5.7) обычно записывается в виде:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{5.8}$$

Если собрать в одной формуле все найденные до сих пор коэффициенты, то получим общее выражение разложения функции:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \\ + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^{(n)} + \ldots \tag{5.9}$$

Эта формула и представляет разложение функции $f(x)$ в ряд Маклорена[1].

Из формулы (5.9) следует, что в ряд Маклорена можно разложить только такую функцию, у которой имеется неограниченное количество производных: 1-я, 2-я и т. д. до бесконечности. К счастью, наиболее важные для практики функции (тригонометрические, логарифмические и др.) удовлетворяют этому требованию.

Разложение синуса

Синус переменного угла обладает неограниченным числом производных и, следовательно, может быть разложен в ряд Маклорена. Первая производная синуса была получена раньше:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Вторая производная синуса получается как первая производная косинуса:

$$(\sin x)'' = (\cos x)'.$$

Эта производная получается примерно так же, как была

[1] К. Маклорен (1698—1746) — английский математик (шотландец по происхождению). Название данного ряда его именем общепринято, но исторически не оправдано, так как ряд был известен и до Маклорена.

получена и производная синуса. По этой причине мы опускаем вывод и приводим окончательный результат:

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.10}$$

Оказалось, что вторая производная синуса равна самому синусу, только взятому с противоположным знаком. Это обстоятельство позволяет находить высшие производные без дополнительных вычислений: всякая производная, выражающаяся синусом, порождает следующую производную — косинус, а производная, выражающаяся косинусом, дает следующую производную — синус (с учетом изменения знака).

Приступаем к разложению. Для этой операции необходимо располагать производными $f'(0)$, $f''(0)$ и т. д. Заготовим эти выражения.

Заданная функция	Ее значение при $x = 0$
$f(x) = \sin x;$	$f(0) = \sin 0 = 0.$
1-я производная	Значение $f'(x)$ при $x = 0$
$f'(x) = \cos x;$	$f'(0) = \cos 0 = 1.$
2-я производная	Значение $f''(x)$ при $x = 0$
$f''(x) = -\sin x;$	$f''(0) = -\sin 0 = 0.$
3-я производная	Значение $f'''(x)$ при $x = 0$
$f'''(x) = -\cos x;$	$f'''(0) = -\cos 0 = -1.$
4-я производная	Значение $f''''(x)$ при $x = 0$
$f''''(x) = -(-\sin x) = \sin x.$	$\sin 0 = 0.$

Четвертая производная совпала с самой функцией. Дальше производные будут повторяться: пятая совпадет с первой, шестая — со второй, седьмая — с третьей и т. д. Руководствуясь формулой (5.9), составим члены ряда:

Нулевой член	$a_0 = f(0) = 0.$
Первый член	$a_1 x = f'(0) \cdot x = 1 \cdot x = x.$
Второй член	$a_2 x^2 = \frac{f''(0)}{2!} x^2 = \frac{0}{2!} x^2 = 0.$
Третий член	$a_3 x^3 = \frac{f'''(0)}{3!} x^3 = \frac{-1}{3!} x^3 = -\frac{x^3}{3!}.$
Четвертый член	$a_4 x^4 = \frac{f''''(0)}{4!} x^4 = \frac{0}{4!} x^4 = 0.$
Пятый член	$a_5 x^5 = \frac{f'''''(0)}{5!} x^5 = \frac{1}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5!}.$
Шестой член	$a_6 x^6 = \frac{f''''''(0)}{6!} x^6.$

Шестая производная, совпадающая со второй, дает 0 при $x = 0$; то же происходит с восьмой, десятой и вообще со всеми четными производными.

Заготовленные производные позволяют выписать начало разложения функции $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 + \ldots$$

или, опуская нули:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad (5.11)$$

Рассматривая строение правой части последнего равенства, легко подметить закономерность в образовании слагаемых: степень аргумента x возрастает с каждым членом на 2 единицы, соответственно изменяется и факториал в знаменателе; знаки плюс и минус чередуются так, что члены с нечетными номерами имеют плюс, с четными — минус. Разложение можно продолжить:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \qquad (5.12)$$

В математической литературе принято включать в разложение общий член. Для разложения синуса общий член имеет вид:

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Эта формула позволяет написать любой член разложения, для чего достаточно заменить букву n номером члена, считая в (5.12) только имеющиеся там в наличии. Так, например, при $n = 2$:

$$u_2 = (-1)^{2-1} \frac{x^{2\cdot 2-1}}{(2\cdot 2-1)!} = -\frac{x^3}{3!}.$$

При $n = 5$ получим:

$$n_5 = (-1)^{5+1} \frac{x^{2\cdot 5-1}}{(2\cdot 5-1)!} = \frac{x^9}{9!}.$$

Дополнение формулы (5.12) общим членом придает ей окончательный вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (5.13)$$

После общего члена надо обязательно поставить многоточие, чтобы было видно, что разложение продолжается.

Пример применения разложения в ряд

Чем меньше x, тем быстрее уменьшаются члены ряда и тем проще его применение. Возьмем поэтому сравнительно небольшой угол $x = 0{,}1$ радиана (т. е. 5 *град* 43 *мин* 46,5 *сек*). Подставляем $x = 0{,}1$ в формулу (5.13):

$$\sin 0{,}1 = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{3!} + \frac{(0{,}1)^5}{5!} - \frac{(0{,}1)^7}{7!} + \frac{(0{,}1)^9}{9!} - \ldots$$

Прежде чем приступить к вычислениям, надо условиться, с какой точностью их выполнять. Тригонометрические таблицы, предназначенные для инженерно-технических расчетов, редко содержат больше пяти десятичных знаков после запятой. Поэтому значение $\sin 0{,}1$ будет вычислено с тем же числом знаков.

Сперва вычислим положительные члены, потом отрицательные и вычтем вторую сумму из первой.

Напомним, что номер члена отсчитывается не по общей формуле ряда (5.9), а по ряду (5.12) или (5.13). Найдем первый член:

$$u_1 = x = 0{,}10000.$$

После единицы поставлено четыре нуля, чтобы число знаков после запятой равнялось пяти, как было условлено.

Следующий положительный член ряда — третий:

$$u_3 = \frac{(0{,}1)^5}{5!} = \frac{0{,}00001}{120}.$$

Числитель состоит из одной единицы пятого знака, т. е. стоит на самой границе требуемой точности. Его надо уменьшить более чем в 100 раз. Это значит, что третий член способен повлиять только на седьмой знак после запятой, поэтому его можно отбросить. Ясно, что члены u_5, u_7 и т. д. тем более можно не вычислять.

Первый отрицательный член:

$$u_2 = -\frac{(0{,}1)^3}{3!} = -\frac{0{,}001}{6} = -0{,}00017.$$

Этот член содержит 17 единиц пятого знака и поэтому не может быть отброшен. Следующий отрицательный член

u_4 расположен за членом u_3, который был отброшен. Он отбрасывается по той же причине, что и u_3. Остается вычесть u_2 из u_1:

$$\sin 0{,}1 = 0{,}10000 - 0{,}00017 = 0{,}09983.$$

Пятизначные таблицы тригонометрических величин дают:

$$\sin 5°43'46'' = 0{,}09986.$$

Расхождение составляет около 0,03%, т. е. примерно в 50 раз меньше, чем допускается в обычных технических расчетах. Этот пример показывает, как используются ряды для вычисления численных значений функций, как быстро «сходится» ряд $\sin x$, т. е. как мало членов ряда надо использовать, чтобы получить довольно высокую точность. Из всего бесконечного числа членов ряда понадобилось только два! Из примера также видно, что угол в 6° надо считать, с точки зрения приближенных вычислений, довольно малым.

Приведем еще пример применения разложения в ряд.

Пусть необходимо вычислить с помощью рядов $\sin 63°$. Такой большой угол неудобен для разложения, так как потребовалось бы вычислить много слагаемых. Применяется следующий прием. Угол 63° представляется как сумма $45° + 18°$. Тогда

$$\sin(45° + 18°) = \sin 45° \cos 18° + \cos 45° \sin 18°.$$

Известно, что

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin(45° + 18°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 18° + \sin 18°).$$

Остается применить разложение в ряд и вычислить $\sin 18°$ и $\cos 18°$. Но

$$\sin 18° = \sin 0{,}314,$$

поэтому подставляем $x = 0{,}314$ в формулу (5.13) и производим необходимые вычисления. Для того чтобы вычислить $\cos 18°$, надо знать разложение $\cos x$, для чего, в свою очередь, потребуются производные $\cos x$. При разложении $\sin x$ эти производные уже были получены. Нетрудно проверить, что $\cos x$ имеет следующее разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Рекомендуется вычисления проделать самостоятельно. Должен получиться результат: $\sin 63° = 0{,}89101$.

Биномиальный ряд

Дана функция

$$f(x) = (1 + x)^m. \tag{5.14}$$

Требуется разложить ее в ряд Маклорена.

В том случае, когда m — целое положительное число, выражение (5.14) есть известный бином Ньютона. Его разложение является конечным рядом. Во всех прочих случаях, например при дробных m, формула бинома Ньютона к (5.14) уже неприменима. Требуется найти для функции ряд Маклорена, т. е. выполнить разложение по формуле (5.9). Для этого надо располагать производными разлагаемой функции. Вычислим их. Заданная функция — степенная. Ее производная составляется по найденному выше правилу.

Согласно этому правилу получим:

$$[(1 + x)^m]' = m(1 + x)^{m-1}. \tag{5.15}$$

Первая производная оказалась тоже степенной функцией. Следовательно, ее производная берется по тому же правилу. Вторая производная будет:

$$[(1 + x)^m]'' = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}. \tag{5.16}$$

Следующая производная имеет вид:

$$[(1 + x)^m]''' = m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}. \tag{5.17}$$

Закон образования дальнейших производных понятен. Для ряда Маклорена нужны сама функция и ее производные при значении $x = 0$, поэтому вычислим значения производных и функции при $x = 0$:

$$f(0) = (1+0)^m = 1, \qquad (5.18)$$

$$f'(0) = m(1+0)^{m-1} = m, \qquad (5.19)$$

$$f''(0) = m(m-1)(1+0)^{m-2} = m(m-1), \qquad (5.20)$$

$$f'''(0) = m(m-1)(m-2). \qquad (5.21)$$

Найденные значения функции и ее производных при $x = 0$ подставляем в формулу (5.9):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4 + \ldots \qquad (5.22)$$

Общий член последнего разложения предлагаем составить читателю. Разложение (5.22) называется биномиальным рядом.

Рассмотрим пример. Дана функция

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Пользуясь биномиальным рядом, выполнить ее разложение в ряд. Представим корень в виде степени с дробным показателем:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

У этой степенной функции показатель m равен $\frac{1}{2}$; следующий за ним показатель будет $m - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, далее $m - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ и т. д.

Подставляем эти результаты в формулу (5.22) биномиального ряда:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \\ + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4 + \ldots \qquad (5.23)$$

После вычислений, которые пропускаются ввиду их простоты, получается окончательная формула биномиального ряда для функции $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\cdot\frac{1}{4!}x^4+\ldots$$

Тот же результат можно записать в следующей форме:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots \quad (5.24)$$

Приведем примеры на применение полученной формулы. Пусть x — какое-нибудь число, малое по сравнению с единицей, скажем, $x = 0{,}01$. В этом случае третий член разложения (5.24), т. е. $-\frac{x^2}{8}$, равняется $-0{,}0000125$. Это настолько малая добавка к первым двум членам, что ею в большинстве расчетов можно пренебречь. Останутся только первые два члена разложения.

Из общей формулы разложения квадратного корня (5.24) получается простая и очень полезная для практики формула извлечения корня из числа, мало отличающегося от единицы:

$$\sqrt{1+x}\cong 1+\frac{x}{2}. \quad (5.25)$$

Требуется, например, вычислить $\sqrt{1{,}02}$. Применяя формулу (5.25), получим:

$$\sqrt{1{,}02}=\sqrt{1+0{,}02}\cong 1+0{,}01=1{,}01.$$

Конечно, этот результат не вполне точен. Ведь в бесконечном ряде (5.24) взяты не все члены, а только первые два, следовательно, допущена погрешность. Какова она? В справочниках дается следующее значение для $\sqrt{1{,}02}$:

$$\sqrt{1{,}02}=1{,}0100.$$

Отсюда видно, что применение формулы (5.25) привело к ошибке меньшей, чем 0,0001. Результат прекрасный, если принять во внимание, как проста формула (5.25), с помощью которой он получен.

