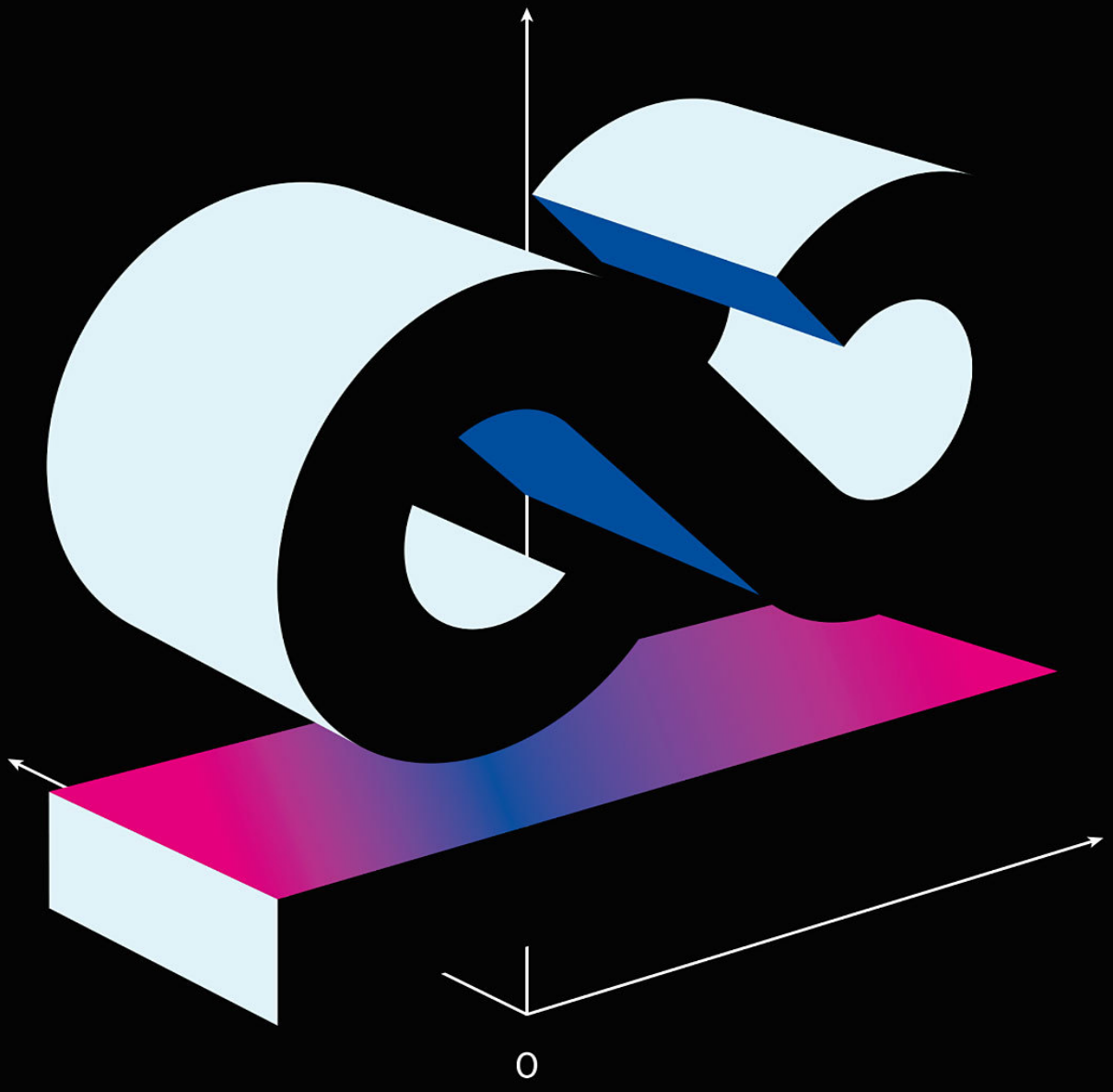
Иэн Стюарт



УКРОЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

История математики
от первых чисел
до теории хаоса

Annotation

Профессор Иэн Стюарт в увлекательной манере и с юмором рассказывает о том, как развивалась математика – с древнейших времен и до наших дней. Он рассматривает наиболее значимые темы и события, обращая особое внимание на их прикладной характер.

Вы познакомитесь с виднейшими математиками своих эпох, а также узнаете, как то или иное математическое открытие повлияло на нас и нашу историю.

Эта книга для математиков и всех, кто интересуется историей математики и науки вообще.

На русском языке публикуется впервые.

- Иэн Стюарт
  -
  - Предисловие
  - Глава 1. Символы, единицы счета и глиняные таблички
    -
    - Всё начинается с чисел
    - Запись чисел
    - Единицы счета
    - Первые цифры
    - Символы для малых чисел
    - Древние египтяне
    - Числа и народы
  - Глава 2. Логика формы
    -
    - Начала геометрии
    - Пифагор
    - Укрощение иррациональности
    - Евклид
    - Золотое сечение
    - Архимед
    - Проблемы древних греков
  - Глава 3. Народы и числа
    -

- Римские цифры
- Греческие цифры
- Индийские цифры
- Брахмагупта, Махавира и Бхаскара
- Индийская система
- Темные века
- Отрицательные числа
- Арифметика бессмертна

- Глава 4. Соблазнение неизвестным
  -
  - Алгебра
  - Уравнения
  - Аль-джабр
  - Кубические уравнения
  - Алгебраическая символика
  - Логика символов
- Глава 5. Вечные треугольники
  -
  - Тригономерия
  - Происхождение тригонометрии
  - Астрономия
  - Птолемей
  - Ранняя тригонометрия
  - Логарифмы
  - Логарифмы Непера
  - Десятичные логарифмы
  - Число e
  - Что бы мы без них делали?
- Глава 6. Кривые и координаты
  -
  - ФермА
  - Декарт
  - Декартова система координат
  - Функции
  - Геометрия координат сегодня
- Глава 7. Такие разные числа
  -

        - Теория чисел
        - Простые числа
        - Евклид
        - Диофант
        - ФермА
        - Гаусс
    - Глава 8. Система мира
        -
        - Система мира
        - Исчисление
        - Необходимость в исчислении
        - Вера против науки
        - Коперник
        - Кеплер
        - Галилей
        - Изобретение исчисления
        - Лейбниц
        - Ньютон
        - Англия в отстающих
        - Дифференциальное уравнение – что это?
    - Глава 9. Примеры в природе
        -
        - Дифференциальные уравнения
        - Типы дифференциальных уравнений
        - Уравнение волны
        - Музыка, свет, звук и электромагнетизм
        - Земное притяжение
        - Тепло и температура
        - Гидродинамика
        - Обыкновенные дифференциальные уравнения
        - Физика становится математической
    - Глава 10. Невозможные величины
        -
        - Целые числа
        - Проблемы с кубическим уравнением
        - Мнимые числа
        - Комплексный анализ

        - Интегральная теорема Коши
    - Глава 11. Прочные основы
        -
        - Фурье
        - Непрерывные функции
        - Пределы
        - Степенные ряды
        - Прочные основы
    - Глава 12. Невозможные треугольники
        -
        - Сферическая и проективная геометрия
        - Геометрия и живопись
        - Дезарг
        - Аксиомы Евклида
        - Лежандр
        - Саккери
        - Ламберт
        - Дилемма Гаусса
        - Неевклидова геометрия
        - Геометрия пространства
    - Глава 13. Расцвет симметрии
        -
        - Теория групп
        - Решаем уравнения
        - Поиск решения
        - Абель
        - Галуа
        - ЖордАн
        - Симметрия
    - Глава 14. Взросление алгебры
        -
        - Изощренные концепции
        - Ли и Клейн
        - Группы Ли
        - Киллинг
        - Простые группы Ли
        - Абстрактные группы

        - Теория чисел
        - Кольца, поля и алгебры
        - Простые конечные группы
        - Великая теорема Ферма
        - Абстрактная математика
    - Глава 15. Геометрия на резиновом листе
        -
        - Топология
        - Многогранник и кенигсбергские мосты
        - Геометрические свойства плоских поверхностей
        - Сфера Римана
        - Ориентируемые поверхности
        - Топология в трех измерениях
        - Перельман
        - Топология и реальный мир
    - Глава 16. Четвертое измерение
        -
        - Четвертое измерение
        - Трех- или четырехмерное пространство
        - Многомерное пространство
        - Дифференциальная геометрия
        - Матричная алгебра
        - Реальное пространство
        - Многомерное пространство
        - Обобщенные координаты
    - Глава 17. Форма логики
        -
        - Дедекинд
        - Аксиомы целых чисел
        - Множества и классы
        - Кантор
        - Размер множества
        - Противоречия
        - Гильберт
        - Гёдель
        - К чему же мы пришли?
    - Глава 18. Насколько это вероятно?

        -
        - Вероятность и статистика
        - Игра случая
        - Сочетания
        - Теория вероятностей
        - Определение вероятности
        - Статистические данные
    - Глава 19. Мельницы для чисел
        -
        - Мечта становится явью?
        - Компьютеры на пьедестале
        - Компьютерам нужна математика
        - Алгоритмы
        - Численные методы
    - Глава 20. Хаос и сложность
        -
        - Хаос
        - Единая формула?
        - Нелинейная динамика
        - Теоретические монстры
        - Хаос повсюду!
        - Сложность
        - Клеточный автомат
        - Геология и биология
        - Как была создана математика
    - Дополнительная литература
    - Авторские права на иллюстрации
    - Эту книгу хорошо дополняют:
- notes
    - 1
    - 2
    - 3
    - 4
    - 5
    - 6
    - 7
    - 8

Иэн Стюарт
Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса

Научный редактор Иван Ефишов
Издано с разрешения QUERCUS EDITIONS LIMITED

© Joat Enterprises, 2008

* * *

Предисловие

Математика не появилась сразу в готовом виде. Она возникала постепенно, усилиями тысяч людей из разных культур, говоривших на многих языках. Ее постулаты, актуальные и по сей день, насчитывают более 4000 лет.

Многие человеческие открытия оказались недолговечными. Так, инженерное решение относительно дизайна колес было очень важным в Египте времен Нового царства, но сейчас мало кто назовет его прорывным. Математика же никогда не теряла своего значения. Едва успев оформиться, очередное ее открытие становилось необходимым для каждого и начинало жить своей жизнью. Важные математические идеи редко выходили из моды, хотя применять их можно было по-разному. Способы решения уравнений, открытые еще вавилонянами, используются до сих пор. Да, мы отказались от их символов, но отрицать историческую связь нельзя. Львиная доля основ математики, преподаваемых в школе, насчитывает не меньше 200 лет. Принятый в 1960-х гг. «современный» курс отсылает нас к XIX в. Однако, несмотря на внешнюю консервативность, математика шла вперед. В наши дни за неделю делается столько же математических открытий, сколько вавилонянам удавалось совершить за 2000 лет.

Развитие цивилизации всегда шло рука об руку с развитием математики. Без открытий в тригонометрии, сделанных древними греками, арабами и индусами, плавать по океанам во времена Великих географических открытий было бы гораздо опаснее. Торговые пути из Китая в Европу и из Индонезии в обе Америки проложены по невидимой математической нити. Трудно представить современное общество без математики. Практически всё, что нам сейчас кажется естественным, – от телевидения до мобильных телефонов, от гигантских пассажирских лайнеров до спутниковых навигационных систем в автомобилях, от расписаний поездов до медицинских обследований – опирается на ее выкладки и методы. Иногда им тысячи лет, порой всего несколько дней. Большинство даже не отдают себе отчета в их незримом присутствии в каждом из чудес современной технологии.

Это очень грустно, поскольку иные думают, будто в новых технологиях есть некое волшебство, и ожидают новых чудес каждый день. В то же время это естественно и позволяет нам легко и без сомнений применять чудеса на практике. Пользователю ни к чему загружать мозг лишней информацией о подноготной их работы. Если бы каждого потенциального пассажира проверяли на знание тригонометрии перед посадкой на самолет, вряд ли кто-то куда-то смог бы улететь.

Пожалуй, написать ясную историю математики – задача невыполнимая. Сегодня это настолько обширная, сложная и высокотехнологичная область, что даже эксперту едва ли будет под силу создать такой талмуд. Ближе всего к этой цели сумел подобраться Моррис Клайн в работе «Математическая мысль от древности до наших дней». Там всего-то 1200 страниц мелким шрифтом и вовсе ничего не сказано о последней сотне лет.

Моя книга гораздо короче, посему мне не раз приходилось делать выбор, особенно в отношении истории математики XX и XXI вв. Я отлично помню о темах, которые опустил. Здесь нет алгебраической геометрии, теории гомологий, метода конечных элементов или вейвлетов. На самом деле список пропущенных тем намного длиннее оглавления. Прежде всего я думал о том, какие базовые знания хотели бы получить читатели и какие из новейших идей более всего нуждаются в доходчивом объяснении.

Истории в книге размещены не в хронологическом порядке, а объединены по темам. В противном случае пришлось бы постоянно перескакивать с одного на другое, и в итоге потерялась бы нить повествования. Такая книга была бы нечитабельна, хотя и приближена к реальности. Поэтому в каждой главе я сначала делаю экскурс в историю, а затем двигаюсь по основным вехам развития вопроса. В первых главах я глубже всего ухожу в прошлое, а ближе к концу книги больше внимания уделяю современности.

Главной целью для меня было передать дух современной математической науки – примерно за последние 100 лет. Я старался выбирать темы, чаще всего оказывающиеся на слуху, и соотносить их с историческим контекстом. Отсутствие какой-то темы не значит, что я считаю ее неважной. Однако, по-моему, нецелесообразно в популярном издании тратить несколько страниц на историю Эндрю Уайлса,

доказавшего Великую теорему Ферма (да многие читатели знают ее и без меня), или, скажем, на некоммутативную геометрию, одно вступление к которой займет несколько глав.

В общем, эта книга – история и в то же время не история. Она повествует о прошлом, но предназначена не для профессиональных историков, не содержит тонких определений, столь важных для них, и по большей части описывает прошлое с современной точки зрения. Я знаю, что последнее – непростительный грех для историка. Ведь читатель может решить, будто древние каким-то чудом научились мыслить по-современному. Однако я считаю одновременно оправданным и необходимым начинать с того, что нам известно, и двигаться к источнику идеи. Ведь греки изучали эллипсы вовсе не для того, чтобы Кеплер когда-нибудь создал теорию о планетарных орбитах, как и сам Кеплер сформулировал свои три закона движения небесных тел не для того, чтобы Ньютон переработал их в теорию всемирного тяготения. Однако история законов Ньютона уходит корнями в греческие исследования эллипсов и кеплеровский анализ данных астрономических наблюдений.

Сквозная тема этой книги – прикладной характер математики. Здесь у меня получился весьма эклектичный набор приложений как из прошлого, так и из настоящего. Повторюсь: если какая-то тема пропущена, это вовсе не значит, что я считаю ее несущественной.

Математика имеет длинную и славную, хоть и изрядно подзабытую историю. Не стоит недооценивать ее влияние на развитие нашей культуры. Если эта книга познакомит вас хотя бы с частью этой истории, значит, я добился своей цели.

Глава 1. Символы, единицы счета и глиняные таблички

Рождение чисел

Математика начинается с чисел, и числа остаются ее основой, хотя сама наука давно ушла от простых операций с ними. Выстраивая на основе чисел всё более отвлеченные и сложные концепции, она развилась в обширную и разнообразную область мысли, выходящую далеко за рамки школьной программы. Современная математика больше занимается исследованием формы, структуры и составляющих нашего мира, нежели числами как таковыми. Ее методы стали очень отвлеченными и часто абстрактными. Она задает направление в науке, промышленности, бизнесе и даже искусстве. Математика универсальна и вездесуща.

Всё начинается с чисел

За тысячелетия математики – представители разных культур – успели создать на основе чисел множество надстроек: геометрию, исчисление, динамику, теорию вероятностей, топологию, теорию хаоса, сложности и т. д. Журнал Mathematical Reviews, где приводятся ссылки на все новые материалы, выделяет в ней более 100 основных областей, содержащих не одну тысячу более узких. По всему миру насчитывается свыше 50 тыс. математиков-исследователей, и каждый год они публикуют более миллиона страниц научных текстов. Всё это новые открытия, а не вариации на тему уже существующих.

Математики часто пользуются логикой для создания еще более фундаментальной концепции, чем числа, – это математическая логика и теория множеств. Однако и здесь отправной точкой остается идея числа.

Числа кажутся простыми и понятными, но их внешняя простота обманчива. Операции с ними порой чрезвычайно сложны, и верный результат требует немалого труда. Но и тут намного легче оперировать числами, чем физическими объектами, которые они описывают. Да, они подразумевают предметы, но не являются ими: вы можете подержать в руках две чашки, но не число 2. Числа выражаются символами, но разные культуры используют разные знаки для одних и тех же чисел. Числа – абстракция, и всё же они составляют основу нашего общества: без них оно не сможет выполнять свои функции. Это один из видов умственных построений, но мы чувствуем, что они не утратят своего значения даже в случае гибели человечества из-за глобальной катастрофы, когда не останется разума, способного их воспринимать.

Запись чисел

История математики начинается с изобретения выражающих числа письменных символов. Привычный нам набор цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которого можно представить любое, даже самое огромное, число, изобретен относительно недавно, всего около 1500 лет назад. А его расширение до десятичных знаков, значительно увеличившее степень точности, и вовсе насчитывает всего 450 лет. Пятьдесят лет назад появились первые компьютеры: они так глубоко внедрили математические расчеты в нашу жизнь, что мы и не замечаем их присутствия. А 20 лет назад началось победное шествие самых мощных и высокоскоростных вычислительных машин, заполонивших офисы и дома.

Без чисел невозможно существование привычной нам цивилизации. Они повсюду, как незримые слуги, неутомимо трудятся за кулисами: передают сообщения, следят за грамотностью напечатанного нами текста, составляют маршрут полета в отпуск, фиксируют покупки, обеспечивают эффективность и безопасность лечения. Есть и противоположная сторона медали: они делают возможным изобретение ядерного оружия, точно наводят на цель бомбы и ракеты. Далеко не всегда математика служит исключительно благим целям.

Как же удалось достичь такого расцвета этой невиданной области? Всё началось 10 тыс. лет назад на Ближнем Востоке с маленьких глиняных фигурок. Даже тогда счета содержали сведения о том, кто чем владел и в каком количестве, – хотя еще не было ни письма, ни знаков для чисел. Вместо знаков древние счетчики использовали маленькие глиняные фигурки. Одни имели форму сферы, другие – конуса, третьи – яйца. Были и цилиндры, и диски, и пирамиды. Археолог Дениз Шмандт-Бессера пришла к выводу, что фигурки представляли основные ценности того времени. Глиняные сферы обозначали меры зерна, цилиндры – животных, яйца – кувшины масла. Самые древние фигурки датируются 8000 г. до н. э., и их широко использовали в последующие 5000 лет.

Со временем фигурки становились всё более изысканными и специализированными. Были найдены конусы в виде ломтей хлеба и даже ромбовидные символы пива. Шмандт-Бессера считает, что эти

фигурки – не просто приспособления для счета. Это первый, самый важный шаг к изобретению цифровых символов, арифметики и математики. Однако из-за своей необычности он кажется случайным.

Всё произошло потому, что фигурки использовались для записи: возможно, собранных налогов, или финансовых операций, или как законное доказательство права на собственность. Их достоинством была простота, с которой счетчики могли поделить их на группы, чтобы определить, сколько животных или зерна имеет или имел человек. Но был и недостаток: фигурки легко подделывались. Для предотвращения махинаций с ними счетчики стали заворачивать их в своего рода глиняные конверты – аналог печати. Чтобы определить, сколько каких фигурок в каждом конверте, его было достаточно разбить. Восстановить его не составляло особого труда.

Всё же необходимость постоянно раскалывать и восстанавливать конверты казалась чиновникам древней Месопотамии слишком утомительной, и они придумали кое-что получше. Они стали метить конверты особыми символами, обозначающими их содержимое. Если там было семь сфер, то и на конверте они рисовали семь кружков.

Наступил момент, когда до месопотамских чиновников дошло: если есть символы, то можно обойтись и без фигурок; чтобы знать, что внутри конверта, нет нужды его разбивать. В результате этого очевидного, но судьбоносного открытия появился набор письменных символов для чисел, разной формы для разных классов предметов. Все прочие, включая и те, которыми пользуемся мы, – производные от этих бюрократических приспособлений древности. Именно замену фигурок символами можно считать изобретением письменности.

Единицы счета

Первые знаки нельзя считать ранними примерами записи чисел. Это просто царапины, метки, выражающие числа в виде серии насечек, например ||||||||||||| для обозначения 13. Самая древняя из известных на сегодняшний день таких надписей – 29 насечек на бедренной кости бабуина, сделанная 37 тыс. лет назад. Эту кость нашли в пещере в горах Лебомбо, на границе между Свазилендом и ЮАР. Место называется Пограничной пещерой, а артефакт – костью Лебомбо.

В отсутствие машины времени нельзя с уверенностью утверждать, что означал каждый символ, но можно делать обоснованные предположения. В лунном месяце 28 дней, значит, насечки, должно быть, связаны с фазами Луны.

В Европе обнаружены похожие артефакты. Пятьдесят семь насечек на волчьей кости из бывшей Чехословакии разбиты на 11 групп по пять с двумя лишними; этой находке 30 тыс. лет. Дважды по 28 будет 56: это может быть обозначение для двухмесячного лунного отрезка времени. И снова у нас нет способа проверить это предположение. Но насечки явно что-то значат, их сделали не просто так.

Еще одна древняя математическая запись, на кости Ишанго из Заира, была сделана 25 тыс. лет назад (прежняя оценка в 6000–9000 лет пересмотрена учеными в 1995 г.). На первый взгляд эти царапины по краям кости кажутся случайными, но здесь может быть скрытый смысл. Один ряд состоит из простых чисел от 10 до 20: это 11, 13, 17 и 19, и в сумме они дают 60. В другом ряду мы видим 9, 11, 19 и 21, что также в сумме равно 60. Третий ряд представляет способ умножения двух чисел: одно из них несколько раз удваивают, а другое делят пополам. Но не исключено, что всё это лишь совпадение или что кость Ишанго – древний лунный календарь.

