В.Г.Крупин, А.Л.Павлов, Л.Г.Попов

МАТЕМАТИКА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сборник задач с решениями

В.Г.Крупин, А.Л.Павлов, Л.Г.Попов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сборник задач с решениями

Москва
Издательский дом МЭИ
2011

УДК 51
К 845

Утверждено учебным управлением МЭИ (ТУ)
в качестве учебного пособия для студентов

Подготовлено на кафедре высшей математики
Рецензенты: докт. техн. наук, проф. А.К. Гущин,
докт. физ.-мат. наук, проф. В.А. Юдин

Крупин В.Г.
К 845 Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями : учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 352 с. ISBN 978-5-383-00640-5

Пособие содержит задачи (по 30 вариантов каждой) из раздела высшей математики «Уравнения математической физики». Задачи охватывают следующие темы: задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка; метод разделения переменных решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в различных областях; начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения; краевые задачи для уравнения Гельмгольца и интегрального уравнения Фредгольма II рода. Каждая глава пособия начинается с изложения теоретических сведений и разбора примера решения конкретной задачи.

Предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по техническим специальностям, а также аспирантов и преподавателей.

Учебное издание

Крупин Владимир Григорьевич, **Павлов** Александр Леонидович,
Попов Леонид Глебович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
Сборник задач с решениями
Учебное пособие

Редактор издательства Г.Ф. Раджабова

Темплан издания МЭИ 2010, учеб. — Подписано в печать 12.05.11
Печать офсетная — Формат 60×84/16 — Физ. печ. л. 22,00
Тираж 516 экз. — Изд. № 75 — Заказ

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14
Отпечатано в типографии ФКП «НИИ «Геодезия», 141292, Московская обл.,
г. Красноармейск, просп. Испытателей, д. 14

ISBN 978-5-383-00640-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия начинается с изложения минимальных теоретических сведений и разбора примера решения конкретной задачи, после чего предлагается 30 вариантов задач, подобных рассмотренной. Каждая глава образует в известной степени самостоятельное целое, и может быть поэтому изучена без знания остальных.

Сначала рассмотрены примеры классификации дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и приведения их к каноническому виду в случае двух и трех независимых переменных.

Следующая глава посвящена методу разделения переменных решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольной области, внутри и вне круговой области, в кольце, в круговом секторе, в круговом цилиндре, внутри и вне шара. Рассмотрен метод конформных отображений решения двумерных краевых задач для уравнения Лапласа. Затем рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Методом разделения переменных и методом интегрального преобразования Лапласа решены задачи на отрезке, полубесконечной прямой, в прямоугольнике, круге, круговом секторе, параллелепипеде, круговом цилиндре, секторе кругового цилиндра.

Следующая глава посвящена решению краевых задач для уравнения Гельмгольца в круге, в круговом секторе, в шаре и вне шара.

Отдельная глава посвящена дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. Рассмотрены примеры нахождения общего решения квазилинейного дифференциального уравнения и решения задач Коши для этих уравнений. Последняя глава посвящена решению интегральных уравнений Фредгольма II рода с вырожденными и симметричными ядрами. Рассмотрен метод последовательных приближений решения интегрального уравнения с непрерывным ядром.

Учебное пособие предназначено для преподавателей, аспирантов и студентов и может быть использовано в качестве основы для проведения практических занятий.

Авторы выражают огромную благодарность рецензентам профессору А.К. Гущину и профессору В.А. Юдину за тщательное редактирование текста книги, а также профессору Ю.А. Дубинскому, взявшему на себя труд ознакомиться с рукописью и сделавшему ряд ценных замечаний.

Основные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное арифметическое пространство

$A = \{z : \ldots\}$ — множество состоит из элементов z, обладающих свойством, указанным после двоеточия

$A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует высказывание B (A — достаточное условие B, а B — необходимое условие A)

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны

$a \in A$, $a \notin A$ — элемент a принадлежит множеству A, элемент a не принадлежит множеству A

$\exists\, x : \ldots$ — существует такое x, что ...

$\exists!\, x : \ldots$ — существует единственное x, что ...

$\nexists\, x : \ldots$ — не существует такого x, что ...

$\forall\, x$ — для любого x

$k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел от 1 до n включительно

$C(D)$ — нормированное пространство функций, непрерывных в области D

$C^k(D)$ — нормированное пространство функций, непрерывно дифференцируемых k раз в области D

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ — точка пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами x_i, $i = \overline{1, n}$

$|\bar{x}|$ — длина (норма) в $\mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

u_x, u_y, u_{xy} — частные производные функции $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$\operatorname{grad} u(\bar{x})$ — вектор градиента скалярной функции $u(\bar{x})$ векторного аргумента $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\operatorname{div} \bar{a}(\bar{x})$ — дивергенция векторного поля $\bar{a}$

$\operatorname{rot} \bar{a}(\bar{x})$ — ротор векторного поля $\bar{a}$

D — область n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. связное открытое множество точек $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

∂D — граница области D

$\bar{D} = D \cup \partial D$ — замыкание области D

$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ — функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to a$

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ — функция $f(x)$ более высокого порядка малости по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$

$\mathbf{A} = ||a_{ij}||$ — матрица чисел

$\mathbf{A}^T = ||a_{ji}||$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{-1}$ — обратная матрица к матрице $\mathbf{A}$

$|\mathbf{A}|$ — определитель матрицы $\mathbf{A}$

$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ — символ Кронекера

$\mathbf{E} = ||\delta_{nk}||$ — единичная матрица

$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ — вычет функции в точке z_0

$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$ — интеграл в смысле главного значения

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2} dz$ — интеграл вероятности (функция ошибок), $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$

$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$ — интеграл вероятности Гаусса (функция нормального распределения)

$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда

Используемые сокращения

ДУ — дифференциальное уравнение

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение

ИУ — интегральное уравнение

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений

1. КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с n независимыми переменными

Определение. Дифференциальное уравнение *линейное относительно старших производных* вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(\bar{x}, u(\bar{x}), \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad \bar{x} = (x_1, ..., x_n) \qquad (1.1.1)$$

называется *квазилинейным* дифференциальным уравнением [2—4, 10—12].

Рассмотрим фиксированную точку $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset I\!R^n$ и квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}) y_i y_j \quad (\text{в матричном виде } \ Y^T A Y\ ), \qquad (1.1.2)$$

где $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $\mathbf{A} = ||a_{ij}(\bar{x})||$ — матрица квадратичной формы.

В результате невырожденного преобразования переменных

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\tilde{y}_k, \quad \det ||c_{ik}|| \neq 0 \quad (\text{в матричном виде } \ Y = C\tilde{Y}\ ) \qquad (1.1.3)$$

матрица квадратичной формы изменяется по формуле

$$\tilde{\mathbf{A}} = C^T A C. \qquad (1.1.4)$$

Можно показать, что после невырожденной замены независимых переменных

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} x_k, \quad \det ||d_{ik}|| \neq 0, \quad \tilde{X} = DX \qquad (1.1.5)$$

в уравнении (1.1.1) коэффициенты при старших производных изменяются подобным образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{km}(\bar{x})\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}_m \partial \tilde{x}_k},$$

где $u(x_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \ldots, x_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)) \equiv U(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$,

$$\tilde{a}_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}) d_{ki} d_{mj}$$

или в матричном виде

$$\tilde{A} = DAD^T. \tag{1.1.6}$$

Из (1.1.4) и (1.1.6) получим $D = C^T$.

В фиксированной точке $\bar{x}$ с помощью невырожденного преобразования (1.1.3) приведем квадратичную форму (1.1.2) к каноническому виду:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{y}_k^2. \tag{1.1.7}$$

Из теоремы об инерции квадратичной формы следует, что число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов λ_k в каноническом виде является инвариантом и не зависит от преобразования (1.1.3) независимых переменных. На этом основании проведем классификацию.

Определение. 1. Если все коэффициенты $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$ одного знака, то дифференциальное уравнение (1.1.1) называется уравнением *эллиптического типа* в точке $\bar{x}$.

2. Если все коэффициенты $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$ и среди них есть положительные и отрицательные, то дифференциальное уравнение (1.1.1) называется уравнением *гиперболического типа* в точке $\bar{x}$, причем, если $(n-1)$ коэффициентов одного знака, то уравнение называется *нормально гиперболическим*, если $(n-m)$ коэффициентов одного знака при $1 < m < n-1$, то оно называется *ультрагиперболическим*.

3. Если хотя бы один коэффициент $\lambda_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, то дифференциальное уравнение (1.1.1) называется уравнением *параболического типа* в точке $\bar{x}$.

Дифференциальное уравнение (1.1.1) приводится к каноническому виду с помощью замены независимых переменных (1.1.5) с матрицей $\mathbf{D} = C^T$.

Пример 1.1. Определить тип дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \tag{1.1.8}$$

и привести его к каноническому виду.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3.$$

Методом Лагранжа приведем ее к каноническому виду:

$$\begin{aligned}(y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2^2 + y_3^2 - 4y_2y_3) + 4y_2y_3 =\\ = (y_1 - 2y_2 + y_3)^2 + 4y_2y_3 = \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - \tilde{y}_3^2,\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

где

$$\begin{cases}\tilde{y}_1 = y_1 - 2y_2 + y_3,\\ \tilde{y}_2 = y_2 + y_3,\\ \tilde{y}_3 = y_2 - y_3\end{cases} \Rightarrow\ \tilde{Y} = C^{-1}Y, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Из канонического вида квадратичной формы (1.1.9) следует, что дифференциальное уравнение (1.1.8) *гиперболического типа.*

Найдем матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

С помощью замены переменных (1.1.5) с матрицей $\mathbf{D} = C^T$:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= x,\\ \tilde{y} &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,\\ \tilde{z} &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

приведем дифференциальное уравнение (1.1.8) к каноническому виду.

Рассмотрим сложную функцию $u(x(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\, y(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\, z(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})) \equiv$ $\equiv U(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$. По правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}}\cdot\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{y}}\cdot\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{z}}\cdot\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{z}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{z}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}\partial \tilde{z}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{z}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}\partial \tilde{z}}.$$

Предположим, что в исходном уравнении проведена замена $u(x,y,z) = U(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$. Подставим вычисленные производные в уравнение, приведем подобные члены и получим канонический вид уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} + U = 0, \qquad (1.1.11)$$

где $U\left(x,\, \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2},\, \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right) = u(x,y,z)$.

Ответ. Уравнение (1.1.8) гиперболического типа, с помощью замены независимых переменных (1.1.10) приводится к каноническому виду (1.1.11).

Задача 1.1. Определить тип дифференциального уравнения, привести к каноническому виду, указать преобразование независимых переменных, приводящее к каноническому виду.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 0.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 0.$

3. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

4. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

8. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

10. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

11. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

12. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

14. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

15. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

18. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

20. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 15\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

25. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

29. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

30. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

1.2. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными

В том случае, когда дифференциальное уравнение (1.1.1) имеет две независимые переменные $x_1 = x$, $x_2 = y$, классификацию можно провести не в фиксированной точке, а в некоторой области изменения независимых переменных $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \qquad (1.2.1)$$

Определение. 1. Дифференциальное уравнение (1.2.1) называется уравнением *эллиптического типа* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если $\triangle = a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)a_{22}(x,y) < 0$.

2. Дифференциальное уравнение (1.2.1) называется уравнением *гиперболического типа* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если $\triangle = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

3. Дифференциальное уравнение (1.2.1) называется уравнением *параболического типа* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если $\triangle = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{11}dy - (a_{12} \pm \sqrt{\triangle})dx = 0, \qquad (1.2.2)$$

где $\triangle = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, называется *характеристическим* для уравнения с частными производными (1.1.1), а их первые интегралы $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$ называются *уравнениями характеристик.*

Если уравнение (1.2.1) *эллиптического типа* (т.е. $\triangle < 0$), то характеристические дифференциальные уравнения (1.2.2) имеют комплексные первые интегралы $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C_2$. Заменой переменных $\alpha = \varphi(x,y)$, $\beta = \psi(x,y)$ уравнение (1.2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \beta^2} + F_1\left(\alpha, \beta, \tilde{u}(\alpha,\beta), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Если уравнение (1.2.1) *гиперболического типа* (т.е. $\triangle > 0$), то дифференциальные уравнения характеристик (1.2.2) имеют два действительных первых интеграла $\varphi(x,y) = C_1$ и $\psi(x,y) = C_2$. Заменой переменных $\alpha = \varphi(x,y)$, $\beta = \psi(x,y)$ уравнение (1.2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta} + F_2\left(\alpha, \beta, \tilde{u}(\alpha,\beta), \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Если уравнение (1.2.1) *параболического типа* (т.е. $\triangle = 0$), то дифференциальное уравнение характеристик (1.2.2) имеет один первый интеграл $\varphi(x,y) = C$. Заменой переменных $\alpha = \varphi(x,y)$, $\beta = \beta(x,y)$, где $\beta(x,y)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что якобиан $\dfrac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, уравнение (1.2.1) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\beta^2} + F_3\left(\alpha, \beta, \tilde{u}(\alpha,\beta), \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Замечание. Если исходное уравнение (1.2.1) с постоянными коэффициентами и линейно, то преобразованное (каноническое) уравнение линейно с постоянными коэффициентами и допускает дальнейшее упрощение с помощью замены неизвестной функции

$$\tilde{u}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta)e^{\mu\alpha+\nu\beta}, \tag{1.2.3}$$

где μ и ν подбираются так, чтобы исключить некоторые младшие производные. Уравнения примут следующий вид соответственно для эллиптического, гиперболического и параболического типов:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + av = F_1(\alpha,\beta) \quad \text{(уравнение Гельмгольца)},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + av = F_2(\alpha,\beta) \quad \text{(телеграфное уравнение)},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + a\frac{\partial v}{\partial\alpha} = F_3(\alpha,\beta) \quad \text{(уравнение теплопроводности)}.$$

Пример 1.2. Определить тип дифференциального уравнения и привести его к каноническому виду:

$$1)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+16\frac{\partial u}{\partial x}=0; \tag{1.2.4}$$

$$2)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+15\frac{\partial u}{\partial y}+9u=0; \tag{1.2.5}$$

$$3)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u_x+6u_y+u=0; \tag{1.2.6}$$

Решение. 1) Сначала рассмотрим ДУ (1.2.4). Определим тип дифференциального уравнения. Дискриминант $\Delta = 1^2+3=4>0$, это означает, что уравнение *гиперболического типа.* Соответствующие уравнения характеристик (1.2.2) имеют вид $\dfrac{dy}{dx}=1\pm 2$. Первые интегралы этих уравнений $x+y=C_1$ и $3x-y=C_2$. Сделаем замену независимых переменных $\alpha=x+y$, $\beta=3x-y$ в исходном уравнении. Рассмотрим сложную функцию $u(x(\alpha,\beta),y(\alpha,\beta))\equiv\tilde u(\alpha,\beta)$. По правилу дифференцирования сложной функции, находим:

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial x}=\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}\cdot 1+\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\cdot 3;$$

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial y}=\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}\cdot 1+\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\cdot(-1);$$

$$\frac{\partial^2\tilde u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}+3\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot 3+$$

$$+3\left(\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\beta^2}\cdot 3\right)=\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha^2}+6\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha\partial\beta}+9\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\beta^2};$$

$$\frac{\partial^2\tilde u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}-\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\beta^2};$$

$$\frac{\partial^2\tilde u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial\alpha}-\frac{\partial\tilde u}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\alpha\partial\beta}-3\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\beta^2}.$$

Предположим, что в исходном уравнении произведена замена $u(x,y)=\tilde u(\alpha,\beta)$. Подставим вычисленные производные в уравнение, приведем подобные члены и получим канонический вид уравнения:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}+3\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}=0, \tag{1.2.7}$$

где $\tilde{u}(x+y,\,3x-y)=u(x,y)$.

Произведем дальнейшее упрощение с помощью замены (1.2.3):

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}(\nu+1)+\frac{\partial v}{\partial\beta}(\mu+3)+v(\nu\mu+\mu+3\nu)\right)e^{\mu\alpha+\nu\beta}=0.$$

Положим $\nu=-1$, $\mu=-3$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}-3v=0, \tag{1.2.8}$$

где $\tilde{u}(\alpha,\beta)=v(\alpha,\beta)e^{-3\alpha-\beta}$.

Тогда

$$u(x,y)=v(x+y,\,3x-y)e^{-3(x+y)-(3x-y)}=v(x+y,\,3x-y)e^{-6x-2y}.$$

2) Сначала определим тип дифференциального уравнения. Рассмотрим $\triangle=2^2-13=-9<0$. Это означает, что уравнение *эллиптического типа*. Соответствующие уравнения характеристик (1.2.2) имеют вид $\dfrac{dy}{dx}=2\pm 3i$. Первые интегралы этих уравнений $(2\pm 3i)x-y=C$. Сделаем замену независимых переменных $\alpha=2x-y$, $\beta=3x$ в исходном уравнении. Рассмотрим сложную функцию $u(x(\alpha,\beta),y(\alpha,\beta))\equiv\tilde{u}(\alpha,\beta)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\cdot 2+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\cdot 3;$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\cdot(-1)+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\cdot 0=-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}+3\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\right)=4\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2}+12\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta}+9\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\right)=-2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2}-3\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

Предположим, что в исходном уравнении произведена замена $u(x,y) = \tilde{u}(\alpha,\beta)$. Подставим вычисленные производные в уравнение, приведем подобные члены и получим канонический вид уравнения:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} + \tilde{u} = 0, \tag{1.2.9}$$

где $\tilde{u}(2x-y,\,3x) = u(x,y)$.

Произведем дальнейшее упрощение с помощью замены (1.2.3):

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}(2\mu-1)+\frac{\partial v}{\partial\beta}(2\nu+1)+v(\mu^2+\nu^2-\mu+\nu+1)\right)e^{\mu\alpha+\nu\beta}=0.$$

Положим $\mu = 1/2$, $\nu = -1/2$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1}{2}v = 0, \tag{1.2.10}$$

где $\tilde{u}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta)e^{\alpha/2-\beta/2}$.

Тогда

$$u(x,y) = v(2x-y,\,3x)e^{(2x-y)/2-3x/2} = v(2x-y,\,3x)e^{-(x+y)/2}.$$

3) Сначала определим тип дифференциального уравнения. Рассмотрим $\Delta = 5^2 - 25 = 0$. Это означает, что уравнение *параболического типа*. Соответствующее уравнение характеристик (1.2.2) имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = 5$. Первый интеграл этого уравнения $5x - y = C$. Сделаем замену переменных $\alpha = 5x - y$, $\beta = x$ в исходном уравнении. Рассмотрим сложную функцию $u(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)) \equiv \tilde{u}(\alpha,\beta)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}\cdot 5 + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\cdot 1;$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\right) = 25\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2} + 2\cdot 5\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y} = -5\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2}.$$

Предположим, что в исходном уравнении произведена замена $u(x,y) = \tilde{u}(\alpha,\beta)$. Подставим вычисленные производные в уравнение, приведем подобные члены и получим канонический вид уравнения:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} + \tilde{u} = 0, \tag{1.2.11}$$

где $\tilde{u}(5x-y,\, x) = u(x,y)$.

Проведем дальнейшее упрощение с помощью замены (1.2.3):

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} - \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\beta}(1+2\nu) + v(1-\mu+\nu+\nu^2)\right) e^{\mu\alpha+\nu\beta} = 0.$$

Положим $\mu = 3/4$, $\nu = -1/2$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} - \frac{\partial v}{\partial\alpha} = 0, \tag{1.2.12}$$

где $\tilde{u}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta)e^{3\alpha/4-\beta/2}$.

Тогда

$$u(x,y) = v(5x-y,\, x)e^{3(5x-y)/4-x/2} = v(5x-y,\, x)e^{(13x-3y)/4}.$$

Ответ. 1) Уравнение (1.2.4) гиперболического типа с помощью замены переменных $\alpha = x+y$, $\beta = 3x-y$ приводится к каноническому виду (1.2.7)

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + 3\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} = 0,$$

где $\tilde{u}(x+y,\, 3x-y) = u(x,y)$.

2) Уравнение (1.2.5) эллиптического типа с помощью замены переменных $\alpha = 2x-y$, $\beta = 3x$ приводится к каноническому виду (1.2.9)

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} + \tilde{u} = 0,$$

где $\tilde{u}(2x-y,\, 3x) = u(x,y)$.

3) Уравнение параболического типа с помощью замены переменных $\alpha = 5x-y$, $\beta = x$ приводится к каноническому виду (1.2.11)

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} + \tilde{u} = 0,$$

где $\tilde{u}(5x-y,\, x) = u(x,y)$.

Задача 1.2. Определить тип дифференциального уравнения и привести его к каноническому виду.

1. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

5. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

9. $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

11. $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

12. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

14. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

15. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

18. $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

19. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

24. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

25. $10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

27. $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

28. $7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

30. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Математическая модель, описывающая стационарное распределение температуры тела, занимающего объем D, ограниченный поверхностью ∂D, представляет собой краевую задачу для уравнения

$$\operatorname{div}\left(k(\bar{x})\operatorname{grad} u\right) + \tilde{f}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in D \tag{2.1}$$

с граничным условием на поверхности ∂D [2, 4, 5, 10—12]. Здесь $u(\bar{x})$ — *искомая температура* тела, $k(\bar{x})$ — известный *коэффициент теплопроводности*, $\tilde{f}(\bar{x})$ — известная *объемная плотность источников тепла.*

Если на границе ∂D поддерживается заданная температура $g_1(\bar{x})$, рассматривается *граничное условие первого рода (условие Дирихле)*

$$u\Big|_{\partial D} = g_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D. \tag{2.2}$$

Если на поверхности ∂D задан тепловой поток $\psi(\bar{x})$, рассматривается *граничное условие второго рода (условие Неймана)*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = g_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad g_2(\bar{x}) = -\frac{\psi(\bar{x})}{k(\bar{x})}, \tag{2.3}$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D.

Если на поверхности ∂D происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой заданной температуры $u_0(\bar{x})$, рассматривают граничное условие третьего рода (условие Робена)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu\right)\Big|_{\partial D} = g_3(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad h = \frac{\tilde{h}(\bar{x})}{k(\bar{x})}, \quad g_3 = \frac{\tilde{h}(\bar{x})u_0(\bar{x})}{k(\bar{x})}, \tag{2.4}$$

где $\tilde{h}(\bar{x})$ — *коэффициент теплообмена.*

В том случае, когда коэффициент теплопроводности $k(\bar{x}) = k$ постоянен, уравнение (2.1) принимает вид

$$\triangle u = -f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}) = \frac{\tilde{f}(\bar{x})}{k}. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) называется *уравнением Пуассона*, а однородное уравнение (2.6) называется *уравнением Лапласа*:

$$\triangle u = 0. \tag{2.6}$$

Замечание. Математическая модель стационарной задачи диффузии вещества с концентрацией $u(\bar{x})$, диффундирующего в покоящейся однородной изотропной среде объема D с граничной поверхностью ∂D, представляет собой краевую задачу для уравнения (2.1) с граничными условиями на поверхности ∂D [2, 4, 5, 10—12], где $k(\bar{x})$ — эмпирический *коэффициент диффузионного переноса* вещества, $\tilde{f}(\bar{x})$ — известная объемная плотность источников вещества. Граничное условие Дирихле (2.2) соответствует заданной концентрации вещества $g_1(\bar{x})$ на границе ∂D, граничное условие Неймана (2.3) соответствует заданному потоку вещества $\psi(\bar{x})$, $\bar{x} \in \partial D$, граничное условие третьего рода (2.4) соответствует обмену вещества с внешней средой с заданной концентрацией $u_0(\bar{x})$.

Потенциал u скоростей $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ стационарного потока несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа (2.6). На поверхности твердого тела ∂D, движущегося с некоторой скоростью $\vec{v}_0$, должно выполняться условие Неймана (2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = (\vec{v}_0, \bar{n}).$$

Равновесие тонкой пластинки (мембраны), не имеющей жесткости при изгибе, описывается двумерным уравнением Пуассона (2.5), где $u(x, y)$ — малые перемещения точек поверхности мембраны в направлении нормали к ней в недеформированном состоянии, $f = p/T$, p — давление, T — равномерное натяжение на единицу длины контура мембраны [4, 5].

Математическая модель кручения цилиндрического стержня при малых деформациях представляет собой краевую задачу для двумерного уравнения Пуассона (2.5), где $u(x, y)$ — функция касательных напряжений, $f = 2\mu v$, v — угол закручивания стержня на единицу длины, μ — константа Ламе, а на границе ∂D должно выполняться условие Дирихле (2.2) при $g = \text{const}$ [4, 5].

Математическая модель, описывающая стационарное распределение потенциального электрического поля

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} u$$

в непроводящей изотропной среде с диэлектрической постоянной $k(\bar{x})$ и объемной плотностью зарядов $\tilde{f}(\bar{x})$, представляет собой краевую задачу для уравнения (2.1) [2, 4, 5, 10—12].

На идеально проводящей поверхности ∂D потенциал постоянен:

$$u\Big|_{\partial D} = \text{const}.$$

Если на проводящей поверхности задана поверхностная плотность зарядов $\tilde{\psi}$, рассматривается граничное условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = \psi(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad \psi = -\frac{\tilde{\psi}}{k}.$$

Рассмотрим три наиболее часто встречающиеся краевые задачи для конечной области D, ограниченной замкнутой поверхностью ∂D.

Первая внутренняя краевая задача (*задача Дирихле*): найти функцию $u(\bar{x}) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению Пуассона

$$\triangle u = -f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D \tag{2.7}$$

и принимающую на поверхности ∂D заданные значения

$$u\Big|_{\partial D} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D. \tag{2.8}$$

Вторая внутренняя краевая задача (*задача Неймана*): найти функцию $u(\bar{x}) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2.7) в области D и на поверхности ∂D граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D, \tag{2.9}$$

где $\bar{n}$ — внешний по отношению к области D единичный вектор нормали к поверхности ∂D.

Третья внутренняя краевая задача (*задача Робена*): найти функцию $u(\bar{x}) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2.7) в области D и на поверхности ∂D граничному условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu\right)\Big|_{\partial D} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D. \tag{2.10}$$

Предположим, что поверхность ∂D имеет непрерывную кривизну, $f(\bar{x}) \in C(D)$ и $g(\bar{x}) \in C(\partial D)$, тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.1. Решение первой внутренней краевой задачи (2.7), (2.8) и третьей внутренней краевой задачи (2.7), (2.10) при $h(\bar{x}) \geq 0$, $h \not\equiv 0$ существует и единственно.

Теорема 2.2. Для существования решения второй внутренней краевой задачи (2.7), (2.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\oiint\limits_{\partial D} g\, ds + \iiint\limits_{D} f\, dv = 0. \tag{2.11}$$

Решение этой задачи определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Замечание. Условие (2.11) допускает простое физическое истолкование. Пусть $u(\bar{x})$ — температура, тогда полный поток тепла через границу ∂D равен количеству тепла, выделившемуся внутри тела D (закон сохранения).

Для выделения единственного решения *внешних краевых задач* требуется выполнение дополнительных условий, описывающих поведение искомой функции на бесконечности.

Определение. Функция $u(\bar{x})$ называется *регулярной на бесконечности* в $\mathbb{R}^m$, если

$$u(\bar{x}) = O\left(\frac{1}{|\bar{x}|^{m-2}}\right) \quad \text{при} \quad |\bar{x}| \to \infty. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3. В трехмерном случае регулярные на бесконечности решения первой, второй и третьей внешних краевых задач для уравнения Пуассона (2.7) единственны при условии $h(\bar{x}) \geq 0$, $h \not\equiv 0$ и $f(\bar{x}) = O\left(\frac{1}{|\bar{x}|^{\alpha}}\right)$, $\alpha > 3$ при $|\bar{x}| \to \infty$.

Теорема 2.4. В двумерном случае регулярные на бесконечности решения первой и третьей внешних краевых задач для уравнения Пуассона (2.7) единственны при $h(\bar{x}) \geq 0$, $h \not\equiv 0$, а регулярное на бесконечности решение второй внешней краевой задачи определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. При этом должны быть выполнены условия существования (2.11) и $f(\bar{x}) = O\left(\dfrac{1}{|\bar{x}|^{\alpha}}\right)$, $\alpha > 2$ при $|\bar{x}| \to \infty$.

Определение. Действительно значная, дважды непрерывно дифференцируемая в области D функция $u = u(\bar{x})$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

называется *гармонической в области D.*

Определение. Функция $G(\bar{x}, \bar{y})$ называется *функцией Грина первой внутренней краевой задачи (задачи Дирихле)* (2.7), (2.8), если выполняются следующие условия:

$$1)\ G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} + v, \quad \text{если} \ \ \bar{x},\, \bar{y} \in \boldsymbol{R}^2, \tag{2.13}$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} + v, \quad \text{если} \ \ \bar{x},\, \bar{y} \in \boldsymbol{R}^3, \tag{2.14}$$

где $v(\bar{x})$ — всюду гармоническая в D функция;

$$2)\ G(\bar{x}, \bar{y})\Big|_{\bar{y} \in \partial D} = 0. \tag{2.15}$$

Теорема 2.5. Если функция Грина первой краевой задачи существует, то решение задачи (2.7), (2.8) можно записать в виде

$$u(\bar{x}) = \iiint\limits_{D} f(\bar{y}) G(\bar{x}, \bar{y})\, dV_{\bar{y}} - \oiint\limits_{\partial D} g(\bar{y}) \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\bar{y}}}\, dS_{\bar{y}}. \tag{2.16}$$

Определение. Функция $G(\bar{x}, \bar{y})$ называется *функцией Грина второй внутренней краевой задачи* (2.7), (2.9), если выполняются следующие условия:

1) выполнены условия (2.13) или (2.14);

$$2)\ \frac{\partial G}{\partial \bar{n}}\Big|_{\bar{y} \in \partial D} = -\frac{1}{L}, \tag{2.17}$$

где L — длина границы ∂D в случае $\bar{y} \in \boldsymbol{R}^2$ или площадь поверхности ∂D в случае $\bar{y} \in \boldsymbol{R}^3$.

Определение. Функция $G(\bar{x}, \bar{y})$ называется *функцией Грина третьей внутренней краевой задачи* (2.7), (2.10), если выполнены условия:

1) выполнены условия (2.13) или (2.14);

2) $$\left(\frac{\partial G}{\partial \bar{n}} + hG\right)\Big|_{\bar{y}\in\partial D} = 0, \quad h \geq 0, \quad h \not\equiv 0. \tag{2.18}$$

Теорема 2.6. Если функция Грина второй или третьей краевых задач существует, то решение задач (2.7), (2.9) или (2.7), (2.10) можно записать в виде

$$u(\bar{x}) = \iiint\limits_{D} f(\bar{y})G(\bar{x}, \bar{y})\, dV_{\bar{y}} + \oiint\limits_{\partial D} g(\bar{y})G(\bar{x}, \bar{y})\, dS_{\bar{y}}. \tag{2.19}$$

Функция Грина может быть найдена с помощью разложения в ряд.

Теорема 2.7. Пусть $\{\lambda_n\}$, $\{v_n(\bar{x})\}$, $n = \overline{1, \infty}$ — системы собственных значений $\lambda_n \neq 0$ и ортонормированных собственных функций задачи Штурма—Лиувилля

$$\triangle v + \lambda v = 0 \ \text{ в } \ D, \tag{2.20}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad v(\bar{x}) \not\equiv 0. \tag{2.21}$$

Тогда функция Грина уравнения Лапласа с граничными условиями (2.21) имеет вид

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\bar{x})v_n(\bar{y})}{\lambda_n}. \tag{2.22}$$

Замечание. Аналогично определяются функции Грина внешних задач, только надо добавить требование регулярности на бесконечности (2.12).

2.1. Краевая задача для прямоугольной области

Пример 2.1.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольной области

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad D = \left\{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\} \tag{2.1.1}$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \varphi_1(y) = 2\cos 2y, \quad u\Big|_{x=\pi} = \varphi_2(y) \equiv 0, \quad \left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi_1(x) = 3\sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \psi_2(x) \equiv 0, \quad (0 \le x \le \pi)\,. \tag{2.1.3}$$

Решение. Разобьем задачу на две таким образом, чтобы в одной задаче граничные условия по переменной x были однородными, а в другой граничные условия по переменной y были однородными:

I.

$$\triangle u = 0, \quad D = \left\{(x,y):\ 0 < x < \pi,\, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}, \tag{2.1.4}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad \left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi_1(x) = 3\sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \psi_2(x) \equiv 0, \quad (0 \le x \le \pi)\,. \tag{2.1.6}$$

II.

$$\triangle u = 0, \quad D = \left\{(x,y):\ 0 < x < \pi,\, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}, \tag{2.1.7}$$

$$u\Big|_{x=0} = \varphi_1(y) = 2\cos 2x, \quad u\Big|_{x=\pi} = \varphi_2(y) \equiv 0, \quad \left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.1.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad (0 \le x \le \pi)\,. \tag{2.1.9}$$

Очевидно, решение исходной задачи равно сумме решения задачи (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) $u^{\mathrm{I}}(x,y)$ и решения задачи (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) $u^{\mathrm{II}}(x,y)$, так как уравнение линейно и граничные условия линейны:

$$u(x,y) = u^{\mathrm{I}}(x,y) + u^{\mathrm{II}}(x,y). \tag{2.1.10}$$

Решим сначала задачу I (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) методом разделения переменных. Будем искать частные решения уравнения (2.1.4), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.1.5) в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0. \tag{2.1.11}$$

Подставим (2.1.11) в (2.1.4) и разделим переменные:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''y)}{Y(y)}. \qquad (2.1.12)$$

В равенстве (2.1.12) слева функция зависит от x, справа — от y. Так как это равенство выполняется в области D, то эти функции равны константе. Обозначим эту константу $-\lambda$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \qquad (2.1.13)$$

$$X''(x) + \lambda X(X) = 0. \qquad (2.1.14)$$

Подставим (2.1.11) в однородные граничные условия (2.1.5) и получим

$$X(0)Y(y) = 0, \qquad X(\pi)Y(y) = 0.$$

Поскольку нас интересуют ненулевые решения $Y(y) \neq 0$, получим граничные условия

$$X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0. \qquad (2.1.15)$$

Краевая задача (2.1.14), (2.1.15) представляет собой задачу Штурма—Лиувилля определения собственных значений и собственных функций. Решение задачи (2.1.14), (2.1.15) приведено в прил. 1 (п. а). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi$ имеют следующий вид (П1.13), (П1.14):

$$\lambda_n = n^2, \quad n = \overline{1, \infty},$$

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Теперь рассмотрим уравнение (2.1.13) при $\lambda = \lambda_n$:

$$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0.$$

Его общее решение можно записать по-разному: либо в виде

$$Y_n(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-ny},$$

либо в виде

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(ny) + B_n \operatorname{ch}(ny).$$

Лучше в качестве фундаментальной системы решений выбрать функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.1.6), т.е.

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch}\left(n\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) + B_n \operatorname{ch}(ny). \qquad (2.1.16)$$

В этом выражении

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{ch}(ny)\right)\Big|_{y=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{ch}\left(n\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\Big|_{y=\pi/2} = 0.$$

В дальнейшем выяснится, что представление общего решения в виде (2.1.16) упрощает решение задачи.

Итак, мы нашли счетное множество частных решений (2.1.11)

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \left(A_n \operatorname{ch}\left(n\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) + B_n \operatorname{ch}(ny)\right)\sin(nx).$$

Решение всей задачи (2.1.4)—(2.1.6) будем искать в виде функционального ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\left(n\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) + B_n \operatorname{ch}(ny)\right)\sin(nx), \qquad (2.1.17)$$

предполагая, что его можно дифференцировать два раза по переменной x и два раза по переменной y.

Подставим (2.1.17) в граничные условия (2.1.6) и получим

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n n \operatorname{sh}\left(-n\frac{\pi}{2}\right) + B_n n \cdot 0\right)\sin(nx), \qquad (2.1.18)$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n n \cdot 0 + B_n n \operatorname{sh}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin(nx). \qquad (2.1.19)$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0,\pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{nk}.$$

Умножим обе части равенства (2.1.18) на $\sin(kx)$, проинтегрируем по x на $[0, \pi]$ и получим

$$\int_0^\pi \psi_1(x)\sin(kx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \operatorname{sh}\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi \sin(nx)\sin(kx)dx =$$

$$= -A_k k \operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом:

$$A_k = -\frac{2}{\pi k \operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^\pi \psi_1(x)\sin(kx)dx. \qquad (2.1.20)$$

Аналогично из (2.1.19) можно найти

$$B_k = \frac{2}{\pi k \operatorname{sh}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^\pi \psi_2(x)\sin(kx)dx. \qquad (2.1.21)$$

Подставим (2.1.20), (2.1.21) в (2.1.17) и получим решение задачи (2.1.4)—(2.1.6) в виде функционального ряда.

В нашем случае коэффициенты A_n и B_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.1.20), (2.1.21). После подстановки (2.1.17) в граничные условия (2.1.6) получим (2.1.18) и (2.1.19) в виде

$$3\sin 2x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \operatorname{sh}\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx), \qquad (2.1.22)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \operatorname{sh}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx). \qquad (2.1.23)$$

Слева в (2.1.22) $\sin 2x = X_2(x)$ — собственная функция. Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (2.1.22) и получим

$$-A_2 \cdot 2\operatorname{sh}(\pi) = 3, \qquad A_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 2. \qquad (2.1.24)$$

Из (2.1.23) получим

$$B_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \qquad (2.1.25)$$

Подставим (2.1.24) и (2.1.25) в (2.1.17) и получим решение $u^{\mathrm{I}}(x,y)$ задачи (2.1.4)—(2.1.6)

$$u^{\mathrm{I}}(x,y) = -\frac{3}{2\operatorname{sh}\pi}\operatorname{ch}\left(2\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin 2x. \tag{2.1.26}$$

Теперь решим задачу II (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) методом разделения переменных. Будем искать частные решения уравнения (2.1.7), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.1.9) в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{2.1.27}$$

Подставим (2.1.27) в (2.1.7) и разделим переменные:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

В последнем равенстве слева функция зависит от x, справа — от y, следовательно, она равна константе. Обозначим эту константу λ:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Отсюда получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''(x) - \lambda X(X) = 0, \tag{2.1.28}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0. \tag{2.1.29}$$

Подставим (2.1.27) в однородные граничные условия (2.1.9):

$$X(x)Y'(0) = 0, \qquad X(x)Y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Отсюда получим граничные условия

$$Y'(0) = 0, \qquad Y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{2.1.30}$$

Найдем решение задачи Штурма—Лиувилля (2.1.29), (2.1.30). Решение задачи (2.1.29), (2.1.30) приведено в прил. 1 (п. г). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi/2$ имеют следующий вид (П1.25), (П1.28), (П1.29):

$$\lambda_n = (2n)^2, \quad n = \overline{0,\infty},$$

$$Y_n(y) = \cos(2ny), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Обратим внимание на то, что задача имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$, а соответствующая ему собственная функция $Y_0(y) = 1$.

Теперь рассмотрим уравнение (2.1.28) при $\lambda = \lambda_n$:

$$X_n''(x) - \lambda_n X_n(x) = 0. \tag{2.1.31}$$

При $\lambda_0 = 0$ его общее решение запишется в виде

$$X_0(x) = A_0 x + B_0.$$

При $\lambda_n = (2n)^2$, $n = \overline{1,\infty}$ общее решение уравнения (2.1.31) можно записать по-разному: либо в виде

$$X_n(x) = A_n e^{2nx} + B_n e^{-2nx},$$

либо в виде

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh}(2nx) + B_n \operatorname{ch}(2nx).$$

Лучше в качестве фундаментальной системы решений выбрать функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.1.8), т.е.

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh}(2nx) + B_n \operatorname{sh}(2n(x-\pi)). \tag{2.1.32}$$

В этом выражении

$$\operatorname{sh}(2nx)\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}(2n(x-\pi))\Big|_{x=\pi} = 0.$$

В дальнейшем выяснится, что представление общего решения в виде (2.1.32) упрощает решение задачи.

Итак, мы нашли счетное множество частных решений (2.1.27):

$$u_0(x,y) = A_0 x + B_0,$$

$$u_n(x,y) = (A_n \operatorname{sh}(2nx) + B_n \operatorname{sh}(2n(x-\pi)))\cos(2ny), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Решение всей задачи (2.1.7)—(2.1.9) будем искать в виде функционального ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) =$$

$$= A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh}(2nx) + B_n \operatorname{sh}(2n(x-\pi)))\cos(2ny), \tag{2.1.33}$$

предполагая, что его можно дифференцировать дважды: по x и по y.

Подставим (2.1.33) в граничные условия (2.1.8) и получим

$$\varphi_1(y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot 0 - B_n \operatorname{sh}(2n\pi))\cos(2ny), \tag{2.1.34}$$

$$\varphi_2(y) = A_0\pi + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh}(2n\pi) - B_n \cdot 0) \cos(2ny). \tag{2.1.35}$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0,\ \pi/2]$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2ny)\cos(2ky)dy = \frac{\pi\delta_{nk}(1+\delta_{n0})}{4}.$$

Умножим обе части равенства (2.1.34) на $\cos(2ky)$ $(k = \overline{0, \infty})$, проинтегрируем по y на $[0,\ \pi/2]$ и получим

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_1(y) \cdot 1\, dy = \frac{\pi}{2} B_0,$$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_1(y)\cos(2ky)\, dy = -B_k \operatorname{sh}(2k\pi)\frac{\pi}{4}, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Таким образом:

$$\begin{gathered} B_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi_1(y)\, dy, \\ B_k = -\frac{4}{\pi \operatorname{sh}(2k\pi)} \int_0^{\pi/2} \varphi_1(y)\cos(2ky)\, dy, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{gathered} \tag{2.1.36}$$

Аналогично из (2.1.35) можно найти

$$\begin{gathered} A_0\pi + B_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi_2(y)\, dy, \\ A_k = \frac{4}{\pi \operatorname{sh}(2k\pi)} \int_0^{\pi/2} \varphi_2(y)\cos(2ky)\, dy, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{gathered} \tag{2.1.37}$$

Подставим (2.1.36), (2.1.37) в (2.1.33), получим решение задачи (2.1.7)—(2.1.9) в виде функционального ряда.

В нашем случае коэффициенты A_n и B_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.1.36), (2.1.37). После подстановки (2.1.33) в граничные условия (2.1.8), получим (2.1.34) и (2.1.35) в виде

$$2\cos 2y = B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}(2n\pi)\cos(2ny), \tag{2.1.38}$$

$$0 = A_0\pi + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(2n\pi)\cos(2ny). \tag{2.1.39}$$

Слева в (2.1.38) $\cos 2y = Y_1(y)$ — собственная функция. Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (2.1.38) и получим

$$-B_1 \operatorname{sh}(2\pi) = 2, \quad B_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1. \tag{2.1.40}$$

Из (2.1.39) получим

$$A_n = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{2.1.41}$$

Подставим (2.1.40) и (2.1.41) в (2.1.33) и получим решение $u^{\text{II}}(x,y)$ задачи (2.1.7)—(2.1.9):

$$u^{\text{II}}(x,y) = -\frac{2}{\operatorname{sh}(2\pi)}\operatorname{sh}(2(x-\pi))\cos 2y. \tag{2.1.42}$$

Подставим (2.1.26) и (2.1.42) в (2.1.10) и получим решение исходной задачи (2.1.1)—(2.1.3).

Ответ.

$$u = -\frac{3}{2\operatorname{sh}\pi}\operatorname{ch}\left(2\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin 2x - \frac{2}{\operatorname{sh}(2\pi)}\operatorname{sh}(2(x-\pi))\cos 2y. \tag{2.1.43}$$

Задача 2.1.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольной области с граничными условиями.

1. $u\Big|_{x=0} = 5\cos 3y, \quad u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = 3\sin 2x, \quad u\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

2. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = 2\cos 2y, \quad u_y\Big|_{y=0} = 3\cos 5x, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 5\sin 3y, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi/2} = 3\cos x.$

4. $u\Big|_{x=0} = \sin 2y, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=\pi} = 2\sin 3x.$

5. $u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = 5\cos 2y, \quad u_y\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = 3\sin 3x.$

6. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = 2\sin 5y, \quad u\Big|_{y=0} = 2\cos 3x, \quad u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

7. $u_x\Big|_{x=0} = 3\sin y, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 2\cos 2x, \quad u\Big|_{y=\pi} = 0.$

8. $u\Big|_{x=0} = 2\cos 3y, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=\pi/2} = 3\sin x.$

9. $u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = 2\sin 3y, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi/2} = 3\sin 2x.$

10. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = 3\sin y, \quad u\Big|_{y=0} = 3\cos 5x, \quad u\Big|_{y=\pi} = 0.$

11. $u_x\Big|_{x=0} = 3\cos 5y, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = \cos x, \quad u\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

12. $u\Big|_{x=0} = \cos 2y, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = 2\sin 3x.$

13. $u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = 3\sin y, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=\pi} = 2\sin 2x.$

14. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = 2\cos y, \quad u_y\Big|_{y=0} = 2\cos 3x, \quad u\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = 2\cos 2y, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u_y\Big|_{y=0} = \cos x, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

16. $u\Big|_{x=0} = 2\sin 3y, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi/2} = 3\sin x.$

17. $u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = 2\cos 3y, \quad u_y\Big|_{y=0} = 3\sin x, \quad u\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

18. $u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = \cos y, \quad u_y\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = 2\cos 3x.$

19. $u_x\Big|_{x=0} = \sin 5y, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_y\Big|_{y=\pi/2} = 2\cos 2x.$

20. $u\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 3\sin 2y, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=\pi} = 2\sin 3x.$

21. $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=\pi}=2\cos 4y,\quad u_y\Big|_{y=0}=\sin 2x,\quad u_y\Big|_{y=\pi}=0.$

22. $u_x\Big|_{x=0}=2\sin 3y,\quad u\Big|_{x=\pi/2}=0,\quad u\Big|_{y=0}=3\cos x,\quad u_y\Big|_{y=\pi/2}=0.$

23. $u_x\Big|_{x=0}=3\sin y,\quad u_x\Big|_{x=\pi}=0,\quad u\Big|_{y=0}=0,\quad u\Big|_{y=\pi}=\cos 4x.$

24. $u\Big|_{x=0}=0,\quad u_x\Big|_{x=\pi/2}=\cos 3y,\quad u_y\Big|_{y=0}=0,\quad u\Big|_{y=\pi/2}=2\sin x.$

25. $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=\pi}=2\sin 5y,\quad u\Big|_{y=0}=\sin 2x,\quad u_y\Big|_{y=\pi/2}=0.$

26. $u_x\Big|_{x=0}=3\sin 4y,\quad u\Big|_{x=\pi/2}=0,\quad u\Big|_{y=0}=\cos x,\quad u\Big|_{y=\pi}=0.$

27. $u_x\Big|_{x=0}=2\cos 3y,\quad u_x\Big|_{x=\pi}=0,\quad u_y\Big|_{y=0}=0,\quad u\Big|_{y=\pi/2}=\cos x.$

28. $u\Big|_{x=0}=0,\quad u_x\Big|_{x=\pi/2}=3\cos 2y,\quad u_y\Big|_{y=0}=0,\quad u_y\Big|_{y=\pi}=2\sin 5x.$

29. $u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=\pi}=3\sin 4y,\quad u\Big|_{y=0}=\sin 2x,\quad u\Big|_{y=\pi}=0.$

30. $u_x\Big|_{x=0}=\cos 3y,\quad u\Big|_{x=\pi/2}=0,\quad u_y\Big|_{y=0}=2\cos x,\quad u\Big|_{y=\pi/2}=0.$

Пример 2.1.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольной области

$$\triangle u=-f(x,y),\quad D=\left\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<\frac{\pi}{2}\right\}\tag{2.1.44}$$

с однородными граничными условиями

$$u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=\pi}=0,\quad \left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right),\tag{2.1.45}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2}=0,\quad (0\le x\le\pi),\tag{2.1.46}$$

где $f(x,y)=4\sin 3x\cos 4y.$ (2.1.47)

Решение. Сначала решим вспомогательную задачу Штурма—Лиувилля определения собственных значений и соответствующих собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями (2.1.45), (2.1.46):

$$\triangle v + \lambda v = 0; \quad D = \left\{(x, y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}, \tag{2.1.48}$$

$$v\Big|_{x=0} = 0, \quad v\Big|_{x=\pi} = 0, \quad \left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.1.49}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad (0 \le x \le \pi). \tag{2.1.50}$$

Ее решение приведено в примере 2.8.1. Собственные значения равны

$$\lambda_{nk} = n^2 + (2k)^2, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{2.1.51}$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_{nk}(x, y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{2.1.52}$$

Будем искать решение исходной задачи (2.1.44)—(2.1.47) в виде разложения в ряд по собственным функциям $v_{nk}(x, y)$ с неизвестными коэффициентами u_{nk}:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk} v_{nk}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk}\sin(nx)\cos(2ky). \tag{2.1.53}$$

Предположим, что этот ряд можно дважды дифференцировать по переменным x и y. Разложим функцию $f(x, y)$ в ряд по собственным функциям $v_{nk}(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk} v_{nk}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}\sin(nx)\cos(2ky). \tag{2.1.54}$$

Коэффициенты Фурье f_{nk} в нашем случае легко находятся.

Равенство (2.1.54) имеет вид

$$4\sin 3x\cos 4y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}\sin(nx)\cos(2ky), \tag{2.1.55}$$

где в левой части $\sin 3x\cos 4y = v_{32}(x, y)$ — собственная функция.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (2.1.55), получим

$$f_{32} = 4, \quad f_{nk} = 0 \ \text{ при } \ n \ne 3, \quad k \ne 2.$$

Подставим разложения (2.1.53) и (2.1.54) в уравнение (2.1.44):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\{u_{nk}\Delta v_{nk}+f_{nk}v_{nk}(x,y)\}=0. \qquad (2.1.56)$$

Так как $v_{nk}(x,y)$ — собственная функция оператора Лапласа (2.1.48):

$$\Delta v_{nk}=-\lambda_{nk}v_{nk}.$$

Соотношение (2.1.56) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\{-u_{nk}\lambda_{nk}+f_{nk}\}v_{nk}(x,y)=0.$$

В фигурной скобке $\{\cdot\}$ — коэффициенты Фурье разложения нуля по полной системе собственных функций, следовательно, они равны нулю. Отсюда получаем

$$u_{nk}=\frac{f_{nk}}{\lambda_{nk}}.$$

Подставляем эти коэффициенты в (2.1.53), получаем решение задачи. В нашем случае коэффициенты

$$u_{32}=\frac{4}{3^2+4^2}=\frac{4}{25}, \qquad u_{nk}=0 \ \text{ при } \ n\neq 3, \quad k\neq 2. \qquad (2.1.57)$$

Подставляем (2.1.57) в (2.1.53) и получаем решение исходной задачи (2.1.44)—(2.1.47).

Ответ. $u(x,y)=\dfrac{4}{25}\sin 3x\cos 4y.$ (2.1.58)

Замечание. Решением краевой задачи

$$\Delta u=-f(x,y), \quad D=\left\{(x,y):\ 0<x<\pi,\, 0<y<\frac{\pi}{2}\right\}, \qquad (2.1.59)$$

$$u\Big|_{x=0}=\varphi_1(y), \quad u\Big|_{x=\pi}=\varphi_2(y), \quad \left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2.1.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2}=\psi_2(x), \quad (0\le x\le\pi), \qquad (2.1.61)$$

где $f(x,y)=4\sin 3x\cos 4y$, $\varphi_1(y)=2\cos 2y$, $\varphi_2(y)\equiv 0$, $\psi_1(x)=3\sin 2x$, $\psi_2(x)\equiv 0$, является сумма решений (2.1.43), (2.1.58), полученных в примерах 2.1.1 и 2.1.2:

$$u(x,y) = -\frac{3}{2\,\mathrm{sh}\,\pi}\,\mathrm{ch}\left(2\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\,2x - \frac{2}{\mathrm{sh}(2\pi)}\,\mathrm{sh}(2(x-\pi))\cos\,2y+$$

$$+\frac{4}{25}\sin\,3x\cos\,4y.$$

Замечание. Функция Грина (2.22) краевой задачи (2.1.59)—(2.1.61) имеет вид

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin(n\xi)}{n^2}+$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cos(2ky)\sin(n\xi)\cos(2k\eta)}{n^2+(2k)^2}.$$

Решение задачи (2.1.59)—(2.1.61) запишется с помощью функции Грина в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int\limits_0^{\pi}(\psi_1(\xi)+\psi_2(\xi))G(x,y;\xi,0)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\pi/2}(\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta))\frac{\partial G(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}d\eta.$$

Задача 2.1.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\Delta u = -f(x,y)$ в прямоугольной области с однородными граничными условиями.

1. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 2\sin\,x\cos\,5y.$

2. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = \cos\,x\cos\,4y.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 2\cos\,2x\sin\,y.$

4. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 3\sin\,x\sin\,4y.$

5. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 5\sin\,x\cos\,y.$

6. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\cos\,x\sin\,7y.$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 2\cos\, x \sin\, 4y.$

8. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\sin\, 3x \cos\, y.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 2\sin\, x \sin\, y.$

10. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 7\cos\, x \sin\, 4y.$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 5\cos\, 4x \cos\, 3y.$

12. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 7\sin\, x \cos\, 2y.$

13. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 5\sin\, 2x \sin\, 4y.$

14. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\cos\, 5x \cos\, 3y.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = \cos\, 2x \cos\, y.$

16. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 5\sin\, 3x \sin\, 5y.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 7\sin\, 2x \cos\, 5y.$

18. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = \cos\, x \cos\, 2y.$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\cos\, x \sin\, 3y.$

20. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 2\sin\, x \sin\, 4y.$

21. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 5\sin\, 4x \cos\, y.$

22. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 7\cos\, 5x \sin\, y.$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 5\cos\, 2x \sin\, 2y.$

24. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\sin\, 5x\cos\, 3y.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 3\sin\, 4x\sin\, y.$

26. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 5\cos\, 3x\sin\, 2y.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = 7\cos\, 2x\cos\, y.$

28. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 3\sin\, 3x\cos\, 4y.$

29. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \quad f(x,y) = 7\sin\, x\sin\, y.$

30. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad f(x,y) = \cos\, x\cos\, y.$

2.2. Краевые задачи внутри и вне круговой области

Пример 2.2.1. Решить краевые задачи для уравнения Лапласа

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{2.2.1}$$

с граничным условием

$$u\Big|_{r=a} = g(\varphi) = 4\sin^2\varphi \tag{2.2.2}$$

внутри круга $D = \{r < a\}$ с требованием ограниченности решения при $r \to 0$

$$|u(r,\varphi)| < \infty \tag{2.2.3}$$

или вне круга $D_e = \{r > a\}$ с требованием регулярности решения при $r \to \infty$

$$|u(r,\varphi)| < \infty. \tag{2.2.4}$$

Решение. Ищем частное решение уравнения (2.2.1), удовлетворяющее условию периодичности

$$u(r,0) = u(r,2\pi), \qquad \frac{\partial u(r,0)}{\partial\varphi} = \frac{\partial u(r,2\pi)}{\partial\varphi} \tag{2.2.5}$$

в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{2.2.6}$$

Подставим (2.2.6) в (2.2.1) и разделим переменные:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)\Phi(\varphi)+\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{R(r)}{r^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{R''(r)+\dfrac{R'(r)}{r}}{\dfrac{R(r)}{r^2}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{2.2.7}$$

В равенстве (2.2.7) слева функция зависит от r, справа — от φ. Так как это равенство выполняется в области D (или D_e), то эти функции равны константе. Обозначим эту константу λ:

$$\frac{R''(r)+\dfrac{R'(r)}{r}}{\dfrac{R(r)}{r^2}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\lambda}{r^2}R(r)=0, \tag{2.2.8}$$

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0. \tag{2.2.9}$$

Подставим (2.2.6) в условия периодичности (2.2.5) и получим

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi),\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi). \tag{2.2.10}$$

Краевая задача (2.2.9), (2.2.10) представляет собой задачу Штурма—Лиувилля определения собственных значений и собственных функций. Решение задачи (2.2.9), (2.2.10) приведено в прил. 1 (п. д). Собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют следующий вид (П1.31), (П1.33), (П1.34):

$$\lambda_0=0,\qquad \Phi_0(\varphi)=1; \tag{2.2.11}$$

$$\lambda_n=(n)^2,\quad \Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{2.2.12}$$

Теперь рассмотрим ДУ (2.2.8) при $\lambda=\lambda_0=0$ и $\lambda=\lambda_n=(n)^2$:

$$R_0''(r)+\frac{1}{r}R_0'(r)=0, \tag{2.2.13}$$

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}R_n(r) = 0, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.2.14}$$

Общие решения уравнений (2.2.13) и (2.2.14) найдены в прил. 4 (П4.2) и (П4.4) при $\nu = n$:

$$\begin{gathered} R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \\ R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

Если решается задача внутри круга $D = \{r < a\}$, из условия ограниченности решения при $r \to 0$ (2.2.5) следует $D_0 = 0$, $D_n = 0$. Для внутренней задачи решения уравнения (2.2.8) имеют вид

$$R_0(r) = C_0, \qquad R_n(r) = C_n r^n, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.2.16}$$

Если решается задача вне круга $D_e = \{r > a\}$, из условия регулярности решения при $r \to \infty$ (2.2.4) следует $D_0 = 0$, $C_n = 0$, $n = \overline{1,\infty}$. Для внешней задачи решения уравнения (2.2.8) имеют вид

$$R_0(r) = C_0, \qquad R_n(r) = D_n r^{-n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.2.17}$$

Итак, мы нашли частные решения (2.2.6):

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Решение *внутренней краевой задачи* (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) будем искать в виде суммы найденных частных решений $u_n(r,\varphi)$:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{2.2.18}$$

предполагая, что этот функциональный ряд можно дважды почленно дифференцировать по переменным r и φ. В этом ряду коэффициенты $a_0 = 2C_0$, $a_n = A_n C_n$, $b_n = B_n C_n$ неизвестны. Найдем их, подставив (2.2.18) в граничное условие (2.2.2):

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{2.2.19}$$

Полученное выражение представляет собой разложение известной функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$, $n = \overline{0,\infty}$. Отсюда находим:

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \tag{2.2.20}$$

$$n = \overline{0, \infty}.$$

Решением внутренней задачи является функция $u(r, \varphi)$, заданная в виде ряда (2.2.18), где коэффициенты a_n, b_n вычисляются по формулам (2.2.20).

В нашей задаче коэффициенты a_n и b_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.2.20). После подстановки (2.2.18) в граничное условие (2.2.2) получим

$$4 \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos 2\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях слева и справа, получим

$$a_0 = 4, \quad a_2 = -2a^{-2}, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 2, \quad b_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{2.2.21}$$

Подставим (2.2.21) в (2.2.18) и получим решение внутренней задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3):

$$u(r, \varphi) = 2(1 - a^{-2} r^2 \cos 2\varphi).$$

Решение *внешней краевой задачи* (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4) будем искать в виде бесконечной суммы найденных частных решений $u_n(r, \varphi)$:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{2.2.22}$$

предполагая, что этот функциональный ряд можно дважды почленно дифференцировать по переменным r и φ. В этом ряду коэффициенты $a_0 = 2C_0$, $a_n = A_n D_n$, $b_n = B_n D_n$ неизвестны.

Найдем их, подставив (2.2.22) в граничное условие (2.2.2):

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Из этого тригонометрического ряда Фурье находим коэффициенты

$$a_n = \frac{a^n}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad b_n = \frac{a^n}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{2.2.23}$$

Решением внешней задачи является функция $u(r, \varphi)$, заданная в виде ряда (2.2.22), где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (2.2.23).

В нашей задаче коэффициенты a_n и b_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.2.23). После подстановки (2.2.22) в граничное условие (2.2.2) получим

$$4\sin^2\varphi = 2(1 - \cos 2\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях слева и справа, получим

$$a_0 = 4, \quad a_2 = -2a^2, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 2, \quad b_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{2.2.24}$$

Подставим (2.2.24) в (2.2.22) и получим решение внешней задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4)

$$u(r, \varphi) = 2(1 - a^2 r^{-2} \cos 2\varphi).$$

Ответ. Решением внутренней задачи (2.2.1)—(2.2.3) является

$$u(r, \varphi) = 2(1 - a^{-2} r^2 \cos 2\varphi); \tag{2.2.25}$$

решением внешней задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4) является

$$u(r, \varphi) = 2(1 - a^2 r^{-2} \cos 2\varphi). \tag{2.2.26}$$

Задача 2.2.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\triangle u = 0$ внутри круга $D = \{r < a\}$ или вне круга $D_e = \{r > a\}$ с граничными условиями.

1. $u\Big|_{r=a} = \sin\varphi + 2\cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

2. $u_r\Big|_{r=a} = 2\cos 2\varphi - \sin\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

3. $u_r\Big|_{r=a} = 2\cos 2\varphi - 3\sin 3\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

4. $(u_r - u)\Big|_{r=a} = 3\cos\varphi + \sin 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

5. $(u_r + 3u)\Big|_{r=a} = \sin\varphi + \cos\, 2\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

6. $u\Big|_{r=a} = 3\sin^2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

7. $u\Big|_{r=a} = 2\sin^2\, 2\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

8. $u_r\Big|_{r=a} = 2\sin\varphi - 3\cos\, 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

9. $u_r\Big|_{r=a} = 3\cos\, 2\varphi - 2\sin\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

10. $(u_r - 3u)\Big|_{r=a} = \cos\varphi - \sin\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

11. $(u_r + 2u)\Big|_{r=a} = \cos\varphi - \sin\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

12. $u\Big|_{r=a} = 4\sin\varphi + \cos\, 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

13. $u\Big|_{r=a} = 3\cos\, 2\varphi + \sin\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

14. $u\Big|_{r=a} = \sin^2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

15. $u\Big|_{r=a} = 2\cos^2\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

16. $(u_r - u)\Big|_{r=a} = 3\cos\varphi - \sin\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

17. $(u_r + u)\Big|_{r=a} = \sin\, 2\varphi + \cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

18. $u\Big|_{r=a} = \cos\, 3\varphi + 2\sin\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

19. $u_r\Big|_{r=a} = 2\sin\, 2\varphi - 3\cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

20. $u_r\Big|_{r=a} = 2\cos\varphi + \sin\, 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

21. $u_r\Big|_{r=a} = 3\cos\varphi + 2\sin\, 2\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

22. $(u_r - 3u)\Big|_{r=a} = \sin\varphi + \cos\, 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

23. $(u_r + 2u)\Big|_{r=a} = \sin\, 2\varphi + \cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

24. $u\Big|_{r=a} = 2\cos^2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

25. $u\Big|_{r=a} = 3\sin 3\varphi - \cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

26. $u_r\Big|_{r=a} = 3\sin 2\varphi - \cos\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

27. $u_r\Big|_{r=a} = \sin\varphi + \cos\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

28. $(u_r - u)\Big|_{r=a} = \sin\varphi - \cos 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

29. $(u_r + u)\Big|_{r=a} = \cos 2\varphi + \sin\varphi, \quad D = \{r < a\}.$

30. $u\Big|_{r=a} = 2\sin^2 2\varphi, \quad D_e = \{r > a\}.$

Пример 2.2.2. Решить краевые задачи для уравнения Пуассона

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\varphi) \qquad (2.2.27)$$

с однородным граничным условием

$$u\Big|_{r=a} = 0: \qquad (2.2.28)$$

1) внутри круга $D = \{r < a\}$ с требованием ограниченности решения при $r \to 0$ (2.2.3) и

$$f(r,\varphi) = r^2\cos 2\varphi; \qquad (2.2.29)$$

2) вне круга $D_e = \{r > a\}$ с требованием регулярности решения при $r \to \infty$ (2.2.4) и

$$f(r,\varphi) = r^{-2}\cos 2\varphi. \qquad (2.2.30)$$

Решение.

Замечание. Решение задачи можно искать в виде разложения в ряд по собственным функциям оператора Лапласа в области D (или D_e) с граничным условием (2.2.28), которые выражаются через функции Бесселя. Мы же будем искать решение в виде разложения в ряд по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит только от переменной φ, а именно по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2.9), (2.2.10) $\{\Phi_n(\varphi)\}$, $n=\overline{0,\infty}$, которые найдены ранее (см. (2.2.11) и (2.2.12)).

Итак, решение задачи (2.2.27), (2.2.28) ищем в виде функционального ряда с неизвестными коэффициентами $A_n(r)$, $B_n(r)$, $n=\overline{0,\infty}$

$$u(r,\varphi)=A_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(r)\cos n\varphi+B_n(r)\sin n\varphi, \tag{2.2.31}$$

предполагая, что его можно дважды дифференцировать по r и φ. Известную функцию $f(x,y)$ тоже разложим в ряд Фурье:

$$f(r,\varphi)=f_0^c(r)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n^c(r)\cos n\varphi+f_n^s(r)\sin n\varphi, \tag{2.2.32}$$

где коэффициенты известны:

$$\begin{gathered}f_0^c(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\,d\varphi,\quad f_n^c(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\\ f_n^s(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.\end{gathered} \tag{2.2.33}$$

Подставим (2.2.31) и (2.2.32) в уравнение (2.2.27) и получим

$$\begin{gathered}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_0(r)}{dr}\right)+f_0^c(r)\right\}+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}A_n(r)+f_n^c(r)\right\}\cos n\varphi+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dB_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}B_n(r)+f_n^s(r)\right\}\sin n\varphi=0.\end{gathered} \tag{2.2.34}$$

В левой части равенства (2.2.34) написано разложение в ряд Фурье функции, тождественно равной нулю, следовательно, коэффициенты $\{\cdot\}$ равны нулю:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_0(r)}{dr}\right)=-f_0^c(r),$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}A_n(r) = -f_n^c(r), \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{2.2.35}$$
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\frac{dB_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}B_n(r) = -f_n^s(r), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

После подстановки (2.2.31) в однородное граничное условие (2.2.28) получим граничные условия для искомых функций $A_n(r)$ и $B_n(r)$:

$$A_n(a) = 0, \quad B_n(a) = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{2.2.36}$$

В случае рассмотрения внутренней задачи в области D нужно добавить условия ограниченности искомых функций (2.2.3)

$$|A_n(r)| < M, \quad |B_n(r)| < M, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{2.2.37}$$

В случае рассмотрения внешней задачи в области D_e нужно добавить условие регулярности функции (2.2.4)

$$|A_n(r)| < M, \quad |B_n(r)| < M, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{2.2.38}$$

Краевые задачи для системы ОДУ (2.2.35), (2.2.36), (2.2.37) (или (2.2.38)) дают возможность найти $A_n(r)$ и $B_n(r)$, после подстановки которых в (2.2.31) получаем решение исходной задачи.

В нашей конкретной задаче коэффициенты $f_n^c(r)$, $f_n^s(r)$, $n = \overline{0,\infty}$, легко найти, не прибегая к интегрированию в формулах (2.2.33).

Решим сначала *внутреннюю задачу* (2.2.27), (2.2.28), (2.2.29). Выражение (2.2.32) в случае (2.2.29) примет вид

$$r^2 \cos 2\varphi = f_0^c(r) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^c(r)\cos n\varphi + f_n^s(r)\sin n\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях равенства, получим

$$f_2^c(r) = r^2, \quad f_n^c(r) \equiv 0 \;\; \text{при} \;\; n \neq 2, \quad f_n^s(r) \equiv 0, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Это означает, что все ДУ в системе (2.2.35) однородны, кроме ДУ для $A_2(r)$. Следовательно, все краевые задачи (2.2.35), (2.2.36) имеют нулевые решения, кроме краевой задачи для $A_2(r)$:

$$A_n(r) \equiv 0 \;\; \text{при} \;\; n \neq 2, \quad B_n(r) \equiv 0, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.2.39}$$

Решим краевую задачу для $A_2(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dA_2(r)}{dr}\right) - \dfrac{4}{r^2}A_2(r) = -r^2, & (2.2.40) \\ A_2(a) = 0, \quad |A_2(r)| < M \quad \text{при} \quad r \to 0. & (2.2.41) \end{cases}$$

Общее решение однородного ДУ (2.2.40) имеет вид

$$A(r) = Cr^2 + Dr^{-2}.$$

Оно найдено в прил. 4 при $\nu = 2$ (П4.4).