Рассмотрим еще пример. Требуется вычислить $\sqrt{68{,}3}$. Прежде чем применить формулу (5.25), надо преобразовать подкоренное число, чтобы под корнем получить сумму единицы и малого слагаемого. В таких случаях рекомендуется представлять число как сумму двух слагаемых, из которых одно является полным квадратом, например 25, 36 и т. д. Второе слагаемое должно быть значительно меньше первого. Число 68,3 лучше всего записать в виде суммы:

$$64 + 4{,}3 = 64\left(1 + \frac{4{,}3}{64}\right).$$

Теперь можно извлечь корень из 64:

$$\sqrt{68{,}3} = 8\sqrt{1 + \frac{4{,}3}{64}}.$$

Применим к корню формулу (5.25). Роль x играет дробь $\frac{4{,}3}{64}$. Следовательно, решение будет:

$$\sqrt{68{,}3} = 8\left(1 + \frac{4{,}3}{2 \cdot 64}\right) = 8{,}269.$$

В справочной таблице находим:

$$\sqrt{68{,}3} = 8{,}264.$$

Произведенное в примере вычисление дало погрешность около 0,07%; лучшего совпадения нельзя и желать. Найдем аналогичную вышеприведенной формулу для вычисления

$$\sqrt[3]{1 + x}$$

в случае, когда x мало по сравнению с единицей.

Применим формулу (5.22), в которой сохраним только первые два члена:

$$\sqrt[m]{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{x}{m}.$$

В примере $m = 3$, поэтому:

$$\sqrt[3]{1 + x} = 1 + \frac{x}{3}.$$

Если, положим, $x = 0{,}06$, то результат будет:

$$\sqrt[3]{1{,}06} = \sqrt[3]{1 + 0{,}06} = 1 + \frac{0{,}06}{3} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02.$$

Рассмотрим еще пример. Сосуд имеет форму цилиндра. Высота его 60 *см* и объем 18 литров. Требуется найти диаметр сосуда. Обозначим диаметр основания цилиндра d, высоту — h и объем — V. Тогда

$$V = \pi \frac{d^2}{4} h,$$

откуда

$$d^2 = \frac{4V}{\pi h}.$$

Объем равен $18 \cdot 1000 = 18000$ *см*^{3}; высота h равна 60 *см*; число $\pi = 3{,}14$. Подставляем эти числа в правую часть формулы:

$$d^2 = \frac{4 \cdot 18000}{3{,}14 \cdot 60} = \frac{12}{3{,}14} \cdot 100.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства находим диаметр сосуда:

$$d = \sqrt{\frac{12}{3{,}14}} \cdot \sqrt{100} = 10\sqrt{3{,}82}.$$

Чтобы использовать формулу (5.25), преобразуем подкоренное количество по уже известному правилу:

$$\sqrt{3{,}82} = \sqrt{4 - 0{,}18} = \sqrt{4\left(1 - \frac{0{,}18}{4}\right)} = 2\sqrt{1 - \frac{0{,}18}{4}}.$$

В формуле (5.25) перед x стоит знак плюс, в примере же перед $\frac{0{,}18}{4}$ стоит минус. Перепишем подкоренное выражение

$$1 - \frac{0{,}18}{4} = 1 + \left(\frac{-0{,}18}{4}\right)$$

и вычислим корень:

$$\sqrt{1 - \frac{0{,}18}{4}} = \sqrt{1 + \left(\frac{-0{,}18}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}18}{4}\right) = 1 - \frac{0{,}18}{8}.$$

Попутно получен важный результат: в формуле (5.25) перед x может стоять и плюс и минус[1].

---

[1] То же справедливо и для формулы (5.22).

Возвращаясь к $\sqrt{3,82}$, можно написать:

$$\sqrt{3,82} = 2\left(1 - \frac{0,18}{2\cdot 4}\right) = 2 - \frac{2\cdot 0,18}{2\cdot 4} = 2 - \frac{0,18}{4} =$$
$$= 2 - 0,045 = 1,955.$$

Диаметр сосуда d равен $10\sqrt{3,82}$, поэтому:

$$d = 19,55 \quad см.$$

Почти без всяких вычислений определен диаметр сосуда с точностью до $\frac{1}{2}$ *мм*, т. е. с заведомо большей, чем это может потребоваться.

6.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Предыдущие главы показали, какую большую роль играет в математике и других науках производная. С ее помощью решаются такие важные задачи, как вычисление скорости и ускорения переменного движения, задачи, связанные с отысканием максимумов и минимумов; знание производной необходимо в таком исключительно важном отделе высшей математики, как ряды. Однако существует множество задач, которые при помощи одних производных решить невозможно. Эти задачи требуют других средств, одним из которых является определенный интеграл. С его помощью решаются задачи из всех областей точных наук и техники; многие из этих задач можно решить только при помощи определенного интеграла. Ни один специалист не может следить за научно-технической литературой по своей специальности, если он не знает высшей математики настолько, чтобы понимать расчеты, в которых применены определенные интегралы. Как вскоре выяснится, определенный интеграл теснейшим образом связан с понятием производной. Это лишний раз подчеркивает огромную роль производной в высшей математике.

Задача о площади криволинейной трапеции

Вычисление площадей — одна из древнейших задач геометрии. Само слово «геометрия» в переводе на русский язык означает «землемерие». Великие математики древности оставили нам правила и теоремы, которые учат, как измерить площадь любой фигуры, ограниченной прямолинейными отрезками: треугольника, трапеции, мно-

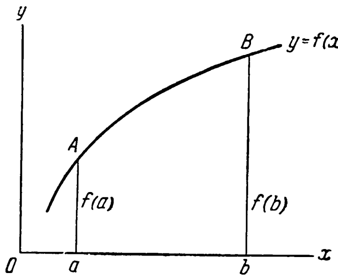


Рис. 23

Криволинейная трапеция

гоугольника. Из площадей, ограниченных кривыми линиями, школьная геометрия рассматривает только площадь круга и его частей — сектора, кольца и др. Но практика требует определения площадей множества других криволинейных фигур: овалов, эллипсов и т. п. Некоторые, наиболее легкие из подобных задач, были решены, в частности, величайшим математиком древности Архимедом. Однако дать общий метод, пригодный для определения площади любой фигуры, древним математикам не удалось. В надлежащем месте будет показано, какое именно препятствие стало для них непреодолимым.

Рассмотрим заданную в системе координат xOy кривую $y = f(x)$ (рис. 23). В точке $x = a$ функция имеет значение $f(a)$, в точке $x = b$ ее значение $f(b)$. Эти значения функции изображаются на рис. 23 отрезками aA и bB. Ординаты $f(a)$ и $f(b)$, отрезок оси x от точки a до точки b и кусок кривой AB образуют замкнутую фигуру $abBA$. Фигура называется криволинейной трапецией. Решим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.

Но прежде надо сделать некоторые уточнения. Во-первых, необходимо, как говорят математики, «наложить на кривую $y = f(x)$ некоторые условия». Во-вторых, надо договориться, как следует понимать выражение «площадь криволинейной трапеции» [1].

[1] В школьной геометрии указывается точно, что называется площадью фигуры, ограниченной прямолинейными отрезками, а также площадью круга и его частей. Что́ именно надо понимать под площадью фигуры, ограниченной любой кривой, в геометрии не разъясняется. Поэтому приходится здесь об этом говорить.

Условия, налагаемые на кривую $y = f(x)$, заключаются в том, что кусок AB, ограничивающий трапецию, не должен иметь разрывов. Разрывы кривой изображены на рис. 24*а* и 24*в*. На первом представлен бесконечный разрыв, при котором ветви кривой уходят в бесконечность, на втором — конечный разрыв. Предполагается, что кривая, ограничивающая площадь криволинейной трапеции, не имеет таких разрывов. Кроме того, кривая, или, точнее, ее дуга AB, не имеет угловых точек, одну из которых можно видеть на рис. 25.

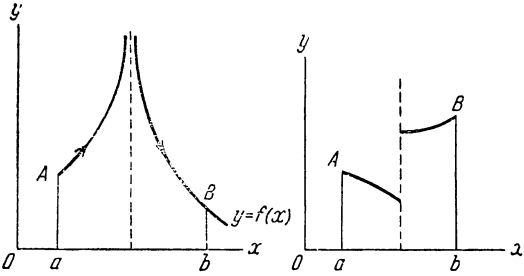
Перейдем к понятию «площадь криволинейной трапеции». Пусть дана криволинейная трапеция $abBA$ (рис. 26). Разобьем ее основание ab на отрезки ax_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3b; восставим перпендикуляры x_1X_1, x_2X_2, x_3X_3; проведем отрезки AA_1, X_1A_2, X_2A_3, X_3B_1. Получилась ступенчатая фигура

$$abB_1X_3A_3X_2A_2X_1A_1A.$$

Площадь этой фигуры можно вычислить по обычным правилам геометрии. Она, конечно, будет меньше площади криволинейной трапеции $abBA$. Удвоим число ступеней фигуры, для чего каждый отрезок ax_1, x_1x_2 и т. д. разобьем на два отрезка и восставим дополнительные перпендикуляры. Площадь ступенчатой фигуры при этом увеличится. При повторном удвоении числа ступеней площадь фигуры увеличится еще больше. Замечаем, что площадь ступенчатой вписанной фигуры увеличивается при увеличении числа ступеней ее. Однако она не может возрастать безгранично. Наоборот, так как фигура не может выйти за границы криволинейной трапеции, ее площадь будет стремиться к некоторому пределу. Этот предел и считается площадью криволинейной трапеции. Таким образом, можно дать следующее определение площади криволинейной трапеции: *площадью криволинейной трапеции называется предел, к которому стремится площадь вписанной ступенчатой фигуры при неограниченном увеличении числа ступеней.*

На основании этого определения и будет решаться задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Все, что сказано о вписанной ступенчатой фигуре, относится и к описанной. Можно доказать, что если кривая $y = f(x)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то пределы описанной и вписанной ступенчатых фигур совпадают.

Рис. 24



Виды разрывов функции

Рис. 25

Функция имеет угловую точку C

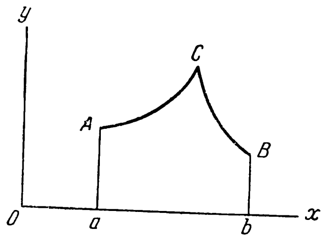
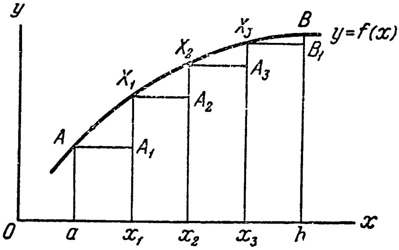


Рис. 26



К понятию площади криволинейной трапеции

Интегральная сумма и определенный интеграл

В этом параграфе читатель опять встретится с новыми понятиями, которые в школьной математике не упоминаются вовсе или затрагиваются лишь поверхностно. Для простоты сначала все рассуждения проведем на численном примере. Полученные результаты затем представим в общем виде. Пусть дана функция

$$y = 2\sqrt{x}. \tag{6.1}$$

Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой на отрезке от $x = 1$ до $x = 9$ (рис. 27). Искомая площадь есть предел площади ступенчатой фигуры, которая строится так же, как было описано выше. Разбиваем основание трапеции на 4 равные части[1]. В точках x_1, x_2 и x_3 восставляем перпендикуляры x_1X_1 и т. д. Площадь каждой ступени равна произведению ее высоты на основание. Высотой первой ступени

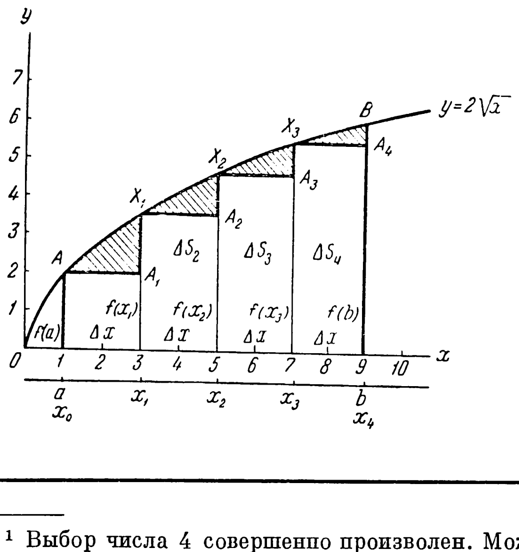


Рис. 27

К вычислению площади криволинейной трапеции

[1] Выбор числа 4 совершенно произволен. Можно при желании начать и с 3-х и с 20-ти частей. Равные части берутся ради удобства вычислений. Они могут быть и не равны между собой.

служит отрезок aA, основанием — отрезок от точки a до x_1, так что длина основания равна разности $x_1 - a$. Эту разность назовем для краткости Δx. Заметим здесь же, что основания всех ступеней равны между собой и поэтому все равны Δx. Высота второй ступени равна отрезку x_1X_1 и т. д. Длина основания Δx равна двум единицам, высоты же надо подсчитать.