Первые цифры

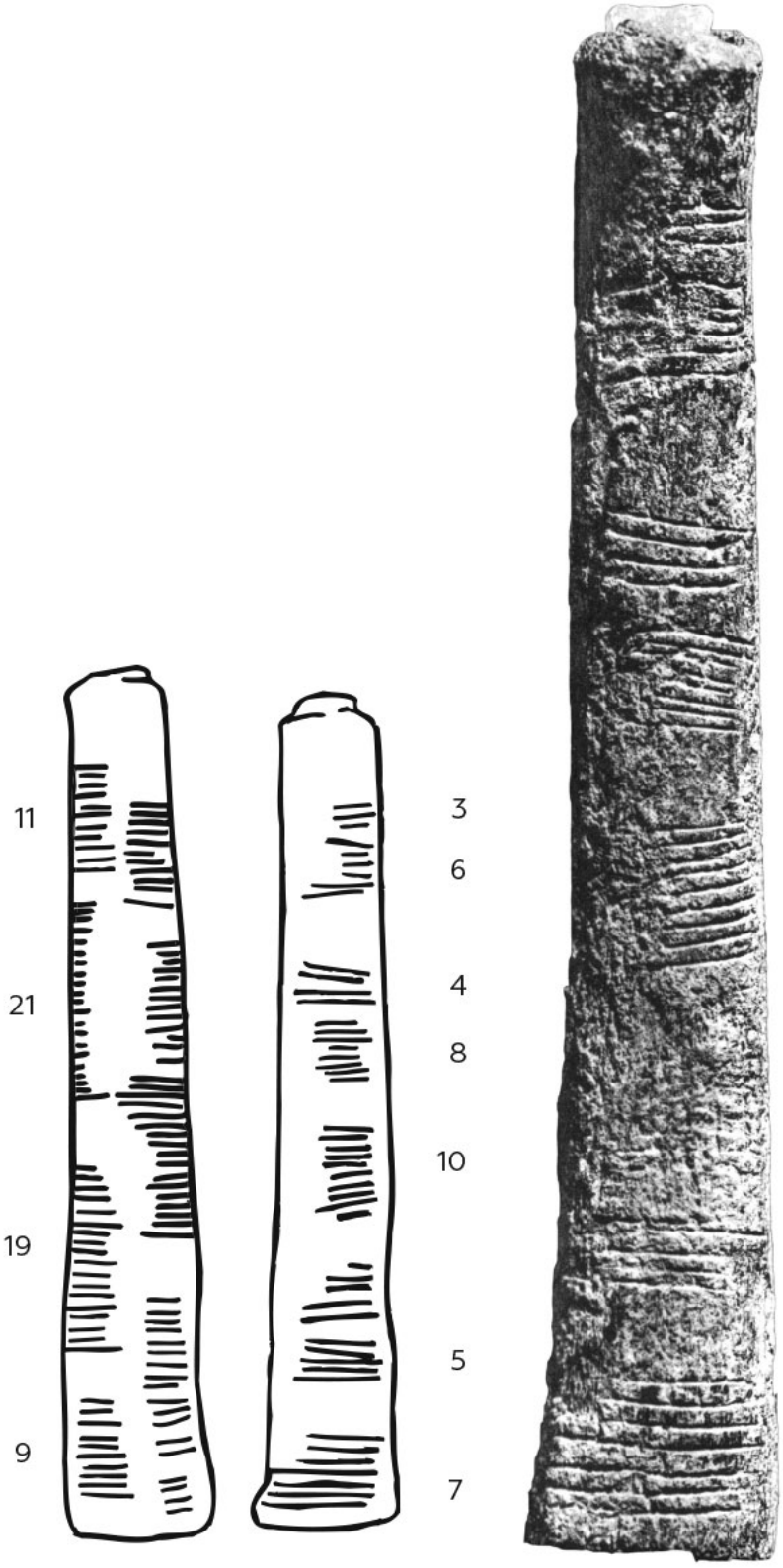
Исторический путь от счетных фигурок к современным цифрам долог и извилист. Тысячелетиями народ Месопотамии развивал сельское хозяйство, и на смену кочевому образу жизни пришел оседлый, породив ряд городов-государств: Вавилон, Эриду, Лагаш, Шумер, Ур. Ранние символы на глиняных табличках усложнились до пиктограмм, передающих значения слов в упрощенном виде. Они упрощались всё больше и больше, и в итоге осталось ограниченное число клиновидных отметин, выдавленных на глине сухой палочкой с острым плоским концом. Меняя угол давления, можно было получать отметки разной формы. К 3000 г. до н. э. шумеры создали сложную письменность, названную клиновидной.

История этого периода чрезвычайно сложна; доминировали то одни города, то другие. В какой-то момент высшего расцвета достиг Вавилон: из месопотамских песков ученые выкопали более миллиона глиняных табличек. Несколько сот из них, посвященных математике и астрономии, демонстрируют удивительно глубокие познания древних в этих областях. В частности, вавилоняне были просвещенными астрономами и сумели создать сложнейшую систему математических символов, с помощью которых могли передавать точные астрономические данные.

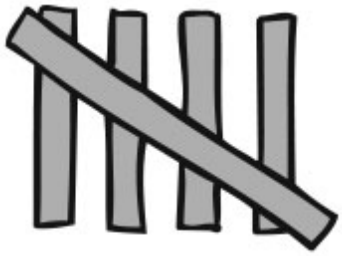
Числовые символы вавилонян ушли далеко от простых насечек и считаются самыми древними в своем роде. Использовались два разных вида клинышков: тонкий вертикальный обозначал цифру 1, а толстый горизонтальный – 10. Эти знаки, собранные в группы, представляли числа от 2 до 9 (для вертикальных клиньев) и десятки от 20 до 50 (для горизонтальных). Но ряд кончался на 59, после чего тонкий вертикальный клин уже обозначал число 60.

Таким образом, вавилонская система счисления основана на 60, т. е. является шестидесятиричной. В ней каждый символ обозначает либо какое-то число, либо его же, умноженное на 60, либо умноженное на 60 и еще раз на 60 – в зависимости от его положения.

Таков же принцип счисления в нашей десятеричной системе, где значение каждого символа умножается на 10, или 100, или 1000 в зависимости от его положения. Например, в числе 777 первая 7 значит «семь сотен», вторая – «семь десятков», а третья – «семь единиц». У вавилонян серия из трех  (символа для 7) будет иметь иное значение, хоть и основанное на том же принципе. Первый символ будет значить 7 × 60 × 60, т. е. 25 200; второй 7 × 60 = 420, третий – 7. Значит, группа из трех символов означает 25 200 + 420 + 7, или 25 627. Артефакты с вавилонской системой счисления, основанной на 60, обнаруживаются до сих пор. И 60 секунд в минуте, и 60 минут в часе, и 360 градусов в окружности уходят корнями в Древний Вавилон.



Кость Ишанго: насечки и представленные ими числа



Простые единицы счета удобны тем, что их можно наносить по одной в течение долгого времени, не изменяя и не удаляя предыдущие. Их используют и сейчас, часто в группах по пять: пятая палочка по диагонали пересекает первые четыре



Древние единицы счета можно найти в элементах современных символов. Наши цифры 1, 2 и 3 явно произошли от насечек: одна горизонтальная, две горизонтальные, связанные косой чертой, и три горизонтальные, связанные косыми чертами

Из-за сложности передачи клинописи ученые изображают вавилонские числа «гибридом» из наших десятеричных знаков и вавилонских шестидесятиричных. Так, тройка клинописных символов для 7 будет выглядеть как 7,7,7. А 23, 11, 14 обозначает вавилонские символы для 23, 11 и 14, написанные по порядку, с числовым значением (23 × 60 × 60) + (11 × 60) + 14, или 83 474 в десятичной системе счисления.

Символы для малых чисел

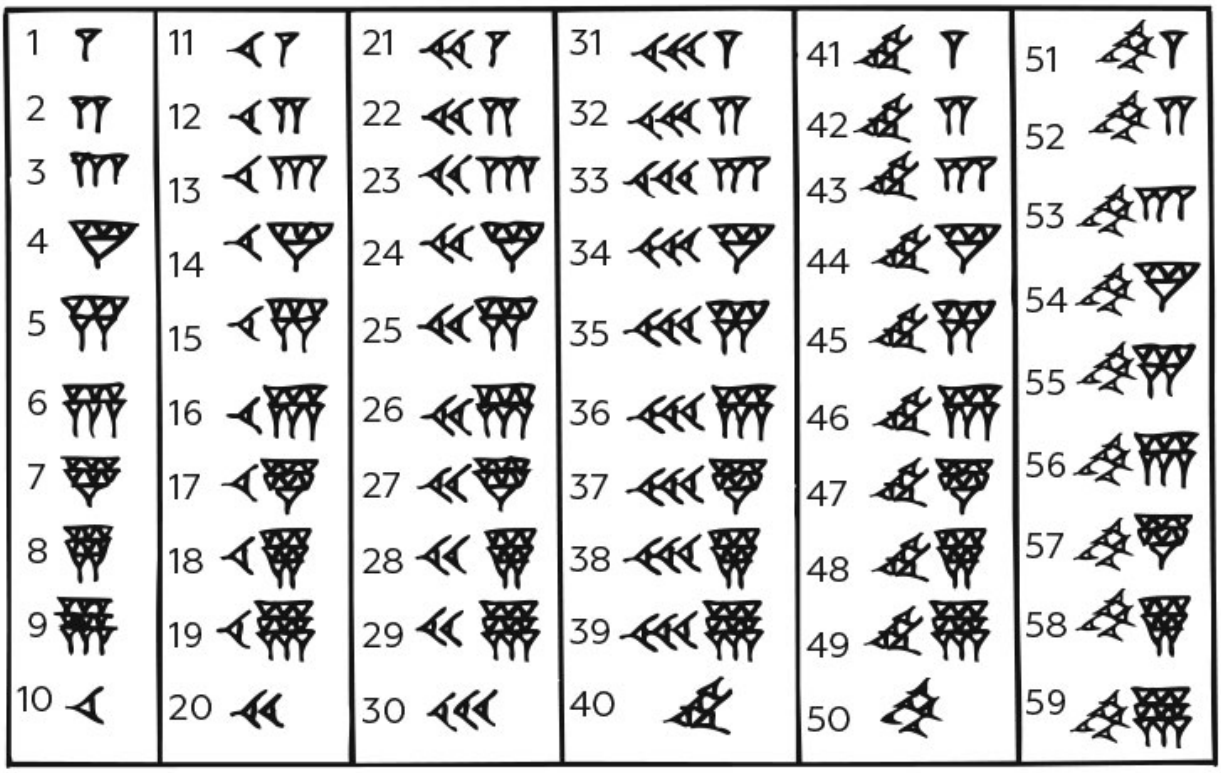
Мы используем десять знаков не только для обозначения сколь угодно больших чисел: эти же символы отлично справляются и с числами сколь угодно малыми. С этой целью мы используем десятичный разделитель, обозначаемый запятой. Цифры слева от нее обозначают целые числа, справа – их доли, дроби. Дробная часть представляет десятые, сотые доли и т. д. Число 25,47 значит две десятки плюс пять единиц плюс четыре десятых плюс семь сотых.

Вавилоняне знали этот фокус и с пользой применяли его в своих астрономических записях. Ученые использовали в качестве вавилонского эквивалента десятичного разделителя знак «точка с запятой» (;), но это шестидесятеричная «запятая», и числа справа от нее кратны $^{1}/_{60}$, $(^{1}/_{60} \times {}^{1}/_{60}) = {}^{1}/_{3600}$ и т. д. Например, последовательность чисел 12,59;57,17 составит

$$12 \times 60 + 59 + {}^{57}/_{60} + {}^{17}/_{3600},$$

что в сумме приблизительно равно 779,955.

На данный момент известно около 2000 вавилонских астрономических табличек. Большинство из них относительно простые и содержат перечень предсказываемых затмений, других регулярных астрономических событий и краткие данные по ним. Около 300 табличек заслуживают большего интереса и восхищения: на них отмечены пути Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна.



Вавилонские символы для чисел от 1 до 59

Какой бы увлекательной ни была история Вавилона, нашу всемирную историю она задевает лишь по касательной, в основном в части чистой математики. Однако, судя по всему, именно приложение к астрономии стало важным толчком к более активному развитию этой науки. Вот почему полезно отметить поразительную точность, с которой вавилоняне описывали астрономические события. Например, они определили период обращения Марса (отрезок времени между двумя его появлениями в одной и той же точке на небосклоне) в 12,59;57,17 дня в своем исчислении, т. е. примерно 779,955 нашего дня, как упоминалось выше. Современные данные – 779,936 дня.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖИЛИ ИМ



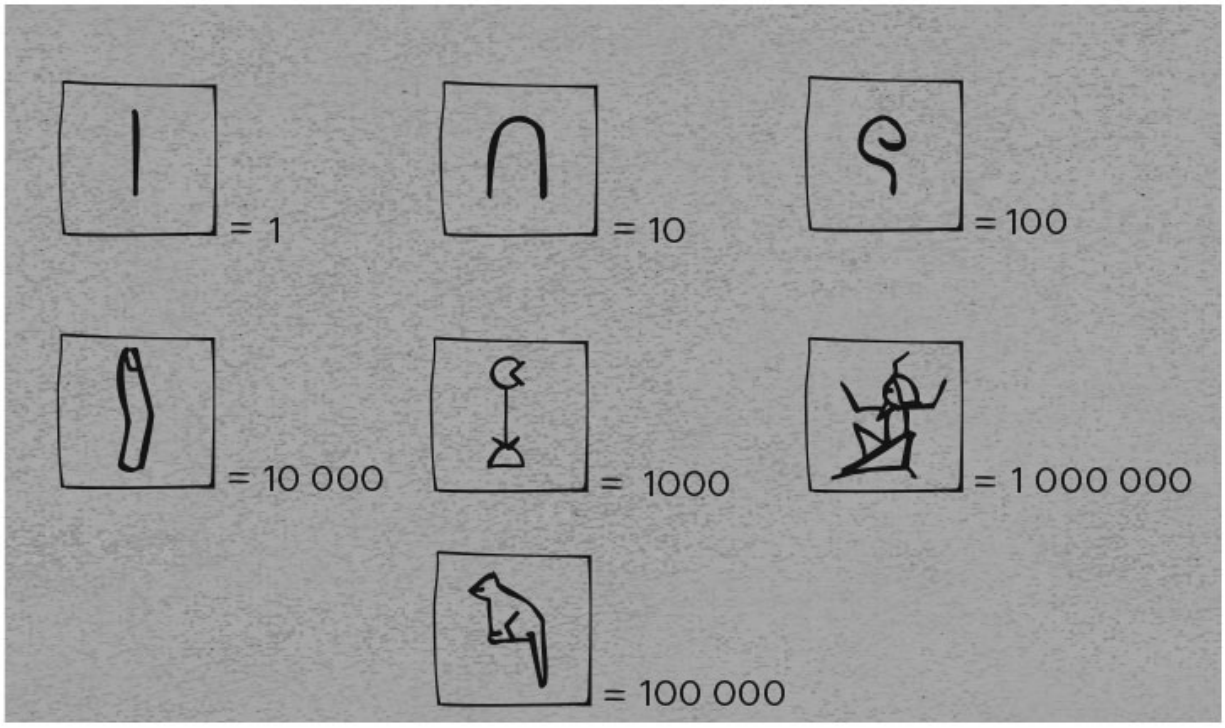
Вавилонская табличка Юпитера. Вавилоняне использовали свою систему счисления для торговли, счета и более отвлеченных и сложных целей, например астрономии. Здесь способность их системы с высокой точностью представлять дроби оказалась особенно важной. Многие сотни табличек хранят данные о движении планет. Среди них есть одна, относительно плохо сохранившаяся, с ежедневными данными о движении Юпитера примерно за 400 лет. Она была создана в самом Вавилоне около 163 г. до н. э. Эта типичная запись содержит числа 126 8 16;6,46,58 – 0;0,45,18 – 0;0,11,42 + 0;0,0,10, что соответствует различным величинам, используемым для вычисления положения планеты в небе. Заметьте: числа с тремя шестидесятеричными знаками после запятой чуть точнее, чем их аналоги из пяти чисел в десятичной системе.

Древние египтяне

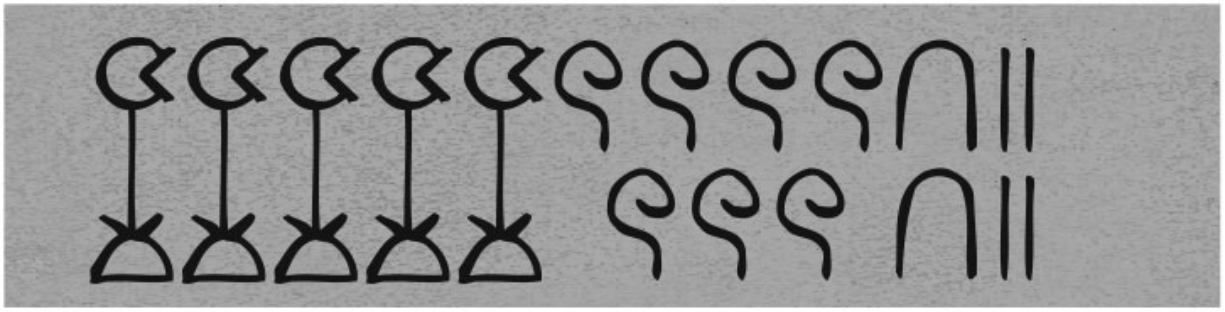
Наверное, самой великой из древних цивилизаций была египетская. Период ее расцвета на плодородных берегах Нила и его дельты приходится на 3150–31 гг. до н. э., с долгой додинастической историей, простирающейся до 6000 г. до н. э., и медленным упадком под властью Рима после 31 г. до н. э. Египтяне были великими строителями, со сложной высокоразвитой системой верований и церемоний, а также скрупулезными летописцами. Но их математические достижения бледнеют в сравнении с открытиями вавилонян.

Древнеегипетская система записи целых чисел проста и незамысловата. У них были символы для 1, 10, 100, 1000 и т. д. Повторяя их до девяти раз, они затем складывали их, чтобы получить значение числа.

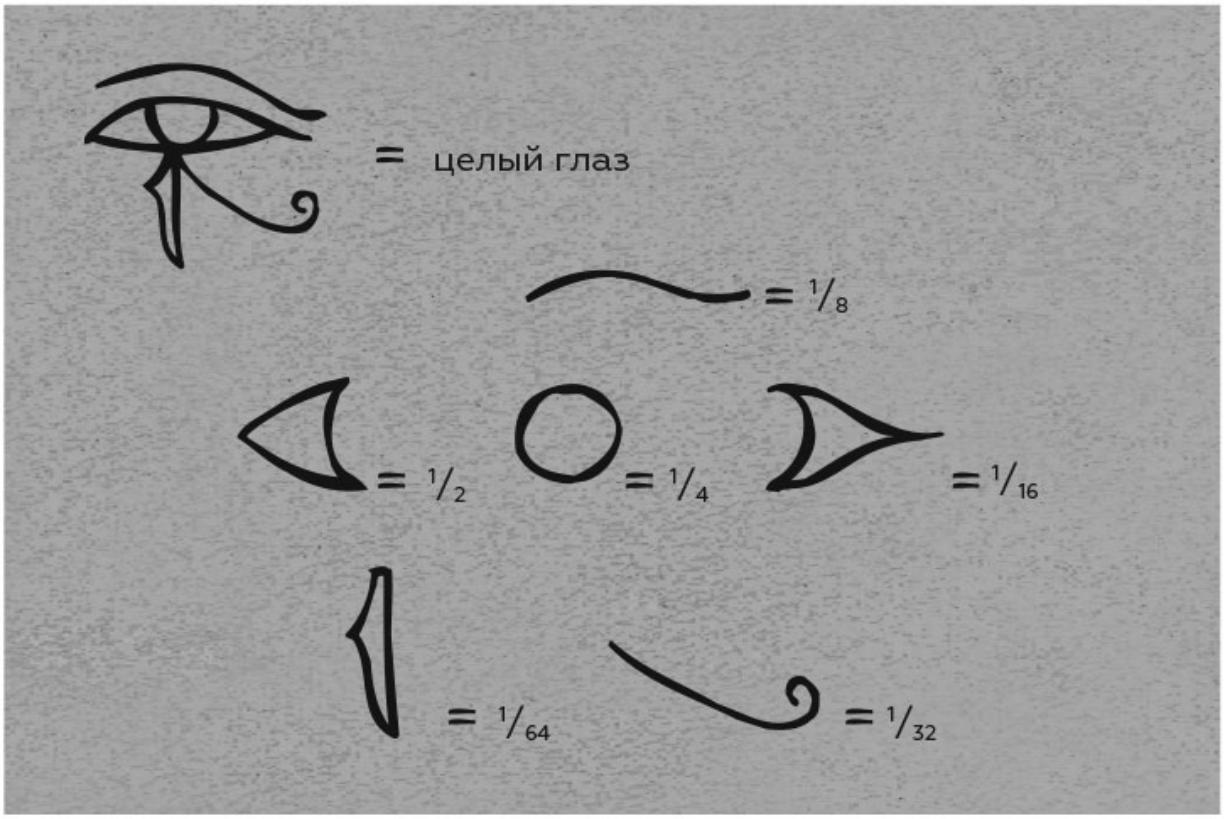
Например, чтобы изобразить число 5724, египтяне должны были нарисовать рядом пять символов для 1000, семь символов для 100, два символа для 10 и четыре для 1.



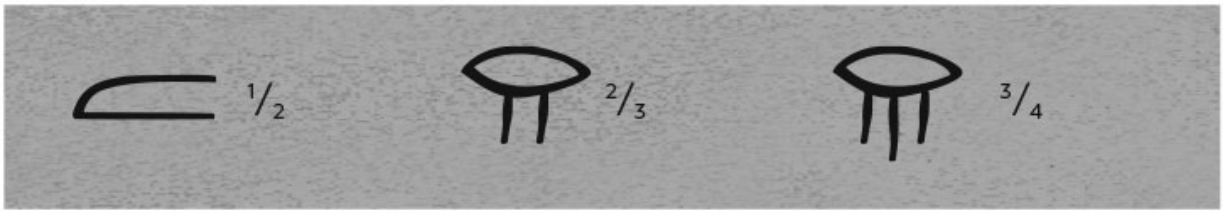
Египетские числовые символы



Число 5724, записанное египетскими иероглифами



Специальные обозначения некоторых дробей (части «глаза Гора»)



Специальные символы для некоторых дробей

Дроби для египтян были лишней головной болью. В разные периоды они использовали для дробей разные наборы знаков. В Старом царстве (2700–2200 гг. до н. э.) применялись специальные обозначения для наших дробей: $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$ и $^1/_{64}$, которые получены повторяющимся делением пополам. Эти символы включали части «глаза Гора», или иероглифа Уаджет.

Самую известную древнеегипетскую систему записи дробей относят к Среднему царству (2200–1700 гг. до н. э.). Она начинается с определения каждой дроби в виде $^1/_n$, где *n* – положительное целое число. Для обозначения *n* символ  (иероглиф для буквы R) ставили сверху стандартных египетских символов чисел. Значит, например, $^1/_{11}$ будет написана так: . Другие дроби соответственно отображались добавлением необходимого числа таких «единичных дробей». Например, $^5/_6 = {}^1/_2 + {}^1/_3$.

Интересно, что при этом египтяне не писали $^2/_5$ как $^1/_5 + {}^1/_5$. Судя по всему, здесь работало правило: использовать *разные* единичные дроби. Существовали также разные обозначения для некоторых простых дробей, например $^1/_2$, $^2/_3$ и $^3/_4$.

Египетские обозначения дробей очень неуклюжие и плохо приспособлены для вычислений. Они были пригодны для официальных отчетов, но остались вне поля зрения последующих культур.

Числа и народы

Независимо от вашего отношения к арифметике вы не посмеете отрицать весомое влияние чисел на нашу цивилизацию. Эволюция культуры в целом и математики в частности шли рука об руку на протяжении последних четырех тысячелетий. Сейчас уже практически невозможно отделить причину от следствия: я не рискну уверенно заявить, что именно математические открытия ускоряли глобальные изменения в культуре или, напротив, культурные запросы определяли направление математической мысли. Скорее, оба утверждения содержат зерно истины, ведь математика и культура неразделимы.

ДЛЯ ЧЕГО ЧИСЛА СЛУЖАТ НАМ

Многие современные автомобили оборудованы системой спутниковой навигации. Само устройство относительно дешево. Небольшой прибор, установленный в машине, в любой момент точно определит ваше местоположение и покажет на карте – часто с броской наглядной расцветкой и в трехмерной проекции – ближайшие окрестности и дороги. Голосовое управление объяснит, как лучше всего добраться до нужного места. Звучит как нечто из научной фантастики. Необходимой частью этой системы, не помещенной в вашу коробочку, является GPS (Global Positioning System – Глобальная система определения координат), состоящая из 32 спутников на околоземной орбите. Они постоянно подают сигналы, и с помощью этих знаков навигатор определит положение автомобиля с точностью до метра.

Математика задействована во многих аспектах работы GPS-сети, но здесь мы упомянем один: как используются сигналы спутника для определения локации машины.

Радиосигналы движутся со скоростью света, т. е. примерно 300 тыс. км/с. Компьютер в салоне машины – чип в купленной вами коробочке – может вычислить расстояние от вашей машины до спутника, измерив время, за которое сигнал

последнего достигает машины. В среднем это около 0,1 с, но для современной техники не составит труда определить это с большей точностью. Однако нужно так составить сигнал, чтобы он сам содержал информацию о времени.

По сути, спутник и приемник в автомобиле играют одну и ту же мелодию, и мы сравниваем время ее звучания. «Ноты», пришедшие со спутника, будут с небольшой задержкой проигрываться в машине. По аналогии эта мелодия может звучать примерно так:

МАШИНА: …На этот горный склон крутой / Ступала ль ангела нога?