Общее решение неоднородного ДУ (2.2.40) будем искать методом вариации постоянных (коэффициент при старшей производной $A_2''(r)$ должен быть равен 1 в (2.2.40)) в виде

$$A_2(r) = C_2(r)r^2 + D_2(r)r^{-2}, \tag{2.2.42}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_2'(r)r^2 + D_2'(r)r^{-2} = 0, \\ C_2'(r)2r - 2D_2'(r)r^{-3} = -r^2. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} C_2'(r) &= -\frac{r}{4} \;\Rightarrow\; C_2(r) = -\frac{r^2}{8} + \tilde{C}_2, \\ D_2'(r) &= \frac{r^5}{4} \;\Rightarrow\; D_2(r) = \frac{r^6}{24} + \tilde{D}_2. \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Подставим (2.2.43) в (2.2.42), получим общее решение ДУ (2.2.40)

$$A_2(r) = \tilde{C}_2r^2 + \tilde{D}_2r^{-2} - \frac{r^4}{12}. \tag{2.2.44}$$

Из условий (2.2.41) находим

$$\tilde{D}_2 = 0, \quad \tilde{C}_2 = \frac{a^2}{12}.$$

Итак, решением краевой задачи (2.2.40), (2.2.41) является

$$A_2(r) = \frac{a^2r^2 - r^4}{12}. \tag{2.2.45}$$

После подстановки (2.2.39), (2.2.45) в (2.2.31) находим решение внутренней задачи (2.2.27), (2.2.28), (2.2.29):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{12}(a^2r^2 - r^4)\cos 2\varphi. \tag{2.2.46}$$

Теперь решим *внешнюю задачу*. Выражение (2.2.32) в случае (2.2.30) примет вид

$$r^{-2}\cos 2\varphi = f_0^c(r) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^c(r)\cos n\varphi + f_n^s(r)\sin n\varphi.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях равенства, получим

$$f_2^c(r) = r^{-2}, \quad f_n^c(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2, \quad f_n^s(r) \equiv 0, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Это означает, что все ДУ в системе (2.2.35) однородны, кроме ДУ для $A_2(r)$. Следовательно, все краевые задачи (2.2.35), (2.2.36), (2.2.38) имеют нулевые решения, кроме краевой задачи для $A_2(r)$:

$$A_n(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2, \quad B_n(r) \equiv 0, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.2.47}$$

Решим краевую задачу для $A_2(r)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_2(r)}{dr}\right) - \frac{4}{r^2}A_2(r) = -r^{-2}, && (2.2.48)\\ &A_2(a) = 0, \quad |A_2(r)| < M \ \text{ при } \ r\to\infty. && (2.2.49)\end{aligned}\right\}$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.2.48) будем искать методом вариации постоянных (коэффициент при старшей производной $A_2''(r)$ должен быть равен 1 в (2.2.48)) в виде

$$A_2(r) = C_2(r)r^2 + D_2(r)r^{-2}, \tag{2.2.50}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_2'(r)r^2 + D_2'(r)r^{-2} = 0,\\ C_2'(r)2r - 2D_2'(r)r^{-3} = -r^2.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2'(r) = -\frac{r^{-3}}{4} \;\Rightarrow\; C_2(r) = \frac{r^{-2}}{8} + \tilde{C}_2,$$
$$D_2'(r) = \frac{r}{4} \;\Rightarrow\; D_2(r) = \frac{r^2}{8} + \tilde{D}_2. \tag{2.2.51}$$

Подставим (2.2.51) в (2.2.50) и получим общее решение ДУ (2.2.48):

$$A_2(r) = \tilde{C}_2 r^2 + \tilde{D}_2 r^{-2} + \frac{1}{4}.$$

Из условий (2.2.49) находим

$$\tilde{C}_2 = 0, \quad \tilde{D}_2 = -\frac{a^2}{4}.$$

Итак, решением краевой задачи (2.2.48), (2.2.49) является

$$A_2(r) = \frac{1 - a^2 r^{-2}}{4}. \tag{2.2.52}$$

После подстановки (2.2.47), (2.2.52) в (2.2.31) находим решение внешней задачи (2.2.27), (2.2.28), (2.2.30):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{4}(1 - a^2 r^{-2}) \cos 2\varphi. \tag{2.2.53}$$

Ответ. Решение внутренней задачи:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{12}(a^2 r^2 - r^4) \cos 2\varphi;$$

решение внешней задачи:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{4}(1 - a^2 r^{-2}) \cos 2\varphi.$$

Замечание. Решением внутренней задачи

$$\Delta u = -f(r,\varphi), \quad D = \{r < a\},$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\varphi),$$

где $f(r,\varphi) = r^2\cos 2\varphi$, $g(r,\varphi) = 4\sin^2\varphi$, является сумма решений (2.2.25) и (2.2.46), полученных в примерах 2.2.1 и 2.2.2:

$$u(r,\varphi) = 2(1 - a^{-2}r^2\cos 2\varphi) + \frac{r^2(a^2 - r^2)\cos 2\varphi}{12}.$$

Решением внешней краевой задачи

$$\Delta u = -f(r,\varphi), \quad D_e = \{r > a\},$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\varphi),$$

где $f(r,\varphi) = r^{-2}\cos 2\varphi$, $g(r,\varphi) = 4\sin^2\varphi$, является сумма решений (2.2.26) и (2.2.53), полученных в примерах 2.2.1 и 2.2.2:

$$u(r,\varphi) = 2(1 - a^2r^{-2}\cos 2\varphi) + \frac{(1 - a^2r^{-2})\cos 2\varphi}{4}.$$

Задача 2.2.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\Delta u = -f(r,\varphi)$ с однородными граничными условиями внутри круга $D = \{r < a\}$ или вне круга $D_e = \{r > a\}$.

1. $f(r,\varphi) = r^3\sin\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

2. $f(r,\varphi) = r^{-3}\cos 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

3. $f(r,\varphi) = r^2\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

4. $f(r,\varphi) = r^{-2}\cos\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

5. $f(r,\varphi) = r\sin 2\varphi, \quad (u_r + 3u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

6. $f(r,\varphi) = r^{-3}\cos 3\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

7. $f(r,\varphi) = r^3\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

8. $f(r,\varphi) = r^{-2}\sin 3\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

9. $f(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

10. $f(r,\varphi) = r^{-4} \sin \varphi, \quad (u_r - 3u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

11. $f(r,\varphi) = r \cos \varphi, \quad (u_r + 2u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

12. $f(r,\varphi) = r^{-3} \sin 2\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

13. $f(r,\varphi) = r^3 \sin 3\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

14. $f(r,\varphi) = r^{-2} \cos 4\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

15. $f(r,\varphi) = r^2 \cos 3\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

16. $f(r,\varphi) = r^{-2} \sin \varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

17. $f(r,\varphi) = r \sin \varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

18. $f(r,\varphi) = r^{-3} \sin 3\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

19. $f(r,\varphi) = r^2 \cos 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

20. $f(r,\varphi) = r^{-4} \cos 3\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

21. $f(r,\varphi) = r^3 \cos \varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

22. $f(r,\varphi) = r^{-2} \cos \varphi, \quad (u_r - 3u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

23. $f(r,\varphi) = r \sin 2\varphi, \quad (u_r + 2u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

24. $f(r,\varphi) = r^{-3} \cos 2\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

25. $f(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

26. $f(r,\varphi) = r^{-3} \sin 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

27. $f(r,\varphi) = r^3 \sin 3\varphi, \quad u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

28. $f(r,\varphi) = r^{-3} \cos\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

29. $f(r,\varphi) = r \cos\varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=a} = 0, \quad D = \{r < a\}.$

30. $f(r,\varphi) = r^{-2} \sin 4\varphi, \quad u\Big|_{r=a} = 0, \quad D_e = \{r > a\}.$

2.3. Краевые задачи в кольцевой области

Пример 2.3.1. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\triangle u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r,\varphi) \tag{2.3.1}$$

внутри кольца $D = \{1 < r < 2\}$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = g(\varphi), \quad u\Big|_{r=2} = h(\varphi), \tag{2.3.2}$$

где

$$f(r,\varphi) = r \sin 2\varphi, \quad g(\varphi) \equiv 0, \quad h(\varphi) = 3 \cos \varphi. \tag{2.3.3}$$

Решение. Решение задачи будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит только от переменной φ, а именно по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2.9), (2.2.10) $\{\Phi_n(\varphi)\}$, $n = \overline{0,\infty}$, которые найдены ранее (см. (2.2.11) и (2.2.12)):

$$u(r,\varphi) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cos n\varphi + B_n(r) \sin n\varphi. \tag{2.3.4}$$

Известные функции $f(r,\varphi)$, $g(\varphi)$ и $h(\varphi)$ также разложим в тригонометрические ряды:

$$f(r,\varphi) = f_0^c(r) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^c(r) \cos n\varphi + f_n^s(r) \sin n\varphi, \tag{2.3.5}$$

$$g(r,\varphi) = g_0^c + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi, \tag{2.3.6}$$

$$h(r,\varphi) = h_0^c + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^c \cos n\varphi + h_n^s \sin n\varphi, \tag{2.3.7}$$

Подставим (2.3.4) и (2.3.5) в уравнение (2.3.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях. Получим ДУ для определения неизвестных $A_n(r)$ и $B_n(r)$:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_0(r)}{dr}\right) = -f_0^c(r),$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}A_n(r) = -f_n^c(r), \quad n=\overline{1,\infty}, \tag{2.3.8}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dB_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}B_n(r) = -f_n^s(r), \quad n=\overline{1,\infty}.$$

Подставим (2.3.4), (2.3.6) и (2.3.7) в граничные условия (2.3.2) и получим

$$\begin{array}{ll} A_0'(1) = g_0^c, & A_0(2) = h_0^c; \\ A_n'(1) = g_n^c, & A_n(2) = h_n^c; \\ B_n'(1) = g_n^s, & B_n(2) = h_n^s. \end{array} \tag{2.3.9}$$

Краевые задачи для ОДУ (2.3.8), (2.3.9) позволяют найти искомые $A_0(r)$, $A_n(r)$ и $B_n(r)$. После подстановки их в (2.3.4) получим решение исходной задачи.

В нашей конкретной задаче легко найти коэффициенты $f_n^c(r)$, $f_n^s(r)$, g_n^c, g_n^s, h_n^c, h_n^s после подстановки (2.3.3) в (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7):

$$f_2^s(r) = r, \quad f_n^s(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2, \quad f_n^c(r) \equiv 0, \quad n=\overline{0,\infty},$$

$$g_n^c = g_n^s = 0, \quad n=\overline{0,\infty},$$

$$h_1^c = 3, \quad h_n^c = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1, \quad h_n^s(r) = 0, \ n=\overline{1,\infty}.$$

Отсюда следует, что только две краевые задачи (2.3.8), (2.3.9) имеют ненулевые решения, а именно задачи для $B_2(r)$ и $A_1(r)$:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dB_2(r)}{dr}\right) - \dfrac{4}{r^2}B_2(r) = -r, & (2.3.10) \\ B_2'(1) = 0, \quad B_2(2) = 0. & (2.3.11) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_1(r)}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}A_1(r)=0, \qquad (2.3.12)\\ &A_1'(1)=0,\quad A_1(2)=3. \qquad (2.3.13)\end{aligned}\right\}$$

Все остальные коэффициенты равны:

$$A_n(r)\equiv 0 \ \text{ при } \ n\neq 1, \qquad B_n(r)\equiv 0 \ \text{ при } \ n\neq 2. \tag{2.3.14}$$

Решим задачу (2.3.10), (2.3.11). Общее решение однородного ДУ (2.3.10) найдено в прил. 4 при $\nu = 2$ (П4.4):

$$B(r) = Cr^2 + Dr^{-2}.$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.3.10) будем искать методом вариации постоянных в виде

$$B_2(r) = C_2(r)r^2 + D_2(r)r^{-2}, \tag{2.3.15}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_2'(r)r^2 + D_2'(r)r^{-2} = 0,\\ C_2'(r)2r - 2D_2'(r)r^{-3} = -r.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} C_2'(r) &= -\frac{1}{4} \ \Rightarrow \ C_2(r) = -\frac{r}{4}+\tilde{C}_2,\\ D_2'(r) &= \frac{r^4}{4} \ \Rightarrow \ D_2(r) = \frac{r^5}{20}+\tilde{D}_2.\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Подставим (2.3.16) в (2.3.15), получим общее решение ДУ (2.3.10):

$$B_2(r) = \tilde{C}_2 r^2 + \tilde{D}_2 r^{-2} - \frac{r^3}{5}.$$

Из граничных условий (2.3.11) находим

$$\tilde{C}_2 = \frac{67}{170}, \qquad \tilde{D}_2 = \frac{8}{85}.$$

Итак, решением краевой задачи (2.3.10), (2.3.11) является

$$B_2(r) = \frac{1}{5}\left(\frac{67}{34}r^2 + \frac{8}{17}r^{-2} - r^3\right). \tag{2.3.17}$$

Решим задачу (2.3.12), (2.3.13). Общее решение ДУ (2.3.12) найдено в прил. 4 при $\nu = 1$ (П4.4):

$$A_1(r) = C_1 r + D_1 r^{-1}.$$

Из граничных условий (2.3.13) находим

$$C_1 = \frac{6}{5}, \qquad D_1 = \frac{6}{5}.$$

Решением краевой задачи (2.3.12), (2.3.13) является

$$A_1(r) = \frac{6}{5}\left(r + r^{-1}\right). \tag{2.3.18}$$

После подставляем (2.3.14), (2.3.17), (2.3.18) в (2.3.4) и получим решение исходной задачи.

Ответ.

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{5}\left(\frac{67}{34}r^2 + \frac{8}{17}r^{-2} - r^3\right)\sin 2\varphi + \frac{6}{5}\left(r + r^{-1}\right)\cos\varphi.$$

Задача 2.3.1. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\Delta u = -f(r,\varphi)$ внутри кольца $D = \{1 < r < 2\}$ с неоднородными граничными условиями.

1. $f(r,\varphi) = r\cos 2\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = 3\sin\varphi.$

2. $f(r,\varphi) = r^2\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 2\cos 2\varphi.$

3. $f(r,\varphi) = r^{-1}\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 2\sin 2\varphi.$

4. $f(r,\varphi) = r^{-2}\sin 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = \cos\varphi.$

5. $f(r,\varphi) = r\sin 2\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 3\cos\varphi.$

6. $f(r,\varphi) = r^2\cos\, 2\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = \sin\varphi.$

7. $f(r,\varphi) = r^{-1}\sin\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 3\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 0.$

8. $f(r,\varphi) = r^{-2}\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 2\sin\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=2} = 0.$

9. $f(r,\varphi) = r\sin\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 3\cos\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=2} = 0.$

10. $f(r,\varphi) = r^2\cos\, 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = \sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 0.$

11. $f(r,\varphi) = r^{-1}\cos\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 2\sin\varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=2} = 0.$

12. $f(r,\varphi) = r^{-2}\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 2\cos\varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=2} = 0.$

13. $f(r,\varphi) = r\sin\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = 2\cos\, 2\varphi.$

14. $f(r,\varphi) = r^2\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 3\sin\varphi.$

15. $f(r,\varphi) = r^{-1}\sin\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 3\cos\, 3\varphi.$

16. $f(r,\varphi) = r^{-2}\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = \sin\, 3\varphi.$

17. $f(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 2\sin\, 2\varphi.$

18. $f(r,\varphi) = r^2\sin\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = \cos\, 2\varphi.$

19. $f(r,\varphi) = r^{-1}\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 2\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 0.$

20. $f(r,\varphi) = r^{-2}\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 3\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=2} = 0.$

21. $f(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 4\sin\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=2} = 0.$

22. $f(r,\varphi) = r^2\sin\, 2\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 3\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=2} = 0.$

23. $f(r,\varphi) = r^{-1}\sin\, 2\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 3\cos\, 3\varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=2} = 0.$

24. $f(r,\varphi) = r^{-2}\cos\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 4\sin 2\varphi, \quad (u_r + u)\Big|_{r=2} = 0.$

25. $f(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = 4\sin 2\varphi.$

26. $f(r,\varphi) = r^2\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 4\cos\varphi.$

27. $f(r,\varphi) = r^{-1}\cos\varphi, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = \sin\varphi.$

28. $f(r,\varphi) = r^{-2}\sin\varphi, \quad u_r\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = 2\cos 2\varphi.$

29. $f(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u\Big|_{r=2} = 2\cos 2\varphi.$

30. $f(r,\varphi) = r^2\sin\varphi, \quad (u_r - u)\Big|_{r=1} = 0, \quad u_r\Big|_{r=2} = 3\sin 2\varphi.$

2.4. Краевые задачи в круговом секторе

Пример 2.4.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2.4.1}$$

в круговом секторе $D = \{(r,\varphi):\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \pi/2\}$ с граничными условиями

$$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \tag{2.4.2}$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\varphi) = 3\sin 3\varphi - \sin\varphi \tag{2.4.3}$$

и с требованием ограниченности решения при $r \to 0$

$$|u(r,\varphi)| < \infty. \tag{2.4.4}$$

Решение. Ищем частное решение уравнения (2.4.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям (2.4.2) и условию ограниченности (2.4.4) в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0. \tag{2.4.5}$$

Подставим (2.4.5) в (2.4.1) и разделим переменные:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)\Phi(\varphi)+\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{R(r)}{r^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{R''(r)+\dfrac{R'(r)}{r}}{\dfrac{R(r)}{r^2}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{2.4.6}$$

В равенстве (2.4.6) слева функция зависит от r, справа зависит от φ. Так как это равенство выполняется в области D, то эти функции равны константе. Обозначим эту константу λ:

$$\frac{R''(r)+\dfrac{R'(r)}{r}}{\dfrac{R(r)}{r^2}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\lambda}{r^2}R(r)=0, \tag{2.4.7}$$

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0. \tag{2.4.8}$$

Подставим (2.4.5) в однородные граничные условия (2.4.2) и получим

$$\Phi(0)=0,\qquad \Phi'(\pi/2)=0. \tag{2.4.9}$$

Краевая задача (2.4.8), (2.4.9) представляет собой задачу Штурма—Лиувилля определения собственных значений и собственных функций. Решение задачи (2.4.8), (2.4.9) приведено в прил. 1 (п. в) при $l=\pi/2$. Собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют следующий вид (П1.22), (П1.23) при $l=\pi/2$:

$$\lambda_n=(2n+1)^2,\quad \Phi_n(\varphi)=\sin(2n+1)x,\quad n=\overline{0,\infty}. \tag{2.4.10}$$

Теперь рассмотрим ДУ (2.4.7) при $\lambda=\lambda_n$:

$$R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)-\frac{(2n+1)^2}{r^2}R_n(r)=0,\quad n=\overline{0,\infty}. \tag{2.4.11}$$

Общее решение этого уравнения найдено в прил. 4 (П4.4) при $\nu = 2n+1$:

$$R_n(r) = A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+1)}.$$

Из условия ограниченности (2.4.4) при $r \to 0$ следует, что $B_n = 0$, $n = \overline{0,\infty}$. Следовательно, ограниченные при $r \to 0$ решения ОДУ (2.4.11) имеют вид

$$R_n(r) = A_n r^{2n+1}. \tag{2.4.12}$$

Итак, мы нашли частные решения (2.4.5)

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Решение исходной задачи (2.4.1)—(2.4.4) будем искать в виде суммы найденных частных решений $u_n(r,\varphi)$:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi, \tag{2.4.13}$$

предполагая, что этот функциональный ряд можно дважды почленно дифференцировать по переменным r и φ. Неизвестные коэффициенты A_n найдем из соотношения, которое получается после подстановки (2.4.13) в граничное условие (2.4.3):

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi. \tag{2.4.14}$$

Полученное выражение представляет собой разложение известной функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье по полной, ортогональной на $(0,\pi/2)$ системе собственных функций $\{\sin(2n+1)\varphi\}$, $n = \overline{0,\infty}$. Условие ортогональности имеет следующий вид:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)\varphi\, \sin(2k+1)\varphi\, d\varphi = \frac{\delta_{nk}\pi}{4}.$$

Умножим левую и правую части (2.4.14) на $\sin(2k+1)\varphi$, проинтегрируем на $(0,\pi/2)$ и получим

$$\int_0^{\pi/2} g(\varphi)\sin(2k+1)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4} A_k a^{2k+1}. \tag{2.4.15}$$

Решением задачи является функция $u(r, \varphi)$, заданная в виде ряда (2.4.13), где коэффициенты A_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.4.15). После подстановки (2.4.13) в граничное условие (2.4.3) получим

$$g(\varphi) = 3\sin 3\varphi - \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях $\sin(2n+1)\varphi$ и получим

$$A_0 a = -1, \quad A_1 a^3 = 3, \quad A_n = 0 \text{ при } n \neq 0,\ 1. \tag{2.4.16}$$

Подставим (2.4.16) в (2.4.13) и получим решение исходной задачи.

Ответ.

$$u(r, \varphi) = 3a^{-3} r^3 \sin 3\varphi - a^{-1} r \sin\varphi. \tag{2.4.17}$$

Задача 2.4.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ внутри кругового сектора с граничными условиями.

1. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 3\sin 2\varphi - \sin 6\varphi.$

2. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \quad u_r\Big|_{r=a} = \sin 3\varphi - \sin 6\varphi.$

3. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 3\cos\varphi - \cos 3\varphi.$

4. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 2\cos 2\varphi - \cos\varphi.$

5. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \quad u_r\Big|_{r=a} = 2\sin(3\varphi/2) - \sin(9\varphi/2).$

6. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 3\sin 4\varphi - 4\sin 2\varphi.$

7. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u_r\Big|_{r=a} = 3\cos(\varphi/2) - \cos(3\varphi/2).$

8. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 3\cos 4\varphi + \cos 8\varphi.$

9. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 2\sin 3\varphi - \sin\varphi.$

10. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \sin\, 2\varphi + \sin\, 3\varphi.$

11. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \cos\, 6\varphi + \cos\, 2\varphi.$

12. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 4\cos\, 6\varphi + \cos\, 3\varphi.$

13. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \sin(3\varphi/2) + \sin(\varphi/2).$

14. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \sin\, 8\varphi + \sin\, 4\varphi.$

15. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos(9\varphi/2) - \cos(3\varphi/2).$

16. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = 2\sin\, 6\varphi + 4\sin\, 2\varphi.$

17. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin\, 6\varphi + \sin\, 3\varphi.$

18. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \cos\, 3\varphi + \cos\varphi.$

19. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \cos\varphi - 2\cos\, 2\varphi.$

20. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin(9\varphi/2) - 2\sin(3\varphi/2).$

21. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \sin\, 6\varphi + 4\sin\, 2\varphi.$

22. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos(3\varphi/2) + \cos(5\varphi/2).$

23. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = 2\cos\, 8\varphi - 4\cos\, 4\varphi.$

24. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u_r\Big|_{r=a} = \sin\varphi + 2\sin\, 3\varphi.$

25. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin\, 3\varphi - \sin\varphi.$

26. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\cos\, 2\varphi - \cos\, 6\varphi.$

27. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \quad u_r\Big|_{r=a} = 2\cos 9\varphi - 4\cos 3\varphi.$

28. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 5\sin(\varphi/2) - 2\sin(3\varphi/2).$

29. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u\Big|_{r=a} = 2\sin 4\varphi - \sin 8\varphi.$

30. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \quad u_r\Big|_{r=a} = 3\cos(3\varphi/2) - \cos(9\varphi/2).$

Пример 2.4.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\varphi) \tag{2.4.18}$$

в круговом секторе $D = \{(r,\varphi):\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \pi/2\}$ с однородными граничными условиями

$$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \tag{2.4.19}$$

$$u\Big|_{r=a} = 0 \tag{2.4.20}$$

и требованием ограниченности решения при $r \to 0$ (2.4.4), где

$$f(r,\varphi) = r^2\sin 5\varphi. \tag{2.4.21}$$

Решение. Решение задачи будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит только от переменной φ, а именно по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.4.8), (2.4.9) $\{\Phi_n(\varphi)\}$, $n = \overline{0,\infty}$, которые найдены ранее (2.4.10).

Итак, решение задачи (2.4.18)—(2.4.21) ищем в виде функционального ряда с неизвестными коэффициентами $A_n(r)$, $n = \overline{0,\infty}$:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r)\sin(2n+1)\varphi, \tag{2.4.22}$$

предполагая, что его можно дважды дифференцировать по r и φ. Известную функцию $f(r,\varphi)$ тоже разложим в ряд Фурье:

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\sin(2n+1)\varphi, \tag{2.4.23}$$

где коэффициенты известны:

$$f_n(r) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(r,\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{2.4.24}$$

Подставим (2.4.22) и (2.4.24) в уравнение (2.4.18) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n(r)}{dr}\right) - \frac{(2n+1)^2}{r^2}A_n(r) + f_n(r)\right\}\sin(2n+1)\varphi = 0. \tag{2.4.25}$$

В левой части уравнения (2.4.25) написано разложение в ряд Фурье функции, тождественно равной нулю, по полной системе собственных функций. Следовательно, коэффициенты $\{\cdot\}$ равны нулю:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n(r)}{dr}\right) - \frac{(2n+1)^2}{r^2}A_n(r) = -f_n(r), \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{2.4.26}$$

После подстановки (2.4.22) в (2.4.20) и (2.4.21) получим условия

$$A_n(a) = 0, \quad |A_n(r)| < M \ \text{ при } \ r \to 0. \tag{2.4.27}$$

Решаем краевые задачи (2.4.26), (2.4.27), находим $A_n(r)$, $n=\overline{0,\infty}$, после подстановки которых в (2.4.22) получаем решение исходной задачи.

В нашей конкретной задаче коэффициенты $f_n(r)$, $n=\overline{0,\infty}$ легко найти, не прибегая к интегрированию (2.4.24). Равенство (2.4.23) с учетом (2.4.21) примет вид

$$r^2\sin 5\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\sin(2n+1)\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях равенства, получим

$$f_2(r) = r^2, \quad f_n(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2.$$

Это означает, что все краевые задачи (2.4.26), (2.4.27) при $n \neq 2$ имеют нулевые решения:

$$A_n(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2. \tag{2.4.28}$$

Найдем решение $A_2(r)$ краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_2(r)}{dr}\right)-\frac{5^2}{r^2}A_2(r)=-r^2, \\ &A_2(a)=0, \quad |A_2(r)|<M \quad \text{при} \quad r\to 0. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&(2.4.29)\\&(2.4.30)\end{aligned}$$

Общее решение однородного ОДУ (2.4.29) имеет вид

$$A(r)=Cr^5+Dr^{-5},$$

оно найдено в прил. 4 при $\nu=5$ (П4.4).

Общее решение неоднородного ДУ (2.4.29) будем искать методом вариации постоянных в виде

$$A_2(r)=C_2(r)r^5+D_2(r)r^{-5}, \tag{2.4.31}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_2'(r)r^5+D_2'(r)r^{-5}=0, \\ 5C_2'(r)r^4-5D_2'(r)r^{-6}=-r^2. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2'(r)=-\frac{r^{-2}}{10} \;\Rightarrow\; C_2(r)=\frac{r^{-1}}{10}+\tilde{C}_2,$$

$$D_2'(r)=\frac{r^8}{10} \;\Rightarrow\; D_2(r)=\frac{r^9}{90}+\tilde{D}_2.$$

Подставим $C_2(r)$ и $D_2(r)$ в (2.4.31), получим общее решение ДУ (2.4.29):

$$A_2(r)=\tilde{C}_2r^5+\tilde{D}_2r^{-5}+\frac{r^4}{9}.$$

Из условий (2.4.30) находим

$$\tilde{D}_2=0, \qquad \tilde{C}_2=-\frac{a^{-1}}{9}.$$

Итак, решением краевой задачи (2.4.29), (2.4.30) является функция

$$A_2(r)=\frac{r^4-a^{-1}r^5}{9}. \tag{2.4.32}$$

После подстановки (2.4.28), (2.4.32) в (2.4.22) получим решение исходной задачи.

Ответ.

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{9}(r^4 - a^{-1}r^5)\sin 5\varphi. \tag{2.4.33}$$

Замечание. Решением краевой задачи

$$\triangle u = -f(x,y), \quad D = \{(r,\varphi): \ 0 < r < a, \ 0 < \varphi < \pi/2\},$$

$$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0,$$

$$u\Big|_{r=2} = g(\varphi),$$

где $f(r,\varphi) = r^2 \sin 5\varphi$, $g(\varphi) = 3\sin 3\varphi - \sin\varphi$, является сумма решений (2.4.17), (2.4.33), полученных в примерах 2.4.1 и 2.4.2:

$$u(r,\varphi) = 3a^{-3}r^3 \sin 3\varphi - a^{-1}r\sin\varphi + \frac{1}{9}(r^4 - a^{-1}r^5)\sin 5\varphi.$$

Задача 2.4.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\triangle u = -f(x,y)$ внутри кругового сектора с граничными условиями.

1. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^2 \sin 6\varphi.$

2. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r\sin 6\varphi.$

3. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^3 \cos 3\varphi.$

4. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^3 \cos 3\varphi.$

5. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r\sin(9\varphi/2).$

6. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^2 \sin 6\varphi.$

7. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^2 \cos(3\varphi/2).$

8. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^4 \cos 8\varphi.$

9. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \sin \varphi.$

10. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r \sin 4\varphi.$

11. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r \cos 2\varphi.$

12. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \cos 3\varphi.$

13. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r \sin(\varphi/2).$

14. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \sin 4\varphi.$

15. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^4 \cos(3\varphi/2).$

16. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \sin 4\varphi.$

17. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^2 \sin 3\varphi.$

18. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r \cos \varphi.$

19. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \cos 3\varphi.$

20. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^2 \sin(3\varphi/2).$

21. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi.$

22. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^4 \cos(\varphi/2).$

23. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r \cos 4\varphi.$

24. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \qquad f(r,\varphi) = r^3 \sin 3\varphi.$

25. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^4 \sin\varphi.$

26. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r\cos 6\varphi).$

27. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^3\cos 6\varphi.$

28. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^2\sin(5\varphi/2).$

29. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^2\sin 8\varphi.$

30. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=a} = 0, \quad f(r,\varphi) = r^4\cos(9\varphi/2).$

2.5. Краевые задачи в круговом цилиндре

Пример 2.5.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.5.1}$$

внутри кругового цилиндра $D = \{(r,\varphi,z):\ r<a,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0<z<h\}$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = g_1(z) = 2\sin\left(\frac{3\pi z}{2h}\right), \tag{2.5.2}$$

$$u\Big|_{z=0} = g_2(r) = 3J_0\left(\frac{\nu_1 r}{a}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = g_3(z) \equiv 0 \tag{2.5.3}$$

и условием ограниченности решения при $r\to 0$

$$|u(r)| < \infty, \tag{2.5.4}$$

где ν_1 — первый корень уравнения $J_1(\nu)=0$, а $J_0(\cdot)$ и $J_1(\cdot)$ — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков.

Решение. Так как граничные условия (2.5.2), (2.5.3) не зависят от переменной φ, решение задачи (2.5.1)—(2.5.4) также не зависит от φ, т.е. $u(r,z)$. Тогда уравнение (2.5.1) примет вид

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{2.5.5}$$

Разобьем задачу на две таким образом, чтобы в одной задаче граничные условия по переменной r были однородными, а в другой граничные условия по переменной z были однородными:

I.

$$\Delta u = 0, \quad D = \{(r,\varphi,z):\ r < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < z < h\}, \tag{2.5.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0, \tag{2.5.7}$$

$$u\Big|_{z=0} = g_2(r) = 3J_0\left(\frac{\nu_1 r}{a}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = g_3(z) \equiv 0. \tag{2.5.8}$$

II.

$$\Delta u = 0, \quad D = \{(r,\varphi,z):\ r < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < z < h\}, \tag{2.5.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = g_1(z) = 2\sin\left(\frac{3\pi z}{2h}\right), \tag{2.5.10}$$

$$u\Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0. \tag{2.5.11}$$

Очевидно, решение исходной задачи равно сумме решения $u^{\mathrm{I}}(r,z)$ задачи (2.5.6)—(2.5.8) и решения $u^{\mathrm{II}}(r,z)$ задачи (2.5.9)—(2.5.11), так как уравнение линейно и граничные условия линейны:

$$u(r,z) = u^{\mathrm{I}}(r,z) + u^{\mathrm{II}}(r,z).$$

Решим сначала задачу I (2.5.6)—(2.5.8) методом разделения переменных. Будем искать частное решение уравнения (2.5.6), удовлетворяющее однородному граничному условию (2.5.7) и условию ограниченности (2.5.4) в виде

$$u(r,z) = R(r)Z(z). \tag{2.5.12}$$

Подставим (2.5.12) в (2.5.6) и разделим переменные:

$$\frac{1}{r}\left(rR'(r)\right)' Z(z) + Z''(z)R(z) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{R''(r) + \dfrac{R'(r)}{r}}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)}. \tag{2.5.13}$$

В равенстве (2.5.13) слева функция зависит от r, справа — от z. Так как равенство выполняется в области D, то эти функции равны константе. Обозначим константу $-\lambda$:

$$\frac{R''(r) + \dfrac{R'(r)}{r}}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r) = 0, \tag{2.5.14}$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0. \tag{2.5.15}$$

Подставим (2.5.12) в однородное граничное условие (2.5.7) и условие ограниченности решения (2.5.4) и получим

$$R'(a) = 0, \qquad |R(r)| < \infty \ \text{ при } \ r \to 0. \tag{2.5.16}$$

Краевая задача (2.5.14), (2.5.16) представляет собой задачу Штурма—Лиувилля определения собственных значений и собственных функций. Найдем сначала общее решение ДУ (2.5.14). Сделаем замену переменной $x = \sqrt{\lambda}\, r$, тогда функция примет вид $R(r) = R\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \equiv \tilde{R}(x)$. Пересчитаем производные в уравнении (2.5.14) после замены переменной:

$$\frac{d\tilde{R}(x)}{dr} = \frac{d\tilde{R}(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} = \dot{\tilde{R}}\sqrt{\lambda}; \qquad \frac{d^2\tilde{R}(x)}{dr^2} = \ddot{\tilde{R}}\lambda.$$

Уравнение (2.5.14) примет вид ДУ Бесселя нулевого порядка:

$$\ddot{\tilde{R}} + \frac{1}{x}\dot{\tilde{R}} + \tilde{R}(x) = 0. \tag{2.5.17}$$

Общее решение этого уравнения

$$\tilde{R}(x) = AJ_0(x) + BN_0(x),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $N_0(x)$ — функция Неймана нулевого порядка. Вернемся к первоначальной переменной, получим общее решение уравнения (2.5.14):

$$R(x) = AJ_0(\sqrt{\lambda}\, r) + BN_0(\sqrt{\lambda}\, r). \tag{2.5.18}$$

Из условия ограниченности решения (2.5.16) при $r \to 0$ следует $B = 0$, поскольку функция Неймана $N_0(\sqrt{\lambda}\, r) \to \infty$. Из граничного условия при $r = a$ получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$J_0'(\sqrt{\lambda}\, a) = 0.$$

Так как $J_0'(x) = -J_1(x)$, уравнение примет вид

$$J_1(\sqrt{\lambda}\, a) = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\nu_n}{a}, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{2.5.19}$$

где ν_n — нули функции Бесселя первого порядка, т.е. $J_1(\nu_n) = 0$, $n = \overline{1, \infty}$.

Соответствующие собственные функции находим из (2.5.18) при $\lambda = \lambda_n$ и $B = 0$:

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right). \tag{2.5.20}$$

Теперь рассмотрим ДУ (2.5.15) при $\lambda = \lambda_n$:

$$Z_n''(z) - \lambda_n Z_n(z) = 0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать по-разному:

$$Z(z) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n}\, z} + B_n e^{\sqrt{\lambda_n}\, z}$$

либо в виде

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\, z + B_n \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n}\, z.$$

Лучше в качестве фундаментальной системы решений выбрать функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.5.8), т.е.:

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\, z + B_n \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n}\, (z - h) =$$

$$= A_n \operatorname{sh} \frac{\nu_n z}{a} + B_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n (z - h)}{a}. \tag{2.5.21}$$

В этом выражении

$$\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\, z \Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_n}\, (z - h)\right)\right) \Big|_{z=h} = 0.$$

В дальнейшем выяснится, что представление общего решения в виде (2.5.21) упрощает решение задачи.

Итак, мы нашли счетное множество частных решений вида (2.5.12):

$$u_n(r,z) = R_n(r)Z_n(z), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Решение всей задачи (2.5.6)—(2.5.8) будем искать в виде функционального ряда

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{\nu_n z}{a} + B_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n (z-h)}{a} \right) J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right), \tag{2.5.22}$$

предполагая, что его можно дифференцировать два раза по переменным r и z.

Подставим (2.5.22) в граничные условия (2.5.8) и получим

$$g_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n h}{a} J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right), \tag{2.5.23}$$

$$g_3(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n h}{a} \cdot \frac{\nu_n}{a} J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right). \tag{2.5.24}$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0,a]$ с весом r:

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r\,dr = \delta_{nk} \frac{a^2}{2} J_0^2(\nu_k).$$

Умножим обе части равенства (2.5.23) на $J_0\left(\dfrac{\nu_k r}{a}\right) r$, проинтегрируем по r на $[0,a]$ и получим

$$\int_0^a g_2(r) J_0\left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r\,dr = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n h}{a} \int_0^a J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r\,dr =$$

$$= B_k \operatorname{ch} \frac{\nu_k h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} J_0^2(\nu_k).$$

Таким образом:

$$B_k = \frac{2}{a^2 \operatorname{ch} \dfrac{\nu_k h}{a} J_0^2(\nu_k)} \int_0^a g_2(r) J_0\left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r\,dr. \tag{2.5.25}$$

Аналогично из (2.5.24) можно найти

$$A_k = \frac{2}{a \operatorname{ch} \dfrac{\nu_k h}{a} \cdot \nu_k J_0^2(\nu_k)} \int\limits_0^a g_3(r) J_0 \left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r\, dr. \tag{2.5.26}$$

Подставим (2.5.25), (2.5.26) в (2.5.22) и получим решение задачи (2.5.6)—(2.5.8) в виде функционального ряда.

В нашем случае коэффициенты A_n и B_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.5.25), (2.5.26). После подстановки (2.5.22) в граничные условия (2.5.8) получим (2.5.23) и (2.5.24) в виде

$$3J_0\left(\frac{\nu_1 r}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n h}{a} J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right), \tag{2.5.27}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{\nu_n h}{a} \cdot \frac{\nu_n}{a} J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right). \tag{2.5.28}$$

Слева в равенстве (2.5.27) $J_0\left(\dfrac{\nu_1 r}{a}\right) = R_1(r)$ — первая собственная функция. Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (2.5.27) и получим

$$B_1 \operatorname{ch} \frac{\nu_1 h}{a} = 3, \qquad B_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1. \tag{2.5.29}$$

Из (2.5.28) получим

$$A_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty.} \tag{2.5.30}$$

Подставим (2.5.29) и (2.5.30) в (2.5.22) и получим решение задачи (2.5.6)—(2.5.8):

$$u^{\mathrm{I}}(r,z) = \frac{3}{\operatorname{ch} \dfrac{\nu_1 h}{a}} \operatorname{ch} \frac{\nu_1 (z-h)}{a} J_0\left(\frac{\nu_1 r}{a}\right). \tag{2.5.31}$$

Теперь решим задачу II (2.5.9)—(2.5.11) методом разделения переменных. Будем искать частные решения уравнения (2.5.9), удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.5.11) и условию ограниченности (2.5.4) в виде

$$u(r,z) = R(r) Z(z). \tag{2.5.32}$$

Подставим (2.5.32) в (2.5.9) и разделим переменные:

$$\frac{1}{r}\left(rR'(r)\right)' Z(z) + Z''(z)R(r) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{R''(r) + \dfrac{R'(r)}{r}}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \lambda R(r) = 0, \tag{2.5.33}$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0. \tag{2.5.34}$$

После подстановки (2.5.32) в однородные граничные условия (2.5.11) получим

$$Z(0) = 0, \qquad Z'(h) = 0. \tag{2.5.35}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (2.5.34), (2.5.35) приведено в прил. 1 (п. в). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = h$ имеют следующий вид (П1.22), (П1.23):

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n+1)}{2h}, \quad n = \overline{0, \infty},$$

$$Z_n(z) = \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Теперь рассмотрим ДУ (2.5.33) при $\lambda = \lambda_n$:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) - \lambda_n R_n(r) = 0. \tag{2.5.36}$$

Сделаем замену независимой переменной $x = \sqrt{\lambda_n}\, r$, тогда функция примет вид $R_n(r) = R_n\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \equiv \tilde{R}(x)$. Пересчитаем производные в уравнении (2.5.36) после замены переменной:

$$\frac{d\tilde{R}(x)}{dr} = \frac{d\tilde{R}(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} = \dot{\tilde{R}}\sqrt{\lambda_n}, \qquad \frac{d^2\tilde{R}(x)}{dr^2} = \ddot{\tilde{R}}\lambda_n.$$

Уравнение (2.5.36) примет вид ДУ Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка

$$\ddot{\tilde{R}} + \frac{1}{x}\dot{\tilde{R}} - \tilde{R}(x) = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$\tilde{R}(x) = CI_0(x) + DK_0(x),$$

где $I_0(x)$ — функция Инфельда нулевого порядка, $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка. Вернемся к первоначальной переменной, получим общее решение уравнения (2.5.36):

$$R_n(r) = C_n I_0(\sqrt{\lambda_n}\, r) + D_n K_0(\sqrt{\lambda_n}\, r).$$

Из условия ограниченности решения (2.5.16) при $r \to 0$ следует $D_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$, поскольку функция Макдональда $K_0(\sqrt{\lambda_n}\, r) \to \infty$. Таким образом:

$$R_n(r) = C_n I_0(\sqrt{\lambda_n}\, r) = C_n I_0\left(\frac{\pi(2n+1)r}{2h}\right).$$

Итак, мы нашли счетное множество частных решений вида (2.5.32):

$$u_n(r, z) = R_n(r) Z_n(z) = C_n I_0\left(\frac{\pi(2n+1)r}{2h}\right) \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}.$$

Решение всей задачи (2.5.9)—(2.5.11) будем искать в виде функционального ряда

$$u_n(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{\pi(2n+1)r}{2h}\right) \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}, \tag{2.5.37}$$

предполагая, что его можно дифференцировать дважды по переменным r и z. Подставим (2.5.37) в граничное условие (2.5.10):

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2h}\right) \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}. \tag{2.5.38}$$

Для нахождения коэффициентов C_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0, h]$:

$$\int\limits_0^h \sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)z}{2h}dz = \delta_{nk}\frac{h}{2}.$$

Умножим обе части (2.5.38) на $\sin\dfrac{\pi(2k+1)z}{2h}$, проинтегрируем по z на $[0, h]$ и получим

$$\int\limits_0^h g_1(z)\sin\frac{\pi(2k+1)z}{2h}dz = C_k I_0\left(\frac{\pi(2k+1)a}{2h}\right)\frac{h}{2}.$$

Отсюда находим

$$C_k = \frac{2}{I_0\left(\dfrac{\pi(2k+1)a}{2h}\right)h}\int\limits_0^h g_1(z)\sin\frac{\pi(2k+1)z}{2h}dz, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{2.5.39}$$

Подставим (2.5.39) в (2.5.37) и получим решение задачи (2.5.9)—(2.5.11) в виде функционального ряда.

В нашем случае коэффициенты C_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.5.39). После подстановки (2.5.37) в граничное условие (2.5.10) получим (2.5.38) в виде

$$2\sin\frac{3\pi z}{2h} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2h}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)z}{2h}. \tag{2.5.40}$$

Слева в равенстве $\sin\dfrac{3\pi z}{2h} = Z_1(z)$ — собственная функция. Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (2.5.40) и получим

$$C_1 I_0\left(\frac{3\pi a}{2h}\right) = 2, \quad C_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1. \tag{2.5.41}$$

Подставим (2.5.41) в (2.5.37) и получим решение $u^{\mathrm{II}}(r, z)$ задачи (2.5.9)—(2.5.11):

$$u^{\mathrm{II}}(r, z) = \frac{2}{I_0\left(\dfrac{3\pi a}{2h}\right)} I_0\left(\frac{3\pi r}{2h}\right)\sin\frac{3\pi z}{2h}. \tag{2.5.42}$$

Решением исходной задачи (2.5.1)—(2.5.4) является сумма решений (2.5.31) и (2.5.42).

Ответ.

$$u(r, z) = \frac{3}{\operatorname{ch}\dfrac{\nu_1 h}{a}} \operatorname{ch}\frac{\nu_1(z-h)}{a} J_0\left(\frac{\nu_1 r}{a}\right) + \frac{2}{I_0\left(\dfrac{3\pi a}{2h}\right)} I_0\left(\frac{3\pi r}{2h}\right) \sin\frac{3\pi z}{2h}. \qquad (2.5.43)$$

Задача 2.5.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\triangle u = 0$ внутри кругового цилиндра $D = \{(r, \varphi, z): r < a, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < z < h\}$ с заданными граничными условиями, где μ_i и ν_i — нули соответственно функций Бесселя нулевого и первого порядков $J_0(\mu_i) = 0$, $J_1(\nu_i) = 0$.

1. $u\Big|_{r=a} = 2\sin(\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$
2. $u\Big|_{r=a} = \sin(3\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = J_0(\mu_2 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$
3. $u\Big|_{r=a} = 2\cos(3\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$
4. $u\Big|_{r=a} = \cos(\pi z/h), \quad u_z\Big|_{z=0} = J_0(\mu_2 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$
5. $u_r\Big|_{r=a} = 3\sin(2\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = J_0(\nu_1 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$
6. $u_r\Big|_{r=a} = 2\sin(5\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = J_0(\nu_2 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$
7. $u_r\Big|_{r=a} = \cos(5\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = J_0(\nu_3 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$
8. $u\Big|_{r=a} = \sin(3\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\mu_1 r/a).$
9. $u\Big|_{r=a} = \sin(3\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = J_0(\mu_1 r/a).$
10. $u\Big|_{r=a} = \cos(5\pi z/h), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = J_0(\mu_1 r/a).$
11. $u\Big|_{r=a} = \cos(5\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\mu_3 r/a).$
12. $u_r\Big|_{r=a} = \sin(3\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\nu_2 r/a).$

13. $u_r\Big|_{r=a} = \sin(3\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = J_0(\nu_1 r/a).$

14. $u_r\Big|_{r=a} = \cos(3\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\nu_2 r/a).$

15. $u\Big|_{r=a} = 4\sin(2\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 3J_0(\mu_2 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$

16. $u\Big|_{r=a} = 3\sin(5\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 2J_0(\mu_1 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$

17. $u\Big|_{r=a} = 3\cos(5\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 3J_0(\mu_3 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$

18. $u\Big|_{r=a} = 5\cos(3\pi z/h), \quad u_z\Big|_{z=0} = 2J_0(\mu_3 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$

19. $u_r\Big|_{r=a} = 5\sin(3\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 2J_0(\nu_2 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$

20. $u_r\Big|_{r=a} = 3\sin(\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 5J_0(\nu_3 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$

21. $u_r\Big|_{r=a} = 2\cos(\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 2J_0(\nu_1 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$

22. $u\Big|_{r=a} = 2\sin(\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\mu_3 r/a).$

23. $u\Big|_{r=a} = 3\sin(7\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = 2J_0(\mu_2 r/a).$

24. $u\Big|_{r=a} = 2\cos(\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = 3J_0(\mu_1 r/a).$

25. $u\Big|_{r=a} = 5\cos(\pi z/h), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = 2J_0(\mu_3 r/a).$

26. $u_r\Big|_{r=a} = 2\sin(\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = J_0(\nu_3 r/a).$

27. $u_r\Big|_{r=a} = 3\sin(\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=h} = 2J_0(\nu_1 r/a).$

28. $u_r\Big|_{r=a} = 2\cos(5\pi z/(2h)), \quad u_z\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = 3J_0(\nu_3 r/a).$

29. $u\Big|_{r=a} = \sin(5\pi z/h), \quad u\Big|_{z=0} = 2J_0(\mu_2 r/a), \quad u\Big|_{z=h} = 0.$

30. $u\Big|_{r=a} = \sin(\pi z/(2h)), \quad u\Big|_{z=0} = 2J_0(\mu_3 r/a), \quad u_z\Big|_{z=h} = 0.$

Пример 2.5.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r,z) \qquad (2.5.44)$$

внутри кругового цилиндра $D=\{(r,\varphi,z)\colon\ r<a,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0<z<h\}$ с однородными граничными условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad (2.5.45)$$

$$u\Big|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \qquad (2.5.46)$$

где $f(r,z) = z(z-2h)J_0\left(\dfrac{\nu_2 r}{a}\right)$, ν_2 — второй корень уравнения $J_1(\nu)=0$, а $J_0(\cdot)$ и $J_1(\cdot)$ — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков.

Решение. Так как $f(r,z)$ и коэффициенты уравнения не зависят от переменной φ, решение задачи (2.5.44)—(2.5.46) также не зависит от φ, т.е. $u(r,z)$. Уравнение (2.5.44) примет вид

$$\triangle u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r,z). \qquad (2.5.47)$$

Решение задачи (2.5.47), (2.5.45), (2.5.46) можно искать в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в области D с граничными условиями (2.5.45), (2.5.46) либо по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит только от переменной z, т.е. по собственным функциям задачи (2.5.34), (2.5.35). Мы будем искать решение в виде разложения по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит от переменной r, т.е. по собственным функциям $R_n(r) = J_0\left(\dfrac{\nu_n r}{a}\right)$ (2.5.20) задачи Штурма—Лиувиля (2.5.14), (2.5.16). Итак, ищем решение в виде ряда

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z)J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right), \qquad (2.5.48)$$

предполагая, что его можно дважды дифференцировать по r и z. Известную функцию $f(r,z)$ также разложим в ряд по этой системе собственных функций:

$$f(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right), \qquad (2.5.49)$$

где коэффициенты $f_n(z)$ легко находятся. Воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0, a]$ с весом r:

$$\int\limits_0^a J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\nu_k r}{a}\right) r dr = \delta_{nk}\frac{a^2}{2}J_0^2(\nu_n).$$

Умножим обе части равенства (2.5.49) на $J_0\left(\dfrac{\nu_k r}{a}\right) r$, проинтегрируем по r на $[0, a]$ и получим

$$\int\limits_0^a f(r,z) J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) r dr = f_n(z)\frac{a^2}{2}J_0^2(\nu_n).$$

В нашем случае коэффициенты $f_n(z)$ можно найти, не прибегая к интегрированию. Выражение (2.5.49) имеет вид

$$f(r,z) = z(z-2h)J_0\left(\frac{\nu_2 r}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, находим

$$f_2(z) = z(z-2h), \qquad f_n(z) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2. \tag{2.5.50}$$

Подставим (2.5.48) и (2.5.49) в уравнение (2.5.47) и воспользуемся тем, что $J_0\left(\dfrac{\nu_n r}{a}\right)$ — решение уравнения (2.5.14), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right)\right) Z_n(z) + \frac{d^2 Z_n}{dz^2}J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) + f_n(z)J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right)\right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\lambda_n J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) Z_n(z) + \frac{d^2 Z_n}{dz^2}J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) + f_n(z)J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right)\right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \left(\frac{\nu_n}{a}\right)^2 Z_n(z) + f_n(z)\right\} J_0\left(\frac{\nu_n r}{a}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициенты $Z_n(z)$ удовлетворяют ДУ

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \left(\frac{\nu_n}{a}\right)^2 Z_n(z) = -f_n(z), \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.5.51}$$

Подставим (2.5.48) в граничные условия (2.5.46) и получим условия

$$Z_n(0) = 0, \quad \frac{dZ_n(h)}{dz} = 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{2.5.52}$$

Если решить краевые задачи (2.5.51), (2.5.52), найти $Z_n(z)$, $n = \overline{1, \infty}$ и подставить в (2.5.48), получим решение исходной задачи.

В нашем случае все краевые задачи (2.5.51), (2.5.52) при $n \neq 2$ имеют тривиальные решения $Z_n(z) \equiv 0$. Решим краевую задачу при $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &Z_2'' - \left(\frac{\nu_2}{a}\right)^2 Z_2 = -z(z - 2h), && (2.5.53)\\ &Z_2(0) = Z_2'(h) = 0. && (2.5.54)\end{aligned}\right\}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (2.5.53) удобно записать в виде

$$Z_0(z) = A_2 \operatorname{sh} \frac{\nu_2 z}{a} + B_2 \operatorname{ch} \frac{\nu_2(z-h)}{a}.$$

Частное решение неоднородного ДУ (2.5.53) найдем методом подбора в виде

$$Z(z) = Az^2 + Bz + C. \tag{2.5.55}$$

Подставим (2.5.55) в (2.5.53) и получим

$$2A - \left(\frac{\nu_2}{a}\right)^2 (Az^2 + Bz + C) = -z^2 + 2hz.$$

Отсюда находим

$$A = \left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2, \quad B = -2h\left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2, \quad C = 2\left(\frac{a}{\nu_2}\right)^4.$$

Итак, общее решение ДУ (2.5.53):

$$Z_2(z) = A_2 \operatorname{sh} \frac{\nu_2 z}{a} + B_2 \operatorname{ch} \frac{\nu_2(z-h)}{a} + \left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2 \left(z^2 - 2hz + 2\left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2\right). \tag{2.5.56}$$

Подставим (2.5.56) в граничные условия (2.5.54), найдем A_2 и B_2:

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{2\,(a/\nu_2)^4}{\operatorname{ch}(\nu_2 h/a)}.$$

Решением краевой задачи (2.5.53), (2.5.54) является функция

$$Z_2(z) = -\frac{2\,(a/\nu_2)^4}{\operatorname{ch}(\nu_2 h/a)} \operatorname{ch}\frac{\nu_2(z-h)}{a} + \left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2 \left(z^2 - 2hz + 2\left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2\right). \quad (2.5.57)$$

Решением исходной задачи (2.5.44)—(2.5.46) является функция $u(r,z)$, заданная формулой (2.5.48), где $Z_2(z)$ задается (2.5.57), $Z_n(z) \equiv 0$, $n \neq 2$.

Ответ.

$$u(r,z) = \left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2 \left[-\frac{2a^2}{\nu_2^2 \operatorname{ch}\left(\dfrac{\nu_2 h}{a}\right)} \operatorname{ch}\frac{\nu_2(z-h)}{a} + z^2 - 2hz + 2\left(\frac{a}{\nu_2}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\nu_2 r}{a}\right). \quad (2.5.58)$$

Задача 2.5.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\Delta u = -f(r,z)$ внутри кругового цилиндра $D = \{(r,\varphi,z):\ r < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < z < h\}$ с однородными граничными условиями, где μ_i и ν_i — нули соответственно функций Бесселя нулевого и первого порядков $J_0(\mu_i) = 0$, $J_1(\nu_i) = 0$.

1. $f(r,z) = z(z-h)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\big|_{r=a} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$
2. $f(r,z) = z(z-2h)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\big|_{r=a} = u\big|_{z=0} = u_z\big|_{z=h} = 0.$
3. $f(r,z) = (z^3 - h^3)J_0(\mu_2 r/a), \quad u\big|_{r=a} = u_z\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$
4. $f(r,z) = z^2(2z-3h)J_0(\mu_2 r/a), \quad u\big|_{r=a} = u_z\big|_{z=0} = u_z\big|_{z=h} = 0.$
5. $f(r,z) = (z-h)z(z-h/2)J_0(\nu_1 r/a), \quad u_r\big|_{r=a} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$
6. $f(r,z) = ((z-h)^3 + h^3)J_0(\nu_2 r/a), \quad u_r\big|_{r=a} = u\big|_{z=0} = u_z\big|_{z=h} = 0.$
7. $f(r,z) = (h^2 - z^2)J_0(\nu_3 r/a), \quad u_r\big|_{r=a} = u_z\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$
8. $f(r,z) = z^2(z-h)J_0(\mu_2 r/a), \quad u\big|_{r=a} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$

9. $f(r,z) = z(2h-z)J_0(\mu_2 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

10. $f(r,z) = z^2(z-3h/2)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

11. $f(r,z) = (h^3-z^3)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

12. $f(r,z) = (h-z)z^2 J_0(\nu_2 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

13. $f(r,z) = z^2(z-3h/2)J_0(\nu_3 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

14. $f(r,z) = (z^2-h^2)J_0(\nu_2 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

15. $f(r,z) = z(z-h)^2 J_0(\mu_3 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

16. $f(r,z) = z^2(z-3h/2)J_0(\mu_3 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

17. $f(r,z) = (h^2-z^2)J_0(\mu_3 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

18. $f(r,z) = (z^2-2z^3/3h)J_0(\mu_3 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

19. $f(r,z) = z(z-h)^2 J_0(\nu_3 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

20. $f(r,z) = z(2h-z)J_0(\nu_3 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

21. $f(r,z) = (z^3-h^3)J_0(\nu_2 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

22. $f(r,z) = (h-z)z^2 J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

23. $f(r,z) = ((z-h)^3+h^3)J_0(\mu_2 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

24. $f(r,z) = (z^2-h^2)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

25. $f(r,z) = z^2(z-h)^2 J_0(\mu_2 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

26. $f(r,z) = z(z-h)J_0(\nu_1 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

27. $f(r,z) = z(z-2h)J_0(\nu_1 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

28. $f(r,z) = (h^3 - z^3)J_0(\mu_1 r/a), \quad u_r\Big|_{r=a} = u_z\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

29. $f(r,z) = (z-h)z(z-h/2)J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0.$

30. $f(r,z) = (3h/2 - z)z^2 J_0(\mu_1 r/a), \quad u\Big|_{r=a} = u\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=h} = 0.$

2.6. Краевые задачи внутри и вне шара

Пример 2.6.1. Решить краевые задачи для уравнения Лапласа в сферической системе координат (r, φ, θ)

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\,\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (2.6.1)$$

с граничным условием

$$u\Big|_{r=a} = g(\theta) = \cos\,2\theta + \cos\theta: \qquad (2.6.2)$$

1) внутри шара $D = \{r < a\}$ с требованием ограниченности решения

$$|u(r,\varphi,\theta)| < \infty \quad \text{при} \quad r \to 0; \qquad (2.6.3)$$

2) вне шара $D_e = \{r > a\}$ с требованием регулярности решения (2.12)

$$u(r,\varphi,\theta) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \qquad (2.6.4)$$

Решение. Так как граничное условие (2.6.2) не зависит от переменной φ, решение задачи также не зависит от φ, т.е. $u(r,\theta)$. Тогда уравнение (2.6.1) примет вид

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\,\theta}\right) = 0. \qquad (2.6.5)$$

Ищем частное решение ДУ (2.6.5), удовлетворяющее условию (2.6.3) для внутренней задачи или условию (2.6.4) для внешней задачи, в виде

$$u(r,\theta) = R(r)Y(\theta). \qquad (2.6.6)$$

Подставим (2.6.6) в уравнение (2.6.5) и разделим переменные:

$$\frac{R''(r) + 2\dfrac{R'(r)}{r}}{\dfrac{R(r)}{r^2}} = -\frac{\dfrac{1}{\sin\theta} \cdot \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\,\theta\dfrac{dY}{d\theta}\right)}{Y(\theta)} = \lambda.$$

Получим ОДУ

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{\lambda}{r^2}R = 0, \tag{2.6.7}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dY}{d\theta}\right) + \lambda Y(\theta) = 0. \tag{2.6.8}$$

При рассмотрении внутренней задачи из (2.6.3) следует, что

$$|R(0)| < \infty. \tag{2.6.9}$$

При рассмотрении внешней задачи из (2.6.4) следует, что

$$R(r) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{2.6.10}$$

Уравнение (2.6.8) рассмотрим вместе с естественным условием ограниченности решения на осях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$

$$|Y(0)| < \infty, \qquad |Y(\pi)| < 0. \tag{2.6.11}$$

Решим задачу Штурма—Лиувилля (2.6.8), (2.6.11).

Сделаем замену независимой переменной $x = \cos\theta$, тогда функция примет вид $Y(\theta) = Y(\arccos x) \equiv \tilde{Y}(x)$. Пересчитаем производные в уравнении (2.6.8) после замены переменной:

$$\frac{d\tilde{Y}(x)}{d\theta} = \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \frac{d\tilde{Y}}{dx}(-\sin\theta).$$

Отсюда следует, что оператор дифференцирования $\dfrac{d}{d\theta}$ в уравнении (2.6.8) при замене переменной надо заменить на $\dfrac{d}{dx}(-\sin\theta)$. Уравнение (2.6.8) примет вид ОДУ для полиномов Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx}\right) + \lambda\tilde{Y}(x) = 0, \tag{2.6.12}$$

а условия ограниченности решения (2.6.11) запишутся в виде

$$|\tilde{Y}(\pm 1)| < \infty. \tag{2.6.13}$$

Собственными значениями задачи (2.6.12), (2.6.13) являются

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{2.6.14}$$

а соответствующие им собственные функции — полиномы Лежандра

$$\tilde{Y}_n(x) = P_n(x), \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, получим собственные функции задачи (2.6.8), (2.6.11)

$$Y_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{2.6.15}$$

Рассмотрим ДУ (2.6.7) при $\lambda = \lambda_n$:

$$R_n''(r) + \frac{2}{r}R_n'(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n(r) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Общее решение этого уравнения найдено в прил. 4 (п. б), оно имеет следующий вид (П4.6):

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}.$$

При рассмотрении внутренней задачи из условия ограниченности при $r = 0$ (2.6.9) следует, что $B_n = 0$, $n = \overline{0, \infty}$, т.е.

$$R_n(r) = A_n r^n.$$

При рассмотрении внешней задачи из условия регулярности при $r \to \infty$ (2.6.10) следует, что $A_n = 0$, $n = \overline{0, \infty}$, т.е

$$R_n(r) = B_n r^{-(n+1)}.$$

Итак, частные решения (2.6.6) найдены, их оказалось счетное множество

$$u_n(r, \theta) = R_n(r) Y_n(\theta), \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Теперь решим сначала *внутреннюю задачу* (2.6.5), (2.6.2), (2.6.3). Решение будем искать в виде суммы найденных частных решений, предполагая, что ряд можно почленно дифференцировать дважды по r и θ:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{2.6.16}$$

Неизвестные коэффициенты A_n найдем из граничных условий (2.6.2). Подставим (2.6.16) в (2.6.2) и получим

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta). \tag{2.6.17}$$

Воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра на $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = \int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \delta_{nk}\frac{2}{2n+1}.$$

Умножим левую и правую части (2.6.17) на $P_k(\cos\theta)\sin\theta$, проинтегрируем на $[0,\pi]$ и получим

$$\int_{0}^{\pi} g(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = A_k a^k \frac{2}{2k+1}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Отсюда находим

$$A_k = \frac{2k+1}{2a^k}\int_{0}^{\pi} g(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{2.6.18}$$

Решением внутренней задачи (2.6.5), (2.6.2), (2.6.3) является функция $u(r,\theta)$, заданная в виде функционального ряда (2.6.16), где коэффициенты A_n вычисляются по формуле (2.6.18).

В нашей задаче коэффициенты A_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.6.18). После подстановки (2.6.16) в (2.6.2) получим

$$\cos\theta + \cos\,2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta). \tag{2.6.19}$$

Представим левую часть в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\cos\theta + \cos\,2\theta = \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = AP_0(\cos\theta) + BP_1(\cos\theta) + CP_2(\cos\theta) =$$

$$= A\cdot 1 + B\cos\theta + C\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях $\cos\theta$ в полученном равенстве

$$-1+\cos\theta+2\cos^2\theta=\left(A-\frac{1}{2}C\right)+B\cos\theta+\frac{3}{2}C\cos^2\theta.$$

Получим СЛАУ для определения A, B и C:

$$\begin{cases} A-\dfrac{1}{2}C=-1,\\ B=1,\\ \dfrac{3}{2}C=2, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=-\dfrac{1}{3},\\ B=1,\\ C=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Равенство (2.6.19) примет вид

$$-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+1\cdot P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_na^nP_n(\cos\theta).$$

Отсюда находим

$$A_0a^0=-\frac{1}{3},\quad A_1a=1,\quad A_2a^2=\frac{4}{3},\quad A_n=0 \ \text{ при } \quad n\neq\{0,1,2\}. \quad (2.6.20)$$

Подставим (2.6.20) в (2.6.16) и получим решение внутренней задачи

$$u(r,\theta)=-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+a^{-1}rP_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}a^{-2}r^2P_2(\cos\theta)=$$

$$=-\frac{1}{3}+a^{-1}r\cos\theta+\frac{2}{3}a^{-2}r^2(3\cos^2\theta-1). \quad (2.6.21)$$

Теперь решим *внешнюю задачу* (2.6.5), (2.6.2), (2.6.4). Решение будем искать в виде суммы найденных частных решений:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nr^{-(n+1)}P_n(\cos\theta). \quad (2.6.22)$$

Неизвестные коэффициенты B_n найдем из граничных условий (2.6.2). Подставим (2.6.22) в (2.6.2) и получим

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_na^{-(n+1)}P_n(\cos\theta).$$

Используя ортогональность полиномов Лежандра, находим

$$B_k = \frac{(2k+1)a^{k+1}}{2} \int_0^\pi g(\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \qquad (2.6.23)$$

Решением внешней задачи (2.6.5), (2.6.2), (2.6.4) является функция $u(r,\theta)$, заданная в виде функционального ряда (2.6.22), где коэффициенты B_n вычисляются по формулам (2.6.23).

В нашей задаче коэффициенты B_n можно найти, не прибегая к интегрированию (2.6.23). После подстановки (2.6.22) в (2.6.2) получим

$$\cos\theta + \cos 2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta).$$

Левую часть равенства представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta) + 1 \cdot P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta).$$

Отсюда находим

$$B_0 a^{-1} = -\frac{1}{3}, \;\; B_1 a^{-2} = 1, \;\; B_2 a^{-3} = \frac{4}{3}, \;\; B_n = 0 \text{ при } n \neq \{0,1,2\}. \quad (2.6.24)$$

Подставим (2.6.24) в (2.6.22) и получим решение внешней задачи

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3}ar^{-1}P_0(\cos\theta) + a^2r^{-2}P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}a^3r^{-3}P_2(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{1}{3}ar^{-1} + a^2r^{-2}\cos\theta + \frac{2}{3}a^3r^{-3}(3\cos^2\theta - 1). \qquad (2.6.25)$$

Ответ. 1) Решение внутренней задачи (2.6.21):

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3} + a^{-1}r\cos\theta + \frac{2}{3}a^{-2}r^2(3\cos^2\theta - 1);$$

2) решение внешней задачи (2.6.25):

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3}ar^{-1} + a^2r^{-2}\cos\theta + \frac{2}{3}a^3r^{-3}(3\cos^2\theta - 1).$$

Задача 2.6.1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ с краевым условием $u\Big|_{r=a} = g(\theta)$ внутри шара $D = \{r < a\}$ или вне шара $D_e = \{r > a\}$. При решении задач воспользоваться формулами $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

1. $g(\theta) = 2 - \cos\theta + \cos 2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
2. $g(\theta) = 3\cos^2\theta - \cos 2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
3. $g(\theta) = 2 + 3\cos\theta - \sin^2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
4. $g(\theta) = \cos^2\theta + 3\sin^2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
5. $g(\theta) = 3 - \cos\theta - 2\cos 2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
6. $g(\theta) = \cos\theta - 3\sin^2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
7. $g(\theta) = 3 - \cos 2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
8. $g(\theta) = 1 + \sin^2\theta + \cos 2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
9. $g(\theta) = 2\cos\theta - \sin^2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
10. $g(\theta) = 5 - \cos\theta + 3\cos^2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
11. $g(\theta) = 1 + \cos 3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
12. $g(\theta) = 2\cos 2\theta - \cos\theta, \quad D = \{r < a\}.$
13. $g(\theta) = \cos\theta - \cos 3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
14. $g(\theta) = \cos^2\theta + 2\cos 3\theta, \quad D = \{r < a\}.$
15. $g(\theta) = \cos 3\theta + 2\cos\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
16. $g(\theta) = \cos 3\theta - \cos 2\theta, \quad D = \{r < a\}.$
17. $g(\theta) = 2 - \cos 3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
18. $g(\theta) = 1 + 2\cos 2\theta - \cos\theta, \quad D = \{r < a\}.$
19. $g(\theta) = 2\cos\theta - 3\cos 3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$
20. $g(\theta) = 1 + 2\sin^2\theta + \cos 3\theta, \quad D = \{r < a\}.$

21. $g(\theta) = 3\cos\,\theta - 2\cos\,3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$

22. $g(\theta) = 3 - \cos\,2\theta - \cos\,3\theta, \quad D = \{r < a\}.$

23. $g(\theta) = 2\cos\,2\theta + \cos\,\theta + 1, \quad D_e = \{r > a\}.$

24. $g(\theta) = 4\cos\,\theta - \cos\,3\theta, \quad D = \{r < a\}.$

25. $g(\theta) = 3 + \cos\,3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$

26. $g(\theta) = 3\cos\,3\theta - \cos\,\theta, \quad D = \{r < a\}.$

27. $g(\theta) = \sin^2\,\theta + \cos\,3\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$

28. $g(\theta) = 2\cos\,2\theta - 1, \quad D = \{r < a\}.$

29. $g(\theta) = \cos\,3\theta - 1, \quad D_e = \{r > a\}.$

30. $g(\theta) = \sin^2\,\theta - \cos\,2\theta, \quad D = \{r < a\}.$

Пример 2.6.2. Решить краевые задачи для уравнения Пуассона в сферической системе координат (r, φ, θ)

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\,\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\theta) \tag{2.6.26}$$

с однородным граничным условием

$$u\Big|_{r=a} = 0: \tag{2.6.27}$$

1) внутри шара $D = \{r < a\}$ с требованием ограниченности решения

$$|u| < \infty \quad \text{при} \quad r \to 0 \tag{2.6.28}$$

и

$$f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta; \tag{2.6.29}$$

2) вне шара $D_e = \{r > a\}$ с требованием регулярности решения (2.12)

$$u(r,\varphi,\theta) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{2.6.30}$$

и

$$f(r,\theta) = r^{-4}\cos^2\theta. \tag{2.6.31}$$

Решение. Так как правая часть ДУ (2.6.26) не зависит от переменной φ, решение задачи также не зависит от φ, т.е. $u(r,\theta)$. Тогда уравнение (2.6.26) примет вид

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -f(r,\theta). \tag{2.6.32}$$

Решение задачи можно искать в виде разложения в ряд по собственным функциям оператора Лапласа в области D (или D_e) с граничным условием (2.6.27), которые выражаются через функции Бесселя (см. прил. 3).

Мы же будем искать решение в виде разложения в ряд по собственным функциям той части оператора Лапласа, которая зависит только от переменной θ, а именно по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.6.8), (2.6.11), которые найдены ранее в примере 2.6.1 (см. (2.6.14) и (2.6.15)).

Итак, решение задачи (2.6.32), (2.6.27) ищем в виде функционального ряда с неизвестными коэффициентами $R_n(r)$, $n=\overline{0,\infty}$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)P_n(\cos\theta), \tag{2.6.33}$$

предполагая, что его можно дважды дифференцировать по r и θ.

Известную функцию $f(r,\theta)$ тоже разложим в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)P_n(\cos\theta), \tag{2.6.34}$$

где коэффициенты известны:

$$f_n(r) = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(r,\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{2.6.35}$$

Подставим (2.6.33), (2.6.35) в ДУ (2.6.32) и учтем то, что многочлены Лежандра $P_n(\cos\theta)$ являются собственными функциями задачи (2.6.8), (2.6.11), т.е.

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)\right) = -n(n+1)P_n(\cos\theta).$$

В результате получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n(r)}{dr}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n(r) + f_n(r)\right\}P_n(\cos\theta) = 0.$$

В левой части равенства написано разложение функции, тождественно равной нулю, в ряд Фурье по полной системе собственных функций $P_n(\cos\theta)$, $n=\overline{0,\infty}$, следовательно, коэффициенты $\{\cdot\}$ равны нулю:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n(r)}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}R_n(r)=-f_n(r),\quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (2.6.36)$$

После подстановки (2.6.33) в граничное условие (2.6.27) получим граничное условие для искомых коэффициентов $R_n(r)$:

$$R_n(a)=0,\quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (2.6.37)$$

В случае рассмотрения внутренней задачи в области D нужно добавить условия ограниченности искомых функций (2.6.28)

$$|R_n(r)|<\infty \ \text{ при } \ r\to 0,\quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (2.6.38)$$

В случае рассмотрения внешней задачи в области D_e нужно добавить условие регулярности (2.6.30)

$$R_n(r)=O\left(\frac{1}{r}\right) \ \text{ при } \ r\to\infty,\quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (2.6.39)$$

Краевые задачи (2.6.36), (2.6.37), (2.6.38) (или (2.6.39)) дают возможность найти $R_n(r)$, после подстановки которых в (2.6.33) получаем решение исходной задачи.

В нашей конкретной задаче коэффициенты $f_n(r)$ можно найти, не прибегая к интегрированию (2.6.35).