Таблица высот

Обозначения	Абсциссы точек	Высоты	Обозначения	Абсциссы точек	Высоты
a	1,0	2,00	x_2	5,0	3,48
x_1	3,0	3,46	x_3	7,0	5,30

Обозначим площади ступеней ΔS_1, ΔS_2 и т. д. Тогда площади будут:

$$\Delta S_1 = f(a)\cdot\Delta x = 2{,}00\cdot 2 = 4{,}00;$$

$$\Delta S_2 = f(x_1)\cdot\Delta x = 3{,}46\cdot 2 = 6{,}92;$$

$$\Delta S_3 = f(x_2)\cdot\Delta x = 4{,}48\cdot 2 = 8{,}96;$$

$$\Delta S_4 = f(x_3)\cdot\Delta x = 5{,}30\cdot 2 = 10{,}60.$$

Площадь ступенчатой фигуры равна сумме площадей всех ступеней. Эту площадь обозначим S_4 (значок 4 указывает число ступеней):

$$S_4 = 30{,}48.$$

Если S_4 принять за площадь самой криволинейной трапеции, то допущенная погрешность будет очень велика. Она выразится площадью заштрихованных «клиньев» [1]. Для уменьшения погрешности при подсчете площади надо увеличить число ступеней. Для того чтобы яснее представить себе, как происходит уменьшение погрешности при увеличении числа ступеней, полезно рассмотреть рис. 28, на котором в увеличенном масштабе изображена первая ступень рис. 27. Погрешность при подсчете площади ΔS_1 выражается площадью треугольника AA_1X_1. Представим

[1] Будем называть эти клинья треугольниками, несмотря на то, что вместо гипотенуз у них дуги кривой.

себе теперь, что число ступеней в криволинейной трапеции удвоилось: вместо четырех стало восемь. При этом полоса ax_1X_1A разобьется на две: $ax_1'X'A$ и $x_1'x_1X_1X_1'$. Вместо одной площади ΔS_1 надо подсчитать две. Погрешность при подсчете площади ступени с основанием ax_1' изобразится площадью заштрихованного треугольника $AA_1'X_1'$; погрешность при подсчете площади второй ступени — площадью заштрихованного треугольника $X_1'A_1'X_1$. Прямоугольник $A_1'A_1A_1''X_1'$ на рис. 27 входил в треугольник AA_1X_1; его площадь составляла часть погрешности. Теперь же эта площадь вошла в площадь прямоугольника $x_1'x_1A_1''X_1'$. Общая погрешность вычисления выражается суммой площадей треугольников $AA_1'X_1'$ и $X_1'A_1''X_1''$. Ясно, что по сравнению с вычислением на рис. 27 точность увеличилась. Теперь удвоим число ступеней (рис. 29) и снова подсчитаем площадь ступенчатой фигуры. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= 2{,}00, & \Delta S_5 &= 4{,}48, \\ \Delta S_2 &= 2{,}82, & \Delta S_6 &= 4{,}90, \\ \Delta S_3 &= 3{,}46, & \Delta S_7 &= 5{,}30, \\ \Delta S_4 &= 4{,}00, & \Delta S_8 &= 5{,}66. \end{aligned}$$

Площадь всей ступенчатой фигуры будет:

$$S_8 = 32{,}62.$$

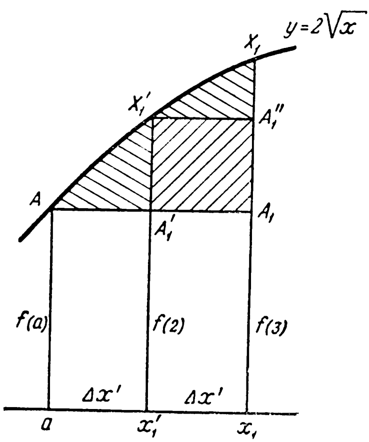
По сравнению с S_4 площадь увеличилась на 2,14 *кв.ед.* Соответственно на ту же величину уменьшилась общая погрешность вычисления. Увеличение подсчитанной площади объясняется тем, что площади заштрихованных на рис. 29 прямоугольников, вошедшие теперь в площадь ступенчатой фигуры, при подсчете S_4 входили в погрешность.

Стремясь увеличить по возможности точность вычисления площади, снова удваиваем число ступеней. Площадь полученной фигуры будет:

$$S_{16} = 33{,}64 \text{ кв. ед.}$$

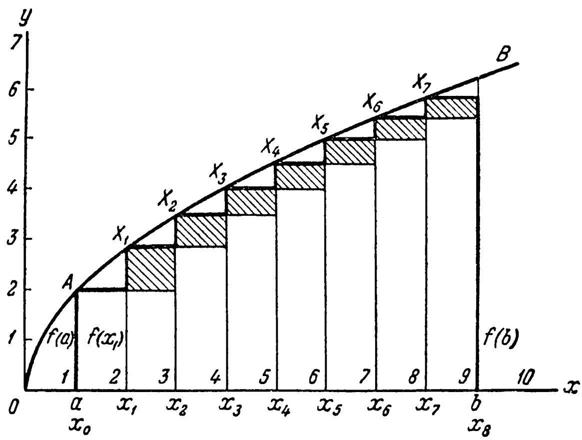
Площадь снова увеличилась. При этом число треугольников, выражающих погрешность, удвоилось, но их общая площадь уменьшилась (за счет исключенных прямо-

Рис. 28



Подсчет погрешности при вычислении площади

Рис. 29



Более мелкое разбиение увеличивает точность подсчета площади угольников). При дальнейшем удвоении[1] числа ступеней площадь продолжает расти:

$$S_{32} = 34{,}15,$$
$$S_{64} = 34{,}41.$$

Необходимо обратить внимание на то, что увеличение площади постепенно замедляется. Переход от S_4 к S_8 сопровождался приращением площади на 2,14 *кв. ед.*, а от S_{32} к S_{64} — только на 0,26 *кв. ед.* Это замедление чрезвычайно важно. Оно указывает, что площадь приближается к некоторому пределу. Проследим за этим процессом дальше. Найдем S_{128} и S_{256}:

$$S_{128} = 34{,}54,$$
$$S_{256} = 34{,}60.$$

Погрешность сильно уменьшилась. Об этом можно судить по тому, что увеличение площади происходит совсем медленно, оно выражается уже сотыми долями. Теперь нетрудно ответить на вопрос: при каких условиях вычисление площади криволинейной трапеции будет абсолютно точным? Абсолютная точность будет достигнута тогда, когда исчезнут треугольники, выражающие погрешность. Площадь же треугольника стремится к нулю по мере того, как ширина полосы неограниченно уменьшается, т. е. число полос неограниченно возрастает. Иными словами, число полос надо довести до бесконечности. Выше было показано, что с увеличением их числа дальнейшее нарастание площади непрерывно замедляется, а это значит, что подсчитываемая площадь имеет предел. Подведем итог наших рассуждений: чтобы получить точное значение площади криволинейной трапеции, надо отыскать предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры при неограниченном увеличении числа ступеней.

Возвратимся к подсчету площадей ступенчатых фигур. Чем больше ступеней имеет фигура, тем меньше площадь каждой ступени. Так, например, S_4 состоит из сравнительно больших слагаемых:

$$S_4 = 4 + 6{,}92 + 8{,}84 + 10{,}60.$$

[1] Вовсе не обязательно увеличивать число ступеней путем удвоения. Можно его увеличивать втрое, вчетверо и т. д.

Ступени — слагаемые площади S_8 значительно меньше:

$$S_8 = 2 + 2{,}82 + 3{,}46 + 4{,}00 + \ldots + 5{,}66.$$

Причина уменьшения площади каждой ступени заключается в том, что с каждым удвоением ширина ступени делается вдвое меньше. Напишем теперь сумму площадей ступеней, но не при определенном числе ступеней, а для любого числа их, для чего вместо числа ступеней 4, 8, 16 и т. д. укажем n:

$$S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n.$$

Эта запись удобнее предыдущих, потому что она позволяет коротко и ясно сформулировать основной результат предыдущих рассуждений: для того чтобы площадь ступенчатой фигуры S_n перешла в площадь криволинейной трапеции S, необходимо увеличивать n (число полос) до бесконечности, а каждое слагаемое ΔS_1, ΔS_2 и т. д. уменьшать до нуля.

Такие суммы играют в высшей математике очень большую роль и имеют поэтому особое наименование. Сумма, у которой число слагаемых неограниченно возрастает, а каждое слагаемое уменьшается до нуля, называется интегральной суммой. Если такая сумма имеет предел (в нашей задаче этот предел наверное существует: это площадь криволинейной трапеции), то этот предел называется *определенным интегралом*.

Определенный интеграл изображается следующим символом:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами определенного интеграла. Это те числа, которые стоят в начале и конце отрезка оси x, служащего основанием криволинейной трапеции. На рис. 27, например, $a = 1$ и $b = 9$. Знак определенного интеграла $\int$ получился из латинской буквы S—первой буквы слова *Summa* (сумма). Символ dx называется дифференциалом аргумента. Он играет очень важную роль в высшей математике. Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией. Это та функция, график которой ограничивает криволинейную трапецию сверху. На рисунках 27, 29 трапеция ограничена графиком функции $y = 2\sqrt{x}$; левая граница трапеции (нижний предел определенного интеграла) дается значением аргумента $x = 1$, правая граница (верхний предел определенного интеграла) $-x = 9$. Площадь криволинейной трапеции записывается так:

$$S = \int_1^9 f(x)\,dx. \qquad (6.2)$$

Вычисление определенного интеграла

Чтобы получить точную величину площади, надо вычислить определенный интеграл. Иными словами, нужно найти предел бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Конечно, не может быть и речи о том, чтобы фактически подсчитать сумму бесконечно большого числа слагаемых. Можно говорить лишь о том, чтобы по тем или иным свойствам самих слагаемых найти предел их суммы. В школьной математике такое положение встречается неоднократно, например, при вычислении длины окружности, площади круга и т. д.

В связи с понятием определенного интеграла полезно дать небольшую историческую справку. Великие математики древности умели вычислять площадь круга и его частей: сектора, сегмента и т. д. Площадь же, ограниченную произвольной кривой, они вычислять не могли. Они очень хорошо понимали, что задача приводится к вычислению предела интегральной суммы и умели составлять интегральные суммы. Непреодолимым препятствием на пути решения задачи стояло отыскание предела интегральной суммы, т. е. той величины, которую теперь называют определенным интегралом. В сущности площадь круга в геометрии получается как предел интегральной суммы. Этот предел удалось открыть, и это было одним из крупнейших открытий древней математики. Но дальше дело практически не продвинулось, так как вычисление предела интегральной суммы по свойствам слагаемых — задача действительно чрезвычайно трудная. Правда, Архимеду удалось найти таким путем площадь сектора параболы, но на этом и остановилась математика древних. На протяжении почти двух тысячелетий не наблюдалось заметного прогресса. Только во второй половине XVII в. задача была решена полностью и окончательно. Английский математик Ньютон и немецкий математик Лейбниц одновременно и независимо друг от друга нашли способ, как вычислить определенный интеграл обходным путем. Начиная с этого времени задачи физики, механики, астрономии и самой математики, многие из которых считались до того неразрешимыми, успешно разрешены.

Чтобы понять, в чем же, собственно, сила высшей математики, надо познакомиться с тем, как вычисляется определенный интеграл и как применяют его к решению задач.

Введем еще одно понятие. Если функция $f(x)$ есть производная функции $F(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x),$$

то $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$. Аналогично тому, как в алгебре можно указать прямые и обратные операции, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возвышение в степень и извлечение корня, в высшей математике отысканию производной соответствует обратное действие: отыскание первообразной. Известно, например, что производная функции $\sin x$ есть $\cos x$. Наоборот, первообразной функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x$.

Отыскание первообразных по их производным — обширный отдел высшей математики, который мы рассматривать не будем, а используем лишь те сведения, которые понадобятся для дальнейшего.

Известно, например, что

$$(x^3)' = 3x^2;$$

отсюда следует, что первообразной функции $f(x) = 3x^2$ является $F(x) = x^3$. Как подобрать такую первообразную $F(x)$, чтобы производной была не $3x^2$, а x^2? Очевидно, для этой цели надо x^3 разделить на 3:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Действительно, производная от x^3 даст коэффициент 3, который сократится с тройкой в знаменателе. Кроме того, так как у производной показатель степени на единицу меньше, чем у первообразной, то при переходе от производной степенной функции к ее первообразной показатель степени должен увеличиться на единицу. Вообще, если дана функция

$$f(x) = x^m,$$

то ее первообразная

$$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Легко проверить, что

$$\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m.$$

В дальнейшем, по мере надобности, будут приводиться первообразные других функций.