СПУТНИК: На этот горный склон крутой / Ступала ль…

Здесь «мелодия» спутника проигрывается с задержкой примерно на три слова в самой машине. И спутник, и приемник должны исполнять одну «песню», и исполняемые «ноты» должны быть легко определяемы, чтобы можно было точно измерить разницу во времени.

Конечно, в спутниковой навигационной системе не звучат песни. Сигнал состоит из коротких импульсов, чья продолжительность определяется псевдослучайным кодом. Это последовательность цифр, случайная на первый взгляд, на самом деле подчиняется определенным математическим правилам. Они известны и спутнику, и приемнику, которые могут генерировать одинаковую последовательность импульсов.

Однако они имеют одно существенное различие. Многие культурные скачки очевидны. Новые веяния в архитектуре, новые виды транспорта, даже новые формы организации правительственной бюрократии так или иначе заметны всем.

Математика обычно скрыта за кулисами. Когда вавилоняне использовали свои астрономические наблюдения для предсказания затмений Солнца, публика впадала в экстаз от точности, с которой жрецы предвидели столь ужасающее событие. Но даже высшее жречество не знало почти ничего о применяемых методах. Они были в курсе, как прочесть таблички с нужными им данными, но для них

главным было то, как воспользоваться знанием. Как именно удалось его достичь, оставалось тайной за семью печатями, доступной только специалистам.

Некоторые жрецы получали неплохое математическое образование – как и все культурные переписчики. Они обучались почти так же, как и писцы, особенно в первые годы, но им не требовалось доскональное знание математики, чтобы *пользоваться* преимуществами новых открытий в этой области. Так сложилось исторически, и так всё будет и впредь. Математикам редко вручают награды за кардинальные перемены в нашем мире. Сколько раз вы видели чудеса современного мира, созданные компьютерами, без малейшего намека на то, что они эффективны лишь в том случае, если запрограммированы на использование сложнейших алгоритмов для решения проблем, и что основой почти любого алгоритма служит математика?

Важный раздел математики, лежащий на поверхности, – арифметика. Но с появлением карманных калькуляторов, способных рассчитывать стоимость покупок или величину налогов, ее оттеснили еще дальше. По крайней мере, многие из нас всё еще отдают себе отчет в том, что арифметика есть *где-то там*. Мы живем в полной зависимости от чисел, будь то расчеты доходов и налогов, общение с людьми в другом полушарии, исследование поверхности Марса или испытание нового лекарственного средства. Всё это уходит корнями в Древний Вавилон, к писцам и учителям, изобретавшим эффективные способы изображать числа и оперировать ими. Они использовали свои познания в арифметике в двух направлениях: в приземленной деятельности простых людей (например, измерение земельных наделов или подсчет налогов) и в возвышенной работе человеческого разума (предсказание солнечных затмений или движения планет в небесной сфере).

Сегодня мы поступаем так же. Мы используем простейшие вычисления, незначительные даже для арифметики, для сотен мелких дел: добавления в нужной концентрации средства от паразитов в пруд с золотыми рыбками, покупки нужного числа рулонов новых обоев для спальни, составления маршрута таким образом, чтобы потратить меньше бензина и сэкономить. А наша культура использует высшую математику в науке, технологиях и всё больше в торговле. Изобретение

цифр и арифметического счета наряду с обретением речи и письма занимает законное место среди достижений, которые отличают нас от обучаемых обезьян.

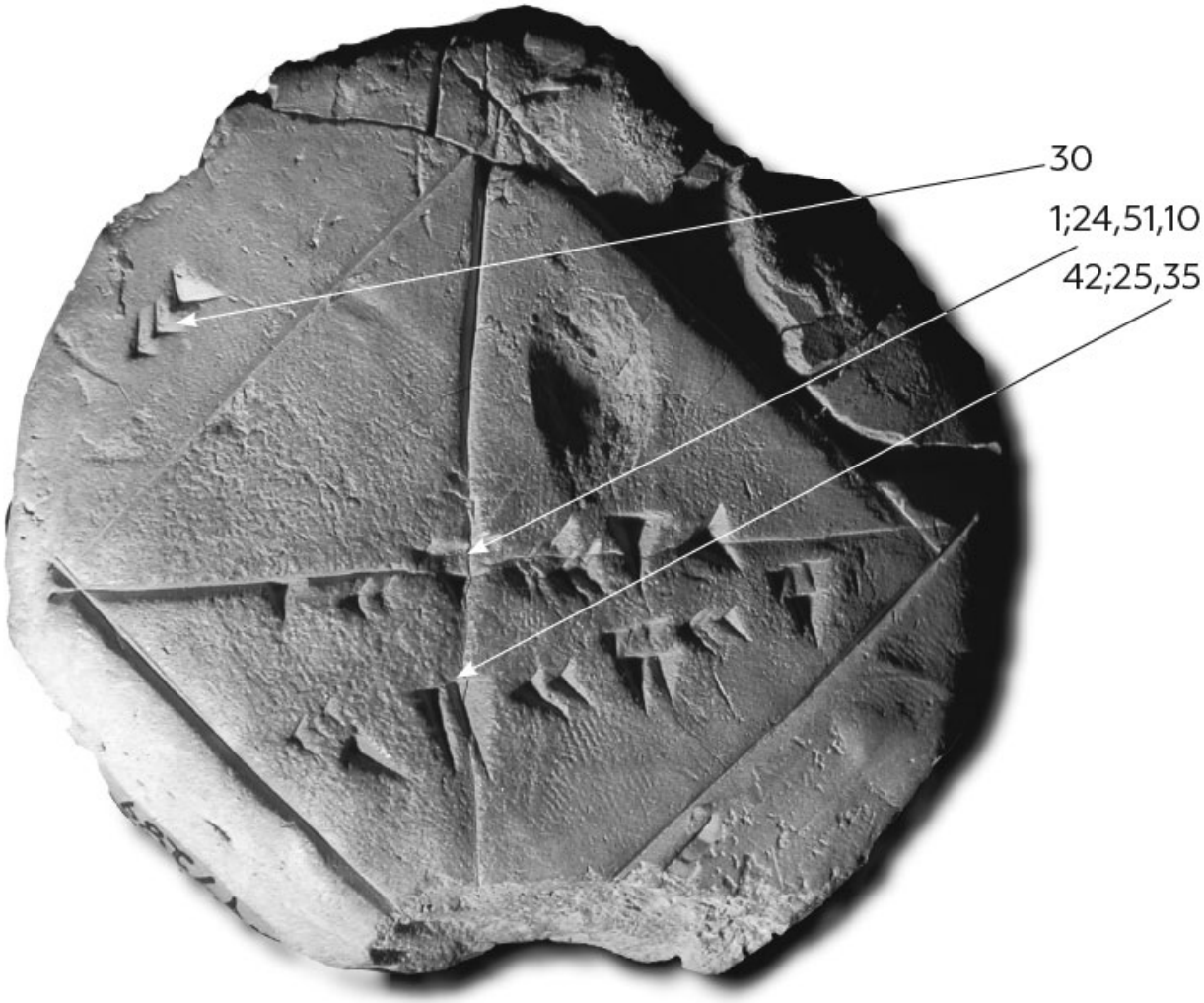
Глава 2. Логика формы

Первые шаги в геометрии

В математике существует два основных типа рассуждений: символьный и наглядный. Символьная выкладка ведет историю от числовой записи, и мы вкратце ознакомились с тем, как это привело к изобретению алгебры, где символы могут обозначать скорее обобщенные числа («неизвестные»), чем какие-то конкретные («7»). Начиная со Средних веков и до наших дней математика всё больше опирается на символы: если хотите убедиться, достаточно взглянуть на любой современный математический текст.

Начала геометрии

Наравне с символами математики используют схемы и диаграммы, открывающие неограниченные возможности для визуализации научных выкладок. Картинки менее формальны, чем символы, и чаще всего именно это ставит под вопрос целесообразность их использования. Широко распространено убеждение, будто картинка дает менее строгую и логичную выкладку, чем подсчеты с помощью символов. Это верно: изображение всегда оставляет больший простор для толкований. Более того, картинка может содержать скрытые намеки. Мы не можем изобразить некий «обобщенный» треугольник: любой треугольник будет иметь свою форму и размеры, которые порой не соответствуют случайно выбранной фигуре. Но поскольку визуальная интуиция остается очень мощной особенностью нашего мозга, наглядные образы играют важную роль в математике. Фактически они определяют вторую по важности идею предмета после чисел, т. е. его форму.



Табличка YBC 7289 с клинописными числами

Увлечение математиков формами имеет долгую историю. Даже на вавилонских табличках мы находим диаграммы. Например, на табличке с регистрационным номером YBC 7289 есть квадрат с двумя диагоналями. Его стороны отмечены клинописными символами, означающими 30. Выше на одной из диагоналей стоит 1;24,51,10, а под нею 42;25,35, которое равно произведению первого числа на 30, а также длине этой диагонали. Таким образом, 1;24,51,10 – длина диагонали меньшего квадрата со стороной, равной единице. Теорема Пифагора утверждает, что она равна корню квадратному из 2, и мы обозначаем его как √2. 1;24,51,10 приближает √2 с точностью до шести цифр после запятой.

Первая систематизация с использованием схем, ограниченным применением символов и изрядной долей логики встречается в описании геометрии Евклидом. Он следовал традиции, восходящей к культу Пифагора, чей расцвет пришелся на 500 г. до н. э. Однако Евклид настаивал, что любое положение математики должно иметь логическое доказательство для признания его достоверности. В записях Евклида есть важное нововведение – использование в доказательствах рисунков и логических построений. И многие века слово «геометрия» тесно ассоциировалось с этим подходом.

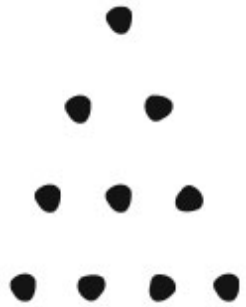
В этой главе мы проследим историю геометрии от Пифагора через Евклида и его предшественника Евдокса до позднего периода греческого классицизма, вплоть до его «наследников» Архимеда и Аполлония. Эти ранние геометры проложили путь для всех дальнейших работ с наглядными суждениями в математике. Также они установили стандарты логического доказательства, сохранившиеся неизменными на протяжении тысячелетий.

Пифагор

Сегодня мы принимаем как должное то, что математика дает нам ключи к законам существования природы. Первые систематизированные записи об этом пришли к нам от пифагорейцев – приверженцев мистического культа, датируемого промежутком между 600 и 400 гг. до н. э. Его основатель Пифагор родился около 569 г. до н. э. на Самосе. Место и дата его смерти покрыты мраком, но в 460 г. до н. э. основанный им культ подвергся нападкам и искоренению, а тайные места сборищ были уничтожены. В одном из них, доме Мило в Кротоне, более 50 захваченных пифагорейцев вырезали на месте. Многие из выживших сбежали в Фивы в Верхнем Египте. Не исключено, что одним из этих людей был сам Пифагор. Но даже если это всего лишь красивая выдумка, мы практически ничего не знаем о Пифагоре наверняка. Имя его у всех на слуху, главным образом из-за знаменитой теоремы о прямоугольном треугольнике, но мы даже не уверены, доказал ли ее он сам.

Зато нам известно гораздо больше о философии и убеждениях пифагорейцев. Они понимали, что математика – не реальность, а абстрактная концепция. В то же время они верили, что эта абстракция как-то воплощается в «идеальной» концепции, существуя в некоем странном воображаемом мире. То есть, например, нарисованный палочкой на песке круг – безуспешная попытка круга стать идеальным, совершенно ровным и невообразимо тонким.

Самым важным аспектом философии пифагорейцев была идея, что в основе всего лежат числа. Они выражали свою веру с помощью мифологических символов и подкрепляли ее практическими наблюдениями. В мистическом плане они считали, что число 1 – первичный источник всего во Вселенной. Числа 2 и 3 символизируют женское и мужское начала. Число 4 – символ гармонии, а также четырех стихий (земля, воздух, огонь и вода), из которых сотворено всё сущее. Пифагорейцы придавали особое мистическое значение числу 10, потому что 10 = 1 + 2 + 3 + 4 и объединяет в себе первичную единицу, женское начало, мужское начало и четыре стихии. Более того, эти числа образуют треугольник, а вся геометрия Древней Греции построена на свойствах треугольников.



Число 10 в виде треугольника

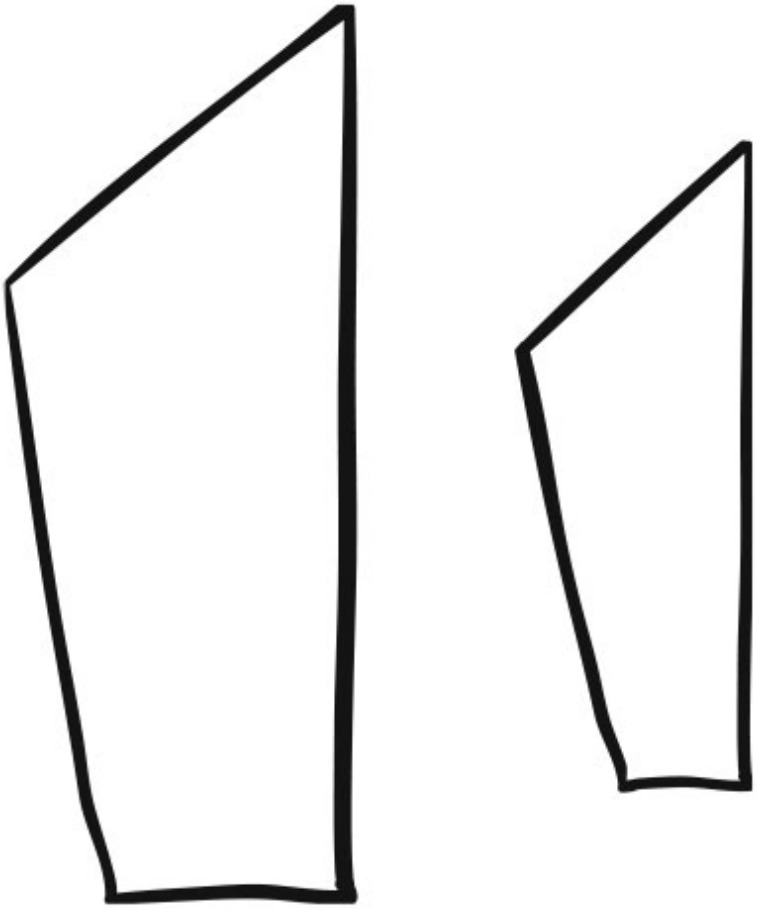
ГАРМОНИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Главным доказательством своей концепции Вселенной чисел пифагорейцы считали музыку: они обнаружили ряд поразительных связей между гармонией звуков и простыми дробями. В результате несложных экспериментов они открыли, что если натянутая струна издает определенный звук, то вместе со струной вдвое меньшей длины она будет издавать гармоничные созвучия, которые сейчас называют октавой. Струна длиной в $^{2}/_{3}$ и $^{1}/_{3}$ от первой также создают гармоничные звуки.

Сегодня эти числовые аспекты музыки относят к физике колебания струн, которые служат основой для теории волн. Количество волн, помещающихся в заданной длине струны, является целым числом, и эти числа образуют простые соотношения. Если они не укладываются в простую пропорцию, соседние звуки накладываются друг на друга, создавая несогласованные «биения», неприятные для слуха. На самом деле всё намного сложнее и включает особенности восприятия нашего мозга, но в любом случае мы видим физическое обоснование открытия пифагорейцев.

Пифагорейцы говорили о существовании девяти небесных тел: Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн плюс центральный огонь, отличный от Солнца. В их космологии числу 10

придавалось столь серьезное сакральное значение, что они включили в эту систему Антихтон (Антиземля, Противоземля) – загадочную планету, скрытую от нас Солнцем.



Это две подобные формы

Как мы уже знаем, целые числа 1, 2, 3 и т. д. естественно приводят нас ко второму виду чисел – дробям. Математики называют их рациональными числами. Это дроби вида $^{a}/_{b}$, где *a* и *b* – целые числа (также *b* не равно 0, иначе вся дробь не имеет смысла). Дроби могут делить целые числа на сколь угодно малые части, а значит, длину стороны геометрической фигуры можно аппроксимировать настолько близко, насколько мы пожелаем, с помощью рациональных чисел. Кажется вполне естественным, что можно в точности разделить число так, чтобы все длины были рациональными.

Если бы это было возможно, геометрия стала бы намного проще: два любых отрезка можно было бы представить целыми числами,

кратными длине небольшого отрезка, и так получить их общую длину, сложив множество копий таких отрезков. Кому-то это может показаться неважным, но мы значительно упростили бы понимание теории длин, площадей и особенно подобия фигур (которые имеют одинаковую форму, но разный размер). С помощью схем, сформированных из бесконечного множества копий одной и той же базовой формы, можно доказать что угодно.

К несчастью, этой мечте не суждено было осуществиться. По легенде, один из пифагорейцев, Гиппас из Метапонта, обнаружил, что это утверждение ошибочно. В частности, он доказал, что диагональ единичного квадрата (квадрата со стороной, равной одной единице), иррациональна, не является дробью. Известно (хоть это и непроверенные данные, но отличная история), что он оплошал, озвучив этот факт, когда пифагорейцы пересекали на лодке Средиземное море. Его «товарищи по цеху» пришли в такое негодование, что вышвырнули его за борт, и он утонул. Но, скорее всего, дело ограничилось его отлучением от братства. Каким бы ни было наказание, оно явно говорит о том, что его открытие не привело пифагорейцев в восторг.

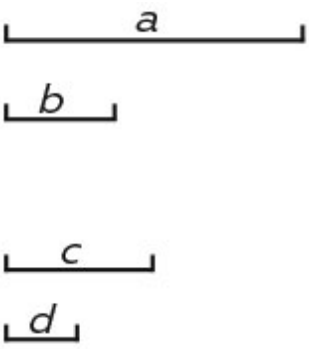
Современное толкование наблюдений Гиппаса состоит в том, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число. На взгляд пифагорейцев, этот факт был ударом в спину их беззаветной вере в то, что корни Вселенной уходят в числа – целые. Дроби – отношения целых чисел – еще кое-как вписывались в это мировоззрение, но для чисел, которые доказуемо не являлись дробями, здесь места не было. Вот и вышло, что утопленный или отлученный бедняга Гиппас стал первой жертвой иррациональности – или, скорее, религиозных убеждений.

Укрощение иррациональности

Но греки всё же нашли способ справиться с иррациональностью – благодаря тому, что любое иррациональное число можно аппроксимировать рациональным. Чем точнее приближение, тем сложнее рациональное число, и всегда остается некоторая погрешность. Делая ее всё меньше, мы получаем возможность изучать свойства иррациональных чисел, исследуя аналогичные свойства ближайших к ним рациональных. Проблема в том, чтобы поставить эту идею на те рельсы, которые были бы совместимы с подходом греков к геометрии и доказательствам. Это оказалось выполнимой, но сложной задачей.

Греческая теория иррациональных чисел была сформулирована Евдоксом примерно в 370 г. до н. э. Он стремился представить любую величину, рациональную или иррациональную, в виде соотношения двух отрезков – иными словами, *парными* отрезками. Таким образом, дробь $^{2}/_{3}$ можно представить как два отрезка, один длиной в две единицы и другой в три (соотношение 2:3). $\sqrt{2}$ можно представить парой, составленной диагональю единичного квадрата и его стороной (и это будет соотношение $\sqrt{2}$:1). Обратите внимание: здесь оба отрезка могут быть построены геометрически.

Здесь главный секрет – определить, когда эти два соотношения будут равны. Когда *a: b = c: d*? Греки не имели такой системы счисления, которая позволила бы им сделать это простым делением длины одного отрезка на длину другого, и вынуждены были сравнивать *a: b* с *c: d*. А Евдокс предложил громоздкий, но точный способ сравнения, укладывающийся в условности греческой геометрии. Идея была в том, чтобы сравнивать целочисленные произведения *ma* и *nc*. Этого можно было достичь, соединяя *m* копий *a* непрерывной цепью и точно так же *n* копий *b*, а затем использовать те же множители *m* и *n* для сравнения *mb* и *nd*. Евдокс рассуждал: если соотношения *a: b* и *c: d* не равны, мы можем подобрать *m* и *n* так, чтобы увеличить разницу до такой степени, что $ma > nc$, но $mb < nd$. Действительно, так мы можем установить равенство соотношений.



Равны ли соотношения a: b и c: d?

Такое определение требует специальных навыков, зато прекрасно вписывается в ограниченные возможности греческой геометрии. Так или иначе, оно работает; более того, оно позволило греческим геометрам взять теоремы, легко доказуемые с помощью рациональных отношений, чтобы расширить их действие до иррациональных.

Часто они использовали так называемый метод исчерпывания (или, иначе, истощения), в котором некоторые видят предка современного метода пределов и интегрального исчисления. Этим методом они доказали, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса. Доказательство основывалось на простом факте, открытом Евклидом: площади двух подобных *многоугольников* соотносятся в той же пропорции, что и квадраты их соответствующих сторон. Круг представлял проблему: он не был многоугольником. Тогда греки построили две последовательности многоугольников: одну помещавшуюся внутри круга, а вторую – снаружи. Каждый следующий многоугольник всё ближе подходит к кругу, и из метода исчерпывания, доведенного до совершенства Евдоксом, следует, что площади самых близких к кругу многоугольников стремятся к его площади и в итоге совпадут с ней.

Евклид

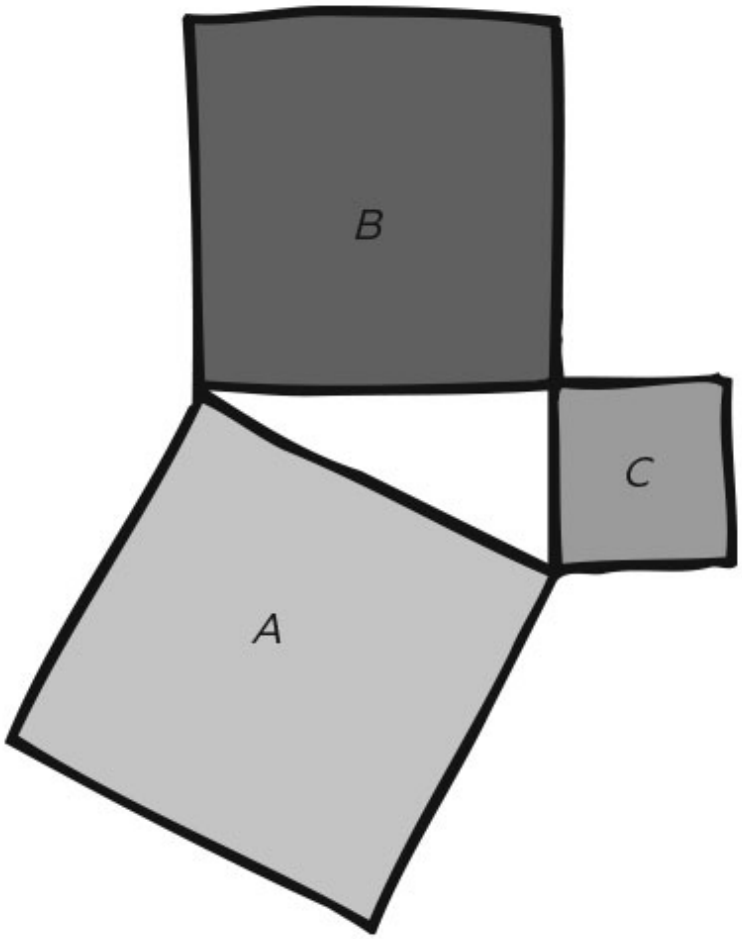
Самым известным греческим геометром, хотя, возможно, и не самым талантливым математиком, считается Евклид Александрийский. Он внес огромный вклад в историю науки, собрав труды предшественников и сведя их воедино, и его «Начала» – шедевр всех времен и народов. Евклид создал не меньше десяти трудов по математике, из которых до нас дошло только пять, и те в поздних копиях, в виде фрагментов. До наших дней не дожил ни один подлинный документ из Древней Греции. Пять имеющихся текстов Евклида называются «Начала», «О делении», «Данные», «Явления» и «Оптика».