Рассмотрим сначала *внутреннюю задачу* (2.6.32), (2.6.27), (2.6.28), (2.6.29). Выражение (2.6.34) в случае (2.6.29) примет вид

$$r^2\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)P_n(\cos\theta). \qquad (2.6.40)$$

Левую часть равенства выразим через полиномы Лежандра:

$$\cos^2\theta=AP_0(\cos\theta)+BP_1(\cos\theta)+CP_2(\cos\theta)=A\cdot 1+B\cos\theta+C\frac{3\cos^2\theta-1}{2}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях $\cos\theta$, получим СЛАУ

$$\begin{cases} A-\dfrac{C}{2}=0,\\ B=0,\\ \dfrac{3C}{2}=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3},\\ B=0,\\ C=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда получаем (2.6.40) в следующем виде:

$$r^2\left(\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)P_n(\cos\theta).$$

Находим коэффициенты $f_n(r)$:

$$f_0(r)=\frac{r^2}{3},\quad f_2(r)=\frac{2r^2}{3},\quad f_n(r)\equiv 0 \ \text{ при } \ n\neq\{0,2\}.$$

Все краевые задачи (2.6.36), (2.6.37), (2.6.38) имеют нулевые решения при $n\neq\{0,2\}$:

$$R_n(r)\equiv 0 \ \text{ при } \ n\neq\{0,2\}. \tag{2.6.41}$$

Решим сначала краевую задачу для $R_0(r)$:

$$\left.\begin{aligned}
&R_0''+\frac{2}{r}R_0'=-\frac{r^2}{3}, &(2.6.42)\\
&R_0(a)=0, &(2.6.43)\\
&|R_0(r)|<\infty \ \text{ при } \ r\to 0. &(2.6.44)
\end{aligned}\right\}$$

Общее решение однородного ДУ (2.6.42) найдено в прил. 4 (п. б) при $n=0$ (П4.6):

$$R_0(r)=C_0+D_0r^{-1}.$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.6.42) (ДУ должно иметь коэффициент при старшей производной, равный единице) будем искать методом вариации постоянных в виде

$$R_0(r)=C_0(r)+D_0(r)r^{-1}, \tag{2.6.45}$$

где $C_0(r)$ и $D_0(r)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_0'(r)+D_0'(r)r^{-1}=0,\\ \qquad\quad -D_0'(r)r^{-2}=-r^2/3.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_0'(r)=-\frac{r^3}{3} \ \Rightarrow \ C_0(r)=-\frac{r^4}{12}+\tilde{C}_0,$$

$$D_0'(r)=\frac{r^4}{3} \ \Rightarrow \ D_0(r)=\frac{r^5}{15}+\tilde{D}_0.$$

Подставим полученные выражения в (2.6.45) и получим общее решение ДУ (2.6.42)

$$R_0(r) = \tilde{C}_0 + \tilde{D}_0 r^{-1} - \frac{r^4}{60}. \tag{2.6.46}$$

После подстановки (2.6.46) в граничные условия (2.6.43), (2.6.44) получим решение краевой задачи (2.6.42)—(2.6.44)

$$R_0(r) = \frac{1}{60}(a^4 - r^4). \tag{2.6.47}$$

Найдем решение краевой задачи для $R_2(r)$:

$$\left.\begin{aligned}
&R_2'' + \frac{2}{r}R_2' - \frac{2\cdot 3}{r^2}R_2 = -\frac{2r^2}{3}, && (2.6.48)\\
&R_2(a) = 0, && (2.6.49)\\
&|R_2(r)| < \infty \quad \text{при} \quad r \to 0. && (2.6.50)
\end{aligned}\right\}$$

Общее решение однородного ДУ (2.6.48) найдено в прил. 4 (п. б) при $n = 2$ (П4.6):

$$R_2(r) = C_2 r^2 + D_2 r^{-3}.$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.6.48) (ДУ должно иметь коэффициент при старшей производной, равный единице) будем искать методом вариации постоянных в виде

$$R_2(r) = C_2(r) r^2 + D_2(r) r^{-3}, \tag{2.6.51}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_2'(r) r^2 + D_2'(r) r^{-3} = 0, \\ 2C_2'(r) r - 3D_2'(r) r^{-4} = -2r^2/3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2'(r) = -\frac{2r}{15} \;\Rightarrow\; C_2(r) = -\frac{r^2}{15} + \tilde{C}_2,$$

$$D_2'(r) = \frac{2r^6}{15} \;\Rightarrow\; D_2(r) = \frac{2r^7}{105} + \tilde{D}_2.$$

Подставим полученные выражение в (2.6.51) и получим общее решение ДУ (2.6.48)

$$R_2(r) = \tilde{C}_2(r)r^2 + \tilde{D}_2(r)r^{-3} - \frac{r^4}{21}. \tag{2.6.52}$$

После подстановки (2.6.52) в граничные условия (2.6.49), (2.6.50) получим решение краевой задачи (2.6.48)—(2.6.50)

$$R_2(r) = \frac{a^2r^2 - r^4}{21}. \tag{2.6.53}$$

После подстановки (2.6.47), (2.6.53), (2.6.41) в (2.6.33) получим решение внутренней задачи (2.6.32), (2.6.27), (2.6.28), (2.6.29)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{60}(a^4 - r^4)P_0(\cos\theta) + \frac{1}{21}(a^2r^2 - r^4)P_2(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{60}(a^4 - r^4) + \frac{1}{42}(a^2r^2 - r^4)(3\cos^2\theta - 1). \tag{2.6.54}$$

Теперь рассмотрим *внешнюю задачу* (2.6.32), (2.6.27), (2.6.30), (2.6.31). Выражение (2.6.34) в случае (2.6.31) примет вид

$$r^{-4}\cos^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)P_n(\cos\theta).$$

Левую часть равенства выразим через полиномы Лежандра

$$r^{-4}\left(\frac{1}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)P_n(\cos\theta).$$

Находим коэффициенты $f_n(r)$:

$$f_0(r) = \frac{r^{-4}}{3}, \quad f_2(r) = \frac{2r^{-4}}{3}, \quad f_n(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq \{0,2\}.$$

Все краевые задачи (2.6.36), (2.6.37), (2.6.39) имеют нулевые решения при $n \neq \{0,2\}$:

$$R_n(r) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq \{0,2\}. \tag{2.6.55}$$

Решим сначала краевую задачу для $R_0(r)$:

$$\left.\begin{aligned}
&R_0'' + \frac{2}{r}R_0' = -\frac{r^{-4}}{3}, && (2.6.56)\\
&R_0(2) = 0, && (2.6.57)\\
&R_0(r) = O(1/r) \ \text{ при } \ r \to \infty. && (2.6.58)
\end{aligned}\right\}$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.6.56) ищем методом вариации постоянных в виде

$$R_0(r) = C_0(r) + D_0(r)r^{-1}, \tag{2.6.59}$$

где $C_0(r)$ и $D_0(r)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_0'(r) + D_0'(r)r^{-1} = 0, \\ \qquad\quad - D_0'(r)r^{-2} = -r^{-4}/3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_0'(r) = -\frac{r^{-3}}{3} \;\Rightarrow\; C_0(r) = \frac{r^{-2}}{6} + \tilde{C}_0,$$

$$D_0'(r) = \frac{r^{-2}}{3} \;\Rightarrow\; D_0(r) = -\frac{r^{-1}}{3} + \tilde{D}_0.$$

Подставим полученные выражения в (2.6.59) и получим общее решение ДУ (2.6.56)

$$R_0(r) = \tilde{C}_0(r) + \tilde{D}_0(r)r^{-1} - \frac{r^{-2}}{6}. \tag{2.6.60}$$

После подстановки (2.6.60) в (2.6.57) и (2.6.58) получим решение краевой задачи (2.6.56)—(2.6.58):

$$R_0(r) = \frac{a^{-1}r^{-1} - r^{-2}}{6}. \tag{2.6.61}$$

Найдем решение краевой задачи для $R_2(r)$:

$$\left.\begin{aligned} & R_2'' + \frac{2}{r}R_2' - \frac{2\cdot 3}{r^2}R_2 = -\frac{2r^{-4}}{3}, && (2.6.62)\\ & R_2(a) = 0, && (2.6.63)\\ & R_2(r) = O(1/r) \ \text{ при } \ r \to \infty. && (2.6.64) \end{aligned}\right\}$$

Общее решение неоднородного ДУ (2.6.62) ищем методом вариации постоянных в виде

$$R_2(r) = C_2(r)r^2 + D_2(r)r^{-3}, \tag{2.6.65}$$

где $C_2(r)$ и $D_2(r)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_2'(r)r^2 + D_2'(r)r^{-3} = 0, \\ 2C_2'(r)r - 3D_2'(r)r^{-4} = -2r^{-4}/3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2'(r) = -\frac{2r^{-5}}{15} \;\Rightarrow\; C_2(r) = \frac{r^{-4}}{30} + \tilde{C}_2,$$

$$D_2'(r) = \frac{2}{15} \;\Rightarrow\; D_2(r) = \frac{2r}{15} + \tilde{D}_2.$$

Подставим полученные выражения в (2.6.65) и получим общее решение ДУ (2.6.62)

$$R_2(r) = \tilde{C}_2(r)r^2 + \tilde{D}_2(r)r^{-3} + \frac{r^{-2}}{6}. \qquad (2.6.66)$$

После подстановки (2.6.66) в (2.6.63), (2.6.64) получим решение краевой задачи (2.6.62)—(2.6.64):

$$R_2(r) = \frac{r^{-2} - ar^{-3}}{6}. \qquad (2.6.67)$$

Решение внешней задачи получим после подстановки (2.6.55), (2.6.61), (2.6.67) в (2.6.33):

$$u(r,\theta) = \frac{1}{6}(a^{-1}r^{-1} - r^{-2})P_0(\cos\theta) + \frac{1}{6}(r^{-2} - ar^{-3})P_2(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{6}(a^{-1}r^{-1} - r^{-2}) + \frac{1}{12}(r^{-2} - ar^{-3})(3\cos^2\theta - 1). \qquad (2.6.68)$$

Ответ. 1) Решение внутренней задачи:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{60}(a^4 - r^4) + \frac{1}{42}(a^2r^2 - r^4)(3\cos^2\theta - 1);$$

2) решение внешней задачи:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{6}(a^{-1}r^{-1} - r^{-2}) + \frac{1}{12}(r^{-2} - ar^{-3})(3\cos^2\theta - 1).$$

Замечание. Решением внутренней краевой задачи

$$\triangle u = -f(r,\theta), \quad D = \{r < a\},$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\theta),$$

где $f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta$, $g(\theta) = \cos 2\theta + \cos\theta$, является сумма решений (2.6.21) и (2.6.54), полученных в примерах 2.6.1 и 2.6.2:

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3} + a^{-1}r\cos\theta + \frac{2}{3}a^{-2}r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{60}(a^4 - r^4) +$$

$$+\frac{1}{42}(a^2r^2 - r^4)(3\cos^2\theta - 1).$$

Решением внешней краевой задачи

$$\triangle u = -f(r,\theta), \quad D_e = \{r > a\},$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\theta),$$

где $f(r,\theta) = r^{-4}\cos^2\theta$, $g(\theta) = \cos 2\theta + \cos\theta$, является сумма решений (2.6.25) и (2.6.68):

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3}ar^{-1} + a^2r^{-2}\cos\theta + \frac{2}{3}a^3r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{6}(a^{-1}r^{-1} - r^{-2}) +$$

$$+\frac{1}{12}(r^{-2} - ar^{-3})(3\cos^2\theta - 1).$$

Задача 2.6.2. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона $\triangle u = -f(r,\theta)$ с однородным краевым условием $u\Big|_{r=a} = 0$ внутри шара $D = \{r < a\}$ или вне шара $D_e = \{r > a\}$.

1. $f(r,\theta) = 5r^{-3}\cos 3\theta, \quad D_e = \{r > a\}$.
2. $f(r,\theta) = 5r^2\cos 3\theta, \quad D = \{r < a\}$.
3. $f(r,\theta) = 3r^{-4}\cos 2\theta, \quad D_e = \{r > a\}$.
4. $f(r,\theta) = 3r^2\cos 2\theta, \quad D = \{r < a\}$.
5. $f(r,\theta) = 5r^{-3}(\cos\theta + \cos 3\theta), \quad D_e = \{r > a\}$.
6. $f(r,\theta) = 5r^2(\cos\theta - \cos 3\theta), \quad D = \{r < a\}$.
7. $f(r,\theta) = 9r^{-6}(2 + \cos 2\theta), \quad D_e = \{r > a\}$.

8. $f(r, \theta) = 18r^3(2 - \cos\, 2\theta), \quad D = \{r < a\}.$

9. $f(r, \theta) = 5r^{-3}(\cos\, \theta - 2\cos\, 3\theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

10. $f(r, \theta) = 5r^2(\cos\, \theta + 2\cos\, 3\theta), \quad D = \{r < a\}.$

11. $f(r, \theta) = r^{-5}(2 + \cos\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

12. $f(r, \theta) = 2r(2 - \cos\, \theta), \quad D = \{r < a\}.$

13. $f(r, \theta) = 9r^{-6}\cos\, 2\theta, \quad D_e = \{r > a\}.$

14. $f(r, \theta) = 3r^2(\sin^2\, \theta + 3), \quad D = \{r < a\}.$

15. $f(r, \theta) = 3r^{-4}(\cos\, 2\theta - 1), \quad D_e = \{r > a\}.$

16. $f(r, \theta) = 9r(\cos\, 2\theta + 2), \quad D = \{r < a\}.$

17. $f(r, \theta) = 5r^{-5}(\cos\, 3\theta - \cos\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

18. $f(r, \theta) = 5r^3(\cos\, 3\theta + \cos\, \theta), \quad D = \{r < a\}.$

19. $f(r, \theta) = 2r^{-5}(3 - \cos\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

20. $f(r, \theta) = 9r^4(2 - \cos\, 2\theta), \quad D = \{r < a\}.$

21. $f(r, \theta) = 9r^{-6}\sin^2\, \theta, \quad D_e = \{r > a\}.$

22. $f(r, \theta) = 2r^2(3 + \cos\, \theta), \quad D = \{r < a\}.$

23. $f(r, \theta) = 5r^{-4}(\cos\, 3\theta + 2\cos\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

24. $f(r, \theta) = 9r^3(\cos\, 2\theta - 3), \quad D = \{r < a\}.$

25. $f(r, \theta) = 3r^{-4}(2 + \sin^2\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

26. $f(r, \theta) = 2r(2 + \cos\, \theta), \quad D = \{r < a\}.$

27. $f(r, \theta) = 3r^{-4}(3 + \cos\, 2\theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

28. $f(r, \theta) = 5r^3(\cos\, 3\theta + \cos\, \theta), \quad D = \{r < a\}.$

29. $f(r, \theta) = 2r^{-5}(5 + \cos\, \theta), \quad D_e = \{r > a\}.$

30. $f(r, \theta) = 3r^2(\cos\, 2\theta + 3), \quad D = \{r < a\}.$

2.7. Метод конформных отображений решения краевых задач для уравнения Лапласа

Определение. Взаимно-однозначное отображение одной плоской области D евклидова пространства на другую G называется *конформным*, если оно осуществляется с помощью непрерывной функции $w = f(z)$ и в каждой точке обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов [7].

Теорема 2.7.1. Всякая однолистная (т.е. взаимно-однозначная) аналитическая в односвязной области D функция $w = f(z)$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$ совершает конформное отображение области $D \in \mathbb{C}$ на область $f(D)$ той же связности.

Теорема 2.7.2 (*принцип соответствия границ*). Пусть $w = f(z)$ — однолистное конформное отображение односвязной области D с границей ∂D на ограниченную односвязную область G с границей ∂G, где ∂D и ∂G — замкнутые кусочно-гладкие контуры. Тогда $f(z)$ непрерывно продолжается на ∂D и осуществляет взаимно-однозначное отображение замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{G}$ с сохранением направления обхода по границе.

Теорема 2.7.3 (*принцип симметрии*). Пусть $w = f(z)$ — однолистное конформное отображение односвязной области D на односвязную область G, а граница ∂D содержит прямолинейный отрезок Γ (или дугу окружности), который отображается в γ-прямолинейный отрезок или дугу окружности. Тогда существует аналитическое продолжение $f(z)$ в область D^*, симметричную области D относительно Γ, которое совершает конформное отображение области D^* на G^*, симметричную области G относительно γ.

Теорема 2.7.4. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — однозначная, аналитическая в области D функция, тогда $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — гармонические в D.

Теорема 2.7.5 (*инвариантность относительно конформных отображений*). Пусть $u = u(x,y) = u(z)$ — гармоническая в односвязной области D функция и $z = \varphi(\mathrm{w})$ — однолистное конформное отображение области G на область D. Тогда сложная функция $u = u(\varphi(\mathrm{w}))$ гармонична в G.

Замечание. Задачу Неймана можно свести к задаче Дирихле для сопряженной гармонической функции $v(z)$, так как из условий Коши—Римана следует

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{z\in\partial D} = \frac{\partial v}{\partial \bar{s}}\Big|_{z\in\partial D} = g(z) \ \Rightarrow \ v(z)\Big|_{z\in\partial D} = \int\limits_{z_0}^{z} g(z)ds.$$

Решаем задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \triangle v = 0, \quad z \in D, \\ v\Big|_{z\in\partial D} = \int\limits_{z_0}^{z} g(z)ds, \end{cases}$$

затем по известной гармонической функции $v(x, y)$ находим ее сопряженную:

$$u(x, y) = \int\limits_{z_0}^{z} v_x dy - v_y dx + \text{const}.$$

Пример 2.7.1. Найти образ G области D при отображении w=w(z) :

1) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z < 2\}$ при отображении $\mathrm{w} = (1+i)z + 1$;

2) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$ при отображении $\mathrm{w} = 1/z$;

3) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad |z - 3i| > 3, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $\mathrm{w} = 1/z$;

4) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 2\}$ при отображении $\mathrm{w} = 1/z$.

Решение. 1) Линейная функция $\mathrm{w} = az + b$ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на $\bar{\mathbb{C}}$. Согласно принципу соответствия границ (см. теорему 2.7.2) при конформном отображении найдем образ границы AB области D (рис. 2.7.1, a). Параметрические уравнения границы $AB : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$, где параметр t изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Образ границы $A'B'$: $\mathrm{w} = (1+i)(t+i2)+1 = (t-1)+i(t+2) = u(t)+iv(t)$, т.е. параметрические уравнения $A'B' : \begin{cases} u = t - 1 \\ v = t + 2 \end{cases}$, где по-прежнему t изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Исключим параметр и получим уравнение прямой $v - u = 3$.

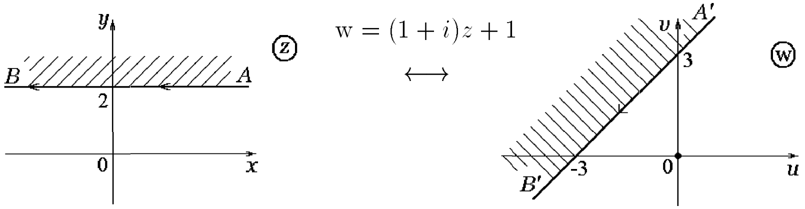

Рис. 2.7.1, *а*

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} - \operatorname{Re}\mathrm{w} < 3\}$.

2) Функция $\mathrm{w} = 1/z$ обладает следующими свойствами:

а) функция $\mathrm{w}=1/z$ однолистна в расширенной плоскости $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\bar{\mathbb{C}}$ и конформно отображает $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$;

б) функция $\mathrm{w} = 1/z$ является суперпозицией симметрии относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат (инверсии) и симметрии относительно действительной оси: $\mathrm{w}_1 = 1/\bar{z}$, $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}_1$.

Определение. Две точки z_1 и z_2 называются *симметричными (инверсными)* относительно окружности $|z| = R$, если лежат на одном луче, выходящем из точки $z = 0$ и $|z_1| \cdot |z_2| = R^2$. Эти точки связаны соотношением $z_1 = R^2/\bar{z}_2 = R^2 z_2/|z_2|^2$.

в) при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ образом любой окружности является окружность, если прямую линию на расширенной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ рассматривать как окружность, проходящую через бесконечно удаленную точку $z = \infty$;

г) функция $\mathrm{w} = 1/z$ семейство прямых $\operatorname{Re} z = x = 1/2a$ отображает в окружности $(u-a)^2 + v^2 = a^2$, где $\mathrm{w} = u + iv$, а семейство прямых $\operatorname{Im} z = y = 1/2b$ отображает в окружности $u^2 + (v+b)^2 = b^2$ (рис. 2.7.1, *б*).

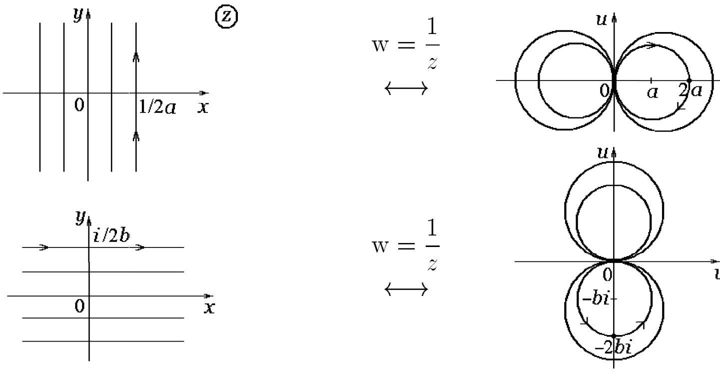

Рис. 2.7.1, *б*

Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ (рис. 2.7.1, *в*).

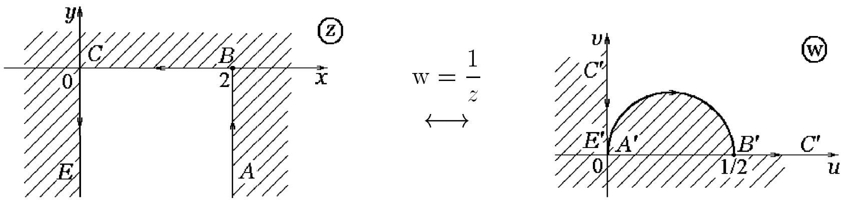

Рис. 2.7.1, *в*

Сначала рассмотрим участок границы на действительной оси $BC: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где параметр t изменяется от 2 до 0. Параметрические уравнения образа $B'C': \begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $2 \geq t \geq 0$, причем имеет место соответствие точек $B = 2 \leftrightarrow B' = 1/2$ и $C = 0 \leftrightarrow C' = \infty$.

Параметрические уравнения части границы $CE: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, где параметр t меняется от 0 до $-\infty$. Параметрические уравнения образа $C'E': \begin{cases} u = 0 \\ v = -1/t \end{cases}$, где $0 > t > -\infty$, причем имеет место соответствие точек $C = 0 \leftrightarrow C' = \infty$ и $E = \infty \leftrightarrow E' = 0$.

Граница AB принадлежит прямой $x = 2$. Учитывая, что $x = \operatorname{Re} z$, запишем это уравнение в виде $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 2$ и заменим $z = 1/\mathrm{w}$, где $\mathrm{w} = u + iv$:

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{w}} + \frac{1}{\bar{\mathrm{w}}}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(\bar{\mathrm{w}} + \mathrm{w}) = 2\mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u = 2(u^2 + v^2) \;\Rightarrow\; \left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Отсюда следует, что прямая $x = 2$ отображается в окружность $\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Функция $\mathrm{w} = 1/z$ является композицией двух отображений: симметрии относительно единичной окружности и симметрии относительно действительной оси, следовательно, точки границы AB, лежащие в $\operatorname{Im} z < 0$, должны отобразиться в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \mathrm{w} > 0$, как изображено на рис. 2.7.1, *в*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0, \quad |\mathrm{w} - 1/4| > 1/4\}$.

3) Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ (рис. 2.7.1, *г*).

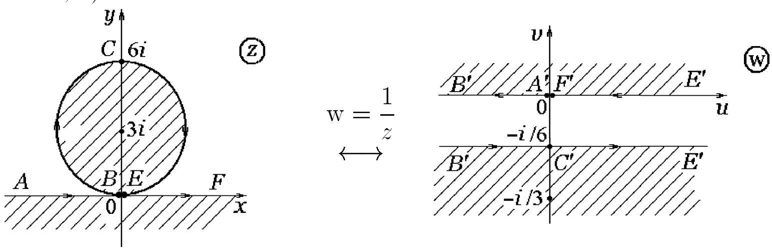

Рис. 2.7.1, *г*

Параметрические уравнения части границы AB имеют вид $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где $-\infty < t < 0$, ее образ также лежит на действительной оси $A'B' : \begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $-\infty < t < 0$, причем имеет место соответствие точек $A = -\infty \;\leftrightarrow\; A' = 0$ и $B = 0 \;\leftrightarrow\; B' = -\infty$.

Часть границы BCE задается уравнением $|z - 3i| = 3$ и отображается на кривую, определяемую уравнением

$$\left|\frac{1}{\mathrm{w}} - 3i\right| = 3 \;\Leftrightarrow\; |1 - 3i\mathrm{w}| = |3\mathrm{w}| \;\Leftrightarrow\; \left|\mathrm{w} + \frac{i}{3}\right| = |\mathrm{w}|.$$

Последнее уравнение задает геометрическое место точек комплексной плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$, равноудаленных от точек $-i/3$ и 0, т.е. прямую $\operatorname{Im}\mathrm{w} = -1/6$.

Часть границы $EF : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где $0 < t < +\infty$ отображается в $E'F'$: $\begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $0 < t < +\infty$, причем $E = 0 \leftrightarrow E' = +\infty$ и $F = +\infty \leftrightarrow F' = 0$.

Принимая во внимание принцип соответствия границ (см. теорему 2.7.2) с сохранением направления обхода, получим ответ.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad -1/6 < \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$.

4) Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ (рис. 2.7.1, ∂).

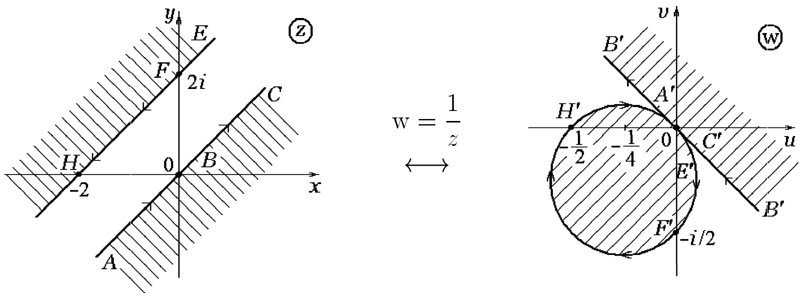

Рис. 2.7.1, ∂

Часть границы $ABC : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$, $-\infty < t < +\infty$ отобразится в прямую $A'B'C' : \begin{cases} u = 1/2t \\ v = -1/2t \end{cases}$, $-\infty < t < +\infty$, проходящую через начало координат, причем $A = \infty \leftrightarrow A' = 0$, $B = 0 \leftrightarrow B' = \infty$, $C = \infty \leftrightarrow C' = 0$.

Часть границы EFH — прямая, заданная уравнением $y - x = 2$. Учитывая, что $y = \operatorname{Im} z$ и $x = \operatorname{Re} z$, запишем это уравнение в виде $\dfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) - \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) = 2$. Найдем образ этой прямой при отображении $\mathrm{w} = 1/z$:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\mathrm{w}}-\frac{1}{\bar{\mathrm{w}}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{w}}+\frac{1}{\bar{\mathrm{w}}}\right)=2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2i}(\bar{\mathrm{w}}-\mathrm{w})-\frac{1}{2}(\bar{\mathrm{w}}+\mathrm{w})=2\mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -v-u=2(u^2+v^2) \;\Leftrightarrow\; \left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

Это окружность с центром в точке $-(1+i)/4$ радиуса $\sqrt{2}/4$. Принимая во внимание принцип соответствия границ с сохранением направления обхода, получим ответ.

Ответ. $G=\{\mathrm{w}:\mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad |\mathrm{w}+(1+i)/4|>\sqrt{2}/4,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w}+\mathrm{Re}\,\mathrm{w}<0\}$.

Задача 2.7.1. Найти образ G области D при отображении w=w(z).

1. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Re}\,z<1/2,\ \ \mathrm{Im}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

2. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(2-i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Im}\,z<1,\ \ \mathrm{Re}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

3. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z<0,\ \ \mathrm{Im}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

4. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<2\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z-i|>1,\ \ |z-2i|<2\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

5. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(2-i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z-1|>1,\ \ |z-2|<2\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

6. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z<0,\ \ \mathrm{Im}\,z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

7. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(2+i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Im}\,z<1/2,\ \ \mathrm{Re}\,z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

8. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z+i|>1,\ \ |z+2i|<2\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

9. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<2\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$

   2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Re}\,z<1,\ \ \mathrm{Im}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

10. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+2i)z+1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

11. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1+2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1| > 1, \quad |z+2| < 2\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

12. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1-2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Im}\, z < 0, \quad \mathrm{Re}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

13. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1-2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

14. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 2\}, \quad \mathrm{w} = (2+i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

15. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1+i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

16. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1-2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-i| > 1, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

17. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1+2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Im}\, z < 0, \quad \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

18. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1+2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \mathrm{Re}\, z < 2, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

19. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 2\}, \quad \mathrm{w} = (2-i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1| > 1, \quad \mathrm{Re}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

20. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1-i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-2i| > 2, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

21. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (2+i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-2| > 2, \quad \mathrm{Re}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

22. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1+i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+i| > 1, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

23. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (2-i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z + 2i| > 2, \ \ \mathrm{Im}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

24. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 2\}, \quad \mathrm{w} = (1 - 2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ -2 < \mathrm{Im}\, z < -1, \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

25. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (2 + i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ 2 < \mathrm{Re}\, z < 4, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

26. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1 - i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ -1 < \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

27. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > -1\}, \quad \mathrm{w} = (1 + i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z + 1| > 1, \ \ \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

28. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1 - 2i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1, \ \ \mathrm{Im}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

29. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 2\}, \quad \mathrm{w} = (2 + i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z + 2| > 2, \ \ \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

30. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, z < 2\}, \quad \mathrm{w} = (2 - i)z + 1;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ 0 < \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

Пример 2.7.2. Найти дробно-линейную функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую дополнительным условиям:

1) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < -1\},$ $\mathrm{w}(i) = -1, \ \ \mathrm{w}(0) = -2;$

2) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0, \ \ \mathrm{Im}\, z < 0\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ |\mathrm{w}| < 2,$ $\mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}, \quad \mathrm{w}(0) = -2, \ \ \mathrm{w}(-i) = 0;$

3) $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z < 0, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ |\mathrm{w}| < 1,$ $\mathrm{Im}\, \mathrm{w} > \mathrm{Re}\, \mathrm{w}\}, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1 + i)/2, \ \ \mathrm{w}(-1) = 0.$

Решение.

Определение. Функция

$$\mathrm{w} = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где} \ \ c \neq 0, \ \ ad - bc \neq 0,$$

называется *дробно-линейной.*

Дробно-линейная функция обладает следующими свойствами:

а) дробно-линейная функция осуществляет взаимно-однозначное (однолистное) и конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на $\bar{\mathbb{C}}$;

б) дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (если считать прямую линию окружностью бесконечно большого радиуса);

в) дробно-линейная функция не изменяет двойное отношение любых попарно различных точек.

Определение. *Двойным (ангармоническим) отношением* четырех точек z, z_1, z_2, z_3 называется выражение

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3}. \tag{2.7.1}$$

1) Воспользуемся этими свойствами при решении первой задачи.

Пусть точка $z_1 = i$ отображается в точку $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}(i) = -1$, а точка $z_2 = 0 \;\leftrightarrow\; \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}(0) = -2$.

При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности (или прямой), переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности (или прямой). Рассмотрим точку $z_3 = \infty$, симметричную точке $z_2 = 0$ относительно границы $|z| = 1$ области D.

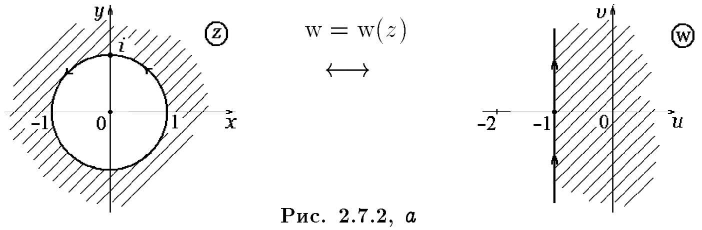

Рис. 2.7.2, *а*

Точка $z_3 = \infty$ должна отображаться в точку $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}(\infty) = 0$, симметричную точке $\mathrm{w}_2 = -2$ относительно границы $\operatorname{Re}\mathrm{w} = -1$ области G (рис. 2.7.2, *а*).

Предположим, что точка z — произвольная точка области D, а w — ее образ, тогда по свойству сохранения двойного отношения (2.7.1) получим

$$\frac{z - 0}{i - 0} : \frac{z - \infty}{i - \infty} = \frac{\mathrm{w} + 2}{-1 + 2} : \frac{\mathrm{w} - 0}{-1 - 0}.$$

После преобразования этого выражения получим искомое отображение
$$-\frac{\mathrm{w}+2}{\mathrm{w}}=\frac{z}{i} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{w}=\frac{2}{iz-1}.$$

Ответ. $\mathrm{w}=2/(iz-1)$.

2) Пусть точка $z_1=0$ отображается в точку $\mathrm{w}_1=\mathrm{w}(0)=-2$, а точка $z_2=-i \;\leftrightarrow\; \mathrm{w}_2=\mathrm{w}(-i)=0$. Заметим, что свойство сохранения углов в точке $z_1=0$ и $\mathrm{w}_1=-2$ выполняется (рис. 2.7.2, *б*).

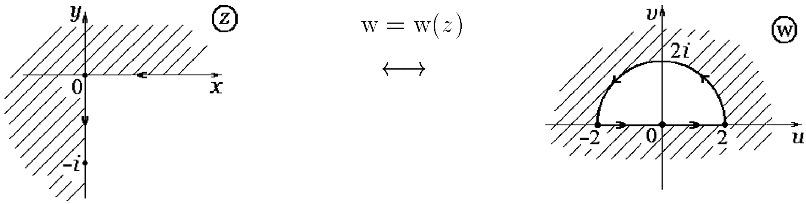

Рис. 2.7.2, ***б***

Потребуем, чтобы точка $z_3=\infty$ отображалась в $\mathrm{w}_3=\mathrm{w}(\infty)=2$ (свойство сохранения углов будет выполнено). Искомая дробно-линейная функция находится из свойства инвариантности двойного отношения попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (2.7.1):
$$\frac{z+i}{0+i}:\frac{z-\infty}{0-\infty}=\frac{\mathrm{w}-0}{-2-0}:\frac{\mathrm{w}-2}{-2-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{z+i}{i}=\frac{2\mathrm{w}}{\mathrm{w}-2} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{w}=\frac{2(z+i)}{z-i}.$$

Ответ. $\mathrm{w}=2(z+i)/(z-i)$.

3) Выберем три точки $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=\infty$ так, чтобы при последовательном обходе вдоль границы область D оставалась слева. Потребуем, чтобы дробно-линейная функция $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$ отобразила эти точки в $\mathrm{w}_1=0$, $\mathrm{w}_2=\sqrt{2}(1+i)/2$, $\mathrm{w}_3=-\sqrt{2}(1+i)/2=-\mathrm{w}_2$ (рис. 2.7.2, *в*).

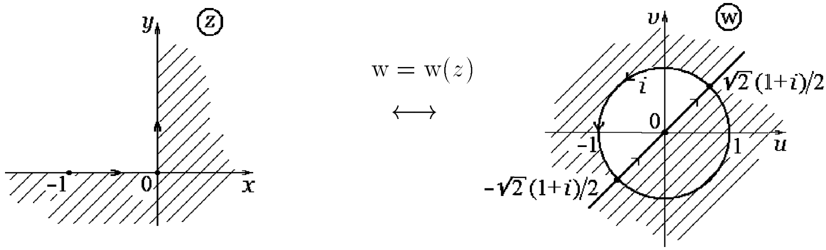

Рис. 2.7.2, в

Заметим, что свойство сохранения углов в угловых точках будет выполнено. Воспользуемся инвариантностью двойного отношения попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (2.7.1):

$$\frac{z-0}{-1-0} : \frac{z-\infty}{-1-\infty} = \frac{\mathrm{w}-\mathrm{w}_2}{0-\mathrm{w}_2} : \frac{\mathrm{w}+\mathrm{w}_2}{0+\mathrm{w}_2} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{(\mathrm{w}-\mathrm{w}_2)\mathrm{w}_2}{\mathrm{w}_2(\mathrm{w}+\mathrm{w}_2)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{w} = \mathrm{w}_2\frac{z+1}{1-z}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2} \cdot \dfrac{z+1}{1-z}.$

Задача 2.7.2. Найти дробно-линейную функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую дополнительным условиям.

1. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 1\}$, $\quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,
   $\mathrm{w}(i) = 2$, $\ \mathrm{w}(2i) = 0$.

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$,
   $\mathrm{w}(1) = 0$, $\ \mathrm{w}(0) = -2$.

2. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 1\}$, $\quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,
   $\mathrm{w}(1) = 2i$, $\ \mathrm{w}(2) = 0$.

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \ \operatorname{Im} z < 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \ \operatorname{Re} \mathrm{w} > -\operatorname{Im} \mathrm{w}\}$,
   $\mathrm{w}(-1) = 0$, $\ \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1-i)/2$.

3. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 1\},$

$\mathrm{w}(0) = -2i, \quad \mathrm{w}(1) = i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > \operatorname{Im}\mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2\sqrt{2}(1+i).$

4. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 1\},$

$\mathrm{w}(0) = 2, \quad \mathrm{w}(1) = 1.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -5i.$

5. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 2\},$

$\mathrm{w}(0) = 4i, \quad \mathrm{w}(3i) = 2i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -1.$

6. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\},$

$\mathrm{w}(2i) = 2, \quad \mathrm{w}(4i) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2i.$

7. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$

$\mathrm{w}(1) = 3i, \quad \mathrm{w}(2) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < \operatorname{Im}\mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1+i)/2.$

8. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < -2\},$

$\mathrm{w}(0) = -4i, \quad \mathrm{w}(2) = -2i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < -\operatorname{Im}\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(-1+i)$.

9. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 1\}$,

$\mathrm{w}(0) = 2, \quad \mathrm{w}(2) = 1$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > -\operatorname{Im}\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5\sqrt{2}(1-i)/2$.

10. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 3\}$,

$\mathrm{w}(\infty) = 6i, \quad \mathrm{w}(2i) = 3i$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > \operatorname{Im}\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1+i)/2$.

11. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,

$\mathrm{w}(3i) = 2, \quad \mathrm{w}(6i) = 0$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2i$.

12. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\}$,

$\mathrm{w}(2) = 3i, \quad \mathrm{w}(4) = 0$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3$.

13. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < -4\}$,

$\mathrm{w}(0) = -8i, \quad \mathrm{w}(3) = -4i$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -4i$.

14. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 2\},$
$\mathrm{w}(0) = 4, \quad \mathrm{w}(3) = 2.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0\},$
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5i.$

15. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 2\},$
$\mathrm{w}(0) = 4i, \quad \mathrm{w}(i) = 2i.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad -\operatorname{Re}\mathrm{w} > \operatorname{Im}\mathrm{w}\},$
$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1+i)/2.$

16. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$
$\mathrm{w}(i) = 3, \quad \mathrm{w}(2i) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < -\operatorname{Im}\mathrm{w}\},$
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1+i).$

17. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\},$
$\mathrm{w}(3) = 2i, \quad \mathrm{w}(6) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < -\operatorname{Im}\mathrm{w}\},$
$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1-i)/2.$

18. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < -4\},$
$\mathrm{w}(0) = -8i, \quad \mathrm{w}(2) = -4i.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad -\operatorname{Re}\mathrm{w} > \operatorname{Im}\mathrm{w}\},$
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(1-i).$

19. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 4\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 3\},$
$\mathrm{w}(0) = 6, \quad \mathrm{w}(4) = 3.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 5,\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 5i$.

20. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 4\}$, $\quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 3\}$,

$\mathrm{w}(0) = 6i,\quad \mathrm{w}(4i) = 3i$.

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$,

$\mathrm{w}(i) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 1$.

21. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im} z > 2\}$, $\quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 3\}$,

$\mathrm{w}(2i) = 3,\quad \mathrm{w}(4i) = 0$.

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 2,\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 2i$.

22. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 4\}$, $\quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 3\}$,

$\mathrm{w}(4) = 3i,\quad \mathrm{w}(8) = 0$.

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 3,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 3$.

23. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 3\}$, $\quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < -2\}$,

$\mathrm{w}(0) = -4i,\quad \mathrm{w}(3) = -2i$.

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 4,\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < -\operatorname{Im}\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(-1 + i)$.

24. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 3\}$, $\quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 4\}$,

$\mathrm{w}(0) = 8,\quad \mathrm{w}(3) = 4$.

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad \operatorname{Im} z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 5,\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < \operatorname{Im}\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = 5\sqrt{2}(1 - i)/2$.

25. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 4\},$

$\mathrm{w}(\infty) = 0, \quad \mathrm{w}(3i) = 4i.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < \operatorname{Im}\mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1+i)/2.$

26. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im} z > -1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1\},$

$\mathrm{w}(-i) = 1, \quad \mathrm{w}(0) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > \operatorname{Re}\mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1+i)/2.$

27. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| > 1\},$

$\mathrm{w}(2) = -1, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 1.$

28. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < -1\},$

$\mathrm{w}(1) = -1, \quad \mathrm{w}(\infty) = -2.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = i.$

29. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Im} z < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| > 1\},$

$\mathrm{w}(i) = 1, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > \operatorname{Re}\mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1-i).$

30. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| > 2\},$

$\mathrm{w}(1) = 2i, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 2,\quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0,\quad \mathrm{w}(0) = -2$.

Пример 2.7.3. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$:

1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad z \notin [i,\, i+2],\quad z \notin [3+i,\, +\infty + i]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad z \notin \{|z| = 1,\quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z \le 0\}\}$.

Решение. Степенная функция $\mathrm{w} = z^n$, $n \in N$ обладает следующими свойствами:

а) степенная функция однозначна и аналитична в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

б) областями однолистности являются клинья $D_k = \left\{z:\ z \in \mathbb{C}\ \ \dfrac{2\pi k}{n} < \arg z < \dfrac{2\pi(k+1)}{n}\right\}$, $k = \overline{0, n-1}$. Каждая из областей D_k отображается на плоскость с разрезом по положительной действительной оси $G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$, если считать главное значение аргумента определенным в пределах $0 < \arg z < 2\pi$;

в) в точке $z = 0$ нарушается локальная однолистность, так как ее производная $\mathrm{w}' = nz^{n-1}$ обращается в ноль (точка $z = 0$ — точка ветвления).

В частности, функция $\mathrm{w} = z^2$ однолистно и конформно отображает области $D_0 = \{z:\ z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z > 0\}$ и $D_1 = \{z:\ z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z < 0\}$ на плоскость с разрезом по положительной действительной оси $G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$. Соответственно однозначная нулевая ветвь квадратного корня $z = \sqrt[2]{\mathrm{w}} = \sqrt{|\mathrm{w}|}\, e^{i \arg \mathrm{w}/2}$ отображает G на D_0, а однозначная первая ветвь квадратного корня $z = \sqrt[2]{\mathrm{w}} = \sqrt{|\mathrm{w}|}\, e^{i(\arg \mathrm{w} + 2\pi)/2}$ отображает G на D_1.

1) Рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = (z - i)$, $\mathrm{w}_2 = (z - i)^2$, $\mathrm{w}_3 = \dfrac{\mathrm{w}_2 - 9}{\mathrm{w}_2 - 4}$, $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\mathrm{w}_3}$, которая представлена на рис. 2.7.3, *а*, где под символом $\sqrt[2]{\cdot}$ понимается нулевая ветвь квадратного корня.

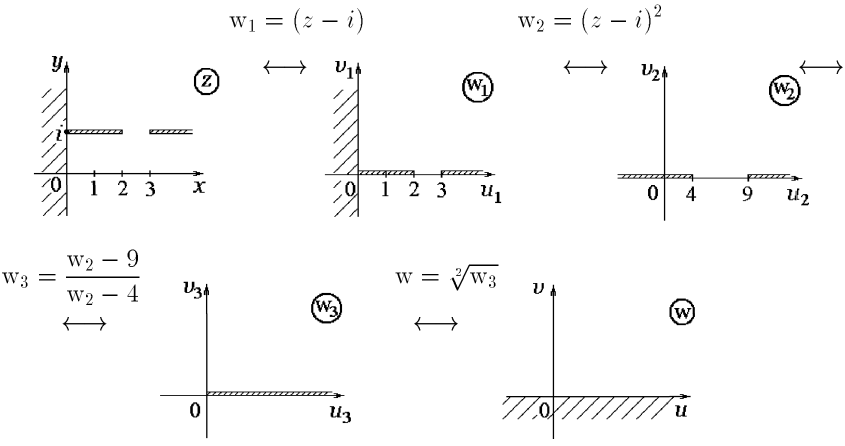

Рис. 2.7.3, *а*

Ответ. $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\dfrac{(z-i)^2-9}{(z-i)^2-4}}$.

2) Сначала найдем дробно-линейную функцию, отображающую окружность $|z| = 1$ на действительную ось $\operatorname{Im}\tilde{\mathrm{w}} = 0$ так, чтобы точки $z_1 = -\sqrt{2}(1+i)/2$, $z_2 = 1$, $z_3 = \sqrt{2}(1+i)/2$ отобразились соответственно в точки $\tilde{\mathrm{w}}_1 = 0$, $\tilde{\mathrm{w}}_2 = 1$, $\tilde{\mathrm{w}}_3 = \infty$ (рис. 2.7.3, *б*). Воспользуемся свойством дробно-линейной функции сохранять двойное отношение попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (2.7.1):

$$\frac{z-1}{z_1-1} : \frac{z-z_3}{z_1-z_3} = \frac{\tilde{\mathrm{w}}-1}{0-1} : \frac{\tilde{\mathrm{w}}-\infty}{0-\infty} \;\Leftrightarrow\; \frac{z-1}{z_1-1}\cdot\frac{2z_1}{z+z_1} = 1-\tilde{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \tilde{\mathrm{w}} = \frac{(z-z_1)(z_1+1)}{(z+z_1)(1-z_1)}.$$

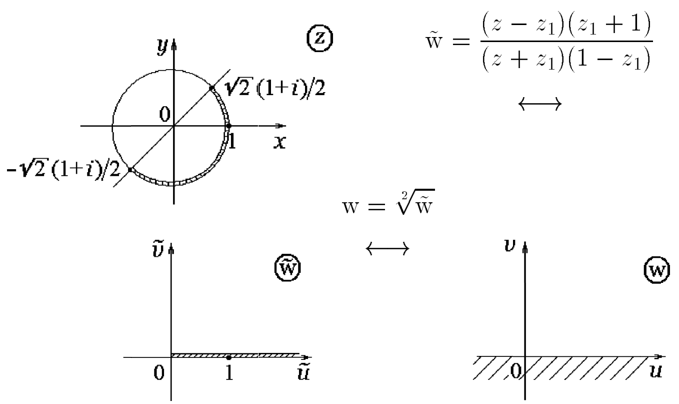

Рис. 2.7.3, *б*

Далее применяем нулевую ветвь квадратного корня $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\tilde{\mathrm{w}}} = \sqrt{|\tilde{\mathrm{w}}|}\, e^{i \arg \tilde{\mathrm{w}}/2}$, где $0 < \arg \tilde{\mathrm{w}} < 2\pi$.

Ответ. $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\dfrac{(z + \sqrt{2}(1+i)/2)(1 - \sqrt{2}(1+i)/2)}{(z - \sqrt{2}(1+i)/2)(1 + \sqrt{2}(1+i)/2)}}$.

Задача 2.7.3. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$. Символом $[z_1, z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2.

1. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z > 0,\ \ z \notin [1, 1 + i]\}$.
2. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin [0, 1]\}$.
3. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin [-\infty, 0],\ \ z \notin [1, +\infty]\}$.
4. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin \{\, |z| = 1,\ \ 0 \le \arg z \le \pi \,\}\}$.
5. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin \{\, |z| = 1,\ \ |\arg z| \le \pi/2 \,\}\}$.
6. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Re} z < 0,\ \ z \notin [-1 + i, i]\}$.
7. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin [0, i]\}$.
8. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ z \notin [-i\infty, 0],\ \ z \notin [i, +i\infty]\}$.
9. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Re} z < 0,\ \ z \notin [-\infty, -2],\ \ z \notin [-1, 0]\}$.
10. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z > 0,\ \ z \notin [0, i],\ \ z \notin [2i, +i\infty]\}$.
11. $D = \{z : z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z < 0,\ \ z \in [-1, -1 - i]\}$.

12. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[-1,0]\}$.

13. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[-\infty,-1],\quad z\notin[0,+\infty]\}$.

14. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[0,\sqrt{2}(1+i)/2]\}$.

15. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin\{\,|z|=1,\quad -\pi\le\arg z\le 0\,\}\}$.

16. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Re}z>0,\quad z\in[i,1+i]\}$.

17. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[-i,0]\}$.

18. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[-i\infty,-i],\quad z\notin[0,+i\infty]\}$.

19. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin\{\,|z|=1,\quad \operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z\ge 0\,\}\}$.

20. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin\{\,|z|=1,\quad \operatorname{Re}z\le 0\,\}\}$.

21. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z>0,\quad z\notin[\,0,\ \sqrt{2}(-1+i)/2\,]\}$.

22. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Im}z<0,\quad z\notin[\,-i\infty,\ -2i\,],\quad z\notin[-i,0]\,\}$.

23. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[-\infty-i,\ -i],\quad z\notin[1-i,\ +\infty-i]\,\}$.

24. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Re}\ >0,\quad z\notin[0,\ 1],\quad z\notin[2,\ +\infty]\,\}$.

25. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Im}z>0,\quad z\notin[1,\ 1+i],\quad z\notin[1+2i,\ 1+i\infty]\,\}$.

26. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Im}z+\operatorname{Re}z>0,\quad z\notin[0,\ \sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

27. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\in[0,\ \sqrt{2}(-1+i)/2]\,\}$.

28. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin\{\,|z|=1,\quad \operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z\ge 0\,\}\}$.

29. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<0,\ \ z\notin[-\infty-i,\ -2-i],\ \ z\notin[-1-i,\ -i]\,\}$.

30. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad z\notin[1-i\infty,\ 1],\quad z\notin[1+i,\ 1+i\infty]\,\}$.

Пример 2.7.4. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G :

1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -2<\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z<-1\}$,
$G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad |\mathrm{w}|<1,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w}>0\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -2<\operatorname{Im}z<-1,\quad \operatorname{Re}z<0\}$,
$G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad |\mathrm{w}|<1,\quad \operatorname{Re}\mathrm{w}<0,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w}>0\}$;

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z+1-i|>\sqrt{2},\quad |z+2-2i|<2\sqrt{2}\}$,
$G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Re}\mathrm{w}<0,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w}<0\}$;

4) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z+1|>1,\quad |z+2|<2,\quad \operatorname{Im}z<0\}$,
$G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad |\mathrm{w}|<1,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w}>0\}$;

5) $D = \{z :\ z \in \mathbb{C} \quad |z+1+i| > \sqrt{2}, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w} :\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

Решение. Показательная функция $\mathrm{w} = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ обладает следующими свойствами:

а) показательная функция однозначна и аналитична в $\mathbb{C}$, $z = \infty$ является существенно особой точкой;

б) областями однолистности являются полосы $D_k = \{z :\ z \in \mathbb{C} \quad 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Каждая из областей D_k отображается на плоскость с разрезом по положительной действительной оси $G = \{\mathrm{w} :\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$. Соответственно каждая однозначная ветвь обратной функции $z = \operatorname{Ln} \mathrm{w} = \ln |\mathrm{w}| + i(\arg \mathrm{w} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (при фиксированном k) отображает G на D_k, если считать главное значение аргумента определенным в пределах $0 < \arg \mathrm{w} < 2\pi$;

в) прямая $\operatorname{Re} z = x = a$ в области D_k отображается в окружность с выколотой точкой $|\mathrm{w}| = e^a$, $\operatorname{Re} \mathrm{w} \neq e^a$, а прямая $\operatorname{Im} z = y = b$ в области D_k отображается в луч $\mathrm{w} = e^x e^{ib}$, $-\infty < x < +\infty$.

1) Рассмотрим композицию отображений (рис. 2.7.4, *а*). Сначала применим линейное отображение $\mathrm{w}_1 = (z + 2i)e^{-i\pi/4}\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ — сдвиг на $2i$, поворот вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\pi/4$ и растяжение с коэффициентом $\pi\sqrt{2}/2$.

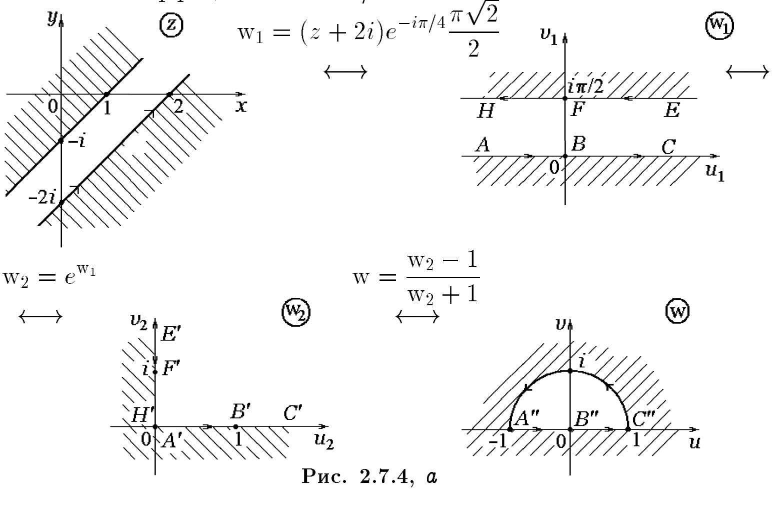

Рис. 2.7.4, ***а***

Затем применим показательную функцию $w_2 = e^{w_1}$, которая отображает прямую ABC в луч $A'B'C'$, а часть границы EFH — в луч $E'F'H'$. Последнее дробно-линейное отображение $w = (w_2 - 1)/(w_2 + 1)$ отображает точки $H' = A' = 0$, $B' = 1$, $C' = E' = \infty$ соответственно в точки $A'' = -1$, $B'' = 0$, $C'' = 1$.

Ответ. $w = \dfrac{\exp[\pi(1-i)(z+2i)/2] - 1}{\exp[\pi(1-i)(z+2i)/2] + 1}$.

2) Рассмотрим композицию отображений, изображенную на рис. 2.7.4, *б*. Сначала применим линейное отображение $w_1 = (z + 3i)\dfrac{\pi}{2}$ — сдвиг на $3i$, растяжение с коэффициентом $\pi/2$.

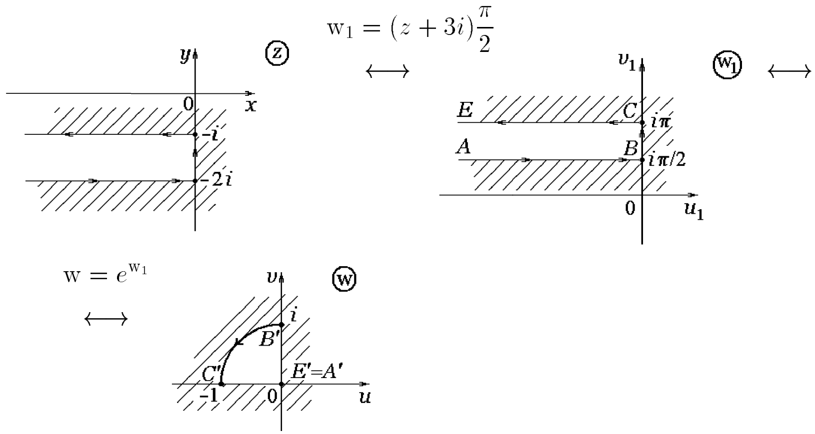

Рис. 2.7.4, *б*

Затем применяем показательную функцию $w = e^{w_1}$. Часть границы AB отображается в точки луча, аргументы у которых равны $\pi/2$, действительно, $AB : \begin{cases} v_1 = \pi/2 \\ u_1 = t \end{cases}$, $-\infty < t < 0 \leftrightarrow A'B' : \ w = e^t e^{i\pi/2}$, $-\infty < t < 0$.

Отрезок BC отобразится в точки единичной окружности — $BC : \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = t \end{cases}$, $\pi/2 < t < \pi \ \leftrightarrow \ B'C' : \ w = e^{it}$, $\pi/2 < t < \pi$. Отрезок $CE : \begin{cases} u_1 = t \\ v_1 = \pi \end{cases}$, $0 > t > -\infty$ отобразится в точки луча, у которых аргументы равны $\pi \ \leftrightarrow \ C'E' : \ w = e^t e^{i\pi}$, $0 > t > -\infty$.

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left((z+3i)\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\mathrm{w} = e^{(z+3i)\pi/2} = e^{z\pi/2}e^{i3\pi/2} = -ie^{z\pi/2}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений: $\mathrm{w}_1 = \dfrac{\pi}{2}z$, $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, $\mathrm{w} = -i\mathrm{w}_2$.

3) Рассмотрим следующую композицию отображений, изображенную на рис. 2.7.4, *в*. Сначала произведем поворот вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\pi/4$ $\mathrm{w}_1 = e^{-i\pi/4}z$. Затем применим функцию $\mathrm{w}_2 = 1/\mathrm{w}_1$, растяжение $\mathrm{w}_3 = 2\sqrt{2}\pi\mathrm{w}_2$ и показательную функцию $\mathrm{w} = \exp(\mathrm{w}_3)$.

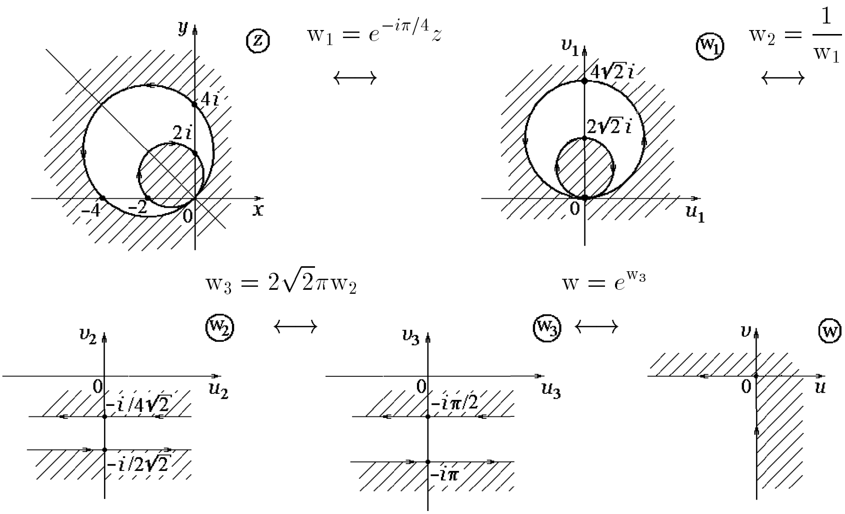

Рис. 2.7.4, в

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left(\dfrac{2\sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}}{z}\right) = \exp\left(\dfrac{2\pi(1+i)}{z}\right)$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полосу $\{\tilde{\mathrm{w}}:\ \tilde{\mathrm{w}}\in\mathbb{C}\ \ -\pi<\operatorname{Im}\tilde{\mathrm{w}}<-\pi/2\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1=4i$, $z_2=-4$, $z_3=-2$ в точки $\tilde{\mathrm{w}}_1=-\pi(1+i)$, $\tilde{\mathrm{w}}_2=\pi(1-i)$, $\tilde{\mathrm{w}}_3=-i\pi/2$.

4) Рассмотрим следующую композицию отображений, изображенную на рис. 2.7.4, *г*. Сначала применим функцию $\mathrm{w}_1=1/z$, затем произведем сдвиг полуполосы $\{\mathrm{w}_1:\ \mathrm{w}_1\in\mathbb{C}\ \ -1/2<\operatorname{Re}\mathrm{w}_1<-1/4,\ \operatorname{Im}\mathrm{w}_1>0\}$ вправо на $1/2$, поворот вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\pi/2$ и растяжение с коэффициентом, равным 4π, $\mathrm{w}_2=$ $=(\mathrm{w}_1+1/2)e^{i\pi/2}4\pi=(\mathrm{w}_1+1/2)4\pi i$.

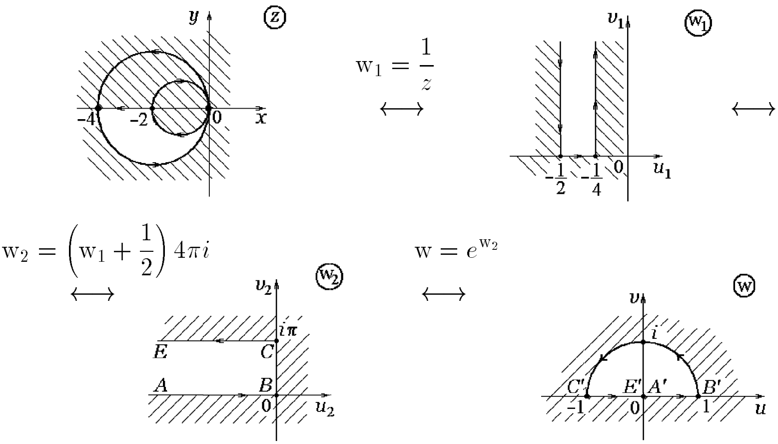

Рис. 2.7.4, *г*

Теперь применим показательную функцию $\mathrm{w}=e^{\mathrm{w}_2}$.

Граница $AB:\begin{cases}u_2=t\\ v_2=0\end{cases}$, $-\infty<t<0$ отобразится в точки луча $A'B':\ \mathrm{w}=e^t,\ -\infty<t<0$. Граница $BC:\begin{cases}u_2=0\\ v_2=t\end{cases}$, $0<t<\pi$ отобразится в точки единичной окружности $B'C':\ \mathrm{w}=e^{it},\ 0<t<\pi$, а отрезок границы $CE:\begin{cases}u_2=t\\ v_2=\pi\end{cases}$, $0>t>-\infty$ отобразится в точки луча $C'E':\ \mathrm{w}=e^te^{i\pi}$, $0>t>-\infty$, у которых аргумент равен π.

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left(4\pi i\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\mathrm{w} = e^{4\pi i\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right)} = e^{4\pi i/z}\, e^{2\pi i} = e^{4\pi i/z}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений: $\mathrm{w}_1 = 1/z$, $\mathrm{w}_2 = 4\pi i \mathrm{w}_1$, $\mathrm{w} = e^{\mathrm{w}_2}$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полуполосу $\{\tilde{\mathrm{w}} : \tilde{\mathrm{w}} \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im}\tilde{\mathrm{w}} < \pi, \quad \operatorname{Re}\tilde{\mathrm{w}} < 0\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1 = -(1+i)$, $z_2 = -2$, $z_3 = -4$ в точки $\tilde{\mathrm{w}}_1 = -1$, $\tilde{\mathrm{w}}_2 = 0$, $\tilde{\mathrm{w}}_3 = i\pi$.

5) Сначала отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1+i| > \sqrt{2}, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$ на полосу шириной $\pi/2$ $\{\mathrm{w}_2 : \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C} \ \ 0 < \operatorname{Im}\mathrm{w}_2 < \pi/2\}$ с помощью композиции отображений $\mathrm{w}_1 = e^{i\pi/4}z$, $\mathrm{w}_2 = \sqrt{2}\pi/\mathrm{w}_1$. Затем произведем сдвиг полосы $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}_2 - i\pi$ и применим показательную функцию $\mathrm{w} = e^{\mathrm{w}_3}$, которая отображает полосу $\{\mathrm{w}_3 : \mathrm{w}_3 \in \mathbb{C} \ -\pi < \operatorname{Im}\mathrm{w}_3 < -\pi/2\}$ на область $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$ (рис. 2.7.4, *д*).

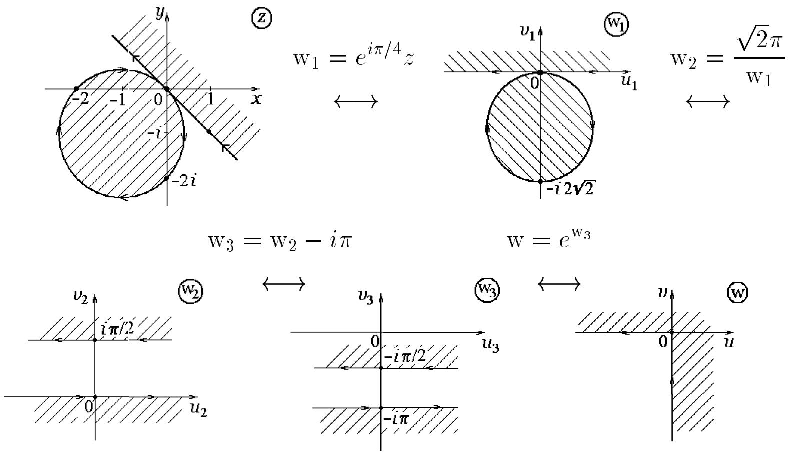

Рис. 2.7.4, ***д***

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left(\dfrac{\pi(1-i)}{z} - i\pi\right).$

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\mathrm{w} = e^{\pi(1-i)/z - i\pi} = e^{\pi(1-i)/z}\, e^{-i\pi} = -e^{\pi(1-i)/z}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений: $\mathrm{w}_1 = 1/z$, $\mathrm{w}_2 = \pi(1-i)\mathrm{w}_1$, $\mathrm{w}_3 = e^{\mathrm{w}_2}$, $\mathrm{w} = -\mathrm{w}_3$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полосу $\{\tilde{\mathrm{w}} : \tilde{\mathrm{w}} \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Im}\tilde{\mathrm{w}} < -\pi/2\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -2$ в точки $\tilde{\mathrm{w}}_1 = -i\pi/2$, $\tilde{\mathrm{w}}_2 = -\pi(1+i)$, $\tilde{\mathrm{w}}_3 = \pi(1-i)$.

Задача 2.7.4. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G.

1. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0\}$.
2. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Im} z < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$.
3. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - i| > 1, \quad |z - 2i| < 2\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$.
4. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad |z - 2| < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$.
5. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$.
6. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Im} z < 2\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\}$.
7. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$.
8. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad |z - 2| < 2\}$,
   $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}\mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$.

9. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z-i| > 1,\quad |z-2i| < 2,\quad \mathrm{Re}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0\}$.

10. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z-i| > 1,\quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$.

11. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad -2 < \mathrm{Re}\, z < -1\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$.

12. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad 1 < \mathrm{Im}\, z < 2,\quad \mathrm{Re}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0,\quad \mathrm{Im}\, w > 0\}$.

13. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+i| > 1,\quad |z+2i| < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

14. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+1| > 1,\quad |z+2| < 2,\quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

15. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+1| > 1,\quad \mathrm{Re}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

16. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad -2 < \mathrm{Im}\, z < -1\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

17. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad 1 < \mathrm{Re}\, z < 2,\quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$.

18. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+1| > 1,\quad |z+2| < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$.

19. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+i| > 1,\quad |z+2i| < 2,\quad \mathrm{Re}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0\}$.

20. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z+i| > 1,\quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

21. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad 1 < \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0\}$.

22. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad -2 < \mathrm{Im}\, z < -1,\quad \mathrm{Re}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,\quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0,\quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < 0\}$.

23. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \operatorname{Re} z < -1, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

24. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1| > 1, \quad |z-2| < 2, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\}$.

25. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1-i| > \sqrt{2}, \quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

26. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\}$.

27. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1-i| > \sqrt{2}, \quad |z-2-2i| < 2\sqrt{2}\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

28. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1+i| > \sqrt{2}, \quad |z-2+2i| < 2\sqrt{2}\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

29. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-i| > 1, \quad |z-2i| < 2, \quad \operatorname{Re} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

30. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1-i| > \sqrt{2}, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

Пример 2.7.5. Найти образ G области D при отображении с помощью функции Жуковского $\mathrm{w} = (z + 1/z)/2$:

1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \quad z \notin [i/2, i]\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [1, 2], \quad z \notin [-i\infty, -i]\}$.

Найти какую-нибудь функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$:

3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \ \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0, \ z \notin [\sqrt{2}(1-i)/6, \sqrt{2}(1-i)/2]\}$;

4) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \ \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0, \ z \notin [\sqrt{2}(1-i)/2, \sqrt{2}(1-i)]\}$.

Решение.

Определение. Дробно-рациональная функция вида

$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

называется *функцией Жуковского.*

Функция Жуковского обладает следующими свойствами:

а) функция Жуковского аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$, в которых имеет полюсы первого порядка;

б) функция Жуковского локально однолистна во всех точках расширенной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}$, кроме точек $z = \pm 1$, в которых $\mathrm{w}' = 0$;

в) областями однолистности являются области $|z| < 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$;

г) образом окружности $|z| = r$ является эллипс с фокусами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. При $r \to 1$ эллипс вырождается в разрез $z \in [-1, 1]$, проходимый дважды при изменении $0 \le \varphi \le 2\pi$;

д) образами лучей $\arg z = \alpha$ являются ветви гипербол с фокусами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ и асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg} \alpha$. При $\alpha \to 0$ гипербола вырождается в разрез $[1, +\infty]$, проходимый дважды при изменении $0 < r < +\infty$. При $\alpha \to \pi$ гипербола вырождается в разрез $[-\infty, -1]$, проходимый дважды;

е) верхняя и нижняя полуплоскости $D_1 = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z < 0\}$ отображаются функцией Жуковского на плоскости с разрезами $G_1 = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-\infty, -1], \quad \mathrm{w} \notin [1, +\infty]\}$;

ж) круг единичного радиуса с центром в начале координат $D_3 = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}$ и его внешность $D_4 = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1\}$ отображаются функцией Жуковского на плоскость с разрезом $G_2 = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-1, 1]\}$.

1) Рассмотрим область $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \ z \notin [i/2, i]\}$, изображенную на рис. 2.7.5, *а*.

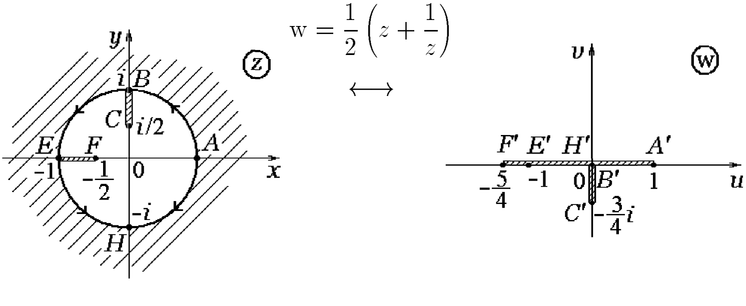

Рис. 2.7.5, *а*

Функция Жуковского отображает круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом $[-1, 1]$. Найдем образ части границы $BC : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $1/2 \le t \le 1$. Образ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{it + 1/it}{2} = \dfrac{i(t^2 - 1)}{2t}$, $1/2 \le t \le 1$ и представляет собой отрезок мнимой оси $B'C'$, по которому проходят дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Образ части границы $EF : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $-1 \le t \le -1/2$ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{t + 1/t}{2} = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$, $-1 \le t \le -1/2$ и представляет собой отрезок $E'F'$ отрицательной действительной оси, который проходится дважды в разных направлениях. В итоге образом области D является область G, представляющая собой точки комплексной плоскости с разрезами, изображенная на рис. 2.7.5, *а*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-5/4, 1], \quad \mathrm{w} \notin [-3i/4, 0]$.