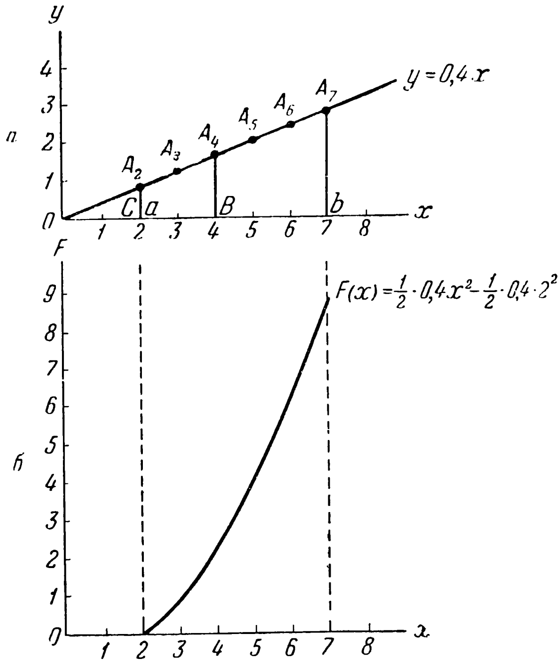
Площадь криволинейной трапеции как функция аргумента x

Рассмотрим площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 30. Левая граница трапеции определяется точкой $x = 2$. Противоположная граница ее перемещается по нашему произволу. В зависимости от положения правой границы трапеции площадь ее возрастает или убывает. Другими словами, площадь трапеции оказывается функцией положения ее правой границы. В свою очередь, это положение определяется значением x в той точке, через которую проходит граница (рис. 30*а*). Значит, площадь криволинейной трапеции есть функция аргумента x, определяющего положение правой границы. Будем обозначать площадь, как функцию x, следующим образом:

$$S = S(x).$$

Эта функция легко находится. Пусть, например, правая граница проходит через точку $x = 4$. Так как на рис. 30*а* трапеция сверху ограничена прямой, то площадь ее можно получить, если из площади треугольника OBA_4 вычесть площадь треугольника OCA_2. За высоты прямоугольных треугольников принимаем катеты OC и OB; основаниями служат катеты CA_2 и BA_4.

Рис. 30



К доказательству теоремы о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу

Площадь треугольника OCA_2 будет:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8.$$

Площадь бóльшего треугольника:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}6 = 3{,}2.$$

Площадь трапеции равна разности этих площадей:

$$S(4) = 3{,}2 - 0{,}8 = 2{,}4 \ \textit{кв. ед}.$$

За высоту треугольника бралась длина катета, расположенного на оси x, т. е. значение самого аргумента; за основание — отрезок, идущий от точки x на оси x до прямой $y = 0{,}4x$. Но это и значит, что длина отрезка равна $0{,}4\ x$. Следовательно:

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot 0{,}4x - 0{,}8 = 0{,}2x^2 - 0{,}8. \qquad (6.3)$$

А это и есть выражение того, что площадь трапеции, изображенной на рис. 30*а*, является функцией аргумента x.

На рис. 30*б* изображена функция $S(x)$. Она, понятно, начинается в точке $x = 2$, так как до этой точки трапеции вообще нет, а при $x = 2$ площадь ее равна нулю. После этой точки кривая $S(x)$ все время поднимается. Для того чтобы узнать, чему равняется площадь трапеции, например, от $x = 2$ до $x = 5$, достаточно на рис. 30*б* определить длину отрезка при $x = 5$. По графику рис. 30*б* легко определить, что

$$S(5) = 4{,}2.$$

Этот результат легко проверяется:

$$S(5) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 - 0{,}8 = 4{,}2.$$

Следующая теорема служит основой открытого Ньютоном и Лейбницем способа вычисления определенного интеграла.

Теорема

Площадь криволинейной трапеции есть первообразная подынтегральной функции. Эта теорема говорит следующее. Если некоторая функция $f(x)$ ограничивает криволинейную трапецию, то, как показано было раньше, площадь трапеции выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6.4)$$

В том случае, когда правая граница трапеции определяется не фиксированным числом b, а переменным x, площадь трапеции есть функция x, т. е. $S = S(x)$. Верхний предел определенного интеграла уже будет не b, а x, так что последнее равенство примет вид:

$$S(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Так вот, теорема утверждает, что площадь $S(x)$ есть первообразная подынтегральной функции $f(x)$, т. е.

$$[S(x)]' = f(x).$$

Проверим это на примере, а потом докажем для всех функций.

На рис. 30a трапеция ограничена кривой

$$f(x) = 0{,}4x. \qquad (6.5)$$

Площадь той же трапеции выражается функцией:

$$S(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}8.$$

Если теорема верна, то должно соблюдаться равенство:

$$[0{,}2x^2 - 0{,}8]' = 0{,}4x.$$

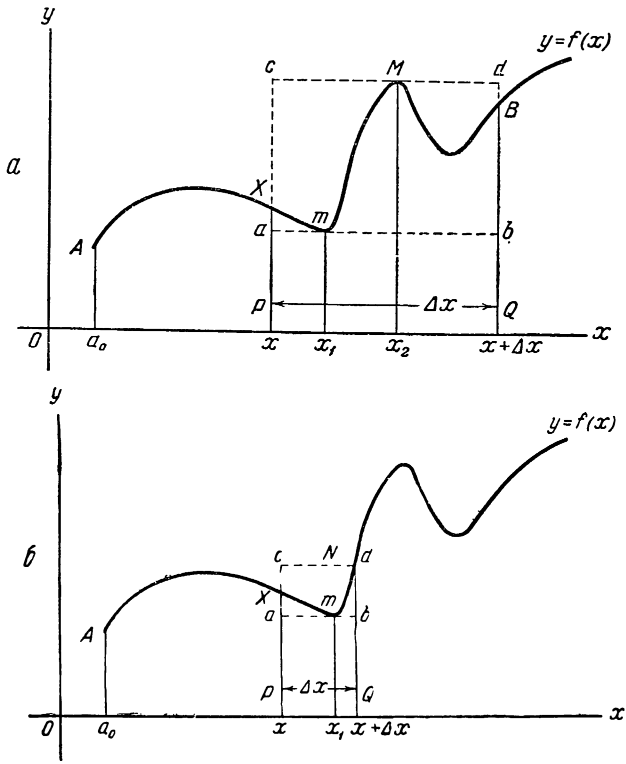
В левой части равенства стоит степенная функция, от которой требуется взять производную. Применяя известное правило отыскания производной степенной функции, убеждаемся, что равенство справедливо. Таким образом, для примера, изображенного на рис. 30, теорема оказалась справедливой. Требуется доказать, что она справедлива для всякой функции $f(x)$, если только $f(x)$ подчиняется условиям, перечисленным ранее.

Доказательство

На рис. 31 изображен график функции $f(x)$. Криволинейная трапеция a_0xXA имеет переменную правую границу и поэтому площадь ее есть функция x: $S = S(x)$. Для доказательства теоремы надо располагать производной этой функции. Процедура вычисления производной известна: задается приращение аргументу, вычисляется приращение функции, составляется их отношение, находится предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Выполним эту программу. Дадим x приращение Δx. На рис. 31a приращение Δx отложено в виде отрезка PQ.

Рис. 31



Вычисление производной определенного интеграла

При этом правая граница криволинейной трапеции сместилась вправо и совпала с отрезком QB. Приращение площади выражается площадью $PQBX$. Это и есть $\Delta S(x)$, величину которой надо теперь определить. Поступим следующим образом. Найдем на отрезке Δx такую точку x_1, где функция $f(x)$ имеет наименьшее значение (точка m, функция в этой точке — $f(x_1)$). Построим прямоугольник с основанием Δx и высотой $f(x_1)$, т. е. прямоугольник $PQba$.

Далее отыщем точку, в которой функция $f(x)$ имеет наибольшую величину. Пусть это будет точка x_2; значение функции в ней $f(x_2)$. Построим прямоугольник $PQdc$. Из чертежа ясно, что приращение площади $\Delta S(x)$ больше площади прямоугольника $PQba$ и меньше площади прямоугольника $PQdc$. Площади прямоугольников будут: $\Delta x f(x_1)$ и $\Delta x f(x_2)$. Составим неравенство: площадь $PQba < \Delta S(x) <$ площади $PQdc$, т. е.

$$\Delta x \cdot f(x_1) < \Delta S(x) < \Delta x \cdot f(x_2).$$

Неравенство не изменяется, если все его части разделить на положительное число, поэтому:

$$f(x_1) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x_2). \tag{6.6}$$

Для вычисления производной как раз и требуется отношение $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$. Правда, точно выразить его не удалось, но неравенство (6.6) указывает, в каких границах это отношение заключено.

После того как составлено отношение приращения функции к приращению аргумента, требуется неограниченно уменьшать Δx и найти предел, к которому стремится указанное отношение.

На рис. 31*б* изображена криволинейная трапеция с приращением площади при уменьшенном приращении Δx. Правой границей трапеции теперь служит отрезок QN. Точка M, которая давала самую большую величину функции (в пределах приращения), теперь совсем не входит в $\Delta S(x)$; наибольшую величину уже дает точка N. Значение x_2, при котором функция имеет наибольшую величину, теперь совпадает с точкой Q и отрезок QN есть $f(x_2)$. Наименьшая величина функции $f(x_1)$ изображается тем же отрезком x_1m. Расстояние между наибольшим значением функции $f(x_2)$ и ее наименьшим значением заметно сократилось. На рис. 31*б* приращение площади, т. е. $\Delta S(x)$, заключено между площадями двух прямоугольников:

$$\Delta x \cdot f(x_1) < \Delta S(x) < \Delta x \cdot f(x_2),$$

откуда

$$f(x_1) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x_2).$$

Но теперь интересующее нас отношение $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ заключено в значительно более тесные рамки.

После внимательного рассмотрения рис. 31*б* нет необходимости изображать на чертеже дальнейшее уменьшение Δx и связанные с ним изменения $\Delta S(x)$. Точки x_1 и x_2 по необходимости будут располагаться ближе одна к другой и одновременно обе будут «прижиматься» к точке x (точке P). В то же время отрезки x_1m и QN будут «прижиматься» к отрезку PX. Этот отрезок изображает $f(x)$. Когда Δx неограниченно уменьшается ($\Delta x \to 0$), точки x_1 и x_2 приближаются к точке x. Соответственно стремятся к совпадению и три отрезка: $f(x_2)$, $f(x_1)$ и $f(x)$. Отношение же $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ стремится к своему пределу, т. е. к производной $S'(x)$. Из предыдущих рассуждений следовало, что отношение $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ неизменно заключено между $f(x_2)$ и $f(x_1)$. Эти две величины в пределе совпадают с $f(x)$, а отношение $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ в пределе равно производной $S'(x)$. Значит, с одной стороны, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ стало производной $S'(x)$, с другой стороны, оно же стало равным $f(x)$. Отсюда получаем, что

$$S'(x) = f(x).$$

А это и утверждает теорема. Таким образом, теорема доказана.

Формула Ньютона — Лейбница

Возвратимся к рис. 30*а*. Формула (6.3) служит для вычисления площади трапеции abA_7A_2. Чтобы вычислить эту площадь, надо в формулу (6.3) подставить $x = b$ (т. е. $x = 7$). Второй член правой части, равный 0,8, есть тот же член $0{,}2\ x^2$, в который подставлено $x = a$ (т. е. $x = 2$). Поэтому формула (6.3) может быть прочитана так: площадь криволинейной трапеции, ограниченной пределами a и b, равна приращению первообразной в тех же пределах:

$$S = S(b) - S(a). \tag{6.7}$$

Для площади S имеется и еще одно выражение:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.8}$$

Сравнивая между собою (6.7) и (6.8), можно записать:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) - S(a).$$

Однако в математике приняты другие обозначения. Выше было доказано, что $S(x)$ есть первообразная подынтегральной функции $f(x)$. Первообразная функции $f(x)$ обычно обозначается $F(x)$, поэтому последняя формула записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6.9}$$

Необходимо подчеркнуть, что верхний и нижний пределы определенного интеграла, т. е. числа b и a — это те же числа, которые стоят на левой и правой границах криволинейной трапеции.