«Начала» считаются основным трудом Евклида, который окончательно утвердил разделение геометрии на двумерную (планиметрию) и трехмерную (стереометрию). «О делении» и «Данные» содержат разные дополнения и комментарии в части геометрии. «Явления» посвящены астрономии, сферической геометрии и исследованию геометрических фигур на поверхности сферы. «Оптика» также относится к этой области и может считаться первой попыткой исследования геометрии перспективы – способности человеческого глаза преобразовать трехмерное изображение в двумерную картинку.

Пожалуй, лучшим трудом Евклида можно считать исследование логики пространственных отношений. Если форма имеет определенные свойства, логично, что они определяют и другие ее характеристики. Например, если у треугольника равны все три стороны, т. е. он равносторонний, то должны быть равны и все три его угла. Такой вид утверждений, когда делается допущение, а потом приводится его логическое следствие, называется теоремой. Здесь это теорема о свойствах равностороннего треугольника. Менее интуитивно понятна, зато более известна теорема Пифагора.

«Начала» состоят из 13 книг, выстроенных в логической последовательности. В них обсуждаются геометрия плоскости (планиметрия) и некоторые аспекты геометрии пространства (стереометрии). Важный момент – доказательство существования пяти геометрически правильных многогранников: тетраэдра, гексаэдра

(попросту куба), октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Основные фигуры планиметрии – линия и круг, часто встречающиеся в разных сочетаниях: например, треугольник – сочетание трех прямых линий. В стереометрии мы имеем дело с плоскостями, цилиндрами и сферами.



Теорема Пифагора: если треугольник прямоугольный, площадь большого квадрата *A* равна сумме площадей двух других, *B* и *C*

Для современных математиков представляет интерес не столько содержание трудов Евклида, сколько их логическая структура. В отличие от предшественников, он не просто принимает известную теорему как истину. Он ее доказывает.

Что значит доказать теорему? Рассказать своего рода математическую историю, где каждый следующий шаг – логическое следствие предыдущих. Каждое очередное утверждение должно быть подкреплено отсылкой к предыдущим и быть выводом из них. Евклид

понимал, что этот процесс не может идти вглубь до бесконечности: он должен с чего-то начинаться, и начальное утверждение не требует доказательств: иначе пришлось бы начинать действия с чего-то еще.

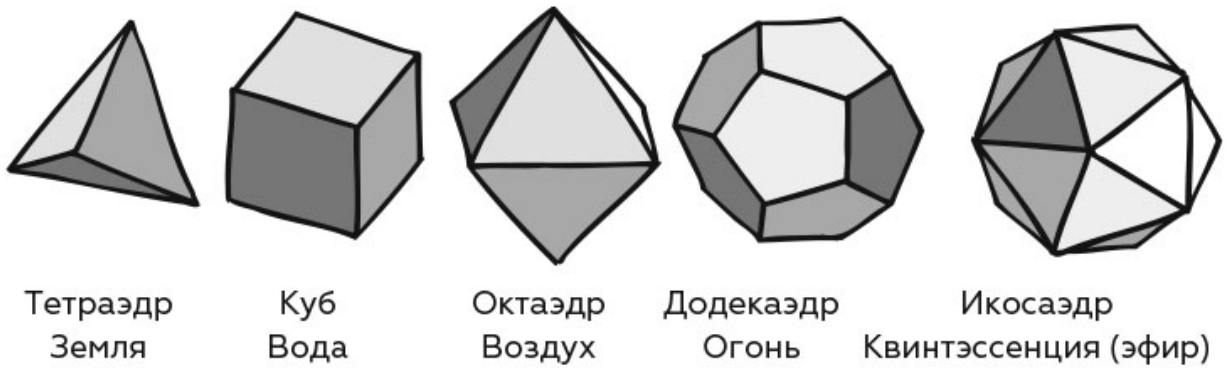
Чтобы запустить процесс, Евклид составил несколько основных определений: четких, ясных утверждений для таких основных «технических» понятий, как *линия* или *круг*, по сути очевидных. Типичный пример такого определения: тупым называется угол больше прямого.

Эти определения предоставили терминологию, необходимую для формулировки не требующих доказательств утверждений, которые Евклид разделил на два вида: *общие утверждения* и *постулаты*. Типичное общее утверждение: объекты, равные одному и тому же, равны и между собой. А типичный постулат: все прямые углы равны между собой.

Мы уже объединили оба эти типа утверждений в один и называем их *аксиомами*. Математические аксиомы – исходные утверждения, не требующие доказательств. Мы считаем, что аксиомы – как правила игры, и верим, что они всегда выполняются. Мы уже не задаемся вопросом, верны ли эти правила, – мы уже не думаем, что эта игра единственная в своем роде. Всякий, кто собирается участвовать в какой-то конкретной игре, должен соблюдать ее правила; иначе он волен выбрать другую, но в ней правила первой не будут работать.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильный многогранник, или платоново тело, – выпуклый многогранник, который состоит из равных граней в виде правильных многоугольников и имеет равное число ребер, выходящих из каждой вершины. Пифагорейцы описывали пять таких правильных многогранников.



Пять платоновых тел

- Тетраэдр образован четырьмя правильными треугольниками.
- Куб (гексаэдр) образован шестью квадратами.
- Октаэдр образован восемью правильными треугольниками.
- Додекаэдр образован 12 правильными пятиугольниками.
- Икосаэдр образован 20 правильными треугольниками.

Их связывали с четырьмя стихиями Античности: землей, воздухом, огнем и водой – и с пятым элементом – квинтэссенцией.

Во времена Евклида и позже, почти 2000 лет, математикам такое не могло и в голову прийти. Практически все относились к аксиомам как к самоочевидным истинам, чью незыблемость никто не посмел бы оспорить. Евклид недаром приложил все свои таланты, чтобы сделать аксиомы именно такими, – и почти преуспел. Однако одна – аксиома параллельности – оказалась особенно сложной и не такой уж очевидной. Многие ученые пытались вывести ее из более простых общих понятий. Позже мы увидим, к каким поразительным открытиям привели эти попытки.

Опираясь на эти простые утверждения, «Начала» обеспечивали доказательства всё более сложных геометрических теорем. Например, в книге I, теореме 5 доказывается, что углы у основания равнобедренного треугольника (у которого две стороны одинаковой длины) равны. Эта теорема была известна целому поколению викторианских школьников

как *pons asinorum*, или «мост ослов»: чертеж, используемый в доказательстве Евклида, напоминал мост. Вдобавок это был первый серьезный камень преткновения для школяров, которые пытались зазубрить теорему, а не понять ее. В книге I, теореме 32 доказано, что сумма углов треугольника на плоскости равна 180°. В книге I, теореме 47 сформулирована теорема Пифагора.

Евклид выводил каждую свою теорему из уже доказанных теорем и разных аксиом. Он выстроил башню логики, которая тянулась всё выше, опираясь на фундамент из аксиом и используя логические выводы в качестве строительного раствора, скреплявшего кирпичи.

Сегодня нас уже не до конца удовлетворяет логика Евклида, потому что в ней есть множество прорех. Евклид слишком многие вещи принимает как данность, в наше время его список аксиом не считается полным. Например, кажется очевидным, что если линия проходит через какую-либо точку внутри круга, то она должна где-то пересекать круг, если продлить ее до нужной длины. Да, это очевидно, если вы нарисуете чертеж, но есть примеры, показывающие, что это вовсе не следует из аксиом Евклида. Евклид был выдающимся ученым, но слишком убежденным в том, что свойства, явно очевидные на чертежах, не нуждаются ни в доказательстве, ни в аксиоматике.

Всё гораздо серьезнее, чем кажется на первый взгляд. Есть немало известных примеров ошибочных суждений, ставших следствием мелких ошибок на изображении. Одно из них – «доказательство», что всякий треугольник имеет две равные стороны.

ЕВКЛИД АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ 325–265 гг. до н. э.

Евклид известен благодаря своему труду по геометрии «Начала» – выдающемуся и основополагающему тексту в преподавании математики на протяжении 2000 лет.



О жизни Евклида известно очень мало. Он преподавал в Александрии. Примерно в 45 г. до н. э. греческий философ Прокл писал: *«Евклид ‹…› жил во времена Птолемея Первого ‹…› потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает о Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели “Начала”; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Значит, Евклид был старше платоновского кружка, но моложе Архимеда и Эратосфена ‹…› он был поклонником Платона, исповедовал его философию и в знак этого в своих “Началах” назвал правильные многогранники платоновыми телами, составляющими основу Вселенной»*.

Золотое сечение

Книга V «Начал» уводит нас в новом и неизведанном направлении от книг с первой по четвертую. Она непохожа на традиционную геометрию и, по сути, кажется бессмысленным набором слов. Как, например, понимать утверждение: «Если одни величины равно кратны по отдельности другим величинам, то и все первые совместно кратны всем вторым» (предложение 1 книги V)?

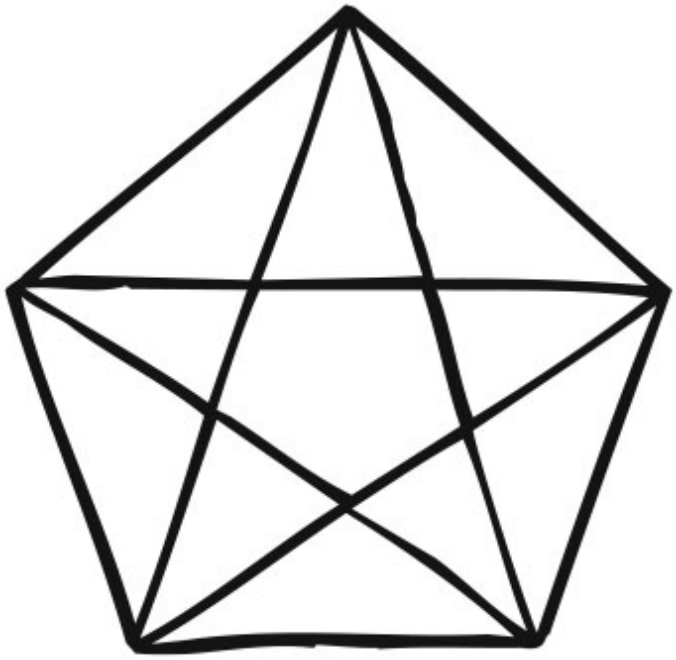
И дело не в изложении (которое я упростил). Доказательство ясно показывает нам, что имел в виду Евклид. Английский математик XIX в. Август де Морган изложил это понятным языком в своей книге по геометрии: «Десять футов десять дюймов в десять раз больше, чем один фут и один дюйм».

Чего же добивался Евклид? Пытался придать банальности вид теоремы? Или загадочной глупости? Вовсе нет. Для нас это темная материя, но она подводит к самой важной части «Начал» – общей теории отношений, построенной Евдоксом Книдским. Современные математики предпочитают работать с числами. Нам это привычнее, поэтому я часто буду переводить идеи древних греков на этот язык.

Евклид не избежал трудностей при работе с иррациональными числами. Кульминацией «Начал» – и, возможно, их главной темой – стало доказательство существования пяти правильных многогранников: тетраэдра, куба (гексаэдра), октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Евклид доказывает два допущения: больше не существует других правильных многогранников; эти пять действительно существуют: их можно построить геометрически, и их грани совпадают совершенно точно.

Два правильных многогранника, додекаэдр и икосаэдр, включают пятиугольники: у додекаэдра грани имеют форму пятиугольников, а каждые пять граней икосаэдра, собранные вокруг общего угла, образуют пятиугольник. Правильные пятиугольники связаны с тем, что Евклид называет «крайним и средним отношением». На отрезке *AB* точка *C* располагается так, что отношение *AB: AC* равно отношению *AC: BC*. Меньшая часть отрезка относится к большей, как б*о*льшая ко всему отрезку. Если вы нарисуете пятиугольник и впишете в него пятиконечную звезду, стороны последней будут относиться к сторонам пятиугольника точно так же.

В наши дни это отношение известно как *золотое сечение*. Оно равно (1 + √5) / 2, и это иррациональное число. Оно приблизительно равно 1,618. Древние греки смогли доказать, что оно иррационально, с помощью геометрических свойств пятиугольника. Значит, и Евклид, и его предшественники отдавали себе отчет в том, что для полного понимания свойств додекаэдра и икосаэдра им придется иметь дело с иррациональными числами.



Отношение диагоналей к сторонам образует золотое сечение



Крайнее и среднее отношение (золотое сечение). Длина верхнего отрезка относится к длине среднего так же, как длина среднего – к нижнему

Таков традиционный взгляд, изложенный в «Началах». Дэвид Фоулер в своей книге «Математики Академии Платона» («The Mathematics of Plato’s Academy») утверждает, что это может

толковаться иначе. Возможно, главной темой труда Евклида была теория иррациональных чисел, а рассуждения о правильных многогранниках – второстепенное приложение к ней. Действительно, мы можем интерпретировать текст Евклида по-разному, но одна особенность «Начал» говорит в пользу этой альтернативной теории. Основная часть теории чисел не нуждается в классификации правильных многогранников. Зачем же тогда Евклид включил их в свой труд? И только их прямая связь с теорией иррациональных чисел делает понятным такой ход.

Архимед

Величайшим из древних математиков считается Архимед. Он сделал важнейший вклад в геометрию, был первопроходцем в деле приложения математики ко всем явлениям мира и непревзойденным инженером. Но для математиков он будет памятен прежде всего исследованиями формы круга, шара и цилиндра. Для нас они связаны с числом π (пи), приблизительно равным 3,14159. Конечно, греки не работали с π напрямую: они представляли его геометрически, как отношение длины окружности к диаметру.

Ранние культуры уже имели представление о том, что длина окружности всегда одинаково соотносится с ее диаметром и что она длиннее примерно в три раза, может, чуть больше. Вавилоняне считали это число равным $3\ ^{1}/_{8}$. Известное нам по школе знаменитое приближение для числа π – «архимедово число», равное $3\ ^{1}/_{7}$, – ближе к истине, но тоже неточное. Архимед пошел намного дальше, в духе Евдокса подведя твердые доказательства под свои результаты. Насколько смогли установить древние греки, отношение между длиной окружности и диаметром должно быть иррациональным числом. И сейчас мы точно знаем, что так оно и есть, хотя с доказательством пришлось подождать до 1761 г., когда его открыл Иоганн Генрих Ламберт. Но как бы то ни было, Архимед, не сумев доказать, что π – рациональное число, вынужден был принять, что оно иррациональное.

Греческая геометрия лучше всего работает с многоугольниками – фигурами, образованными прямыми линиями. Но окружность – кривая, и Архимед подбирается к ней с помощью аппроксимирующих многоугольников. Чтобы вычислить π, он сравнил длину круга с периметрами многоугольников двух последовательностей: в одной фигуры были вписаны в круг, в другой – описаны вокруг него. Периметр прямоугольника в круге должен был быть меньше длины окружности, а периметр наружного – больше. Для простоты Архимед брал правильные многоугольники, деля их стороны пополам, начиная с шестиугольника и получая соответственно 12 сторон, 24, 48 и т. д. Он остановился на 96. Его вычисления дали результат $3\ ^{10}/_{71} < \pi < 3\ ^{1}/_{7}$, т. е. значение π оказалось между 3,1408 и 3,1429.

Архимедовы исследования шара заслуживают особого внимания: мы не только знакомы с его строгим доказательством, но и знаем, как оно было открыто, – и уж в этой истории никакой строгости нет. Обоснование приводится в его книге «О шаре и цилиндре». Он доказывает, что объем шара равен двум третям от объема описанного около него цилиндра, а площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности этого цилиндра. Говоря современным языком, Архимед доказал, что объем шара равен $^4/_3\ \pi r^3$, где r – радиус; а площадь его поверхности равна $4\pi r^2$. Эти формулы используются и по сей день.

В доказательствах Архимед использовал метод исчерпывания. Он имеет важное ограничение: вам необходимо знать результат заранее, чтобы повысить свои шансы доказать его. Много веков ученые не могли понять, как Архимеду удалось это узнать. Но в 1906 г. голландский ученый Йохан Гейберг наткнулся на пергамент XIII в. с записанными на нем псалмами и обнаружил под ними более ранние стертые записи. Оказалось, это труды Архимеда, причем некоторые из них были неизвестны. Такие документы (записи, затертые на пергаменте ради новых текстов) называются палимпсестами. (Поразительно, но этот же манускрипт содержит еще две утраченные работы древних авторов.) Одна из работ Архимеда, «Послание к Эратосфену о методе» (книга «Метод механических теорем»), объясняет, как угадать объем шара. Идея в том, чтобы нарезать фигуру на сколь угодно тонкие слои и поместить их на одном конце рычага, а на другом – такие же слои цилиндра и конуса, чьи объемы Архимед уже умел вычислять, и взвесить. По закону равновесия рычага мы найдем требуемое значение объема шара. Сам пергамент был приобретен частным лицом за 2 млн долл. в 1998 г.

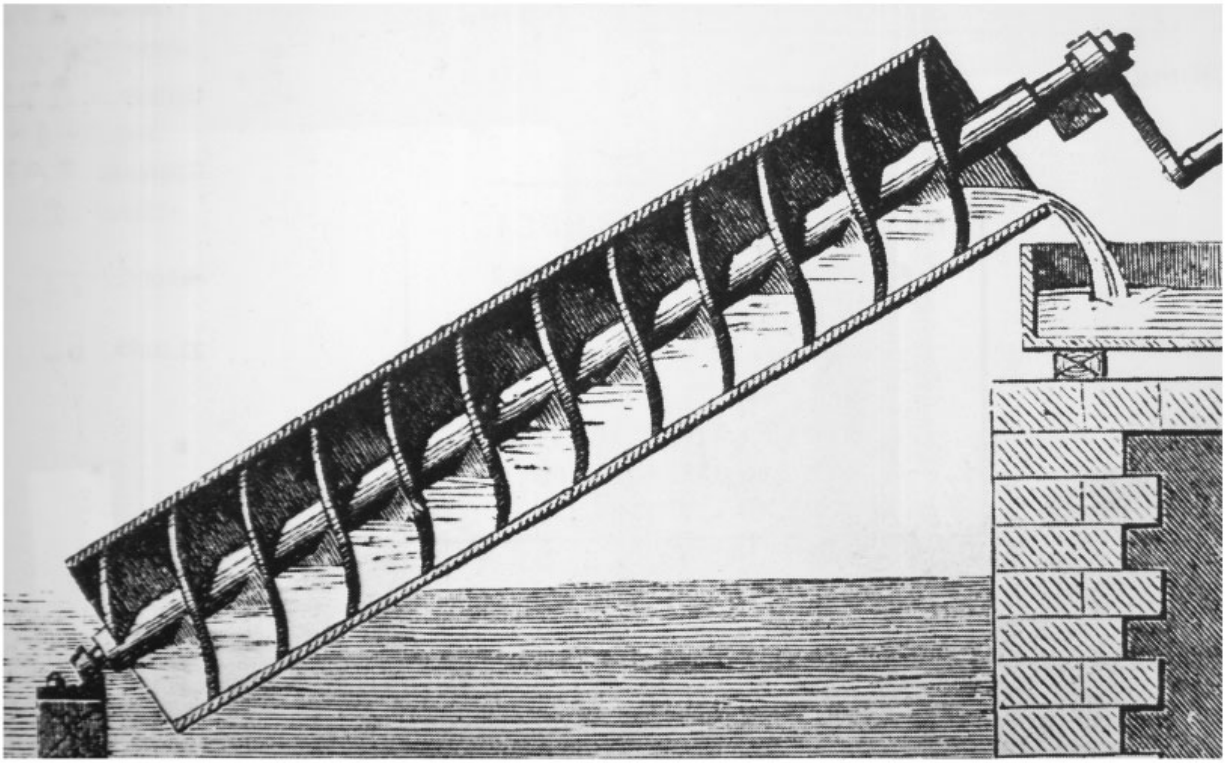
АРХИМЕД СИРАКУЗСКИЙ 287–212 гг. до н. э.



Архимед родился в греческих Сиракузах в семье астронома Фидия. Он побывал в Египте, где предположительно изобрел архимедов винт, который вплоть до наших дней широко используется для подъема воды из Нила в ирригационные каналы. Предположительно он побывал и в Александрии у Евклида; по крайней мере, он точно вел переписку с александрийскими математиками.

Его математические способности были непревзойденными и обширными. Он использовал их в полном объеме и построил огромные боевые машины, пользуясь своим законом рычага, чтобы забрасывать врагов тяжелыми обломками камней. Его машины оказались незаменимы во время обороны Сиракуз, осажденных римлянами в 212 г. до н. э. Он даже сумел использовать оптическую геометрию отраженного света, чтобы поджечь атаковавшие город с моря римские корабли.

До наших дней сохранились его работы «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах», «О равновесии плоских фигур», «О плавающих телах», «Измерение круга», «Псаммит» («Исчисление песчинок»), а также «Стомахион» и «Послание к Эратосфену о методе», обнаруженные в 1906 г. Йоханом Гейбергом.



Архимедов винт

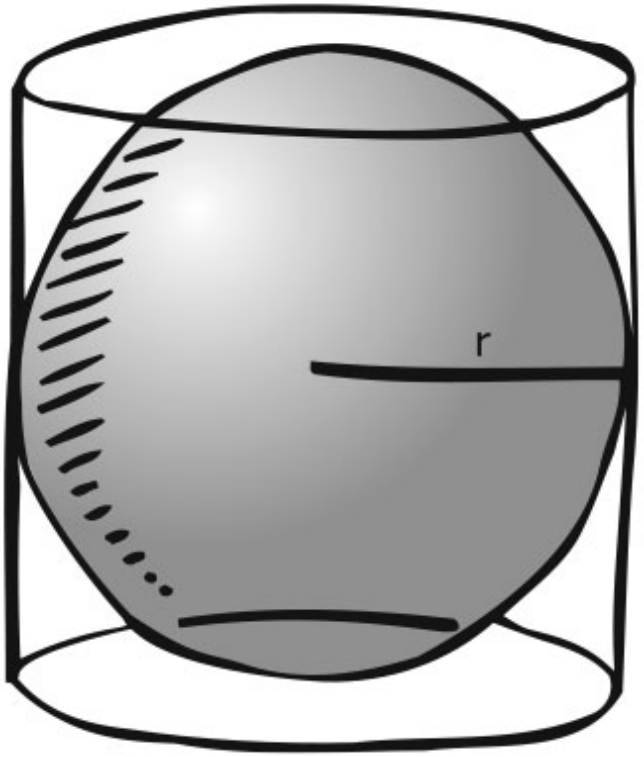
π С БОЛЬШОЙ ТОЧНОСТЬЮ

С помощью более изощренных методов значение π несколько раз определялось с точностью до миллиардных долей. Эти вычисления интересны использованными методами, в качестве теста для компьютеров, а также из научного любопытства, хотя их результат не имеет особого значения. На практике обычно достаточно пяти-шести цифр

после запятой. Последним рекордом было число с 1,24 трлн цифр, вычисленное Ясумаса Канадой и командой из девяти сотрудников в декабре 2002 г.[1] Работа длилась 600 часов и проводилась на суперкомпьютере фирмы Hitachi.

Проблемы древних греков

Греческая геометрия имела ограничения; некоторые из них удалось преодолеть благодаря применению новых методов и концепций. Евклид фактически ограничил геометрические чертежи теми, что можно было выполнить с помощью линейки без делений и пары ножек циркуля (здесь акцент на слове «циркуль»: слово «пара» используется так же, как в выражении «резать бумагу парой ножниц», так что не будем излишне педантичны). Иногда говорят, что он сделал это обязательным требованием, но оно касалось его чертежей, а не общих правил. С помощью дополнительных инструментов можно было построить и иные фигуры – идеальные в той же степени, в какой может быть идеальным круг, начерченный циркулем.