2) Рассмотрим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ |z| > 1, \ z \notin [1, 2], \ z \notin [-i\infty, -i]\}$, изображенную на рис. 2.7.5, *б*.

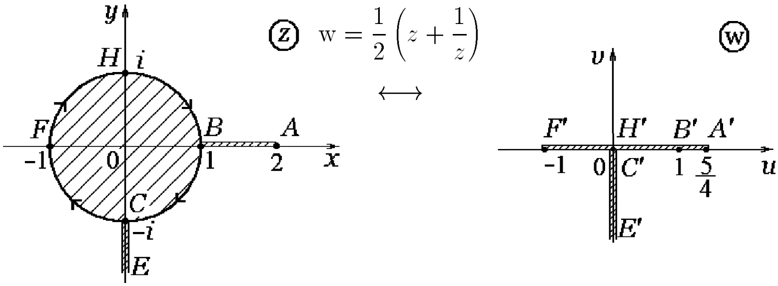

Рис. 2.7.5, ***б***

Функция Жуковского отображает внешность круга $|z| > 1$ на плоскость с разрезом $[-1, 1]$. Найдем образ границы $AB : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $1 \le t \le 2$. Образ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{t + 1/t}{2} = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$, $1 \le t \le 2$ и представляет собой отрезок положительной действительной оси $A'B'$, проходимый дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Образ части границы $CE: \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$, $-\infty \le t \le -1$ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{it + 1/it}{2} = \dfrac{i(t^2-1)}{2t}$, $-\infty \le t \le -1$ и представляет собой мнимую полуось $[-i\infty, 0]$, которая проходится дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Таким образом, область D отображается на область G, представляющую собой точки комплексной плоскости с разрезами, изображенными на рис. 2.7.5, *б*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-1, 5/4], \quad \mathrm{w} \notin [-i\infty, 0]$.

3) Рассмотрим композицию отображений, изображенную на рис. 2.7.5, *в*.

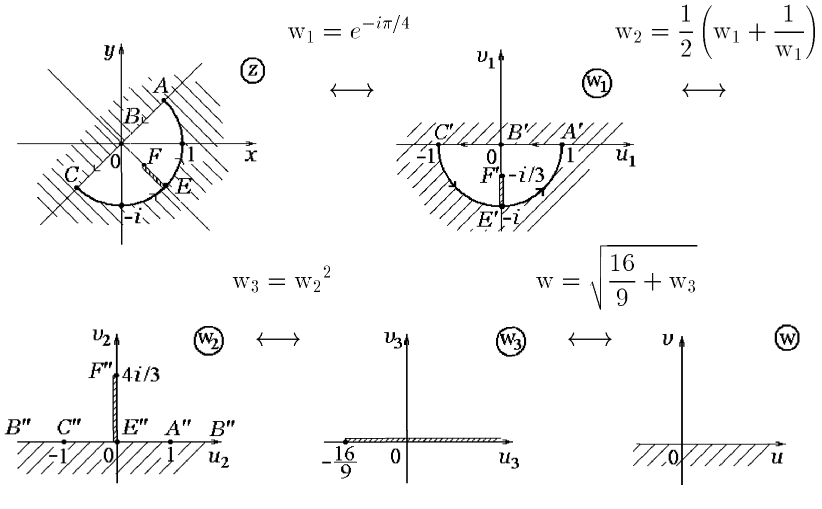

Рис. 2.7.5, в

Найдем модули чисел $F = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{6} \Rightarrow |F| = 1/3$ и $E = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow |E| = 1$ для того, чтобы определить их образы при повороте $\mathrm{w}_1 = e^{-i\pi/4}$ на угол $\pi/4$ по часовой стрелке. Функция Жуковского $\mathrm{w}_2 = \dfrac{\mathrm{w}_1 + 1/\mathrm{w}_1}{2}$ отображает полукруг $\{\mathrm{w}_1 : \mathrm{w}_1 \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}_1| < 1, \ \operatorname{Im} \mathrm{w}_1 < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\mathrm{w}_2 : \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w}_2 > 0\}$, а точки разреза

$w_1 \in [-i, -i/3]$ — на разрез $w_2 \in [0, 4i/3]$. Далее возводим в квадрат $w_3 = w_2^2$, делаем сдвиг $\dfrac{16}{9} + w_3$ и применяем нулевую ветвь квадратного корня, отображающую плоскость с разрезом по положительной действительной оси на верхнюю полуплоскость $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} w > 0\}$. Искомое отображение имеет вид

$$w = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/4}\,z + \frac{1}{e^{-i\pi/4}\,z}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + i\frac{(-iz + 1/z)^2}{4}}.$$

Ответ. $w = \sqrt{\dfrac{16}{9} + i\dfrac{(-iz + 1/z)^2}{4}}$.

4) Рассмотрим композицию отображений, изображенную на рис. 2.7.5, *г*.

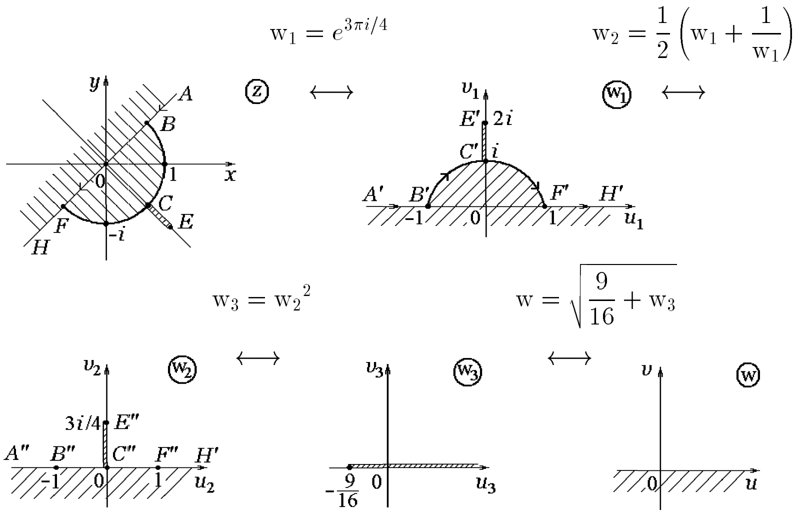

Рис. 2.7.5, *г*

Найдем модули чисел $C = \dfrac{\sqrt{2}(1 - i)}{2} \Rightarrow |C| = 1$ и $E = \dfrac{\sqrt{2}(1 - i)}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $|E| = 2$ для того, чтобы определить их образ при повороте

$w_1 = e^{3\pi i/4}$ на угол $3\pi/4$ против часовой стрелки. Функция Жуковского $w_2 = \dfrac{w_1 + 1/w_1}{2}$ отображает область $\{w_1 : w_1 \in \mathbb{C} \ \ |w_1| > 1, \operatorname{Im} w_1 > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w_2 : w_2 \in \mathbb{C} \ \ \operatorname{Im} w_2 > 0\}$, а точки разреза $w_1 \in [i, 2i]$ — на разрез по мнимой оси $w_2 \in [0, 3i/4]$. Далее применяем степенную функцию $w_3 = w_2^2$, сдвиг $w_3 + \dfrac{9}{16}$ и нулевую ветвь квадратного корня, отображающую плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси на верхнюю полуплоскость $G = \{w : w \in \mathbb{C} \ \ \operatorname{Im} w > 0\}$. Искомое отображение имеет вид

$$w = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\left(e^{i3\pi/4}\, z + \frac{1}{e^{i3\pi/4}\, z}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{i(-iz + 1/z)^2}{4}}.$$

Ответ. $w = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{i(-iz + 1/z)^2}{4}}$.

Задача 2.7.5. 1) Найти образ G области D при отображении с помощью функции Жуковского $w = \dfrac{z + 1/z}{2}$. Символом $[z_1, z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2 комплексной плоскости.

2) Найти какую-нибудь функцию $w = w(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G = \{w : w \in \mathbb{C} \ \ \operatorname{Im} w > 0\}$.

1. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ z \notin [0, 1], \ \ z \notin [i/2, i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ \operatorname{Im} z > 0, \ \ z \notin [i/2, i]\}$.
2. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| > 1, \ \ z \notin [1, 2], \ \ z \notin [i, 2i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| > 1, \ \ \operatorname{Im} z > 0, \ \ z \notin [i, 2i]\}$.
3. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ z \in [1/2, 1], \ \ z \notin [i/2, i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ \operatorname{Im} z < 0, \ \ z \notin [-i, -i/2]\}$.
4. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| > 1, \ \ z \notin [1, +\infty], \ \ z \notin [i, 2i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| > 1, \ \ \operatorname{Im} z < 0, \ \ z \notin [-2i, -i]\}$.
5. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ z \notin [1/2, 1], \ \ z \notin [0, -i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ \operatorname{Re} z > 0, \ \ z \notin [1/2, 1]\}$.

6. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [i, 2i]\,\}$;

   2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad z \notin [1, 2]\,\}$.

7. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [1/2, 1],\quad z \notin [-i, -i/2]\,\}$;

   2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad z \notin [-1, -1/2]\,\}$.

8. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [i, +i\infty]\,\}$;

   2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad z \notin [-2, -1]\,\}$.

9. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1, 0],\quad z \notin [-i, -i/2]\,\}$;

   2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
   $z \notin [\sqrt{2}(1+i)/4, \sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

10. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [-2i, -i]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
    $z \notin [\sqrt{2}(1+i)/2, 3\sqrt{2}(1+i)/4]\,\}$.

11. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1, -1/2],\quad z \notin [-i, -i/2]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z < 0,$
    $z \notin [-\sqrt{2}(1+i)/2, -\sqrt{2}(1+i)/4]\,\}$.

12. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-\infty, -1],\quad z \notin [-2i, -i]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z < 0,$
    $z \notin [-6(1+i)/4, -\sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

13. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1, -1/2],\quad z \notin [0, i]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0,$
    $z \notin [\sqrt{2}(-1+i)/2, \sqrt{2}(-1+i)/4]\,\}$.

14. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [1, 2],\quad z \notin [-2i, -i]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0,$
    $z \notin [3\sqrt{2}(-1+i)/4, \sqrt{2}(-1+i)/2]\,\}$.

15. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-i, -i/2],\quad z \notin [i/2, i]\,\}$;

    2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0,$
    $z \notin [\sqrt{2}(1-i)/4, \sqrt{2}(1-i)/2]\,\}$.

16. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [1,+\infty]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1-i)/2, 3\sqrt{2}(1-i)/4]\,\}$.

17. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1,-1/2],\quad z \notin [0,1]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z > 0,\quad z \notin [i/3, i]\,\}$.

18. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [1,2]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z > 0,\quad z \notin [i, 3i]\,\}$.

19. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1,-1/2],\quad z \notin [1/2,1]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z < 0,\quad z \notin [-i, -i/3]\,\}$.

20. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2i,-i],\quad z \notin [i,+i\infty]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z < 0,\quad z \notin [-3i, -i]\,\}$.

21. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-i,0],\quad z \notin [i/2,i]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad z \notin [1/3, 1]\,\}$.

22. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2i,-i],\quad z \notin [i,2i]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad z \notin [1, 3]\,\}$.

23. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1,-1/2],\quad z \notin [1/2,1],$
$z \notin [i/2, i]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad z \notin [-1, -1/3]\,\}$.

24. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-\infty,-1],\quad z \notin [1,2]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Re} z < 0,\quad z \notin [-3, -1]\,\}$.

25. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-1,0],\quad z \notin [1/2,1]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1+i)/6, \sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

26. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad z \notin [-2,-1],\quad z \notin [1,2],\quad z \notin [i,2i]\,\}$;

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| > 1,\quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1+i)/2, \sqrt{2}(1+i)]\,\}$.

27. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad |z| < 1,\quad z \notin [-i,-i/2],\quad z \notin [0,i]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [-\sqrt{2}(1+i)/2, -\sqrt{2}(1+i)/6]\,\}.$

28. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-i\infty, -i], \quad z \notin [i, 2i]\,\};$
2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [-\sqrt{2}(1+i), -\sqrt{2}(1+i)/2]\,\}.$

29. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-i, -i/2], \quad z \notin [i/2, i], \quad z \notin [1/2, 1]\,\};$
2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(-1+i)/2, \sqrt{2}(-1+i)/6]\,\}.$

30. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-2, -1], \quad z \notin [-2i, -i], \quad z \notin [i, 2i]\,\};$
2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(-1+i), \sqrt{2}(-1+i)/2]\,\}.$

Пример 2.7.6. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$:

1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2],$
$z \notin [-1 + i3\pi/2, i3\pi/2]\,\}; \quad \mathrm{w} = \operatorname{sh} z;$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i],$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 - i]\,\}; \quad \mathrm{w} = \sin z.$

Символом $[z_1, z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2 комплексной плоскости.

Решение. Заметим, что функция $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ состоит из композиции показательной функции $\mathrm{w}_1 = e^z$ и функции Жуковского $\mathrm{w} = \dfrac{\mathrm{w}_1 + 1/\mathrm{w}_1}{2}$. Выразим остальные тригонометрические функции через гиперболический косинус:

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz), \quad \sin z = \operatorname{ch}(iz - i\pi/2), \quad \operatorname{sh} z = -i\operatorname{ch}(z + i\pi/2).$$

1) Воспользуемся формулой $\operatorname{sh} z = -i\operatorname{ch}(z + i\pi/2)$ и рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = z + i\pi/2$, $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, $\mathrm{w}_3 = (\mathrm{w}_2 + 1/\mathrm{w}_2)/2$, $\mathrm{w} = -i\mathrm{w}_3$, изображенную на рис. 2.7.6, *а*.

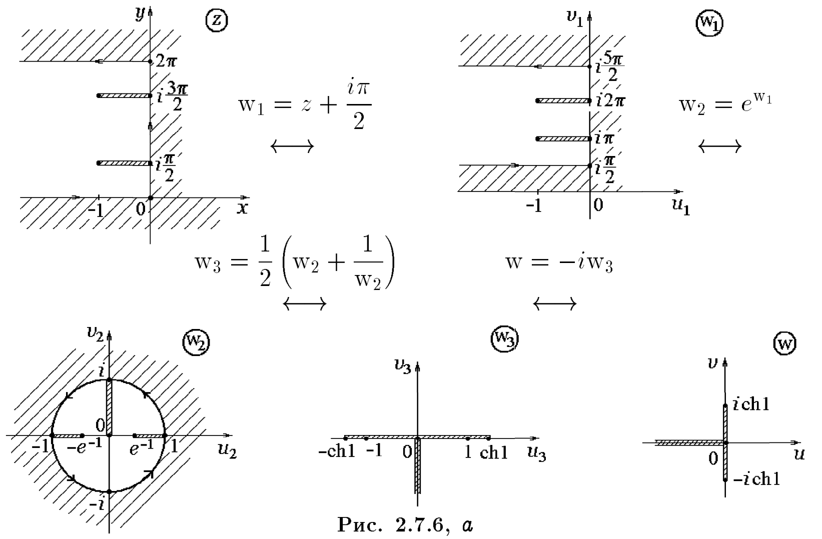

Рис. 2.7.6, *а*

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-\infty, 0], \quad \mathrm{w} \notin [-i\,\mathrm{ch}\,1, i\,\mathrm{ch}\,1]\,\}$.

2) Воспользуемся формулой $\sin z = \mathrm{ch}(iz - i\pi/2)$ и рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = i(z - \pi/2)$, $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_2 + 1/\mathrm{w}_2)/2$ (рис. 2.7.6, *б*).

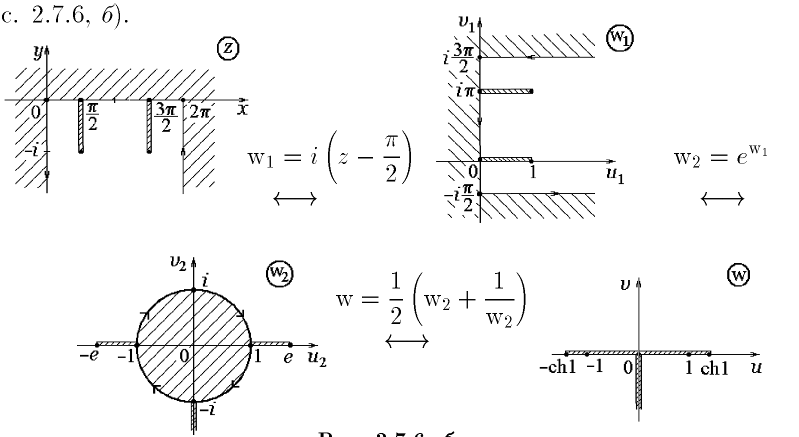

Рис. 2.7.6, *б*

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-\operatorname{ch} 1, \operatorname{ch} 1], \quad \mathrm{w} \notin [-i\infty, 0]\}$.

Задача 2.7.6. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$.

1. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\}$,
   $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
2. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 + i]\}$,
   $\mathrm{w} = \cos z$.
3. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\}$,
   $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
4. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 + i]\}$,
   $\mathrm{w} = \sin z$.
5. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]$,
   $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
6. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 - i]\}$,
   $\mathrm{w} = \cos z$.
7. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]\}$,
   $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
8. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 - i]\}$,
   $\mathrm{w} = \sin z$.
9. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i\pi/2, 1 - i\pi/2]\}$,
   $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
10. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\}$,
    $\mathrm{w} = \cos z$.
11. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i\pi/2, 1 - i\pi/2]\}$,
    $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
12. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\}$,
    $\mathrm{w} = \sin z$.
13. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-1 - i\pi/2, -i\pi/2]\}$,
    $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.

14. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \cos z$.

15. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-1 - i\pi/2, -i\pi/2]\,\}$,
$\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.

16. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \sin z$.

17. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad z \notin [0, 1]\,\}$,
$\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.

18. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \cos z$.

19. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad z \notin [0, 1]\,\}$,
$\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.

20. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \sin z$.

21. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad z \notin [-1, 0]\,\}$,
$\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.

22. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [0, -i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \cos z$.

23. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad z \notin [-1, 0]\,\}$,
$\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.

24. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [0, -i]\,\}$,
$\mathrm{w} = \sin z$.

25. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]$,
$z \notin [i3\pi/2, 1 + i3\pi/2]\,\}, \quad \mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.

26. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\,\}$,
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 + i]\,\}, \quad \mathrm{w} = \cos z$.

27. $D = \{z : \ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\,\}$,
$z \notin [i3\pi/2, 1 + i3\pi/2]\,\}, \quad \mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.

28. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\quad \operatorname{Im} z > 0,\quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\,\},$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 + i]\,\},\quad \mathrm{w} = \sin z.$

29. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\ \ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \ z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]\,\},$
$z \notin [-1 + i3\pi/2, i3\pi/2]\,\},\quad \mathrm{w} = \operatorname{ch} z.$

30. $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\quad \operatorname{Im} z < 0,\quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\,\},$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 - i]\,\},\quad \mathrm{w} = \cos z.$

Пример 2.7.7. С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\left.\begin{aligned} &\triangle u = 0, \quad (0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi), \qquad (2.7.2)\\ &u\Big|_{r=1} = g(\varphi), \quad (0 \le \varphi \le 2\pi): \qquad (2.7.3)\end{aligned}\right\}$$

1) $g(\varphi) = \cos 4\varphi;$ 2) $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{5 + 3\cos \varphi}.$

Решение. Решение задачи Дирихле в круге $(0 \le r < 1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ представляется в виде интеграла Пуассона

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, u(1,\theta)\, d\theta.$$

Если ввести комплексные переменные $z = re^{i\varphi}$, $\varsigma = e^{i\theta}$, эту формулу можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=1} u(\varsigma)\frac{\varsigma + z}{(\varsigma - z)\varsigma}\, d\varsigma, \quad |z| < 1,$$

где окружность $|\varsigma| = 1$ ориентирована против часовой стрелки.

1) В новых переменных граничное условие (2.7.3) примет вид

$$u\Big|_{r=1} = \cos 4\theta = \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} = u(\varsigma) = \frac{\varsigma^4 + \varsigma^{-4}}{2} = \frac{\varsigma^8 + 1}{2\varsigma^4}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \oint_{|\varsigma|=1} \frac{(\varsigma^8 + 1)(\varsigma + z)}{2\varsigma^4(\varsigma - z)\varsigma}\, d\varsigma = \oint_{|\varsigma|=1} f(\varsigma)\, d\varsigma. \qquad (2.7.4)$$

Подынтегральная функция $f(\varsigma)$ имеет особые точки $\varsigma = 0$ и $\varsigma = z$, лежащие внутри окружности $|\varsigma| = 1$, и особую точку $\varsigma = \infty$. По теореме Коши о вычетах $I = 2\pi i(\operatorname*{res}_{0} f(\varsigma) + \operatorname*{res}_{z} f(\varsigma))$ или $I = 2\pi i(-\operatorname*{res}_{\infty} f(\varsigma))$. Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в бесконечно удаленной точке $\varsigma = \infty$.

Разложим функцию $f(\varsigma)$ в окрестности $\varsigma = \infty$:

$$f(\varsigma) = \frac{\varsigma^9(1 + 1/\varsigma^8)(1 + z/\varsigma)}{2\varsigma^6(1 - z/\varsigma)} = \frac{1}{2}\left(\varsigma^3 + \varsigma^2 z + \frac{1}{\varsigma^5} + \frac{z}{\varsigma^6}\right)\frac{1}{1 - z/\varsigma} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varsigma^3 + \varsigma^2 z + \frac{1}{\varsigma^5} + \frac{z}{\varsigma^6}\right)\left(1 + \frac{z}{\varsigma} + \frac{z^2}{\varsigma^2} + \frac{z^3}{\varsigma^3} + \frac{z^4}{\varsigma^4} + \ldots\right) =$$

$$= \ldots + \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^4\right) + \ldots .$$

Отсюда находим $c_{-1} = z^4$ — коэффициент при $1/\varsigma$, следовательно, $\operatorname*{res}_{\infty} f(\varsigma) = -c_{-1} = -z^4$. Интеграл (2.7.4) равен

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(\varsigma) = 2\pi i z^4.$$

Таким образом, искомое решение задачи (2.7.2), (2.7.3) будет

$$u(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}2\pi i z^4\right) = \operatorname{Re}\left(r^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)\right) = r^4 \cos 4\varphi.$$

Ответ. $u(r, \varphi) = r^4 \cos 4\varphi$.

2) Граничное условие (2.7.3) примет вид при $\varsigma = e^{i\theta}$

$$u\Big|_{r=1} = \frac{\sin 2\theta}{5 + 3\cos\theta} = u(\varsigma) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\varsigma^2 - \dfrac{1}{\varsigma^2}}{5 + \dfrac{3}{2}\left(\varsigma + \dfrac{1}{\varsigma}\right)} =$$

$$= \frac{(\varsigma^4 - 1)\varsigma}{i\varsigma^2(3\varsigma^2 + 10\varsigma + 3)} = \frac{\varsigma^4 - 1}{i3(\varsigma + 3)(\varsigma + 1/3)\varsigma}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \oint\limits_{|\varsigma|=1} \frac{(\varsigma^4 - 1)(\varsigma + z)}{3i\varsigma^2(\varsigma + 3)(\varsigma + 1/3)(\varsigma - z)}\, d\varsigma = \oint\limits_{|\varsigma|=1} f(\varsigma)\, d\varsigma. \qquad (2.7.5)$$

Подынтегральная функция $f(\varsigma)$ имеет особые точки $\varsigma = 0$, $\varsigma = -1/3$, $\varsigma = z$, лежащие внутри окружности $|\varsigma| = 1$, полюс первого порядка

$\varsigma = -3$ вне окружности $|\varsigma| = 1$ и устранимую особую точку $\varsigma = \infty$. По теореме Коши о вычетах $I = 2\pi i(\operatorname*{res}\limits_{0} f(\varsigma) + \operatorname*{res}\limits_{-1/3} f(\varsigma) + \operatorname*{res}\limits_{z} f(\varsigma))$ или $I = 2\pi i(-\operatorname*{res}\limits_{-3} f(\varsigma) - \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(\varsigma))$.

Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в полюсе первого порядка $\varsigma = -3$:

$$\operatorname*{res}_{-3} f(\varsigma) = \lim_{\varsigma\to-3} \frac{(\varsigma^4-1)(\varsigma+3)(\varsigma+z)}{3i\varsigma^2(\varsigma+3)(\varsigma+1/3)(\varsigma-z)} = \frac{10(z-3)}{9i(z+3)}.$$

Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в устранимой особой точке $\varsigma = \infty$. Разложим функцию $f(\varsigma)$ в окрестности $\varsigma = \infty$:

$$f(\varsigma) = \frac{\varsigma^5\left(1-\dfrac{1}{\varsigma^4}\right)\left(1+\dfrac{z}{\varsigma}\right)}{3i\varsigma^5\left(1+\dfrac{3}{\varsigma}\right)\left(1+\dfrac{1}{3\varsigma}\right)\left(1-\dfrac{z}{\varsigma}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3i}\left(1+\frac{z}{\varsigma}-\frac{1}{\varsigma^4}-\frac{z}{\varsigma^5}\right)\left(1-\frac{3}{\varsigma}+\frac{3^2}{\varsigma^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{3\varsigma}+\frac{1}{3^2\varsigma^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{3}{\varsigma}+\frac{z^2}{\varsigma^2}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3i}\left(\ldots+\frac{1}{\varsigma}\left(z-3-\frac{1}{3}+z\right)+\ldots\right) = \ldots+\frac{1}{\varsigma}\cdot\frac{1}{3i}\left(2z-\frac{10}{3}\right)+\ldots.$$

Отсюда находим $c_{-1} = (6z-10)/(9i)$ — коэффициент при $1/\varsigma$, следовательно, $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(\varsigma) = -c_{-1} = -(6z-10)/(9i)$. Интеграл (2.7.5) равен

$$I = -2\pi i(\operatorname*{res}_{-3} f(\varsigma) + \operatorname*{res}_{\infty} f(\varsigma)) = 2\pi i\left[-\frac{10(z-3)}{9i(z+3)} + \frac{6z-10}{9i}\right] = 2\pi\frac{(6z^2-2z)}{9(z+3)}.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$u(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}2\pi\frac{2(3z^2-z)}{9(z+3)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{9i}\cdot\frac{(3z^2-z)(\bar z+3)}{|z+3|^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{3z|z|^2-|z|^2+9z^2-3z}{|z+3|^2}\right) = \frac{2}{9}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{3r^3e^{i\varphi}-r^2+9r^2e^{i2\varphi}-3re^{i\varphi}}{r^2+6r\cos\varphi+9}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{3r^3\sin\varphi+9r^2\sin 2\varphi-3r\sin\varphi}{r^2+6r\cos\varphi+9}.$$

Ответ. $u(r,\varphi) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{r^3\sin\varphi+3r^2\sin 2\varphi-r\sin\varphi}{r^2+6r\cos\varphi+9}$.

Задача 2.7.7. С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\left.\begin{array}{l}\triangle u = 0, \quad (0 \le r < 1, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi), \\ u\Big|_{r=1} = g(\varphi), \quad (0 \le \varphi \le 2\pi).\end{array}\right\}$$

1. $g(\varphi) = 3 + \cos 2\varphi.$
2. $g(\varphi) = 2 + \sin 3\varphi.$
3. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\cos\varphi - 5}.$
4. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{3\cos\varphi - 5}.$
5. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{3\cos\varphi - 5}.$
6. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\sin\varphi + 5}.$
7. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{4\sin\varphi + 5}.$
8. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{4\sin\varphi + 5}.$
9. $g(\varphi) = \cos^2\varphi.$
10. $g(\varphi) = \sin^2\varphi.$
11. $g(\varphi) = \dfrac{1}{5 + 4\cos\varphi}.$
12. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{5 + 4\cos\varphi}.$
13. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}.$
14. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\sin\varphi + 5}.$
15. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{3\sin\varphi + 5}.$
16. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{3\sin\varphi + 5}.$
17. $g(\varphi) = 1 + \cos 3\varphi.$
18. $g(\varphi) = 1 + \sin 2\varphi.$
19. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\cos\varphi - 5}.$
20. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{4\cos\varphi - 5}.$
21. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{4\cos\varphi - 5}.$
22. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\sin\varphi - 5}.$

23. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{3\sin\varphi - 5}$.

24. $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{3\sin\varphi - 5}$.

25. $g(\varphi) = 2 + \sin 4\varphi$.

26. $g(\varphi) = \dfrac{1}{5 + 3\cos\varphi}$.

27. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.

28. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\sin\varphi - 5}$.

29. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{4\sin\varphi - 5}$.

30. $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{4\sin\varphi - 5}$.

Пример 2.7.8. С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D

$$\triangle u = 0, \quad (x, y) \in D.$$

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$.

2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x > 0, \ \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x - 1), \quad u\Big|_{x=0} = 1$.

3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ \ 0 < y < 1\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x)$,

$u\Big|_{y=1} = \theta(x) - \theta(x - 1)$.

4) $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 < r < 1, \ \ 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 1$,

$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\Big|_{\varphi=\pi} = 1$.

5) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ \ y > 0, \ \ y \notin [0, 1]\}$,

$u\Big|_{y=0} = \theta(x + 1) - \theta(x), \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0\le y\le 1}} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0\le y\le 1}} = 0$.

6) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ y > 0, \ \ (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0$,

$u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0$.

7) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad (y-1)^2+x^2<1,\quad (y-1/2)^2+x^2>1/4\}$,

$$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1}=0,\quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}}=0,\quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}}=1.$$

Решение. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad -\infty<x<+\infty,\quad y>0\}$ представляется в виде интеграла Пуассона

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\cdot u(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt. \tag{2.7.6}$$

Если ввести комплексные переменные $z=x+iy$, $\varsigma=t+is$, формулу (2.7.6) можно записать в виде

$$u(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t,0)}{t-z}\,dt.$$

В том случае, когда граничное условие задается в виде рациональной функции $u\Big|_{y=0}=R(x)$, $|R(x)|<\dfrac{A}{|x|}$ при $x\to\infty$ и не имеющей особых точек на действительной оси, интеграл можно вычислить с помощью вычетов в особых точках ς_k, расположенных в нижней полуплоскости:

$$u(z)=-2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{\operatorname{Im}\varsigma_k<0}\left(\frac{R(\varsigma_k)}{\varsigma_k-z}\right). \tag{2.7.7}$$

1) Воспользуемся формулой (2.7.7), учитывая $(x^2+2x+3)=$ $=(x+1+i\sqrt{2})(x+1-i\sqrt{2})$:

$$u(z)=-2\operatorname{Re}\ \operatorname{res}\frac{1}{(\varsigma+1+i\sqrt{2})(\varsigma+1-i\sqrt{2})(\varsigma-z)}\Bigg|_{\varsigma=-1-i\sqrt{2}}=$$

$$=-2\operatorname{Re}\frac{1}{(-i2\sqrt{2})(-1-i\sqrt{2}-z)}=-\operatorname{Re}\frac{(1+x)-i(\sqrt{2}+y)}{i\sqrt{2}((1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+y}{(1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2}.$$

Ответ. $u(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+y}{(1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2}.$

2) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = z^2$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 2.7.8, *а*).

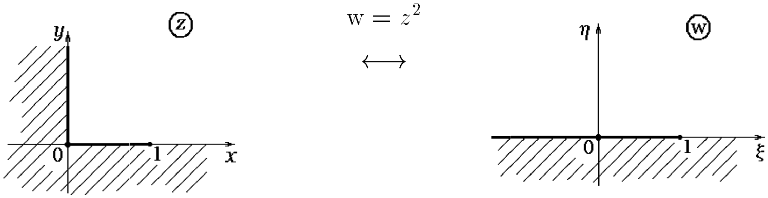

Рис. 2.7.8, *а*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) = \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(1 - \xi). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2} \, dt = \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{t - \xi}{\eta} \right) \Big|_{-\infty}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \xi}{\eta} \right) - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \xi}{\eta} \right).$$

Так как $\mathrm{w} = z^2 \ \Rightarrow \ \xi + i\eta = x^2 - y^2 + 2iy \ \Rightarrow \ \xi = x^2 - y^2, \ \eta = 2xy$. Возвращаясь к первоначальным переменным (x, y), получим

$$\tilde{u}(x^2 - y^2, 2xy) = u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^2 + y^2}{2xy} \right).$$

Ответ. $u(x, y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{1 - x^2 + y^2}{2xy} \right).$

3) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z: \ z \in \mathbb{C} \ \ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \exp(\pi z)$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w}: \ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 2.7.8, *б*).

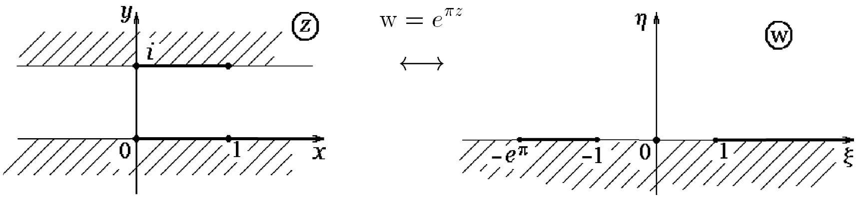

Рис. 2.7.8, *б*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi + e^{\pi}) - \theta(\xi + 1) + \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{\eta}{\pi} \left[\int\limits_{-e^{\pi}}^{-1} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{t - \xi}{\eta} \right) \Big|_{-e^{\pi}}^{-1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{t - \xi}{\eta} \right) \Big|_{1}^{+\infty} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{e^{\pi} + \xi}{\eta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \xi}{\eta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \xi}{\eta} \right) \right].$$

Так как $\mathrm{w} = \exp(\pi z) \ \Rightarrow \ \xi + i\eta = \exp(\pi z)(\cos(\pi y) + i \sin(\pi y))$, получим выражение новых переменных через старые: $\xi = \exp(\pi x) \cos(\pi y)$,

$\eta = \exp(\pi x)\sin(\pi y)$). Возвращаясь к первоначальным переменным, получим ответ.

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^{\pi} + e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right) -$

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right) - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1 - e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right).$$

4) Введем комплексную переменную $z = re^{i\varphi}$. Отобразим область $D = \{z :\ z \in \mathbb{C}\ \ |z| < 1,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} :\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$ (рис. 2.7.8, *в*).

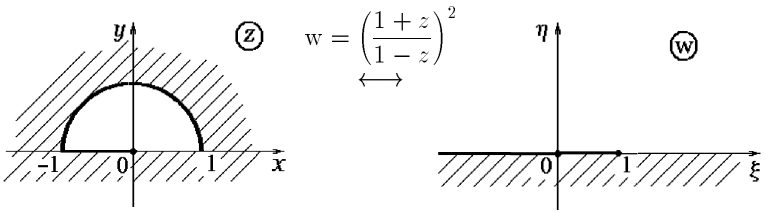

Рис. 2.7.8, *в*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle\tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(1-\xi). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{\eta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right).$$

Так как

$$\mathrm{w} = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^2 = \left(\frac{(1+re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}{(1-re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1-r^2+2ir\sin\varphi)^2}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^2},$$

получим выражение новых переменных через старые:

$$\xi = \frac{(1-r^2)^2-4r^2\sin^2\varphi}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^2}, \qquad \eta = \frac{4r(1-r^2)\sin\varphi}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^2}. \tag{2.7.8}$$

Ответ. $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right)$, где ξ и η заданы формулами (2.7.8).

Замечание. Можно было рассмотреть конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость с помощью функции Жуковского $\mathrm{w} = -(z+1/z)/2$. Исходная краевая задача после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle\tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi+1). \end{cases}$$

Решение этой задачи представляется в виде интеграла Пуассона

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{\eta}{\pi}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\xi}{\eta}\right),$$

где

$$\mathrm{w} = \xi + i\eta = -\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = -\frac{(1+r^2)}{2r}\cos\varphi + i\frac{(1-r^2)}{2r}\sin\varphi.$$

5) Введем комплексную переменную $z = x+iy$. Отобразим область $D = \{z :\ z \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z > 0,\ \ z \notin [0,i]\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \sqrt[2]{z^2+1}$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} :\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$, где $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\cdot}$ — нулевая ветвь квадратного корня (рис. 2.7.8, *г*).

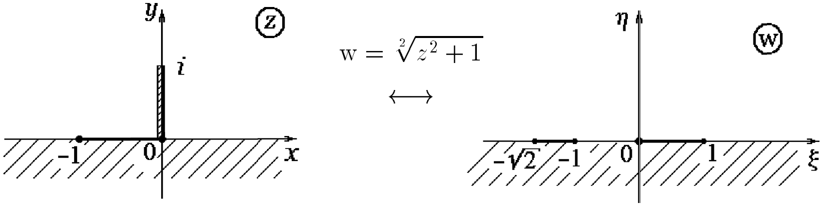

Рис. 2.7.8, *г*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle\tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi+\sqrt{2}) - \theta(\xi+1) + \theta(\xi) - \theta(\xi-1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{-1} + \operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big|_{0}^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}+\xi}{\eta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\xi}{\eta}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

Так как

$$\mathrm{w} = \sqrt[2]{z^2+1} = \sqrt[2]{x^2+1-y^2+2ixy} = \sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\exp\left(i\frac{\psi}{2}\right),$$

где

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2>0, \\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2<0,\ x\geq 0, \\ -\pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2<0,\ x<0, \\ \pi/2, & \text{если } x^2+1-y^2=0,\ x>0, \\ -\pi/2, & \text{если } x^2+1-y^2=0,\ x<0, \end{cases}$$

получим выражение новых переменных через старые:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\cos(\psi/2), \\ \eta &= \sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\sin(\psi/2). \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Ответ.

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}+\xi}{\eta}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\xi}{\eta}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right],$$

где ξ и η заданы формулами (2.7.9).

6) Введем комплексную переменную $z = x+iy$. Отобразим область $D = \{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z>0,\ \ |z-i/2|>1/2\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = e^{(1/z+i)\pi} = -e^{\pi/z}$ на верхнюю полуплоскость $G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}\mathrm{w}>0\}$ (рис. 2.7.8, *д*).

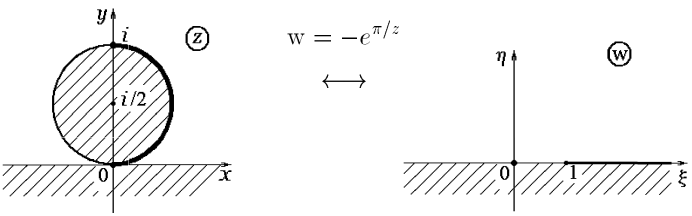

Рис. 2.7.8, ***д***

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right)\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right).$$

Так как $\mathrm{w} = -e^{\pi/z} = -e^{\pi(x-iy)/(x^2+y^2)} = -e^{\pi x/(x^2+y^2)} e^{-i\pi y/(x^2+y^2)}$, получим выражение новых переменных через старые:

$$\begin{aligned} \xi &= -e^{\pi x/(x^2+y^2)} \cos(\pi y/(x^2+y^2)), \\ \eta &= e^{\pi x/(x^2+y^2)} \sin(\pi y/(x^2+y^2)). \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right)$, где ξ и η заданы формулами (2.7.10).

7) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; |z - i/2| > 1/2, \;\; |z - i| < 1\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = e^{2\pi/z}$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 2.7.8, *е*).

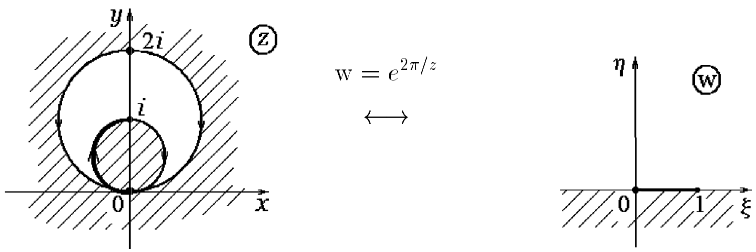

Рис. 2.7.8, *е*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle\tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi) - \theta(\xi-1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (2.7.6)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right).$$

Так как $\mathrm{w} = e^{2\pi/z} = e^{2\pi(x-iy)/(x^2+y^2)} = e^{2\pi x/(x^2+y^2)}\cdot e^{-i2\pi y/(x^2+y^2)}$, получим выражение новых переменных через старые:

$$\begin{aligned} \xi &= e^{2\pi x/(x^2+y^2)}\cos(2\pi y/(x^2+y^2)), \\ \eta &= -e^{2\pi x/(x^2+y^2)}\sin(2\pi y/(x^2+y^2)). \end{aligned} \tag{2.7.11}$$

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right) + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)\right)$, где ξ и η заданы формулами (2.7.11).

Задача 2.7.8. С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D

$$\triangle u = 0, \quad (x,y) \in D.$$

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{2+x^2}.$

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x-1), \quad u\Big|_{x=0} = 0.$

3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 3\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x),$

   $u\Big|_{y=3} = 0.$

4. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0<r<1, \quad 0<\varphi<\pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 1,$

$u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$

5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x-1), \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0\le y\le 1}} = 0, \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0\le y\le 1}} = 1.$

6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0,$

$u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0.$

7. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1} = 0, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0.$

8. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty<x<+\infty, \quad y>0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2+x+1}.$

9. $D=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x>0, \quad y>0\}, \quad u\Big|_{y=0}=0, \quad u\Big|_{x=0}=\theta(y-1).$

10. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 2\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0,$

$u\Big|_{y=2} = \theta(x).$

11. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0<r<1, \quad 0<\varphi<\pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 0,$

$u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 1.$

12. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{\substack{x=\pm 0,\\ 0\le y\le 1}} = 1.$

13. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y>0, \quad (y-1/2)^2 + x^2>1/4\}, \quad u\Big|_{y=0}=\theta(x),$

$u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

14. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}} = 0, \quad u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

15. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{4 + x^2}.$

16. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x - 1), \quad u\Big|_{x=0} = \theta(y - 1).$

17. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 1\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x),$

$u\Big|_{y=1} = \theta(x).$

18. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 0,$

$u\Big|_{\varphi=0} = 1, \quad u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$

19. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x - 1), \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0 \le y \le 1}} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0 \le y \le 1}} = 0.$

20. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(-x),$

$u\Big|_{(y-1/2)^2 + x^2 = 1/4} = 0.$

21. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y - 1)^2 + x^2 < 1, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} = u\Big|_{x^2+(y-1/2)^2=1/4} = 0.$

22. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}.$

23. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x - 1), \quad u\Big|_{x=0} = 0.$

24. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 2\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(-x),$

$u\Big|_{y=2} = 0.$

25. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\},$

$u\Big|_{r=1} = \theta(\varphi - \pi/2), \quad u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$

26. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=\pm 0,\\ 0 \le y \le 1}} = 0.$

27. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad y > 0, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \qquad u\Big|_{y=0} = 1,$

$u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

28. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1/4} = 1, \quad u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1} = 0.$

29. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \qquad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{1+4x^2}.$

30. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{x=0} = \theta(y) - \theta(y-1).$

2.8. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике, круговом секторе, прямоугольном параллелепипеде, прямом круговом цилиндре, секторе прямого кругового цилиндра

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля: найти значения параметра λ, при которых существует ненулевое решение $v(x) \not\equiv 0$ уравнения

$$L[v] + \lambda\rho(\bar{x})v = 0, \qquad \bar{x} \in D, \tag{2.8.1}$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0, \qquad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \tag{2.8.2}$$

где

$$L[v] = \operatorname{div}(k(\bar{x})\operatorname{grad} v) - q(\bar{x})v, \quad \rho(\bar{x}), q(\bar{x}) \in C(\bar{D}), \quad k(\bar{x}) \in C^1(\bar{D}),$$

$\rho(\bar{x})$, $k(\bar{x}) > 0$, $q(\bar{x}) \geq 0$, $\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{x}) \in C(\partial D)$, $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂D.

Определение. Значения параметра λ, при которых существуют ненулевые решения задачи (2.8.1), (2.8.2), называются *собственными значениями*, а соответствующие им ненулевые решения $v(\bar{x}) \not\equiv 0$ называются *собственными функциями*.

Перечислим свойства собственных значений и собственных функций.

1) Существует бесконечное (счетное) множество вещественных собственных значений λ_n, $n = \overline{1, \infty}$ и собственных функций $v_n(\bar{x})$, $n = \overline{1, \infty}$.

2) Собственные значения возрастают при увеличении номера n:

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots .$$

3) Любой конечный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит конечное (либо пустое) множество собственных значений.

4) Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых функций.

Замечание. Все собственные значения одномерной задачи ($D = [a, b]$) *простые*, т.е. любые две собственные функции, соответствующие этому собственному значению, линейно зависимы.

5) Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1 \ne \lambda_2$, ортогональны в D с весом $\rho(\bar{x})$, т.е.

$$\iiint\limits_D v_1(\bar{x}) v_2(\bar{x}) \rho(\bar{x})\, d\bar{x} = 0.$$

Замечание. Если собственному значению λ отвечает k линейно независимых собственных функций $v_1(\bar{x}), v_2(\bar{x}), ..., v_k(\bar{x})$, то эти функции могут быть попарно неортогональными. Однако мы можем их заменить, другими собственными функциями $\tilde{v}_1(\bar{x}), \tilde{v}_2(\bar{x}), ..., \tilde{v}_k(\bar{x})$, являющимися их линейными комбинациями и притом попарно ортогональными, применив алгоритм ортогонализации Грама—Шмидта.

6) Все собственные значения задачи (2.8.1), (2.8.2) *неотрицательны*, если $k(\bar{x}) > 0$, $q(\bar{x}) \ge 0$, $\alpha \cdot \beta > 0$.

Замечание. $\lambda = 0$ возможно только для второй краевой задачи ($\beta = 0$, $q(\bar{x}) \equiv 0$), тогда собственная функция $v(\bar{x}) = \mathrm{const}$.

7) Система собственных функций задачи (2.8.1), (2.8.2) *полна* в пространстве функций, интегрируемых с квадратом.

Определение. Система ортогональных (с весом $\rho(\bar{x})$) в области D функций называется *полной* в $\bar{D}$, если для любой функции $f(\bar{x})$, интегрируемой с квадратом в $\bar{D}$, выполняется равенство Парсеваля

$$\iiint\limits_D f(\bar{x})^2 \rho(\bar{x})\, d\bar{x} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 ||v_k||^2,$$

где

$$||v_k||^2 = \iiint\limits_D v_k^2(\bar{x})\rho(\bar{x})\,d\bar{x},$$

$$f_k = \iiint\limits_D \frac{f(\bar{x})v_k(\bar{x})\rho(\bar{x})}{||v_k||^2}\,d\bar{x}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\bar{x})$ по функциям системы $\{v_k(\bar{x})\}$.

Замечание. Если система функций полна в $\bar{D}$, то ряд Фурье для всякой функции с интегрируемым квадратом в $\bar{D}$ можно почленно интегрировать.

Равенство Парсеваля является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье этой функции сходился к этой функции в смысле среднего квадратичного, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists \mathrm{N}(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\iiint\limits_D \left(f(\bar{x}) - \sum_{k=1}^{N} f_k v_k(\bar{x})\right)^2 \rho\,d\bar{x} \le \varepsilon.$$

8) (Теорема Стеклова). Произвольная функция $f(\bar{x}) \in C^2(\bar{D})$, удовлетворяющая граничному условию (2.8.2), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся в области $\bar{D}$ ряд Фурье по собственным функциям задачи (2.8.1), (2.8.2):

$$f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(\bar{x}).$$

9) Произвольная функция $f(\bar{x}) \in C^6(\bar{D})$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial \bar{n}} + \beta f\right)\Big|_{\partial D} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial \bar{n}}L[f] + \beta L[f]\right)\Big|_{\partial D} = 0, \qquad (2.8.3)$$

разлагается в ряд Фурье по собственным функциям, сходящийся равномерно в $\bar{D}$ и допускающий двухкратное почленное дифференцирование.

Пример 2.8.1. Найти собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора Лапласа:

1) прямоугольной области $D = \{(x, y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2\}$ с граничными условиями

$$v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = 0, \qquad (2.8.4)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=\pi/2} = 0; \tag{2.8.5}$$

2) кругового сектора $D = \{(r,\varphi):\ 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2\}$ с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \tag{2.8.6}$$

$$\left. v\right|_{r=b} = 0 \tag{2.8.7}$$

и условием ограниченности при $r \to 0$

$$|v| < +\infty. \tag{2.8.8}$$

Решение. 1) Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.4), (2.8.5). Будем искать собственные функции методом разделения переменных в виде

$$v(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0. \tag{2.8.9}$$

Подставим (2.8.9) в ДУ (2.8.1):

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0,$$

разделим на $X(x)Y(y)$ и получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0.$$

Каждое слагаемое в этом равенстве равно константе, так как оно выполняется в области D. Отсюда получим ОДУ

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \tag{2.8.10}$$

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \tag{2.8.11}$$

где

$$\lambda = \mu + \nu. \tag{2.8.12}$$

После подстановки (2.8.9) в (2.8.4) и (2.8.5) получим граничные условия для функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X(0) = X(\pi) = 0, \tag{2.8.13}$$

$$Y'(0) = Y'(\pi/2) = 0. \tag{2.8.14}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (2.8.10), (2.8.13) приведено в прил. 1 (п. а). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi$ имеют следующий вид (П.1.13), (П.1.14):

$$\mu_n = n^2, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{2.8.15}$$

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{2.8.16}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (2.8.11), (2.8.14) приведено в прил. 1 (п. г). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi/2$ имеют следующий вид (П.1.25), (П.1.28), (П.1.29):

$$\nu_k = (2k)^2, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{2.8.17}$$

$$Y_k(y) = \cos(2kx), \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{2.8.18}$$

Итак, решением исходной задачи Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.4), (2.8.5) являются собственные значения (2.8.12), (2.8.15), (2.8.17):

$$\lambda_{nk} = \mu_n + \nu_k = n^2 + (2k)^2, \quad n = \overline{1, \infty}, \ k = \overline{0, \infty}, \tag{2.8.19}$$

а соответствующие им собственные функции (2.8.9), (2.8.16), (2.8.18):

$$v_{nk}(x, y) = X_n(x) Y_k(y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad n = \overline{1, \infty}, \ k = \overline{0, \infty}. \tag{2.8.20}$$

$$||v_{nk}||^2 = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} v_{nk}^2(x, y)\, dy\, dx = \int\limits_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2(2ky)\, dy =$$

$$= \frac{\pi^2(\delta_{k0} + 1)}{8}, \qquad n = \overline{1, \infty}, \ k = \overline{0, \infty}.$$

Замечание. Функция Грина краевой задачи

$$\Delta u = -f(x, y), \quad D = \{(x, y): \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi/2\},$$

$$u\Big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u\Big|_{x=\pi} = \varphi_2(y), \ (0 \le y \le \pi/2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \psi_2(x), \ (0 \le x \le \pi)$$

имеет вид (2.22)

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin(n\xi)}{n^2}+$$
$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cos(2ky)\sin(n\xi)\cos(2k\eta)}{n^2+(2k)^2}.$$

Решение этой краевой задачи запишется с помощью функции Грина в виде

$$u(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}f(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi\,d\eta+\int_0^{\pi}\psi_2(\xi)G(x,y;\xi,\pi/2)d\xi-$$

$$-\int_0^{\pi}\psi_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_0^{\pi/2}\varphi_1(\eta)\frac{\partial G(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}d\eta-\int_0^{\pi/2}\varphi_2(\eta)\frac{\partial G(x,y;\pi,\eta)}{\partial\xi}d\eta.$$

2) Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.6)—(2.8.8). Ищем собственные функции методом разделения переменных в виде

$$v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0. \tag{2.8.21}$$

Подставим (2.8.21) в ДУ (2.8.1), которое надо записать в полярной системе координат:

$$\triangle v+\lambda v=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0,$$

получим

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)\Phi(\varphi)+\frac{R(r)}{r^2}\Phi''(\varphi)+\lambda R(r)\Phi(\varphi)=0.$$

Разделим переменные

$$\frac{\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\lambda R}{\dfrac{R(r)}{r^2}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\nu.$$

Получим ОДУ для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\nu}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{2.8.22}$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0. \tag{2.8.23}$$

После подстановки (2.8.21) в граничные условия (2.8.6)—(2.8.8) получим

$$\Phi'(0) = \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{2.8.24}$$

$$R(b) = 0, \quad |R(0)| < +\infty. \tag{2.8.25}$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.23), (2.8.24) решена в прил. 1 (п. г). Собственные значения и собственные функции (П.1.25), (П.1.28), (П.1.29) при $l = \pi/2$ имеют вид

$$\nu_n = (2n)^2, \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{2.8.26}$$

$$\Phi_n(\varphi) = \cos(2n\varphi), \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Подставим $\nu = \nu_n$ (2.8.26) в ДУ (2.8.22), получим ДУ Бесселя $(2n)$-го порядка:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left(\lambda - \frac{(2n)^2}{r^2}R_n(r)\right) = 0.$$

Его общее решение можно записать в виде

$$R_n(r) = A_n J_{2n}(\sqrt{\lambda}r) + B_n N_{2n}(\sqrt{\lambda}r), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{2.8.27}$$

где $J_{2n}(\cdot)$ и $N_{2n}(\cdot)$ — функции Бесселя и Неймана порядков $2n$.

Из условия ограниченности решения при $r \to 0$ (2.8.25) следует, что $B_n = 0$, $n = \overline{0, \infty}$, так как функции Неймана $N_{2n}(\cdot)$ неограниченны при $r \to 0$. Подставим (2.8.27) при $B_n = 0$ в граничное условие (2.8.25) и получим уравнения для нахождения собственных значений

$$R_n(b) = A_n J_{2n}(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = \frac{\mu_k^{(2n)}}{b}, \quad n = \overline{0, \infty}, \ k = \overline{1, \infty},$$

где $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$.

Итак, собственные значения исходной задачи (2.8.1), (2.8.6)—(2.8.8)

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2, \quad n = \overline{0, \infty},\ k = \overline{1, \infty}, \tag{2.8.28}$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_{nk}(r, \varphi) = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \quad n = \overline{0, \infty},\ k = \overline{1, \infty}. \tag{2.8.29}$$

$$||v_{nk}||^2 = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^b v_{nk}^2(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi = \pi\left(bJ'_{2n}(\mu_k^{(2n)})\right)^2 \frac{\delta_{n0} + 1}{8},$$

$$n = \overline{0, \infty},\ k = \overline{1, \infty}.$$

Замечание. Функция Грина краевой задачи

$$\triangle u = -f(r, \varphi), \quad D = \{(r, \varphi):\ 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_1(r), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = g_2(r),\ (0 \le r \le b),$$

$$u\Big|_{r=b} = g_3(\varphi),\ (0 \le \varphi \le \pi/2)$$

имеет вид (2.22)

$$G(r, \varphi; \rho, \psi) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{b}\right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} \rho}{b}\right)}{(\mu_k^{(0)})^2} +$$

$$+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{b}\right) J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} \rho}{b}\right)\cos(2n\varphi)\cos(2n\psi)}{[J'_{2n}(\mu_k^{2n})]^2(\mu_k^{(2n)})^2}.$$

Решение этой краевой задачи запишется с помощью функции Грина в виде

$$u(r, \varphi) = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^b f(\rho, \psi)G(r, \varphi; \rho, \psi)\rho\, d\rho\, d\psi + \int\limits_0^b g_2(\rho)G(r, \varphi; \rho, \pi/2)\rho\, d\rho -$$

$$-\int\limits_0^b g_1(\rho)G(r, \varphi; \rho, 0)\rho\, d\rho - \int\limits_0^{\pi/2} g_3(\psi)\frac{\partial G(r, \varphi; b, \psi)}{\partial \psi} d\psi.$$

Ответ. 1) Собственные значения

$$\lambda_{nk} = n^2 + (2k)^2, \quad n = \overline{1,\infty},\ k = \overline{0,\infty},$$

соответствующие им собственные функции

$$v_{nk}(x,y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad n = \overline{1,\infty},\ k = \overline{0,\infty}.$$

2) Собственные значения

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2,$$

соответствующие им собственные функции

$$v_{nk} = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \quad n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty}.$$

Задача 2.8.1. Найти собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора Лапласа прямоугольной области или кругового сектора.

1. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

2. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = v\Big|_{r=b} = 0.$

3. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

4. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/3} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

5. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

6. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = 0.$

7. $v\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = 0.$

8. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = v\Big|_{r=b} = 0.$

9. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

10. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

11. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

12. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = 0.$

13. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = 0.$

14. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

15. $v\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

16. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = v\Big|_{r=b} = 0.$

17. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

18. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = 0.$

19. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = 0.$

20. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

21. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

22. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/4} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

23. $v\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

24. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = v\Big|_{r=b} = 0.$

25. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = 0.$

26. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

27. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = 0.$

28. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/4} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

29. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = 0.$

30. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/3} = v\Big|_{r=b} = 0.$

Пример 2.8.2. Найти собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора Лапласа:

1) прямоугольного параллелепипеда $D = \{(x, y, z): \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi/2, \ 0 < z < \pi\}$ с граничными условиями

$$v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \tag{2.8.30}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0; \tag{2.8.31}$$

2) прямого кругового цилиндра $D = \{(r, \varphi, z): \ 0 \le r < b, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 < z < h\}$ с граничными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0, \tag{2.8.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0; \tag{2.8.33}$$

3) сектора прямого кругового цилиндра $D = \{(r, \varphi, z): \ 0 < r < b, \ 0 < \varphi < \pi/2, \ 0 < z < h\}$ с граничными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = 0, \tag{2.8.34}$$

$$v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0. \tag{2.8.35}$$

Решение. 1) Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.30), (2.8.31). Будем искать собственные функции методом разделения переменных в виде

$$v(x,y,z) = u(x,y)Z(z) \not\equiv 0. \tag{2.8.36}$$

Подставим (2.8.36) в ДУ (2.8.1), разделим переменные и получим

$$\triangle_{x,y} u + \mu u = 0, \tag{2.8.37}$$

$$Z''(z) + \nu Z(z) = 0, \tag{2.8.38}$$

$$\lambda = \mu + \nu. \tag{2.8.39}$$

После подстановки (2.8.36) в граничные условия (2.8.30), (2.8.31) получим граничные условия для функций $u(x,y)$ и $Z(z)$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \tag{2.8.40}$$

$$Z'(0) = Z(\pi) = 0. \tag{2.8.41}$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.37), (2.8.40) решена в примере 2.8.1 (п. 1), собственные значения равны (2.8.19)

$$\mu_{nk} = n^2 + (2k)^2, \quad n = \overline{1,\infty}, \ k = \overline{0,\infty}, \tag{2.8.42}$$

соответствующие собственные функции (2.8.20) равны

$$u_{nk}(x,y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad n = \overline{1,\infty}, \ k = \overline{0,\infty}. \tag{2.8.43}$$

$$||u_{nk}||^2 = \frac{\pi^2(\delta_{k0}+1)}{8}.$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.38), (2.8.41) решена в прил. 1 (п. 6) при $l = \pi$. Собственные значения (П1.18) равны

$$\nu_m = \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2, \quad m = \overline{0,\infty}, \tag{2.8.44}$$

соответствующие собственные функции (П1.19) равны

$$Z_m(z) = \cos\left(\frac{2m+1}{2}z\right), \quad ||Z_m||^2 = \frac{\pi}{2}, \quad m = \overline{0,\infty}. \tag{2.8.45}$$

Собственные значения исходной задачи (2.8.1), (2.8.30), (2.8.31) получим из (2.8.39), (2.8.42), (2.8.44):

$$\lambda_{nkm} = n^2+(2k)^2+\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2, \quad n=\overline{1,\infty}, \ \ k=\overline{0,\infty}, \ \ m=\overline{0,\infty}, \tag{2.8.46}$$

соответствующие собственные функции из (2.8.36), (2.8.43), (2.8.45):

$$v_{nkm}(x,y,z) = \sin(nx)\cos(2ky)\cos\left(\frac{2m+1}{2}z\right), \tag{2.8.47}$$

$$||v_{nkm}||^2 = \frac{\pi^3(\delta_{k0}+1)}{16}, \quad n=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{0,\infty}, \quad m=\overline{0,\infty},$$

Замечание. Функция Грина краевой задачи

$$\triangle u = -f(x,y,z), \quad D=\{(x,y,z): \ 0<x<\pi, \ 0<y<\pi/2, \ 0<z<\pi\},$$

$$u\Big|_{x=0} = \varphi_1(y,z), \quad u\Big|_{x=\pi} = \varphi_2(y,z), \ (0\le y\le \pi/2, \ 0\le z\le\pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi_1(x,z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \psi_2(x,z), \ (0\le x\le\pi, \ 0\le z\le\pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \chi_1(x,y), \quad u\Big|_{z=\pi} = \chi_2(x,y), \ (0\le x\le\pi, \ 0\le y\le\pi/2)$$

имеет вид (2.22)

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_{nkm}(x,y,z)v_{nkm}(\xi,\eta,\varsigma)}{||v_{nkm}||^2\lambda_{nkm}},$$

где $v_{nkm}(x,y,z)$, λ_{nkm} заданы формулами (2.8.47), (2.8.46).

Решение этой краевой задачи запишется с помощью функции Грина в виде

$$u(x,y,z) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} f(\xi,\eta,\varsigma)G(x,y,z;\xi,\eta,\varsigma)\,d\xi\,d\eta\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\varphi_1(\eta,\varsigma)\frac{\partial G(x,y,z;0,\eta,\varsigma)}{\partial\xi}\,d\eta\,d\varsigma-\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\varphi_2(\eta,\varsigma)\frac{\partial G(x,y,z;\pi,\eta,\varsigma)}{\partial\xi}\,d\eta\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi_2(\xi,\varsigma)G(x,y,z;\xi,\pi/2,\varsigma)\,d\xi\,d\varsigma-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi_1(\xi,\varsigma)G(x,y,z;\xi,0,\varsigma)\,d\xi\,d\varsigma-$$

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\chi_1(\xi,\eta)G(x,y,z;\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta-\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\chi_2(\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y,z;\xi,\eta,\pi)}{\partial\varsigma}\,d\xi\,d\eta.$$

2) Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.32), (2.8.33). Будем искать собственные функции методом разделения переменных в виде

$$v(r,\varphi,z) = Y(r,\varphi)Z(z) \not\equiv 0. \tag{2.8.48}$$

Подставим (2.8.48) в ДУ (2.8.1), которое надо записать в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0,$$

разделим переменные и получим

$$Z(z)\cdot\triangle_{r,\varphi}Y(r,\varphi) + Z''(z)Y(r,\varphi) + \lambda Y(r,\varphi)Z(z) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\triangle_{r,\varphi}Y(r,\varphi) + \lambda Y(r,\varphi)}{Y(r,\varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \mu.$$

Отсюда получаем ДУ

$$Z''(z) + \mu Z(z) = 0,\; (0 < z < h), \tag{2.8.49}$$

$$\triangle_{r,\varphi}Y(r,\varphi) + æY(r,\varphi) = 0,\; (0 \le r < b,\; 0 \le \varphi \le 2\pi), \tag{2.8.50}$$

где

$$\lambda = \mu + æ. \tag{2.8.51}$$

После подстановки (2.8.48) в граничные условия (2.8.32) и (2.8.33), получим

$$Z'(0) = Z'(h) = 0, \tag{2.8.52}$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial r}\right|_{r=b} = 0. \tag{2.8.53}$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.49), (2.8.52) решена в прил. 1 (п. г). Собственные значения и соответствующие им собственные функции (П1.28), (П1.25), (П1.29) при $l = h$ имеют вид

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \quad m = \overline{0,\infty}, \tag{2.8.54}$$

$$Z_m(z) = \cos\left(\frac{\pi m z}{h}\right), \quad ||Z_m||^2 = \frac{h(\delta_{m0}+1)}{2}, \quad m = \overline{0,\infty}. \tag{2.8.55}$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.50), (2.8.53) — задача нахождения собственных функций оператора Лапласа в круге. Эта задача решена в прил. 2 (п. б). Собственные значения и соответствующие им собственные функции (П2.20), (П2.22) имеют следующий вид:

$$æ_{nk} = \left(\frac{\nu_k^{(n)}}{b}\right)^2, \quad n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty}, \tag{2.8.56}$$

$$Y_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\nu_k^{(n)} r}{b}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{2.8.57}$$
$$n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},$$

где $J_n(\cdot)$ — функция Бесселя n-го порядка, $\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu) = 0,\ \ \forall A_n, B_n,\ \ |A_n| + |B_n| \neq 0$.

Следовательно, собственные значения задачи (2.8.1), (2.8.32), (2.8.33) имеют вид (2.8.51), (2.8.54), (2.8.56)

$$\lambda_{nkm} = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \left(\frac{\nu_k^{(n)}}{b}\right)^2, \quad n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},\ m = \overline{0,\infty}, \tag{2.8.58}$$

а соответствующие им собственные функции (2.8.48), (2.8.55), (2.8.57)

$$v_{nkm}(r,\varphi,z) = J_n\left(\frac{\nu_k^{(n)} r}{b}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\cos\left(\frac{\pi m z}{h}\right),$$
$$\forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0. \tag{2.8.59}$$

$$||v_{nkm}||^2 = b^2 h(\delta_{m0} + 1)\left(1 - \left(\frac{n}{\nu_k^{(n)}}\right)^2\right) J_n^2\ (\nu_k^{(n)})\ \frac{||\Phi_n(\varphi)||^2}{4},$$
$$n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},\ m = \overline{0,\infty},$$
$$||\Phi_0(\varphi)||^2 = 2\pi A_0^2, \quad ||\Phi_n(\varphi)||^2 = \pi(A_n^2 + B_n^2), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Замечание. Функция Грина краевой задачи

$$\Delta u = -f(r,\varphi,z), \quad D = \{(r,\varphi,z):\ r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < z < h\},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = g_1(r,\varphi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = g_2(r,\varphi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = g_3(\varphi,z)$$

имеет вид (2.22)

$$G(r,\varphi,z;\rho,\psi,\varsigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_{nkm}(r,\varphi,z)v_{nkm}(\rho,\psi,\varsigma)}{||v_{nkm}||^2\lambda_{nkm}},$$

где $v_{nkm}(r,\varphi,z)$, λ_{nkm} заданы формулами (2.8.59), (2.8.58).

Решение этой краевой задачи запишется с помощью функции Грина

$$u(r,\varphi,z)=\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^b f(\rho,\psi,\varsigma)G(r,\varphi,z;\rho,\psi,\varsigma)\rho\,d\rho\,d\psi\,d\varsigma-$$

$$-\int\limits_0^b\int\limits_0^{2\pi}g_1(\rho,\psi)G(r,\varphi,z;\rho,\psi,0)\rho\,d\rho\,d\psi+\int\limits_0^b\int\limits_0^{2\pi}g_2(\rho,\psi)G(r,\varphi,z;\rho,\psi,h)\rho\,d\rho\,d\psi+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h g_3(\psi,\varsigma)G(r,\varphi,z;b,\psi,\varsigma)\,d\psi\,d\varsigma.$$

3) Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (2.8.1), (2.8.34), (2.8.35). Уравнение (2.8.1) запишем в цилиндрической системе координат

$$\triangle v+\lambda v=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\lambda v=0. \qquad (2.8.60)$$

Будем искать собственные функции методом разделения переменных в виде

$$v(r,\varphi,z)=Y(r,\varphi)Z(z)\not\equiv 0. \qquad (2.8.61)$$

Подставим (2.8.61) в ДУ (2.8.60), разделим переменные и получим ДУ

$$Z''(z)+\nu Z(z)=0,\quad (0<z<h), \qquad (2.8.62)$$

$$\triangle_{r,\varphi}Y(r,\varphi)+æY(r,\varphi)=0,\quad (0\le r<b,\ 0<\varphi<\pi/2), \qquad (2.8.63)$$

где

$$\lambda=\nu+æ. \qquad (2.8.64)$$

После подстановки (2.8.61) в граничные условия (2.8.34), (2.8.35) получим

$$\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0}=\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2}=Y\Big|_{r=b}=0, \qquad (2.8.65)$$

$$Z(0)=Z(h)=0. \qquad (2.8.66)$$

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.63), (2.8.65) решена в примере 2.8.1 (п. 2). Собственные значения и соответствующие им собственные функции (2.8.28), (2.8.29) имеют следующий вид:

$$\text{æ}_{nk} = \left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2, \tag{2.8.67}$$

$$Y_{nk}(r,\varphi) = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \quad n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty}. \tag{2.8.68}$$

$$||Y_{nk}||^2 = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^b Y_{nk}^2(r,\varphi) r\,dr\,d\varphi = \pi\left(b\,J'_{2n}(\mu_k^{(2n)})\right)^2\frac{(\delta_{n0}+1)}{8},$$

$$n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},$$

где $J_{2n}(\cdot)$ — функции Бесселя $2n$-порядка, $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$.

Задача Штурма—Лиувилля (2.8.62), (2.8.66) решена в прил. 1 (п. а). Собственные значения и соответствующие им собственные функции (П1.13), (П1.14) имеют при $l = h$ следующий вид:

$$\nu_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \quad m = \overline{1,\infty}, \tag{2.8.69}$$

$$Z_m(z) = \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right), \quad ||Z_m||^2 = \int\limits_0^h Z_m^2(z)\,dz = \frac{h}{2}. \tag{2.8.70}$$

Итак, из (2.8.64), (2.8.67), (2.8.69) получаем собственные значения исходной задачи (2.8.1), (2.8.34), (2.8.35):

$$\lambda_{nkm} = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2, \tag{2.8.71}$$

а соответствующие им собственные функции из (2.8.61), (2.8.68), (2.8.70)

$$v_{nkm} = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)} r}{b}\right)\cos(2n\varphi)\sin(\pi m z/h), \tag{2.8.72}$$

$$n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},\ m = \overline{1,\infty},$$

$$||v_{nkm}|| = \int\limits_0^h \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^b v^2_{nkm}(r,\varphi,z) r\, dr\, d\varphi\, dz = \pi h \left(b\, J'_{2n}(\mu_k^{(2n)}) \right)^2 \frac{(\delta_{n0}+1)}{16},$$

$$n = \overline{0,\infty},\ k = \overline{1,\infty},\ m = \overline{1,\infty}.$$

Замечание. Функция Грина краевой задачи

$$\triangle u = -f(r,\varphi,z), \quad D = \{(r,\varphi,z):\ 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2,\ 0 < z < h\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_1(r,z), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = g_2(r,z),\ (0 < r < b,\ 0 < z < h),$$

$$u\Big|_{r=b} = g_3(\varphi,z),\ (0 < \varphi < \pi/2,\ 0 < z < h),$$

$$u\Big|_{z=0} = g_4(r,\varphi), \quad u\Big|_{z=h} = g_5(r,\varphi),\ (0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2)$$

имеет вид (2.22)

$$G(r,\varphi,z;\rho,\psi,\varsigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_{nkm}(r,\varphi,z) v_{nkm}(\rho,\psi,\varsigma)}{||v_{nkm}||^2 \lambda_{nkm}},$$

где $v_{nkm}(r,\varphi,z)$, λ_{nkm} заданы формулами (2.8.72), (2.8.71).