Формула (6.9) называется формулой Ньютона — Лейбница. Она дает следующее правило вычисления определенного интеграла:

Необходимо найти первообразную подынтегральной функции, в найденную первообразную подставить $x = b$, в нее же подставить $x = a$, из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов. Вычислим определенный интеграл

$$I = \int_2^5 x\,dx.$$

Подынтегральная функция в примере $f(x) = x$. Найдем первообразную функции $f(x) = x$. Для этого воспользуемся формулой:

$$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

В данном примере

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

В первообразную подставим верхний предел $b = 5$:

$$F(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}.$$

В нее же подставим нижний предел $a = 2$;

$$F(2) = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2}.$$

Вычислим приращение первообразной:

$$I = F(5) - F(2) = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}.$$

Вычислим $I = \int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Подынтегральная функция здесь

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Это степенная функция. Она может быть записана так:

$$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Найдем первообразную:

$$F(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = 3x^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x}.$$

В нее подставим верхний предел определенного интеграла:

$$F(8) = 3\sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Подстановка нижнего предела дает:

$$F(1) = 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3.$$

Искомый интеграл будет:

$$I = F(8) - F(1) = 6 - 3 = 3\,.$$

Вычислим определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$$

Как известно, производная функции $\sin x$ есть $\cos x$. Следовательно, первообразной подынтегральной функции является

$$F(x) = \sin x.$$

Подставим верхний предел:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Подставим нижний предел

$$F(0) = \sin 0 = 0.$$

Разность (приращение первообразной) будет:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Следовательно:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = 1.$$

7.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл применяется при решении таких задач, в которых подсчитывается действие какой-нибудь переменной величины. К таким задачам относится вычисление площади криволинейной трапеции (в этих задачах непрерывно изменяется очертание трапеции); вычисление работы силы (непрерывно меняется величина силы); вычисление давления воды на пластину (давление изменяется с глубиной) и многие другие. Законы геометрии, физики, механики сформулированы для постоянных величин. Они не могут применяться непосредственно к перечисленным задачам. Приходится использовать тот прием, который позволил вычислить площадь криволинейной трапеции. Ниже дается схема применения этого приема.

При решении задач с помощью определенного интеграла поступают так:

1. Интервал действия переменной величины разбивается на малые промежутки.

2. На протяжении каждого из этих малых промежутков переменная величина принимается постоянной.

3. К этой постоянной величине применяется надлежащий закон (геометрии, физики и т. д.).

Применение закона должно привести к выражению, содержащему в качестве множителя малый промежуток разбиения.

4. Производится дальнейшее разбиение интервала действия величины с той целью, чтобы величина малого промежутка стремилась к нулю. Каждое слагаемое, содержащее множителем стремящийся к нулю промежуток, само будет стремиться к нулю.

5. Из этих слагаемых составляется сумма. Так как каждое слагаемое неограниченно уменьшается, а число сла-

гаемых увеличивается до бесконечности, то сумма является интегральной. Пределом этой интегральной суммы будет определенный интеграл. Для решения задачи необходимо его вычислить.

Основная мысль при решении задачи с помощью определенного интеграла состоит в следующем: задача решается на столь малом промежутке, что оказывается возможным применение соответствующего закона, после чего ведется подсчет суммарного действия закона на всех малых промежутках.

Дальше приводится несколько типичных задач из различных областей науки. Все они решены при помощи изложенного приема.

Геометрические задачи

Вычисление площади криволинейной трапеции

Дана криволинейная трапеция (рис. 27). С боков она ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 9$; снизу — отрезком оси x; сверху — кривой $y = 2\sqrt{x}$. Требуется вычислить площадь этой трапеции.

Именно эта задача привела нас к понятию определенного интеграла. При решении ее мы поступили так: интервал на оси x был разбит на малые части; на протяжении каждой из этих частей функция $y = 2\sqrt{x}$ считалась приближенно постоянной; ввиду постоянства функции полоска трапеции заменялась прямоугольником, площадь которого вычислялась по правилам геометрии; вычисление площади прямоугольника привело к выражению, содержащему в качестве множителя Δx; производилось дальнейшее разбиение промежутков с таким расчетом, чтобы Δx стремилось к нулю; площадь каждого прямоугольника в отдельности тоже стремилась к нулю; была составлена интегральная сумма; она имела своим пределом определенный интеграл, который и дал решение задачи:

$$S = \int_1^9 2\sqrt{x}\,dx \cdot$$

В гл. 6 (стр. 105) решение задачи приостановилось на этом этапе. Теперь можно довести его до конца.

Подынтегральная функция определенного интеграла:

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Ее первообразная будет:

$$F(x) = 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x\sqrt{x}.$$

Подставим в первообразную верхний предел $b = 9$:

$$F(9) = 36.$$

Подставим нижний предел:

$$F(1) = \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь трапеции:

$$S = 36 - 1\frac{1}{3} = 34\frac{2}{3}\text{ кв. ед.} = 34{,}667 \text{ кв. ед.}$$

Поучительно сравнить этот *точный* результат с теми приближенными, которые получены ранее (стр. 101). При разбиении трапеции на 4 полосы мы имели:

$$S_4 = 30{,}36.$$

Ошибка очень велика, достигает 11%. При разбиении трапеции на 8 полос площадь значительно увеличилась, тем самым уменьшив погрешность:

$$S_8 = 32{,}62.$$

Дальнейшее увеличение точности дается более дорогой ценой. Удваивая число полос, приходится производить все большее количество вычислений, причем приближение к точному результату замедляется. Так, например, переход от $S_{128} = 34{,}54$ к $S_{256} = 34{,}60$ дает выигрыш в точности всего 0,18%. Для этого надо вычислить 128 добавочных площадей!

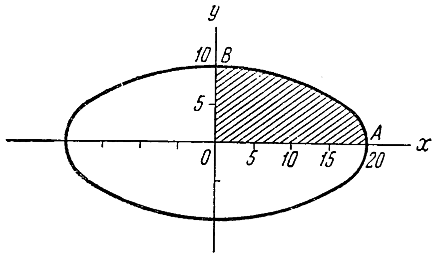


Рис. 32

Эллиптическое поперечное сечение трубы

Закончим задачу правилом вычисления площади криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции, ограничивающей эту трапецию.

Вычисление площади поперечного сечения

Поперечным сечением трубопровода служит эллипс (рис. 32). Горизонтальный поперечник равен 40 *см*, вертикальный — 20 *см*. Найти площадь поперечного сечения.

Так как сечение трубопровода симметрично относительно осей x и y, то достаточно вычислить площадь заштрихованной трапеции и результат учетверить. Кривая, называемая эллипсом, имеет следующее уравнение:

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Здесь B — длина половины горизонтального поперечника, A — половины вертикального. В нашем примере уравнение эллипса:

$$y = \pm \frac{10}{20}\sqrt{400 - x^2}$$

Вычислим искомую площадь:

$$S = \int_0^{20} \frac{1}{2}\sqrt{400 - x^2}\,dx.$$

Нижним пределом определенного интеграла служит точка $x = 0$, верхним — точка $x = A = 20$.

Первообразной функции $f(x) = \sqrt{400 - x^2}$ является функция

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{400 - x^2} + \frac{400}{2}\arcsin\frac{x}{20}.$$

При подстановке верхнего предела $b = 20$ получаем:

$$F(20) = \frac{20}{2}\sqrt{400 - 20^2} + 200\arcsin\frac{20}{20} = 10\sqrt{400 - 400} +$$
$$+ 200\arcsin 1 = 200\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Подстановка нижнего предела $A = 0$ дает нуль в обоих слагаемых:

$$F(0) = \frac{0}{2}\sqrt{400 - 0^2} + \frac{400}{2}\arcsin 0 = 0.$$

Определенный интеграл, равный

$$F(20) - F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot 200,$$

должен быть еще умножен на $\frac{1}{2}$. Окончательно площадь одной четверти эллипса будет:

$$S = \pi\frac{200}{4}.$$

Площадь поперечного сечения трубопровода в 4 раза больше:

$$4S = \pi\cdot 200.$$

Число 200 представляет собой произведение полупоперечников эллипса:

$$200 = 20\cdot 10 = A\cdot B.$$

Если полупоперечники равны между собой, т. е. если $A = B$, то их можно обозначить одной буквой, например R. Тогда площадь эллипса выразится формулой:

$$4S = \pi R^2,$$

т. е. так же, как и площадь круга. Отсюда следует важное заключение: круг можно рассматривать как эллипс, у которого поперечники равны между собой.

Вычисление объема тела вращения

Тело вращения получается следующим образом. В системе координат xOy помещаем кривую $y=f(x)$ нужной формы, например, дугу окружности, эллипса и т. д. Затем вращаем кривую вокруг оси x. Получающаяся при этом поверхность называется поверхностью вращения. На рис. 33 представлена поверхность, образованная вращением кривой:

$$y = 2\sqrt{x}.$$

Эта поверхность называется параболоидом вращения (кривая $y = 2\sqrt{x}$ относится к группе парабол).

Решим следующую задачу. Дана поверхность, образованная вращением кривой:

$$y = f(x).$$

Нужно вычислить объем тела, ограниченного этой поверхностью и плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 34).

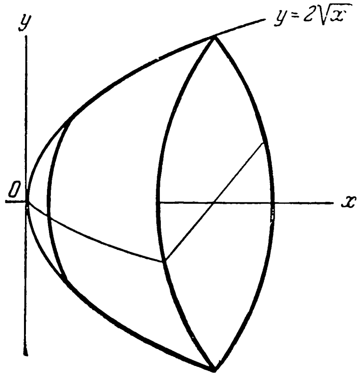
Для решения задачи применим общий прием.

Разобьем отрезок оси x от точки a до точки b на малые промежутки. Через точки деления x_1, x_2, . . . проведем плоскости, перпендикулярные оси x. Эти плоскости пересекут поверхность вращения. Сечения будут окружностями. Радиус каждой окружности есть не что иное, как значение функции $f(x)$ в точке деления. Например, радиус окружности, у которой центр лежит в точке x_2, равен $f(x_2)$. Малые отрезки оси x обозначим Δx.

Отрезки Δx считаем настолько малыми, что дугу кривой $f(x)$, т. е., например, дугу X_2X_3 можем заменить отрезком X_2A_3 (как это делалось на рис. 27).

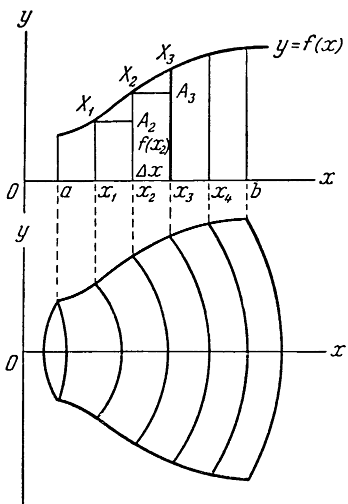
После замены всех малых кусков дуги кривой отрезками X_1A_2, X_2A_3 и т. д. все тело вращения разбилось на цилиндры. Высота каждого цилиндра равна Δx, а радиусы оснований различны. У цилиндра, высота которого определяется расстоянием между точками x_2 и x_3, радиус основания равен $f(x_2)$. Более подробно замена части тела вращения цилиндром показана на рис. 35. В истинный объем X_2X_3EFCD вписан цилиндр $x_2X_2A_3Ex_3B_3CD$. Высота цилиндра Δx та же, что и истинного объема, радиус

Рис. 33



Тело, образованное вращением кривой $y = 2\sqrt{x}$ вокруг оси Ox

Рис. 34



Разбиение тела вращения параллельными плоскостями на тонкие слои

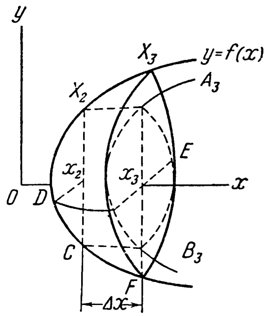


Рис. 35

Замена слоя X_3X_2FC цилиндром x_2x_3

основания — x_2X_2, т. е. $f(x_2)$. Само собою понятно, что $x_2X_2 = x_2D$.

Для вычисления объема цилиндра применим формулу из геометрии:

$$V = \pi r^2 h.$$

В нашем случае радиус основания цилиндра есть $r = f(x)$, высота $h = \Delta x$. Объем первого цилиндра будет:

$$\Delta V_1 = \pi [f(x_0)]^2 \Delta x,$$

объем второго цилиндра

$$\Delta V_2 = \pi [f(x_1)]^2 \Delta x \text{ и т. д.}$$

Как и требуется правилами применения общего приема, каждый объем содержит множитель Δx.

Положим теперь, что Δx стремится к нулю; при этом объемы ΔV тоже будут стремиться к нулю.

Составим интегральную сумму:

$$V_n = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots$$

При $\Delta x \to 0$ сумма V_n перейдет в определенный интеграл:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx.$$

В теории определенного интеграла доказывается, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Полученную формулу принято записывать в следующем виде:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Сформулируем теперь правило вычисления объема тела вращения: объем, образованный вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси x, равен умноженному на π определенному интегралу от квадрата функции $f(x)$.

Вычислим, например, объем, образованный вращением параболы $y = 2\sqrt{x}$ вокруг оси x и заключенный между плоскостями $x = 1$ и $x = 9$.