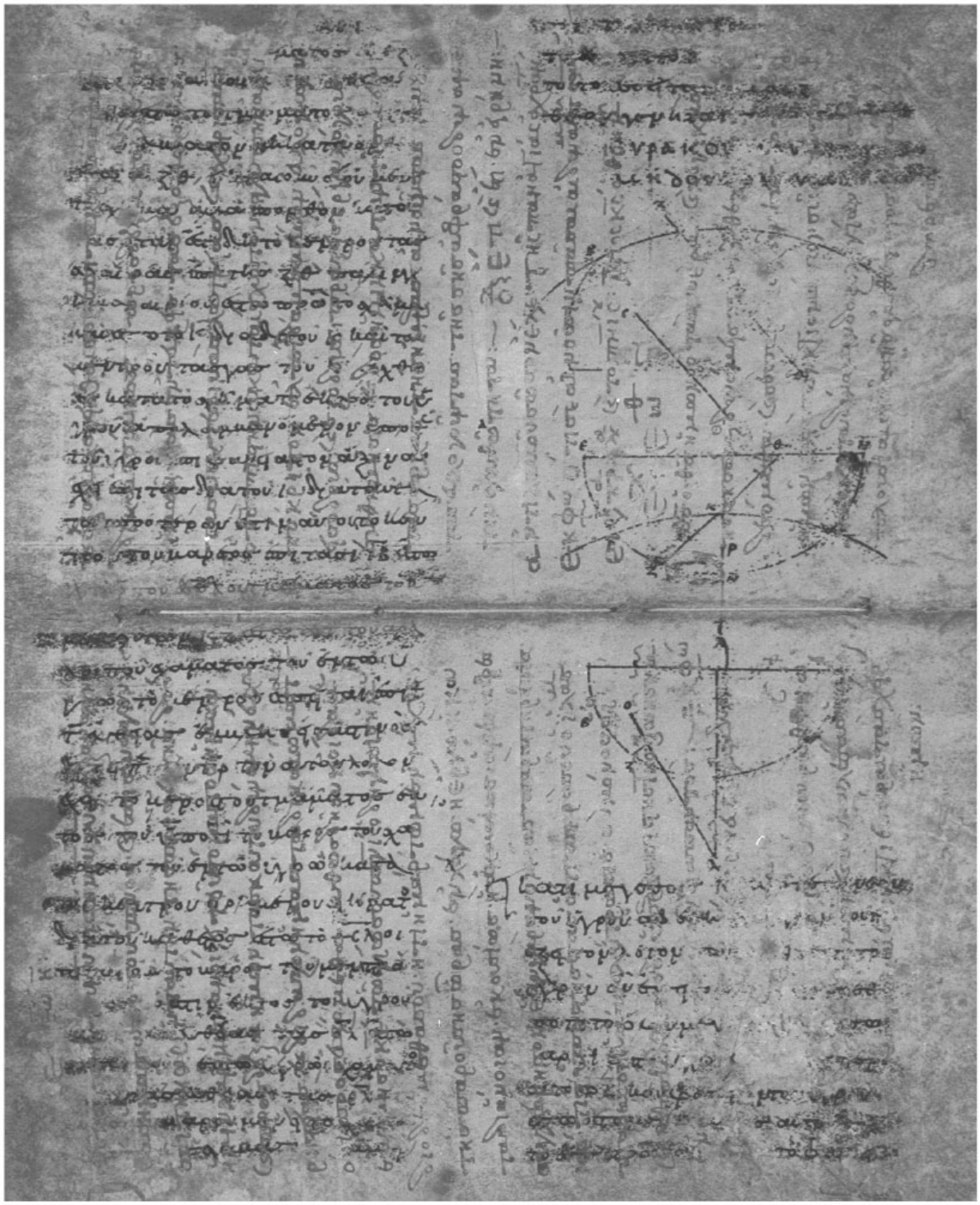


Шар и описанный вокруг него цилиндр

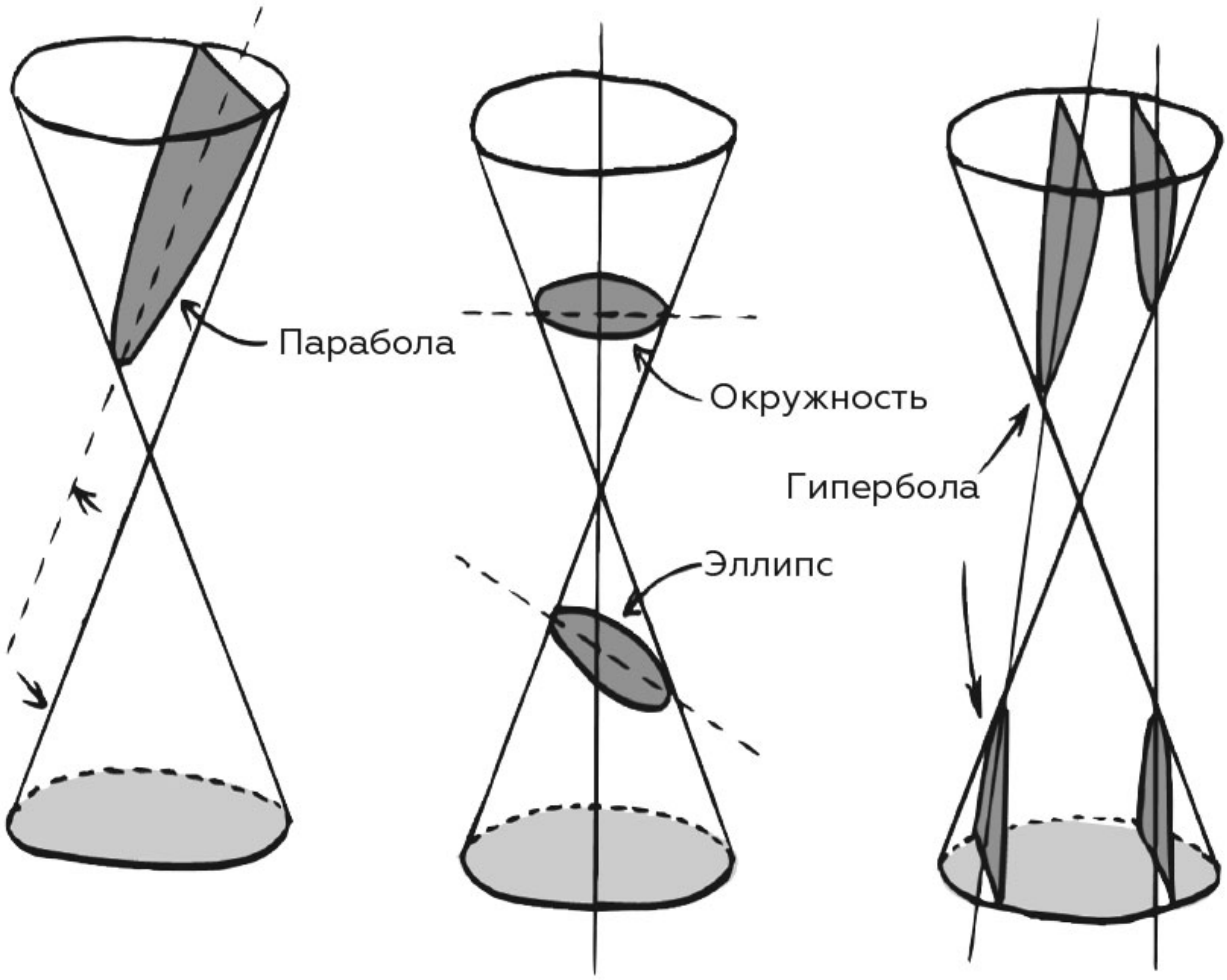
Например, Архимед знал, что вы можете сделать трисекцию угла при помощи линейки с двумя зафиксированными метками. Греки называли этот метод построения «невсис». Теперь нам известно (судя

по всему, это уже предполагали греки), что точная трисекция угла при помощи линейки и циркуля невозможна, а значит, вклад Архимеда расширил границы возможного. Еще две знаменитые проблемы того времени – удвоение куба (построение тела, чей объем вдвое больше объема исходного) и квадратура круга – построение квадрата, равновеликого площади заданного круга. Их также невозможно решить только при помощи циркуля и линейки.

Дальнейшее расширение разрешенных операций в геометрии – введение нового вида кривых, конических сечений, – отразилось в арабских работах о кубических уравнениях, созданных около 800 г. н. э., и широко применялось в механике и астрономии. Эти кривые, что крайне важно для истории математики, получаются при пересечении плоскости с двойным конусом.



Палимпсест с трудами Архимеда



Конические сечения

Сегодня мы знаем три главных типа таких конических сечений.

• Эллипс – замкнутая овальная кривая – возникает, когда плоскость пересекает только одну половину конуса. Окружность – разновидность эллипса.

• Гипербола – кривая с двумя бесконечно длинными ветвями – получается, когда плоскость пересекает обе половины конуса.

• Парабола – переходная кривая между эллипсом и гиперболой, параллельная воображаемой линии, проходящей через вершину конуса и лежащей на его поверхности. Имеет только одну ветвь, уходящую в бесконечность.

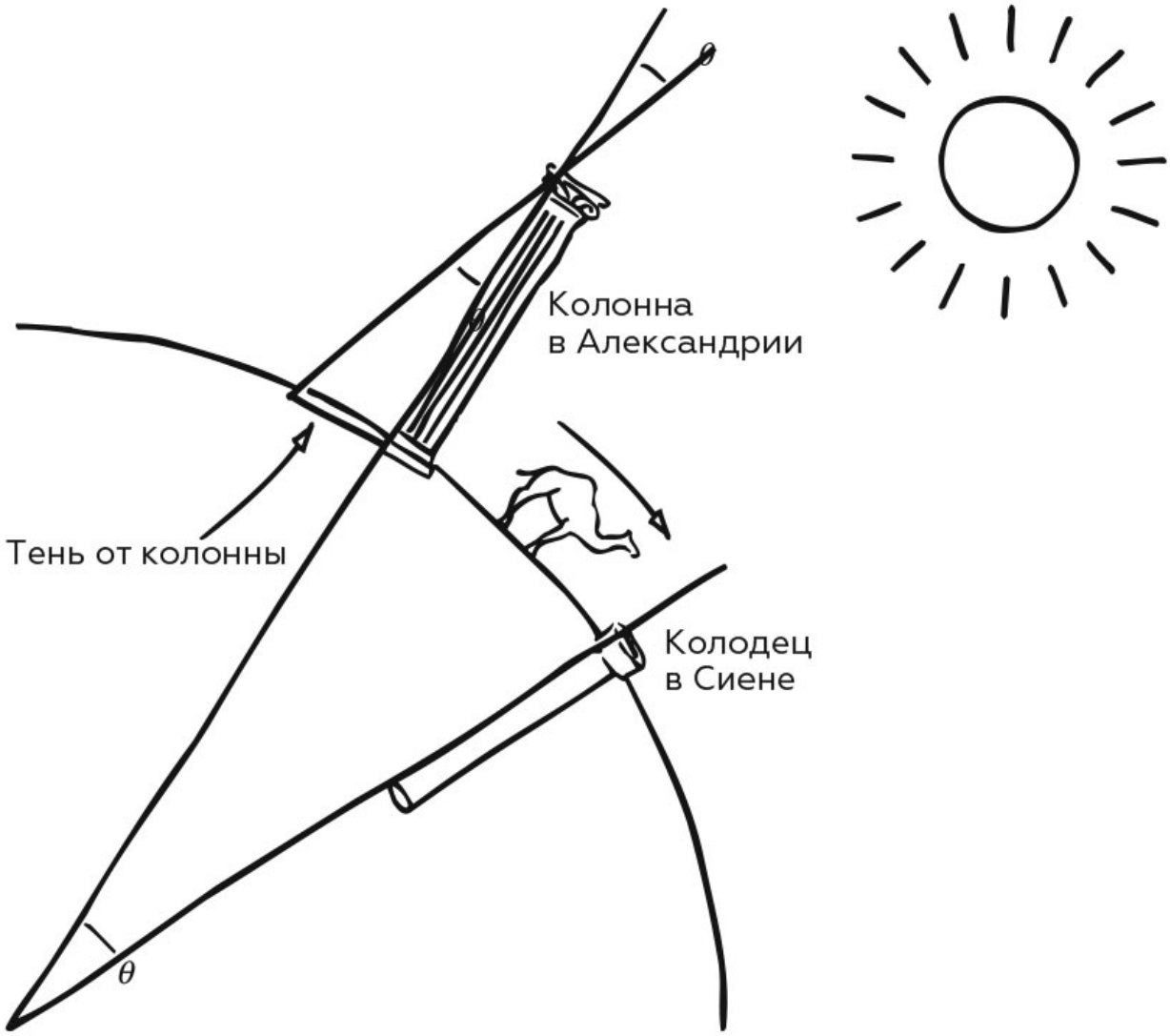
Конические сечения подробно изучал Аполлоний Пергский, перебравшийся из Перги в Малой Азии в Александрию, чтобы учиться у последователей Евклида. Его главный труд, «Конические сечения», написан около 230 г. до н. э. и содержит 487 теорем. Евклид и Архимед

лишь косвенно изучили некоторые свойства конусов, но пришлось написать целую книгу, чтобы собрать все теоремы Аполлония. Одна из важнейших его идей заслуживает особого внимания. Это упоминание о фокусах эллипса (либо гиперболы). Фокусы – две особые точки, характерные для этих двух фигур. Они имеют много свойств, но для нас важно одно: сумма расстояний от любой точки эллипса до обоих его фокусов есть величина постоянная (равная удвоенному большому диаметру эллипса). Фокусы гиперболы имеют то же свойство, но здесь этой же постоянной величине соответствует разница между аналогичными расстояниями.

ЧТО ГЕОМЕТРИЯ ДАЛА ИМ

Примерно в 250 г. до н. э. Эратосфен Киренский использовал геометрию для определения размеров Земли. Он заметил, что в полдень летнего солнцестояния светило находится практически прямо над Сиеной (нынешним Асуаном), поскольку его лучи падают прямо в вертикальную штольню колодца. В тот же день года тень от высокой колонны в Александрии показывает, что солнце отклонилось на $^{1}/_{50}$ от полной окружности (около 7,2°) от вертикали. Греки знали, что Земля круглая, а Александрия расположена практически на одном меридиане с Сиеной, и, согласно геометрии, дуга окружности сферы совпадет с расстоянием от Александрии до Сиены и равна 0,02 окружности Земли.

Эратосфен знал, что верблюду нужно 50 дней на переход от Александрии до Сиены, если он будет проходить каждый день по 100 стадий. Значит, расстояние от Александрии равно 5000 стадий, а длина окружности Земли равна 250 тыс. стадий. К несчастью, мы не можем точно сказать, какова была длина стадии у древних греков. Наиболее вероятной величиной считается 157 м, т. е. окружность Земли по данным Эрастофена равна 39 250 км. Современные данные – 39 840 км.



Как Эратосфен измерил окружность Земли

С помощью конусов греки производили трисекцию угла и удвоение куба. При помощи других специальных кривых, особенно квадратрисы, они также могли найти квадратуру круга.

Древние греки внесли две основные идеи в развитие нашей цивилизации. Первая – систематизированный подход к геометрии. Используя ее как инструмент исследований, греки открыли форму и размеры нашей планеты, ее взаимодействие с Солнцем и Луной и даже сложнейшие связи с остальной Солнечной системой. Они использовали геометрию, прокладывая два туннеля с обоих концов так, чтобы они точно встречались посередине, тем самым вдвое сокращая время строительства. Они умели строить гигантские и мощные механизмы,

исходя из таких простейших принципов, как закон рычага, и в мирных, и в военных целях. Они использовали геометрию для строительства кораблей и в архитектуре. Такие их постройки, как Парфенон, до сих пор показывают, что математика и красота неразрывны. Поразительная элегантность Парфенона – результат искусных подсчетов, использованных архитекторами для преодоления ограничений визуального восприятия и избавления от ошибок в самом основании, на котором построен храм.

Второй важный вклад древних греков – систематическое использование логических заключений для подтверждения формулы: то, что утверждается, может быть доказано. Эта философия породила логическую аргументацию, но свою самую убедительную форму она приобрела в геометрии Евклида и его последователей. Дальнейшее развитие математики было бы невозможным без этого прочного логического фундамента.



Новый стадион Уэмбли. В постройке использованы принципы, открытые в Древней Греции и успешно развитые за много веков

ГИПАТИЯ АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ Около 370–415 гг. н. э.



Гипатия – первая женщина-математик, о которой упоминается в письменных источниках. Она была дочерью Теона Александрийского, тоже математика, и, скорее всего, училась у него. К 400 г. н. э. она возглавила александрийскую школу неоплатонистов и преподавала там философию и математику. Многие исторические источники подтверждают ее учительский талант.

Мы не знаем, насколько талантлива была Гипатия как математик, но она помогла Теону написать комментарии к «Альмагесту» Птолемея, а также участвовала в подготовке новой редакции «Начал», на которой основаны все последующие издания этой книги. Ее перу принадлежат

комментарии к «Арифметике» Диофанта и «Коникам» Аполлония Пергского.

Среди слушателей Гипатии оказалось много последователей новой тогда религии – христианства; в их числе был и Синезий Киренский. Сохранились некоторые его письма к Гипатии с искренними похвалами ее способностям. К несчастью, многие ранние христиане воспринимали философию и науку, преподаваемые Гипатией, как язычество и были недовольны ее влиянием на учеников. В 412 г. у недавно избранного патриарха Александрии Кирилла возникли разногласия с римским префектом Орестом. Гипатию с Орестом связывала тесная дружба, а ее преподавательский и ораторский дар расценили как прямую угрозу христианству. Ученую, обвиненную в разжигании охватившей Александрию смуты, растерзала толпа религиозных фанатиков. Но некоторые источники утверждают, что Гипатия слишком увлеклась политикой и сама навлекла на себя гнев толпы.

Ее гибель была ужасной: женщину буквально расчленили самым варварским способом, используя осколки черепицы (по некоторым источникам – раковины устриц). Затем ее останки сожгли. Возможно, Гипатию обвинили в колдовстве, и тогда это первая публичная казнь ведьмы толпой фанатичных христиан, ведь по закону Константина II ведьму полагалось казнить, «разрывая кости железными крюками».

Оба эти вклада не утратили значения и по сей день. Современное инженерное искусство – компьютеризированное проектирование и производство, например, – невозможно без солидной базы геометрических принципов, открытых в Древней Греции. Любое здание строится так, чтобы не развалиться под своим весом, а многие даже способны выстоять при землетрясениях. Кирпичная башня, подвесной мост, футбольное поле – очередная дань геометрии древних греков.

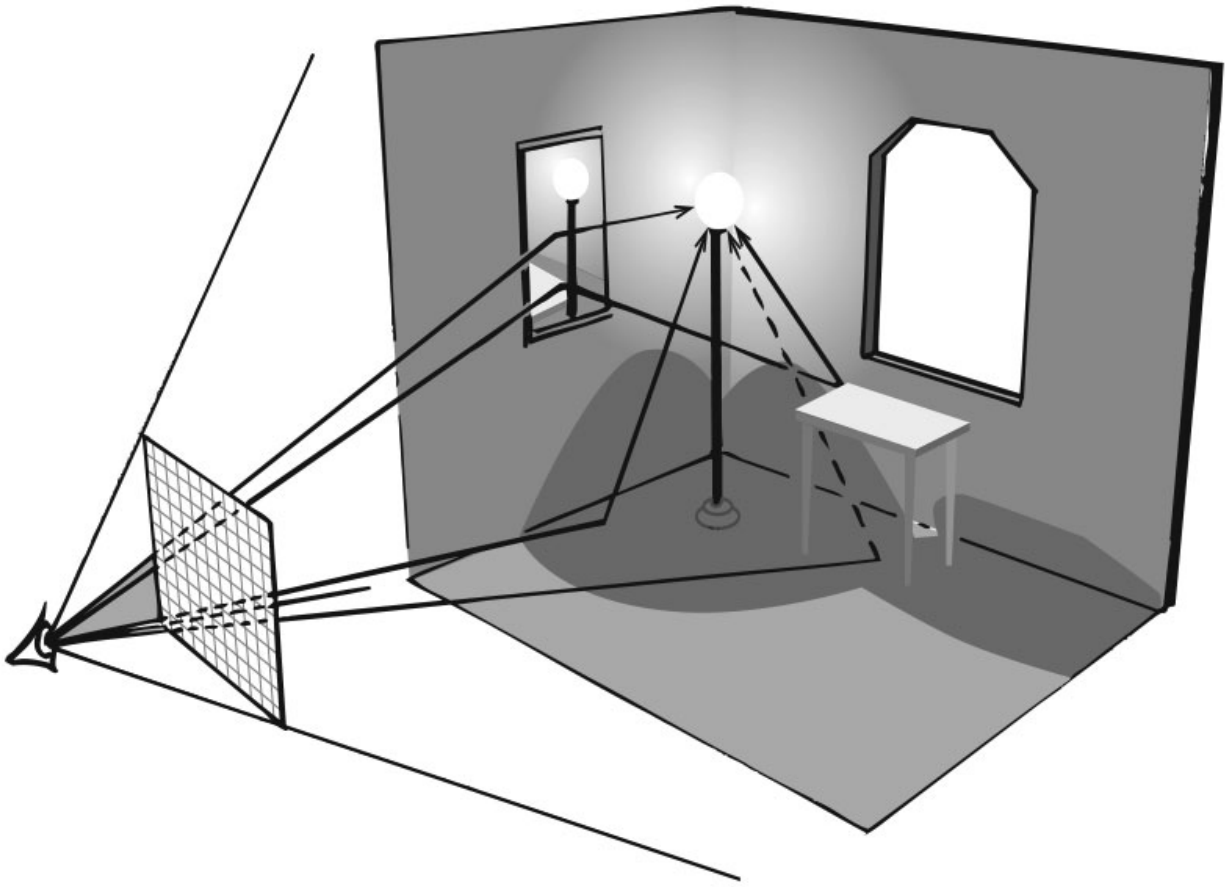
И рациональное мышление, и логические аргументы по-прежнему существуют. Наш мир стал слишком сложным и потенциально слишком опасным, чтобы принимать решения скорее исходя из своих убеждений, чем из реального положения дел. И научный метод был выстроен так

тщательно именно для того, чтобы преодолеть глубоко сидящее в нас желание верить, будто то, что мы якобы знаем и что нас устраивает, истинно. В науке особое внимание как раз направлено на то, чтобы доказать ошибочность таких глубинных убеждений. И только те идеи, что устояли перед самыми жестокими попытками их развенчать, могут быть признаны близкими к правде.

ЧТО ГЕОМЕТРИЯ ДАЕТ НАМ

Формула Архимеда для вычисления объема шара действует и сейчас. Одно из приложений, требующих особенно точного значения π, – стандарты мер и весов, используемые всеми учеными. Например, многие годы метр определялся как длина стержня из определенного вида металла при определенной температуре.