Решение этой краевой задачи запишется с помощью функции Грина

$$u(r,\varphi,z) = \int\limits_0^h \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^b f(\rho,\psi,\varsigma) G(r,\varphi,z;\rho,\psi,\varsigma) \rho\, d\rho\, d\psi\, d\varsigma -$$

$$- \int\limits_0^h \int\limits_0^b g_1(\rho,\varsigma) G(r,\varphi,z;\rho,0,\varsigma) \rho\, d\rho\, d\varsigma + \int\limits_0^h \int\limits_0^b g_2(\rho,\varsigma) G(r,\varphi,z;\rho,\pi/2,\varsigma) \rho\, d\rho\, d\varsigma -$$

$$- \int\limits_0^h \int\limits_0^{\pi/2} g_3(\psi,\varsigma) \frac{\partial G(r,\varphi,z;b,\psi,\varsigma)}{\partial \rho}\, d\psi\, d\varsigma + \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^b g_4(\rho,\psi) \frac{\partial G(r,\varphi,z;\rho,\psi,0)}{\partial \varsigma} \rho\, d\rho\, d\psi -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^b g_5(\rho,\psi) \frac{\partial G(r,\varphi,z;\rho,\psi,h)}{\partial \varsigma} \rho\, d\rho\, d\psi.$$

Ответ. 1) Собственные значения

$$\lambda_{nkm} = n^2 + (2k)^2 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)^2, \quad n = \overline{1,\infty},\ k = \overline{0,\infty},\ m = \overline{0,\infty},$$

соответствующие им собственные функции

$$v_{nkm}(x,y,z)=\sin(nx)\cos(2ky)\cos\left(\frac{2m+1}{2}z\right),$$

$$n=\overline{1,\infty},\ k=\overline{0,\infty},\ m=\overline{0,\infty}.$$

2) Собственные значения

$$\lambda_{nkm}=\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2+\left(\frac{\nu_k^{(n)}}{b}\right)^2,\quad n=\overline{0,\infty},\ k=\overline{1,\infty},\ m=\overline{0,\infty},$$

соответствующие им собственные функции

$$v_{nkm}(r,\varphi,z)=J_n\left(\frac{\nu_k^{(n)}r}{b}\right)(A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi))\cos\left(\frac{\pi mz}{h}\right),$$

$$n=\overline{0,\infty},\ k=\overline{1,\infty},\ m=\overline{0,\infty},\quad \forall A_n,B_n,\quad |A_n|+|B_n|\neq 0.$$

3) Собственные значения

$$\lambda_{nkm}=\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2+\left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2,\quad n=\overline{0,\infty},\ k=\overline{1,\infty},\ m=\overline{1,\infty},$$

соответствующие им собственные функции

$$v_{nkm}(r,\varphi,z)=J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi)\sin\left(\frac{\pi mz}{h}\right),$$

$$n=\overline{0,\infty},\ k=\overline{1,\infty},\ m=\overline{1,\infty}.$$

Задача 2.8.2. Найти собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора Лапласа прямоугольного параллелепипеда, прямого кругового цилиндра или сектора прямого кругового цилиндра с заданными граничными условиями.

1. $v\Big|_{z=0}=v\Big|_{z=h}=v\Big|_{r=b}=0.$

2. $v\Big|_{\varphi=0}=v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}=v\Big|_{r=b}=v_z\Big|_{z=0}=v\Big|_{z=h}=0.$

3. $v\Big|_{x=0}=v\Big|_{x=\pi}=v_y\Big|_{y=0}=v\Big|_{y=\pi/2}=v\Big|_{z=0}=v_z\Big|_{z=\pi}=0.$

4. $v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

5. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/3} = v_r\Big|_{r=b} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

6. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

7. $v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = v\Big|_{r=b} = 0.$

8. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = 0.$

9. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

10. $v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

11. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = v\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

12. $v\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

13. $v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = v\Big|_{r=b} = 0.$

14. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = v_r\Big|_{r=b} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

15. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

16. $v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = v_r\Big|_{r=b} = 0.$

17. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = v_z\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = 0.$

18. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

19. $v_z\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = v\Big|_{r=b} = 0.$

20. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi} = v_r\Big|_{r=b} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

21. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=\pi} = 0.$

22. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = v\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = 0.$

23. $v\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi/2} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

24. $v\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = v\Big|_{r=b} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

25. $v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=\pi/2} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=\pi} = 0.$

26. $v\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi} = v_r\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = 0.$

27. $v_x\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=\pi/2} = v\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=\pi} = 0.$

28. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v\Big|_{\varphi=\pi/4} = v_r\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=h} = 0.$

29. $v_x\Big|_{x=0} = v_x\Big|_{x=\pi} = v_y\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=\pi/2} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=\pi} = 0.$

30. $v_\varphi\Big|_{\varphi=0} = v_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = v\Big|_{r=b} = v\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=h} = 0.$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Математическая модель, описывающая нестационарное распределение температуры тела, занимающего объем D, ограниченный поверхностью ∂D, представляет собой начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности [2, 4, 5, 10—12]

$$c(\bar{x})\rho(\bar{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k(\bar{x}) \operatorname{grad} u\right) + \tilde{f}(\bar{x}, t), \quad \bar{x} \in D, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

с граничным условием на поверхности ∂D и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D \cup \partial D. \tag{3.2}$$

Здесь $u(\bar{x}, t)$ — искомая *температура* тела, $k(\bar{x})$ — известный *коэффициент теплопроводности*, $\tilde{f}(\bar{x}, t)$ — известная *объемная плотность* *источников* тепла, $c(\bar{x})$ — *удельная теплоемкость*, $\rho(\bar{x})$ — *плотность массы тела.*

Если на границе ∂D поддерживается заданная температура $\mu(\bar{x},t)$, рассматривается *граничное условие первого рода (условие Дирихле)*

$$u\Big|_{\partial D} = \mu(\bar{x},t), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Если на границе ∂D задан тепловой поток $\psi(\bar{x},t)$, рассматривается *граничное условие второго рода (условие Неймана)*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = \nu(\bar{x},t), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{3.4}$$

где $\nu(\bar{x},t) = -\psi(\bar{x},t)/k(\bar{x})$, $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D.

Если на поверхности ∂D происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой заданной температуры $u_0(\bar{x},t)$, рассматривают *граничное условие третьего рода (условие Робена)*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + h(\bar{x})u\right)\Big|_{\partial D} = \mu(\bar{x},t), \quad \bar{x} \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{3.5}$$

где $h(\bar{x}) = \tilde{h}(\bar{x})/k(\bar{x})$, $\mu(\bar{x},t) = h(\bar{x})u_0(\bar{x},t)$, $\tilde{h}(\bar{x})$ — *коэффициент теплообмена.*

В том случае, когда коэффициенты в уравнении (3.1) постоянны: $c(\bar{x}) = \mathrm{const}$, $\rho(\bar{x}) = \mathrm{const}$, $k(\bar{x}) = \mathrm{const}$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\bar{x},t), \tag{3.6}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f(\bar{x},t) = \dfrac{\tilde{f}(\bar{x},t)}{c\rho}$.

Замечание [2, 4, 5, 10—12]. Уравнение теплопроводности (3.1) описывает распространение концентрации вещества $u(\bar{x},t)$ в изотропной среде, где $\rho \equiv 1$, $c(\bar{x})$ — коэффициент пористости, $k(\bar{x})$ — коэффициент диффузии, $\tilde{f}(\bar{x},t)$ — объемная плотность источников вещества при химической реакции.

Уравнение (3.6) описывает распространение электромагнитных волн в однородной, изотропной среде с большой проводимостью, когда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости.

В этом уравнении u — одна из компонент напряженностей электрического $\bar{E}=(E_x,E_y,E_z)$ или магнитного $\bar{H}=(H_x,H_y,H_z)$ полей, $a^2=\dfrac{1}{\sigma\mu}$, σ — электрическая проводимость среды, μ — абсолютная магнитная проницаемость.

В дальнейшем будем рассматривать начально-краевые задачи для уравнения (3.6) с граничными условиями (3.3) или (3.4) или (3.5) и начальным условием (3.2).

Изложим *метод разделения переменных решения начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности.*

Рассмотрим задачу для *однородного* ДУ (3.6) ($f(\bar{x},t)\equiv 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u,\quad \bar{x}\in D,\quad t>0, \tag{3.7}$$

с *однородными* граничными условиями вида (3.4), (3.5), (3.6) ($g_i(\bar{x},t)\equiv 0$)

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}+\beta u\right)\Big|_{\partial D}=0,\quad |\alpha|+|\beta|\not\equiv 0 \tag{3.8}$$

и начальным условием (3.2).

Ищем частные решения ДУ (3.7), удовлетворяющие однородным граничным условиям (3.8) в виде

$$u(\bar{x},t)=v(\bar{x})T(t)\not\equiv 0. \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в уравнение (3.7), разделим переменные

$$T'(t)v(\bar{x})=a^2\,T(t)\,\triangle v(\bar{x})\;\Leftrightarrow\;\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)}=\frac{\triangle v(\bar{x})}{v(\bar{x})}.$$

Последнее равенство выполняется в области ($\bar{x}\in D,\ t>0$), следовательно, левая и правая части равенства постоянны. Обозначим эту константу $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)}=\frac{\triangle v(\bar{x})}{v(\bar{x})}=-\lambda.$$

Отсюда получим ОДУ

$$T'(t)+\lambda\,a^2\,T(t)=0 \tag{3.10}$$

и ДУ

$$\triangle v(\bar{x}) + \lambda\, v(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in D. \tag{3.11}$$

После подстановки (3.9) в граничное условие (3.8), получим

$$T(t)\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0. \tag{3.12}$$

Задача (3.11), (3.12) называется задачей Штурма—Лиувилля нахождения собственных значений λ и соответствующих им собственных функций $v(\bar{x}) \not\equiv 0$ оператора Лапласа в области D с граничными условиями (3.12).

Предположим, что нам известны собственные значения λ_n, $n = \overline{1,\infty}$ и соответствующие им собственные функции $v_n(\bar{x})$, которые образуют ортонормированную полную систему функций в D (свойства собственных значений и собственных функций см. в § 3.8). Рассмотрим ОДУ (3.10) при $\lambda = \lambda_n$, $n = \overline{1,\infty}$. Общие решения этих уравнений

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Итак, частные решения (3.9) найдены:

$$u_n(\bar{x}, t) = v_n(\bar{x}) T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\bar{x}). \tag{3.13}$$

Решение всей задачи (3.7), (3.8), (3.2) ищем в виде функционального ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(\bar{x}), \tag{3.14}$$

предполагая, что его можно дифференцировать один раз по t и два раза по $\bar{x}$. Неизвестные коэффициенты A_n найдем из начального условия (3.2).

Подставим (3.14) в (3.2) и получим

$$g(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, v_n(\bar{x}). \tag{3.15}$$

Следовательно, A_n — коэффициенты Фурье разложения известной функции $g(\bar{x})$ по полной в D системе собственных функций $\{v_n(\bar{x})\}$, $n = \overline{1,\infty}$.

Для определения A_n воспользуемся ортогональностью собственных функций:

$$\iiint\limits_D v_n(\bar{x}) v_k(\bar{x})\, d\bar{x} = \delta_{nk}.$$

Умножим (3.15) на $v_k(\bar{x})$, проинтегрируем по $\bar{x}$ в D и получим

$$\iiint\limits_D g(\bar{x})v_k(\bar{x})\,d\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \iiint\limits_D v_n(\bar{x})v_k(\bar{x})\,d\bar{x} = A_k, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{3.16}$$

Итак, решением исходной задачи (3.7), (3.8), (3.2) является функция $u(\bar{x},t)$, заданная функциональным рядом (3.14), где A_n вычисляются по формулам (3.16).

Теперь рассмотрим *метод решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности.*

Рассмотрим задачу для *неоднородного* ДУ (3.6) с *однородными* граничными условиями (3.8) и начальным условием (3.2).

Предположим, что нам известны собственные значения λ_n и собственные функции $v_n(\bar{x})$ задачи Штурма—Лиувилля (3.11), (3.12), которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (3.7) с граничными условиями (3.8).

Будем искать решение нашей задачи (3.6), (3.8), (3.2) в виде разложения в ряд по собственным функциям $v_n(\bar{x})$, $n = \overline{1,\infty}$

$$u(\bar{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(\bar{x}), \tag{3.17}$$

где $u_n(t)$ *неизвестны.* Известные функции $f(\bar{x},t)$ и $g(\bar{x})$ также разложим в ряды по собственным функциям

$$f(\bar{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(\bar{x}), \tag{3.18}$$

$$g(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\, v_n(\bar{x}), \tag{3.19}$$

где коэффициенты разложений $f_n(t)$ и g_n вычисляются по формулам

$$f_n(t) = \iiint\limits_D f(\bar{x},t)v_n(\bar{x})\,d\bar{x}, \tag{3.20}$$

$$g_n = \iiint\limits_D g(\bar{x})v_n(\bar{x})\,d\bar{x}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{3.21}$$

Предположим, что ряд (3.17) можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по $\bar{x}$. Подставим (3.17), (3.18) в (3.6) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{du_n}{dt}v_n(\bar{x})-a^2\,\triangle v_n(\bar{x})u_n(t)-f_n(t)v_n(\bar{x})\right\}=0.$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{du_n}{dt}+a^2\,\lambda_n\,u_n(t)-f_n(t)\right\}v_n(\bar{x})=0, \tag{3.22}$$

если заметить, что из (3.11) $\triangle v_n(\bar{x})=-\lambda_n v_n(\bar{x})$.

В силу полноты в D системы собственных функций $v_n(\bar{x})$ из (3.22) следует

$$\frac{du_n(t)}{dt}+a^2\,\lambda_n\,u_n(t)=f_n(t),\quad n=\overline{1,n}. \tag{3.23}$$

Подставим (3.17) и (3.19) в начальное условие (3.2) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{u_n(0)-g_n\}\,v_n(\bar{x})=0\;\Rightarrow\;u_n(0)=g_n,\quad n=\overline{1,n}. \tag{3.24}$$

Решение задач Коши для $u_n(t)$ (3.23), (3.24) можно получить, например, операционным методом:

$$u_n(t)=\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau+g_ne^{-a^2\lambda_n t}. \tag{3.25}$$

Подставим (3.25) в (3.17) и формально получим решение задачи (3.6), (3.8), (3.2) для неоднородного уравнения.

После подстановки (3.25) в (3.17) и учета выражений для коэффициентов Фурье (3.20) и (3.21) получим представление решения задачи (3.6), (3.8), (3.2) с помощью функции Грина

$$u(\bar{x},t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_D f(\bar{y},\tau)G(\bar{x},\bar{y};t,\tau)\,d\bar{y}\,d\tau+\iiint\limits_D g(\bar{y})G(\bar{x},\bar{y};t,0)\,d\bar{y}, \tag{3.26}$$

где

$$G(\bar{x},\bar{y};t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}v_n(\bar{y})v_n(\bar{x}) \tag{3.27}$$

— *функция Грина*, или *функция влияния точечного источника.*

Замечание. Решение начально-краевой задачи (3.6), (3.2) с *неоднородным граничным условием* вида (3.3)—(3.5)

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\bar{n}}+\beta u\right)\Big|_{\partial D}=\mu(\bar{x},t),\quad\bar{x}\in\partial D,\quad|\alpha|+|\beta|\neq0 \tag{3.28}$$

можно свести к решению задачи с неоднородным уравнением, неоднородным начальным условием и *однородным* граничным условием. Для этого надо искать решение в виде

$$u(\bar{x}, t) = U(\bar{x}, t) + \mathrm{w}(\bar{x}, t),$$

где $U(\bar{x}, t)$ — новая неизвестная функция, а $\mathrm{w}(\bar{x}, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по $\bar{x}$ и один раз по t выбранная функция, которая удовлетворяет граничному условию (3.5).

В прил. 5 приведены примеры таких функций $\mathrm{w}(x, t)$ в случае одной пространственной переменной.

В случае *нестационарного неоднородного* граничного условия (3.5) можно использовать принцип Дюамеля, позволяющий свести решение задачи к решению задачи с более простым граничным условием. Решение начально-краевой задачи для однородного уравнения (3.1) ($\tilde{f}(\bar{x}, t) \equiv 0$) с однородным начальным условием (3.2) ($g(\bar{x}) \equiv 0$) и неоднородным граничным условием (3.5) находится по формуле

$$u(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t v(\bar{x}, t - \tau) \mu(\bar{x}, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial v(\bar{x}, t - \tau)}{\partial t} \mu(\bar{x}, \tau)\, d\tau =$$

$$= v(\bar{x}, t) \mu(\bar{x}, 0) + \int\limits_0^t v(\bar{x}, t - \tau) \frac{\partial \mu(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau,$$

где $v(\bar{x}, t)$ — решение вспомогательной задачи для однородного уравнения (3.1) с однородным граничным условием (3.2) и более простым граничным условием (α и β не зависят от t):

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_{\partial D} = 1, \qquad |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

3.1. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности на отрезке

Пример 3.1.1. Методом разделения переменных найти решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad D = \{x: \ 0 < x < \pi/4\}, \quad 0 < t \tag{3.1.1}$$

с граничными условиями на ∂D

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=\pi/4} = 0, \quad 0 \leq t \tag{3.1.2}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = 2\cos 2x - 3\cos 6x, \quad 0 \le x \le \pi/4. \tag{3.1.3}$$

Решение. Сначала найдем частные решения *однородного* уравнения (3.1.1), удовлетворяющие *однородным* граничным условиям (3.1.2) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0. \tag{3.1.4}$$

Подставим (3.1.4) в (3.1.1) и разделим переменные

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{3.1.5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3.1.6}$$

Подставим (3.1.4) в однородные граничные условия (3.1.2) и получим

$$\begin{aligned} T(t)X'(0) = 0 \;&\Rightarrow\; X'(0) = 0,\\ T(t)X(\pi/4) = 0 \;&\Rightarrow\; X(\pi/4) = 0. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (3.1.6), (3.1.7) приведено в прил. 1 (п. б). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi/4$ имеют следующий вид (П1.18), (П1.19):

$$\lambda_n = 4(2n+1)^2,$$

$$X_n(x) = \cos(2(2n+1)x), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Теперь рассмотрим ОДУ (3.1.6) при $\lambda = \lambda_n$:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Итак, мы нашли счетное множество частных решений (3.1.4)

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t}\cos(2(2n+1)x), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Решение исходной задачи (3.1.1)—(3.1.3) будем искать в виде функционального ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n a^2 t}\cos(2(2n+1)x), \tag{3.1.8}$$

предполагая, что его можно дифференцировать один раз по переменной t и два раза по переменной x.

Подставим (3.1.8) в начальное условие (3.1.3) и получим

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(2(2n+1)x). \tag{3.1.9}$$

Для нахождения коэффициентов Фурье A_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0,\pi/4]$:

$$\int_0^{\pi/4}\cos(2(2n+1)x)\cos(2(2k+1)x)\,dx=\frac{\pi}{8}\delta_{nk}.$$

Умножим обе части равенства (3.1.9) на $\cos(2(2k+1)x)$, проинтегрируем по x на интервале $[0,\pi/4]$ и получим

$$\int_0^{\pi/4}g(x)\cos(2(2k+1)x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_0^{\pi/4}\cos(2(2n+1)x)\cos(2(2k+1)x)\,dx=A_k\frac{\pi}{8}.$$

Отсюда находим

$$A_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}g(x)\cos(2(2n+1)x)\,dx. \tag{3.1.10}$$

Подставим эти коэффициенты в (3.1.8), получим решение исходной задачи в виде функционального ряда.

В нашем случае функция $g(x)$ в (3.1.3) имеет вид, позволяющий найти коэффициенты Фурье (3.1.10), не прибегая к интегрированию. После подстановки (3.1.8) в начальное условие (3.1.3) получим (3.1.9) в виде

$$2\cos 2x-3\cos 6x=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(2(2n+1)x). \tag{3.1.11}$$

Первое слагаемое в левой части является собственной функцией $X_0(x)=\cos 2x$, второе — $X_1(x)=\cos 6x$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (3.1.11), получим

$$A_0 = 2, \quad A_1 = -3, \quad A_n = 0 \text{ при } n \neq 0, 1. \tag{3.1.12}$$

Подставим коэффициенты (3.1.12) в (3.1.8), получим решение исходной задачи.

Ответ. $u(x,t) = 2e^{-4a^2t}\cos 2x - 3e^{-36a^2t}\cos 6x.$

Замечание. Функция Грина (3.27) рассмотренной задачи имеет вид

$$G(x,y;t,\tau) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 4(2n+1)^2(t-\tau)}\cos(2(2n+1)x)\cos(2(2n+1)y),$$

а решение задачи представляется с помощью функции Грина в виде (3.26)

$$u(x,t) = \int\limits_0^{\pi/4} g(y)G(x,y;t,0)\,dy.$$

Задача 3.1.1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с однородными граничными условиями и заданным начальным условием.

1. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin 2x - \sin 3x.$

2. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin x - 3\sin 5x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos x + 3\cos 3x.$

4. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3 + \cos x - 5\cos 2x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - \sin x.$

6. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/2) - \sin(3x/2).$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos(x/2) - 2\cos(5x/2).$

8. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 1 + \cos\,2x - 2\cos\,4x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) - 3\sin\,x.$

10. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/4) - \sin(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\cos(x/4) - \cos(3x/4).$

12. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos(x/2) - \cos\,x.$

13. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\,x - 2\sin\,3x.$

14. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin\,x - \sin\,3x.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\,x - 3\cos\,5x.$

16. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2 - \cos\,x + 3\cos\,2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 3\sin\,2x.$

18. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin(5x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos(x/2) + \cos(3x/2).$

20. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2 - \cos\,2x + \cos\,6x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/2) + \sin\,x.$

22. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/4) - \sin(5x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos(x/4) - 2\cos(5x/4).$

24. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\,x - 3\cos\,2x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\,2x - \sin\,5x.$

26. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\,x + 2\sin\,3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\,x + 2\cos\,3x.$

28. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos\,x - \cos\,3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\,x - 3\sin\,5x.$

30. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(3x/2) - \sin(5x/2).$

Пример 3.1.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < \pi/4\}, \quad 0 < t \tag{3.1.13}$$

с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=\pi/4} = 0, \quad 0 \le t \tag{3.1.14}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = 2\cos\,2x - 3\cos\,6x, \quad 0 \le x \le \pi/4, \tag{3.1.15}$$

где функция

$$f(x,t) = \cos\,2t\cos\,10x. \tag{3.1.16}$$

Решение. Сначала решим вспомогательную задачу Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (3.1.13) при $f(x,t) \equiv 0$ с однородными граничными условиями (3.1.14) (см. пример 3.1.1 (3.1.6), (3.1.7)):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X(\pi/4) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи приведено в прил. 1 (п. б). Собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют следующий вид (П1.18), (П1.19) при $l = \pi/4$:

$$\begin{gathered} \lambda_n = 4(2n+1)^2, \\ X_n(x) = \cos(2(2n+1)x), \quad n = \overline{0, \infty}. \end{gathered} \tag{3.1.17}$$

Решение исходной задачи (3.1.13)—(3.1.16) будем искать в виде разложения в функциональный ряд по собственным функциям (3.1.17) с неизвестными коэффициентами $u_n(t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(2(2n+1)x), \tag{3.1.18}$$

предполагая, что его можно дифференцировать один раз по переменной t и два раза по переменной x.

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд по собственным функциям

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(2(2n+1)x). \tag{3.1.19}$$

В нашем случае коэффициенты Фурье $f_n(t)$ легко находятся. Равенство (3.1.19) имеет вид

$$\cos 2t \cos 10x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(2(2n+1)x), \tag{3.1.20}$$

где в левой части $\cos 10x = X_2(x)$ — собственная функция.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (3.1.20), получим

$$f_2(t) = \cos 2t, \quad f_n(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 2. \tag{3.1.21}$$

Разложим функцию $g(x)$ в ряд по собственным функциям

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(2(2n+1)x). \tag{3.1.22}$$

В нашей задаче коэффициенты Фурье g_n легко находятся. Равенство (3.1.22) имеет вид

$$2\cos 2x - 3\cos 6x = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(2(2n+1)x), \tag{3.1.23}$$

где в левой части $\cos 2x = X_0(x)$, $\cos 6x = X_1(x)$ — собственные функции. Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (3.1.23), получим

$$g_0 = 2, \quad g_1 = -3, \quad g_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 0, 1. \tag{3.1.24}$$

Подставим (3.1.18) и (3.1.19) в уравнение (3.1.13):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{du_n(t)}{dt} + a^2 2^2 (2n+1)^2 u_n(t) - f_n(t) \right\} \cos(2(2n+1)x) = 0.$$

В фигурной скобке $\{\cdot\}$ — коэффициенты Фурье разложения нуля по полной системе собственных функций, следовательно, они равны нулю. Отсюда получаем ОДУ для искомых коэффициентов $u_n(t)$

$$\frac{du_n(t)}{dt} + a^2 4(2n+1)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{3.1.25}$$

Подставим (3.1.18) и (3.1.22) в начальное условие (3.1.15) и получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{u_n(0) - g_n\} \cos(2(2n+1)x) = 0 \ \Rightarrow \ u_n(0) = g_n. \tag{3.1.26}$$

Искомые функции $u_n(t)$ являются решениями задач Коши (3.1.25), (3.1.26) для ОДУ. В нашем случае, учитывая (3.1.21), (3.1.24), все задачи Коши (3.1.25), (3.1.26) при $n \neq 0, 1, 2$ имеют решения $u_n(t) \equiv 0$, так как уравнения однородны ($f_n(t) \equiv 0$ при $n \neq 2$) и начальные условия нулевые ($g_n = 0$ при $n \neq 0, 1$). Задачи Коши при $n = \{0, 1, 2\}$ имеют следующий вид:

$$\frac{du_0(t)}{dt} + a^2 4 u_0(t) = 0, \quad u_0(0) = 2; \tag{3.1.27}$$

$$\frac{du_1(t)}{dt} + a^2 36 u_1(t) = 0, \quad u_1(0) = -3; \tag{3.1.28}$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} + a^2 100 u_2(t) = \cos 2t, \quad u_2(0) = 0. \tag{3.1.29}$$

Решим задачу (3.1.27). Общее решение ДУ

$$u_0(t) = A_0 e^{-a^2 4t}$$

подставим в начальное условие и получим

$$u_0(0) = A_0 = 2.$$

Решением задачи Коши (3.1.27) является функция

$$u_0(t) = 2e^{-a^2 4t}. \tag{3.1.30}$$

Аналогично находится решение задачи Коши (3.1.28):

$$u_1(t) = -3e^{-a^2 36t}. \tag{3.1.31}$$

Найдем общее решение ДУ (3.1.29) методом вариации постоянной. Общее решение соответствующего однородного ДУ имеет вид

$$u(t) = A_2 e^{-a^2 100t}.$$

Общее решение неоднородного ДУ будем искать в виде

$$u_2(t) = A_2(t) e^{-a^2 100t}. \tag{3.1.32}$$

Подставим (3.1.32) в ДУ (3.1.29) и получим

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = e^{a^2 100t} \cos 2t.$$

Отсюда находим

$$A_2(t) = \frac{1}{(10a)^4 + 4} e^{a^2 100t} (a^2 100 \cos 2t + 2 \sin 2t) + \tilde{A}_2.$$

Общее решение неоднородного ДУ (3.1.29) имеет вид

$$u_2(t) = \frac{1}{(10a)^4 + 4} (a^2 100 \cos 2t + 2 \sin 2t) + \tilde{A}_2 e^{-a^2 100t}.$$

Найдем $\tilde{A}_2$, подставив полученное выражение в начальное условие $u_2(0) = 0$. Решение задачи Коши (3.1.29) примет вид

$$u_2(t) = \frac{1}{(10a)^4 + 4} (a^2 100 \cos 2t + 2 \sin 2t - a^2 100 e^{-a^2 100t}). \tag{3.1.33}$$

Подставим (3.1.30), (3.1.31), (3.1.33) и $u_n(t) \equiv 0$ при $n \neq \{0, 1, 2\}$ в (3.1.18) и получим решение исходной задачи.

Ответ. $u(x,t) = 2e^{-a^2 4t}\cos 2x - 3e^{-a^2 36t}\cos 6x +$

$$+\frac{1}{(10a)^4+4}(a^2 100\cos 2t + 2\sin 2t - a^2 100 e^{-a^2 100t})\cos 10x.$$

Замечание. Функция Грина (3.8) рассмотренной задачи имеет вид

$$G(x,y;t,\tau) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 4(2n+1)^2(t-\tau)}\cos(2(2n+1)x)\cos(2(2n+1)y),$$

а решение задачи представляется с помощью функции Грина в виде (3.10)

$$u(x,t) = \int_0^{\pi/4} g(y)G(x,y;t,0)\,dy + \int_0^t\int_0^{\pi/4} f(y,\tau)G(x,y;t,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Задача 3.1.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < l\}, \quad 0 < t$$

с однородными граничными условиями и заданным начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \quad (0 < x < l).$$

1. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \sin x\cos t, \quad g(x) = 3\sin 2x - \sin 3x.$

2. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = 2\sin 3x\cos t, \quad g(x) = 2\sin x - 3\sin 5x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = \cos 5x\sin t, \quad g(x) = 2\cos x + 3\cos 3x.$

4. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = 2\cos 3x\sin t, \quad g(x) = 3 + \cos x - 5\cos 2x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \sin x\cos t, \quad g(x) = 2\sin(x/2) - \sin x.$

6. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(5x/2)\sin\, t, \quad g(x) = 3\sin(x/2) - \sin(3x/2).$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(3x/2)\cos\, t, \quad g(x) = \cos(x/2) - 2\cos(5x/2).$

8. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos\, 2x\cos\, t, \quad g(x) = 1 + \cos\, 2x - 2\cos\, 4x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin\, x\sin\, 3t, \quad g(x) = \sin(x/2) - 3\sin\, x.$

10. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/4)\sin\, 2t, \quad g(x) = 2\sin(x/4) - \sin(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/4)\sin\, t, \quad g(x) = 3\cos(x/4) - \cos(3x/4).$

12. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos\, 2x\cos\, t, \quad g(x) = 2\cos(x/2) - \cos\, x.$

13. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, 2x \cdot t, \quad g(x) = \sin\, x - 2\sin\, 3x.$

14. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x\sin\, t, \quad g(x) = 3\sin\, x - \sin\, 3x.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 3x\sin\, t, \quad g(x) = \cos\, x - 3\cos\, 5x.$

16. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, x\cos\, t, \quad g(x) = 2 - \cos\, x + 3\cos\, 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x \cdot t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 3\sin\, 2x.$

18. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin(3x/2)\sin\, t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 2\sin(5x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/2)\sin\, 2t, \quad g(x) = 2\cos(x/2) + \cos(3x/2).$

20. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 4x\sin\, t, \quad g(x) = 2 - \cos\, 2x + \cos\, 6x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\sin\, 2x\sin\, t, \quad g(x) = 3\sin(x/2) + \sin\, x.$

22. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/4)\cos\, t, \quad g(x) = \sin(x/4) - \sin(5x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos(3x/4)\cos\, t, \quad g(x) = \cos(x/4) - 2\cos(5x/4).$

24. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\cos\, x\sin\, t, \quad g(x) = \cos\, x - 3\cos\, 2x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x\sin\, t, \quad g(x) = \sin\, 2x - \sin\, 5x.$

26. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, 5x \cdot t, \quad g(x) = \sin\, x + 2\sin\, 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, x\cos\, t, \quad g(x) = \cos\, x + 2\cos\, 3x.$

28. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\cos 2x \sin 2t, \quad g(x) = 2\cos x - \cos 3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin 2x \sin t, \quad g(x) = \sin x - 3\sin 5x.$

30. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/2)\cos t, \quad g(x) = \sin(3x/2) - \sin(5x/2).$

3.2. Метод разделения переменных в прямоугольной области, круговом секторе, прямоугольном параллелепипеде, прямом круговом цилиндре и секторе прямого кругового цилиндра

Пример 3.2.1. 1) Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u + f(x,y,t), \quad D = \{(x,y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2\}, \quad 0 < t \tag{3.2.1}$$

с граничными условиями на ∂D

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad 0 \le t \tag{3.2.2}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x,y) = 2\sin x \cos 2y, \quad (x,y) \in D, \tag{3.2.3}$$

где

$$f(x,y) = 3\sin 2x \cos 4y \cos t. \tag{3.2.4}$$

2) Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в круговом секторе D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u + f(r,\varphi,t), \quad D = \{(r,\varphi) : 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2\}, \quad 0 < t \tag{3.2.5}$$

с граничными условиями на ∂D

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0, \quad 0 \le t \tag{3.2.6}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi, \tag{3.2.7}$$

где

$$f(r,\varphi,t) = 2J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)} r}{b}\right)\sin t, \tag{3.2.8}$$

μ_k^{2n} — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение. 1) Сначала найдем решение задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (3.2.1) при $f(x,y,t) \equiv 0$ с однородными граничными условиями (3.2.2). Решение этой задачи приведено в примере 3.8.1. Собственные значения и соответствующие им собственные функции задаются формулами (3.8.19), (3.8.20)

$$\lambda_{nk} = n^2 + (2k)^2, \quad v_{nk}(x,y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad ||v_{nk}||^2 = \frac{\pi^2(\delta_{k0}+1)}{8},$$

$$n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Решение исходной задачи будем искать в виде разложения в ряд по этим собственным функциям, предполагая возможность его дифференцировать два раза по пространственным переменным (x,y) и один раз по переменной t:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk}(t)v_{nk}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk}(t)\sin(nx)\cos(2ky). \tag{3.2.9}$$

Известные функции $f(x,y,t)$ и $g(x,y)$ (3.2.3) и (3.2.4) также разложим по системе собственных функций $v_{nk}(x,y)$

$$f(x,y,t) = 3\sin 2x\cos 4y\,\cos t = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}(t)v_{nk}(x,y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}(t)\sin(nx)\cos(2ky), \tag{3.2.10}$$

$$g(x,y) = 2\sin\, x\cos\, 2y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g_{nk}v_{nk}(x,y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g_{nk}\sin(nx)\cos(2ky), \tag{3.2.11}$$

где

$$f_{nk}(t) = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D f(x,y,t)v_{nk}(x,y)\,dxdy,$$

$$g_{nk} = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D g(x,y)v_{nk}(x,y)\,dxdy, \quad n=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

В нашем конкретном случае коэффициенты Фурье $f_{nk}(t)$ и g_{nk} можно найти, не прибегая к интегрированию.

Заметим, что $v_{22}(x,y) = \sin\, 2x\cos\, 4y$, $\;v_{11}(x,y) = \sin\, x\cos\, 2y$, сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в (3.2.10) и (3.2.11) и получим

$$\begin{gathered} f_{22}(t) = 3\cos\, t, \quad f_{nk}(t) \equiv 0 \text{ при } (n,k) \neq (2,2), \\ g_{11} = 2, \quad g_{nk} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (1,1). \end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Подставим (3.2.9), (3.2.10) в ДУ (3.2.1) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{du_{nk}(t)}{dt} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) - f_{nk}(t)\right\}v_{nk}(x,y) = 0.$$

В силу полноты системы собственных функций в D получим ОДУ

$$\frac{du_{nk}(t)}{dt} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) = f_{nk}(t), \quad n=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{0,\infty}. \tag{3.2.13}$$

После подстановки (3.2.9) и (3.2.11) в начальное условие (3.2.3) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\{u_{nk}(0) - g_{nk}\}v_{nk}(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; u_{nk}(0) = g_{nk}, \tag{3.2.14}$$

$$n=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Все задачи Коши (3.2.13), (3.2.14), кроме двух: при $(n,k)=(1,1)$ и $(n,k)=(2,2)$, имеют однородные ДУ и однородные начальные условия (3.2.12), следовательно, $u_{nk}\equiv 0$ при $(n,k)\neq(1,1)$ и $(n,k)\neq(2,2)$. Решениями остальных задач Коши

$$\frac{du_{11}(t)}{dt}+a^2\lambda_{11}u_{11}(t)=0, \quad u_{11}(0)=2;$$

$$\frac{du_{22}(t)}{dt}+a^2\lambda_{22}u_{22}(t)=3\cos t, \quad u_{22}(0)=0$$

являются функции

$$u_{11}(t)=2e^{-a^2\lambda_{11}t}=2e^{-a^2 5t}, \tag{3.2.15}$$

$$u_{22}(t)=3\frac{\sin t+a^2 20\cos t-a^2 20e^{-a^2 20t}}{a^4 400+1}. \tag{3.2.16}$$

Подставим (3.2.15), (3.2.16) и $u_{nk}(t)\equiv 0$ при $(n,k)\neq(1,1)$, $(n,k)\neq(2,2)$ в (3.2.9) и получим решение задачи (3.2.1)—(3.2.4):

$$u(x,y,t)=2e^{-a^2 5t}\sin x\cos 2y+$$

$$+3\frac{(\sin t+a^2 20\cos t-a^2 20e^{-a^2 20t})\sin 2x\cos 4y}{a^4 400+1}. \tag{3.2.17}$$

2) Сначала найдем решение задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (3.2.5) при $f(r,\varphi,t)\equiv 0$ с однородными граничными условиями (3.2.6). Решение этой задачи приведено в примере 3.8.1. Собственные значения и соответствующие им собственные функции задаются формулами (3.8.28), (3.8.29)

$$\lambda_{nk}=\left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2, \quad v_{nk}(r,\varphi)=J_{2n}(\sqrt{\lambda_{nk}}r)\cos(2n\varphi),$$

$$||v_{nk}||^2=\pi\left(bJ'_{2n}(\mu_k^{(2n)})\right)^2\frac{(\delta_{n0}+1)}{8}, \quad n=\overline{0,\infty}, \quad k=\overline{1,\infty},$$

где $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu)=0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение исходной задачи будем искать в виде разложения в ряд по этим собственным функциям, предполагая возможность его дифференцировать два раза по пространственным переменным (r, φ) и один раз по переменной t:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(t)J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi). \tag{3.2.18}$$

Известные функции $f(r,\varphi,t)$ и $g(r,\varphi)$ (3.2.8), (3.2.7) также разложим по системе собственных функций $v_{nk}(r,\varphi)$

$$f(r,\varphi,t) = 2J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)}r}{b}\right)\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \tag{3.2.19}$$

$$g(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \tag{3.2.20}$$

где

$$f_{nk}(t) = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D f(r,\varphi,t)v_{nk}(r,\varphi)r\,drd\varphi,$$

$$g_{nk} = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D g(r,\varphi)v_{nk}(r,\varphi)\,drd\varphi, \quad n=\overline{0,\infty}, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

В нашем конкретном случае коэффициенты Фурье $f_{nk}(t)$ и g_{nk} можно найти, не прибегая к интегрированию.

Заметим, что $v_{02}(r,\varphi) = J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)}r}{b}\right)$, $\quad v_{11}(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi$.

Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в (3.2.19) и (3.2.20) и получим

$$f_{02}(t) = 2\sin t, \quad f_{nk}(t) \equiv 0 \text{ при } (n,k) \neq (0,2),$$
$$g_{11} = 1, \quad g_{nk} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (1,1). \tag{3.2.21}$$

Подставим (3.2.18), (3.2.19) в ДУ (3.2.5) и получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{du_{nk}(t)}{dt} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) - f_{nk}(t)\right\}v_{nk}(r,\varphi) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{du_{nk}(t)}{dt} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) = f_{nk}(t), \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{3.2.22}$$

После подстановки (3.2.18), (3.2.20) в начальное условие (3.2.7) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{u_{nk}(0) - g_{nk}\}v_{nk}(r,\varphi) = 0 \;\Rightarrow\; u_{nk}(0) = g_{nk}, \tag{3.2.23}$$

$$n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Если найти решения задач Коши (3.2.22), (3.2.23) $u_{nk}(t)$ и подставить в (3.2.18), получим решение исходной задачи (3.2.5)—(3.2.8) в виде функционального ряда.

Все задачи Коши (3.2.22), (3.2.23), кроме двух: при $(n,k) = (0,2)$ и $(n,k) = (1,1)$, имеют однородные ДУ и однородные начальные условия (3.2.21), следовательно, $u_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (0,2)$ и $(n,k) \neq (1,1)$.

Решениями задач Коши

$$\frac{du_{11}(t)}{dt} + a^2\lambda_{11}u_{11}(t) = 0, \quad u_{11}(0) = 1;$$

$$\frac{du_{02}(t)}{dt} + a^2\lambda_{02}u_{02}(t) = 2\sin t, \quad u_{02}(0) = 0$$

являются функции

$$u_{11}(t) = e^{-a^2\lambda_{11}t}, \tag{3.2.24}$$

$$u_{02}(t) = \frac{2(e^{-a^2\lambda_{02}t} + a^2\lambda_{02}\sin t - \cos t)}{1 + a^4\lambda_{02}^2}, \tag{3.2.25}$$

где $\lambda_{02} = \left(\dfrac{\mu_2^{(0)}}{b}\right)^2$, $\lambda_{11} = \left(\dfrac{\mu_1^{(2)}}{b}\right)^2$.

Подставим (3.2.24), (3.2.25) в (3.2.18) и получим решение задачи (3.2.5)—(3.2.8):

$$u(r,\varphi,t)=\frac{2(e^{-a^2\lambda_{02}t}+a^2\lambda_{02}\sin t-\cos t)J_0(\sqrt{\lambda_{02}}\,r)}{1+a^4\lambda_{02}^2}+$$

$$+e^{-a^2\lambda_{11}t}J_2(\sqrt{\lambda_{11}}\,r)\cos 2\varphi.$$

Ответ. 1) $u(x,y,t)=2e^{-a^25t}\sin x\cos 2y+$

$$+3\frac{(\sin t+a^2 20\cos t-a^2 20e^{-a^2 20t})\sin 2x\cos 4y}{a^4 400+1}.$$

$$2)\ u(r,\varphi,t)=\frac{2(e^{-a^2\lambda_{02}t}+a^2\lambda_{02}\sin t-\cos t)J_0(\sqrt{\lambda_{02}}\,r)}{1+a^4\lambda_{02}^2}+$$

$$+e^{-a^2\lambda_{11}t}J_2(\sqrt{\lambda_{11}}\,r)\cos 2\varphi,$$

где $\sqrt{\lambda_{nk}}=\dfrac{\mu_k^{(2n)}}{b}$, $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu)=0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Задача 3.2.1. Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

в прямоугольнике или в круговом секторе с однородными граничными условиями, как в задаче 3.8.1, и начальным условием

$$u\Big|_{t=0}=g.$$

1. $u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=\pi}=u_y\Big|_{y=0}=u\Big|_{y=\pi/2}=0,$

   $f(x,y,t)=2\sin x\cos y\cos t,\quad g(x,y)=\sin 2x\cos 3y.$

2. $u\Big|_{\varphi=0}=u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}=u\Big|_{r=b}=0,$

   $f(r,\varphi,t)=2J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\sin 2\varphi\sin t,\quad g(r,\varphi)=J_6(\mu_2^{(6)}r/b)\sin 6\varphi.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x, y, t) = 3\cos\, x\cos\, y\sin\, t, \quad g(x, y) = 2\cos\, 3x\cos\, 2y.$

4. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_3(\nu_1^{(3)} r/b)\sin\, 3\varphi\cos\, t, \quad g(r, \varphi) = J_6(\nu_2^{(6)} r/b)\sin\, 6\varphi.$

5. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x, y, t) = \cos\, 2x\sin\, y\cdot(t+1), \quad g(x, y) = 3\cos\, x\sin\, 3y.$

6. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b)\cos\, \varphi\cdot(t+2), \quad g(r, \varphi) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b)\cos\, 3\varphi.$

7. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x, y, t) = 2\sin\, x\sin\, 2y\sin\, t, \quad g(x, y) = \sin\, 3x\sin\, y.$

8. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b)\cos\, \varphi\cdot t, \quad g(r, \varphi) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b)\cos\, 2\varphi.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x, y, t) = 2\sin\, 2x\cos\, y\cos\, t, \quad g(x, y) = 3\sin\, x\cos\, 2y.$

10. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = 2J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b)\sin(3\varphi/2)\sin\, t,$

$g(r, \varphi) = J_{5/2}(\nu_2^{(5/2)} r/b)\sin(5\varphi/2).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x, y, t) = \cos\, x\sin\, y\sin\, t, \quad g(x, y) = 2\cos\, 3x\sin\, 3y.$

12. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b)\sin\, 2\varphi\cos\, t, \quad g(r, \varphi) = 2J_4(\mu_1^{(4)} r/b)\sin\, 4\varphi.$

13. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x, y, t) = \cos x \sin 2y \cdot t, \quad g(x, y) = \cos 2x \sin y.$

14. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cdot t,$

$g(r, \varphi) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b) \cos(3\varphi/2).$

15. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x, y, t) = 2 \sin 3x \cos y \cos t, \quad g(x, y) = 2 \sin x \cos 3y.$

16. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_4(\mu_2^{(4)} r/b) \cos 4\varphi \sin t, \quad g(r, \varphi) = J_4(\mu_1^{(4)} r/b) \cos 4\varphi.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x, y, t) = 2 \sin 2x \sin y \sin t, \quad g(x, y) = \sin x \sin 3y.$

18. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos 2t, \quad g(r, \varphi) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi.$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x, y, t) = 2 \cos x \sin 2y \cdot t, \quad g(x, y) = \cos 3x \sin y.$

20. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = 2J_1(\nu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos t, \quad g(r, \varphi) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \sin 2\varphi.$

21. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x, y, t) = 2 \cos 2x \cos y \sin 2t, \quad g(x, y) = \cos x \cos 3y.$

22. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r, \varphi, t) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \cos t, \quad g(r, \varphi) = 2J_6(\nu_1^{(6)} r/b) \cos 6\varphi.$

23. $u\Big|_{x=0}= u_x\Big|_{x=\pi/2}= u_y\Big|_{y=0}= u_y\Big|_{y=\pi}= 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin x\cos y\sin t, \quad g(x,y) = \sin 3x\cos 2y.$

24. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0}= u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3}= u\Big|_{r=b}= 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_3(\mu_2^{(3)}r/b)\cos 3\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = 2J_6(\mu_1^{(6)}r/b)\cos 6\varphi.$

25. $u\Big|_{x=0}= u\Big|_{x=\pi}= u\Big|_{y=0}= u\Big|_{y=\pi}= 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin x\sin y\sin t, \quad g(x,y) = \sin 2x\sin y.$

26. $u\Big|_{\varphi=0}= u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi}= u_r\Big|_{r=b}= 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)}r/b)\sin(\varphi/2)\sin t,$

$g(r,\varphi) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)}r/b)\sin(3\varphi/2).$

27. $u_x\Big|_{x=0}= u\Big|_{x=\pi/2}= u_y\Big|_{y=0}= u\Big|_{y=\pi/2}= 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos x\cos 3y\cdot t, \quad g(x,y) = \cos 3x\cos y.$

28. $u\Big|_{\varphi=0}= u\Big|_{\varphi=\pi/4}= u_r\Big|_{r=b}= 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_4(\nu_1^{(4)}r/b)\sin 4\varphi\cos t, \quad g(r,\varphi) = J_8(\nu_2^{(8)}r/b)\sin 8\varphi.$

29. $u_x\Big|_{x=0}= u_x\Big|_{x=\pi}= u_y\Big|_{y=0}= u_y\Big|_{y=\pi}= 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos x\cos 2y\sin t, \quad g(x,y) = \cos 2x\cos y.$

30. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0}= u\Big|_{\varphi=\pi/3}= u\Big|_{r=b}= 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_{3/2}(\mu_1^{(3/2)}r/b)\cos(2\varphi/2)\sin t,$

$g(r,\varphi) = J_{3/2}(\mu_2^{(3/2)}r/b)\cos(3\varphi/2).$

Пример 3.2.2. 1) Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде

$$D = \{(x,y,z) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2,\ 0 < z < \pi\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in D, \quad t > 0 \tag{3.2.26}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.30), (2.8.31):

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=\pi} = 0 \tag{3.2.27}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x,y,z) = 3 \sin 2x \cos 2y \cos(3z/2), \quad (x,y,z) \in D, \tag{3.2.28}$$

где

$$f(x,y,z,t) = \sin x \cos 4y \cos(3z/2) \sin t. \tag{3.2.29}$$

2) Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямом круговом цилиндре

$$D = \{(r, \varphi, z) : \ 0 \le r < b, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 < z < h\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(r,\varphi,z,t), \quad (r,\varphi,z) \in D, \quad t > 0 \tag{3.2.30}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.32), (2.8.33):

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0 \tag{3.2.31}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(r,\varphi,z) = J_2\left(\frac{\nu_1^{(2)} r}{b}\right) \cos 2\varphi \cos(\pi z/h), \quad (r,\varphi,z) \in D, \tag{3.2.32}$$

где

$$f(r,\varphi,z,t) = J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)} r}{b}\right) \sin \varphi \cos(\pi z/h) \cdot (t+1), \tag{3.2.33}$$

$\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

3) Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в секторе прямого кругового цилиндра

$$D = \{(r, \varphi, z) : \ 0 < r < b, \ 0 < \varphi < \pi/2, \ 0 < z < h\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(r, \varphi, z, t), \quad (r, \varphi, z) \in D, \quad t > 0 \tag{3.2.34}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.34), (2.8.35):

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0 \tag{3.2.35}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(r, \varphi, z) = 3J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(3\pi z/h), \quad (r, \varphi, z) \in D, \tag{3.2.36}$$

где

$$f(r, \varphi, z, t) = 2J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(\pi z/h), \tag{3.2.37}$$

$\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение. 1) Решение задачи изложено в начале главы. Оно представляется в виде разложения в ряд (3.17)

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nkm}(t) v_{nkm}(x, y, z) \tag{3.2.38}$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(x, y, z) = \sin(nx)\cos(2ky)\cos\left(\frac{2m+1}{2}z\right)$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (3.2.26) с граничными условиями (3.2.27). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.46), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.47). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (3.23), (3.24). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$ и g_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (3.18) и (3.19) легко находятся, не прибегая к интегрированию (3.20) и (3.21).

В выражении (3.2.29) $\sin x \cos 4y \cos(3z/2) = v_{121}(x,y,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{121}(t) = \sin t, \quad f_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,1).$$

В выражении (3.2.28) $\sin 2x \cos 2y \cos(3z/2) = v_{211}(x,y,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$g_{211} = 3, \quad g_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (2,1,1).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (3.23), (3.24) при $(n,k,m) \neq$ $\neq (1,2,1)$ и $(n,k,m) \neq (2,1,1)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,1) \text{ и } (n,k,m) \neq (2,1,1). \qquad (3.2.39)$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{du_{121}(t)}{dt} + a^2\lambda_{121}u_{121}(t) = \sin t, \qquad u_{121}(0) = 0; \\ &\frac{du_{211}(t)}{dt} + a^2\lambda_{211}u_{211}(t) = 0, \qquad\quad u_{211}(0) = 3. \end{aligned} \qquad (3.2.40)$$

Решениями задач (3.2.40) являются функции

$$\begin{gathered} u_{121}(t) = \frac{a^2\lambda_{121}\sin t - \cos t + e^{-a^2\lambda_{121}t}}{a^4\lambda_{121}^2 + 1} \\ u_{211}(t) = 3e^{-a^2\lambda_{211}t}. \end{gathered} \qquad (3.2.41)$$

Подставим (3.2.39), (3.2.41) в (3.2.38) и получим решение задачи (3.2.26)—(3.2.29)

$$u(x,y,z,t) = 3e^{-a^2\lambda_{211}t}\sin 2x \cos 2y \cos(3z/2) +$$

$$+\frac{(a^2\lambda_{121}\sin t - \cos t + e^{-a^2\lambda_{121}t})\sin x \cos 4y \cos(3z/2)}{a^4\lambda_{121}^2 + 1},$$

где собственные значения вычисляются по формуле (2.8.46)

$$\lambda_{121} = \frac{77}{4}, \qquad \lambda_{211} = \frac{41}{4}.$$

2) Решение задачи (3.2.30)—(3.2.33) ищем в виде разложения в ряд (3.17)

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{nkm}(t)v_{nkm}(r,\varphi,z) \qquad (3.2.42)$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(r,\varphi,z)=J_n\left(\frac{\nu_k^{(n)}r}{b}\right)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\cos(\pi mz/h) \qquad (3.2.43)$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (3.2.30) с граничными условиями (3.2.31). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.58), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.59). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (3.23), (3.24). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$ и g_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (3.18) и (3.19) легко находятся, не прибегая к интегрированию (3.20) и (3.21).

В выражении (3.2.33) $J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\varphi\cos(\pi z/h)=v_{121}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{121}=t+1, \quad f_{nkm}(t)\equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m)\neq(1,2,1).$$

В выражении (3.2.32) $J_2\left(\frac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\cos(\pi z/h)=v_{211}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$g_{211}=1, \quad g_{nkm}=0 \ \text{ при } \ (n,k,m)\neq(2,1,1).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (3.23), (3.24) при $(n,k,m)\neq$ $\neq(1,2,1)$ и $(n,k,m)\neq(2,1,1)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t)\equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m)\neq(1,2,1) \text{ и } (n,k,m)\neq(2,1,1). \qquad (3.2.44)$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\frac{du_{121}(t)}{dt}+a^2\lambda_{121}u_{121}(t)=t+1 \qquad u_{121}(0)=0; \qquad (3.2.45)$$

$$\frac{du_{211}(t)}{dt} + a^2\lambda_{211}u_{211}(t) = 0, \qquad u_{211}(0) = 1. \tag{3.2.46}$$

Решениями задач (3.2.45), (3.2.46) являются функции

$$u_{121}(t) = \left[\left(\frac{1}{a^2\lambda_{121}} - 1\right)e^{-a^2\lambda_{121}t} + t + 1 - \frac{1}{a^2\lambda_{121}}\right]/(a^2\lambda_{121}), \tag{3.2.47}$$

$$u_{211}(t) = e^{-a^2\lambda_{211}t}.$$

Подставим (3.2.44), (3.2.47), (3.2.43) в (3.2.42) и получим решение задачи (3.2.30)—(3.2.33)

$$u(r,\varphi,z,t) = e^{-a^2\lambda_{211}t}J_2\left(\frac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\cos(\pi z/h) +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{a^2\lambda_{121}} - 1\right)e^{-a^2\lambda_{121}t} + t + 1 - \frac{1}{a^2\lambda_{121}}\right]J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\varphi\cos(\pi z/h)\cdot\frac{1}{a^2\lambda_{121}},$$

где собственные значения находятся по формуле (2.8.58):

$$\lambda_{121} = (\pi/h)^2 + (\nu_2^{(1)}/b)^2, \qquad \lambda_{211} = (\pi/h)^2 + (\nu_1^{(2)}/b)^2,$$

$\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

3) Решение задачи (3.2.34)—(3.2.37) ищем в виде разложения в ряд (3.17)

$$u(r,\varphi,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nkm}(t)v_{nkm}(r,\varphi,z) \tag{3.2.48}$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(r,\varphi,z) = J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi)\sin(\pi mz/h) \tag{3.2.49}$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (3.2.34) с граничными условиями (3.2.35). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.71), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.72). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (3.23), (3.24). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$ и g_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (3.18) и (3.19) легко находятся, не прибегая к интегрированию (3.20) и (3.21).

В выражении (3.2.37) $J_2\left(\dfrac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h) = v_{111}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{111} = 2, \quad f_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,1).$$

В выражении (3.2.36) $J_2\left(\dfrac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(3\pi z/h) = v_{123}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$g_{123} = 3, \quad g_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,3).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (3.23), (3.24) при $(n,k,m) \neq$ $\neq (1,1,1)$ и $(n,k,m) \neq (1,2,3)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,1) \text{ и } (n,k,m) \neq (1,2,3). \qquad (3.2.50)$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\frac{du_{111}(t)}{dt} + a^2\lambda_{111}u_{111}(t) = 2, \qquad u_{111}(0) = 0; \qquad (3.2.51)$$

$$\frac{du_{123}(t)}{dt} + a^2\lambda_{123}u_{123}(t) = 0, \qquad u_{123}(0) = 3. \qquad (3.2.52)$$

Решениями задач (3.2.51), (3.2.52) являются функции

$$u_{111}(t) = \frac{2(1-e^{-a^2\lambda_{111}t})}{a^2\lambda_{111}}, \qquad u_{123}(t) = 3e^{-a^2\lambda_{123}t}. \qquad (3.2.53)$$

Подставим (3.2.50), (3.2.53), (3.2.49) в (3.2.48) и получим решение задачи (3.2.34)—(3.2.37)

$$u(r,\varphi,z,t) = 3e^{-a^2\lambda_{123}t}J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(3\pi z/h) +$$

$$+\frac{2(1-e^{-a^2\lambda_{111}t})}{a^2\lambda_{111}}J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h),$$

где собственные значения находятся по формуле (2.8.71):

$$\lambda_{111} = (\pi/h)^2 + (\mu_1^{(2)}/b)^2, \qquad \lambda_{123} = (3\pi/h)^2 + (\mu_2^{(2)}/b)^2,$$

$\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Ответ. 1) $u(x,y,z,t) = 3e^{-a^2\lambda_{211}t}\sin 2x\cos 2y\cos(3z/2)+$

$$+\frac{(a^2\lambda_{121}\sin t - \cos t + e^{-a^2\lambda_{121}t})\sin x\cos 4y\cos(3z/2)}{a^4\lambda_{121}^2+1},$$

где $\lambda_{121} = \dfrac{77}{4}$, $\lambda_{211} = \dfrac{41}{3}$.

2) $u(r,\varphi,z,t) = e^{-a^2\lambda_{211}t}J_2\left(\dfrac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\cos(\pi z/h)+$

$$+\left[\left(\frac{1}{a^2\lambda_{121}}-1\right)e^{-a^2\lambda_{121}t}+t+1-\frac{1}{a^2\lambda_{121}}\right]J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\varphi\cos(\pi z/h)\cdot\frac{1}{a^2\lambda_{121}},$$

где $\lambda_{121} = (\pi/h)^2 + (\nu_2^{(1)}/b)^2$, $\lambda_{211} = (\pi/h)^2 + (\nu_1^{(2)}/b)^2$, $\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

3) $u(r,\varphi,z,t) = 3e^{-a^2\lambda_{123}t}J_2\left(\dfrac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(3\pi z/h)+$

$$+\frac{2(1-e^{-a^2\lambda_{111}t})}{a^2\lambda_{111}}J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h),$$

где $\lambda_{111} = (\pi/h)^2 + (\mu_1^{(2)}/b)^2$, $\lambda_{123} = (3\pi/h)^2 + (\mu_2^{(2)}/b)^2$, $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Задача 3.2.2. Найти решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f$$

в прямоугольном параллелепипеде, в прямом круговом цилиндре или в секторе прямого кругового цилиндра с однородными граничными условиями на ∂D, как в задаче 3.8.2, и начальным условием $u\Big|_{t=0} = g$.

1. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b)\cos 2\varphi \sin(\pi z/h)\cos t,$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b)\sin\varphi \sin(2\pi z/h).$

2. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b)\sin 2\varphi \cos(\pi z/2h)\sin t,$

$g(r,\varphi,z) = J_6(\mu_1^{(6)} r/b)\sin 6\varphi \cos(3\pi z/2h).$

3. $f(x,y,z,t) = 3\sin x\cos y\sin(z/2),$

$g(x,y,z) = 2\sin 2x\cos y\sin(3z/2).$

4. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\nu_1^{(1)} r/b)\sin\varphi \sin(\pi z/h)\sin t,$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b)\cos 2\varphi \sin(\pi z/h).$

5. $f(r,\varphi,z,t) = J_3(\nu_1^{(3)} r/b)\sin 3\varphi \cos(\pi z/2h)\cos t,$

$g(r,\varphi,z) = J_3(\nu_2^{(3)} r/b)\sin 3\varphi \cos(3\pi z/2h).$

6. $f(x,y,z,t) = \cos x\cos y\sin z\sin t,$

$g(x,y,z) = \cos 3x\cos y\sin 2z.$

7. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b)\cos\varphi \sin(\pi z/2h)\cdot t,$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b)\cos 2\varphi \sin(\pi z/2h).$

8. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b)\cos\varphi \sin(\pi z/2h),$

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b)\cos 3\varphi \sin(\pi z/2h).$

9. $f(x,y,z,t) = \cos x\sin y\sin z\cos t,$

$g(x,y,z) = \cos 2x\sin 3y\sin 2z.$

10. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b)\sin 2\varphi \sin(\pi z/2h)\cos t,$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\nu_2^{(1)} r/b)\cos\varphi \sin(\pi z/2h).$

11. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b)\cos\varphi \sin(2\pi z/h)\cdot(t-1),$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b)\cos\varphi \sin(\pi z/h).$

12. $f(x,y,z,t) = \sin x\sin y\cos(z/2)\cos t,$

$g(x,y,z) = \sin 3x\sin 2y\cos(z/2).$

13. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \cos(\pi z/2h) \cos t$,

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(\pi z/2h)$.

14. $f(r,\varphi,z,t) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cos(\pi z/2h) \cdot t$,

$g(r,\varphi,z) = J_{3/2}(\nu_2^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cos(3\pi z/2h)$.

15. $f(x,y,z,t) = \sin 2x \cos y \cos(z/2) \cos t$,

$g(x,y,z) = \sin x \cos 2y \cos(z/2)$.

16. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \sin 2\varphi \cos(\pi z/2h) \sin t$,

$g(r,\varphi,z) = J_1(\nu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(\pi z/2h)$.

17. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(2\pi z/h) \cos t$,

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(\pi z/h)$.

18. $f(x,y,z,t) = \cos x \sin y \sin z \sin t$,

$g(x,y,z) = \cos 3x \sin 3y \sin z$.

19. $f(r,\varphi,z,t) = 2J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(2\pi z/h)$,

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos \varphi \cos(\pi z/h)$.

20. $f(r,\varphi,z,t) = J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cos(\pi z/2h) \sin t$,

$g(r,\varphi,z) = J_{1/2}(\nu_2^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cos(3\pi z/2h)$.

21. $f(x,y,z,t) = \cos x \sin 2y \sin(z/2) \cos 2t$,

$g(x,y,z) = \cos 2x \sin y \sin(z/2)$.

22. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/2h) \sin 2t$,

$g(r,\varphi,z) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(3\pi z/2h)$.

23. $f(x,y,z,t) = \sin x \cos y \sin 2z \sin t$,

$g(x,y,z) = \sin 3x \cos 3y \sin z$.

24. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(\pi z/2h) \sin t$,

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(\pi z/2h)$.

25. $f(x,y,z,t) = \sin 2x \sin y \cos(z/2) \cos 2t,$

$g(x,y,z) = \sin x \sin 3y \cos(z/2).$

26. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\nu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \sin(\pi z/2h) \cos t,$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \sin 2\varphi \sin(\pi z/2h).$

27. $f(x,y,z,t) = \cos x \sin 2y \sin(z/2) \sin t,$

$g(x,y,z) = \cos 3x \sin y \sin(3z/2).$

28. $f(r,\varphi,z,t) = 3J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/h),$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(2\pi z/h).$

29. $f(x,y,z,t) = \cos x \cos y \sin(z/2) \cdot t,$

$g(x,y,z) = \cos 2x \cos y \sin(z/2).$

30. $f(r,\varphi,z,t) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \cos 3\varphi \sin(\pi z/2h) \sin t,$

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_2^{(3)} r/b) \cos 3\varphi \sin(3\pi z/2h).$

3.3. Метод интегрального преобразования Лапласа решения начально-краевых задач на отрезке и полубесконечной прямой

Определение. *Преобразованием Лапласа* [7] комплекснозначной функции $f(t)$ действительного аргумента t ($t \geq 0$) (или *изображением* функции $f(t)$) называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$

$$L[f] = F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \qquad (3.3.1)$$

Преобразование Лапласа существует для кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, где $M > 0$ и $s_0 \geq 0$. Число s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$, а сама функция $f(t)$ при $t \geq 0$ называется *оригиналом.* Для всякого оригинала $f(t)$ функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$, является аналитической и при $p \to \infty$ $F(p) \to 0$.

По известному изображению $F(p)$ оригинал $f(t)$ в точках непрерывности находится с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = L^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{V.p.}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad t \geq 0, \tag{3.3.2}$$

где $\mathrm{Re}\,p = a > s_0$. В точках t разрыва первого рода функции $f(t)$ интеграл равен $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$, если $t \neq 0$, и $\dfrac{f(+0)}{2}$ при $t = 0$.

В прил. 7 приведены основные свойства преобразования Лапласа и таблица некоторых оригиналов и их изображений.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < l\}, \quad t > 0 \tag{3.3.3}$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) \tag{3.3.4}$$

и неоднородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0; \\ &\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Для решения используем преобразование Лапласа по переменной t. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $f(x,t)$, $\mu_i(t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, $F(x,p) = L[f]$, $M_i(p) = L[\mu_i]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (3.3.3) и учтем свойство дифференцирования оригинала (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 3)

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = pU(x,p) - u\Big|_{t=0} = pU(x,p) - g(x). \tag{3.3.6}$$

Приходим к ОДУ второго порядка с параметром p

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU(x,p) = -F(x,p) - g(x). \tag{3.3.7}$$

Применяя преобразование Лапласа к граничным условиям (3.3.5), получим

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1 U\right)\Big|_{x=0} = M_1(p);$$
$$\left(\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U\right)\Big|_{x=l} = M_2(p). \tag{3.3.8}$$

Решаем задачу (3.3.7), (3.3.8), находим изображение $U(x,p)$. Применяем обратное преобразование Лапласа (3.3.2), находим искомое решение $u(x,t) = L^{-1}[U]$.

Пример 3.3.1. Решить начально-краевую задачу (3.1.1)—(3.1.3) методом преобразования Лапласа.

Решение. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (3.1.1) и граничным условиям (3.1.2), учтем свойство дифференцирования оригинала (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 3), приходим к ОДУ

$$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - pU = -2\cos 2x - 3\cos 6x \tag{3.3.9}$$

с граничными условиями

$$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \qquad U\Big|_{x=\pi/4} = 0. \tag{3.3.10}$$

Общее решение ДУ (3.3.9) ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения $U_{\text{оо}}$ и частных решений неоднородного ДУ $U_{\text{ч}1}$ и $U_{\text{ч}2}$, соответствующих слагаемым в правой части уравнения (3.3.9):

$$U(x,p) = U_{\text{оо}} + U_{\text{ч}1} + U_{\text{ч}2}. \tag{3.3.11}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (3.3.9) имеет вид

$$U_{\text{оо}} = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Лучше его записать в виде линейной комбинации фундаментальных решений, одно из которых удовлетворяет первому граничному условию (3.3.10), а другое — второму граничному условию:

$$U_{\text{оо}} = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{3.3.12}$$

Частное решение $U_{ч1}$ ищем в виде

$$U_{ч1} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Подставим его в ДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -2\cos 2x,$$

в результате получим

$$a^2(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - p(A\cos 2x + B\sin 2x) = -2\cos 2x.$$

Найдем

$$A = \frac{2}{p+4a^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно:

$$U_{ч1} = \frac{2}{p+4a^2}\cos 2x.$$

Аналогично находим

$$U_{ч2} = \frac{3}{p+36a^2}\cos 6x.$$

Общее решение (3.3.11) ОДУ (3.3.9) имеет вид

$$U(x,p) = C_1\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) +$$

$$+\frac{2}{p+4a^2}\cos 2x + \frac{3}{p+36a^2}\cos 6x. \qquad (3.3.13)$$

Подставим (3.3.13) в граничные условия (3.3.10), найдем $C_1 = C_2 = 0$. Итак:

$$U(x,p) = \frac{2}{p+4a^2}\cos 2x + \frac{3}{p+36a^2}\cos 6x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая соотношение (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 3):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at},$$

находим искомое решение $u(x,t)$.

Ответ.

$$u(x,t) = 2e^{-4a^2t}\cos 2x + 3e^{-36a^2t}\cos 6x. \tag{3.3.14}$$

Пример 3.3.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности (3.1.13)—(3.1.16) методом преобразования Лапласа.

Решение. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности (3.1.13)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{3.3.15}$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/4} = u\Big|_{t=0} = 0, \tag{3.3.16}$$

где

$$f(x,t) = \sin t\cos 10x. \tag{3.3.17}$$

Решение задачи (3.1.13)—(3.1.16) является суммой решения задачи (3.3.15)—(3.3.17) и решения задачи (3.1.1)—(3.1.3), найденного в предыдущем примере 3.3.1.

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $f(x,t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, $F(x,p) = L[f]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (3.3.15) и граничным условиям (3.3.16), учтем свойство дифференцирования оригинала и $L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$ (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 3, табл. П7.2, п. 7), приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\frac{1}{p^2+1}\cos 10x \tag{3.3.18}$$

с граничными условиями

$$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \qquad U\Big|_{x=\pi/4} = 0. \tag{3.3.19}$$

Общее решение ДУ (3.3.18) имеет вид

$$U(x,p) = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p+(10a)^2} \cos 10x. \tag{3.3.20}$$

Подставим (3.3.20) в граничные условия (3.3.19), найдем $C_1 = C_2 = 0$. Итак:

$$U(x,p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p+(10a)^2} \cos 10x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая теорему умножения Бореля (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 7) и соответствие оригиналов и изображений (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 7):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] = \sin t, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p+(10a)^2}\right] = e^{-(10a)^2 t}.$$

Находим решение задачи (3.3.15)—(3.3.17)

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \sin \tau e^{-(10a)^2(t-\tau)} d\tau \cdot \cos 10x =$$

$$= \frac{\left((10a)^2 \sin t - \cos t + e^{-(10a)^2 t}\right) \cos 10x}{(1+(10a)^4)(10a)}. \tag{3.3.21}$$

Решение задачи (3.1.13)—(3.1.16) представляет собой сумму решений (3.3.14) и (3.3.21).

Ответ.

$$u(x,t) = \frac{\left((10a)^2 \sin t - \cos t + e^{-(10a)^2 t}\right) \cos 10x}{(1+(10a)^4)(10a)} +$$

$$+2e^{-4a^2 t} \cos 2x + 3e^{-36a^2 t} \cos 6x.$$

Задачи 3.3.1 и 3.3.2. Методом преобразования Лапласа решить начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности с исходными данными, заданными в задачах 3.1.1 и 3.1.2.