Общий вид тела, образованного вращением заданной кривой, дан на рис. 33. Пределами определенного интеграла служат: нижним — $a = 1$ и верхним — $b = 9$. Подынтегральная функция $f(x) = 2\sqrt{x}$. Формула (7.1) в применении к предложенной задаче дает:

$$V = \pi \int_1^9 (2\sqrt{x})^2\,dx = 4\pi \int_1^9 x dx. \tag{7.2}$$

Определенный интеграл вычисляется по известному правилу. Первообразной функции x является $F(x) = \frac{x^2}{2}$, подстановка верхнего предела дает $F(9) = \frac{81}{2}$, подстановка нижнего — $F(1) = \frac{1}{2}$; приращение первообразной будет:

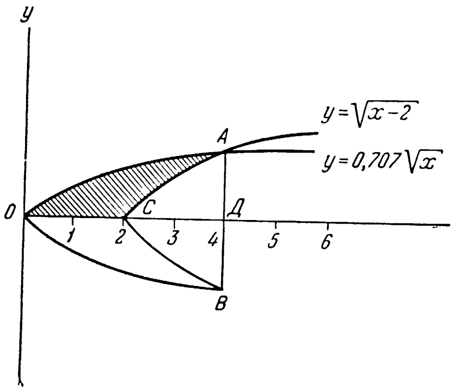
$$F(b) - F(a) = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = 40 \textit{ куб. ед.}$$

Подставим эту величину вместо определенного интеграла в формулу (7.2) и получим искомый объем:

$$V = 4\pi \cdot 40 \approx 502{,}40 \textit{ куб. ед.}$$

Рассмотрим еще пример. Необходимо вычислить объем тела, образованного вращением площади, заключенной между кривыми $y = f_1(x) = 0{,}707\sqrt{x}$ и $y = f_2(x) = \sqrt{x-2}$.

Рис. 36



При вращении заштрихованной площади OCA вокруг оси Ox образуется тело вращения

На рис. 36 изображены обе кривые. Они пересекаются в точке A и образуют замкнутую фигуру OAC. При вращении этой фигуры вокруг оси x образуется нечто вроде круглого толстостенного шатра с основанием в виде круга AB и с вершиной в точке O. Требуется вычислить объем тела, образованного вращением фигуры OAC. Эта задача отличается от предыдущих: во-первых, до сих пор рассматривались поверхности, образованные вращением одной кривой, здесь же приходится иметь дело с двумя поверхностями вращения; во-вторых, в условии задачи не даны пределы определенного интеграла.

Сначала вычислим объем V_1, образованный вращением кривой $y = 0{,}707\sqrt{x}$, т. е. объем, разрез которого на рис. 36 дается фигурой OAB. Затем определим объем V_2, задаваемый кривой $y = \sqrt{x-2}$ (разрез дает фигура ACB). Искомый объем V будет найден как разность V_1 и V_2:

$$V = V_1 - V_2. \qquad (7.3)$$

Для вычисления объемов V_1 и V_2 необходимо применить формулу (7.1) , а это в свою очередь требует знания пределов определенных интегралов. Объем V_1 вычисляется на отрезке оси x от точки O до точки D. Для первой из этих точек $x = 0$. Положение точки D на оси x определяется на основании того, что в этой точке один и тот же отрезок DA соответствует значениям обеих функций. Из этого следует, что в точке D обе функции равны:

$$0{,}707\sqrt{x} = \sqrt{x-2}.$$

Это уравнение легко разрешается, если предварительно возвести обе его части в квадрат:

$$0{,}5x = x - 2;$$

отсюда находим:

$$2 = x - 0{,}5x, \quad x = 4.$$

Пределы первого будут: $a = 0$, $b = 4$.

Теперь применим формулу (7.1):

$$V_1 = \pi\int_0^4 (0{,}707\sqrt{x})^2\,dx \approx 0{,}5\pi\int_0^4 x\,dx.$$

Первообразной функции $f(x) = x$ является $F(x) = \frac{x^2}{2}$; подставляя в первообразную верхний и нижний пределы, получаем:

$$V_1 \cong 0{,}5\pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = 4\pi.$$

Для второго интеграла пределы определяются точками C и D. Второй предел уже известен ($x = 4$). Нетрудно проверить, что точка C имеет абсциссу $x = 2$. Применим снова формулу (7.1):

$$V_2 = \pi\int_2^4 (\sqrt{x-2})^2\,dx = \pi\int_2^4 (x-2)\,dx.$$

Первообразной функции $f(x) = x - 2$ служит

$$F(x) = \frac{(x-2)^2}{2};$$

при подстановке верхнего предела $b = 4$ получим:

$$F(4) = \frac{(4-2)^2}{2} = 2,$$

а при подстановке нижнего предела $a = 2$:

$$F(2) = \frac{(2-2)^2}{2} = 0.$$

Для объема второго тела получаем:

$$V_2 = \pi (2 - 0) = 2\pi.$$

Подставим значения $V_1 = 4\pi$ и $V_2 = 2\pi$ в формулу (7.3):

$$V = 4\pi - 2\pi = 2\pi \text{ куб.ед.}$$

Решим следующую задачу. Вычислить объем прямого конуса, у которого радиус основания R и высота h.

Особенность задачи — отсутствие уравнения кривой, вращение которой образует конус. На рис. 37 разрез конуса расположен в системе координат так, чтобы было удобно производить вычисления. Ось конуса направлена вдоль оси x, образующая конуса OA служит гипотенузой треугольника OCA. Отрезок OA и есть та кривая, вращение которой вокруг оси x производит конус. Конус, как известно, есть тело вращения.

Легко проверить, что прямая, которой принадлежит отрезок OA, имеет уравнение:

$$y = \frac{R}{h} x. \tag{7.4}$$

Нижним пределом определенного интеграла служит 0, верхним — точка $x = h$. Объем конуса по формуле (7.1) будет:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx. \tag{7.5}$$

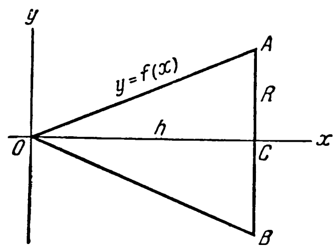
Первообразная функции $f(x) = x^2$ уже известна:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}. \tag{7.6}$$

Подстановка верхнего предела $x = h$ и нижнего $x = 0$ дает:

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \frac{h^3}{3}$$

Рис. 37



Задача о вычислении объема конуса

и, таким образом,

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \qquad (7.7)$$

Эта формула известна из геометрии.

Механические задачи

Определение пройденного пути по скорости

Рассмотрим задачу. Твердое тело, размеры которого настолько малы, что его можно рассматривать как точку [1], движется со скоростью, представляющей собой известную функцию времени:

$$v = f(t).$$

Найти путь, пройденный телом за время от $t = t_1$ до $t = t_2$.

Для решения используем общий прием. Разобьем промежуток $t_2 - t_1$ на малые отрезки Δt. На протяжении каждого отрезка времени скорость v считаем постоянной. Пройденный за время Δt путь будет равен произведению скорости на Δt. Пройденные за отдельные отрезки пути

[1] Предположение о малости размеров тела вводится для того, чтобы не возникал вопрос о различных движениях у разных точек тела.

содержат множитель Δt:

$$v \cdot \Delta t.$$

Продолжим разбиение промежутка $t_2 - t_1$ так, чтобы все отрезки Δt стремились к нулю: $\Delta t \to 0$. На основании этого и малые пути, назовем их ΔL, тоже будут стремиться к нулю:

$$\Delta L = v \cdot \Delta t \to 0.$$

Интегральная сумма, составленная из всех путей ΔL, будет:

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \ldots$$

При неограниченном возрастании числа отрезков Δt интегральная сумма переходит в определенный интеграл, который и представляет собою точное значение пройденного пути [1]:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \tag{7.8}$$

Сформулируем правило вычисления пути по известной скорости. Путь, пройденный телом (малых размеров), равен определенному интегралу от скорости по времени. Приведем примеры. Во «Введении» рассматривалось движение, происходящее по закону:

$$L = 0{,}1t^3 + 4. \tag{1.1}$$

Воспользуемся этой задачей, чтобы применить выведенную выше формулу (7.8). Определим с помощью формулы путь, пройденный телом от начала 3-й до конца 5-й секунды.

Для применения формулы (7.8) надо знать скорость движения. В главе 3-й для движения (1.1) была определена скорость:

$$v = 0{,}3t^2. \tag{3.7}$$

[1] Напоминаем, что интегральная сумма дает вычисленную величину обязательно с погрешностью. Погрешность исчезает лишь при переходе к бесконечно большому количеству отрезков, т. е. лишь в пределе, когда интегральная сумма заменяется определенным интегралом.

Подставим эту функцию в определенный интеграл. Его нижний предел $t_1 = 2$ *сек*, верхний — $t_2 = 5$ *сек*:

$$L = \int_2^5 0{,}3t^2\,dt = 0{,}3\int_2^5 t^2\,dt.$$

Функция $f(x) = t^2$ имеет первообразную $F(t) = \frac{t^3}{3}$, поэтому

$$F(5) - F(2) = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{117}{3},$$

и путь за время от начала 3-й до конца 5-й секунды будет:

$$L = 0{,}3 \cdot \frac{117}{3} = 11{,}7 \text{ м}.$$

Действительно, из приведенной ранее таблицы легко найти, что путь за 3-ю, 4-ю и 5-ю секунды составит как раз 11,7 *м*.

Если требуется вычислить путь, пройденный за первые 5 секунд, то пределами определенного интеграла надо взять $t_1 = 0$ и $t_2 = 5$. Тогда:

$$L = 0{,}3\left(\frac{5^3}{3} - \frac{0}{3}\right) = 12{,}5 \text{ м},$$

что совпадает с данными той же таблицы [1].

Решим теперь задачу Галилея. Как известно, Галилей установил, что в пустоте все тела падают с одинаковым ускорением. Это позволило ему вывести формулу для скорости падающего тела:

$$v = gt. \tag{7.9}$$

Здесь v — скорость в *м/сек*, g — ускорение силы тяжести, равное 9,81 *м/сек*^{2}, и t — время в *сек*. При этом принимается, что тело падает в пустоте. В действительности тела движутся в воздухе, сопротивление которого может заметно изменить закон падения тела. Но если тело имеет форму, близкую к шаровой, и сделано из тяжелого материала, то

---

[1] Ко времени $t = 0$ тело уже прошло 4 *м*. Этот путь в расчет не входит.

сопротивление воздуха может оказаться настолько малым, что его действием можно пренебречь.

Выведем формулу для вычисления пути, проходимого свободно падающим телом. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

Пусть время падения будет T. Скорость, как функция времени, дается формулой Галилея. Путь находится по формуле (7.8):

$$H = \int_0^T gt\,dt = g\int_0^T t\,dt.$$

Первообразная функции $f(t) = t$ есть $\frac{t^2}{2}$; результат получаем в виде следующей формулы

$$H = g\left(\frac{T^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = g\frac{T^2}{2}. \qquad (7.10)$$

Эта общеизвестная формула тоже принадлежит Галилею.

Применим полученный результат к решению такой задачи. Определить, за сколько секунд тяжелый ключ, сорвавшийся с подвески, долетит до дна шахты, имеющей глубину 981 *м*.

Значение H задано: $H = 981$ *м*. Численное значение ускорения также известно: $g = 9{,}81$. Неизвестным является время свободного падения T.

Из формулы (7.10) получаем:

$$981 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot T^2.$$

После сокращения на 9,81:

$$100 = \frac{1}{2}T^2,$$

откуда

$$T^2 = 200, \quad T = \sqrt{200} \approx 14{,}1 \text{ сек},$$

т. е. ключ будет падать 14,1 *сек*.

Заметим, что формулы Галилея (7.9, 7.10) *нельзя* применять для подсчетов времени падения метеоритов, искусственных спутников и т.д.: при космических скоростях нельзя пренебрегать сопротивлением воздуха даже при большом его разрежении; ускорение силы тяжести на больших высотах изменяется и не равно 9,81 *м/сек*^{2}.

Вычисление работы переменной силы

Работу переменной силы невозможно вычислить при помощи школьной математики. Только методы высшей математики, в частности применение определенного интеграла, позволяют решить эту задачу в весьма общем виде.

Пусть малое тело переместилось вдоль прямой от точки a до точки b. К нему приложена сила F, изменяющаяся по известному закону в зависимости от пройденного телом пути. Нужно вычислить работу, произведенную силой F на пройденном телом пути.

Выше было показано, что работа силы выражается площадью криволинейной трапеции. Основанием трапеции служит отрезок оси x, на котором расположен пройденный путь (в данном случае отрезок от $x = a$ до $x = b$); сверху трапеция ограничена кривой, изображающей функцию $F = f(x)$. По условию задачи эта функция известна. Трапеция изображена на рис. 38.

Вычисление площади данной трапеции, как и всякой другой, производится по формуле (6.4). Эта площадь будет выражена не в единицах площади, т. е. не в квадратных метрах или сантиметрах, а в единицах работы—килограммометрах (по оси x отложен путь в метрах, по оси y — сила в килограммах). Работа будет:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.11}$$

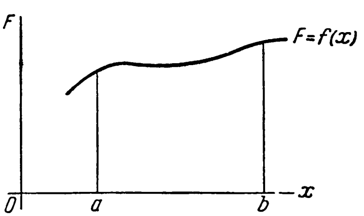


Рис. 38

Площадь этой трапеции выражает работу силы $F = f(x)$ на пути ав

Правило вычисления работы силы: работа силы на некотором пути равна определенному интегралу от силы, взятому по этому пути [1].