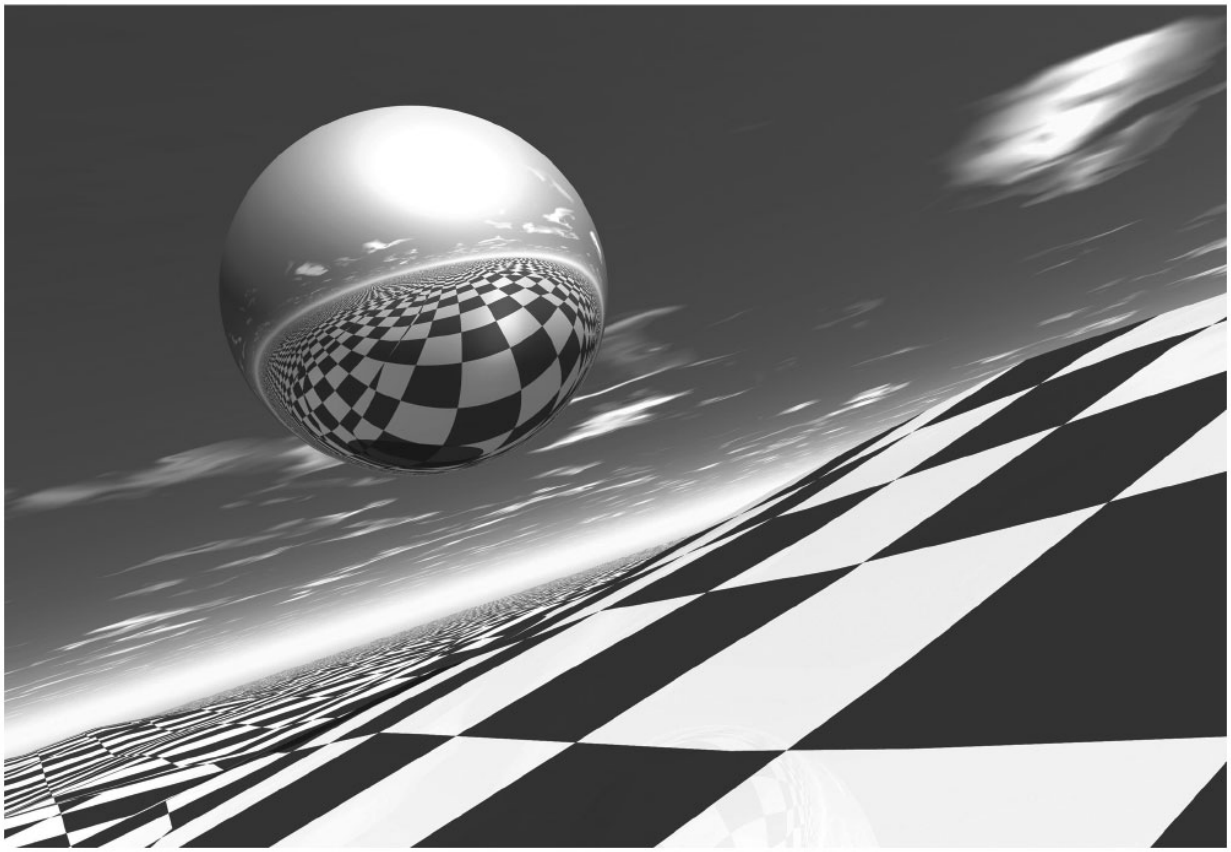
Все больше современных единиц измерения сейчас описывают в таких величинах, как, например, время, необходимое атому определенного элемента для совершения какого-то числа колебаний. Но многие единицы измерений по-прежнему основаны на физических объектах, и масса тела – одна из них. Сегодня один килограмм можно определить как массу одного особого шара из чистого кремния, хранящегося в Париже. Шар был обработан с необычайно высокой точностью. Плотность кремния также была измерена очень точно. А формула Архимеда необходима для вычисления объема шара, который связывает плотность с массой.



Принцип трассировки луча и получение отражения

Еще один пример современного применения геометрии – компьютерная графика. Кинематограф всё шире использует возможности сгенерированного компьютером изображения (computer-generated images, CGI), и часто это необходимо, чтобы включить в картинку отражения – в зеркале, бокале вина, любой поверхности, отражающей свет. Без них теряется реалистичность. Самый эффективный способ этого добиться – трассировать луч. Когда мы смотрим на сцену под каким-то определенным углом, наш глаз реагирует на луч света, отраженный от объекта на сцене и попавший в глаз с этого направления. Мы можем отследить путь этого луча в обратном направлении. От любой отражающей поверхности луч отскакивает, так что исходный и отраженный угол одинаковы (см. рис. выше). Перевод этого геометрического факта в численные выражения позволяет компьютеру

трассировать луч по обратному пути, сколько бы точек отражения ни потребовалось ему, прежде чем он встретит на своем пути что-то непрозрачное (здесь может быть несколько точек – если, например, поставить перед зеркалом бокал вина).



Глава 3. Народы и числа

Откуда взялись привычные нам цифры

Мы так привыкли к нашей системе счисления с использованием десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, что для некоторых настоящим потрясением становится существование иных способов изображения числа. Но даже в наши дни во многих культурах – арабской, китайской, корейской – для десяти цифр применяют другие символы, хотя все комбинируют их для обозначения больших чисел при помощи метода позиционирования (сотни, десятки, единицы). Но разница в обозначениях может быть еще больше. Десять – вовсе не такое уж незаменимое число. Да, оно отражает число пальцев на обеих руках, удобно для счета, но если бы у нас было по семь пальцев или по двенадцать, то очень схожие системы работали бы ничуть не хуже, а то и лучше.

Римские цифры

На Западе многие знакомы по крайней мере с одной альтернативной системой – римскими цифрами. Например, год 2007 в ней выглядит как MMVII. Многие из нас смогут, если им напомнить, назвать по меньшей мере два способа изображения чисел, которые не являются целыми: обычные дроби, как $^{3}/_{4}$, и десятичные, например 0,75. Но есть еще один способ цифровой записи, используемый в калькуляторах: экспоненциальная запись для изображения сколь угодно больших и сколь угодно малых чисел, например 5×10^{9} для пяти миллиардов (часто в виде выражения 5E9 на экране калькулятора) или 5×10^{-6} для пяти миллионных.

Эти системы символов развивались тысячелетиями, и в культурах появлялись самые разные их альтернативы. Мы уже упоминали о шестидесятеричной системе вавилонян (которая, естественно, удовлетворила бы любое существо с 60 пальцами) и более простые, но ограниченные египетские символы со странным делением на доли. Позже в Центральной Америке майя изобрели и использовали двадцатеричную систему. Человечество остановилось на современной символике относительно недавно, и она также прошла через фильтр из традиций и условностей. И хотя математика – наука концепций, а не символов, удачный выбор символов для нее очень важен.

Греческие цифры

Историю символов для изображения цифр продолжили древние греки. Греческая геометрия стоит на порядок выше вавилонской, а вот арифметика – насколько мы можем судить по сохранившимся источникам – нет. Греки даже сделали большой шаг назад: они не воспользовались возможностями позиционной системы счисления. Они предпочли особые символы для чисел, кратных 10 или 100, так что, например, символ для 50 имел мало общего с изображениями 5 или 500.

Первые свидетельства записи чисел в Греции датируются примерно 1100 г. до н. э. Около 600 г. до н. э. они изменились и к 450 г. до н. э. скорректировались еще раз с принятием аттической системы счисления, немного похожей на римскую. В ней использовались символы I, II, III и IIII для чисел 1, 2, 3 и 4. Для числа 5 греки взяли заглавную «пи» (П), возможно потому, что это первая буква в слове «пента» («пять»), 10 изображалось как Δ, первая буква в слове «дека» («десять»), 100 – как Н, первая буква в «гекатон» («сотня»), 1000 – как Ξ, первая буква «хилиои» («тысяча»), 10 000 – как М, первая буква «мюриой» («мириада».). Позже П заменили на Г. Итак, число 2178, например, было бы записано как ΞΞΗΔΔΔΔΔΔΓIII.

Пифагорейцы сделали числа основой своей философии, но мы так и не знаем, как они их изображали. Их одержимость квадратными и треугольными числами позволяет предположить, что они обозначали числа сочетаниями точек. В период классицизма, между 600 и 300 г. до н. э., греческая система снова изменилась, и 27 разных букв их алфавита стали выражать числа от 1 до 900, как в этой таблице.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ

Здесь мы уже видим строчные греческие буквы, дополненные тремя дополнительными, заимствованными из финикийского алфавита: ϛ (стигма), ϙ (коппа) и ϡ (сампи).

Чтобы отличать буквы, обозначающие цифры, греки ставили над ними горизонтальную черту. Для чисел больше 999 значение их символа могло быть умножено на 1000, если перед ним поставить штрих.

Разные способы, предложенные греками, удовлетворяли потребность записывать результаты подсчетов, но не были приспособлены для выполнения самих расчетов (попробуйте, например, представить себе умножение σμγ на ωλδ). Возможно, процесс подсчета был заменен использованием абака или просто камешками в песке, особенно в ранние времена.

Дроби греки записывали несколькими путями. Первый – числитель, за ним один штрих (′), а за ним знаменатель с двумя штрихами (″). Часто знаменатель записывали дважды. Итак, $^{21}/_{47}$ будет выглядеть как:

κα′ μζ″ μζ′,

где κα равно 21, а μζ – 47. Также они использовали дроби, похожие на египетские, где имелся особый символ для $^{1}/_{2}$. Некоторые греческие астрономы, особенно Птолемей, использовали шестидесятиричную вавилонскую систему для точности, но греческие символы для самой

записи чисел. Это вовсе не похоже на то, чем мы пользуемся сегодня. Фактически это полный хаос.

Индийские цифры

Символы, которые используются сейчас в десятеричной системе, часто называют индийско-арабскими, потому что они происходят из Индии, откуда их позаимствовали арабы и позже усовершенствовали.

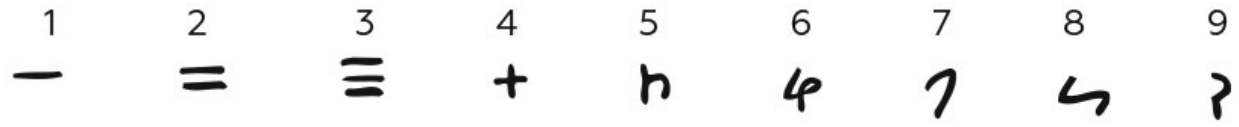
Самые ранние индийские цифры больше всего напоминают символы древних египтян. Например, в текстах кхароштхи, датируемых 400 г. до н. э. – 100 г. н. э., встречаются такие обозначения чисел от 1 до 8:

| || ||| X |X ||X |||X XX

с особым символом для 10. Первые признаки того, что постепенно приняло вид современной системы чисел, обнаружены в текстах брахми, датируемых примерно 300 г. до н. э. В буддийских текстах того времени найдены прообразы позднейших индийских символов для 1, 4 и 6. Но в системе брахми использовались разные символы для умножения на 10 и на 100, т. е. она оказалась ближе к греческой символике. Разница в том, что здесь предпочтение отдавалось символам, а не буквам алфавита. Брахми не была позиционной системой. К 100 г. н. э. сформировалась ее полная запись. Изображения в пещерах и на монетах доказывают, что ею продолжали пользоваться до IV в. н. э.

В IV–VI вв. на большую часть Индии распространилась власть империи Гуптов, и система чисел брахми преобразуется в систему гупта. Затем ее преобразуют в систему нагари. Суть оставалась прежней, менялись лишь символы.

Возможно, индусы изобрели позиционную систему еще в I в. н. э., но первые достоверные свидетельства использования такой записи чисел относятся к 594 г. Существует официальный документ, датированный 346 г. по календарю Чеди, но ряд ученых считают эту дату поддельной. Однако есть общее мнение, что позиционную систему в Индии стали использовать около 400 г. н. э.



Цифры в системе брахми

Однако, поскольку символов было всего девять, от 1 до 9, возникала проблема двусмысленности обозначения. Например, что значит 25? Это может (в нашей системе) значить 25, или 205, или 2005, или 250 и т. д. В позиционной системе, где значение цифры зависит еще и от ее места, очень важно определить положение так, чтобы избежать двусмысленности. Сегодня мы добиваемся этого, используя десятый символ – ноль (0). А у древних цивилизаций ушло немало времени на то, чтобы выявить проблему и решить ее таким путем. Одной из причин была философская: как может ноль быть цифрой, если цифра обозначает количество предметов? Разве ничто можно сосчитать? Другая – практическая: обычно из контекста и так было ясно, что 25 означает именно 25, или 250, или что-то еще.

Незадолго до 400 г. до н. э. – точную дату установить невозможно – вавилоняне ввели специальный символ, чтобы показать пропущенную позицию в обозначениях цифр. Это освободило писцов от необходимости тратить силы на то, чтобы оставлять тщательно выверенное пустое место, и позволило легко и без ошибок определять число даже в случае, если оно было записано небрежно. Но об этом изобретении почему-то забыли (или оно не дошло до поздних культур), пока его заново не открыли индусы. Манускрипт Бакшали, дата написания которого пока точно не установлена, относят к периоду примерно между 200 и 1100 гг. н. э. Он содержит жирную точку. Джайнистский текст Локавибхаага 458 г. использует идею нуля, но не символ. Позиционная система, всё еще без нуля, представлена Арьябхатой в 500 г. н. э. В дальнейшем индийские математики также использовали понятие «ноль», но не символ. Первое бесспорное использование нуля в позиционной системе, датированное 876 г. н. э., появляется на каменных скрижалях Гвалиора.

Брахмагупта, Махавира и Бхаскара

Самыми выдающимися математиками Древней Индии считают Арьябхату (род. 476), Брахмагупту (род. 598), Махавиру (XI в.) и Бхаскару II (род. 1114). Формально их следовало бы причислить к астрономам, поскольку в то время математика считалась одной из астрономических техник. Их математические выкладки были разбросаны в отдельных главах в трудах по астрономии: никто не придавал им статуса самостоятельной науки.

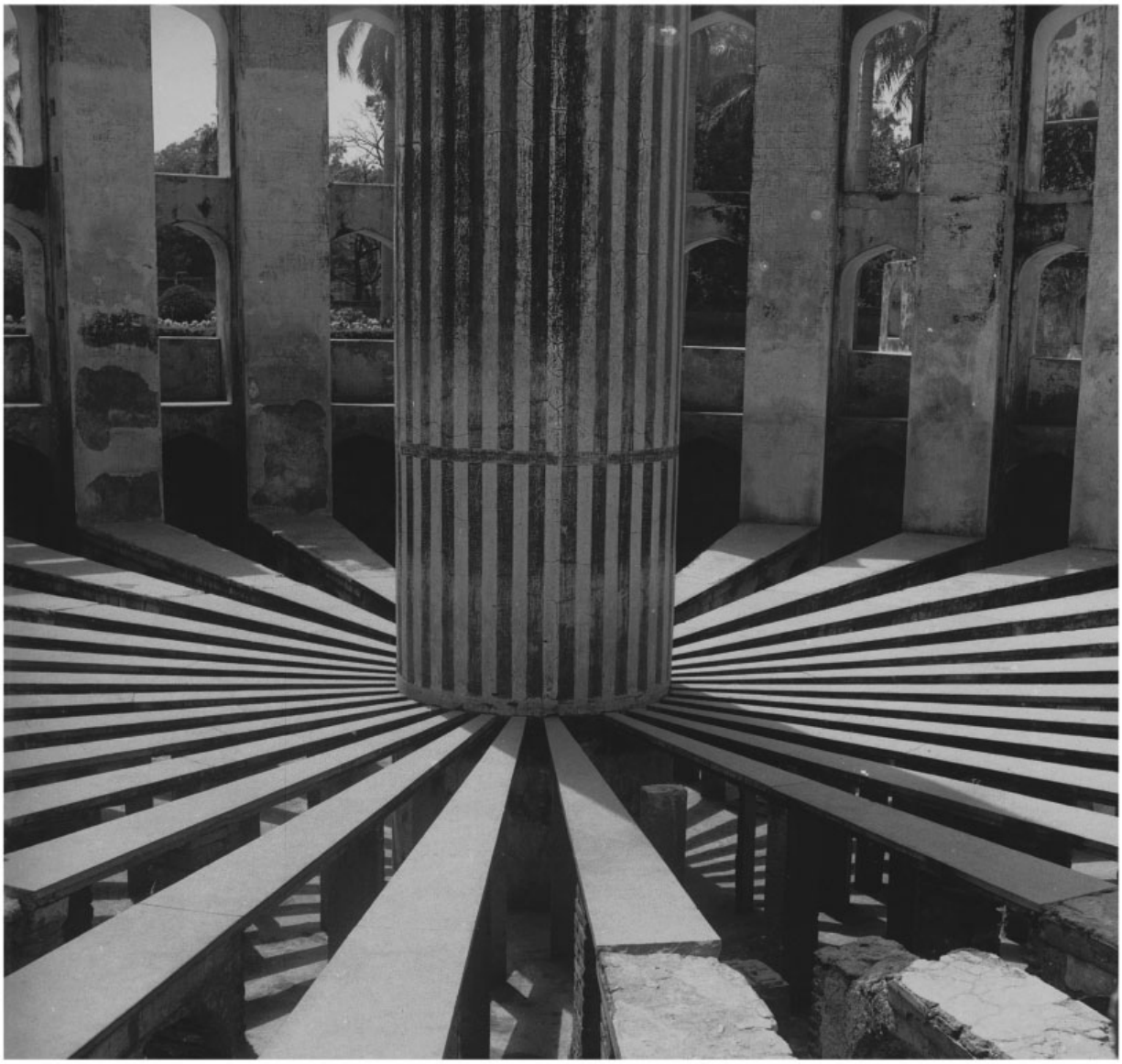
Арьябхата утверждал, что свой труд «Арьябхатия» он создал в 23 года. Несмотря на краткость изложения, посвященный математике раздел его книги напичкан сведениями: буквенная система записи чисел, правила арифметики, методы решения простых и квадратных уравнений, тригонометрия (включая функции синуса и «обращенного синуса» $1 - \cos\theta$). Также ему принадлежит превосходное по точности приближение 3,1416 для числа π.

Брахмагупта – автор двух книг: «Брахма-спхута-сиддханта» и «Кханда-кхадьяка». Первая – самая важная: это астрономический текст с углублением в математику, с арифметическими и словесными эквивалентами простой алгебры. Вторая книга в числе прочего включает замечательную интерполяционную формулу для вычисления синусов на основе небольшого числа известных табулированных значений этой функции: используются значения большего и меньшего углов, чем искомый.

Махавира исповедовал джайнизм и включил много положений этой религии в свой труд по математике, «Ганита-сара-самграха». Эта книга во многом повторяет труды Арьябхаты и Брахмагупты, но идет гораздо дальше и в целом намного сложнее. Она содержит описание дробей, перестановок и комбинаций, решение квадратных уравнений, теорему Пифагора и попытку вычислить периметр эллипса.

Бхаскара (известный также как «учитель») написал три известных труда: «Лилавати», «Биждаганита» и «Сиддханта-широмани» («Венец учения»). Согласно Фейзи, придворному поэту при могольском императоре Акбаре, дочь Бхаскары звали Лилавати. Отец решил составить ей гороскоп и вычислить точное время ее свадьбы. Чтобы придать своим манипуляциям наибольшую эффектность, он поместил

дырявую чашку в таз с водой, так что в самый ответственный момент она должна была погрузиться на дно. Но Лилавати так низко наклонилась над водой, что жемчужинка с ее расшитого бусами платья отскочила и упала в чашку, закупорив дырку. Чашка так и не утонула, а это означало, что день свадьбы Лилавати никогда не наступит. Чтобы утешить дочь в ее горе, Бхаскара написал для нее труд по математике. Правда, легенда не уточняет, что подумала об этом сама девушка.



Древняя обсерватория Джантар-Мантар возле Джайпура. Сегодня очевидно, что дизайнер был прекрасным математиком

«Лилавати» посвящена сложным идеям арифметики и содержит метод девятки, при котором числа заменяют суммой составляющих их цифр, чтобы проверить результат вычислений. Там же приводятся правила проверки делимости на 3, 5, 7 и 11. Четко прописаны функции нуля как самостоятельной цифры. В «Биждаганите» мы находим способы решения уравнений. «Сиддханта-широмани» связана с тригонометрией: здесь есть таблицы синусов и различные тригонометрические соотношения. Репутация Бхаскари была столь прочной, что его книги переиздавали вплоть до начала XIX в.

ЧТО ДАВАЛА АРИФМЕТИКА ИМ

Самый древний из дошедших до нас математических текстов Китая – книга, отредактированная Чжан Цаном и датируемая примерно 100 г. н. э. Типичная задача такова: «Два с половиной пикуля риса были куплены за $^3/_7$ ляна серебра. Сколько пикулей можно купить за 9 лянов?» Предполагаемое решение использует математический принцип, названный средневековыми математиками тройным правилом. В современных обозначениях, взяв за x неизвестное искомое количество, найдем:

$$\frac{x}{9} = \frac{5}{2} : \frac{3}{7},$$

откуда $x = 52^1/_2$ пикуля. Пикуль – мера веса, приблизительно равная 60,5 кг.

Индийская система

Индийская система начала распространяться по арабскому миру еще до того, как полностью сформировалась на родине. Ученый Север Себохт так описывал ее использование в Сирии в 662 г.: «Я опущу все дискуссии о науке в Древней Индии ‹…› об их превосходных открытиях в астрономии ‹…› и других ценных методах вычисления ‹…› я хочу лишь сказать, что все эти вычисления были сделаны при помощи девяти цифр».

В 776 г. при дворе Великого халифа появляется путешественник из Индии и демонстрирует свои способности в сиддханта – методе подсчетов, а также в тригонометрии и астрономии. Судя по всему, основой его вычислений служила «Брахма-спхута-сиддханта» Брахмагупты, написанная в 628 г., но в любом случае его труд был прекрасно переведен на арабский.

На первых порах индийской системой пользовались только ученые, и лишь позже этот метод стал распространяться в арабском деловом сообществе, а потом и в быту, вплоть до 1000 г. Но изданный в 825 г. труд Аль-Хорезми «Книга об индийском счете» принес индийской системе широкую известность в арабском мире. Четырехтомный труд другого математика, Аль-Кинди, «О применении индийской арифметики» (830) укрепил уверенность ученых в возможности записать любое число при помощи всего десяти цифр.

Темные века

Арабский и индийский мир делали выдающиеся шаги как в математике, так и в остальных науках, а Европу охватил период относительного застоя, хотя Средние века всё же нельзя назвать темными временами в полном смысле. Было заметно продвижение вперед, но медленное и будто нерешительное. Скорость изменений стала нарастать с момента, когда в Европе распространились научные открытия Востока. Из европейских стран Италия расположена ближе всего к арабскому миру, и вполне естественно, что достижения соседей, умудренных в математике, попадали в Европу через Италию. Венеция, Генуя и Пиза уже в то время были важными центрами торговли, и купеческие корабли ходили отсюда до Северной Африки и восточного побережья Средиземноморья. Они активно обменивали европейскую шерсть и древесину на шелк и специи.

Помимо торговли в прямом смысле – материальными ценностями, – не менее активно велись и «продажи» научных идей. Именно по торговым путям в Европу проникли арабские открытия в математике и других науках, зачастую передаваемые из уст в уста. Благодаря торговле Европа добилась процветания, на смену бартеру пришли деньги, система расчетов, вкладов и пошлин стала намного сложнее. Эквивалентом карманному калькулятору того времени был абак – простые счеты, где костяшки на проволоке изображали числа. Но эти числа требовалось еще и записать на бумаге для легитимности сделок и составления отчетов. Купцы отчаянно нуждались в надежном способе записи чисел, а также в простых и быстрых методах вычислений.

Влиятельной фигурой был в то время Леонардо Пизанский, более известный под прозвищем Фибоначчи, чей труд «Книга абака» был опубликован в 1202 г. (По-итальянски «abbaco» означает «вычисление», так что не стоит путать его с абаком – латинскими счетами.) В своей книге Леонардо познакомил Европу с индийско-арабскими обозначениями цифр.



Эволюция западных символов цифр

В «Книге абака» есть одно нововведение, сохранившееся до наших дней: горизонтальная черта в дроби. Индусы использовали те же символы, но без черты; судя по всему, первыми ее предложили арабы. Фибоначчи применял ее очень часто, но его подход отличается от современного. Например, он мог одну черту использовать как элемент сразу нескольких самостоятельных дробей.

Поскольку дробям в нашей истории отводится крайне важное место, стоит сделать несколько уточнений. В такой дроби, как $\frac{3}{4}$, 4 в нижней половине показывает, что нужно поделить единицу на четыре равные части, а 3 в верхней половине – что нужно выбрать три из этих единиц. Более формально: 4 – знаменатель, а 3 – числитель. Для удобства работы дроби несколько видоизменились: три четверти изображают как 3/4 или $^{3}/_{4}$. Горизонтальную черту заменила косая, или слеш.

ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКИЙ (ФИБОНАЧЧИ) 1170–1250



Леонардо родился в Италии и вырос на севере Африки, где его отец Гильермо трудился дипломатом, обеспечивая мирную торговлю с Беджаей (современным Алжиром). Сопровождая отца в деловых поездках, мальчик быстро усвоил арабскую систему записи чисел и оценил ее значение. В 1202 г. в своей «Книге абака» он пишет: «Когда отец мой был назначен на должность таможенного чиновника, заведовавшего в Беджае делами стекавшихся к нему пизанских торговцев, он в отрочестве моем призвал меня к себе и предложил несколько дней учиться счетному искусству, сулившему немало удобств и выгод для моего будущего. Наученный благодаря мастерству учителей основам индийского счета, я приобрел большую любовь к этому искусству».

Его книга открывает для Европы индийско-арабский способ записи чисел и содержит почти все арифметические и алгебраические сведения того времени, изложенные исключительно полно и глубоко, а также дает примеры решения практических задач, в частности связанных с торговлей. И хотя прошло еще несколько веков, пока индийско-арабские символы окончательно вытеснили из обихода привычный абак, преимущества этой стройной системы записи и подсчетов вскоре стали очевидны.

Леонардо также известен под прозвищем Фибоначчи (от Filius Bonacci, или «сын Боначчи»), но это имя не появлялось в письменных трудах до XVIII в. Псевдоним был дан ему позже, предположительно Гийомом Либри.

Мы не так часто прибегаем на практике к обыкновенным дробям. Гораздо чаще используются десятичные: например, π = 3,14159 – не точно, но вполне достаточно для большинства подсчетов. Стоило бы сделать рывок к десятичным дробям, но мы договорились следовать за идеей, а не хронологией, и придется перейти к дальнейшим фактам. Итак, переносимся в 1585 г., когда Вильгельм Оранский избрал фламандца Симона Стевина советником своего сына Морица, графа Нассауского.

Воспользовавшись возможностью, Стевин сумел сделать хорошую карьеру, став инспектором водных сооружений, главным военным квартирмейстером и под конец – министром финансов. Он быстро осознал необходимость в точных процедурах бухгалтерского учета и обратился к итальянским математикам эпохи Возрождения, а также к переложению для Европы индийско-арабской системы счисления, сделанному Леонардо Пизанским. Он находил вычисления при помощи простых дробей громоздкими и неудобными и предпочел бы более точную и аккуратную систему, предложенную вавилонянами, – если бы в ее основании не находилось число 60. Стевин попытался найти вариант, сочетавший лучшие черты подходов, и изобрел десятеричный аналог вавилонской системы – десятичные дроби.

Стевин опубликовал арифметику десятичных дробей, а также пылкую и аргументированную статью о полезности их применения: «Все необходимые для делопроизводства вычисления можно будет делать с помощью целых чисел, без добавления дробей».

В его системе еще не использовалась знакомая нам запятая, но она очень скоро приняла современный вид. Там, где мы бы написали 5,7731, Стевин писал 5⓪7①7②3③1④. Символ ⓪ обозначал целое число, ① – одну десятую, ② – одну сотую и т. д. Привыкнув к этой системе, люди вскоре отказались от символов ①, ② и т. д., оставив только ⓪, который сократился и упростился до обычной запятой.

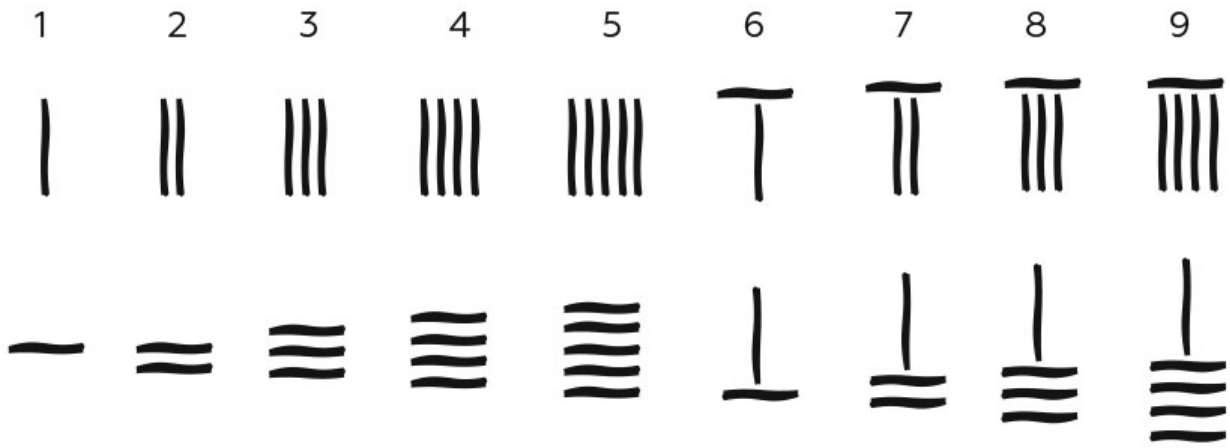
Отрицательные числа

Математики все числа, употребляемые при счете, называют *натуральными*. Добавив к ним отрицательные числа, мы получим множество целых чисел. *Рациональные числа* – положительные и отрицательные дроби, *вещественные числа* (действительные) – положительные и отрицательные десятичные дроби со сколь угодно большим числом цифр после запятой.

Как же отрицательные числа вошли в историю?

На заре первого тысячелетия в Китае вместо абака пользовались системой счетных палочек. Чтобы изображать числа, их выкладывали группами.

Верхний ряд на картинке показывает вертикальные палочки, представляющие единицы, сотни, десятки тысяч и т. д., соответствовавшие их положению в ряду символов. Нижний – горизонтальные палочки, представляющие десятки, тысячи и т. д. Здесь мы имеем два чередующихся типа. Подсчеты велись с помощью обоих типов палочек.



Счетные палочки древних китайцев

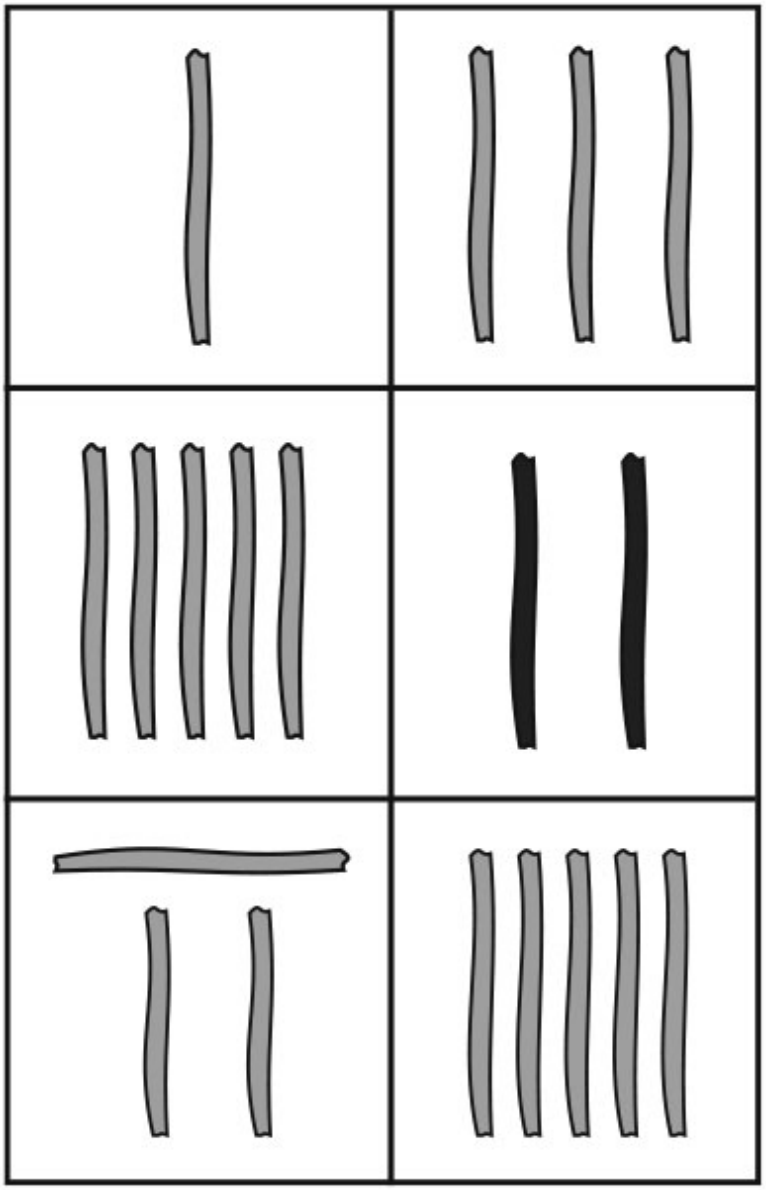
Для решения системы двух линейных уравнений китайские математики должны были разложить палочки на столе. Они использовали красные для чисел, которые собирались прибавлять, и черные – для вычитания. И тогда для решения системы уравнений, которую мы бы записали так:

$3x - 2y = 4$

$x + 5y = 7$,

они бы выложили в виде двух колонок на столе: одно с числами 3 (красные), 2 (черные), 4 (красные) и другое – 1 (красная), 5 (красные), 7 (красные).

Красно-черная система обозначения не приводит нас к отрицательным числам, это пока всего лишь операция вычитания. Однако она уже близка к самой «чжэн фу шу» – концепции положительных и отрицательных чисел. Здесь отрицательное число представлялось с использованием того же набора палочек, что и для положительных, с дополнительной отметкой в виде косой палочки над цифрой.



Уравнения в китайском стиле. Серыми изображены красные палочки

Согласно Диофанту, все числа могут быть только положительными. Он отвергал возможность существования отрицательных решений для уравнений. Но индийские математики считали отрицательные числа очень удобными для обозначения долгов в финансовых подсчетах: задолжать кому-то некоторую сумму в финансовом смысле считалось худшим вариантом, чем вообще не иметь денег. Ясно, что долг должен быть меньше 0. Если у вас было три фунта, а вы заплатили два, то у вас осталось 3–2 = 1 фунт. Иными

словами, если у вас был долг два фунта, а вы получили три, ваша чистая прибыль составляет –2 + 3 = 1. Бхаскара замечает, что если конкретная задача имеет два решения, 50 и –5, то второе его категорически не устраивает: «Его не следует учитывать, потому что люди не приемлют отрицательных решений».

Несмотря на эти препятствия, мало-помалу отрицательные числа завоевывали себе место. И в реальных вычислениях их необходимо было как-то обозначать. Иногда они ставили ученых в тупик, иногда показывали долги, иногда обозначали движение вниз, а не вверх. Но какой бы ни была интерпретация, они превосходно служили арифметике и оказались так полезны в подсчетах, что глупо было бы от них отказываться.

Арифметика бессмертна

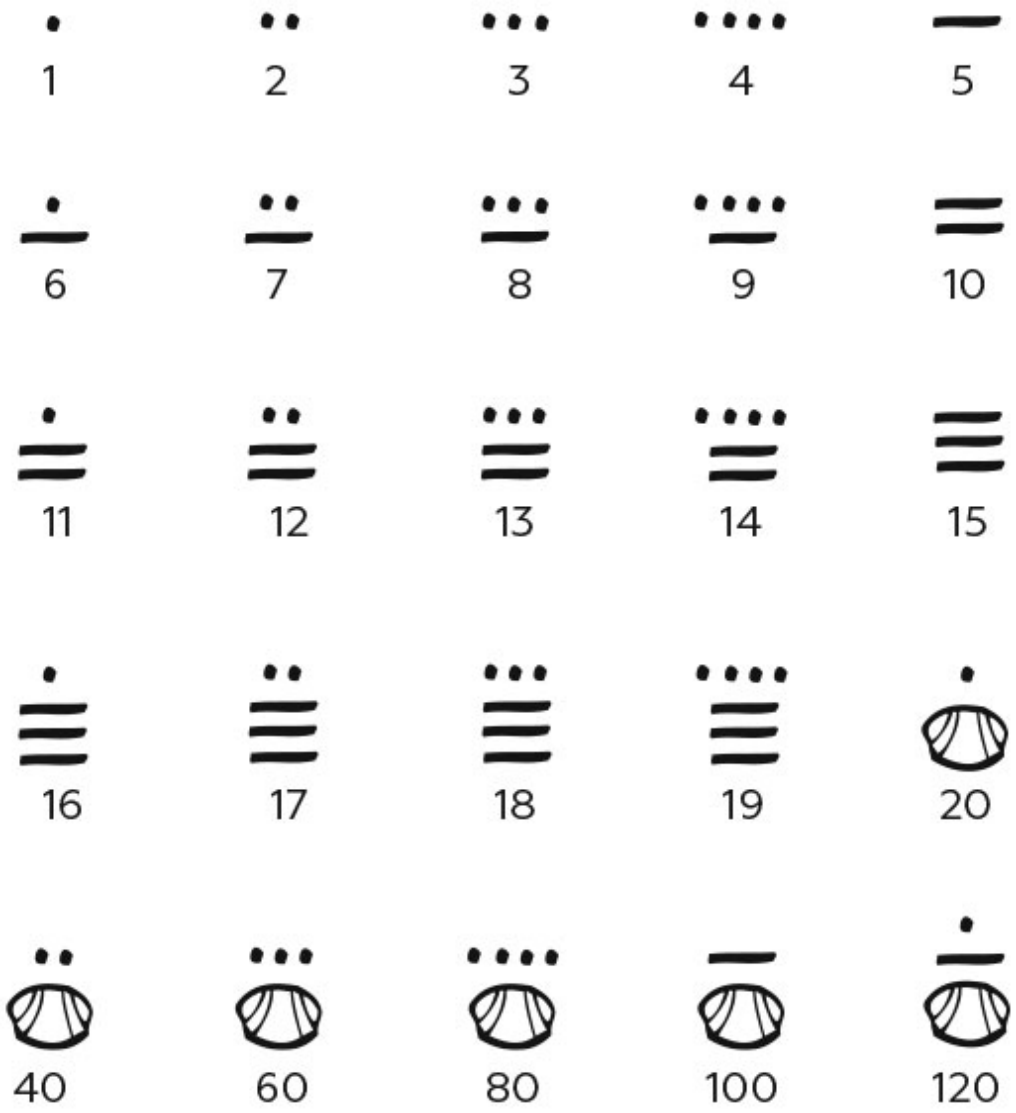
Мы так привыкли к нашей числовой системе, что готовы считать ее единственно возможной, по крайней мере единственной удобной. Но она развивалась тяжело, со множеством тупиковых ветвей, на протяжении тысячелетий. А еще у нее было много альтернатив, даже в таких ранних культурах, как майя. Иные обозначения для цифр 0–9 остаются в ходу в ряде стран. Да и в наших компьютерах внутренняя система счисления двоичная, а не десятичная: специально встроенные в них программы преобразуют числа в десятичную форму, прежде чем выводят их на экран или принтер.

ЦИФРЫ ДРЕВНИХ МАЙЯ

Замечательная система счисления, основанная вместо 10 на 20 символах, была изобретена народом майя, населявшим Южную Америку около 1000 г. н. э. В двадцатеричной системе символы, эквивалентные нашим цифрам 347, будут обозначать следующее:

$3 \times 400 + 4 \times 20 + 7 \times 1$

(поскольку $20 \times 20 = 400$), что равно 1287 в нашей системе обозначения. Настоящие символы майя показаны сверху.



Скорее всего, переход ранних цивилизаций к десятичной системе обусловлен тем, что у человека на руках десять пальцев. Тогда логично предположить, что 20 цифр майя соответствуют 20 пальцам на руках и ногах.

Наша жизнь теперь неотделима от компьютеров, так стоит ли по-прежнему учить детей арифметике? Да, и по многим причинам. Кому-то надо уметь конструировать и собирать калькуляторы и компьютеры и обучать их командам. Для этого необходимо *понимать* арифметику: как и почему она работает, а не только как ею пользоваться. И если ваши арифметические способности сводятся к чтению чисел на экране калькулятора, скорее всего, вы и глазом мигнуть не успеете, как

прозеваете чек с ошибкой в супермаркете. Без владения базовыми арифметическими действиями вы останетесь профаном во всем, что касается математики. Нашей цивилизации очень скоро придет бесславный конец, если мы начнем преподавать арифметику выборочно: ведь нельзя определить по ребенку в возрасте пяти лет, станет ли он инженером или ученым или хотя бы банковским служащим либо бухгалтером.



Конечно, раз вы уже владеете всей премудростью арифметики, использование калькулятора сэкономит кучу времени и сил. И всё же, как вы не станете учиться ходить, опираясь на костыль, так вы не сможете постичь законы взаимодействия чисел, полагаясь только на калькулятор.

ЧТО АРИФМЕТИКА ДАЕТ НАМ

Мы постоянно пользуемся арифметикой и в быту, и в торговле, и в науке. До появления электронных калькуляторов и компьютеров мы вдобавок делали подсчеты вручную: при помощи ручки и бумаги, или таких простых приспособлений, как счеты, или арифметических таблиц готовых расчетов (например, таблиц сложения и умножения). Сегодня большинство арифметических действий происходит вне поля зрения, в электронном виде: например, в супермаркете вам выдадут чек с суммой покупки и сдачу, а банк сообщит об изменении суммы на счете – без специального обращения к специалистам. Общее «количество» арифметических действий, происходящих в повседневной жизни каждого из нас, весьма впечатляет.

Арифметические подсчеты в компьютере происходят не в десятичном формате. Используется двоичная система. Это значит, что вместо наших единиц, десятков, сотен, тысяч и т. д. компьютеры используют 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и т. д. – степени двойки, где каждое число вдвое больше предыдущего (именно поэтому карта памяти для вашей цифровой камеры имеет нелепую на первый взгляд емкость в 256 мегабайт). Для компьютера число 100 будет разбито по степеням двойки как 64 + 32 + 4 и сохранено в виде 1100100.

Глава 4. Соблазнение неизвестным

Коварный икс

Использование символов в математике выходит далеко за пределы обозначения цифр. Это становится ясно даже при поверхностном знакомстве с любым математическим текстом. Первый важнейший шаг к сложным символьным выкладкам, за пределы изображения цифр, был совершен в области решения задач. Многие древние тексты, вплоть до периода Старого Вавилона, рассказывают читателям о некоем неизвестном количестве, а потом предлагают его определить. Стандартная форма задачи (в литературном изложении) на вавилонских табличках такова: «Я нашел камень, но не знаю его веса». Предоставив дополнительную информацию – «когда я добавил второй камень в половину веса первого, их общий вес составил 15 джин», – ученику предлагают вычислить вес исходного камня.

Алгебра

Такие задачи дали толчок к развитию области знаний, которую мы называем алгеброй: где числа представлены буквами. Неизвестная величина по традиции называется x, а сопутствующие условия излагаются в виде математических формул. Ученикам предлагается с помощью стандартных методов вычислить значение x по формулам. Например, упомянутую выше вавилонскую задачу мы запишем в виде уравнения $x + {}^1/_2\, x = 15$, и мы должны узнать, как вычислить $x = 10$.

На школьном уровне алгебра – ветвь математики, в которой неизвестные числа обозначены буквами, арифметические действия – специальными символами, а главная задача – вывести неизвестные из уравнений. Типовая задача школьной алгебры – поиск x, заданного в уравнении $x^2 + 2x = 120$. Это квадратное уравнение имеет одно положительное решение, $x = 10$.

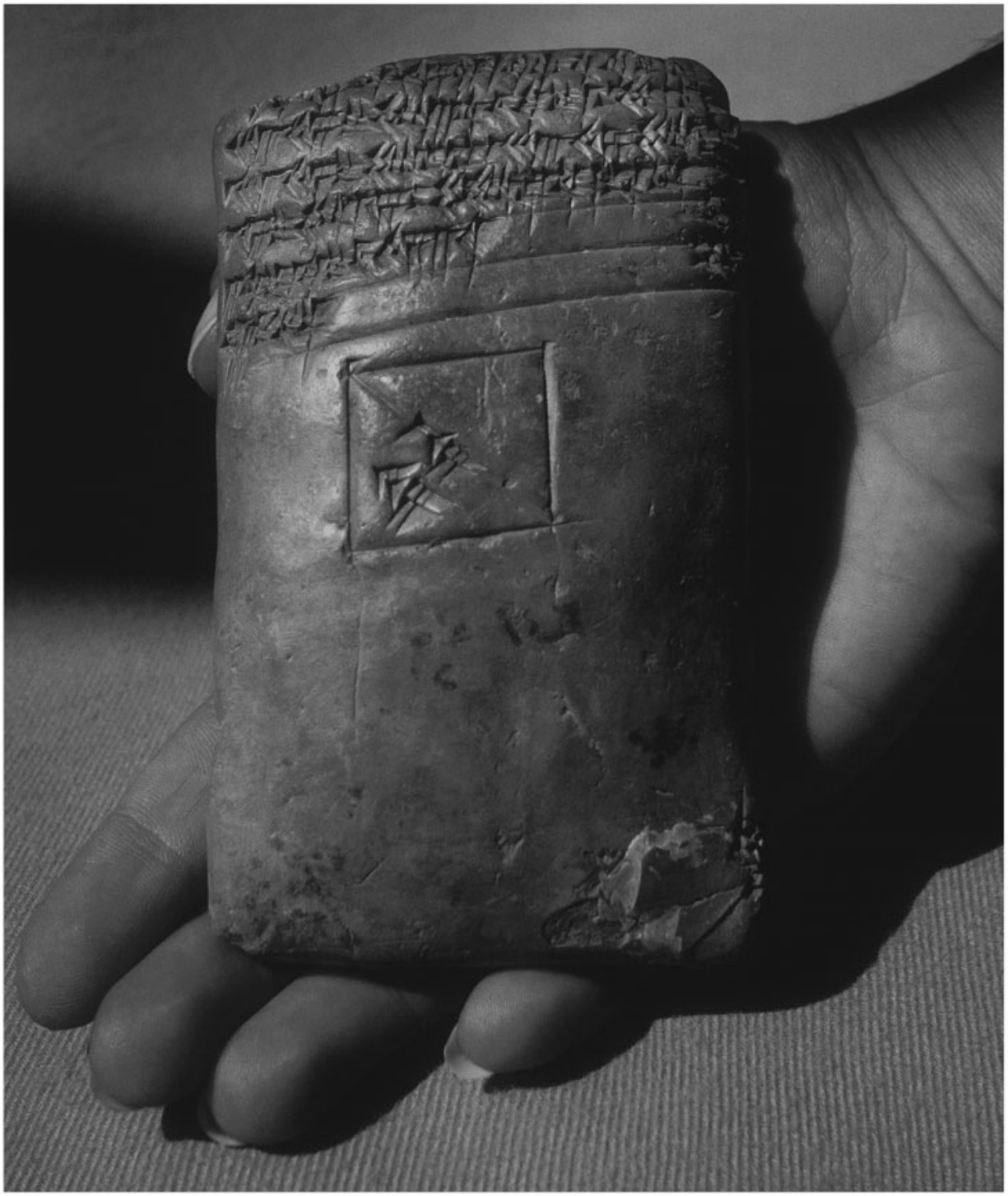
Здесь $x^2 + 2x = 10^2 + 2 \times 10 = 100 + 20 = 120$. Также оно имеет одно отрицательное решение, $x = –12$.

Тогда $x^2 + 2x = (–12)^2 + 2 \times (–12) = 144 – 24 = 120$. Древние принимали положительные результаты, но не отрицательные. Мы признаем оба варианта: во многих задачах отрицательные числа имеют реальное значение и соответствуют физически возможным ответам. Вдобавок математика становится проще, если принять их существование.

В продвинутой математике использование символов для обозначения чисел сводится к ничтожной части этой области знаний, отражающей ее первые шаги. Алгебра рассказывает о свойствах выражений и уравнений с использованием буквенных символов, и речь уже о структуре и форме, а не только о числе. Этот более широкий взгляд развился в период, когда математики пошли дальше простой алгебры школьного уровня. Вместо того чтобы пытаться решать конкретные уравнения, они предпочли всмотреться в глубинные структуры процесса решения.