Пример 3.3.3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < +\infty\}, \quad t > 0 \tag{3.3.22}$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = \sin x \tag{3.3.23}$$

и граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t) = \cos t, \tag{3.3.24}$$

где

$$f(x,t) = 1\cdot e^{-x}. \tag{3.3.25}$$

Решение. Рассмотрим три задачи:

I.
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \text{в } D, \quad t > 0, && (3.3.26)\\
&u_1\Big|_{t=0} = g(x) = \sin x, && (3.3.27)\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0; && (3.3.28)
\end{aligned}\right\}$$

II.
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t), \quad \text{в } D, \quad t > 0, && (3.3.29)\\
&u_2\Big|_{t=0} = 0, && (3.3.30)\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0; && (3.3.31)
\end{aligned}\right\}$$

$$
\text{III.}\quad \left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}, \qquad \text{в } D, \quad t>0, && (3.3.32)\\
&u_3\Big|_{t=0} = 0, && (3.3.33)\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t) = \cos\, t. && (3.3.34)
\end{aligned}\right\}
$$

Тогда функция

$$
u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) \tag{3.3.35}
$$

является решением задачи (3.3.22)—(3.3.25).

Решим задачу I (3.3.26)—(3.3.28).

Предположим, что $u(x,t)$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (3.3.26), граничному условию (3.3.28) и учтем свойство дифференцирования оригинала (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 3). Приходим к ОДУ

$$
a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\sin\, x \tag{3.3.36}
$$

с граничным условием

$$
\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = 0. \tag{3.3.37}
$$

Общее решение ДУ (3.3.36) ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного ДУ и частного решения неоднородного:

$$
U(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p+a^2}\sin\, x.
$$

Здесь должно быть $C_2 = 0$, иначе $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x \to +\infty$. Граничное условие (3.3.37) дает тогда $C_1 = a\dfrac{1}{p+a^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, следовательно:

$$
U(x,p) = a\frac{1}{p+a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p+a^2}\sin\, x. \tag{3.3.38}
$$

Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения Бореля (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 7) и таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 3 и п. 12):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+a^2}\right] = e^{-a^2 t}, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right).$$

Применим обратное преобразование Лапласа к (3.3.38), получим решение задачи I (3.3.26)—(3.3.28):

$$\begin{gathered} u_1(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{-a^2(t-\tau)}\,d\tau + e^{-a^2 t}\sin\, x = \\ = \frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2 t}\int\limits_0^t e^{a^2\tau-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + e^{-a^2 t}\sin\, x. \end{gathered} \tag{3.3.39}$$

Решим задачу II (3.3.29)—(3.3.31), (3.3.25).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (3.3.29) и граничному условию (3.3.31) и получим

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\frac{1}{p}e^{-x}, \qquad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{3.3.40}$$

Общее решение уравнения (3.3.40) есть

$$U(x,t) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-a^2}e^{-x};$$

здесь должно быть $C_2 = 0$, иначе $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x \to +\infty$. Из граничного условия (3.3.40) находим $C_1 = -a\dfrac{1}{p^{3/2}}\cdot\dfrac{1}{p-a^2}$, следовательно:

$$U(x,t) = -a\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\frac{1}{p-a^2} + \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-a^2}e^{-x}. \tag{3.3.41}$$

Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой Бореля и таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 13 и п. 3):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) - \frac{x}{a}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a^2}\right]=e^{a^2t}.$$

Применим обратное преобразование Лапласа к (3.3.41) и получим решение задачи II (3.3.29)—(3.3.31):

$$u_2(x,t)=-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\sqrt{\tau}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{a^2(t-\tau)}d\tau+x\int\limits_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)e^{a^2(t-\tau)}d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t e^{a^2(t-\tau)}d\tau\cdot e^{-x}. \qquad (3.3.42)$$

Замечание. Найденное решение, соответствующее неоднородности ДУ $f(x,t)=1\cdot e^{-x}$, позволяет найти решения задачи (3.3.29)—(3.3.31) с неоднородностями вида $f(x,t)=\tilde{f}(t)e^{-x}$ с помощью интеграла Дюамеля (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 8):

$$\tilde{u}(x,t)=L^{-1}\left[p\tilde{F}(p)U(p)\right]=u_2(0)\tilde{f}(t)+\int\limits_0^t\tilde{f}(\tau)u_2'(t-\tau)d\tau,$$

где $\tilde{F}(p)=L[\tilde{f}]$.

Решим задачу III (3.3.32)—(3.3.34).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (3.3.32) и граничному условию (3.3.34) и получим

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2}-pU=0, \qquad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=M(p),$$

где $L[\mu]=M(p)$. Общее решение ДУ есть

$$U(x,t)=C_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

здесь $C_2=0$, так как функция U должна быть ограничена при $x\to+\infty$. Из граничного условия находим $C_1=-aM(p)\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, следовательно:

$$U(x,t)=-aM(p)\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \qquad (3.3.43)$$

Для нахождения оригинала используем интеграл Дюамеля (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 8):

$$u(x,t) = L^{-1}[pM(p)U_1(p)] = u_1(0)\mu(t) + \int\limits_0^t \mu(\tau)u_1'(t-\tau)d\tau, \qquad (3.3.44)$$

где $u_1(x,t) = L^{-1}[U_1]$ — решение соответствующей задачи при $\mu(t) \equiv 1$, тогда $M(p) = \dfrac{1}{p}$ в (3.3.43) и, следовательно:

$$U_1(p) = -a\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из таблицы соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 13) находим

$$u_1(t) = -\frac{a2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + x\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Заметим, что $u_1(0) = 0$, так как $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$:

$$u_1'(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Из интеграла Дюамеля (3.3.44) получаем решение задачи III (3.3.32)—(3.3.34)

$$u_3(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \mu(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \cos\,\tau\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau. \qquad (3.3.45)$$

Решение исходной задачи (3.3.22)—(3.3.25) находится по формулам (3.3.35), (3.3.39), (3.3.42) и (3.3.45).

Ответ.

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int\limits_0^t e^{a^2\tau-\frac{x^2}{4a\tau}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau + e^{-a^2t}\sin\,x + \int\limits_0^t e^{a^2(t-\tau)}d\tau\cdot e^{-x} -$$

$$-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \sqrt{\tau}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{a^2(t-\tau)}d\tau + x\int\limits_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)e^{a^2(t-\tau)}d\tau -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \cos\,\tau\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Задача 3.3.3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < +\infty\}, \quad t > 0$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 \le x < +\infty$$

и граничным условием первого или второго родов при $x = 0$.

1. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
2. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
3. $f(x,t) = \sin x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos t.$
4. $f(x,t) = \sin x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos t.$
5. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos x, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin t.$
6. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin t.$
7. $f(x,t) = \cos x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
8. $f(x,t) = \cos x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
9. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos t.$
10. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos t.$
11. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin t.$
12. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin t.$
13. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos t.$
14. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos t.$

15. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

16. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

17. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

18. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

19. $f(x,t) = \cos\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

20. $f(x,t) = \cos\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

21. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

22. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

23. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

24. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

25. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

26. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

27. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

28. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

29. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

30. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Математическая модель, описывающая малые продольные колебания упругого стержня, расположенного вдоль оси Ox, представляет собой начально-краевую задачу для волнового уравнения [2, 4, 5, 10—12]

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + S(x)\tilde{f}(x,t), \quad x \in (0,l), \ t > 0 \quad (4.1)$$

с граничными условиями при $x = 0$ и $x = l$ и начальными условиями

$$\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= g(x), \qquad x \in [0,l], \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= p(x), \quad x \in [0,l]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $u(x,t)$ — величина отклонения вдоль стержня в момент времени t сечения, расположенного в начальный момент времени в равновесии в точке x, x — переменная Лагранжа (в последующий момент времени t это сечение находится в точке с координатой $x + u(x,t)$), $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, $\rho(x)$ — линейная плотность массы, $k(x) > 0$ — модуль упругости Юнга, $\tilde{f}(x,t)$ — линейная плотность равнодействующей внешних сил.

Если конец стержня при $x = l$ имеет заданное смещение $\mu(t)$, рассматривается граничное условие первого рода (условие Дирихле)

$$u\Big|_{x=l} = \mu(t), \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Если при $x = l$ задана сила $\tilde{\nu}(t)$, действующая на сечение $S(l)$, рассматривают *граничное условие второго рода* (условие Неймана)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t), \quad t > 0, \quad (4.4)$$

где $\nu(t) = \dfrac{\tilde{\nu}(t)}{k(l)S(l).}$

Если при $x = l$ задано упругое закрепление с коэффициентом жесткости закрепления α, рассматривают *граничное условие третьего рода* (условия Робена)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t > 0, \tag{4.5}$$

где $h = \dfrac{\alpha}{k(l)S(l).}$

Если при $x = l$ задана упругая опора, которая перемещается по заданному закону $\tilde{\mu}(t)$, рассматривают неоднородное граничное условие третьего рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = \mu(t), \quad t > 0, \tag{4.6}$$

где $\mu(t) = h\tilde{\mu}(t)$.

В том случае, когда коэффициенты в уравнении (4.1) постоянны: $\rho(x) = \mathrm{const}$, $S(x) = \mathrm{const}$, $k(x) = \mathrm{const}$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{4.7}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{\rho}$, $f(x,t) = \dfrac{\tilde{f}(x,t)}{\rho}$.

Замечание [2, 4, 5, 10—12]. Волновое уравнение (4.7) описывает малые поперечные отклонения $u(x,t)$ однородной, упругой, натянутой струны, где $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, T — сила натяжения, ρ — линейная плотность массы, $f(x,t) = \dfrac{\tilde{f}(x,t)}{\rho}$, $\tilde{f}(x,t)$ — линейная плотность равнодействующей внешних сил.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,t) \tag{4.8}$$

описывает малые поперечные отклонения $u(x,y,t)$ однородной, упругой, натянутой мембраны.

Колебательные движения с малыми амплитудами в идеальной, сжимаемой, изотронной, адиабатической жидкости (звуковые волны) описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(\bar{x},t), \tag{4.9}$$

где $u(\bar{x},t)$ — потенциал скорости жидкости $\bar{v} = -\operatorname{grad} u$, $a^2 = \dfrac{kp_0}{\rho_0}$, $k = \dfrac{C_p}{C_v}$, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, C_v — теплоемкость при постоянном объеме, p_0, ρ_0 — равновесные значения давления и плотности, $f(\bar{x}, t) = -\dfrac{\partial U}{\partial t}$, U — потенциал объемной плотности равнодействующей внешних сил.

В начальный момент времени задают распределение скорости в каждой точке

$$u\Big|_{t=0} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D \cup \partial D \tag{4.10}$$

и относительное изменение плотности жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D \cup \partial D. \tag{4.11}$$

На непроницаемой границе ∂D задают граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{\partial D} = \nu(t), \quad t > 0,$$

где $\nu(t) = -(\bar{v}^0, \bar{n})$ — нормальная составляющая заданной скорости границы $\bar{V}^0$.

Если граница ∂D свободна (невесомая пленка), то

$$u\Big|_{\partial D} = 0, \quad t > 0.$$

Уравнению (4.9) удовлетворяет каждая компонента напряженностей электрического $\bar{E} = (E_1, E_2, E_3)$ или магнитного $\bar{H} = (H_1, H_2, H_3)$ полей, если рассматривать распространение электромагнитных волн в изотропной, однородной, непроводящей среде. В этом уравнении $a^2 = \dfrac{c^2}{\varepsilon\mu}$, c — скорость света в вакууме, ε, μ — соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Изложим *метод разделения переменных решения начально-краевых задач для однородного волнового уравнения.*

Рассмотрим задачу для *однородного* ДУ (4.9) ($f(x, y, z, t) \equiv 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \bar{x} \in D, \quad t > 0 \tag{4.12}$$

с *однородными* граничными условиями

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \beta u\right)\Big|_{\partial D} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \not\equiv 0 \tag{4.13}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(\bar{x}), \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D \cup \partial D. \tag{4.15}$$

Ищем частные решения ДУ (4.12), удовлетворяющие *однородным граничным условиям* (4.13) в виде

$$u(\bar{x}, t) = v(x)T(t) \not\equiv 0. \tag{4.16}$$

Подставим (4.16) в уравнение (4.12), разделим переменные:

$$T''(t)v(\bar{x}) = a^2T(t) \cdot \triangle v(\bar{x}) \;\Leftrightarrow\; \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\triangle v(\bar{x})}{v(\bar{x})}.$$

Последнее равенство выполняется в области $(\bar{x} \in D,\ t > 0)$, следовательно, левая и правые части равенства постоянны. Обозначим эту константу $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\triangle v(\bar{x})}{v(\bar{x})} = -\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.17}$$

и ДУ

$$\triangle v(\bar{x}) + \lambda v(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in D. \tag{4.18}$$

После подстановки (4.16) в граничное условие (4.13), получим

$$T(t)\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} + \beta v\right)\Big|_{\partial D} = 0. \tag{4.19}$$

Задача (4.18), (4.19) называется задачей Штурма—Лиувилля нахождения *собственных значений* λ и соответствующих им *собственных функций* $v(\bar{x}) \not\equiv 0$ оператора Лапласа в области D с граничными условиями (4.19).

Предположим, что известны собственные значения λ_n, $n = \overline{1, \infty}$ и соответствующие им собственные функции $v_n(\bar{x})$, которые образуют ортонормированную, полную систему функций (свойства собственных значений и собственных функций см. в § 3.8).

Рассмотрим ОДУ (4.17) при $\lambda = \lambda_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} at) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} at), \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{4.20}$$

если $\lambda_n \neq 0$. В том случае, когда ноль является собственным значением ($\lambda_0 = 0$), общее решение ОДУ (4.17) имеет вид

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Решение всей задачи (4.12)—(4.15) (если $\lambda_n \neq 0$) ищем в виде функционального ряда

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} at) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} at) \right) v_n(\bar{x}), \tag{4.21}$$

предполагая, что его можно дифференцировать дважды по t и $\bar{x}$.

Неизвестные коэффициенты A_n, B_n найдем из начальных условий (4.14) и (4.15). Подставим (4.21) в (4.14) и получим

$$g(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(\bar{x}). \tag{4.22}$$

Следовательно, A_n — коэффициенты Фурье разложения известной функции $g(\bar{x})$ по полной в $\bar{D}$ системе собственных функций $v_n(\bar{x})$, $n = \overline{1, \infty}$. Для определения A_n воспользуемся ортонормированностью собственных функций

$$\iiint\limits_D v_n(\bar{x}) v_k(\bar{x}) d\bar{x} = \delta_{nk}.$$

Умножим (4.22) на $v_k(\bar{x})$, проинтегрируем по $\bar{x}$ в D и получим

$$\iiint\limits_D g(\bar{x}) v_k(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \iiint\limits_D v_n(\bar{x}) v_k(\bar{x}) d\bar{x} = A_k, \quad k = \overline{1, \infty}. \tag{4.23}$$

После подстановки (4.21) в (4.15) получим

$$p(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} a v_n(\bar{x}).$$

Воспользуемся ортонормированностью собственных функций и найдем B_k:

$$\iiint\limits_D p(\bar{x})v_k(\bar{x})d\bar{x} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sqrt{\lambda_n}a \iiint\limits_D v_n(\bar{x})v_k(\bar{x})d\bar{x} = B_k\sqrt{\lambda_k}a, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{4.24}$$

Итак, решением задачи (4.12)—(4.15) является функция $u(\bar{x},t)$, заданная функциональным рядом (4.21), где A_n и B_n вычисляются по формулам (4.23) и (4.24).

Теперь рассмотрим *метод решения начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения.*

Рассмотрим задачу для *неоднородного* ДУ (4.9) ($f(\bar{x},t) \not\equiv 0$) с однородными граничными условиями (4.13) и начальными условиями (4.14), (4.15).

Предположим, что известны собственные значения λ_n и ортонормированные собственные функции $v_n(\bar{x})$ задачи Штурма—Лиувилля (4.18), (4.19), которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (4.12) с граничными условиями (4.13).

Будем искать решение задачи (4.9), (4.13)—(4.15) в виде разложения в ряд по собственным функциям $v_n(\bar{x})$, $n = \overline{1,\infty}$

$$u(\bar{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(\bar{x}), \tag{4.25}$$

где $u_n(t)$ *неизвестны.* Известные функции $f(\bar{x},t)$, $g(\bar{x})$, $p(\bar{x})$ также разложим в ряды по собственным функциям

$$f(\bar{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(\bar{x}), \tag{4.26}$$

$$g(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\, v_n(\bar{x}), \tag{4.27}$$

$$p(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, v_n(\bar{x}), \tag{4.28}$$

где коэффициенты Фурье $f_n(t)$, g_n, p_n вычисляются по формулам

$$f_n(t) = \iiint\limits_D f(\bar{x}, t) v_n(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{4.29}$$

$$g_n = \iiint\limits_D g(\bar{x}) v_n(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{4.30}$$

$$p_n = \iiint\limits_D p(\bar{x}) v_n(\bar{x}) d\bar{x}, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{4.31}$$

Предположим, что ряд (4.25) можно почленно дифференцировать дважды по t и $\bar{x}$. Подставим (4.25), (4.26) в (4.9) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_n u_n(t) - f_n(t) \right\} v_n(\bar{x}) = 0.$$

В силу полноты системы собственных функций $v_n(\bar{x})$ в D, следует:

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_n u_n(t) = f_n(t), \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{4.32}$$

Подставим (4.27), (4.28) соответственно в начальные условия (4.14), (4.15) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{u_n(0) - g_n\} v_n(\bar{x}) = 0 \;\Rightarrow\; u_n(0) = g_n, \quad n = \overline{1, \infty}; \tag{4.33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{du_n(0)}{dt} - p_n \right\} v_n(\bar{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{du_n(0)}{dt} = p_n, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{4.34}$$

Решение задач Коши для $u_n(t)$ (4.32)—(4.34) (если $\lambda_n \neq 0$) можно получить, например, операционным методом:

$$u_n(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) f_n(\tau) d\tau + g_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin(a\sqrt{\lambda_n} t) \cdot p_n. \tag{4.35}$$

Подставим (4.35) в (4.25), формально получим решение задачи (4.9), (4.13)—(4.15).

После подстановки (4.35) в (4.25) и учета выражений для коэффициентов Фурье (4.29)—(4.31) получим представление решения задачи (4.9), (4.13)—(4.15) с помощью функции Грина:

$$u(\bar{x},t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_D f(\bar{y},\tau)G(\bar{x},\bar{y};t,\tau)d\bar{y}d\tau+\iiint\limits_D g(\bar{y})\frac{\partial G(\bar{x},\bar{y};t,0)}{\partial t}d\bar{y}+$$

$$+\iiint\limits_D p(\bar{y})G(\bar{x},\bar{y};t,0)d\bar{y}, \tag{4.36}$$

где

$$G(\bar{x},\bar{y};t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)v_n(\bar{y})v_n(\bar{x}) \tag{4.37}$$

— *функция Грина*, или *функция влияния точечного источника.*

4.1. Метод разделения переменных для волнового уравнения на отрезке

Пример 4.1.1. Методом разделения переменных найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad D=\{x:\ 0<x<\pi/2\},\quad 0<t \tag{4.1.1}$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi/2}=0,\quad (0\le t) \tag{4.1.2}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0}=g(x)=2\sin 3x+\sin 5x,\quad (0\le x\le \pi/2), \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=p(x)\equiv 0,\quad (0\le x\le \pi/2). \tag{4.1.4}$$

Решение. Сначала найдем частные решения *однородного* уравнения (4.1.1), удовлетворяющие *однородным* граничным условиям (4.1.2) в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0. \tag{4.1.5}$$

Подставим (4.1.5) в (4.1.1) и разделим переменные:

$$X(x)T''(t)=a^2T(t)X''(x)\ \Rightarrow\ \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4.1.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{4.1.7}$$

Подставим (4.1.5) в однородные граничные условия (4.1.2) и получим

$$\begin{aligned} &T(t)X(0) = 0 \qquad \Rightarrow \; X(0) = 0, \\ &T(t)X'(\pi/2) = 0 \;\; \Rightarrow \; X'(\pi/2) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (4.1.7), (4.1.8) приведено в прил. 1 (п. в). Собственные значения и соответствующие им собственные функции при $l = \pi/2$ имеют следующий вид (П1.22), (П1.23):

$$\lambda_n = (2n+1)^2,$$

$$X_n(x) = \sin(2n+1)x, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Теперь рассмотрим (4.1.6) при $\lambda = \lambda_n$:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Его общее решение можно записать в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} a t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} a t).$$

Итак, мы нашли счетное множество частных решений (4.1.5)

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) =$$

$$= [A_n \cos((2n+1)at) + B_n \sin((2n+1)at)] \sin(2n+1)x, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Решение всей задачи (4.1.1)—(4.1.4) будем искать в виде функционального ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos((2n+1)at) + B_n \sin((2n+1)at)] \sin(2n+1)x, \tag{4.1.9}$$

предполагая, что его можно дифференцировать два раза по переменной t и по переменной x.

Подставим (4.1.9) в начальные условия (4.1.3) и (4.1.4) и получим

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2n+1)x, \tag{4.1.10}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1)a \, \sin(2n+1)x. \tag{4.1.11}$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n воспользуемся ортогональностью собственных функций на $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)x \cdot \sin(2k+1)x \, dx = \frac{\pi}{4}\delta_{nk}.$$

Умножим обе части равенства (4.1.10) на $\sin(2k+1)$, проинтегрируем по x на $[0, \pi/2]$ и получим

$$\int_0^{\pi/2} g(x) \cdot \sin(2k+1)x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)x \cdot \sin(2k+1)x \, dx = A_k \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично из (4.1.11) получим

$$\int_0^{\pi/2} p(x) \cdot \sin(2k+1)x \, dx = B_k (2k+1) a \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда находим

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(x) \cdot \sin(2n+1)x \, dx, \tag{4.1.12}$$

$$B_n = \frac{4}{(2n+1)a\pi} \int_0^{\pi/2} p(x) \cdot \sin(2n+1)x \, dx. \tag{4.1.13}$$

После подстановки A_n и B_n в (4.1.9) получим искомое решение в виде ряда.

В нашем случае функции $g(x)$ и $p(x)$ в (4.1.3) и (4.1.4) имеют конкретный вид, позволяющий найти коэффициенты Фурье (4.1.12) и (4.1.13), не прибегая к интегрированию. После подстановки (4.1.9) в начальное условие (4.1.3), получим (4.1.10) в виде

$$2\sin 3x + \sin 5x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2n+1)x. \tag{4.1.14}$$

В левой части этого равенства $\sin 3x = X_1(x)$, $\sin 5x = X_2(x)$ — собственные функции. Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях равенства (4.1.14) и получим

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 1, \quad A_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1, 2. \tag{4.1.15}$$

После подстановки (4.1.9) в начальное условие (4.1.4), получим (4.1.11) в виде

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(2n+1)a \cdot \sin(2n+1)x.$$

Отсюда все коэффициенты равны:

$$B_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{4.1.16}$$

Подставим (4.1.15) и (4.1.16) в (4.1.9) и получим решение исходной задачи.

Ответ. $u(x,t) = 2\cos 3at \cdot \sin 3x + \cos 5at \cdot \sin 5x$.

Замечание. Функция Грина (4.37) рассмотренной задачи имеет вид

$$G(x,y;t,\tau) = \frac{4}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin(a(2n+1)(t-\tau)) \sin((2n+1)x) \sin((2n+1)y),$$

а решение задачи представляется с помощью функции Грина в виде (4.36)

$$u(x,t) = \int_0^{\pi/2} g(y) \frac{\partial G(x,y;t,0)}{\partial t}\, dy + + \int_0^{\pi/2} p(y)\, G(x,y;t,0)\, dy.$$

Задача 4.1.1. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с однородными граничными и начальными условиями.

1. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \sin x - 2\sin 3x.$

2. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos\, x - 3\cos\, 3x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos\, x + 3\cos\, 2x.$

4. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin\, x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin(3x/2).$

6. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 2\cos(x/2) - \cos(5x/2).$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \cos\, 2x + \cos\, 4x.$

8. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) + \sin\, x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$

10. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\cos(x/4) + 3\cos(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos(x/2) + 2\cos\, x.$

12. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\sin\, x + \sin\, 3x.$

13. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin\, x + 3\sin\, 5x.$

14. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\cos\, x + \cos\, 5x.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \cos\, x - \cos\, 2x.$

16. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 3\sin(x/2) - \sin\, 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - \sin(5x/2).$

18. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos(x/2) - \cos(3x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos\, 2x - \cos\, 4x.$

20. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - 3\sin x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$

22. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 5\cos(x/4) + \cos(3x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\cos x + 2\cos 3x.$

24. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\sin x - \sin 3x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 5\sin x - \sin 3x.$

26. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\cos x - \cos 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos x + \cos 3x.$

28. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin x - 3\sin 3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) + 3\sin(3x/2).$

30. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin 2x + \sin 3x.$

Пример 4.1.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < \pi/2\}, \ \ 0 < t \tag{4.1.17}$$

с однородными граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad (0 \le t) \tag{4.1.18}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = 2\sin 3x + \sin 5x, \quad (0 \le x \le \pi/2), \tag{4.1.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(x) \equiv 0, \quad (0 \le x \le \pi/2), \tag{4.1.20}$$

где

$$f(x,t) = 3e^{-t}\sin x. \tag{4.1.21}$$

Решение. Сначала решим вспомогательную задачу Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (4.1.17) при $f(x,t)\equiv 0$ с однородными граничными условиями (4.1.18) (см. пример 4.1.1, задача Штурма—Лиувилля (4.1.7), (4.1.8))

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=0, \quad X'(\pi/2)=0. \end{cases}$$

Решение этой задачи приведено в прил. 1 (п. в). Собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют следующий вид (П1.22), (П1.23) при $l=\pi/2$:

$$\lambda_n=(2n+1)^2, \quad n=\overline{0,\infty},$$

$$X_n(x)=\sin(2n+1)x, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{4.1.22}$$

Решение исходной задачи (4.1.17)—(4.1.21) будем искать в виде разложения в функциональный ряд по собственным функциям (4.1.22) с неизвестными коэффициентами $u_n(t)$

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)X_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\sin(2n+1)x, \tag{4.1.23}$$

предполагая, что его можно дифференцировать дважды по t и по x.

Разложим известные функции $f(x,t)$, $g(x)$ и $p(x)$ в ряды по собственным функциям (4.1.22)

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\sin(2n+1)x, \tag{4.1.24}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nX_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\sin(2n+1)x, \tag{4.1.25}$$

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nX_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\sin(2n+1)x. \tag{4.1.26}$$

В нашем случае коэффициенты $f_n(t)$, g_n и p_n легко находятся. Равенства (4.1.24), (4.1.25) и (4.1.26) имеют вид

$$3e^{-t}\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\sin(2n+1)x, \tag{4.1.27}$$

$$2\sin 3x+\sin 5x=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\sin(2n+1)x, \tag{4.1.28}$$

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\sin(2n+1)x, \tag{4.1.29}$$

где в левых частях $\sin x = X_0(x)$, $\sin 3x = X_1(x)$, $\sin 5x = X_2(x)$ — собственные функции. Сравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левых и правых частях равенств (4.1.27), (4.1.28), (4.1.29), получим

$$f_0(t) = 3e^{-t}, \quad f_n(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ n \neq 0, \tag{4.1.30}$$

$$g_1 = 2, \quad g_2 = 1, \quad g_n = 0 \ \text{ при } \ n \neq 1, 2, \tag{4.1.31}$$

$$p_n = 0 \ \text{ при } \ n = \overline{0, \infty}. \tag{4.1.32}$$

Подставим (4.1.23) и (4.1.24) в уравнение (4.1.17):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + a^2(2n+1)^2 u_n(t) - f_n(t) \right\} \sin(2n+1)x = 0.$$

В фигурной скобке коэффициенты Фурье разложения нуля по полной системе собственных функций, следовательно, они равны нулю. Отсюда получаем ОДУ для искомых коэффициентов $u_n(t)$

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + a^2(2n+1)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{4.1.33}$$

Подставим (4.1.23), (4.1.25), (4.1.26) в начальные условия (4.1.19) и (4.1.20) и получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{u_n(0) - g_n\} \sin(2n+1)x = 0 \ \Rightarrow \ u_n(0) = g_n, \quad n = \overline{0, \infty}; \tag{4.1.34}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{du_n(0)}{dt} - p_n \right\} \sin(2n+1)x = 0 \ \Rightarrow \ \frac{du_n(0)}{dt} = p_n, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{4.1.35}$$

Искомые функции $u_n(t)$ являются решениями задач Коши (4.1.33), (4.1.34), (4.1.35). Все задачи Коши при $n \neq 0, 1, 2$ имеют решения $u_n(t) \equiv 0$, так как ДУ однородны ($f_n(t) \equiv 0$ при $n \neq 0$) и начальные условия однородны ($g_n = 0$, $p_n = 0$ при $n \neq 1, 2$).

Задачи Коши при $n \neq 0, 1, 2$ имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 u_0(t)}{dt^2} + a^2 u_0(t) = 3e^{-t}, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 0, \quad n = 0; \tag{4.1.36}$$

$$\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + a^2 9\, u_1(t) = 0, \quad u_1(0) = 2, \quad u_1'(0) = 0, \quad n = 1; \tag{4.1.37}$$

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + a^2 25\, u_2(t) = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad u_2'(0) = 0, \quad n = 2. \tag{4.1.38}$$

Решим задачу Коши (4.1.36). Общее решение ДУ имеет вид

$$u_0(t) = A_0\cos(at) + B_0\sin(at) + u_{\text{ч.н}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$u_{\text{ч.н}} = Ae^{-t}.$$

После подстановки в ДУ (4.1.36) находим $A = 3/(1+a^2)$. Общее решение неоднородного ДУ (4.1.36) имеет вид

$$u_0(t) = A_0\cos(at) + B_0\sin(at) + 3e^{-t}/(1+a^2).$$

Коэффициенты A_0 и B_0 найдем, подставив это выражение в начальные условия (4.1.36). Решение задачи Коши (4.1.36) примет вид

$$u_0(t) = 3\left(\frac{1}{a}\sin(at) - \cos(at) + e^{-t}\right)/(1+a^2). \tag{4.1.39}$$

Решим задачу (4.1.37). Общее решение ДУ:

$$u_1(t) = A_1\cos(3at) + B_1\sin(3at).$$

Подставим в начальные условия и найдем $A_1 = 2$, $B_1 = 0$.

Решением задачи Коши (4.1.37) является функция

$$u_1(t) = 2\cos(3at). \tag{4.1.40}$$

Аналогично находим решение задачи Коши (4.1.38):

$$u_2(t) = \cos(5at). \tag{4.1.41}$$

Подставим (4.1.39), (4.1.40), (4.1.41) и $u_n(t) \equiv 0$ при $n \neq 0,1,2$ в (4.1.23) и получим решение исходной задачи.

Ответ. $$u(x,t) = 3\left(\frac{1}{a}\sin(at) - \cos(at) + e^{-t}\right)\sin x/(1+a^2) +$$
$$+2\cos(3at)\sin 3x + \cos(5at)\sin 5x.$$

Замечание. Функция Грина (4.37) рассмотренной задачи имеет вид

$$G(x,y;t,\tau) = \frac{4}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin(a(2n+1)(t-\tau))\sin((2n+1)x)\sin((2n+1)y),$$

а решение задачи представляется с помощью функции Грина в виде (4.36)

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^{\pi/2} f(y,\tau)G(x,y;t,\tau)\,dy\,d\tau + \int_0^{\pi/2} g(y)\frac{\partial G(x,y;t,0)}{\partial t}\,dy +$$
$$+\int_0^{\pi/2} p(y)\,G(x,y;t,0)\,dy.$$

Задача 4.1.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x: \ 0 < x < l\}, \quad 0 < t$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(x) \quad (0 \le x \le l).$$

1. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
   $f(x,t) = \sin 5x e^{-t} t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin x - 2\sin 3x.$

2. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
   $f(x,t) = 2\cos 5x t^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos x - 3\cos 3x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
   $f(x,t) = 2\cos 3x \operatorname{sh} t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos x + 3\cos 2x.$

4. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
   $f(x,t) = \sin x e^{-t} t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin(x/2) + 2\sin x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
   $f(x,t) = \sin(5x/2) \operatorname{sh} t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 2\sin(3x/2), \quad p(x) = 0.$

6. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
   $f(x,t) = \cos(3x/2) 3t^2, \quad g(x) = 2\cos(x/2) - \cos(5x/2), \quad p(x) = 0.$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
   $f(x,t) = \cos 2x \operatorname{ch} t, \quad g(x) = \cos 2x + \cos 4x, \quad p(x) = 0.$

8. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
   $f(x,t) = \sin x (t^2 + t), \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin(x/2) + \sin x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$
   $f(x,t) = \sin(x/4) e^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$

10. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
    $f(x,t) = \cos(x/4) t^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\cos(x/4) + 3\cos(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos\, 2xte^{-2t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos(x/2) + 2\cos\, x.$

12. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, 2xe^{-2t}, \quad g(x) = 3\sin\, x + \sin\, 3x, \quad p(x) = 0.$

13. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x(t^2 - t), \quad g(x) = \sin\, x + 3\sin\, 5x, \quad p(x) = 0.$

14. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 3x\,\mathrm{sh}\, t, \quad g(x) = 3\cos\, x + \cos\, 5x, \quad p(x) = 0.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos\, xt^2, \quad g(x) = \cos\, x - \cos\, 2x, \quad p(x) = 0.$

16. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x\,\mathrm{ch}\, t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 3\sin(x/2) - \sin\, 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(3x/2)e^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin(x/2) - \sin(5x/2).$

18. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/2)(t - t^2), \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos(x/2) - \cos(3x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 4xte^{-3t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos\, 2x - \cos\, 4x.$

20. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, 2xt^3, \quad g(x) = 2\sin(x/2) - 3\sin\, x, \quad p(x) = 0.$

21. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin(x/4)e^{-2t}, \quad g(x) = 3\sin(x/4) + 2\sin(3x/4), \quad p(x) = 0.$

22. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(3x/4)e^{-2t}, \quad g(x) = 5\cos(x/4) + \cos(3x/4), \quad p(x) = 0.$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, xte^{-t}, \quad g(x) = 3\cos\, x + 2\cos\, 3x, \quad p(x) = 0.$

24. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = 2\sin\, xe^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin\, x - \sin\, 3x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
$f(x,t) = 3\sin\, 5xt^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 5\sin\, x - \sin\, 3x.$

26. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
$f(x,t) = \cos\, x\,\mathrm{sh}\, t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\cos\, x - \cos\, 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \cos\, 2xte^{-2t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos\, x + \cos\, 3x.$

28. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\, 2xte^{-3t}, \quad g(x) = \sin\, x - 3\sin\, 3x, \quad p(x) = 0.$

29. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = 2\sin(x/2)t^2, \quad g(x) = 2\sin(x/2) + 3\sin(3x/2), \quad p(x) = 0.$

30. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\, x\,\mathrm{sh}\, t, \quad g(x) = \sin\, 2x + \sin\, 3x, \quad p(x) = 0.$

4.2. Метод разделения переменных в прямоугольной области, круговом секторе, прямоугольном параллелепипеде, прямом круговом цилиндре и секторе прямого кругового цилиндра

Пример 4.2.1. 1) Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в прямоугольнике D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,t), \quad D = \{(x,y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2\}, \quad 0 < t \tag{4.2.1}$$

с граничными условиями на ∂D

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = 0, \quad 0 \le t \tag{4.2.2}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x,y) = 2\sin\, x\cos\, 2y, \tag{4.2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(x,y) = 4\sin x\cos 4y, \quad (x,y)\in D, \tag{4.2.4}$$

где

$$f(x,y,t) = 3\sin 2x\cos 4ye^{-t}. \tag{4.2.5}$$

2) Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в круговом секторе D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(r,\varphi,t), \quad D = \{(r,\varphi) : 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2\}, \quad 0 < t \tag{4.2.6}$$

с граничными условиями на ∂D

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0, \quad 0 \le t \tag{4.2.7}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi, \tag{4.2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(r,\varphi) = 2J_4\left(\frac{\mu_2^{(4)} r}{b}\right)\cos 4\varphi, \tag{4.2.9}$$

где

$$f(r,\varphi,t) = 2J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)} r}{b}\right)e^{-2t}, \tag{4.2.10}$$

μ_k^{2n} — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение. 1) Сначала найдем решение задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (4.2.1) при $f(x,y,t)\equiv 0$ с однородными граничными условиями (4.2.2). Решение этой задачи приведено в примере 2.8.1. Собственные значения и соответствующие им собственные функции задаются формулами (2.8.19), (2.8.20)

$$\lambda_{nk} = n^2 + (2k)^2, \quad v_{nk}(x,y) = \sin(nx)\cos(2ky), \quad ||v_{nk}||^2 = \frac{\pi^2(\delta_{n0}+1)}{8},$$

$$n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Решение исходной задачи будем искать в виде разложения в ряд по этим собственным функциям, предполагая возможность его дифференцировать дважды по переменным (x,y,t):

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}u_{nk}(t)v_{nk}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}u_{nk}(t)\sin(nx)\cos(2ky). \tag{4.2.11}$$

Известные функции $f(x,y,t)$, $g(x,y)$, $p(x,y)$ (4.2.3)—(4.2.5) также разложим по системе собственных функций $v_{nk}(x,y)$:

$$f(x,y,t)=3\sin 2x\cos 4y\,e^{-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}f_{nk}(t)v_{nk}(x,y)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}f_{nk}(t)\sin(nx)\cos(2ky), \tag{4.2.12}$$

$$g(x,y)=2\sin x\cos 2y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{nk}v_{nk}(x,y)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{nk}\sin(nx)\cos(2ky), \tag{4.2.13}$$

$$p(x,y)=4\sin x\cos 4y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{nk}v_{nk}(x,y)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{nk}\sin(nx)\cos(2ky), \tag{4.2.14}$$

где

$$f_{nk}(t)=\frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D f(x,y,t)v_{nk}(x,y)\,dxdy,$$

$$g_{nk}=\frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D g(x,y)v_{nk}(x,y)\,dxdy,$$

$$p_{nk}=\frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D p(x,y)v_{nk}(x,y)\,dxdy,\quad n=\overline{1,\infty},\quad k=\overline{0,\infty}.$$

В нашем конкретном случае коэффициенты Фурье $f_{nk}(t)$, g_{nk} и p_{nk} можно найти, не прибегая к интегрированию. Заметим, что $v_{22}(x,y)=$ $=\sin 2x\cos 4y$, $v_{11}(x,y)=\sin x\cos 2y$, $v_{12}(x,y)=\sin x\cos 4y$, сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в (4.2.12)—(4.2.14) и получим

$$f_{22}(t)=3e^{-t},\quad f_{nk}(t)\equiv 0 \text{ при } (n,k)\neq(2,2),$$

$$g_{11}=2,\quad g_{nk}=0 \text{ при } (n,k)\neq(1,1),$$

$$p_{12} = 4, \quad p_{nk} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (1,2),$$

Подставим (4.2.11), (4.2.12) в ДУ (4.2.1), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{d^2u_{nk}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) - f_{nk}(t)\right\}v_{nk}(x,y) = 0.$$

В силу полноты системы функций в D

$$\frac{d^2u_{nk}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t) = f_{nk}(t), \quad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{4.2.15}$$

После подстановки (4.2.11), (4.2.13) и (4.2.14) в начальные условия (4.2.3), (4.2.4) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\{u_{nk}(0) - g_{nk}\}v_{nk}(x,y) = 0 \ \Rightarrow \ u_{nk}(0) = g_{nk}, \tag{4.2.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{du_{nk}(0)}{dt} - p_{nk}\right\}v_{nk}(x,y) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{du_{nk}(0)}{dt} = p_{nk}, \tag{4.2.17}$$

$$n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Все задачи Коши (4.2.15)—(4.2.17), кроме трех: при $(n,k) = (1,1)$, $(n,k) = (1,2)$ и $(n,k) = (2,2)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия (4.2.16), (4.2.17), следовательно, $u_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (1,1)$, $(n,k) \neq (1,2)$ и $(n,k) \neq (2,2)$. Решениями остальных задач Коши

$$\frac{d^2u_{11}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{11}u_{11}(t) = 0, \quad u_{11}(0) = 2, \quad \frac{du_{11}(0)}{dt} = 0;$$

$$\frac{d^2u_{12}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{12}u_{12}(t) = 0, \quad u_{12}(0) = 0, \quad \frac{du_{12}(0)}{dt} = 4;$$

$$\frac{d^2u_{22}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{22}u_{22}(t) = 3e^{-t}, \quad u_{22}(0) = 0, \quad \frac{du_{22}(0)}{dt} = 0$$

являются функции

$$u_{11}(t) = 2\cos(a\sqrt{\lambda_{11}}t) = 2\cos(a\sqrt{5}t), \tag{4.2.18}$$

$$u_{12}(t) = \frac{4}{a\sqrt{\lambda_{12}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{12}}t) = \frac{4}{a\sqrt{17}}\sin(a\sqrt{17}t), \tag{4.2.19}$$

$$u_{22}(t) = \frac{3}{1+a^2\lambda_{22}}\left[\frac{1}{a\sqrt{\lambda_{22}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{22}}t) - \cos(a\sqrt{\lambda_{22}}t) + e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{3}{1+20a^2}\left[\frac{1}{2a\sqrt{5}}\sin(2a\sqrt{5}t) - \cos(2a\sqrt{5}t) + e^{-t}\right]. \qquad (4.2.20)$$

Подставим (4.2.18)—(4.2.20) и $u_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (1,1)$, $(n,k) \neq (1,2)$, $(n,k) \neq (2,2)$ в (4.2.11) и получим решение задачи (4.2.1)—(4.2.5):

$$u(x,y,t) = 2\cos(a\sqrt{5}t)\sin x\cos 2y + \frac{4\sin(a\sqrt{17}t)\sin x\cos 4y}{a\sqrt{17}} +$$

$$+3\left[\frac{1}{2a\sqrt{5}}\sin(2a\sqrt{5}t) - \cos(2a\sqrt{5}t) + e^{-t}\right]\frac{\sin 2x\cos 4y}{1+20a^2}.$$

2) Сначала найдем решение задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате разделения переменных в однородном уравнении (4.2.6) при $f(r,\varphi,t) \equiv 0$ с однородными граничными условиями (4.2.7). Решение этой задачи приведено в примере 2.8.1. Собственные значения и соответствующие им собственные функции задаются формулами (2.8.28), (2.8.29):

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_k^{(2n)}}{b}\right)^2, \quad v_{nk}(r,\varphi) = J_{2n}(\sqrt{\lambda_{nk}}r)\cos(2n\varphi),$$

$$||v_{nk}||^2 = \pi\left(bJ'_{2n}(\mu_k^{(2n)})\right)^2\frac{(\delta_{n0}+1)}{8}, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty},$$

где $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение исходной задачи будем искать в виде разложения в ряд по этим собственным функциям, предполагая возможность его дифференцировать два раза по переменным (r,φ,t):

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(t)J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi). \qquad (4.2.21)$$

Известные функции $f(r,\varphi,t)$, $g(r,\varphi)$ и $p(r,\varphi)$ (4.2.8)—(4.2.10) также разложим по системе собственных функций $v_{nk}(r,\varphi)$:

$$f(r,\varphi,t) = 2J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)}r}{b}\right)e^{-2t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(t)J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \tag{4.2.22}$$

$$g(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \tag{4.2.23}$$

$$p(r,\varphi) = 2J_4\left(\frac{\mu_2^{(4)}r}{b}\right)\cos 4\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{nk}v_{nk}(r,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{nk}J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi), \tag{4.2.24}$$

где

$$f_{nk}(t) = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D f(r,\varphi,t)v_{nk}(r,\varphi)r\,drd\varphi,$$

$$g_{nk} = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D g(r,\varphi)v_{nk}(r,\varphi)r\,drd\varphi,$$

$$p_{nk} = \frac{1}{||v_{nk}||^2}\iint\limits_D p(r,\varphi)v_{nk}(r,\varphi)r\,drd\varphi, \quad n=\overline{0,\infty}, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

В нашем конкретном случае коэффициенты Фурье $f_{nk}(t)$, g_{nk} и p_{nk} можно найти, не прибегая к интегрированию. Заметим, что $v_{02}(r,\varphi) = J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)}r}{b}\right)$, $v_{11}(r,\varphi) = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi$, $v_{22}(r,\varphi) = J_4\left(\frac{\mu_2^{(4)}r}{b}\right)\cos 4\varphi$.

Сравним коэффициенты при одинаковых собственных функциях в (4.2.22)—(4.2.24) и получим

$$f_{02}(t) = 2e^{-2t}, \quad f_{nk}(t) \equiv 0 \text{ при } (n,k) \neq (0,2),$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{nk} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (1,1),$$

$$p_{22} = 2, \quad p_{nk} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (2,2).$$

Подставим (4.2.21), (4.2.22) в ДУ (4.2.6) и получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2u_{nk}(t)}{dt^2}+a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t)-f_{nk}(t)\right\}v_{nk}(r,\varphi)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{d^2u_{nk}(t)}{dt^2}+a^2\lambda_{nk}u_{nk}(t)=f_{nk}(t),\quad n=\overline{0,\infty},\quad k=\overline{1,\infty}. \tag{4.2.25}$$

После подстановки (4.2.21), (4.2.23), (4.2.24) в начальные условия (4.2.8) и (4.2.9) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{u_{nk}(0)-g_{nk}\}v_{nk}(r,\varphi)=0\ \Rightarrow\ u_{nk}(0)=g_{nk}, \tag{4.2.26}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{du_{nk}(0)}{dt}-p_{nk}\right\}v_{nk}(r,\varphi)=0\ \Rightarrow\ \frac{du_{nk}(0)}{dt}=p_{nk}, \tag{4.2.27}$$

$$n=\overline{0,\infty},\quad k=\overline{1,\infty}.$$

Все задачи Коши (4.2.25)—(4.2.27), кроме трех: при $(n,k)=(0,2)$, $(n,k)=(1,1)$ и $(n,k)=(2,2)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия (4.2.26) и (4.2.27), следовательно, $u_{nk}(t)\equiv 0$ при $(n,k)\neq(0,2)$, $(n,k)\neq(1,1)$, $(n,k)\neq(2,2)$.

Решениями задач Коши

$$\frac{d^2u_{02}(t)}{dt^2}+a^2\lambda_{02}u_{02}(t)=2e^{-2t},\quad u_{02}(0)=0,\quad \frac{du_{02}(0)}{dt}=0;$$

$$\frac{d^2u_{11}(t)}{dt^2}+a^2\lambda_{11}u_{11}(t)=0,\quad u_{11}(0)=1,\quad \frac{du_{11}(0)}{dt}=0;$$

$$\frac{d^2u_{22}(t)}{dt^2}+a^2\lambda_{22}u_{22}(t)=0,\quad u_{22}(0)=0,\quad \frac{du_{22}(0)}{dt}=2$$

являются функции

$$u_{02}(t)=\frac{2\left[e^{-2t}-\cos(a\sqrt{\lambda_{02}}t)+\dfrac{2}{a\lambda_{02}}\sin(a\sqrt{\lambda_{02}}t)\right]}{4+a^2\lambda_{02}}, \tag{4.2.28}$$

$$u_{11}(t)=\cos(a\lambda_{11}t), \tag{4.2.29}$$

$$u_{22}(t)=\frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{22}}t)}{a\sqrt{\lambda_{22}}}, \tag{4.2.30}$$

где $\sqrt{\lambda_{02}} = \dfrac{\mu_2^{(0)}}{b}$, $\sqrt{\lambda_{11}} = \dfrac{\mu_1^{(2)}}{b}$, $\sqrt{\lambda_{22}} = \dfrac{\mu_2^{(4)}}{b}$.

Подставим (4.2.28)—(4.2.30) и $u_{nk}(t) \equiv 0$ при $(n,k) \neq (0,2)$, $(n,k) \neq$ $\neq (1,1)$ и $(n,k) \neq (2,2)$ в (4.2.21) и получим решение задачи (4.2.6)—(4.2.10):

$$u(r,\varphi,t) = \frac{2\left[e^{-2t} - \cos(a\sqrt{\lambda_{02}}t) + \dfrac{2}{a\lambda_{02}}\sin(a\sqrt{\lambda_{02}}t)\right] J_0(\sqrt{\lambda_{02}}\,r)}{4 + a^2\lambda_{02}} +$$

$$+\cos(a\sqrt{\lambda_{11}}t) J_2(\sqrt{\lambda_{11}}\,r)\cos 2\varphi + \frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{22}}t) J_4(\sqrt{\lambda_{22}}\,r)\cos 4\varphi}{a\sqrt{\lambda_{22}}}.$$

Ответ.

1) $$u(x,y,t) = 2\cos(a\sqrt{5}t)\sin x\cos 2y + \frac{4\sin(a\sqrt{17}t)\sin x\cos 4y}{a\sqrt{17}} +$$

$$+3\left[\frac{1}{2a\sqrt{5}}\sin(2a\sqrt{5}t) - \cos(2a\sqrt{5}t) + e^{-t}\right]\frac{\sin 2x\cos 4y}{1+20a^2}.$$

2) $$u(r,\varphi,t) = \frac{2\left[e^{-2t} - \cos(a\sqrt{\lambda_{02}}t) + \dfrac{2}{a\lambda_{02}}\sin(a\sqrt{\lambda_{02}}t)\right] J_0(\sqrt{\lambda_{02}}\,r)}{4 + a^2\lambda_{02}} +$$

$$+\cos(a\sqrt{\lambda_{11}}t) J_2(\sqrt{\lambda_{11}}\,r)\cos 2\varphi + \frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{22}}t) J_4(\sqrt{\lambda_{22}}\,r)\cos 4\varphi}{a\sqrt{\lambda_{22}}},$$

где $\sqrt{\lambda_{nk}} = \dfrac{\mu_k^{(2n)}}{b}$, $\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Задача 4.2.1. Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$$

в прямоугольнике или в круговом секторе с однородными граничными условиями, как в задаче 2.8.1, и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p.$$

1. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin x\cos y\, e^{-t}, \quad g(x,y) = \sin 2x\cos 3y,$

$p(x,y) = 3\sin x\cos 3y.$

2. $u\big|_{\varphi=0} = u_\varphi\big|_{\varphi=\pi/4} = u\big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\sin 2\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = J_6(\mu_2^{(6)}r/b)\sin 6\varphi,$

$p(r,\varphi) = 3J_2(\mu_2^{(2)}r/b)\sin 2\varphi.$

3. $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi/2} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 3\cos x\cos y\, e^{-2t}, \quad g(x,y) = 2\cos 3x\cos 2y,$

$p(x,y) = \cos x\cos 2y.$

4. $u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_3(\nu_1^{(3)}r/b)\sin 3\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = J_6(\nu_2^{(6)}r/b)\sin 6\varphi,$

$p(r,\varphi) = 2J_3(\nu_2^{(3)}r/b)\sin 3\varphi.$

5. $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x,y,t) = \cos 2x\sin y\cdot(t+1), \quad g(x,y) = 3\cos x\sin 3y,$

$p(x,y) = 2\cos 2x\sin 3y.$

6. $u_\varphi\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\pi/2} = u\big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_1(\mu_2^{(1)}r/b)\cos\varphi\cdot e^{-t}, \quad g(r,\varphi) = J_3(\mu_1^{(3)}r/b)\cos 3\varphi,$

$p(r,\varphi) = 2J_1(\mu_1^{(1)}r/b)\cos\varphi.$

7. $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi/2} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin x\sin 2y\cdot t, \quad g(x,y) = \sin 3x\sin y,$

$p(x,y) = 3\sin x\sin y.$

8. $u_\varphi\big|_{\varphi=0} = u_\varphi\big|_{\varphi=\pi} = u\big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_1(\mu_2^{(1)}r/b)\cos\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\cos 2\varphi,$

$p(r,\varphi) = 3J_1(\mu_1^{(1)}r/b)\cos\varphi.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0,$
$f(x,y,t) = 2\sin 2x \cos y\, e^{-t}, \quad g(x,y) = 3\sin x \cos 2y,$
$p(x,y) = \sin 2x \cos 2y.$

10. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$
$f(r,\varphi,t) = 2J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cdot t,$
$g(r,\varphi) = J_{5/2}(\nu_2^{(5/2)} r/b) \sin(5\varphi/2), \;\; p(r,\varphi) = J_{3/2}(\nu_2^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0,$
$f(x,y,t) = \cos x \sin y\, e^{-2t}, \quad g(x,y) = 2\cos 3x \sin 3y,$
$p(x,y) = 3\cos x \sin 3y.$

12. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0,$
$f(r,\varphi,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \sin 2\varphi \cdot e^{-t}, \quad g(r,\varphi) = 2J_4(\mu_1^{(4)} r/b) \sin 4\varphi,$
$p(r,\varphi) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b) \sin 2\varphi.$

13. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$
$f(x,y,t) = \cos x \sin 2y \cdot t, \quad g(x,y) = \cos 2x \sin y,$
$p(x,y) = 2\cos x \sin y.$

14. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$
$f(r,\varphi,t) = J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cdot e^{-t},$
$g(r,\varphi) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b) \cos(3\varphi/2), \;\; p(r,\varphi) = 2J_{1/2}(\nu_2^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2).$

15. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0,$
$f(x,y,t) = 2\sin 3x \cos y \cdot (t+1), \quad g(x,y) = 2\sin x \cos 3y,$
$p(x,y) = \sin 3x \cos 3y.$

16. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = u\Big|_{r=b} = 0,$
$f(r,\varphi,t) = J_4(\mu_2^{(4)} r/b) \cos 4\varphi \cdot e^{-t}, \quad g(r,\varphi) = J_4(\mu_1^{(4)} r/b) \cos 4\varphi,$
$p(r,\varphi) = J_2(\mu_1^{(8)} r/b) \cos 8\varphi.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin\,2x\sin\,y\,e^{-2t}, \quad g(x,y) = \sin\,x\sin\,3y,$

$p(x,y) = 3\sin\,2x\sin\,3y.$

18. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_1(\mu_2^{(1)}r/b)\sin\,\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = J_3(\mu_1^{(3)}r/b)\sin\,3\varphi,$

$p(r,\varphi) = 2J_1(\mu_1^{(1)}r/b)\sin\,\varphi.$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos\,x\sin\,2y\,e^{-t}, \quad g(x,y) = \cos\,3x\sin\,y,$

$p(x,y) = 3\cos\,x\sin\,y.$

20. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_1(\nu_2^{(1)}r/b)\sin\,\varphi\cdot t, \quad g(r,\varphi) = J_2(\nu_1^{(2)}r/b)\sin\,2\varphi,$

$p(r,\varphi) = J_1(\nu_1^{(1)}r/b)\sin\,\varphi.$

21. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos\,2x\cos\,y\cdot t, \quad g(x,y) = \cos\,x\cos\,3y,$

$p(x,y) = 3\cos\,2x\cos\,3y.$

22. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_2(\nu_1^{(2)}r/b)\cos\,2\varphi\cdot e^{-2t}, \quad g(r,\varphi) = 2J_6(\nu_1^{(6)}r/b)\cos\,6\varphi,$

$p(r,\varphi) = 2J_2(\nu_2^{(2)}r/b)\cos\,2\varphi.$

23. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin\,x\cos\,y\,e^{-t}, \quad g(x,y) = \sin\,3x\cos\,2y,$

$p(x,y) = 3\sin\,x\cos\,2y.$

24. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_3(\mu_2^{(3)}r/b)\cos\,3\varphi\,e^{-t}, \quad g(r,\varphi) = 2J_6(\mu_1^{(6)}r/b)\cos\,6\varphi,$

$p(r,\varphi) = 2J_3(\mu_1^{(3)}r/b)\cos\,3\varphi.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\sin\,x\sin\,y\cdot t, \quad g(x,y) = \sin\,2x\sin\,y,$

$p(x,y) = 3\sin\,x\sin\,2y.$

26. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)}r/b)\sin(\varphi/2)\cdot t,$

$g(r,\varphi) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)}r/b)\sin(3\varphi/2),\ \ p(r,\varphi) = J_{1/2}(\nu_2^{(1/2)}r/b)\sin(\varphi/2).$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u_y\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi/2} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos\,x\cos\,3y\,e^{-t}, \quad g(x,y) = \cos\,3x\cos\,y,$

$p(x,y) = 3\cos\,x\cos\,y.$

28. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = u_r\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = 2J_4(\nu_1^{(4)}r/b)\sin\,4\varphi\cdot e^{-t}, \quad g(r,\varphi) = J_8(\nu_2^{(8)}r/b)\sin\,8\varphi,$

$p(r,\varphi) = 3J_4(\nu_2^{(4)}r/b)\sin\,4\varphi.$

29. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_y\Big|_{y=0} = u_y\Big|_{y=\pi} = 0,$

$f(x,y,t) = 2\cos\,x\cos\,2y\cdot t, \quad g(x,y) = \cos\,2x\cos\,y,$

$p(x,y) = 3\cos\,x\cos\,y.$

30. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = u\Big|_{r=b} = 0,$

$f(r,\varphi,t) = J_{3/2}(\mu_1^{(3/2)}r/b)\cos(3\varphi/2)\,e^{-2t},$

$g(r,\varphi) = J_{3/2}(\mu_2^{(3/2)}r/b)\cos(3\varphi/2), p(r,\varphi) = 2J_{3/2}(\mu_3^{(3/2)}r/b)\cos(3\varphi/2).$

Пример 4.2.2. 1) Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в прямоугольном параллелепипеде

$$D = \{(x,y,z) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/2,\ 0 < z < \pi\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\triangle u + f(x,y,z,t), \quad (x,y,z)\in D, \quad t > 0 \tag{4.2.31}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.30), (2.8.31):

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi/2} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=\pi} = 0 \tag{4.2.32}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x, y, z) = 3\sin\, 2x\cos\, 2y\cos(3z/2), \tag{4.2.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(x, y, z) = 2\sin\, x\cos\, 2y\cos(z/2), \quad (x, y, z) \in D, \tag{4.2.34}$$

где

$$f(x, y, z, t) = \sin\, x\cos\, 4y\cos(3z/2)\, e^{-2t}. \tag{4.2.35}$$

2) Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в прямом круговом цилиндре

$$D = \{(r, \varphi, z):\ 0 \le r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < z < h\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(r, \varphi, z, t), \quad (r, \varphi, z) \in D, \quad t > 0 \tag{4.2.36}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.32), (2.8.33):

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0 \tag{4.2.37}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(r, \varphi, z) = J_2\left(\frac{\nu_1^{(2)} r}{b}\right)\cos\, 2\varphi\cos(\pi z/h), \tag{4.2.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(r, \varphi, z) = 2J_1\left(\frac{\nu_1^{(1)} r}{b}\right)\cos\, \varphi, \quad (r, \varphi, z) \in D, \tag{4.2.39}$$

где

$$f(r, \varphi, z, t) = J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)} r}{b}\right)\sin\, \varphi\cos(\pi z/h)\cdot(t+1), \tag{4.2.40}$$

$\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

3) Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в секторе прямого кругового цилиндра

$$D = \{(r, \varphi, z):\ 0 < r < b,\ 0 < \varphi < \pi/2,\ 0 < z < h\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(r, \varphi, z, t), \quad (r, \varphi, z) \in D, \quad t > 0 \tag{4.2.41}$$

с граничными условиями на ∂D, как в примере 2.8.2 (2.8.34), (2.8.35):

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/2} = u\Big|_{r=b} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=h} = 0 \qquad (4.2.42)$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(r,\varphi,z) = 3J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(3\pi z/h), \qquad (4.2.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(r,\varphi,z) = J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)} r}{b}\right)\cos 4\varphi \sin(\pi z/h), \quad (r,\varphi,z) \in D, \quad (4.2.44)$$

где

$$f(r,\varphi,z,t) = 2J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)} r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(\pi z/h), \qquad (4.2.45)$$

$\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Решение. 1) Решение задачи (4.2.31)—(4.2.35) изложено в начале главы. Оно ищется в виде разложения в ряд (4.25)

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nkm}(t) v_{nkm}(x,y,z) \qquad (4.2.46)$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(x,y,z) = \sin(nx)\cos(2ky)\cos\left(\frac{2m+1}{2}z\right) \qquad (4.2.47)$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (4.2.31) с граничными условиями (4.2.32). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.46), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.47). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (4.32)—(4.34). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$, g_{nkm}, p_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (4.26)—(4.28) легко находятся, не прибегая к интегрированию (4.29)—(4.31).

В выражении (4.2.35) $\sin x \cos 4y \cos(3z/2) = v_{121}(x,y,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{121}(t) = e^{-2t}, \quad f_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,1).$$

В выражениях (4.2.33), (4.2.34) $\sin 2x \cos 2y \cos(3z/2) = v_{211}(x,y,z)$, $\sin x \cos 2y \cos(z/2) = v_{110}(x,y,z)$ — собственные функции, следовательно:

$$g_{211} = 3, \quad g_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (2,1,1),$$

$$p_{110} = 2, \quad p_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,0).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (4.32)—(4.34) при $(n,k,m) \neq$ $\neq (1,2,1)$, $(n,k,m) \neq (2,1,1)$, $(n,k,m) \neq (1,1,0)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,1), \ (n,k,m) \neq (2,1,1),$$
$$(n,k,m) \neq (1,1,0). \tag{4.2.48}$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\frac{d^2 u_{121}(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_{121} u_{121}(t) = e^{-2t}, \quad u_{121}(0) = 0, \quad \frac{du_{121}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.49}$$

$$\frac{d^2 u_{211}(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_{211} u_{211}(t) = 0, \quad u_{211}(0) = 3, \quad \frac{du_{211}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.50}$$

$$\frac{d^2 u_{110}(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_{110} u_{110}(t) = 0, \quad u_{110}(0) = 0, \quad \frac{du_{110}(0)}{dt} = 2. \tag{4.2.51}$$

Решениями задач (4.2.49)—(4.2.51) являются функции

$$u_{121}(t) = \frac{\dfrac{2}{a\sqrt{\lambda_{121}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t) - \cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t) + e^{-2t}}{4 + a^2\lambda_{121}}, \tag{4.2.52}$$

$$u_{211}(t) = 3\cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t),$$

$$u_{110}(t) = \frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)}{a\sqrt{\lambda_{110}}}.$$

Подставим (4.2.48), (4.2.52), (4.2.47) в (4.2.46) и получим решение задачи (4.2.31)—(4.2.35):

$$u(x,y,z,t) = 3\cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t)\sin\, 2x\cos\, 2y\cos(3z/2) +$$

$$+\frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)\sin\, x\cos\, 2y\cos(z/2)}{a\sqrt{\lambda_{110}}} +$$

$$+\frac{\left[\dfrac{2}{a\sqrt{\lambda_{121}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t) - \cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t) + e^{-2t}\right]\sin\, x\cos\, 4y\cos(3z/2)}{4 + a^2\lambda_{121}},$$

где $\lambda_{121} = \dfrac{77}{4}$, $\lambda_{211} = \dfrac{41}{4}$, $\lambda_{110} = \dfrac{21}{4}$ вычислены по формуле (2.8.46)

2) Решение задачи (4.2.36)—(4.2.40) ищем в виде разложения в ряд (4.25)

$$u(r,\varphi,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nkm}(t)v_{nkm}(r,\varphi,z) \tag{4.2.53}$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(r,\varphi,z) = J_n\left(\frac{\nu_k^{(n)}r}{b}\right)(A_n\cos\, n\varphi + B_n\sin\, n\varphi)\cos(\pi mz/h) \tag{4.2.54}$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (4.2.36) с граничными условиями (4.2.37). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.58), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.59). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (4.32)—(4.34). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$, g_{nkm} и p_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (4.26)—(4.28) легко находятся, не прибегая к интегрированию (4.29)—(4.31).

В выражении (4.2.40) $J_1\left(\dfrac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\,\varphi\cos(\pi z/h) = v_{121}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{121}(t) = t+1, \quad f_{nkm}(t) \equiv 0 \;\text{ при }\; (n,k,m) \neq (1,2,1).$$

В выражениях (4.2.38), (4.2.39) $J_2\left(\dfrac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\cos(\pi z/h) = v_{211}(r,\varphi,z)$, $J_1\left(\dfrac{\nu_1^{(1)}r}{b}\right)\cos\varphi = v_{110}(r,\varphi,z)$ — собственные функции, следовательно:

$$g_{211} = 1, \quad g_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (2,1,1),$$

$$p_{110} = 2, \quad p_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,0).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (4.32)—(4.34) при $(n,k,m) \neq (1,2,1)$, $(n,k,m) \neq (2,1,1)$, $(n,k,m) \neq (1,1,0)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,1),\ (n,k,m) \neq (2,1,1),$$
$$(n,k,m) \neq (1,1,0). \tag{4.2.55}$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\frac{d^2u_{121}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{121}u_{121}(t) = t+1 \quad u_{121}(0) = 0, \quad \frac{du_{121}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.56}$$

$$\frac{d^2u_{211}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{211}u_{211}(t) = 0, \quad u_{211}(0) = 1, \quad \frac{du_{211}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.57}$$

$$\frac{d^2u_{110}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{110}u_{110}(t) = 0, \quad u_{110}(0) = 0, \quad \frac{du_{110}(0)}{dt} = 2. \tag{4.2.58}$$

Решениями задач (4.2.56)—(4.2.58) являются функции

$$\begin{aligned}
&u_{121}(t) = \frac{t + 1 - \cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t) - \dfrac{1}{a\sqrt{\lambda_{121}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t)}{a^2\lambda_{121}},\\
&u_{211}(t) = \cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t),\\
&u_{110}(t) = \frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)}{a\sqrt{\lambda_{110}}}.
\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

Подставим (4.2.55), (4.2.59), (4.2.54) в (4.2.53) и получим решение задачи (4.2.36)—(4.2.40):

$$u(r,\varphi,z,t)=\cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t)J_2\left(\frac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\cos(\pi z/h)+$$

$$+2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)J_1\left(\frac{\nu_1^{(1)}r}{b}\right)\frac{\cos\varphi}{a\sqrt{\lambda_{110}}}+$$

$$+\left[t+1-\cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t)-\frac{1}{a\sqrt{\lambda_{121}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t)\right]J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\varphi\cos(\pi z/h),$$

где собственные значения находятся по формуле (2.8.58)

$$\lambda_{121}=\left(\frac{\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\nu_2^{(1)}}{b}\right)^2,\quad \lambda_{211}=\left(\frac{\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\nu_1^{(2)}}{b}\right)^2,\quad \lambda_{110}=\left(\frac{\nu_1^{(1)}}{b}\right)^2,$$

$\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu)=0,$ $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

3) Решение задачи (4.2.41)—(4.2.45) ищем в виде разложения в ряд (4.25)

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{nkm}(t)v_{nkm}(r,\varphi,z) \qquad (4.2.60)$$

по собственным функциям

$$v_{nkm}(r,\varphi,z)=J_{2n}\left(\frac{\mu_k^{(2n)}r}{b}\right)\cos(2n\varphi)\sin(\pi mz/h) \qquad (4.2.61)$$

задачи Штурма—Лиувилля, которая получается в результате применения метода разделения переменных для соответствующего однородного уравнения (4.2.41) с граничными условиями (4.2.42). Эта задача Штурма—Лиувилля решена в примере 2.8.2, собственные значения λ_{nkm} вычисляются по формуле (2.8.71), а соответствующие им собственные функции определяются формулой (2.8.72). Неизвестные коэффициенты $u_{nkm}(t)$ являются решениями задач Коши (4.32)—(4.34). В нашей задаче коэффициенты Фурье $f_{nkm}(t)$, g_{nkm}, p_{nkm} разложений в ряды по собственным функциям (4.26)—(4.28) легко находятся, не прибегая к интегрированию (4.29)—(4.31).

В выражении (4.2.45) $J_2\left(\dfrac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h) = v_{111}(r,\varphi,z)$ — собственная функция, следовательно:

$$f_{111}(t) = 2, \quad f_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,1).$$

В выражениях (4.2.43), (4.2.44) $J_2\left(\dfrac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(3\pi z/h) = v_{123}(r,\varphi,z)$, $J_4\left(\dfrac{\mu_1^{(4)}r}{b}\right)\cos 4\varphi\sin(\pi z/h) = v_{211}(r,\varphi,z)$, — собственные функции, следовательно:

$$g_{123} = 3, \quad g_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,2,3),$$

$$p_{211} = 1, \quad p_{nkm} = 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (2,1,1).$$

Отсюда следует, что все задачи Коши (4.32)—(4.34) при $(n,k,m) \neq (1,1,1)$, $(n,k,m) \neq (1,2,3)$, $(n,k,m) \neq (2,1,1)$ имеют однородные ДУ и однородные начальные условия, следовательно:

$$u_{nkm}(t) \equiv 0 \ \text{ при } \ (n,k,m) \neq (1,1,1), \ (n,k,m) \neq (1,2,3), \ (n,k,m) \neq (2,1,1). \tag{4.2.62}$$

Остальные задачи Коши имеют вид

$$\frac{d^2u_{111}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{111}u_{111}(t) = 2, \quad u_{111}(0) = 0, \quad \frac{du_{111}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.63}$$

$$\frac{d^2u_{123}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{123}u_{123}(t) = 0, \quad u_{123}(0) = 3, \quad \frac{du_{123}(0)}{dt} = 0; \tag{4.2.64}$$

$$\frac{d^2u_{211}(t)}{dt^2} + a^2\lambda_{211}u_{211}(t) = 0, \quad u_{211}(0) = 0, \quad \frac{du_{211}(0)}{dt} = 1. \tag{4.2.65}$$

Решениями задач (4.2.63)—(4.2.65) являются функции

$$u_{111}(t) = \frac{2(1-\cos(a\sqrt{\lambda_{111}}t)}{a^2\lambda_{111}},$$

$$u_{123}(t) = 3\cos(a\sqrt{\lambda_{123}}t), \tag{4.2.66}$$

$$u_{211}(t) = \frac{\sin(a\sqrt{\lambda_{211}}t)}{a\sqrt{\lambda_{211}}}.$$

Подставим (4.2.62), (4.2.66), (4.2.61) в (4.2.60) и получим решение задачи (4.2.41)—(4.2.45):

$$u(r,\varphi,z,t) = 3\cos(a\sqrt{\lambda_{123}}t)J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(3\pi z/h)+$$

$$+\frac{\sin(a\sqrt{\lambda_{211}}t)}{a\sqrt{\lambda_{211}}}J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}r}{b}\right)\cos 4\varphi \sin(\pi z/h)+$$

$$+\frac{2[1-\cos(a\sqrt{\lambda_{111}}t)]}{a^2\lambda_{111}}J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi \sin(\pi z/h),$$

где собственные значения находятся по формуле (2.8.71)

$$\lambda_{111} = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1^{(2)}}{b}\right)^2, \quad \lambda_{123} = \left(\frac{3\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2^{(2)}}{b}\right)^2, \quad \lambda_{211} = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1^{(4)}}{b}\right)^2,$$

$\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu) = 0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Ответ. 1) $u(x,y,z,t) = 3\cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t)\sin 2x \cos 2y \cos(3z/2)+$

$$+\frac{2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)\sin x \cos 2y \cos(z/2)}{a\sqrt{\lambda_{110}}}+$$

$$+\frac{\left[\frac{2}{a\sqrt{\lambda_{121}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t) - \cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t) + e^{-2t}\right]\sin x \cos 4y \cos(3z/2)}{4+a^2\lambda_{121}},$$

где $\lambda_{121} = \dfrac{77}{4}$, $\lambda_{211} = \dfrac{41}{4}$, $\lambda_{110} = \dfrac{21}{4}$.