Применим полученное правило к решению задач. Сила, приложенная к малому телу (будем называть его просто точкой), изменяется по закону:

$$F = f(x) = 5 + \frac{5}{1,5}x.$$

Вычислить работу этой силы при перемещении точки на расстояние 1,5 *м*. На рис. 39 к задаче дан чертеж. В данном случае $a = 0$ и $b = 1,5$ *м*. Использование формулы (7.11) дает:

$$A = \int\limits_0^{1,5} \left(5 + \frac{5}{1,5}x\right) dx.$$

Определенный интеграл от суммы двух функций разбивается на сумму двух определенных интегралов:

$$A = \int\limits_0^{1,5} 5\,dx + \int\limits_0^{1,5} \frac{5}{1,5}\,x dx = 5\int\limits_0^{1,5} dx + \frac{5}{1,5}\int\limits_0^{1,5} x dx.$$

Первообразные подынтегральных функций неоднократно использовались. Находим:

$$A = 5(1,5 - 0) + \frac{5}{1,5}\left(\frac{1,5^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = 11,25 \textit{ кГм}.$$

Этот результат получен был раньше средствами школьной математики. Следующую задачу уже нельзя решить без помощи определенного интеграла.

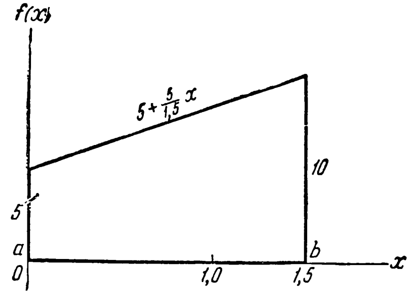
Пусть сила, приложенная к точке, изменяется по закону:

$$F = 10 \cos x.$$

Необходимо вычислить работу этой силы на пути, протяжение которого π *м*. Работа данной силы выражается площадью криволинейной трапеции, изображенной на рис. 40. Основанием трапеции служит отрезок оси x от $x = 0$ до $x = \pi$. Сверху трапеция ограничена кривой $y = 10 \cos x$.

[1] Напоминаем, что сила, по предположению, направлена вдоль пути.

Рис. 39



Решение 3-й задачи из «Введения» (см. рис. 3)

Площадь трапеции равна:

$$\int_0^\pi 10\cos x\,dx = 10\int_0^\pi \cos x\,dx.$$

Функция $y = \cos x$ имеет первообразную $\sin x$. Подставляем верхний и нижний пределы π и 0:

$$A = 10(\sin\pi - \sin 0) = 0.$$

Получилось $A = 0$, т. е. работа силы равна нулю. Результат явно нелепый. Какая же была допущена ошибка? Ответ дается рис. 40. Площадь, ограниченная кривой $10\cos x$, состоит из двух половин: площади OAB и площади BDC. Величины их равны между собой. При подсчете площадей с помощью определенного интеграла они получают знак плюс или минус, в зависимости от того, как расположена криволинейная трапеция. При расположении трапеции выше оси x площадь имеет знак плюс, ниже оси — знак минус. В сумме две равные по величине площади дали нуль [1]. Надо вычислить площадь только одной из трапеций, например, OAB. Тогда получим:

$$\frac{A}{2} = \text{пл. } OAB = 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$$

[1] Этот «нулевой» результат имеет простое и наглядное объяснение с точки зрения механики. Мы не приводим его, так как рассматриваем только математическую сторону задачи.

Рис. 40

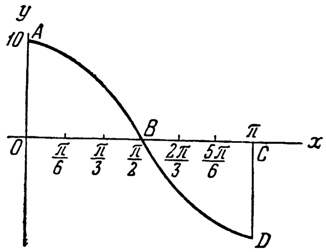
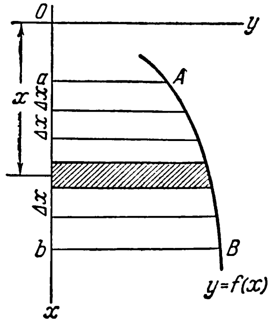


Рис. 41



40. Сила изменяется по закону косинуса

41. Давление воды на погруженную в нее пластину

т. е.

$$\frac{A}{2} = 10\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 10 \ \textit{кГм}.$$

Дальше, если не обращать внимания на то, совершала сила положительную или отрицательную работу, полная работа A будет 20 *кГм*.

Разные задачи

Давление воды на пластину

Пусть вертикальная пластина $abBA$ погружена в воду. Верхняя кромка пластины aA параллельна свободной поверхности воды. Система координат выбрана так, чтобы ось y совпала с поверхностью воды, ось x была направлена вертикально вниз. Один вертикальный край пластины, именно ab, располагается на оси x. Противоположный край AB — криволинейный. Кривая AB имеет уравнение $y = f(x)$. Требуется вычислить полное давление воды на всю пластину $abBA$.

На рис. 41 показана пластина вместе с системой координат Oxy. Давление жидкости на площадку вычисляется следующим образом. Если на каждый квадратный метр площади жидкость давит с силой F *кГ/м*^{2} и площадь пластины равна S *м*^{2}, то полное давление на всю площадь равно FS *кГ*. Трудность предложенной задачи заключается в том, что пластина расположена не горизонтально, а вертикально. Разные участки находятся на разной глубине, следовательно, давление меняется постепенно от наименьшего на отрезке aA до наибольшего на отрезке bB. Поэтому необходимо применить общий прием, неоднократно нами уже использованный.

Разобьем интервал от $x = a$ до $x = b$ на малые промежутки Δx. При этом пластина разобьется на полоски (одна из них заштрихована). Считаем, что сила давления воды на полоску по всей полоске постоянна (несмотря на то, что на нижнюю границу вода, конечно, давит с большей силой, чем на верхнюю). Для вычисления давления воды на полоску используем соответствующий физический закон. Из гидростатики известно, что давление жидкости на погруженную пластинку равно весу столба жидкости, опирающегося на нее, и что это давление не зависит от расположения пластинки. Вес столба равен его объему, умноженному на удельный вес, объем же равен площади основания (т. е. площади полоски), умноженной на высоту столба.

Из рис. 41 видно, что высота столба жидкости равна глубине, на которой находится данная полоска. Полоска, как всегда, заменяется прямоугольником. Одна сторона прямоугольника — отрезок Δx, другая сторона — $f(x)$. Площадь основания, вычисленная приближенно, есть $\Delta x \cdot f(x)$. Объем столба будет:

$$\Delta x \cdot f(x) \cdot x.$$

Давление зависит не от объема столба жидкости, а от его веса. Вес равен объему, умноженному на удельный вес. Пусть удельный вес жидкости W (у воды $W = 1$). Тогда вес одного столба ΔQ запишется так:

$$\Delta Q = Wxf(x)\,\Delta x.$$

Обозначим глубину расположения первой полоски x_1, давление на эту полоску ΔQ_1; глубину расположения второй полоски — x_2 и т. д. При таких обозначениях давление: на первую полоску — $\Delta Q_1 = Wx_1 f(x_1)\,\Delta x$, на вторую полоску — $\Delta Q_2 = Wx_2 f(x_2)\Delta x$ и т. д. Если вся пластина разбита на n полосок, то полное давление на нее (вычисленное пока еще приближенно!) будет:

$$Q_n = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n.$$

Теперь полагаем $\Delta x \to 0$, т. е. продолжаем разбиение интервала на все большее число полосок. Каждая полоска при этом делается более узкой. Так как давление на отдельную полоску вычисляется по формуле $Wxf(x)\Delta x$, а $\Delta x \to 0$, то и давление на каждую полоску в отдельности стремится к нулю, а число полосок неограниченно возрастает.

Полное давление Q_n при таких обстоятельствах представляет собою интегральную сумму. Пределом этой интегральной суммы, выражающим уже совершенно точно давление жидкости на всю пластину $abBA$, будет определенный интеграл:

$$Q = \int_a^b Wxf(x)\,dx,$$

и так как считаем, что удельный вес жидкости не меняется, то

$$Q = W\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Эта формула дает решение поставленной задачи.

Рассмотрим пример. Пусть вертикальная пластина ограничена параболой $f(x) = \sqrt{x}$ (рис. 42). Вершина параболы помещена в начале координат (т. е. находится на поверхности воды). Нижний край пластины BA лежит на глубине $h = 2$ *м*. Вычислим силу давления воды на пластину.

Ось симметрии параболы OC лежит на оси x. Можно вычислить силу, приходящуюся на половину пластины, например, на OCA, и результат удвоить. В этом примере $f(x) = \sqrt{x}$ и подстановка в определенный интеграл дает:

$$\frac{1}{2}Q = \int_0^h x\sqrt{x}\,dx = \int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

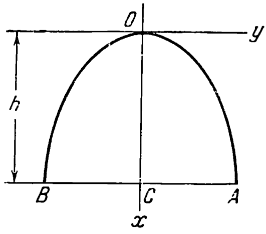


Рис. 42

Параболическая пластина

Первообразная функции $x^{\frac{3}{2}}$ равна:

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}.$$

Пределы определенного интеграла: h и 0 . Тогда:

$$F(h) = \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} \quad \text{и} \quad F(0) = 0.$$

Интеграл равен:

$$F(h) - F(0) = \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}.$$

В примере задано $h = 2$, следовательно,

$$\frac{Q}{2} = \frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{32} \approx 2{,}256 \ \text{т}.$$

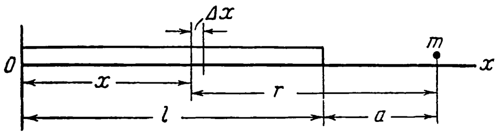
На всю пластину действует сила, в два раза большая.

Сила притяжения

По закону Ньютона две массы m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой

$$Q = k\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{7.12}$$

Рис. 43



Притягивающий стержень длиною l

В этой формуле k — так называемая постоянная тяготения (численное значение этой постоянной находится посредством особых измерений), r — расстояние между телами. Предполагается, что оба тела с массами m_1 и m_2 имеют такие малые размеры, что их можно считать точками.

Рассмотрим задачу. Стержень, изображенный на рис. 43, имеет длину l и массу M. На одной прямой со стержнем расположена точка массы m. Расстояние этой точки от ближайшего конца стержня равно a. Вычислить силу Q, с которой стержень притягивает массу m[1]. Трудность задачи состоит в том, что нельзя непосредственно применить формулу (7.12), потому что отдельные частицы стержня находятся на разных расстояниях от точки m и поэтому притягивают точку с разными силами. Задача решается с помощью общего приема и приводится к определенному интегралу. Решим ее.

На рис. 43 ось x направлена вдоль стержня. Начало оси (точка O) совпадает с одним концом стержня. Разобьем стержень на участки малой длины Δx. Каждый такой участок считаем материальной точкой массы Δm. Массу подсчитаем следующим образом. Масса всего стержня равна M, длина его l; на каждую единицу длины приходится масса $\frac{M}{l}$, а на длину Δx единиц — в Δx раз больше:

$$\Delta m = \frac{M}{l}\,\Delta x.$$

[1] Точка m притягивает к себе стержень с силой такой же величины, только сила направлена в противоположную сторону.

Теперь надо вычислить расстояние каждой массы Δm от точки m. Из чертежа на рис. 43 видно, что расстояние точки m от начала оси x равно $l + a$; расстояние участка массы Δm от точки O равно x. Следовательно, расстояние r между массами Δm и m будет:

$$r = (a + l) - x.$$

Пусть первый (считая от точки O) участок имеет массу Δm_1, второй — Δm_2 и т. д. Каждую из этих масс приближенно можно считать точечной и, значит, к каждой из них в отдельности можно применить формулу (7.12) для подсчета притяжения точки m. Например, для массы Δm_1 формула дает:

$$\Delta Q_1 = k\frac{\Delta m_1 \cdot m}{r_1^2}.$$

Выше найдено, что $\Delta m = \frac{M}{l}\Delta x$ и $r = (a + l) - x$; применяя эти расчеты к первому участку (к массе Δm_1), найдем:

$$\Delta Q_1 = k\frac{\left(\frac{M}{l}\Delta x\right)\cdot m}{[(a+l)-x_1]^2},$$

что удобнее записать в таком виде:

$$\Delta Q_1 = k\frac{Mm}{l\,(a+l-x_1)^2}\Delta x;$$

для второго участка формула останется той же, только x_1 нужно заменить на x_2:

$$\Delta Q_2 = k\frac{Mm}{l\,(a+l-x_2)^2}\Delta x.$$

Затем вычислим ΔQ_3, ΔQ_4 и т. д. Полная сила притяжения, вычисленная приближенно, будет:

$$Q_n = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \cdots + \Delta Q_n.$$

Увеличивая число участков Δx, а каждый из них устремляя к нулю, мы освобождаем расчет от погрешности [1].