2) $u(r,\varphi,z,t) = \cos(a\sqrt{\lambda_{211}}t)J_2\left(\dfrac{\nu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi \cos(\pi z/h)+$

$$+2\sin(a\sqrt{\lambda_{110}}t)J_1\left(\frac{\nu_1^{(1)}r}{b}\right)\frac{\cos\varphi}{a\sqrt{\lambda_{110}}}+$$

$$+\left[t+1-\cos(a\sqrt{\lambda_{121}}t) - \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{121}}}\sin(a\sqrt{\lambda_{121}}t)\right]J_1\left(\frac{\nu_2^{(1)}r}{b}\right)\sin\varphi \cos(\pi z/h),$$

где $\quad \lambda_{121}=\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\nu_2^{(1)}}{b}\right)^2, \quad \lambda_{211}=\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\nu_1^{(2)}}{b}\right)^2, \quad \lambda_{110}=\left(\dfrac{\nu_1^{(1)}}{b}\right)^2,$

$\nu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\nu)=0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка.

$$3)\quad u(r,\varphi,z,t)=3\cos(a\sqrt{\lambda_{123}}t)J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(3\pi z/h)+$$

$$+\frac{\sin(a\sqrt{\lambda_{211}}t)}{a\sqrt{\lambda_{211}}}J_4\left(\frac{\mu_1^{(4)}r}{b}\right)\cos 4\varphi\sin(\pi z/h)+$$

$$+\frac{2[1-\cos(a\sqrt{\lambda_{111}}t)]}{a^2\sqrt{\lambda_{111}}}J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}r}{b}\right)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h),$$

где $\lambda_{111}=\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_1^{(2)}}{b}\right)^2$, $\lambda_{123}=\left(\dfrac{3\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_2^{(2)}}{b}\right)^2$, $\lambda_{211}=\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_1^{(4)}}{b}\right)^2$,

$\mu_k^{(2n)}$ — k-й корень уравнения $J_{2n}(\mu)=0$, $J_{2n}(x)$ — функция Бесселя $2n$-го порядка.

Задача 4.2.2. Найти решение начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f$$

в прямоугольном параллелепипеде, в прямом круговом цилиндре или в секторе прямого кругового цилиндра с однородными граничными условиями на ∂D, как в задаче 2.8.2, и начальными условиями $u\Big|_{t=0}=g$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=p$.

1. $f(r,\varphi,z,t)=J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\cos 2\varphi\sin(\pi z/h)\,e^{-t}$,

   $g(r,\varphi,z)=J_1(\mu_1^{(1)}r/b)\sin\varphi\sin(2\pi z/h)$,

   $p(r,\varphi,z)=2J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\sin 2\varphi\sin(2\pi z/h)$.

2. $f(r,\varphi,z,t)=J_2(\mu_2^{(2)}r/b)\sin 2\varphi\cos(\pi z/2h)\operatorname{ch} t$,

   $g(r,\varphi,z)=J_6(\mu_1^{(6)}r/b)\sin 6\varphi\cos(3\pi z/2h)$,

   $p(r,\varphi,z)=3J_2(\mu_1^{(2)}r/b)\sin 2\varphi\cos(\pi z/2h)$.

3. $f(x, y, z, t) = 3\sin x \cos y \sin(z/2)\, e^{-2t}$,
$g(x, y, z) = 2\sin 2x \cos y \sin(3z/2)$,
$p(x, y, z) = \sin x \cos y \sin(3z/2)$.

4. $f(r, \varphi, z, t) = J_1(\nu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \sin(\pi z/h) \operatorname{sh} t$,
$g(r, \varphi, z) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/h)$,
$p(r, \varphi, z) = J_1(\nu_2^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/h)$.

5. $f(r, \varphi, z, t) = J_3(\nu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(\pi z/2h) \cdot (t + 1)$,
$g(r, \varphi, z) = J_3(\nu_2^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(3\pi z/2h)$,
$p(r, \varphi, z) = 2J_3(\nu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(3\pi z/2h)$.

6. $f(x, y, z, t) = \cos x \cos y \sin z\, e^{-2t}$,
$g(x, y, z) = \cos 3x \cos y \sin 2z$,
$p(x, y, z) = \cos x \cos y \sin z$.

7. $f(r, \varphi, z, t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/2h)\, e^{-t}$,
$g(r, \varphi, z) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/2h)$,
$p(r, \varphi, z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/2h)$.

8. $f(r, \varphi, z, t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/2h)\, e^{-2t}$,
$g(r, \varphi, z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \cos 3\varphi \sin(\pi z/2h)$,
$p(r, \varphi, z) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/2h)$.

9. $f(x, y, z, t) = \cos x \sin y \sin z \operatorname{ch} t$,
$g(x, y, z) = \cos 2x \sin 3y \sin 2z$,
$p(x, y, z) = \cos x \sin y \sin 2z$.

10. $f(r, \varphi, z, t) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \sin 2\varphi \sin(\pi z/2h) \cdot (2t + 1)$,
$g(r, \varphi, z) = J_1(\nu_2^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/2h)$,
$p(r, \varphi, z) = J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/2h)$.

11. $f(r, \varphi, z, t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(2\pi z/h)\, e^{-t}$,
$g(r, \varphi, z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/h)$,
$p(r, \varphi, z) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \cos \varphi \sin(\pi z/h)$.

12. $f(x,y,z,t) = \sin\, x \sin\, y \cos(z/2)\, \mathrm{sh}\; t,$

$g(x,y,z) = \sin\, 3x \sin\, 2y \cos(z/2),$

$p(x,y,z) = 2 \sin\, x \sin\, 2y \cos(z/2).$

13. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \cos\, 2\varphi \cos(\pi z/2h),$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b) \sin\, 2\varphi \cos(\pi z/2h).$

14. $f(r,\varphi,z,t) = J_{3/2}(\nu_1^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cos(\pi z/2h)\, e^{-t},$

$g(r,\varphi,z) = J_{3/2}(\nu_2^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cos(3\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = J_{3/2}(\nu_2^{(3/2)} r/b) \sin(3\varphi/2) \cos(\pi z/2h).$

15. $f(x,y,z,t) = \sin\, 2x \cos\, y \cos(z/2) \cdot (t+3),$

$g(x,y,z) = \sin\, x \cos\, 2y \cos(z/2),$

$p(x,y,z) = \sin\, 2x \cos\, 2y \cos(z/2).$

16. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \sin\, 2\varphi \cos(\pi z/2h)\, e^{-2t},$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\nu_1^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = 2J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \sin\, 2\varphi \cos(\pi z/2h).$

17. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(2\pi z/h) \cdot t,$

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \sin\, 3\varphi \cos(\pi z/h),$

$p(r,\varphi,z) = 2J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(\pi z/h).$

18. $f(x,y,z,t) = \cos\, x \sin\, y \sin\, z\, e^{-t},$

$g(x,y,z) = \cos\, 3x \sin\, 3y \sin\, z,$

$p(x,y,z) = 3 \cos\, x \sin\, 3y \sin\, z.$

19. $f(r,\varphi,z,t) = 2J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(2\pi z/h)\, \mathrm{ch}\; t,$

$g(r,\varphi,z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \cos\, \varphi \cos(\pi z/h),$

$p(r,\varphi,z) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin\, \varphi \cos(\pi z/h).$

20. $f(r,\varphi,z,t) = J_{1/2}(\nu_1^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cos(\pi z/2h) \cdot (2t+3),$

$g(r,\varphi,z) = J_{1/2}(\nu_2^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cos(3\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = J_{1/2}(\nu_2^{(1/2)} r/b) \cos(\varphi/2) \cos(\pi z/2h).$

21. $f(x,y,z,t) = \cos x \sin 2y \sin(z/2)\,\mathrm{sh}\, t,$

$g(x,y,z) = \cos 2x \sin y \sin(z/2),$

$p(x,y,z) = 3\cos x \sin 2y \sin(z/2).$

22. $f(r,\varphi,z,t) = J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/2h)\, e^{-2t},$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\mu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(3\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = 2J_2(\mu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(3\pi z/2h).$

23. $f(x,y,z,t) = \sin x \cos y \sin 2z\, e^{-t},$

$g(x,y,z) = \sin 3x \cos 3y \sin z,$

$p(x,y,z) = 2\sin x \cos 3y \sin 2z.$

24. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\mu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(\pi z/2h) \cdot t,$

$g(r,\varphi,z) = J_3(\mu_1^{(3)} r/b) \sin 3\varphi \cos(\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = J_1(\mu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \cos(\pi z/2h).$

25. $f(x,y,z,t) = \sin 2x \sin y \cos(z/2)\,\mathrm{ch}\, t,$

$g(x,y,z) = \sin x \sin 3y \cos(z/2),$

$p(x,y,z) = 2\sin 2x \sin 3y \cos(z/2).$

26. $f(r,\varphi,z,t) = J_1(\nu_2^{(1)} r/b) \sin \varphi \sin(\pi z/2h)\, e^{-2t},$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \sin 2\varphi \sin(\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z) = 2J_1(\nu_1^{(1)} r/b) \sin \varphi \sin(\pi z/2h).$

27. $f(x,y,z,t) = \cos x \sin 2y \sin(z/2) \cdot (t+2),$

$g(x,y,z) = \cos 3x \sin y \sin(3z/2),$

$p(x,y,z) = 3\cos x \sin y \sin(z/2).$

28. $f(r,\varphi,z,t) = 3J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(\pi z/h)\, e^{-t},$

$g(r,\varphi,z) = J_2(\nu_2^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(2\pi z/h),$

$p(r,\varphi,z) = J_2(\nu_1^{(2)} r/b) \cos 2\varphi \sin(2\pi z/h).$

29. $f(x,y,z,t) = \cos x \cos y \sin(z/2)\,\mathrm{sh}\, t,$

$g(x,y,z) = \cos 2x \cos y \sin(z/2),$

$p(x,y,z) = 2\cos x \cos 3y \sin(3z/2).$

30. $f(r,\varphi,z,t)=J_3(\mu_1^{(3)}r/b)\cos 3\varphi\sin(\pi z/2h)\,\mathrm{ch}\,t,$

$g(r,\varphi,z)=J_3(\mu_2^{(3)}r/b)\cos 3\varphi\sin(3\pi z/2h),$

$p(r,\varphi,z)=2J_3(\mu_1^{(3)}r/b)\cos 3\varphi\sin(3\pi z/2h).$

4.3. Метод интегрального преобразования Лапласа решения начально-краевых задач на отрезке

Пример 4.3.1. Решить начально-краевую задачу (4.1.1)—(4.1.4) методом преобразования Лапласа.

Решение. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p)=L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (4.1.1) и граничным условиям (4.1.2), учтем свойство дифференцирования оригинала (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 3), приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2}-p^2U=-p(2\sin 3x+\sin 5x) \qquad (4.3.1)$$

с граничными условиями

$$U\Big|_{x=0}=0, \qquad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=\pi/2}=0. \qquad (4.3.2)$$

Общее решение ДУ (4.3.1) ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $U_{\text{оо}}$ и частных решений неоднородного ДУ $U_{\text{ч}1}$ и $U_{\text{ч}2}$, соответствующих слагаемым в правой части уравнения (4.3.1):

$$U(x,p)=U_{\text{оо}}+U_{\text{ч}1}+U_{\text{ч}2}. \qquad (4.3.3)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (4.3.1) имеет вид

$$U_{\text{оо}}=C_1e^{\frac{p}{a}x}+C_2e^{-\frac{p}{a}x}.$$

Лучше его записать в виде линейной комбинации фундаментальных решений, одно из которых удовлетворяет первому граничному условию (4.3.2), а другое — второму граничному условию

$$U_{\text{оо}}=C_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{a}x\right)+C_2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right). \qquad (4.3.4)$$

Частное решение $U_{ч1}$ ищем в виде

$$U_{ч1} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Подставим его в ДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - p^2U = -2p\sin 3x$$

и получим

$$a^2(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) - p^2(A\cos 3x + B\sin 3x) = -2p\sin 3x.$$

Найдем

$$B = \frac{2p}{p^2+9a^2}, \quad A = 0.$$

Следовательно:

$$U_{ч1} = \frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x.$$

Аналогично находим

$$U_{ч2} = \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x.$$

Общее решение (4.3.3) ОДУ (4.3.1) имеет вид

$$U(x,p) = C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \operatorname{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+\frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x + \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x. \tag{4.3.5}$$

Подставим (4.3.5) в граничные условия (4.3.2), найдем $C_1 = C_2 = 0$.

Итак:

$$U(x,p) = \frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x + \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая соотношение оригинала и изображения (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 8):

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+a^2}\right] = \cos at,$$

находим искомое решение $u(x,t)$.

Ответ.

$$u(x,t) = 2\cos(3at)\sin 3x + \cos(5at)\sin 5x. \qquad (4.3.6)$$

Пример 4.3.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения (4.1.17)—(4.1.21) методом преобразования Лапласа.

Решение. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения (4.1.17)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (4.3.7)$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$u\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad (4.3.8)$$

где

$$f(x,t) = 3e^{-t}\sin x. \qquad (4.3.9)$$

Решение задачи (4.1.17)—(4.1.21) является суммой решения задачи (4.3.7)—(4.3.9) и решения (4.3.6) задачи (4.1.1)—(4.1.3), найденного в примере 4.3.1.

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $f(x,t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, $F(x,p) = L[f]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (4.3.7) и граничным условиям (4.3.8), приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - p^2U = -\frac{3}{p+1}\sin x \qquad (4.3.10)$$

с граничными условиями

$$U\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=\pi/2} = 0. \qquad (4.3.11)$$

Общее решение ДУ (4.3.10) имеет вид

$$U(x,p) = C_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+\frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\sin x. \qquad (4.3.12)$$

Подставим (4.3.12) в граничные условия (4.3.11), найдем $C_1 = C_2 = 0$.

Итак:
$$U(x,p)=\frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\sin\,x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая теорему умножения Бореля (см. прил. 7, табл. П7.1, п. 7) и соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 7, табл. П7.2, п. 7 и п. 3):
$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]=e^{-t},\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sin(at).$$

Находим решение задачи (4.3.7)—(4.3.9)
$$u(x,t)=\frac{3}{a}\int\limits_0^t\sin(a\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau\,\cdot\,\sin\,x=$$
$$=3\left(\frac{1}{a}\sin(at)-\cos(at)+e^{-t}\right)\frac{\sin\,x}{1+a^2}. \qquad (4.3.13)$$

Решение задачи (4.1.17)—(4.1.21) представляет собой сумму решений (4.3.6) и (4.3.13).

Ответ.
$$u(x,t)=3\left(\frac{1}{a}\sin(at)-\cos(at)+e^{-t}\right)\frac{\sin\,x}{1+a^2}+$$
$$+2\cos(3at)\sin\,3x+\cos(5at)\sin\,5x.$$

Задачи 4.3.1 и 4.3.2. Методом преобразования Лапласа решить начально-краевые задачи для волнового уравнения с исходными данными, заданными в задачах 4.1.1 и 4.1.2.

5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Уравнение теплопроводности (4.6)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$
описывает нестационарный процесс диффузии вещества с концентрацией $u(t,\bar{x})$, где a^2 — коэффициент диффузии, f — скорость изменения

вещества в единицу времени в единичном объеме (за счет химической реакции или ионизации). В том случае, когда рассматривается стационарный процесс $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, а f линейно зависит от концентрации $f = \lambda u$, получаем *уравнение Гельмгольца*

$$\triangle u + cu = 0, \quad c = \frac{\lambda}{a^2}. \tag{5.1}$$

В случае неустойчивого газа, когда газ распадается в процессе диффузии $c = -æ^2 < 0$, в случае размножения, например, диффузии нейтронов $c = k^2 > 0$ [4, 5, 10—12].

Распространение волн (акустических или электромагнитных) описывается волновым уравнением (4.9)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u + f(\bar{x}, t),$$

где $u(\bar{x}, t)$ — плотность (или давление) газа, a — скорость распространения возмущения.

В том случае, когда рассматривается установившийся колебательный процесс, гармонически зависящий от времени $u(\bar{x}, t) = u(\bar{x})e^{-i\omega t}$, $f(\bar{x}, t) = f(\bar{x})e^{-i\omega t}$, получаем *уравнение Гельмгольца*

$$\triangle u + k^2 u = -\tilde{f}(\bar{x}), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \tilde{f}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{a^2}, \tag{5.2}$$

где k называется *волновым числом.*

Уравнение Гельмгольца является уравнением эллиптического типа. Для него ставятся краевые задачи с граничным условием

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \beta u\right)\Big|_{\partial D} = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial D \tag{5.3}$$

при $\alpha = 0$ — задача Дирихле, $\beta = 0$ — задача Неймана, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ — третья краевая задача (задача Робена).

Если область D ограничена с достаточно гладкой границей ∂D, то в случае $c = -æ^2 < 0$ свойства решений аналогичны свойствам решений краевых задач для уравнения Пуассона, т.е. существует единственное решение внутренней задачи.

В случае $c = k^2 > 0$ единственное решение существует при условии $k^2 \neq \lambda_i$, где λ_i — собственные значения оператора Лапласа соответствующей краевой задачи.

Внешняя задача (5.2), (5.3) для неограниченной области с компактной границей ∂D для уравнения с $c = -æ^2 < 0$ имеет единственное решение, обращающееся в ноль на бесконечности. В случае уравнения с $c = k^2 > 0$ для выделения единственного решения ставится дополнительное условие, так называемое *условие излучения* [4, 5, 10—12].

В двумерном случае (при временной зависимости $e^{-i\omega t}$)

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(1/\sqrt{r}) \quad \text{при} \quad r \to \infty; \tag{5.4}$$

в трехмерном случае

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(1/r) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5.5}$$

Условиям излучения удовлетворяют решения в виде расходящихся волн.

5.1. Краевые задачи внутри круга и кругового сектора

Пример 5.1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \tag{5.1.1}$$

внутри кругового сектора $D = \{(r, \varphi) : \quad r < a, \quad 0 < \varphi < \pi/6\}$ с граничными условиями

$$u\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi/6} = 0, \tag{5.1.2}$$

$$u\Big|_{r=a} = g(\varphi) = 2\sin 3\varphi \tag{5.1.3}$$

при условии $k^2 \neq \lambda_i$, где λ_i — собственные значения оператора Лапласа соответствующей краевой задачи.

Решение. Ищем частные решения уравнения (5.1.1), удовлетворяющие граничным условиям (5.1.2) в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{5.1.4}$$

Подставим (5.1.4) в (5.1.1) и разделим переменные:

$$\frac{R''(r) + \dfrac{R'(r)}{r} + k^2 R(r)}{\dfrac{R(r)}{r^2}} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда получаем ОДУ

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) R(r) = 0, \tag{5.1.5}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{5.1.6}$$

Подставим (5.1.4) в граничные условия (5.1.2) и получим

$$\Phi(0) = \Phi'(\pi/6) = 0. \tag{5.1.7}$$

Решение задачи Штурма—Лиувилля (5.1.6), (5.1.7) приведено в прил. 1 (п. в). Собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют следующий вид при $l = \pi/6$ (П1.22), (П1.23):

$$\lambda_n = 3^2(2n+1)^2, \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{5.1.8}$$

$$\Phi_n(\varphi) = \sin(3(2n+1)\varphi), \quad ||\Phi_n||^2 = \pi/12, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5.1.9}$$

Теперь рассмотрим ДУ (5.1.5) при $\lambda = \lambda_n = 3^2(2n+1)^2$:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda_n}{r^2}\right) R_n(r) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5.1.10}$$

Сделаем замену независимой переменной $x = kr$. Тогда $R_n(r) = R_n(x/k) \equiv y(x)$, а

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx} \cdot k, \qquad \frac{d^2y}{dr^2} = \frac{d^y}{dx^2} \cdot k^2.$$

После подстановки этих выражений в ДУ (5.1.10) получим уравнение Бесселя порядка $\sqrt{\lambda_n} = 3(2n+1)$:

$$k^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\lambda_n}{x^2}\right) y \right) = 0.$$

Общее решение можно записать в виде

$$y(x) = A_n J_{3(2n+1)}(x) + B_n N_{3(2n+1)}(x),$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя k-го порядка, $N_k(x)$ — функция Неймана k-го порядка. Возвращаясь к первоначальной переменной, получаем общее решение ДУ (5.1.10) в виде

$$R_n(r) = A_n J_{3(2n+1)}(kr) + B_n N_{3(2n+1)}(kr).$$

Функция Неймана $N_k(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Поскольку решение исходной задачи должно быть ограниченным при $r \to 0$, нужно считать $B_n = 0$. Итак, ограниченные решения ДУ (5.1.10) имеют вид

$$R_n(r) = A_n J_{3(2n+1)}(kr), \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5.1.11}$$

Частные решения (5.1.4) найдены:

$$u_n(r, \varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi), \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Решение задачи (5.1.1)—(5.1.3) будем искать в виде функционального ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{3(2n+1)}(kr) \sin(3(2n+1)\varphi), \tag{5.1.12}$$

предполагая, что этот ряд можно дважды почленно дифференцировать по переменным r, φ. В этом ряде коэффициенты A_n неизвестны. Найдем их, подставив (5.1.12) в граничное условие (5.1.3):

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{3(2n+1)}(ka) \sin(3(2n+1)\varphi). \tag{5.1.13}$$

Полученное выражение представляет собой разложение известной функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье по ортогональной на $[0, \pi/6]$ системе собственных функций (5.1.9). Отсюда находим

$$A_n J_{3(2n+1)}(ka)\frac{\pi}{12} = \int_0^{\pi/6} g(\varphi) \sin(3(2n+1)\varphi)\, d\varphi. \tag{5.1.14}$$

Решением исходной задачи является функция $u(r, \varphi)$, заданная в виде ряда (5.1.12), где коэффициенты A_n вычисляются по формуле (5.1.14).

В нашей задаче коэффициенты A_n можно найти, не прибегая к интегрированию (5.1.14). После подстановки (5.1.12) в граничное условие (5.1.3) получим

$$2\sin 3\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{3(2n+1)}(ka)\sin(3(2n+1)\varphi).$$

В левой части равенства $\sin 3\varphi = \Phi_0(\varphi)$ — собственная функция. Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых собственных функциях, найдем

$$A_0 J_3(ka) = 2, \quad A_n = 0 \text{ при } n \neq 0. \tag{5.1.15}$$

Подставим (5.1.15) в (5.1.12) и получим решение задачи (5.1.1)—(5.1.3).

Ответ.

$$u(r,\varphi) = 2\frac{I_3(kr)}{I_3(ka)}\sin 3\varphi. \tag{5.1.16}$$

Замечание. Решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$$\triangle u - æ^2 u = 0 \tag{5.1.17}$$

с граничными условиями (5.1.2), (5.1.3) отличается от рассмотренной задачи следующим. ДУ (5.1.5) примет вид уравнения Бесселя для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \left(æ^2 + \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0. \tag{5.1.18}$$

Его общее решение при $\lambda = \lambda_n = 3^2(2n+1)^2$ запишется в виде

$$R_n(r) = A_n I_{3(2n+1)}(ær) + B_n K_{3(2n+1)}(ær),$$

где $I_k(x)$ — функция Инфельда, $K_k(x)$ — функция Макдональда. Функция Макдональда $K_k(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Ограниченные решения ДУ (5.1.18) имеют вид

$$R_n(r) = A_n I_{3(2n+1)}(ær), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Решение краевой задачи (5.1.17), (5.1.2), (5.1.3) имеет следующий вид:

$$u(r,\varphi) = 2\frac{I_3(ær)}{I_3(æa)}\sin 3\varphi.$$

Задача 5.1.1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0$$

внутри круга $D = \{(r, \varphi): \quad r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ или внутри кругового сектора $D = \{(r, \varphi): \quad r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha\}$.

1. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin 2\varphi.$
2. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 5\sin 2\varphi.$
3. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin 6\varphi.$
4. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos 3\varphi.$
5. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\cos 2\varphi.$
6. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin(3\varphi/2).$
7. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin 4\varphi.$
8. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos(\varphi/2).$
9. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = \cos^2 2\varphi.$
10. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin 4\varphi.$
11. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin 3\varphi.$
12. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin 2\varphi.$
13. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos 6\varphi.$
14. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin^2 3\varphi.$
15. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin(\varphi/2).$
16. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u\Big|_{r=a} = \cos 5\varphi.$

17. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 5\sin 8\varphi.$

18. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos(9\varphi/2).$

19. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 6\sin 6\varphi.$

20. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 5\sin 3\varphi.$

21. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u\Big|_{r=a} = 4\cos 3\varphi.$

22. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\cos 5\varphi.$

23. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin^2\varphi.$

24. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = \sin(9\varphi/2).$

25. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 5\sin 6\varphi.$

26. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\cos(3\varphi/2).$

27. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=2\pi}, \qquad u\Big|_{r=a} = 4\sin^2\varphi.$

28. $u_\varphi\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\cos 2\varphi.$

29. $u\Big|_{\varphi=0} = u_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 2\sin 5\varphi.$

30. $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{r=a} = 3\sin\varphi.$

5.2. Краевые задачи внутри и вне шара

Пример 5.2. Решить краевые задачи для уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2u = 0 \qquad (5.2.1)$$

с граничным условием

$$u\Big|_{r=a} = g(\theta) = \cos 2\theta + \cos\theta : \tag{5.2.2}$$

1) внутри шара $D = \{r < a\}$ с требованием ограниченности решения

$$|u(r,\varphi,\theta)| < \infty \quad \text{при} \quad r \to 0; \tag{5.2.3}$$

2) вне шара $D_e = \{r > a\}$ с условием излучения (5.5).

Решение. Так как граничное условие (5.2.2) не зависит от переменной φ, решение задачи также не зависит от φ, т.е. $u(r,\theta)$. Тогда уравнение (5.2.1) примет вид

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\,\theta}\right) + k^2u = 0. \tag{5.2.4}$$

Ищем частное решение ДУ (5.2.4), удовлетворяющее условию (5.2.3) для внутренней задачи или условию (5.5) для внешней задачи, в виде

$$u(r,\theta) = R(r)Y(\theta). \tag{5.2.5}$$

Подставим (5.2.5) в уравнение (5.2.4) и разделим переменные:

$$\frac{R''(r) + \dfrac{2}{r}R'(r) + k^2R(r)}{\dfrac{R(r)}{r^2}} = -\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\,\theta\dfrac{dY}{d\theta}\right)}{Y(\theta)} = \lambda.$$

Получим ОДУ

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0, \tag{5.2.6}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dY}{d\theta}\right) + \lambda Y(\theta) = 0. \tag{5.2.7}$$

При рассмотрении внутренней задачи из (5.2.3) следует, что

$$|R(0)| < +\infty. \tag{5.2.8}$$

При рассмотрении внешней задачи из (5.5) следует, что

$$\frac{dR(r)}{dr} - ikR(r) = o(1/r) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5.2.9}$$

Задача Штурма—Лиувилля для уравнения (5.2.7) с естественными условиями ограниченности решения на осях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ решена в примере 2.6.1 (2.6.14), (2.6.15). Собственными значениями являются

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{5.2.10}$$

а соответствующие им собственные функции — полиномы Лежандра

$$Y_n(x) = P_n(\cos\theta), \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5.2.11}$$

Рассмотрим ДУ (5.2.6) при $\lambda = \lambda_n$:

$$R_n''(r) + \frac{2}{r}R_n'(r) + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n(r) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5.2.12}$$

Общее решение этого уравнения найдено в прил. 4 (п. в). Его можно записать в виде (П4.8)

$$R_n(r) = A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} + B_n \frac{N_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}, \tag{5.2.13}$$

где $J_{n+1/2}(x)$, $N_{n+1/2}(x)$ — функции Бесселя и Неймана полуцелого порядков,
или в виде (П4.9)

$$R_n(r) = C_n \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} + D_n \frac{H^{(2)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}, \tag{5.2.14}$$

где $H^{(1)}_{n+1/2}(x) = J_{n+1/2}(x) + iN_{n+1/2}(x)$, $H^{(2)}_{n+1/2}(x) = J_{n+1/2}(x) - iN_{n+1/2}(x)$ — функции Ханкеля первого и второго рода полуцелого порядка.

При рассмотрении внутренней задачи из условия ограниченности при $r = 0$ (5.2.8) следует, что в (5.2.13) $B_n = 0$, $n = \overline{0, \infty}$, т.е.

$$R_n(r) = A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

При рассмотрении внешней задачи из условия излучения (5.2.9) следует, что в (5.2.14) $D_n = 0$, $n = \overline{0, \infty}$. Первое слагаемое в (5.2.14) представляет собой расходящиеся сферические волны (при временной зависимости $e^{-i\omega t}$), т.е.

$$R_n(r) = C_n \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

Итак, частные решения (5.2.5) найдены, их оказалось счетное множество
$$u_n(r,\theta) = R_n(r)Y_n(\theta), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Теперь решим сначала *внутреннюю задачу* (5.2.1)—(5.2.3). Решение будем искать в виде суммы найденных частных решений, предполагая, что ряд можно почленно дифференцировать дважды по r и θ:
$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n(\cos\theta). \tag{5.2.15}$$

Неизвестные коэффициенты A_n найдем из граничного условия (5.2.2). Подставим (5.2.15) в (5.2.2) и получим
$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{ka}} P_n(\cos\theta). \tag{5.2.16}$$

Воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра на $[-1,1]$
$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{nk}.$$

Умножим левую и правую части (5.2.16) на $P_k(\cos\theta)\sin\theta$, проинтегрируем на $[0,\pi]$ и получим
$$\int\limits_{0}^{\pi} g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = A_n \frac{2J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{ka}(2n+1)}, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{5.2.17}$$

Решением внутренней задачи (5.2.1)—(5.2.3) является функция $u(r,\theta)$, заданная в виде функционального ряда (5.2.15), где коэффициенты A_n находятся по формуле (5.2.17).

В нашей задаче коэффициенты A_n можно найти, не прибегая к интегрированию (5.2.17). После подстановки (5.2.15) в (5.2.2) получим
$$g(\theta) = \cos\theta + \cos\, 2\theta = -\frac{1}{3}P_0(\cos\,\theta) + 1\cdot P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{ka}} P_n(\cos\theta).$$

Разложение функции $g(\theta)$ по полиномам Лежандра найдено в примере 2.6.1 (2.6.19). Сравним коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра в полученном равенстве:

$$A_0\frac{J_{1/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=-\frac{1}{3},\qquad A_1\frac{J_{3/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=1,\qquad A_2\frac{J_{5/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=\frac{4}{3},$$

$$A_n=0 \ \text{ при } \ n\neq\{1,2,3\}. \tag{5.2.18}$$

Подставим (5.2.18) в (5.2.15) и получим решение внутренней задачи

$$u(r,\theta)=\frac{\sqrt{ka}}{3\sqrt{kr}}\left(-\frac{J_{1/2}(kr)}{J_{1/2}(ka)}P_0(\cos\,\theta)+3\frac{J_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(ka)}P_1(\cos\,\theta)+\right.$$

$$\left.+\,4\frac{J_{5/2}(kr)}{J_{5/2}(ka)}P_2(\cos\,\theta)\right)=\frac{\sqrt{ka}}{3\sqrt{kr}}\left(-\frac{J_{1/2}(kr)}{J_{1/2}(ka)}+3\frac{J_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(ka)}\cos\,\theta+\right.$$

$$\left.+\,2\frac{J_{5/2}(kr)}{J_{5/2}(ka)}(3\cos^2\theta-1)\right). \tag{5.2.19}$$

Теперь решим *внешнюю задачу* (5.2.1), (5.2.2), (5.5). Решение будем искать в виде суммы найденных частных решений

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}P_n(\cos\theta). \tag{5.2.20}$$

Неизвестные коэффициенты C_n найдем из граничного условия (5.2.2). Подставим (5.2.20) в (5.2.2) и получим

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}P_n(\cos\theta).$$

Используя ортогональность полиномов Лежандра, находим

$$C_n=\frac{\sqrt{ka}(2n+1)}{2H^{(1)}_{n+1/2}(ka)}\int\limits_0^{\pi}g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,\quad n=\overline{0,\infty}. \tag{5.2.21}$$

Решением внешней задачи (5.2.1), (5.2.2), (5.5) является функция $u(r,\theta)$, заданная в виде функционального ряда (5.2.20), где коэффициенты C_n вычисляются по формуле (5.2.21).

В нашей задаче коэффициенты C_n можно найти, не прибегая к интегрированию (5.2.21). После подстановки (5.2.20) в (5.2.2) получим

$$g(\theta)=\cos\theta+\cos\,2\theta=-\frac{1}{3}P_0(\cos\,\theta)+1\cdot P_1(\cos\theta)+\frac{4}{3}P_2(\cos\theta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{ka}}P_n(\cos\theta).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра в полученном равенстве:

$$C_0\frac{H^{(1)}_{1/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=-\frac{1}{3},\qquad C_1\frac{H^{(1)}_{3/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=1,\qquad C_2\frac{H^{(1)}_{5/2}(ka)}{\sqrt{ka}}=\frac{4}{3},$$

$$C_n=0 \ \text{ при } \ n\neq=\{1,2,3\}. \tag{5.2.22}$$

Подставим (5.2.22) в (5.2.20) и получим решение внешней задачи

$$u(r,\theta)=\frac{\sqrt{ka}}{3\sqrt{kr}}\left(-\frac{H^{(1)}_{1/2}(kr)}{H^{(1)}_{1/2}(ka)}P_0(\cos\theta)+3\frac{H^{(1)}_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(ka)}P_1(\cos\theta)+\right.$$

$$\left.+\,4\frac{H^{(1)}_{5/2}(kr)}{H^{(1)}_{5/2}(ka)}P_2(\cos\theta)\right)=\frac{\sqrt{ka}}{3\sqrt{kr}}\left(-\frac{H^{(1)}_{1/2}(kr)}{H^{(1)}_{1/2}(ka)}+3\frac{H^{(1)}_{3/2}(kr)}{H^{(1)}_{3/2}(ka)}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\,2\frac{H^{(1)}_{5/2}(kr)}{H^{(1)}_{5/2}(ka)}(3\cos^2\theta-1)\right). \tag{5.2.23}$$

Ответ. 1) Решение внутренней задачи (5.2.19);
2) решение внешней задачи (5.2.23).

Задача 5.2. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\triangle u+k^2u=0$ с краевым условием $u\Big|_{r=a}=g(\theta)$ внутри шара $D=\{r<a\}$ или вне шара $D_e=\{r>a\}$.

Исходные данные взять в задаче 2.6.1.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. *Дифференциальное уравнение* (ДУ) *первого порядка*

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\bar{x},u(\bar{x}))\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(\bar{x},u(\bar{x})), \tag{6.1}$$

где $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in D\subset \mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\neq 0$, $u(\bar{x})\in C^1(D)$ — искомая функция, называется *квазилинейным* [1].

Определение. ДУ (6.1) называется *однородным*, если $b(\bar{x}, u(\bar{x})) \equiv 0$, и *неоднородным*, если $b(\bar{x}, u(\bar{x})) \not\equiv 0$.

Определение. *Решением* ДУ (6.1) называется функция $u(\bar{x}) \in C^1(D)$, которая обращает это уравнение в тождество в любой точке $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Определение. Нормальная, автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = a_i(\bar{x}, u(\bar{x})), \quad i = \overline{1, n}, \\ &\frac{du}{dt} = b(\bar{x}, u(\bar{x})) \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

называется *характеристической системой ОДУ* для ДУ (6.1). Ее решения $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ называются *характеристиками* ДУ (6.1).

Замечание. Решение ДУ (6.1) $u = u(\bar{x})$ можно интерпретировать как поверхность в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, которую называют *интегральной поверхностью*. Решения характеристической системы ОДУ (6.2) $(\bar{x}(t), u(t))$ представляют собой линии в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u) \in C^1$ называется *интегралом* (или *первым интегралом*) системы ОДУ (6.2), если на любом решении этой системы она принимает постоянное значение:

$$\varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t), u(t)) = \mathrm{const}.$$

Теорема 6.1 (*достаточное условие существования независимой системы интегралов*). Если точка $(x_1, \ldots, x_n, u)$ не является точкой покоя системы ОДУ (6.2) (т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i(\bar{x}, u)| + |b(\bar{x}, u)| \neq 0$), тогда в окрестности этой точки существует система n *независимых интегралов*

$$\varphi_1(\bar{x}, u), \ldots, \varphi_n(\bar{x}, u),$$

матрица Якоби которых размерности $(n \times (n+1))$

$$\mathbf{I} = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, u)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u} \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный n.

Теорема 6.2 (*об общем решении ДУ* (6.1)). Пусть $\varphi_i(\bar{x}, u)$, $i = \overline{1, n}$, — независимая система интегралов характеристической системы ОДУ (6.2), тогда любое решение $u = u(\bar{x})$ ДУ (6.1) является неявно заданной функцией

$$\Phi(\varphi_1(\bar{x}, u), \ldots, \varphi_n(\bar{x}, u)) = 0, \tag{6.3}$$

где $\Phi(\cdot)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Замечание. Если ДУ (6.1) однородное (т.е. $b(\bar{x}, u) \equiv 0$), тогда последнее уравнение характеристической системы ОДУ (6.2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = 0.$$

Следовательно, функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ на проекциях характеристик $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ равна $u(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \mathrm{const}$, т.е. является интегралом характеристической системы (6.2). Отсюда следует, что общее решение (6.3) однородного ДУ (6.1) можно записать в виде

$$u = \tilde{\Phi}(\varphi_1(\bar{x}, u), \ldots, \varphi_{n-1}(\bar{x}, u)), \tag{6.4}$$

где $\tilde{\Phi}(\cdot)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Замечание. Для нахождения интегралов характеристической системы ОДУ (6.2) удобно использовать так называемую *симметричную форму* записи системы ОДУ (6.2)

$$\frac{dx_1}{a_1(\bar{x}, u)} = \frac{dx_2}{a_2(\bar{x}, u)} = \ldots = \frac{du}{b(\bar{x}, u)} = dt \tag{6.5}$$

и *свойства равных дробей*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \neq 0. \tag{6.6}$$

Постановка задачи Коши. Найти решение ДУ (6.1) $u(\bar{x}) \in C^1(D)$, которое на заданной гиперповерхности γ размерности $(n-1)$ в $\boldsymbol{R}^n$

$$\gamma: \ x_i = x_i(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = x_i(\bar{\tau}), \ i = \overline{1, n} \tag{6.7}$$

принимает заданное значение

$$u\Big|_{\gamma} = \omega(\bar{\tau}), \tag{6.8}$$

где $\omega(\bar{\tau}) \in C^1$ — заданная функция.

Постановка задачи Коши (*двумерный случай*). Найти решение $u = u(x, y)$ ДУ

$$a_1(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x, y, u), \tag{6.9}$$

принимающее на кривой

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(\tau), \\ y = \psi(\tau), \end{cases} \quad \tau_1 < \tau < \tau_2 \tag{6.10}$$

заданное значение

$$u\Big|_{\gamma} = \omega(\tau), \text{ т.е. } u(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau). \tag{6.11}$$

Теорема 6.3 (*достаточное условие существования единственного решения*). Пусть кривая γ не касается проекций характеристик на плоскости Oxy, тогда задача Коши (6.9)—(6.11) однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой γ.

Замечание. Пусть $u(t, \bar{x})$ — объемная концентрация некоторого вещества в несжимаемой жидкости в момент времени t в точке $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{v}(t, \bar{x}) = (v_1, v_2, v_3)$ — заданное векторное поле скорости жидкости и $I(t, \bar{x}, u)$ — известная функция, характеризующая скорость изменения концентрации вещества в единицу времени в единичном объеме (например, в результате химической реакции). Уравнение закона сохранения массы вещества (так называемое уравнение неразрывности в механике сплошной среды) без учета диффузии имеет вид [2, 5, 10, 12] ДУ первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = I(t, \bar{x}, u).$$

В стационарном случае $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$ уравнение примет вид

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = I(\bar{x}, u).$$

Задача Коши для нестационарного уравнения заключается в нахождении концентрации $u(t,\bar{x})$ при $t \ge t_0$, если в начальный момент времени $t = t_0$ она известна: $u(t_0,\bar{x}) = \omega(\bar{x})$.

Задача Коши для стационарного уравнения заключается в нахождении концентрации $u(\bar{x})$, если на заданной гладкой поверхности γ : $x_i = x_i(\tau_1,\tau_2)$, $i = 1, 2, 3$, она известна: $u\Big|_{\gamma} = \omega(\tau_1,\tau_2)$.

6.1. Общее решение уравнения

Пример 6.1. Найти общие решения уравнений:

$$1)\ (u-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-u)\frac{\partial u}{\partial y} = y - x; \tag{6.1.1}$$

$$2)\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{6.1.2}$$

Решение. 1) Найдем систему независимых интегралов характеристической системы ОДУ (6.5), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{u-y} = \frac{dy}{x-u} = \frac{du}{y-x}. \tag{6.1.3}$$

Используя свойство равных дробей (6.6), можно получить цепочку равенств

$$\frac{dx}{u-y} = \frac{dy}{x-u} = \frac{du}{y-x} = \frac{dx+dy+du}{u-y+x-u+y-x} = \frac{d(x+y+u)}{0} = dt.$$

Отсюда получаем

$$d(x+y+u) = 0 \ \Leftrightarrow \ x+y+u = C_1.$$

Таким образом, интегралом системы характеристик (6.13) является функция

$$\varphi_1(x,y,u) = x+y+u.$$

Воспользуемся опять свойством равных дробей (6.6), предварительно умножив числитель и знаменатель каждой дроби в (6.1.3) соответственно на x, y, u. В результате имеем цепочку равенств

$$\frac{xdx}{x(u-y)} = \frac{ydy}{y(x-u)} = \frac{udu}{u(y-x)} = \frac{xdx + ydy + udu}{x(u-y) + y(x-u) + u(y-x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + u^2)}{0} = dt.$$

Отсюда получаем

$$d(x^2 + y^2 + u^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + u^2 = C_2.$$

Из последнего равенства следует, что еще одним интегралом характеристической системы (6.1.3) является функция

$$\varphi_2(x, y, u) = x^2 + y^2 + u^2.$$

Матрица Якоби

$$\mathbf{I} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2u \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 2 (в противном случае все коэффициенты уравнения (6.1.1) равны нулю). Это означает, что система интегралов $\varphi_1(x, y, u)$, $\varphi_2(x, y, u)$ независима в окрестности любой точки $(x, y, u) \neq$ $\neq (a, a, a)$.

Общее решение исходного ДУ (6.1.1) на основании теоремы 6.2 задается неявно заданной функцией

$$\Phi(x + y + u,\; x^2 + y^2 + u^2) = 0,$$

где $\Phi(\cdot, \cdot)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

2) Найдем систему независимых интегралов характеристической системы ОДУ (6.5) для ДУ (6.1.2), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}. \tag{6.1.4}$$

Из первого равенства после интегрирования получаем

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y} = C_1.$$

Таким образом, интегралом системы характеристик (6.1.4) является функция

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{x}{y}.$$

Воспользуемся свойством равных дробей (6.6), умножив числитель и знаменатель первых двух дробей соответственно на y и x. Получим цепочку равенств

$$\frac{ydx}{yx} = \frac{xdy}{xy} = \frac{ydx + xdy}{2xy} = \frac{d(xy)}{2xy} = \frac{dz}{xy} \;\Rightarrow\; d(xy) = 2dz \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; xy - 2z = C_2.$$

Следовательно, еще одним интегралом характеристической системы (6.1.4) является функция

$$\varphi_2(x, y, z) = xy - 2z.$$

Матрица Якоби

$$\mathbf{I} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1/y & -x/y^2 & 0 \\ y & x & -2 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 2. Это означает, что система интегралов $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ независима в окрестности любой точки $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$.

Общее решение исходного однородного ДУ (6.1.2) на основании замечания к теореме 6.2 задается в виде (6.4)

$$u = \Phi(x/y,\, xy - 2z),$$

где $\Phi(\cdot, \cdot)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Ответ. Общее решение ДУ:

1) $\Phi(x + y + u,\, x^2 + y^2 + u^2) = 0$;

2) $u = \Phi(x/y,\, xy - 2z)$.

Задача 6.1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка.

1. $(2y - u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u.$
2. $x(z - y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y(y - x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y^2 - xz)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$
3. $x(y + u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u(u - y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = y(y - u).$

4. $(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+y+z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

5. $(x+y-xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x^2y-x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2.$

6. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

7. $(x+y^2+u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u.$

8. $(z^2-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

9. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x}.$

10. $2y^4\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\sqrt{z^2+1}\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

11. $(u-y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+xu\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy.$

12. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-2z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

13. $x^2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2u\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y.$

14. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2y+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

15. $(y+u)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-x(y+2u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=xu.$

16. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xyz-2z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+xz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

17. $(x+y)u\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+y)u\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-2xy-3x^2.$

18. $yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+xz\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^{-z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

19. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2y+u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y+2u.$

20. $(z-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

21. $(xu+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+yu)\dfrac{\partial u}{\partial y}=1-u^2.$

22. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}-z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

23. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x}-yu\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy\sqrt{u^2+1}.$

24. $(y^2-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

25. $(xy-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(1-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=yu-x.$

26. $x^2(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

27. $(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u.$

28. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

29. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2.$

30. $\sin^2 x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\operatorname{tg} z\dfrac{\partial u}{\partial y}+\cos^2 z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

6.2. Задача Коши

Пример 6.2. Решить задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2(x^2+y^2), \tag{6.2.1}$$

$$y=1, \qquad u=2x^2. \tag{6.2.2}$$

Решение. Рассмотрим два способа решения.

I (*метод характеристик*). Дополнительные условия (6.2.2) сформулируем в следующем виде: пусть дана кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = \tau, \\ y = 1, \end{cases} \quad \tau_1 < \tau < \tau_2,$$

тогда искомая функция $u(x, y)$ на кривой γ принимает значения

$$u\Big|_{\gamma} = 2\tau^2.$$

Из каждой точки кривой (т.е. при фиксированном τ)

$$\mathit{\Gamma} : \begin{cases} x = \varphi(\tau) = \tau, \\ y = \psi(\tau) = 1, \\ u = \omega(\tau) = 2\tau^2, \end{cases} \quad \tau_1 < \tau < \tau_2,$$

выпустим характеристику, т.е. решим задачу Коши для характеристической системы ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, & x\Big|_{t=0} = \tau, \\ \dfrac{dy}{dt} = y, & y\Big|_{t=0} = 1, \\ \dfrac{du}{dt} = 2(x^2 + y^2), & u\Big|_{t=0} = 2\tau^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t, & x\Big|_{t=0} = \tau, \\ y = C_2 e^t, & y\Big|_{t=0} = 1, \\ u = (C_1^2 + C_2^2)e^{2t} + C_3, & u\Big|_{t=0} = 2\tau^2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \tau e^t, \\ y = e^t, \\ u = (\tau^2 + 1)e^{2t}, \end{cases} \quad (\tau_1 < \tau < \tau_2, \quad 0 \le t). \tag{6.2.3}$$

Система уравнений (6.2.3) задает искомую интегральную поверхность в параметрическом виде.

Исключим параметры τ и t и получим уравнение интегральной поверхности в явном виде

$$u = x^2 + y^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1. \tag{6.2.4}$$

II (*метод общего решения*). Найдем первые интегралы характеристической системы, записанной в симметричном виде:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2(x^2 + y^2)}. \tag{6.2.5}$$

Проинтегрируем первое равенство и получим

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y} = C_1.$$

Таким образом, интегралом системы характеристик (6.2.5) является функция

$$\varphi(x, y, u) = \frac{x}{y}.$$

Воспользуемся свойством равных дробей (6.6), получим цепочку равенств

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{du}{2(x^2+y^2)} = \frac{d(u-x^2-y^2)}{0} = dt.$$

Отсюда получаем

$$d(u - x^2 - y^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; u - x^2 - y^2 = C_2,$$

т.е. еще одним интегралом характеристической системы (6.2.5) является функция

$$\varphi_2(x, y, u) = u - x^2 - y^2.$$

Матрица Якоби

$$\mathbf{I} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, u)} = \begin{pmatrix} 1/y & -x/y^2 & 0 \\ -2x & -2y & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & -x & 0 \\ -2x & -2y & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 2. Это означает, что система интегралов $\varphi_1(x, y, u)$, $\varphi_2(x, y, u)$ независима в окрестности любой точки $(x, y, u) \neq (0, 0, u)$. Общее решение дифференциального уравнения (6.2.1) на основании теоремы 6.2 задается неявно заданной функцией

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\frac{x}{y},\, u - x^2 - y^2\right) = 0.$$

Рассмотрим систему интегралов и дополнительных условий (6.2.2)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = C_1, \\ u - x^2 - y^2 = C_2, \\ y = 1, \quad u = 2x^2. \end{cases}$$

Исключим из нее x, y, u и получим конкретную зависимость $\Phi(C_1{,}C_2) = 0$, связывающую C_1 и C_2:

$$\begin{cases} x = C_1, \\ u - x^2 - 1 = C_2, \\ u = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ x^2 - 1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1^2 - 1 = C_2.$$

Подставим вместо C_1 и C_2 соответствующие интегралы и получим решение искомой задачи Коши (6.2.1), (6.2.2)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1 = u - x^2 - y^2 \Rightarrow u = x^2 + y^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1.$$

Ответ. Решением задачи Коши является функция (6.2.4)

$$u = x^2 + y^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1.$$

Задача 6.2. Решить задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

1. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} + xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy, \quad x = 1, \quad y^2 + u^2 = 1.$
2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - xy, \quad y = 2, \quad u = 1 + x^2.$
3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y, \quad y = 2u, \quad u = x + 2y.$
4. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + yu\dfrac{\partial u}{\partial y} = -xy, \quad y = 1, \quad u = x.$
5. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x, \quad y = 1, \quad u = x^2.$
6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy + u, \quad y = x^2, \quad u = x^2.$
7. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \quad y = x, \quad u = x^2.$
8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2, \quad y = x^2, \quad u = x^2 - x^4.$

9. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xu+y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=u,\quad x+y=2u,\ \ xu=1.$

10. $u\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xu,\quad x+y=2,\ \ yu=1.$

11. $(x-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,\quad x-y=2,\ \ u+x=1.$

12. $(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y,\quad x=-y=-u.$

13. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2,\quad y=\dfrac{1}{x},\ \ 2u=y^2-1.$

14. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2,\quad x=0,\ \ uy^2=1.$

15. $xy^3\dfrac{\partial u}{\partial x}+x^2u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=uy^3,\quad x=y,\ \ yu=1.$

16. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2,\quad xy=1,\ \ u=x^2+y^2.$

17. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u^2xy,\quad x=1,\ \ yu=1.$

18. $\operatorname{tg}x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u,\quad x=\dfrac{\pi}{2},\ \ u=y^2.$

19. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+yu\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u^2,\quad x=\dfrac{4}{3},\ \ u=y^2.$

20. $(y+2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}-2x^2u\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2,\quad x=u,\ \ y=x^2.$

21. $u\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u^2-x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x,\quad y=x^2,\ \ u=2x.$

22. $xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+x^2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u(x^2+y^2),\quad x=2y,\ \ u=6y^4.$

23. $(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y(1+y^2)u^2,\quad y=0,\ \ xu=1.$

24. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=u(x+y),\quad y=2x,\ \ x=u.$

25. $xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(yu - x^2), \quad y = 1, \quad u = 2x^2.$

26. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad x = 0, \quad u^2 = y.$

27. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + yu\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - y^2, \quad xy = 1, \quad u^2 = 1 - y^2.$

28. $(x^2 - y^2 - u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \quad y = 1, \quad u = x.$

29. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = -(x + y), \quad y = 2x, \quad u = 1 - 2x.$

30. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = -y(2x + u), \quad y = 2x, \quad u = 2x.$

7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА II РОДА

Математической моделью задачи о вынужденных гармонических во времени колебаниях упругого стержня с частотой ω и амплитудой $y(x)$ является интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$y(x) = \omega^2 \int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)\,dt + f(x),$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность массы, $G(x,t)$ — известная функция, определяющая отклонение балки в точке x, вызванное единичной нагрузкой, приложенной в точке t (так называемая функция Грина соответствующей задачи), а функция

$$f(x) = \int_a^b G(x,t)\tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(x)$ — амплитуда возмущающей внешней силы.

Краевые задачи для уравнений Лапласа или Гельмгольца с помощью потенциалов простого и двойного слоя сводятся к граничным интегральным уравнениям Фредгольма II рода по границе области [2, 6, 8—12].

Рассмотрим интегральное уравнение (ИУ) Фредгольма II рода

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \tag{7.1}$$

где *ядро* $K(x,t) \in C([a,b]\times[a,b])$, *правая часть* $f(x) \in C([a,b])$ и *действительный параметр* λ являются задаными; $y(x) \in C([a,b])$ — искомая функция.

Интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt \tag{7.2}$$

называется *соответствующим* (7.1) *однородным уравнением*, а уравнение

$$z(x) = \mu \int\limits_a^b K(t,x)z(t)\,dt \tag{7.3}$$

— *союзным* или *транспонированным* с (7.2) однородным уравнением.

Определение. Число λ, при котором однородное ИУ (7.2) имеет ненулевое решение, называется *характеристическим числом* ($\mu = \lambda^{-1}$ — собственным значением) ядра $K(x,t)$ или соответствующего ИУ, а соответствующие ему ненулевые решения $y(x)$ — *собственными функциями.*

Теорема 1 (*альтернатива Фредгольма*). Пусть λ фиксировано. Или неоднородное уравнение (7.1) имеет единственное решение при $\forall f(x) \in C([a,b])$, и однородное уравнение (7.2) имеет только нулевое решение, или соответствующее однородное уравнение (7.2) имеет ненулевые решения, и неоднородное уравнение (7.1) разрешимо не для всякой $f(x)$.

Теорема 2. Во втором случае альтернативы (т.е. λ — характеристическое число ядра), однородные уравнения (7.2) и (7.3) имеют одно и то же *конечное* число линейно независимых решений (собственных функций).

Теорема 3. Во втором случае альтернативы (т.е. λ — характеристическое число ядра), для разрешимости *неоднородного* ИУ (7.1) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(x)$ была ортогональна ко всем решениям $z(x)$ (собственным функциям) союзного однородного уравнения (7.3), т.е.

$$\int_a^b f(x)z(x)\,dx = 0. \tag{7.4}$$

Если условие (7.4) выполнено, то ИУ (7.1) имеет бесконечное множество решений вида

$$y(x) = y_{\text{ч.н.}}(x) + \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x), \tag{7.5}$$

где $y_{\text{ч.н}}(x)$ — частное решение неоднородного ИУ (7.1) и $y_i(x)$ — собственные функции, соответствующие характеристическому значению λ, C_i — произвольные постоянные.

7.1. Уравнение с вырожденным ядром

Определение. Ядро $K(x,t)$ называется *вырожденным*, если имеет вид

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t), \qquad a_i(x), b_i(t) \in C([a,b]), \tag{7.1.1}$$

где системы функций $\{a_i(x)\}$ и $\{b_i(t)\}$ можно считать линейно независимыми на $[a,b]$.

Предположим, что ИУ (7.1) имеет решение, подставим (7.1.1) в (7.1), получим СЛАУ

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij}C_j + f_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7.1.2}$$

где

$$C_i = \int_a^b b_i(t)y(t)\,dt,$$

$$K_{ij} = \int_a^b b_i(t)a_j(t)\,dt, \qquad f_i = \int_a^b b_i(t)f(t)\,dt, \tag{7.1.3}$$

а решение $y(x)$ ИУ (7.1) связано с решением СЛАУ (7.1.2) C_i формулой

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x)C_i + f(x). \tag{7.1.4}$$

Однородному ИУ (7.2) будет соответствовать однородная СЛАУ

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij}C_j \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{E} - \lambda K)C = \theta, \tag{7.1.5}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $K = ||K_{ij}||$, $C = (C_1, ..., C_n)^T$, $\theta = (0, ..., 0)^T$. Характеристические числа ядра $K(x,t)$ (7.1.1) находятся из уравнения

$$|\mathbf{E} - \lambda K| = 0, \tag{7.1.6}$$

а соответствующие им собственные функции ядра $K(x,t)$ находятся по формуле

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) C_i, \tag{7.1.7}$$

где C_i, $i = \overline{1,n}$ — ненулевые решения однородной СЛАУ (7.1.5) при λ, равном характеристическому числу.

Подставим (7.1.1) в союзное однородное ИУ (7.3), получим однородную СЛАУ

$$B_i = \mu \sum_{j=1}^{n} K_{ji} B_j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7.1.8}$$

а решение $z(x)$ ИУ (7.3) связано с решением СЛАУ (7.1.8) B_i формулой

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) B_i. \tag{7.1.9}$$

Пример 7.1. Дано интегральное уравнение Фредгольма II рода (7.1) с ядром $K(x,t)$ и правой частью $f(x)$:

1) $K(x,t) = (2x-1)\cos t,\ a = 0,\ b = \pi,\ f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = x;$

2) $K(x,t) = x \operatorname{ch} t + t,\ a = -1,\ b = 1,\ f(x) = x.$

а) Найти характеристические числа ядра $K(x,t)$ и соответствующие им собственные функции.

б) При λ, не равном характеристическим значениям, решить ИУ.

в) При λ, равном характеристическому значению, проверить условие разрешимости. Найти решение ИУ, если условие выполнено.

Решение 1: а) По формуле (7.1.3) найдем

$$K_{11} = \int_0^{\pi} (2t-1)\cos t\, dt = -4.$$

Однородная СЛАУ (7.1.5) имеет следующий вид:

$$(1 + 4\lambda) C = 0. \tag{7.1.10}$$

Приравняем к нулю определитель, найдем характеристическое число:

$$1 + 4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1/4.$$

Соответствующее ненулевое решение однородной СЛАУ (7.1.10) при $\lambda = -1/4 \quad C \neq 0$. Из (7.1.7) находим собственную функцию, которая определяется с точностью до постоянного множителя:

$$y(x) = 2x - 1.$$

б) Пусть $\lambda \neq -1/4$. Найдем решение ИУ для правой части $f(x) = f_1(x) = \sin x$. По формуле (7.1.3) вычислим

$$f_1 = \int_0^{\pi} \cos t \sin t \, dt = 0.$$

СЛАУ (7.1.2) имеет единственное нулевое решение $C = 0$. Подставим его в (7.1.4) и получим решение ИУ при $\lambda \neq -1/4$ с правой частью $f_1(x) = \sin x$

$$y(x) = \sin x.$$

Найдем решение для правой части $f(x) = f_2(x) = x$. По формуле (7.1.3) вычислим

$$f_1 = \int_0^{\pi} \cos t \cdot t \, dt = -2.$$

СЛАУ (7.1.2) примет вид

$$(1 + 4\lambda)C = -2 \;\Rightarrow\; C = -2/(1 + 4\lambda).$$

Подставим найденное решение в (7.1.4) и получим решение ИУ при $\lambda \neq -1/4$ с правой частью $f_2(x) = x$

$$y(x) = -\frac{2\lambda}{1 + 4\lambda}(2x - 1) + x.$$

в) Пусть $\lambda = -1/4$. Найдем характеристическое число и собственную функцию союзного ядра $K(t, x) = \cos x(2t - 1)$. Однородная СЛАУ (7.1.8) имеет вид

$$(1 + 4\mu)B = 0.$$

Отсюда находим характеристическое число союзного ядра $\mu = -1/4$ и соответствующую ему собственную функцию из (7.1.9), определенную с точностью до постоянного множителя:

$$z(x) = \cos x.$$

Проверим условие разрешимости (7.4) ИУ при $\lambda = -1/4$ для правой части $f(x) = f_1(x) = \sin x$:

$$\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = 0.$$

Условие выполнено, следовательно, ИУ имеет бесконечно много решений (7.5)

$$y(x) = C(2x - 1) + \sin x,$$

где первое слагаемое — общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе — частное решение неоднородного.

Проверим условие разрешимости (7.4) ИУ при $\lambda = -1/4$ для правой части $f(x) = f_2(x) = x$:

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = -2 \neq 0.$$

Условие не выполнено, следовательно, ИУ с правой частью $f_2(x) = x$ при $\lambda = -1/4$ не имеет решений.

Решение 2: а) По формуле (7.1.3) найдем

$$K_{11} = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} t \cdot t \, dt = 0, \qquad K_{12} = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} t \cdot 1 \, dt = 2 \operatorname{sh} 1,$$

$$K_{21} = \int_{-1}^{1} t \cdot t \, dt = 2/3, \qquad K_{22} = \int_{-1}^{1} t \cdot 1 \, dt = 0.$$

Однородная СЛАУ (7.1.5) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda \operatorname{sh} 1 \\ -2\lambda/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.1.11}$$

Приравняем к нулю определитель системы, найдем характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$. При $\lambda_1 = \sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$ имеем ненулевое решение системы (7.1.11) $(C_1, C_2) = (\sqrt{3\,\text{sh }1}, 1)$. Подставим его в (7.1.7) и получим собственную функцию

$$y_1(x) = \sqrt{3\,\text{sh }1}\,x + 1.$$

При $\lambda_2 = -\sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$ имеем ненулевое решение системы (7.1.11) $(C_1, C_2) = (\sqrt{3\,\text{sh }1}, -1)$, следовательно, соответствующая собственная функция имеет вид

$$y_2(x) = \sqrt{3\,\text{sh }1}\,x - 1.$$

б) Пусть $\lambda \neq \lambda_{1,2}$. По формуле (7.1.3) вычислим

$$f_1 = \int\limits_{-1}^{1} \text{ch }t \cdot t\,dt = 0, \qquad f_2 = \int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\,dt = 2/3.$$

Неоднородная СЛАУ (7.1.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda\,\text{sh }1 \\ -2\lambda/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

имеет решение

$$(C_1, C_2) = \frac{2}{3 - 4\lambda^2\,\text{sh }1}(2\lambda\,\text{sh }1, 1).$$

Подставим его в (7.1.4) и получим решение ИУ

$$y(x) = \frac{2\lambda}{3 - 4\lambda^2\,\text{sh }1}(2\lambda\,\text{sh }1 \cdot x + 1) + x.$$

в) Пусть $\lambda = \lambda_{1,2}$. Найдем характеристические числа и собственные функции союзного ядра $K(t, x) = \text{ch }x \cdot t + x$. Однородная СЛАУ (7.1.8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\mu/3 \\ -2\mu\,\text{sh }1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравняем к нулю определитель системы, найдем характеристические числа $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$. Характеристическому числу $\mu_1 = \sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$ соответствует собственная функция

$$z_1(x) = \text{ch }x + \sqrt{3\,\text{sh }1} \cdot x,$$

а характеристическому числу $\mu_2 = -\sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh }1})$ — функция

$$z_2(x) = \text{ch }x - \sqrt{3\,\text{sh }1} \cdot x.$$

Проверим условие разрешимости (7.4) ИУ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ для правой части $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} f(x) z_1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x(\text{ch } x + \sqrt{3\,\text{sh } 1} \cdot x)\, dx = \sqrt{3\,\text{sh } 1} \cdot \frac{2}{3} \neq 0,$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) z_2(x)\, dx = -\sqrt{3\,\text{sh } 1} \cdot \frac{2}{3} \neq 0.$$

Условие не выполнено, следовательно, ИУ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ не имеет решений.

Ответ.

1) а) $\lambda_1 = -1/4, \quad y_1(x) = 2x - 1;$

б) $\lambda_1 \neq -1/4$ при $f_1(x) = \sin x, \quad y(x) = \sin x,$

при $f_2(x) = x, \quad y(x) = -\dfrac{2\lambda}{1 + 4\lambda}(2x - 1) + x;$

в) $\lambda_1 = -1/4$ при $f_1(x) = \sin x, \quad y(x) = C(2x - 1) + \sin x,$

при $f_2(x) = x$ решений нет.

2) а) $\lambda_1 = \sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh } 1}), \quad y_1(x) = \sqrt{3\,\text{sh } 1} \cdot x + 1,$

$\lambda_2 = -\sqrt{3}/(2\sqrt{\text{sh } 1}), \quad y_2(x) = \sqrt{3\,\text{sh } 1} \cdot x - 1;$

б) $\lambda \neq \lambda_{1,2}, \quad y(x) = \dfrac{2\lambda}{3 - 4\lambda^2\,\text{sh } 1}(2\lambda\,\text{sh } 1 \cdot x + 1) + x;$

в) $\lambda \neq \lambda_{1,2}$, решений нет.

Задача 7.1. Дано интегральное уравнение Фредгольма II рода (7.1).

а) Найти характеристические числа ядра $K(x, t)$ и соответствующие им собственные функции.

б) При λ, не равном характеристическим значениям, решить ИУ.

в) При λ, равном характеристическому значению, проверить условие разрешимости данного ИУ. Найти решения, если условие выполнено.

При вычислениях воспользоваться формулами

$$\text{sh}(a \pm b) = \text{sh } a\,\text{ch } b \pm \text{ch } a\,\text{sh } b, \qquad \text{ch}(a \pm b) = \text{ch } a\,\text{ch } b \pm \text{sh } a\,\text{sh } b,$$

$$2\,\text{sh}^2 a = \text{ch } 2a - 1, \qquad 2\,\text{ch}^2 a = \text{ch } 2a + 1.$$

1. 1) $K(x,t) = x^2 \cos 2t$, $a = 0$, $b = \pi$, $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(x) = x^2$.
   2) $K(x,t) = \cos(x+t)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

2. 1) $K(x,t) = \sin(\pi x)\cdot t$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = 3x^2-1$, $f_2(x) = x$.
   2) $K(x,t) = \sin(x+t)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

3. 1) $K(x,t) = \sin(\pi x)\cdot t$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_2(x) = x^3$.
   2) $K(x,t) = \cos(x-t)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

4. 1) $K(x,t) = x^2 \sin 2t$, $a = 0$, $b = \pi$, $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = x$.
   2) $K(x,t) = \sin(x-t)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

5. 1) $K(x,t) = \cos(\pi x)(3t^2-1)$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.
   2) $K(x,t) = \operatorname{ch}(x+t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1$.

6. 1) $K(x,t) = \dfrac{(2x^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-t^2}}$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   2) $K(x,t) = \operatorname{sh}(x+t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1$.

7. 1) $K(x,t) = (x+1)\sin 2t$, $a = 0$, $b = \pi$, $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = x$.
   2) $K(x,t) = \operatorname{ch}(x-t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1$.

8. 1) $K(x,t) = x^2(t+1)$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = 5x^3-3x$, $f_2(x) = x^2$.
   2) $K(x,t) = \operatorname{sh}(x-t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1$.

9. 1) $K(x,t) = x(4t^3-3t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_2(x) = x$.
   2) $K(x,t) = \cos x + \cos t$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

10. 1) $K(x,t) = (x+1)\cos t$, $a = 0$, $b = \pi$, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = x$.
    2) $K(x,t) = \sin x + \sin t$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = x$.

11. 1) $K(x,t) = x^3(5t^3-3t)$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.
    2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x\cdot t + \operatorname{ch} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

12. 1) $K(x,t) = \dfrac{xt}{\sqrt{1-t^2}}$, $a = -1$, $b = 1$, $f_1(x) = 4x^3-3x$, $f_2(x) = x^2$.
    2) $K(x,t) = \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

13. 1) $K(x,t) = (3x-1)\sin 3t$, $a = 0$, $b = \pi/2$,
    $f_1(x) = \sin 5x$, $f_2(x) = 1$.

2) $K(x,t) = \cos\, x \cdot t + x \cos\, t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

14. 1) $K(x,t) = x^2(3t^2-1), \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = 5x^3-3x, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \sin\, x \cdot t + \sin\, t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

15. 1) $K(x,t) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f_1(x) = x,$

$f_2(x) = \sqrt{1-x^2}.$

2) $K(x,t) = x \sin\, t + \sin\, x, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

16. 1) $K(x,t) = (x+1) \cos\, t, \ a = 0, \ b = \pi/2, \ f_1(x) = \cos\, 3x, \ f_2(x) = 1.$

2) $K(x,t) = \sin\, x \cdot t + x, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

17. 1) $K(x,t) = x(5t^3-3t), \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = 3x^2-1, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = x \sin\, t + t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

18. 1) $K(x,t) = (x^3-1)t, \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \operatorname{sh}\, x \cdot t + \operatorname{sh}\, t, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

19. 1) $K(x,t) = (x-1) \sin\, t, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad f_1(x) = \sin\, 2x, \quad f_2(x) = 1.$

2) $K(x,t) = x \operatorname{sh}\, t + \operatorname{sh}\, x, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

20. 1) $K(x,t) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f_1(x) = 2x^2-1, \quad f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \operatorname{sh}\, x \cdot t + x, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

21. 1) $K(x,t) = (3x^2-1)(3t^2-1), \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f_1(x) = 1,$

$f_2(x) = x.$

2) $K(x,t) = x \operatorname{sh}\, t + t, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = 1.$

22. 1) $K(x,t) = 5x \sin\, 5t, \ a = 0, \ b = \pi/2, \ f_1(x) = \sin\, 3x, \ f_2(x) = 1.$

2) $K(x,t) = \cos\, x \cdot t^2 + x^2 \sin\, t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

23. 1) $K(x,t) = x(t+1), \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = 3x^2-1, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \sin\, x \cdot t + x \sin\, t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

24. 1) $K(x,t) = x^2(2t^2-1), \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \operatorname{ch}\, x \cdot t + x \operatorname{ch}\, t, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

25. 1) $K(x,t) = (3x+1) \cos\, 3t, \quad a = 0, \quad b = \pi/2,$

$f_1(x) = \cos\, x, \quad f_2(x) = 1.$

2) $K(x,t) = x^2 \cos t + x \sin t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x^2.$

26. 1) $K(x,t) = x^2(3t^2-1), \ a = -1, \ b = 1, \ f_1(x) = x-1, \ f_2(x) = x.$

2) $K(x,t) = \cos x \cdot t^2 + \sin x \cdot t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

27. 1) $K(x,t) = x(4t^3-3t), \ a=-1, \ b=1, \ f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \cos x \cos t + xt, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

28. 1) $K(x,t) = 2x \sin 2t, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = x.$

2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t + xt, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

29. 1) $K(x,t) = (x^3+1)t, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f_1(x) = 35x^4 - 30x^2 + 3,$ $f_2(x) = x.$

2) $K(x,t) = x^2 \operatorname{ch} t + x \operatorname{sh} t, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad f(x) = x.$

30. 1) $K(x,t) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \ a=-1, \ b=1, \ f_1(x) = 4x^3-3x, \ f_2(x) = x^2.$

2) $K(x,t) = \sin x \cdot t + \cos x \sin t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi, \quad f(x) = x.$

7.2. Метод последовательных приближений

Рассмотрим метод последовательных приближений решения интегрального уравнения (7.1)

$$y_0(x) = f(x), \quad y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t)\, dt + f(x), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Можно показать, что эта последовательность непрерывных функций имеет следующий вид:

$$y_0(x) = f(x), \quad y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \int_a^b K_i(x,t) f(t)\, dt + f(x), \quad n = \overline{1,\infty},$$

где

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_i(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_{i-1}(s,t)\, ds, \quad i = \overline{2,\infty}, \quad (7.2.1)$$

— *повторные* или *итерированные* ядра.

Теорема (*существование решения для малых* λ). Пусть

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad M = \max_{[a,b]\times[a,b]} |K(x,t)|. \tag{7.2.2}$$

Тогда ИУ (7.1) при $\forall f(x) \in C([a,b])$ имеет единственное решение, которое представляется в виде абсолютно и равномерно сходящегося на $[a,b]$ функционального *ряда Неймана*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_a^b K_i(x,t) f(t)\, dt + f(x). \tag{7.2.3}$$

Замечание. Решение (7.2.3) можно записать в виде

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\, dt + f(x), \tag{7.2.4}$$

где

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) \tag{7.2.5}$$

— *разрешающее* или *резольвентное* ядро.

Пример 7.2. Дано интегральное уравнение Фредгольма II рода (7.1) с ядром $K(x,t)$ и правой частью $f(x)$:

1) $K(x,t) = \operatorname{arctg} x\,(t+t^2)$, $a=-1$, $b=1$, $f(x)=x$;

2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t + xt$, $a=-1$, $b=1$, $f(x)=x$.

а) Найти итерированные ядра (7.2.1) для ядра $K(x,t)$.

б) Найти резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ с помощью ряда (7.2.5), найти λ, при которых этот ряд сходится.

в) С помощью резольвентного ядра $R(x,t;\lambda)$ найти решение ИУ (7.2.4).

Решение. 1)а) По формуле (7.2.1) находим итерированные ядра

$$K_1(x,t) = \operatorname{arctg} x\,(t+t^2);$$

$$K_2(x,t) = \int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x\,(s+s^2) \operatorname{arctg} s\,(t+t^2)\, ds =$$

$$= \operatorname{arctg} x\,(t+t^2) \int_{-1}^{1} (s+s^2) \operatorname{arctg} s\, ds = \operatorname{arctg} x\,(t+t^2)\left(\frac{\pi}{2}-1\right);$$

$$K_3(x,t) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \int\limits_{-1}^{1} \text{arctg }x\,(s+s^2)\,\text{arctg }s\,(t+t^2)\,ds =$$

$$= \text{arctg }x\,(t+t^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2, \ldots;$$

$$K_i(x,t) = \text{arctg }x\,(t+t^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{i-1}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

б) Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ находим по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}\,\text{arctg }x\,(t+t^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{i-1} =$$

$$= \text{arctg }x\,(t+t^2)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda(\pi-2)}{2}\right)^{i-1} = \text{arctg }x\,(t+t^2)\frac{2}{2-\lambda(\pi-2)},$$

при $|\lambda(\pi-2)/2| < 1 \ \Rightarrow \ |\lambda| < 2/(\pi-2)$.

в) Решение ИУ при $|\lambda| < 2/(\pi-2)$ и $f(x) = x$ находим по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \frac{2\lambda}{2-\lambda(\pi-2)}\,\text{arctg }x\int\limits_{-1}^{1}(t+t^2)t\,dt + x = \frac{4\lambda}{3(2-\lambda(\pi-2))}\,\text{arctg }x + x.$$

2) Итерированные ядра $K_i(x,t)$ для вырожденного ядра, содержащего два слагаемых, найдены в прил. 6. Вычислим интегралы (П6.2):

$$K_{11} = \int\limits_{-1}^{1} \text{ch}\,s\,\text{sh}\,s\,ds = 0, \qquad K_{12} = \int\limits_{-1}^{1} \text{sh}\,s\cdot s\,ds = 2(\text{ch }1 - \text{sh }1),$$

$$K_{21} = \int\limits_{-1}^{1} s\,\text{ch}\,s\,ds = 0, \qquad K_{22} = \int\limits_{-1}^{1} s\cdot s\,ds = 2/3.$$

В прил. 6 (п. г) для случая $K_{11} = K_{21} = 0$ найдены итерированные ядра (П6.13)

$$K_i(x,t) = t\left(2(\text{ch }1 - \text{sh }1)\,\text{ch }x + \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}, \quad i = \overline{2,\infty}$$

и резольвентное ядро (П6.14)

$$R(x,t;\lambda) = \text{ch } x \,\text{sh } t + xt + t\Big(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\,\text{ch } x + \frac{2}{3}x\Big)\frac{3\lambda}{3-2\lambda}, \quad |\lambda| < 3/2.$$

Решение ИУ задается формулой (П6.15), где для правой части $f(x) = x$

$$f_1 = \int_{-1}^{1} \text{sh } s\, s\, ds = 2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1), f_2 = \int_{-1}^{1} ss\, ds = 2/3.$$

Окончательно по формуле (П6.15) при $|\lambda| < 3/2$ получаем решение ИУ

$$y(x) = \lambda\Big(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\text{ch } x + \frac{2}{3}x + \frac{2\lambda}{3-2\lambda}\Big(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\text{ch } x + \frac{2}{3}x\Big)\Big) + x =$$

$$= \frac{3\lambda}{3-2\lambda}\left(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\,\text{ch } x + \frac{2}{3}x\right) + x.$$

Ответ.

1) а) Итерированные ядра равны

$$K_i(x,t) = \text{arctg } x\,(t+t^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{i-1}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

б) Резольвентное ядро:

$$R(x,t;\lambda) = \text{arctg } x\,(t+t^2)\frac{2}{2-\lambda(\pi-2)} \quad \text{при} \quad |\lambda| < 2/(\pi-2).$$

в) Решение ИУ:

$$y(x) = \frac{4\lambda}{3(2-\lambda(\pi-2))}\,\text{arctg } x + x \quad \text{при} \quad |\lambda| < 2/(\pi-2).$$

2) а) Итерированные ядра равны

$$K_i(x,t) = t\left(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\,\text{ch } x + \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}, \quad i = \overline{2,\infty}.$$

б) Резольвентное ядро:

$$R(x,t;\lambda) = \text{ch } x \,\text{sh } t + xt + t\Big(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\,\text{ch } x + \frac{2}{3}x\Big)\frac{3\lambda}{3-2\lambda}$$

$$\text{при} \quad |\lambda| < 3/2.$$

в) Решение ИУ:

$$y(x) = \frac{3\lambda}{3-2\lambda}\left(2(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)\,\text{ch } x + \frac{2}{3}x\right) + x \quad \text{при} \quad |\lambda| < 3/2.$$

Задача 7.2. Дано интегральное уравнение Фредгольма II рода (7.1) с ядром $K(x,t)$ и правой частью $f(x)$.

а) Найти итерированные ядра для ядра $K(x,t)$.

б) Найти резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ с помощью ряда Неймана, найти λ, при которых этот ряд сходится.

в) С помощью резольвентного ядра $R(x,t;\lambda)$ найти решение ИУ.

1. 1) $K(x,t) = x/\sqrt{1-t^2}, \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
   2) $K(x,t) = \cos(x+t), \quad a=0, \quad b=2\pi, \quad f(x)=x.$
2. 1) $K(x,t) = x\sin 2t, \quad a=0, \quad b=\pi, \quad f(x)=x.$
   2) $K(x,t) = \sin\cos t + xt, \quad a=-\pi, \quad b=\pi, \quad f(x)=x.$
3. 1) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t, \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
   2) $K(x,t) = \cos(x-t), \quad a=0, \quad b=2\pi, \quad f(x)=x.$
4. 1) $K(x,t) = \operatorname{ch} x\cdot(t-1), \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=\operatorname{sh} x.$
   2) $K(x,t) = \cos\sin t + xt, \quad a=-\pi, \quad b=\pi, \quad f(x)=x.$
5. 1) $K(x,t) = \cos 2x\cdot t,\ a=0,\ b=\pi/2,\ f(x)=\sin x.$
   2) $K(x,t) = \operatorname{ch}(x+t), \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=1.$
6. 1) $K(x,t) = t/(1+x^2), \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
   2) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x, \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=1.$
7. 1) $K(x,t) = \sin x\cos 2t,\ a=0,\ b=\pi,\ f(x)=\sin x.$
   2) $K(x,t) = \operatorname{ch}(x-t), \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=1.$
8. 1) $K(x,t) = \cos x\sin t, \quad a=0, \quad b=\pi/2, \quad f(x)=x.$
   2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t, \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
9. 1) $K(x,t) = \ln x/t, \quad a=1, \quad b=2, \quad f(x)=\ln x.$
   2) $K(x,t) = \sin x\cos t + x\sin t, \quad a=-\pi, \quad b=\pi, \quad f(x)=x.$
10. 1) $K(x,t) = \operatorname{arctg} x\cdot t, \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
    2) $K(x,t) = \cos x\sin t + \sin x\cdot t, \quad a=-\pi, \quad b=\pi, \quad f(x)=x.$
11. 1) $K(x,t) = e^x(t-1), \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=e^x.$
    2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t + \operatorname{sh} x\cdot t, \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
12. 1) $K(x,t) = \arcsin x\cdot t, \quad a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x.$
    2) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t + x\operatorname{sh} t, \quad a=-1, \quad b=1, \quad f(x)=x.$

13. 1) $K(x,t) = x/(1+t^2)$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = \cos x \cdot t + t^2$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

14. 1) $K(x,t) = (x-1)\operatorname{sh} t$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = \sin x \cdot t + \sin t$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

15. 1) $K(x,t) = (x-1)\operatorname{ch} t$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x \sin t + \sin x$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

16. 1) $K(x,t) = 1/(x \ln t)$, $a = 2$, $b = 3$, $f(x) = x \ln x$.
2) $K(x,t) = \sin x \cdot t + x$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

17. 1) $K(x,t) = x \ln t$, $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x \sin t + t$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

18. 1) $K(x,t) = x \operatorname{arctg} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \cdot t + \operatorname{sh} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

19. 1) $K(x,t) = x \arcsin t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x \operatorname{sh} t + \operatorname{sh} x$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

20. 1) $K(x,t) = 1/(1+x^2)$, $a = 0$, $b = 1, f(x) = x$.
2) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \cdot t + x$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

21. 1) $K(x,t) = (1-x)e^t$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x \operatorname{sh} t + t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

22. 1) $K(x,t) = \operatorname{sh} x \cdot (t-1)$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \operatorname{ch} x$.
2) $K(x,t) = \cos x \cdot t^2 + x^2 \sin t$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

23. 1) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \cdot (1-t)$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^x$.
2) $K(x,t) = x^2 t^2 + \operatorname{sh} x \cdot t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

24. 1) $K(x,t) = t/\sqrt{1-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x^2 t^2 + x \sin t$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

25. 1) $K(x,t) = (1+x^2)\sin 2t$, $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = x$.
2) $K(x,t) = x^2 t^2 + \sin x \cdot t$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

26. 1) $K(x,t) = x(1-t^2)$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^x$.
2) $K(x,t) = xt + \operatorname{ch} x \cdot t^2$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

27. 1) $K(x,t) = \cos x \cdot (t^2+1)$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $f(x) = \sin x$.
2) $K(x,t) = \cos x \cos t + xt$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(x) = x$.

28. 1) $K(x,t) = \sin x \cdot (t+1)$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $f(x) = \cos x$.

2) $K(x,t) = \operatorname{ch} x \cdot t^2 + \operatorname{sh} x \cdot t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

29. 1) $K(x,t) = (1+t)/(1+x^2)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

2) $K(x,t) = x^2 \operatorname{ch} t + x \operatorname{sh} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

30. 1) $K(x,t) = \arcsin x \cdot (t+1)$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

2) $K(x,t) = x^2 t^2 + x \operatorname{sh} t$, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x$.

7.3. Уравнение с симметричным ядром

Рассмотрим ИУ (7.1) с непрерывным симметричным ядром

$$K(x,t) = K(t,x) \in C([a,b]).$$

Теорема (*Гильберта—Гольмгрена*). Всякое непрерывное симметричное ядро имеет по крайней мере одно характеристическое значение.

Свойства характеристических значений и собственных функций симметричного ядра

I. Любой конечный отрезок числовой оси содержит конечное (либо пустое) множество характеристических чисел.

II. Все характеристические числа и собственные функции вещественны.

III. Собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны на $[a,b]$:

$$\int_a^b y_i(x) y_j(x)\,dx = \delta_{ij} \int_a^b y_i^2(x)\,dx.$$

IV. Каждому характеристическому числу λ соответствует *конечное* число (называемое *кратностью*) линейно независимых собственных функций. Эти функции можно считать попарно ортогональными (провести процесс ортогонализации Грама—Шмидта).

Определение. Рассмотрим характеристические числа в порядке возрастания по модулю и повторим каждое число столько раз, какова его кратность. Эта последовательность называется *максимальной системой характеристических чисел,* ей соответствует ортонормированная *максимальная система собственных функций.*

Теорема (*Гильберта—Шмидта*). Пусть λ не является характеристическим числом непрерывного симметричного ядра, тогда ИУ (7.1) имеет единственное решение, которое представляется равномерно и абсолютно сходящимся на $[a, b]$ рядом Шмидта

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x), \tag{7.3.1}$$

где $y_n(x)$ — ортонормированная максимальная система собственных функций, а f_n — коэффициент Фурье

$$f_n = \int_a^b f(x) y_n(x)\, dx. \tag{7.3.2}$$

Пусть $\lambda = \lambda_1$ — собственное число ядра. Тогда ИУ разрешимо, если удовлетворяются условия разрешимости (7.4)

$$\int_a^b f(x) y_n(x)\, dx = 0, \quad n = \overline{1, k}, \tag{7.3.3}$$

где $y_1(x), ..., y_k(x)$ — собственные функции, соответствующие характеристическому числу λ_1 кратности k. Все решения ИУ выражаются формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + \sum_{n=1}^{k} C_n y_n(x), \tag{7.3.4}$$

где $C_1, ..., C_k$ — произвольные постоянные [6, 8, 9].

Пример 7.3. Дано ИУ Фредгольма II рода (7.1) с непрерывным симметричным ядром

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos(1-t)/\cos 1 & \text{при } \ 0 \le x \le t, \\ \cos(1-x) \sin t/\cos 1 & \text{при } \ t \le x \le 1 \end{cases} \tag{7.3.5}$$

и различными правыми частями: $f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$, $f_2(x) = 1$.

а) Найти максимальную ортонормированную систему собственных функций ядра.

б) При λ, не равном характеристическим значениям, решить ИУ, используя представление в виде ряда Шмидта (7.3.1).

в) При λ, равном характеристическому значению λ_2, проверить условие разрешимости (7.3.3). Найти решения, если условия выполнены.

Решение. а) Подставим ядро (7.3.5) в однородное ИУ (7.2), получим

$$y(x)=\frac{1}{\cos 1}\left(\cos(1-x)\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt+\sin x\int_x^1 \cos(1-t)\, y(t)\, dt\right). \quad (7.3.6)$$

Два раза продифференцируем (7.3.6):

$$y'(x)=\frac{\lambda}{\cos 1}\left(\sin(1-x)\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt+\cos(1-x)\sin x\, y(x)+\right.$$

$$\left.+\cos x\int_x^1 \cos(1-t)\, y(t)\, dt-\sin x\cos(1-x)y(x)\right)=$$

$$=\frac{\lambda}{\cos 1}\left(\sin(1-x)\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt+\cos x\int_x^1 \cos(1-t)\, y(t)\, dt\right), \quad (7.3.7)$$

$$y''(x)=\frac{\lambda}{\cos 1}\left(-\cos(1-x)\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt+\sin(1-x)\sin x\, y(x)-\right.$$

$$\left.-\sin x\int_x^1 \cos(1-t)\, y(t)\, dt-\cos x\cos(1-x)y(x)\right)=$$

$$=-\frac{\lambda}{\cos 1}\left(\cos(1-x)\int_0^x \sin t\, y(t)\, dt+\sin x\int_x^1 \cos(1-t)\, y(t)\, dt\right)-\lambda y(x). \quad (7.3.8)$$

Подставим (7.3.6) в (7.3.8) и получим

$$y''+(\lambda+1)y=0. \quad (7.3.9)$$

Из (7.3.6) при $x=0$ и (7.3.7) при $x=1$ получим однородные граничные условия

$$y(0)=0, \quad y'(1)=0. \quad (7.3.10)$$

Задача Штурма—Лиувилля (7.3.9), (7.3.10) эквивалентна однородному ИУ (7.2), (7.3.5). Решение задачи (7.3.9), (7.3.10) найдено в прил. 1 (п. в). Собственные значения при $l=1$ задаются формулой (П1.22)

$$\lambda_n+1=(\pi(2n+1)/2)^2, \quad n=\overline{0,\infty}, \quad (7.3.11)$$

соответствующие им нормированные собственные функции (П1.23)

$$y_n(x)=\sqrt{2}\sin(\pi(2n+1)x/2), \quad n=\overline{0,\infty}.$$

б) Пусть λ не равно характеристическому значению (7.3.11). Для правой части $f(x) = f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$ вычислим коэффициенты Фурье (7.3.2):

$$f_0 = 1, \quad f_n = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Решение ИУ для правой части $f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$ по формуле Шмидта (7.3.1) примет следующий вид:

$$y(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2) + \frac{\lambda \cdot 4\sqrt{2}}{\pi^2 - 4(\lambda+1)}\sin(\pi x/2) = \frac{\sqrt{2}(\pi^2-4)}{\pi^2 - 4(\lambda+1)}\sin(\pi x/2).$$

Для правой части $f(x) = f_2(x) = 1$ вычислим коэффициенты Фурье (7.3.2):

$$f_n = \sqrt{2}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)x\right)dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(2n+1)}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Решение ИУ для правой части $f_2(x) = 1$ по формуле Шмидта (7.3.1) примет вид

$$y(x) = 1 + \frac{16\lambda}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(\pi^2(2n+1)^2 - 4(\lambda+1))}\sin(\pi(2n+1)x/2).$$

в) Пусть λ равно характеристическому значению $\lambda_2 = 25\pi^2/4 - 1$. Для правой части $f(x) = f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$ условие разрешимости (7.3.3) выполнено:

$$\sqrt{2}\int_0^1 \sin(\pi x/2) y_2(x)\,dx = 2\int_0^1 \sin(\pi x/2)\sin(5\pi x/2)\,dx = 0.$$

Решения ИУ задаются формулой (7.3.4)

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n - \lambda}y_n(x) + Cy_2(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2) + C\sin(5\pi x/2).$$

Для правой части $f(x) = f_2(x) = 1$ условия разрешимости (7.3.3) не выполнены:

$$\sqrt{2}\int_0^1 1\cdot\sin(5\pi x/2)\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi} \neq 0.$$

Интегральное уравнение при $\lambda = \lambda_2 = 25\pi^2/4 - 1$ для правой части $f_2(x) = 1$ решений не имеет.

Ответ.

1) а) $\lambda_n = (\pi(2n+1)/2)^2 - 1, \quad y_n(x) = \sqrt{2}\sin(\pi(2n+1)x/2), \quad n = \overline{0,\infty}.$

б) При $\lambda \neq \lambda_n$ для правой части $f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}(\pi^2 - 4)}{\pi^2 - 4(\lambda + 1)}\sin(\pi x/2).$$

Для правой части $f_2(x) = 1$

$$y(x) = 1 + \frac{16\lambda}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(\pi^2(2n+1)^2 - 4(\lambda+1))}\sin(\pi(2n+1)x/2).$$

в) При $\lambda = \lambda_2 = 25\pi^2/4 - 1$ для правой части $f_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2)$

$$y(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x/2) + C\sin(5\pi x/2).$$

Для правой части $f_2(x) = 1$ решений нет.

Задача 7.3. Дано ИУ Фредгольма II рода (7.1) с непрерывным симметричным ядром $K(x,t) = K(t,x)$ и различными правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

а) Найти максимальную ортонормированную систему собственных функций ядра.

б) При λ, не равном характеристическим значениям, решить ИУ, используя представление в виде ряда Шмидта.

в) При λ, равном характеристическому значению, проверить условие разрешимости. Найти решения, если условия выполнены.

1. $K(x,t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le x \le t, \\ 1 - x, & t \le x \le 1; \end{cases} \quad f_1(x) = \cos(3\pi x/2), \quad f_2(x) = 1.$

2. $K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin(1-t)/\cos 1, & 0 \le x \le t, \\ \sin(1-x)\cos t/\cos 1, & t \le x \le 1; \end{cases} \quad f_1(x) = \cos(5\pi x/2),$ $f_2(x) = 1.$

3. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \sin(1-t)/\sin 1, & 0 \le x \le t, \\ \sin(1-x)\sin t/\sin 1, & t \le x \le 1; \end{cases} \quad f_1(x) = \sin(3\pi x),$ $f_2(x) = 1.$

4. $K(x,t) = \begin{cases} \cos x \cos(1-t)/\sin 1, & 0 \le x \le t, \\ \cos(1-x)\cos t/\sin 1, & t \le x \le 1; \end{cases} \quad f_1(x) = \cos(4\pi x),$ $f_2(x) = x.$

5. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(1-t)/\operatorname{sh} 1, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{sh}(1-x)\operatorname{sh} t/\operatorname{sh} 1, & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(3\pi x)$, $f_2(x)=1$.

6. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{ch} x\operatorname{sh}(1-t)/\operatorname{ch} 1, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{sh}(1-x)\operatorname{ch} t/\operatorname{ch} 1, & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(5\pi x/2)$, $f_2(x)=1$.

7. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{sh} x\operatorname{ch}(1-t)/\operatorname{ch} 1, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{ch}(1-x)\operatorname{sh} t/\operatorname{ch} 1, & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(7\pi x/2)$, $f_2(x)=1$.

8. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(1-t)/\operatorname{sh} 1, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{ch}(1-x)\operatorname{ch} t/\operatorname{sh} 1, & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(5\pi x)$, $f_2(x)=x$.

9. $K(x,t)=\begin{cases}x, & 0\le x\le t,\\ t, & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(5\pi x/2)$, $f_2(x)=1$.

10. $K(x,t)=\begin{cases}x(1-t), & 0\le x\le t,\\ t(1-x), & t\le x\le 1;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(\pi x)$, $f_2(x)=1$.

11. $K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \cos x\sin t, & t\le x\le \pi/2;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin 4x$, $f_2(x)=1$.

12. $K(x,t)=\begin{cases}\cos x\sin t, & 0\le x\le t,\\ \sin x\cos t, & t\le x\le \pi;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(3x/2)$, $f_2(x)=1$.

13. $K(x,t)=\begin{cases}\cos x\sin(t-2)/\cos 2, & 0\le x\le t,\\ \sin(x-2)\cos t/\cos 2, & t\le x\le 2;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(3\pi x/4)$, $f_2(x)=1$.

14. $K(x,t)=\begin{cases}\sin x\sin(t-2)/\sin 2, & 0\le x\le t,\\ \sin(x-2)\sin t/\sin 2, & t\le x\le 2;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(\pi x/2)$, $f_2(x)=1$.

15. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(t-2)/\operatorname{sh} 2, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{sh}(x-2)\operatorname{sh} t/\operatorname{sh} 2, & t\le x\le 2;\end{cases}$ $f_1(x)=\sin(\pi x/2)$, $f_2(x)=1$.

16. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{ch} x\operatorname{sh}(t-2)/\operatorname{ch} 2, & 0\le x\le t,\\ \operatorname{sh}(x-2)\operatorname{ch} t/\operatorname{ch} 2, & t\le x\le 2;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(3\pi x/4)$, $f_2(x)=1$.

17. $K(x,t)=\begin{cases}t-2, & 0\le x\le t,\\ x-2, & t\le x\le 2;\end{cases}$ $f_1(x)=\cos(3\pi x/4)$, $f_2(x)=1$.

18. $K(x,t) = \begin{cases} x(t-2)/2, & 0 \le x \le t, \\ t(x-2)/2, & t \le x \le 2; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(\pi x)$, $f_2(x) = 1$.

19. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \cos x \sin t, & t \le x \le \pi; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(x/2)$, $f_2(x) = 1$.

20. $K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & -\pi/2 \le x \le t, \\ \sin x \cos t, & t \le x \le \pi/2; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin\left(\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)/2\right)$, $f_2(x) = 1$.

21. $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x+1)\operatorname{sh}(1-t)/\operatorname{sh} 2, & -1 \le x \le t, \\ \operatorname{sh}(t+1)\operatorname{sh}(1-x)/\operatorname{sh} 2, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(\pi(x+1))$, $f_2(x) = 1$.

22. $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{ch}(1+x)\operatorname{sh}(1-t)/\operatorname{ch} 2, & -1 \le x \le t, \\ \operatorname{sh}(1-x)\operatorname{ch}(1+t)/\operatorname{ch} 2, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \cos(\pi(x+1)/4)$, $f_2(x) = 1$.

23. $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x+1)\operatorname{ch}(t-1)/\operatorname{ch} 2, & -1 \le x \le t, \\ \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh}(t+1)/\operatorname{ch} 2, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(\pi(x+1)/4)$, $f_2(x) = 1$.

24. $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{ch}(1+x)\operatorname{ch}(t-1)/\operatorname{sh} 2, & -1 \le x \le t, \\ \operatorname{ch}(1+t)\operatorname{ch}(x-1)/\operatorname{sh} 2, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \cos(\pi(x-1))$, $f_2(x) = x$.

25. $K(x,t) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le t, \\ t+1, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \cos(\pi(x-1)/4)$, $f_2(x) = 1$.

26. $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-1)/2, & -1 \le x \le t, \\ (t+1)(x-2)/2, & t \le x \le 1; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(\pi(x+1))$, $f_2(x) = 1$.

27. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & -\pi/2 \le x \le t, \\ \cos x \sin t, & t \le x \le \pi/2; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin\left(\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\Big/ 2\right)$, $f_2(x) = 1$.

28. $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & -\pi \le x \le t, \\ \cos x \sin t, & t \le x \le \pi; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin((x+\pi)/4)$, $f_2(x) = 1$.

29. $K(x,t) = \begin{cases} \pi - t, & -\pi \le x \le t, \\ \pi - x, & t \le x \le \pi; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin(x/4)$, $f_2(x) = 1$.

30. $K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & -\pi \le x \le t, \\ \sin x \cos t, & t \le x \le \pi; \end{cases}$ $f_1(x) = \sin((x+\pi)/2)$, $f_2(x) = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Задачи Штурма—Лиувилля для $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ на отрезке

Рассмотрим ОДУ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (0 < x < l) \tag{П1.1}$$

с различными комбинациями граничных условий

а) $X(0) = X(l) = 0,$ (П1.2)
б) $X'(0) = X(l) = 0,$ (П1.3)
в) $X(0) = X'(l) = 0,$ (П1.4)
г) $X'(0) = X'(l) = 0,$ (П1.5)
д) $X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi),$ (П1.6)

Определение. Числа λ, при которых существуют ненулевые решения уравнения (П1.1), удовлетворяющие однородным граничным условиям одного из видов а)—д), называются *собственными значениями*, а соответствующие им ненулевые решения называются *собственными функциями* задачи Штурма—Лиувилля.

а) Решим задачу (П1.1), (П1.2). Рассмотрим три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$, тогда характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (П1.1) с постоянными коэффициентами

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$$

имеет действительные корни. Общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x). \tag{П1.7}$$

Подставим (П1.7) в граничные условия (П1.2), получим однородную систему линейных алгебраческих уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch}(0) + C_2 \operatorname{sh}(0) = 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}l) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

Ненулевые решения этой системы могут существовать, если определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}l) & \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \tag{П1.8}$$

Уравнение (П1.8) при $\lambda < 0$ корней не имеет, следовательно, собственных значений нет.

Пусть $\lambda = 0$, тогда уравнение (П1.1) имеет общее решение

$$X(x) = C_1 x + C_2. \tag{П1.9}$$

Подставим (П1.9) в граничные условия (П1.2), получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 \cdot l + C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевые решения $C_1 = C_2 = 0$, следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Пусть $\lambda > 0$, тогда характеристическое уравнение для (П1.1)

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

имеет чисто мнимые корни. Общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \tag{П1.10}$$

Подставим (П1.10) в граничные условия (П1.2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{П1.11}$$

Приравняем к нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{П1.12}$$

Уравнение (П1.12) имеет счетное множество корней

$$\sqrt{\lambda_n}l = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{П1.13}$$

Найдем соответствующие им собственные функции. Подставим в систему (П1.12) $\lambda = \lambda_n$. Определитель системы будет равен нулю, следовательно, одно уравнение является следствием другого.

Рассмотрим первое уравнение (оно проще)

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, C_2 — произвольное. Подставим полученный результат в (П1.10) при $\lambda = \lambda_n$ и получим собственные функции

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad ||X_n(x)||^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{2}, \ n = \overline{1, \infty}. \quad (\text{П}1.14)$$

Замечание. Собственные функции определяются с точностью до ненулевого множителя, так как являются решеними *однородной* краевой задачи (П1.1), (П1.2).

б) Решим задачу (П1.1), (П1.3). Рассмотрим три случая 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$, тогда характеристическое уравнение для (П1.1)

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$$

имеет действительные корни. Общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.7). Подставим (П1.7) в граничные условия (П1.3), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1\,\mathrm{sh}(0) + C_2\,\mathrm{ch}(0) = 0, \\ C_1\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}l) + C_2\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

Приравняем определитель этой системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}l) & \mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \quad (\text{П}1.15)$$

Уравнение (П1.15) корней не имеет, следовательно, собственных значений при $\lambda < 0$ нет.

Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) имеет вид (П1.9). Подставим (П1.9) в граничные условия (П1.3), получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевые решения. Это означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.10). Подставим (П1.10) в граничные условия (П1.3), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -C_1\sin(0) + C_2\cos(0) = 0, \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}l) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{П1.16}$$

Приравняем определитель этой системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{П1.17}$$

Уравнение (П1.17) имеет счетное множество корней

$$\sqrt{\lambda_n}l = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{П1.18}$$

Найдем соответствующие им собственные функции. Подставим $\lambda = \lambda_n$ в систему (П1.16). Определитель системы обратится в ноль, следовательно, одно уравнение является следствием другого. Рассмотрим первое уравнение (оно проще)

$$-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$, C_1 — произвольное. Подставим полученный результат в (П1.10) при $\lambda = \lambda_n$, получим собственные функции

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right), \ \ ||X_n(x)||^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{2}, \ \ n = \overline{0,\infty}. \tag{П1.19}$$

в) Решим задачу (П1.1), (П1.4). Рассмотрим три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.7). Подставим в граничные условия (П1.4) и получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1\,\mathrm{ch}(0) + C_2\,\mathrm{sh}(0) = 0, \\ C_1\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}l) + C_2\,\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}l) = 0, \end{cases}$$

которая не имеет ненулевых решений, так как ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda} l) & \mathrm{ch}(\sqrt{\lambda} l) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) имеет вид (П1.9). Подставим (П1.9) в граничные условия (П1.4) и получим систему

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевые решения. Это означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.10). Подставим (П1.10) в граничные условия (П1.4), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0, \\ -C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0. \end{cases} \tag{П1.20}$$

Приравняем определитель этой системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sin(\sqrt{\lambda} l) & \cos(\sqrt{\lambda} l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0. \tag{П1.21}$$

Уравнение (П1.21) имеет счетное множество корней

$$\sqrt{\lambda_n} l = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4l^2}, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{П1.22}$$

Найдем соответствующие им собственные функции. Подставим $\lambda = \lambda_n$ в систему (П1.20). Определитель системы будет равен нулю, следовательно, одно уравнение является следствием другого. Рассмотрим первое уравнение (оно проще)

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, C_2 — произвольное. Подставим полученный результат в (П1.10) при $\lambda = \lambda_n$ и получим собственные функции

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right), \quad ||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(x)\, dx = \frac{l}{2}, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{П1.23}$$

г) Решим задачу (П1.1), (П1.5). Рассмотрим три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$, тогда характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (П1.1) с постоянными коэффициентами

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$$

имеет действительные корни. Общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.7). Подставим (П1.7) в (П1.5), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{sh}(0) + C_2 \operatorname{ch}(0) = 0, \\ C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} l) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} l) = 0. \end{cases}$$

Приравняем определитель этой системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} l) & \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} l) = 0. \qquad (\text{П}1.24)$$

Уравнение (П1.24) корней не имеет, следовательно, собственных значений при $\lambda < 0$ нет.

Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) имеет вид (П1.9). Подставим (П1.9) в граничные условия (П1.5), получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Это означает, что $\lambda = 0$ является собственным значением, а соответствующая собственная функция

$$X_0(x) = 1, \quad ||X_0(x)||^2 = \int\limits_0^l X_0^2(x)\, dx = l. \qquad (\text{П}1.25)$$

определяется с точностью до ненулевого множителя.

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) имеет вид (П1.10). Подставим (П1.10) в граничные условия (П1.15) и получим

$$\begin{cases} C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0. \end{cases} \qquad (\text{П}1.26)$$

Приравняем определитель этой системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda} l) & \cos(\sqrt{\lambda} l) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0. \qquad (\text{П}1.27)$$

Уравнение (П1.27) имеет счетное множество корней

$$\sqrt{\lambda_n} l = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{П1.28}$$

Найдем соответствующие им собственные функции. Подставим в систему (П1.26) $\lambda = \lambda_n$. Определитель системы будет равен нулю, следовательно, одно уравнение является следствием другого. Рассмотрим первое уравнение (оно проще)

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$, C_1 — произвольное. Подставим полученный результат в (П1.10) при $\lambda = \lambda_n$ и получим собственные функции

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad ||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(x)\, dx = \frac{l}{2}, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{П1.29}$$

д) Решим задачу (П1.1), (П1.6). Рассмотрим три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.7). Подставим (П1.7) в граничные условия (П1.6) и получим однородную систему алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1(1 - \operatorname{ch}(2\pi)) - C_2 \operatorname{sh}(2\pi) = 0, \\ -C_1 \operatorname{sh}(2\pi) + C_2(1 - \operatorname{ch}(2\pi)) = 0. \end{cases} \tag{П1.30}$$

Определитель этой однородной системы

$$(1 - \operatorname{sh}(2\pi))^2 - \operatorname{sh}^2(2\pi) = 2(1 - \operatorname{ch}(2\pi)) \neq 0.$$

Следовательно, (П1.30) имеет только нулевые решения $C_1 = C_2 = 0$, т.е при $\lambda < 0$ собственных значений нет.

Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) имеет вид (П1.9). Подставим (П1.9) в (П1.6) и получим

$$\begin{cases} C_1 \cdot 2\pi = 0, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$, C_2 принимает произвольные значения, следовательно, $\lambda_0 = 0$ является собственным значением, а соответствующая собственная функция

$$X_0(0) = 1. \tag{П1.31}$$

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения (П1.1) можно записать в виде (П1.10). Подставим (П1.10) в (П1.6) и получим

$$\begin{cases} C_1(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) - C_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0, \\ C_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) + C_2(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) = 0. \end{cases} \tag{П1.32}$$

Определитель этой системы приравняем к нулю:

$$(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi))^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 2(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) = 0.$$

Отсюда получаем собственные значения

$$\lambda_n = (n)^2, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{П1.33}$$

Подставим (П1.33) в (П1.32) и получим ненулевые решения: C_1 и C_2 принимают произвольные значения $|C_1| + |C_2| \neq 0$. Из (П1.10) с учетом (П1.33) получим собственные функции

$$\begin{gathered} X_n(x) = A_n\cos nx + B_n\sin nx, \quad n = \overline{1,\infty}, \\ \forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0. \end{gathered} \tag{П1.34}$$

Норма собственных функций

$$||X_0(x)||^2 = A_0^2 2\pi, \quad ||X_n(x)||^2 = \int\limits_0^{2\pi} X_n^2(x)\,dx = \pi(A_n^2 + B_n^2), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Приложение 2

Задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим уравнение Лапласа в круге $D : (r < a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$\triangle v(r,\varphi) + \lambda v = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0 \qquad (\Pi 2.1)$$

с различными граничными условиями:

а) $v\Big|_{r=a} = 0;$ $\qquad (\Pi 2.2)$

б) $\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0;$ $\qquad (\Pi 2.3)$

в) $\dfrac{\partial v}{\partial r} + hv\Big|_{r=a} = 0.$ $\qquad (\Pi 2.4)$

Решение. Собственные функции будем искать методом разделения переменных в виде

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0. \qquad (\Pi 2.5)$$

Подставим (П2.5) в ДУ (П2.1), разделим переменные и получим

$$\frac{\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \lambda R}{R(r)/r^2} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Отсюда имеем два ОДУ:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0 \quad (r < a), \qquad (\Pi 2.6)$$

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \qquad (\Pi 2.7)$$

Собственная функция должна быть 2π-периодической по φ:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi(2\pi), \\ \Phi'(0) &= \Phi'(2\pi). \end{aligned} \qquad (\Pi 2.8)$$

Задача Штурма—Лиувилля (П2.7), (П2.8) решена в прил. 1 (п. д) (П1.31), (П1.34), (П1.33). Собственные значения равны

$$\nu_n = n^2, \quad n = \overline{0,\infty}, \qquad (\Pi 2.9)$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \quad n = \overline{0,\infty}, \\ \forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0. \end{gathered} \qquad (\Pi 2.10)$$

Норма собственных функций

$$||\Phi_0(\varphi)||^2 = 2\pi A_0^2, \quad ||\Phi_n(\varphi)||^2 = \pi(A_n^2 + B_n^2), \quad n = \overline{1, \infty}. \qquad (\text{П}2.11)$$

Подставим $\nu = \nu_n$ (П2.9) в ДУ (П.26) и получим

$$R_n'' + \frac{1}{r}R_n' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R_n = 0 \quad (r < a). \qquad (\text{П}2.12)$$

Рассмотрим сначала граничное условие (П2.2) и естественное условие ограниченности при $r = 0$.

а) Для определения $R_n(r)$ получим задачу Штурма—Лиувилля для ДУ (П2.12) с условиями

$$R_n(x) = 0, \qquad (\text{П}2.13)$$

$$|R_n(x)| < +\infty, \qquad (\text{П}2.14)$$

Сделаем замену независимой переменной $x = \sqrt{\lambda}r$ в уравнении (П2.12). Тогда $R(r) = R(x/\sqrt{\lambda}) \equiv y(x)$, следовательно:

$$\frac{dy(x)}{dr} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx}\sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2y(x)}{dr^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\lambda.$$

После подстановки этих выражений в ДУ (П2.12) получим уравнение Бесселя n-го порядка

$$\lambda\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\right) = 0.$$

Его общее решение можно записать в виде

$$y(x) = CJ_n(x) + DN_n(x),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка, $N_n(x)$ — функция Неймана n-го порядка. Учитывая условие (П2.14) и неограниченность функций $N_n(x)$ при $r \to 0$ получаем $D = 0$.

Возвращаясь к первоначальной переменной, получаем ограниченные при $r = 0$ решения ДУ (П2.12) в виде

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r). \qquad (\text{П}2.15)$$

Подставим (П2.15) в граничное условие (П2.13) и получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений:

$$J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Отсюда получаем собственные значения:

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{П2.16}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень n-й функции Бесселя:

$$J_n(\mu_k^{(n)}) = 0. \tag{П2.17}$$

Соответствующие им собственные функции получим из (П2.15):

$$R_n(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$||R_n(r)||^2 = \int\limits_0^a R_n^2(r) r\, dr = \frac{a^2}{2}(J_n'(\mu_k^{(n)}))^2.$$

Таким образом, собственные функции оператора Лапласа в круге с граничными условиями 1-го рода (П2.2) имеют вид

$$\begin{gathered} v_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty}, \\ \forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0, \\ ||v_{nk}||^2 = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} v_{nk}^2(r,\varphi) r\, dr d\varphi = ||\Phi_n(\varphi)||^2 \cdot ||R_n(r)||^2, \end{gathered} \tag{П2.18}$$

а собственные значения находятся по формуле (П2.16), где $\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения (П2.17).

б) Для определения $R_n(r)$ получим задачу Штурма—Лиувилля для ДУ (П2.12) с условиями

$$\begin{gathered} R_n'(a) = 0, \\ |R_n(0)| < +\infty. \end{gathered} \tag{П2.19}$$

Как и в п. а), ограниченными при $r = 0$ решениями ДУ (П2.12) являются функции (П2.15)

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r).$$

Подставим их в граничное условие (П2.19) и получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений

$$J_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

Отсюда получаем собственные значения:

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty}, \tag{П2.20}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень n-й функции Бесселя:

$$J_n'(\mu_k^{(n)}) = 0. \tag{П2.21}$$

Соответствующие им собственные функции получим из (П2.15):

$$R_n(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right), \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty},$$

$$||R_n(r)||^2 = \int\limits_0^a R_n^2(r) r\, dr = \frac{a^2}{2}\left(1 - \left(\frac{n}{\mu_k^{(n)}}\right)^2\right) J_n^2(\mu_k^{(n)}).$$

Таким образом, собственные функции оператора Лапласа в круге с граничным условием 2-го рода (П2.3) имеют вид

$$\begin{gathered} v_{nk}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{1,\infty}, \\ \forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0, \\ ||v_{nk}||^2 = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} v_{nk}^2(r,\varphi) r\, dr d\varphi = ||\Phi_n(\varphi)||^2 \cdot ||R_n(r)||^2, \end{gathered} \tag{П2.22}$$

а собственные значения находятся по формуле (П2.20), где $\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения (П2.21).

в) Для определения $R_n(r)$ получим задачу Штурма—Лиувилля для ДУ (П2.12) с условиями

$$\begin{gathered} (R_n' + hR_n) = 0, \\ |R_n(0)| < +\infty. \end{gathered} \tag{П2.23}$$

Ограниченными при $r = 0$ решениями ДУ (П2.12) являются функции (П2.15)

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r).$$

Подставим их в граничные условия (П2.23) и получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений:

$$\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} a) + hJ_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

Отсюда получаем собственные значения:

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{П2.24}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения

$$\mu J_n'(\mu) + haJ_n(\mu) = 0. \tag{П2.25}$$

Соответствующие им собственные функции получим из (П2.15):

$$R_n(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$||R_n(r)||^2 = \int\limits_0^a R_n^2(r) r\, dr = \frac{a^2}{2}\left[(J_n'(\mu_k^{(n)}))^2 + \left(1 - \left(\frac{n}{\mu_k^{(n)}}\right)^2\right) J_n^2(\mu_k^{(n)})\right].$$

Таким образом, собственные функции оператора Лапласа в круге с граничным условием 3-го рода (П2.4) имеют вид

$$v_{nk}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{a}\right)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

$$\forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \neq 0,$$

$$||v_{nk}||^2 = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} v_{nk}^2(r, \varphi) r\, dr d\varphi = ||\Phi_n(\varphi)||^2 \cdot ||R_n(r)||^2,$$

а собственные значения находятся по формуле (П2.24), где $\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения (П2.25).

Замечание. Найденные собственные функции позволяют найти функции Грина (2.22) соответствующих краевых задач для уравнения Пуассона, с помощью которых находятся решения этих задач по формулам (2.16) или (2.19).

Приложение 3

Задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Лапласа в шаре

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре $D: (r < a,\ 0 \le \theta \le \pi,$ $0 \le \varphi \le 2\pi)$

$$\Delta v(r,\varphi,\theta) + \lambda v = \tag{П3.1}$$
$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0$$

с различными граничными условиями:

а) $v\Big|_{r=a} = 0;$ (П3.2)

б) $\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0;$ (П3.3)

в) $\dfrac{\partial v}{\partial r} + hv\Big|_{r=a} = 0.$ (П3.4)

Решение. Собственные функции ищем методом разделения переменных в виде
$$v(r,\varphi,\theta) = R(r)Y(\varphi,\theta) \not\equiv 0. \tag{П3.5}$$

Подставим (П3.5) в уравнение (П3.1) и разделим переменные:
$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\varphi,\theta} Y(\varphi,\theta)}{Y(\varphi,\theta)} = \nu,$$
где
$$\Delta_{\varphi,\theta} Y = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}. \tag{П3.6}$$

Для функции $R(r)$ получаем ОДУ
$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right) R(r) = 0, \tag{П3.7}$$

а для функции $Y(\varphi,\theta)$ с учетом ее 2π-периодичности по φ и ограниченности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ — задачу Штурма—Лиувилля:

$$\Delta_{\varphi,\theta} Y + \nu Y = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \nu Y, \tag{П3.8}$$

$$0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi),$$

$$|Y(\theta,0)| < +\infty, \quad |Y(\theta,\pi)| < +\infty, \tag{П3.9}$$

$$Y(0,\theta) = Y(2\pi,\theta), \quad \frac{\partial Y(0,\theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y(2\pi,\theta)}{\partial \varphi}. \tag{П3.10}$$

Решение задачи (П3.8)—(П3.10) ищем методом разделения переменных в виде

$$Y(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi) Z(\theta). \tag{П3.11}$$

Подставим (П3.11) в уравнение (П3.8) и разделим переменные:

$$\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dZ}{d\theta}\right) + \nu Z(\theta)}{Z(\theta)/\sin^2\theta} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = æ.$$

Для функции $Z(\theta)$ с учетом условий ограниченности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ получим задачу

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dZ}{d\theta}\right) + \left(\nu - \frac{æ}{\sin^2\theta}\right) Z(\theta) = 0, \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \tag{П3.12}$$

$$|Z(0)| < +\infty, \quad |Z(\pi)| < +\infty. \tag{П3.13}$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ с учетом условий периодичности по φ получим задачу Штурма—Лиувилля:

$$\Phi''(\varphi) + æ\Phi(\varphi) = 0, \quad (0 \le \varphi \le 2\pi), \tag{П3.14}$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \tag{П3.15}$$

Решение задачи (П3.14), (П3.15) получено в прил. 1 (п. д). Собственные значения (П1.33) равны

$$æ_k = k^2, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{П3.16}$$

а соответствующие им собственные функции (П1.31), (П1.34) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, \quad k = \overline{0,\infty}, \\ \forall A_n, B_n, \quad |A_n| + |B_n| \ne 0, \end{gathered} \tag{П3.17}$$

$$||\Phi_0||^2 = A_0^2\, 2\pi, \quad ||\Phi_k||^2 = \int\limits_0^{2\pi} \Phi_k^2(\varphi)\, d\varphi = \pi(A_k^2 + B_k^2), \;\; k = \overline{1,\infty}.$$

Подставим $æ = æ_k$ (П3.16) в ОДУ (П3.12) и сделаем замену независимой переменной $x = \cos\theta$, тогда $Z(\theta) = Z(\arccos x) \equiv y(x)$. Пересчитаем производные в уравнении (П3.12), получим задачу Штурма—Лиувилля для ОДУ присоединенных функций Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) + \left(\nu - \frac{k^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0, \quad (-1 \le x \le 1), \tag{П3.18}$$

$$|y(\pm 1)| < +\infty. \tag{П3.19}$$

Собственные значения этой задачи равны

$$\nu_n = n(n+1), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{П3.20}$$

а соответствующие им собственные функции — *присоединенные функции Лежандра*:

$$y(x) = P_n^{(k)}(x) \equiv (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{0, n};$$
$$||P_n^{(k)}||^2 = \int\limits_{-1}^{1} (P_n^{(k)}(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где $P_n(x)$ — *многочлены Лежандра*, которые могут быть найдены по формуле Родриго

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Вернемся к первоначальной независимой переменной и получим собственные функции задачи (П3.12), (П3.13)

$$Z_{nk}(\theta) = P_n^{(k)}(\cos\theta), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{П3.21}$$

Итак, собственными функциями задачи Штурма—Лиувилля (П3.8)—(П3.10) являются функции

$$\begin{gathered} Y_n^{(k)}(\varphi, \theta) = P_n^{(k)}(\cos\theta)(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), \\ n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty}, \end{gathered} \tag{П3.22}$$

а собственные значения ν_n определяются по формуле (П3.20).

Подставим $\nu = \nu_n$ в ДУ (П3.7) и получим

$$R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R(r) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{П3.23}$$

С помощью замены $R(r) = y(r)/\sqrt{r}$ это уравнение приводится к ДУ Бесселя полуцелого порядка

$$y'' + \frac{1}{r} y' + \left(\lambda - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right) y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y(r) = C_n J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r) + D_n N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r).$$

Из условия ограниченности

$$|R(0)| < +\infty. \tag{П3.24}$$

Учитывая неограниченность функций Неймана $N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r)$ при $r \to 0$, полагаем $D_n = 0$ и получаем ограниченное при $r \to 0$ решение ДУ (П3.23) в виде

$$R(r) = \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{r}}. \qquad (П3.25)$$

Теперь рассмотрим отдельно граничные условия (П3.2)—(П3.4).

а) Из граничного условия (П3.2) следует, что

$$R(a) = 0. \qquad (П3.26)$$

Найдем собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (П3.23), (П3.24), (П3.26).

Подставим (П3.26) в (П3.25) и получим дисперсионное уравнение для определения λ

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} a) = 0. \qquad (П3.27)$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a} \right)^2, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{1, \infty}, \qquad (П3.28)$$

где $\mu_m^{(n+1/2)}$ — m-й корень уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu) = 0,$$

а соответствующие им собственные функции из (П3.27) и (П3.28) имеют вид

$$R_{nm}(r) = J_{n+1/2} \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)} r}{a} \right) \Big/ \sqrt{r}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{1, \infty}, \qquad (П3.29)$$

$$||R_{nm}||^2 = \int\limits_0^a R_{nm}^2 r^2 \, dr = \int\limits_0^a J_{n+1/2}^2 \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)} r}{a} \right) r \, dr =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n+1/2)}) \right)^2. \qquad (П3.30)$$

Итак, собственные функции шара имеют вид (П3.5), (П3.22), (П3.29)

$$v_{nkm}(r, \varphi, \theta) = Y_n^{(k)}(\varphi, \theta) R_{nm}(r) =$$

$$= Y_n^{(k)}(\varphi, \theta) J_{n+1/2} \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)} r}{a} \right) \Big/ \sqrt{r}, n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{1, \infty}, \qquad (П3.31)$$

а соответствующие собственные значения λ_{nm} вычисляются по формуле (П3.28). Норма собственной функции с учетом (П3.17), (П3.20) и (П.30) равна

$$||v_{nkm}||^2 = ||\Phi_k||^2 \cdot ||P_n^{(k)}||^2 \cdot ||R_{nm}||^2. \qquad (П3.32)$$

б) В случае граничного условия (П3.3) следует, что

$$R'(a) = 0,$$

и дисперсионное уравнение для определения собственных значений, учитывая (П3.25), примет вид

$$2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) - J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\right)^2, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad m = \overline{1,\infty},$$

где $\mu_m^{(n+1/2)}$ — m-й корень уравнения

$$2\mu J'_{n+1/2}(\mu) - J_{n+1/2}(\mu) = 0,$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$R_{nm}(r) = J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}r}{a}\right)\Big/\sqrt{r}, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad m = \overline{1,\infty}, \qquad (П3.33)$$

$$||R_{nm}||^2 = \int\limits_0^a R_{nm}^2 r^2\,dr = \int\limits_0^a J_{n+1/2}^2\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}r}{a}\right) r\,dr =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\left(J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n+1/2)})\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{n+1/2}{\mu_m^{(n+1/2)}}\right)^2\right) J_{n+1/2}^2(\mu_m^{(n+1/2)})\right]. \qquad (П3.34)$$

в) В случае граничного условия (П3.4) следует, что

$$R'(a) + hR(a) = 0,$$

и дисперсионное уравнение для определения собственных значений, учитывая (П3.25), примет вид

$$2\sqrt{\lambda}aJ'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) + (2ah-1)J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\right)^2, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad m = \overline{1,\infty},$$

где $\mu_m^{(n+1/2)}$ — m-й корень уравнения

$$2\mu J'_{n+1/2}(\mu) + (2ah-1)J_{n+1/2}(\mu) = 0,$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$R_{nm}(r) = J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}r}{a}\right)\Big/\sqrt{r}, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad m = \overline{1,\infty}$$

с нормой (П3.34).

Приложение 4

Дифференциальное уравнение Эйлера

$$\text{а) } R_\nu''(r) + \frac{1}{r}R_\nu(r) - \frac{\nu^2}{r^2}R_\nu(r) = 0, \quad \nu \geq 0. \tag{П4.1}$$

При $\nu = 0$ уравнение примет вид

$$R_0''(r) + \frac{1}{r}R_r(r) = 0.$$

Сделаем замену, понижающую порядок ДУ, $y(r) = R_0'(r)$:

$$y'(r) + \frac{1}{r}y(r) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy(r)}{y} = -\frac{dr}{r} \;\Leftrightarrow\; y(r) = D_0\frac{1}{r}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dR_0}{dr} = B_0\frac{1}{r} \;\Leftrightarrow\; R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r. \tag{П4.2}$$

При $\nu \neq 0$ найдем частные решения ДУ (П4.1) в виде

$$R(r) = r^\alpha. \tag{П4.3}$$

Подставим (П4.3) в (П4.1) и получим

$$r^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \nu^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 = \nu^2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_{1,2} = \pm\nu.$$

Таким образом, найдены два линейно независимых частных решения — r^ν и $r^{-\nu}$. Общее решение линейного ОДУ (П4.1) при $\nu \neq 0$ запишется в виде линейной комбинации этих частных решений:

$$R_0(r) = C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}, \quad \nu \neq 0. \tag{П4.4}$$

$$\text{б) } R_n''(r) + \frac{2}{r}R_n(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n(r) = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{П4.5}$$

Найдем частные решения ДУ (П4.5) в виде (П4.3). Подставим (П4.3) в (П4.5) и получим

$$r^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \alpha_1 = n,\; \alpha_2 = -(n+1).$$

Таким образом, найдены два линейно независимых частных решения — r^n и $r^{-(n+1)}$. Общее решение линейного ОДУ (П4.5) представляет собой линейную комбинацию этих частных решений:

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{П4.6}$$

в) $R_n''(r)+\dfrac{2}{r}R_n(r)+\left(k^2-\dfrac{n(n+1)}{r^2}\right)R_n(r)=0, \quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (П4.7)$

Сначала сделаем замену независимой переменной $x = kr$. Тогда $R_n(r)=R_n(x/k)\equiv R(x)$. Отсюда

$$\frac{dR(x)}{dr}=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dx}{dr}=\dot{R}(x)k, \quad \frac{d^2R(x)}{dr^2}=\ddot{R}(x)k^2.$$

Уравнение (П4.7) примет вид

$$\ddot{R}(x)+\frac{2}{x}\dot{R}(x)+\left(1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right)R(x)=0.$$

Теперь сделаем замену:

$$R(x)=\frac{y(x)}{\sqrt{x}}, \quad \dot{R}(x)=\frac{\dot{y}(x)}{x^{1/2}}-\frac{y(x)}{2x^{3/2}}, \quad \ddot{R}(x)=\frac{\ddot{y}(x)}{x^{1/2}}-\frac{\dot{y}(x)}{x^{3/2}}+\frac{3}{4}\cdot\frac{y(x)}{x^{5/2}}.$$

После подстановки полученных выражений в ДУ получим для функции $y(x)$ ОДУ Бесселя полуцелого порядка:

$$\ddot{y}+\frac{1}{x}\dot{y}+\left(1-\frac{(n+1/2)^2}{x^2}\right)y=0.$$

Его общее решение можно записать в виде

$$y(x)=A_nJ_{n+1/2}(x)+B_nN_{n+1/2}(x),$$

где $J_{n+1/2}(x)$, $N_{n+1/2}(x)$ — функции Бесселя и Неймана полуцелых порядков, или в виде

$$y(x)=C_nH^{(1)}_{n+1/2}(x)+D_nH^{(2)}_{n+1/2}(x),$$

где $H^{(1)}_{n+1/2}(x)=J_{n+1/2}(x)+iN_{n+1/2}(x)$, $H^{(2)}_{n+1/2}(x)=J_{n+1/2}(x)-iN_{n+1/2}(x)$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода полуцелого порядка.

Таким образом, общее решение ДУ (П4.7) можно записать в виде

$$R_n(r)=A_n\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}+B_n\frac{N_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}, \quad n=\overline{0,\infty} \qquad (П4.8)$$

или в виде

$$R_n(r)=C_n\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}+D_n\frac{H^{(2)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}}, \quad n=\overline{0,\infty}. \qquad (П4.9)$$

Приложение 5

Преобразование краевых задач с неоднородными граничными условиями к задачам с однородными граничными условиями

Если граничные условия краевой задачи неоднородны:

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right)\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

$$\left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)\Big|_{x=l} = \nu(t), \qquad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0,$$

то краевую задачу можно преобразовать к задаче для новой неизвестной функции $U(x,t)$ с однородными граничными условиями с помощью замены

$$u(x,t) = U(x,t) + \omega(x,t),$$

где $\omega(x,t)$ — известная функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям. Функцию $\omega(x,t)$ всегда можно построить в виде квадратного трехчлена относительно x:

$$\omega(x,t) = A(t) + B(t)x + C(t)x^2. \qquad (\text{П5.1})$$

Пример. Найти функцию $\omega(x,t)$, если граничные условия имеют вид

а) $u\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t);$ (П5.2)

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad u\Big|_{x=l} = \nu(t);$ (П5.3)

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t);$ (П5.4)

г) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad u\Big|_{x=l} = \nu(t);$ (П5.5)

Решение. а) Подставим (П5.1) в граничные условия (П5.2) и получим систему

$$\begin{cases} A(t) = \mu(t), \\ B(t) + 2l\,C(t) = \nu(t). \end{cases}$$

Можно выбрать $C(t) \equiv 0$, тогда получим

$$\omega(x,t) = \mu(t) + \nu(t)x.$$

б) Подставим (П5.1) в граничные условия (П5.3) и получим систему

$$\begin{cases} B(t) = \mu(t), \\ A(t) + B(t)l + C(t)l^2 = \nu(t). \end{cases}$$

Можно выбрать $C(t) \equiv 0$, тогда получим

$$\omega(x,t) = \nu(t) + \mu(t)(x - l).$$

в) Подставим (П5.1) в граничные условия (П5.4) и получим систему

$$\begin{cases} B(t) = \mu(t), \\ B(t) + 2C(t)l = \nu(t). \end{cases}$$

Можно выбрать $A(t) \equiv 0$, тогда получим

$$\omega(x,t) = \mu(t)x + \frac{x^2(\nu(t) - \mu(t))}{2l}.$$

г) Подставим (П5.1) в граничные условия (П5.5) и получим систему

$$\begin{cases} B(t) + hA(t) = \mu(t), \\ A(t) + lB(t) + l^2C(t) = \nu(t). \end{cases}$$

Можно выбрать $C(t) \equiv 0$, тогда получим

$$\omega(x,t) = \frac{\nu(t) - l\mu(t) + (\mu(t) - h\nu(t))x}{1 - lh}.$$

Приложение 6

Итерированные ядра для вырожденного ядра с двумя слагаемыми

Рассмотрим вырожденное ядро с двумя слагаемыми

$$K(x,t) = a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t). \tag{П6.1}$$

Обозначим интегралы

$$k_{ij} = \int_a^b b_i(s)a_j(s)\,ds, \quad i,j = \overline{1,2}. \tag{П6.2}$$

а) Предположим, что $k_{12} = k_{21} = 0$. Итерированные ядра найдем по формуле (7.2.1):

$$K_2(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)][a_1(s)b_1(t) + a_2(s)b_2(t)]\,ds =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11} + a_1(x)b_2(t)k_{12} + a_2(x)b_1(t)k_{21} + a_2(x)b_2(t)k_{22} =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11} + a_2(x)b_2(t)k_{22},$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)][a_1(s)b_1(t)k_{11} + a_2(s)b_2(t)k_{22}]\,ds =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11}^2 + a_2(x)b_2(t)k_{22}^2, \ \dots\,,$$

$$K_i(x,t) = a_1(x)b_1(t)k_{11}^{i-1} + a_2(x)b_2(t)k_{22}^{i-1}, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{П6.3}$$

Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ найдем по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) =$$

$$= a_1(x)b_1(t)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}k_{11}^{i-1} + a_2(x)b_2(t)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}k_{22}^{i-1} =$$

$$= \frac{a_1(x)b_1(t)}{1-\lambda k_{11}} + \frac{a_2(x)b_2(t)}{1-\lambda k_{22}}, \quad |\lambda| < 1/M, \quad M = \max(|k_{11}|,|k_{22}|). \tag{П6.4}$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (7.1), (П6.1) при $|\lambda| < 1/M$ найдем по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt + f(x) =$$

$$= \lambda \left(\frac{a_1(x) f_1}{1 - \lambda k_{11}} + \frac{a_2(x) f_2}{1 - \lambda k_{22}} \right) + f(x), \tag{П6.5}$$

где

$$f_i = \int_a^b b_i(s) f(s)\,ds. \tag{П6.6}$$

б) Предположим, что $k_{11} = k_{12} = 0$. Итерированные ядра найдем по формуле (7.2.1):

$$K_2(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)][a_1(s)b_1(t) + a_2(s)b_2(t)]\,ds =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11} + a_1(x)b_2(t)k_{12} + a_2(x)b_1(t)k_{21} + a_2(x)b_2(t)k_{22} =$$

$$= a_2(x)b_1(t)k_{21} + a_2(x)b_2(t)k_{22} = a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22}),$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)]a_2(s)[b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22}]\,ds =$$

$$= a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22})k_{22},$$

$$K_4(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)]a_2(s)[b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22}]\,ds =$$

$$= a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22})k_{22}^2, \ \ldots,$$

$$K_i(x,t) = a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22})k_{22}^{(i-2)}, \quad i = \overline{2,\infty}. \tag{П6.7}$$

Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ найдем по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22}) \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} k_{22}^{i-2} =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + a_2(x)(b_1(t)k_{21} + b_2(t)k_{22}) \frac{\lambda}{1 - \lambda k_{22}}, \tag{П6.8}$$

$$|\lambda| < 1/|k_{22}|.$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (7.1), (П6.1) при $|\lambda| < 1/|k_{22}|$ найдем по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\, dt + f(x) =$$

$$= \lambda \left(a_1(x) f_1 + a_2(x) f_2 + \frac{a_2(x)\lambda}{1 - \lambda k_{22}} (f_1 k_{21} + f_2 k_{22}) \right) + f(x), \qquad (\text{П}6.9)$$

где f_i вычисляются по формуле (П6.6).

в) Предположим, что $k_{21} = k_{22} = 0$. Итерированные ядра найдем по формуле (7.2.1):

$$K_2(x,t) = \int\limits_a^b [a_1(x) b_1(s) + a_2(x) b_2(s)][a_1(s) b_1(t) + a_2(s) b_2(t)]\, ds =$$

$$= a_1(x) b_1(t) k_{11} + a_1(x) b_2(t) k_{12} + a_2(x) b_1(t) k_{21} + a_2(x) b_2(t) k_{22} =$$

$$= a_1(x) b_1(t) k_{11} + a_1(x) b_2(t) k_{12} = a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}),$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_a^b [a_1(x) b_1(s) + a_2(x) b_2(s)] a_1(s) [b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}]\, ds =$$

$$= a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}) k_{11},$$

$$K_4(x,t) = \int\limits_a^b [a_1(x) b_1(s) + a_2(x) b_2(s)] a_1(s) [b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}] k_{11}\, ds =$$

$$= a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}) k_{11}^2, \ \ldots ,$$

$$K_i(x,t) = a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}) k_{11}^{(i-2)}, \quad i = \overline{2, \infty}. \qquad (\text{П}6.10)$$

Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ найдем по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) =$$

$$= a_1(x) b_1(t) + a_2(x) b_2(t) + a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}) \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} k_{11}^{i-2} =$$

$$= a_1(x) b_1(t) + a_2(x) b_2(t) + a_1(x)(b_1(t) k_{11} + b_2(t) k_{12}) \frac{\lambda}{1 - \lambda k_{11}}, \qquad (\text{П}6.11)$$

$$|\lambda| < 1/|k_{11}|.$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (7.1), (П6.1) при $|\lambda| < 1/|k_{11}|$ найдем по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt + f(x) =$$

$$= \lambda \left(a_1(x) f_1 + a_2(x) f_2 + \frac{a_1(x)\lambda}{1-\lambda k_{11}} (f_1 k_{11} + f_2 k_{12}) \right) + f(x), \qquad (\Pi 6.12)$$

где f_i вычисляются по формуле (П6.6).

г) Предположим, что $k_{11} = k_{21} = 0$. Итерированные ядра найдем по формуле (7.2.1):

$$K_2(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)][a_1(s)b_1(t) + a_2(s)b_2(t)]\,ds =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11} + a_1(x)b_2(t)k_{12} + a_2(x)b_1(t)k_{21} + a_2(x)b_2(t)k_{22} =$$

$$= b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22}),$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)] b_2(t)[a_1(s)k_{12} + a_2(s)k_{22}]\,ds =$$

$$= b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22})k_{22},$$

$$K_4(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)] b_2(t)[a_1(s)k_{12} + a_2(s)k_{22}]k_{22}\,ds =$$

$$= b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22})k_{22}^2, \ \ldots\,,$$

$$K_i(x,t) = b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22})k_{22}^{(i-2)}, \quad i = \overline{2,\infty}. \qquad (\Pi 6.13)$$

Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ найдем по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22}) \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} k_{22}^{i-2} =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + b_2(t)(a_1(x)k_{12} + a_2(x)k_{22}) \frac{\lambda}{1-\lambda k_{22}}, \qquad (\Pi 6.14)$$

$$|\lambda| < 1/|k_{22}|.$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (7.1), (П6.1) при $|\lambda| < 1/|k_{22}|$ найдем по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt + f(x) = \tag{П6.15}$$

$$= \lambda \left(a_1(x) f_1 + a_2(x) f_2 + \frac{\lambda f_2}{1 - \lambda k_{22}} (a_1(x) k_{12} + a_2(x) k_{22}) \right) + f(x),$$

где f_i вычисляются по формуле (П6.6).

д) Предположим, что $k_{12} = k_{22} = 0$. Итерированные ядра найдем по формуле (7.2.1):

$$K_2(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)][a_1(s)b_1(t) + a_2(s)b_2(t)]\,ds =$$

$$= a_1(x)b_1(t)k_{11} + a_1(x)b_2(t)k_{12} + a_2(x)b_1(t)k_{21} + a_2(x)b_2(t)k_{22} =$$

$$= b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21}),$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)] b_1(t)[a_1(s)k_{11} + a_2(s)k_{21}]\,ds =$$

$$= b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21})k_{11},$$

$$K_4(x,t) = \int_a^b [a_1(x)b_1(s) + a_2(x)b_2(s)] b_1(t)[a_1(s)k_{11} + a_2(s)k_{21}]k_{11}\,ds =$$

$$= b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21})k_{11}^2, \ \dots ,$$

$$K_i(x,t) = b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21})k_{11}^{(i-2)}, \quad i = \overline{2,\infty}. \tag{П6.16}$$

Резольвентное ядро $R(x,t;\lambda)$ найдем по формуле (7.2.5):

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,t) =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21}) \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} k_{11}^{i-2} =$$

$$= a_1(x)b_1(t) + a_2(x)b_2(t) + b_1(t)(a_1(x)k_{11} + a_2(x)k_{21}) \frac{\lambda}{1 - \lambda k_{11}}, \tag{П6.17}$$

$$|\lambda| < 1/|k_{11}|.$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (7.1), (П6.1) при $|\lambda| < 1/|k_{11}|$ найдем по формуле (7.2.4):

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\, dt + f(x) = \tag{П6.18}$$

$$= \lambda \left(a_1(x) f_1 + a_2(x) f_2 + \frac{\lambda f_1}{1 - \lambda k_{11}} (a_1(x) k_{11} + a_2(x) k_{21}) \right) + f(x),$$

где f_i вычисляются по формуле (П6.6).

Приложение 7

Основные свойства преобразования Лапласа

Таблица П7.1

№ п/п	Оригинал	Изображение	Свойство
1	$af(t)+bg(t)$	$aF(p)+bG(p)$	Линейность
2	$f(t/a),\quad a>0$	$aF(ap)$	Теорема подобия
3	$f'(t)$ $f''(t)$	$pF(p)-f(+0)$ $p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0)$	Дифференцирование оригинала
4	$t^n f(t),\quad n\in N$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
5	$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	Теорема смещения
6	$f(t-\tau)\theta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$	Теорема запаздывания
7	$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(p)G(p)$	Теорема умножения Бореля
8	$\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau+g(0)f(t)$	$pF(p)G(p)$	Интеграл Дюамеля

Таблица П7.2

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\theta(t)$	$1/p$
2	t^n	$n!/p^{n+1},\quad n\in N$
3	e^{-at}	$1/(p+a)$
4	te^{-at}	$1/(p+a)^2$
5	$1/(p+a)(p+b)$	$(e^{-at}-e^{-bt})/(b-a)$
6	$p/(p+a)(p+b)$	$(ae^{-at}-be^{-bt})/(a-b)$
7	$\sin at$	$a/(p^2+a^2)$
8	$\cos at$	$p/(p^2+a^2)$
9	$\mathrm{sh}\, at$	$a/(p^2-a^2)$
10	$\mathrm{ch}\, at$	$p/(p^2-a^2)$
11	$\mathrm{erfc}\,(k/2\sqrt{t})$	$e^{-k\sqrt{p}}/p,\quad k\geq 0$
12	$\exp\,(-k^2/4t)/\sqrt{\pi t}$	$e^{-k\sqrt{p}}/\sqrt{p},\quad k\geq 0$
13	$2\sqrt{t}\exp(-k^2/4t)/\sqrt{\pi}-k\cdot\mathrm{erfc}\,(k/2\sqrt{t})$	$e^{-k\sqrt{p}}/p^{3/2},\quad k\geq 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агафонов С.А.** Дифференциальные уравнения / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. —М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1999. — 347 с.

2. **Арсенин В.Я.** Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. —М.: Наука, 1984. — 384 с.

3. **Боголюбов А.Н.** Задачи по математической физике / А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. —М.: Издательство МГУ, 1998. — 350 с.

4. **Будак Б.М.** Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. —М.: Наука, 1997. — 688 с.

5. **Власова Е.А.** Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. —М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2001. — 700 с.

6. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко Г.И. —М.: Наука, 1968. — 192 с.

7. **Лаврентьев М.А.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. —М.: Наука, 1973. — 736 с.

8. **Лизоркин П.И.** Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П.И. Лизоркин. —М.: Наука, 1981. — 384 с.

9. **Манжиров А.В.** Методы решения интегральных уравнений: Справочник / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. —М.: Факториал, 1999. — 272 с.

10. **Свешников А.Г.** Лекции по математической физике / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. —М.: Издательство МГУ, 1993. — 352 с.

11. **Смирнов М.М.** Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М.М. Смирнов. —Мн.: Издательство БГУ, 1974. — 232 с.

12. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. —М.: Наука, 1977. — 736 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