[1] Погрешность получается за счет того, что частицы массы Δm, расположенные на Δx, не одинаково удалены от массы m, так как Δx имеет какую-то длину. Мы же считали, что все эти частицы расположены на одном расстоянии r.

Сила Q_n при этом представляет собою интегральную сумму. Ее предел есть определенный интеграл:

$$Q = \int_0^l k \frac{Mm}{l} \frac{dx}{(a+l-x)^2} = \frac{kMm}{l} \int_0^l \frac{dx}{(a+l-x)^2}.$$

Первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{(a+l-x)^2}$ имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{a+l-x}.$$

Подставим в первообразную вместо x верхний предел интеграла l и нижний предел 0. Получим

$$F(l) - F(0) = \frac{1}{a+l-l} - \frac{1}{a+l-0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}.$$

Следовательно, сила притяжения будет:

$$Q = \frac{kMm}{l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right).$$

Дроби в скобках можно привести к общему знаменателю и сложить, после чего сила напишется в форме:

$$Q = \frac{kMm}{l} \frac{l}{a(a+l)} = \frac{kMm}{a(a+l)}.$$

В правой части все величины заданы: масса стержня M, масса точки m, длина стержня l и расстояние a; постоянная тяготения k известна (ее численное значение помещается в специальных справочниках физических величин). Подставляя вместо всех этих величин их численные значения, найдем силу Q.

Разряд батареи аккумуляторов

Пусть батарея аккумуляторов замкнута на сопротивление, величина которого $R = 10\Omega$. Начальное напряжение в цепи $U = 100$ *в*. Напряжение падает (по причине разряда батареи) со скоростью $\frac{1}{20}$ *в/сек*. За сколько времени через цепь пройдет 6400 кулонов электричества?

Согласно закону Ома, сила тока в электрической цепи выражается через напряжение цепи U и ее сопротивление формулой:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{7.13}$$

Как и в предыдущих задачах, физический закон, т. е. закон Ома (7.13), не может применяться к задаче, так как по условию задачи напряжение U все время изменяется, а с ним изменяется и количество проходящего в единицу времени электричества. Прежде всего надо установить, по какому закону изменяется напряжение U. Если за 1 *сек* напряжение снижается на $\frac{1}{20}$ *в*, то за t секунд снизится на $\frac{1}{20}t$. Напряжение в цепи будет:

$$U = 100 - \frac{1}{20}t.$$

Ток в цепи при этом напряжении найдем по формуле (7.13):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{100 - \frac{1}{20}t}{R}.$$

По условию $R = 10\Omega$, следовательно,

$$I = \frac{100 - \frac{t}{20}}{10} = 10 - \frac{t}{200}\, a.$$

Выберем такой малый промежуток времени Δt, чтобы можно было считать, что на протяжении этого времени напряжение U приближенно остается постоянным. В таком случае и ток I будет постоянным, что следует из формулы (7.13). Количество же электричества, протекшего через цепь, равно силе тока I, умноженной на время его действия:

$$\Delta Q = I\Delta t.$$

Далее поступим так же, как поступали в подобных случаях в других задачах: суммируем ΔQ_1, ΔQ_2 и т. д. и перейдем к пределу. Подставив значение I, получим:

$$\Delta Q_1 = \left(10 - \frac{t_1}{200}\right)\Delta t; \quad \Delta Q_2 = \left(10 - \frac{t_2}{200}\right)\Delta t \quad \text{и т. д.}$$

После перехода к пределу получим:

$$Q = \int_0^T \left(10 - \frac{t}{200}\right) dt.$$

В этом определенном интеграле нижним пределом является время $t = 0$ (начало опыта), верхним — то неизвестное пока время T, в течение которого через цепь пройдет 6400 кулонов. Для вычисления определенного интеграла его целесообразно разбить на два, вынеся при этом постоянные множители:

$$Q = 10 \int_0^T dt - \frac{1}{200} \int_0^T t dt.$$

Согласно условию задачи, $Q = 6400$. Значит

$$6400 = 10 \int_0^T dt - \frac{1}{200} \int_0^T t dt.$$

В предыдущих задачах подобные интегралы вычислялись неоднократно, поэтому сразу приведем результат вычислений

$$6400 = 10T - \frac{T^2}{2 \cdot 200}.$$

Решив квадратное уравнение, найдем:

$$T_1 = 3200 \textit{ сек} \quad \text{и} \quad T_2 = 800 \textit{ сек}.$$

Ответ $T_1 = 3200$ *сек* или 53 *мин.* 20 *сек* не имеет смысла, так как за это время напряжение батареи не только упало бы до нуля, но стало бы отрицательным.

8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заглавии книги поставлены три вопроса. В поисках ответов на них читатель проделал долгий путь. Пришлось познакомиться с новыми понятиями, с новыми математическими приемами. Быть может, пришлось изменить свою точку зрения на математику как на науку в целом и на значение математики для его, читателя, профессии. Но главный результат затраченного труда тот, что получен ответ на поставленные в заглавии вопросы. Подведем итоги.

1. Что такое высшая математика?

Как математика — она занимается величинами. Как высшая математика, она занимается почти исключительно переменными величинами. Нами были рассмотрены свойства переменного движения, переменной скорости, работа переменной силы, переменное давление жидкости на погруженное тело и т. д. Даже те величины, которые в школьной математике считаются постоянными, высшая математика рассматривает в движении. В задаче о наивыгоднейших размерах сосуда его диаметр и высота не оставались неизменными. Наоборот, мы предположили, что они непрерывно изменяются. Это позволило из всех возможных размеров выбрать именно те, которые удовлетворяли условиям задачи. Переменные величины рассматриваются не изолированно. Они связаны между собой. Изменение одной из них вызывает изменение другой. Переменные находятся в функциональной зависимости. Изучение этих зависимостей составляет сущность высшей математики. Итак, на первый вопрос получен следующий ответ: высшая математика — это математика переменных величин и функциональных зависимостей; это математика, изучающая явления мира в их изменении, в их взаимной связи.

2. Чем высшая математика отличается от школьной?

Переход от постоянных величин к переменным потребовал не только открытия новых математических действий и приемов; пришлось развить новые взгляды на самые основные математические понятия. Высшая математика имеет много существенных отличий от школьной, и это понятно. Перечислим их вкратце:

а) в высшей математике уделяется гораздо большее внимание переменным величинам, чем в школьной;

б) подход к изучаемым величинам отличается значительно большей глубиной. Например, связь функции с рядом Маклорена глубоко раскрывает ее сущность. Достаточно сослаться хотя бы на то, что только разложение функции в ряд объясняет нам, каким образом из аргумента x получается $\sin x$ или другая функция. Такие операции, как исследование функций, в школьной математике отсутствуют совсем;

в) в высшей математике основную роль играют новые (по сравнению со школьной) идеи. Большое значение имеют такие процессы, как стремление к нулю (вспомните $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$), потому что, например, важнейшее понятие производной без знания такого процесса получить невозможно. С другой стороны, не меньшее значение имеет и прямо противоположный процесс — стремление к бесконечности: мы видели, что число слагаемых интегральной суммы неограниченно возрастает; число членов ряда бесконечно велико.

Решающее значение имеет понятие предела. Только применяя его, можно получить производную из отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а ведь производная — это основа высшей математики. Предел интегральной суммы приводит нас к определенному интегралу — важнейшему инструменту для решения задач практики;

г) в высшей математике еще и бо́льшее число математических действий: появились новые действия — отыскание производной и первообразной.

Хотя здесь перечислены далеко не все отличия, их все же достаточно, чтобы оценить, насколько сильно разнится идейная и оперативная части высшей математики от школьной. Коротко ответ на второй вопрос можно изложить следующим образом.

В высшей математике а) более глубокий подход к математической величине, б) используется ряд новых идей (идеи стремления к нулю, неограниченного роста и т. д.); в) применяются новые математические действия, г) как следствие предыдущего, новые приемы решения задач.

3. Для чего нужна высшая математика?

Область применения высшей математики безгранична. Одно перечисление вопросов, разрешаемых с ее помощью, составило бы, вероятно, книгу, не меньшую, чем эта. Сравнительно недавно считалось, что существенную роль высшая математика играет лишь в точных науках: механике, астрономии, физике и т. д. Что же касается экономических наук, биологии и т. д., то в них высшая математика использовалась лишь эпизодически. Однако за последние 20—25 лет и здесь произошли колоссальные изменения. Принципы кибернетики, теория информации и другие важнейшие отделы высшей математики проникают в такие области, которые никогда и не помышляли о привлечении математики. Упомянем лишь одну науку: лингвистику — науку о языках. Кто когда-нибудь мог подумать, что филологи будут изучать высшую математику? А теперь уже появились представители новой специальности—математической лингвистики. Эти специалисты управляют машинами, которые выдают библиографические справки, переводят книги с одного языка на другой и даже сочиняют стихи.

Ответ на третий вопрос самый короткий: высшая математика нужна во всех областях человеческой деятельности.

В настоящее время, как правило, всякий специалист подходит к своему делу творчески. Он стремится овладеть своей профессией в совершенстве, внести что-то новое, прогрессивное. Для этого приходится много читать, а в статьях научно-технических журналов и в учебниках в большом количестве используется высшая математика. Нередко читатель вынужден отложить статью и сказать со вздохом сожаления: «Не по зубам». Знание же основ высшей математики могло бы необыкновенно расширить возможности использования литературы и тем самым открыть новые пути к овладению вершинами мастерства.

Автор будет рад, если его книга побудит читателя задуматься над вопросом: «А не следует ли мне основательно ознакомиться с этим мощным орудием знания?»

В заключение дадим несколько советов тем, кто захотел бы познакомиться с математикой более основательно.

Прежде чем обращаться непосредственно к изучению анализа, надо добиться, чтобы знания школьной математики были и достаточно прочными. При таком уровне знаний ссылки на правила и теоремы алгебры, геометрии и тригонометрии (они встречаются постоянно) не будут создавать дополнительные трудности в изучении и без того не легких вопросов высшей математики. Особенное внимание надо уделить второй части алгебры и всей тригонометрии, без которых совершенно невозможно продвинуться вперед в понимании анализа.

При самостоятельном изучении высшей математики первостепенное значение имеет самопроверка. Лучшая проверка — решение задач. Нередко кажется, что теория понятна, когда же пытаешься применить ее на практике, обнаруживается, что отдел теории требует еще изучения и изучения. Надо взять себе за правило: не считать раздел усвоенным, пока из него не решено несколько задач.

Математика не терпит поверхностного отношения. В математике ничего не принимается на веру. Поэтому при вдумчивом отношении к предмету у изучающего появляется множество вопросов. Иногда найти ответ на вопрос далеко не просто. Вот почему даже при самостоятельных занятиях высшей математикой необходимо время от времени беседовать со специалистом-математиком.

СОДЕРЖАНИЕ

Леон Семенович Фрейман

Что такое высшая математика

Чем она отличается от школьной
Зачем она нужна

Утверждено к печати
редколлегией научно-популярной литературы
Академии наук СССР

Редактор *В. А. Никифоровский*
Редактор издательства *Е. М. Кляус*
Художник *Е. К. Манке*
Технический редактор *С. С. Тихомирова*

Сдано в набор 11/XII 1964 г.
Подписано к печати 15/II 1965 г. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Печ. л. 4,75. Усл. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л. 6,2.
Тираж 57000 экз. Т-03143. Изд. № 5013/04. Тип. зак. № 1558.
Темплан НПЛ 1965 г. № 20.

Цена 20 коп.

Издательство «Наука»,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

РАЕВСКИЙ И. П. и СУББОТИН И. И. Измерение линейных ускорений. 1961. 64 стр. 21 коп.

Леонард ЭЙЛЕР. Письма к ученым. 1963. 397 стр. 1 р. 60 к.

Книги можно приобрести в магазинах книготоргов и «Академкнига». Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресу: Москва, Центр, Б. Черкасский пер., 2/10 магазин «Книга-почтой» конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига».

Адреса магазинов «Академкнига»

Москва, ул. Горького, 8 (магазин № 1); Москва, ул. Вавилова, 55/5 (магазин № 2); Ленинград, Д-120, Литейный проспект, 57; Свердловск, ул. Белинского, 71-в; Новосибирск, Красный проспект, 51; Киев, ул. Ленина, 42; Харьков, Уфимский пер., 4/6; Алма-Ата, ул. Фурманова, 129; Ташкент, ул. Карла Маркса, 29; Ташкент, ул. Шота Руставели, 43; Баку, ул. Джапаридзе, 13; Уфа, 55, проспект Октября, 129.

«АКАДЕМКНИГА»

20 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»