Как развивалась алгебра? Сначала это были задачи и методы. Со временем она приобрела символическую систему обозначений, которую мы считаем ее главным достоинством. Было много систем

обозначений, но постепенно одна вытеснила конкурентов. Само название «алгебра» тоже возникло в процессе, и оно имеет арабские корни (об этом говорит начальное «аль», арабский эквивалент артикля the, что и указывает на происхождение).



Табличка из Старого Вавилона с клинописной записью алгебро-геометрической задачи

Уравнения

То, что мы сейчас называем решением уравнений (когда неизвестная величина должна быть найдена на основе имеющейся информации), почти так же старо, как и арифметика. Есть косвенные доказательства тому, что вавилоняне умели решать весьма сложные уравнения еще в 2000 г. до н. э., и прямые свидетельства решения несложных задач в виде клинописных табличек, датируемых примерно 1700 г. до н. э.

Сохранившаяся часть таблички YBC 4652, из периода Старого Вавилона, содержит 11 простых задач для решения, а по сопроводительному тексту можно понять, что изначально их было двадцать две. Вот типичный вопрос:

«Я нашел камень, но не знаю его вес. После того как я взял его вес шесть раз, добавил 2 *джина* и добавил одну треть от одной седьмой [этого нового веса], умноженной на 24, я взвесил его. В результате получилось 1 *ма-на*. Сколько весил исходный камень?»

Вес 1 *ма-на* равен 60 *джинов*.

В современных обозначениях мы примем за x вес исходного камня в *джинах*. Тогда решение будет выглядеть так:

$$(6x + 2) + {}^{1}/_{3} \times {}^{1}/_{7} \times 24(6x + 2) = 60,$$

и стандартные алгебраические методы дают результат $4\ {}^{1}/_{3}$ *джина*. На табличке есть этот ответ, но нет решения, объясняющего, как он был получен.

Явно его получили не с использованием символических методов, похожих на современные, поскольку ниже в табличке прописаны методы решения с точки зрения типичных учебных примеров: «Поделите пополам это число, добавьте сумму этих двух, извлеките квадратный корень…» и т. д.

Эта задача, заодно с прочими на табличке YBC 4652, представляет то, что сейчас мы зовем *линейными* уравнениями: неизвестное x входит в него только в первой степени. Любое из линейных уравнений можно представить в виде

$ax + b = 0$,

с решением $x = –b/a$. Но в древние времена, когда не было понятий отрицательных чисел и символьных операций, поиск результата был не так прост. Даже сейчас некоторые школьники не сразу решат задачи с таблички YBC 4652.

Интереснее квадратные уравнения, в которых неизвестное возведено во вторую степень – квадрат. В современной формулировке это уравнение вида:

$ax^2 + bx + c = 0$,

и здесь тоже есть стандартная формула для вычисления x. Подход древних вавилонян к этим уравнениям изложен в задаче на табличке BM 13901:

«Я семь раз добавил сторону моего квадрата и 11 раз – его площадь, [получив] 6;15».

Здесь 6;15 – упрощенная форма вавилонской шестидесятиричной системы и означает 6 плюс $^{15}/_{60}$, или 6 $^{1}/_{4}$ в современных обозначениях. Предлагаемое решение начинается так:

«Запиши 7 и 11. Умножь 6;15 на 11, [получи] 1,8;45. Раздели 7 на 2, [получи] 3;30 и 3;30. Перемножь, [и получи] 12;15. Сложи [это] с 1,8;45, [получи] результат 1,21. Это есть квадрат 9. Вычти 3;30, которое ты перемножал, из 9. Результат вычисления 5;30. Величину, обратную к 11, нельзя найти. На что надо умножить 11, чтобы получить 5;30? [Ответ равен] 0;30, сторона квадрата равна 0;30».

Обратите внимание: табличка указывает читателю, что делать, но не почему. Это не более чем алгоритм. Кому-то необходимо было понять, как это работает, прежде всего чтобы записать способ решения. Но, будучи однажды открытым, он становится доступным каждому обученному. Мы так и не знаем, то ли вавилоняне заучивали алгоритм наизусть, то ли должны были сами объяснять, почему он работает.

Приведенный выше алгоритм выглядит размытым, однако интерпретировать его всё же проще, чем мы могли бы подумать. И здесь очень помогает использование рациональных чисел: мы сразу понимаем, какие правила пошли в ход. Чтобы обнаружить их, достаточно просто привести всё к системе. В современной записи имеем:

$$a = 11,\ b = 7,\ c = 6;15 = 6\,^{1}/_{4}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$ax^2 + bx = c,$$

соответственно с данными значениями для *a*, *b* и *c*. Нам нужно найти *x*. Вавилонское решение диктует нам следующее.

1. Умножить *c* на *a*, чтобы получить *ac*.
2. Разделить *b* на 2, чтобы получить $^{b}/_{2}$.
3. Возвести в квадрат $^{b}/_{2}$, чтобы получить $^{b2}/_{4}$.
4. Сложить это с *ac*, что даст $ac + {}^{b2}/_{4}$.
5. Извлечь из этого квадратный корень, чтобы получить

$$\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}.$$

6. Вычесть из этого $^{b}/_{2}$, чтобы получить

$$\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}.$$

7. Разделить это на *a*, и ответ будет

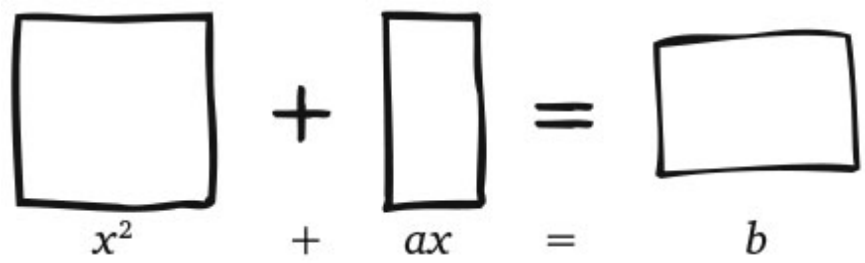
$$x = \frac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Это эквивалентно формуле

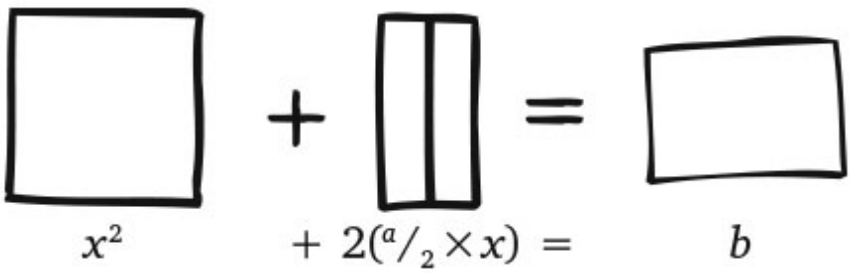
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вавилоняне явно отдавали себе отчет в том, что их решения являются неким обобщением. Приведенный пример слишком сложен, и его можно считать специальным, подобранным только для данной задачи.

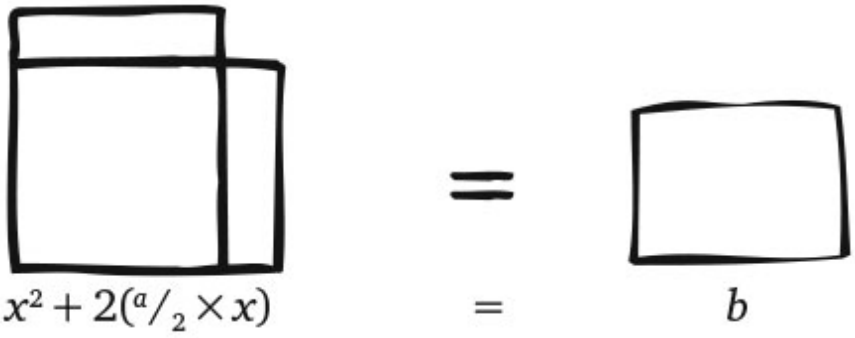
Как относились к своему методу сами вавилоняне и что о нем думали? Похоже, должна была быть некая упрощенная идея, лежавшая в основе такого сложного процесса. Возможно, хотя напрямую это и не доказано, что они изобрели некую геометрическую идею, дополняющую квадрат. Алгебраическая версия этого метода также рассматривается в наши дни. Для ответа на этот вопрос мы его для ясности запишем в виде $x^2 + ax = b$ и приведем на рисунке его геометрическую интерпретацию.



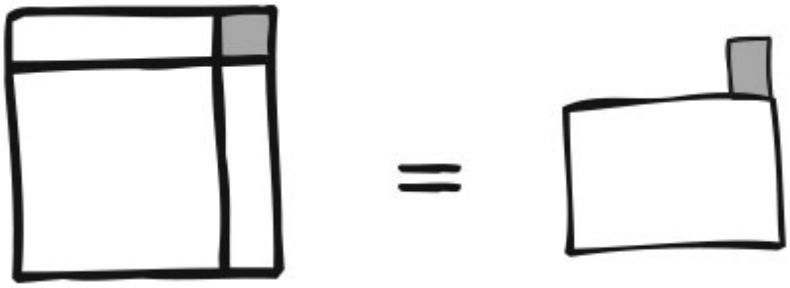
Здесь квадрат и первый прямоугольник имеют высоту x; их ширина равна соответственно x и a. Меньший прямоугольник имеет площадь b. По вавилонскому рецепту мы легко делим первый прямоугольник на две половины:



Два новых прямоугольника мы можем переместить и совместить с краями квадрата:



Получившаяся слева фигура так и просится быть дополненной до большого квадрата, с добавлением затененного квадрата.



Чтобы уравнение оставалось верным, такой же квадрат должен быть добавлен и к левой фигуре. Но теперь мы определяем площадь последней как квадрат стороны ($x + {}^a/_2$), и геометрическая схема эквивалентна алгебраическому выражению:

$$x^2 + 2({}^a/_2 \times x) + ({}^a/_2)^2 = b + ({}^a/_2)^2.$$

Поскольку левая часть – квадрат суммы, мы можем переписать это так:

$$(x + {}^a/_2)^2 = b + ({}^a/_2)^2,$$

чтобы потом извлечь из него квадратный корень:

$$x + {}^a/_2 = \sqrt{b + ({}^a/_2)^2},$$

и наконец переписать в виде

$$x = \sqrt{b + (a/2)^2} - a/2.$$

что в точности повторяет вавилонский вариант решения.

Ни на одной из табличек не найдено подтверждения гипотезе, что вавилоняне воспользовались этой геометрической схемой для получения своего алгоритма. Но такое объяснение не лишено смысла, так как косвенно подтверждается схемами, изображенными на других табличках.

Аль-джабр

Слово «алгебра» происходит от арабского «аль-джабр» – термина, использованного Мухаммадом ибн Мусой аль-Хорезми, ставшим известным в 820 г. В его работе «Краткая книга об исчислении аль-джабры и аль-мукабалы» изложены основные методы решения уравнений с неизвестными.

Аль-Хорезми использует слова, а не символы, но его методы узнаваемы и практически не отличаются от тех, которым нас учат сегодня. «Аль-джабр» означает «восполнение равных количеств к обеим сторонам уравнения». Так, мы начинаем:

$$x - 3 = 5$$

и выводим, что

$$x = 8.$$

Фактически мы делаем свой вывод, прибавляя по 3 к каждой из сторон. «Аль-мукабала» имеет два смысла. Вот его особый смысл: «вычитание равных количеств из обеих сторон уравнения», чем мы и занимаемся, переходя от

$$x + 3 = 5$$

к ответу

$$x = 2.$$

Но есть и более общий смысл: «восстановление», т. е. приведение подобных членов в обеих частях уравнения. Аль-Хорезми дает общие правила для шести видов уравнений, с помощью которых можно решить все линейные и квадратные уравнения. В его работах представлены идеи элементарной алгебры, но без использования символов.

Кубические уравнения

Итак, вавилоняне умели решать квадратные уравнения, и их метод был по существу таким же, какому нас учат сегодня. Алгебраически самое сложное в нем – квадратный корень, и присутствует несколько стандартных арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление). Ожидаемым следующим шагом становятся кубические уравнения, включающие неизвестное в кубе. Их мы пишем так:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

где x – неизвестное, а коэффициенты a, b и c – известные. Но до появления идеи отрицательных чисел математики классифицировали кубические уравнения по нескольким отдельным видам, так что, например, выражения $x^3 + 3x = 7$ и $x^3 – 3x = 7$ расценивались как совершенно разные, и для них существовали свои методы решения.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Третья часть «Книги абака» содержит задачу, автором которой, скорее всего, был сам Леонардо: «Некто поместил пару кроликов в место, со всех сторон окруженное стеною. Со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться и каждый месяц производить новую пару кроликов; кролики никогда не умирают. Сколько пар кроликов будет через год?»

Эта каверзная задача приводит к любопытной последовательности чисел, получившей широкую известность:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

и т. д. Каждое число – сумма двух предыдущих. Их стали называть числами Фибоначчи и они часто встречаются как в математике, так и в мире природы. Например, у многих цветов число лепестков совпадает с числами Фибоначчи. Это

следствие особенностей роста растений и геометрии примордиев – зачатков в виде мельчайших скоплений клеток в точке роста, развивающихся в отдельные лепестки.

Условия задачи Фибоначчи для воображаемой популяции кроликов нельзя воспроизвести физически, но более общее правило (модель Лесли) используется и по сей день для некоторых задач динамики популяций. Их приходится решать, чтобы предсказать популяционные колебания определенного вида животных с учетом спаривания и смертности.

ЧТО АЛГЕБРА ДАЛА ИМ

Многие главы «Книги абака» содержат алгебраические задачи, отвечающие интересам купечества. Одна, не только практическая, выглядит так: «Некто купил 30 птиц – попугаев, голубей и воробьев. Попугай стоит 3 серебряных монеты, голубь 2, а воробей $^1/_2$. Он заплатил 30 серебряных монет. Сколько птиц каждого вида он купил?»

Если x обозначает число попугаев, y – число голубей, а z – число воробьев, то в современной системе мы составим уравнения:

$x + y + z = 30$,

$3x + 2y + {}^1/_2\, z = 30$.

В мире рациональных чисел эти уравнения будут иметь много решений, но в самом вопросе подразумевается дополнительное условие: x, y, z – целые числа. Тогда есть только один ответ: 3 попугая, 5 голубей и 22 воробья.

Леонардо также приводит ряд задач, посвященных покупке лошади. Один человек говорит другому: «Если ты дашь мне треть своих денег, я смогу купить лошадь». Тот ему отвечает: «Если ты дашь мне четверть своих денег, я смогу купить лошадь». Сколько стоит лошадь? Сейчас уже найдено много решений; среди целочисленных самая малая цена лошади – 11 серебряных монет.

Греки открыли, как использовать конические сечения для решения некоторых кубических уравнений. Современная алгебра доказала, что если коническое сечение пересекается с другой коникой, точки пересечения находятся с помощью уравнения третьей или четвертой степени (в зависимости от конического сечения). Греки не знали об этом как об общем факте, но использовали следствия из него в некоторых частных случаях, применяя коническое сечение как новый вид геометрического инструмента.

Эта линия атаки была дополнена и приведена в систему персидским ученым Омаром Хайямом, более известным как автор четверостиший рубаи. Примерно в 1075 г. он классифицировал кубические уравнения на 14 видов и показал, как решать каждый из них, используя коники, в своем труде «Трактат о доказательствах задач алгебры и аль-мукабалы». Этот труд стал прорывом в геометрии, в нем практически безукоризненно развит геометрический метод решения кубических уравнений. Кое-кто из современных математиков может это оспорить: некоторые задачи у Хайяма решены не полностью, так как он предполагал, что отдельные точки геометрически определены, хотя иногда их не существует. Причина в том, что иногда он считал, будто его коники пересекаются, хотя на самом деле этого не было. Но всё это лишь незначительные огрехи его трудов.

Итак, геометрические методы решения кубических уравнений были найдены, но существуют ли также и алгебраические решения, где самыми сложными составляющими будут кубические корни? Итальянские математики эпохи Возрождения совершили огромный прорыв в алгебре, найдя положительный ответ на этот вопрос. В то время математики зарабатывали себе репутацию, соревнуясь в публичных состязаниях. Каждый участник предлагал противникам свои задачи, и тот, кто решил больше всех, признавался победителем. Зрители вольны были даже заключать пари на исход соревнования. Ставки порой делали и сами участники: описан случай, когда проигравший был обязан угостить победителя (и его друзей) тридцатью обедами. Кроме того, у хорошо проявивших себя участников состязания появлялась дополнительная возможность обзавестись учениками, особенно среди знатной молодежи. Так или иначе, публичные математические бои стали серьезным мероприятием.

Одна из таких дискуссий состоялась в 1535 г.: предстояло встретиться Антонио Фиоре и Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья, «заика». Тарталья разнес Фиоре в пух и прах, и слух о его триумфе дошел до ушей Джероламо Кардано. Тот насторожился. Он как раз трудился над всесторонней книгой об алгебре, как раз над тем разделом, что оказался предметом состязания между Фиоре и Тартальей: кубические уравнения. Тогда было принято делить кубические уравнения на три разных типа – опять-таки из-за нежелания признавать отрицательные числа. Фиоре было известно решение лишь для одного типа. А Тарталья поначалу знал решение только для другого типа. В современной нотации его решение для уравнения типа $x^3 + ax = b$ выглядит так:

$$x_1 = \alpha + \beta,$$
$$x_{2,3} = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm i \cdot \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sqrt{3},$$

где i – мнимая единица, а

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}},$$
$$\beta = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

За неделю до состязания Тарталья был в отчаянии и боялся проиграть, но тут его посетило озарение: он понял, как решить остальные типы уравнений. И, конечно, он послал Фиоре только те уравнения, которые тот заведомо не мог решить.

Кардано прослышал об этом соревновании и понял, что оба соперника успели разработать методы для решения кубических уравнений. Мечтая вставить их в свою книгу, он обратился к Тарталье с просьбой поделиться с ним своими наработками. Тарталья, естественно, с неохотой пошел на это, ведь средства к его

существованию зависели от них. Он долго колебался, но в итоге всё же его удалось уговорить. Кардано поклялся не публиковать новый метод. Тайна была нарушена в изданном Кардано труде «Великое искусство» («Ars magna»), и Тарталья имел полное право рассердиться. Он публично обвинил Кардано в плагиате.



Хотя Омар Хайям известен большинству из нас как поэт, он был также и выдающимся математиком.

Впрочем, Кардано никогда не мог похвастаться хорошей репутацией. Он был неисправимым игроком, готовым спустить любую сумму в карты, кости или даже шахматы. Так он умудрился проиграть все семейное состояние. С другой стороны, это был гений, талантливый врач, выдающийся математик и опытнейший самопиарщик, хотя его

положительные качества часто бледнели на фоне излишней, подчас на грани оскорбления, откровенности. И гнев Тартальи, обвинявшего Кардано в обмане и воровстве, был вполне справедливым. То, что Кардано честно ссылался в своей книге на Тарталью, только усугубило положение. Тот понимал, что в памяти потомков останется автор книги, а не какое-то имя, мельком упомянутое в паре строк.

Но у Кардано было оправдание, и вполне весомое. Оно стоило того, чтобы нарушить обещание, данное Тарталье. Он включил в свою книгу новые открытия, сделанные им и его учеником Лодовико (Луиджи) Феррари, в том числе общее решение уравнения четвертой степени. Это было великое достижение, настоящий прорыв в науке. Конечно, Кардано не преминул включить его в свою книгу. Это считалось вполне законным, ведь открытие сделал его ученик. Однако метод Феррари сводит решение любого уравнения четвертой степени к соответствующему кубическому; следовательно, он основан на методе Тартальи. И Кардано не мог опубликовать работу Феррари, не включив в нее также и метод Тартальи.

А вскоре пришли новости, подсказавшие ему способ выйти из неловкого положения. У того самого Фиоре, что проиграл Тарталье в публичном соревновании, был ученик, Сципион дель Ферро. И до Кардано дошли слухи о том, что дель Ферро решил все три типа кубических уравнений, а не только то, с которым справился Фиоре, и что неопубликованные бумаги дель Ферро оказались в руках некоего Аннибала дель Наве. И вот Кардано с Феррари в 1543 г. отправляются в Болонью, чтобы повстречаться с дель Наве, посмотреть на его бумаги, и там – ясные как день – им открылись решения для всех трех типов уравнений. Итак, у Кардано появилась возможность спокойно заявить, что он опубликовал не метод Тартальи, а открытие дель Ферро.

Но Тарталья не смирился с поражением, хотя и не мог больше опровергать уверения Кардано о том, что приведенное им решение открыто дель Ферро. Тарталья опубликовал пространную и полную гнева диатрибу об этой несправедливости, и его вызвал на публичные дебаты Феррари, горевший желанием отстоять честь наставника. Он одержал грандиозную победу, а Тарталья так и не оправился от этого удара.

Алгебраическая символика

Итальянские математики эпохи Возрождения сделали немало важных алгебраических открытий, но их система записи всё еще была далека от совершенства. На развитие символов современной алгебры ушла не одна сотня лет.

Первым, кто предложил использовать символы для обозначения неизвестных величин, был Диофант Александрийский. Его «Арифметика», написанная примерно в 250 г., изначально содержала 13 книг, шесть из которых дошли до нас в виде позднейших копий. Труд посвящался решению алгебраических уравнений как с целыми, так и с рациональными числами – дробями вида $^{p}/_{q}$, где p и q – целые числа. Нотация Диофанта сильно отличается от той, которой мы пользуемся сейчас. И хотя «Арифметика» – единственный из дошедших до нас трудов на эту тему, есть некоторые свидетельства того, что Диофант был частью более широкой традиции, а не просто отдельной фигурой.

Арабские математики Средневековья изобрели весьма изощренные методы решения уравнений, но излагали их на бумаге не с помощью символов, а с помощью слов.

Переход к использованию символов состоялся во времена Возрождения. Первым из великих алгебраистов, применившим символы, был Франсуа Виет. Большинство своих результатов он сумел записать с помощью символов, но те существенно отличались от современных. Однако именно он предложил буквы алфавита в качестве обозначения как известных, так и неизвестных. Чтобы избежать путаницы, он рекомендовал согласные *B, C, D, F, G*… использовать для известных величин, а гласные *A, E, I*… для неизвестных.

ДЖЕРОЛАМО КАРДАНО (он же Иеронимус Карданус, он же Жером Кардан) 1501–1576



Джероламо Кардано был незаконным сыном миланского стряпчего Фацио Кардано и молодой вдовы Клары Мичери, вынужденной одной растить троих детей. Дети умерли от чумы в Милане, пока Клара рожала Джероламо в Павии. Фацио был способным математиком и передал Джероламо увлечение этим предметом. Джероламо против воли отца пошел изучать медицину в университете Павии: Фацио хотел, чтобы он тоже стал юристом.

Еще студентом Кардано был выбран ректором университета (по местной традиции ректор избирался из студенческой среды) в Падуе, куда он переехал, с перевесом в один голос. Едва успев получить наследство после смерти отца, Кардано промотал все деньги в азартные игры[2]: карты, кости и даже шахматы. Он не расставался с кинжалом и

однажды ударил им в лицо противника, которого заподозрил в мошенничестве.

В 1525 г. Кардано получает диплом медика, однако ему пришлось покинуть пост в Миланской коллегии врачей – возможно, из-за скандальной репутации. Он практиковал медицину в деревне Сакка и женился на Лючии Бандарини, дочери капитана местного ополчения. Практика не приносила дохода, и в 1533 г. Кардано снова увлекся азартными играми, и на этот раз проигрыш оказался серьезнее: пришлось заложить драгоценности жены и кое-что из фамильной мебели.

Кардано снова повезло: к нему перешло место отца, преподавателя математики в школе Пиатти. По совместительству он продолжал практиковать медицину, и несколько чудесных выздоровлений заметно укрепили его репутацию врача. В 1539 г., после нескольких неудачных попыток, его снова приняли в коллегию врачей. Он начал публиковать учебные тексты по разным темам, в том числе по математике. Кардано написал замечательную автобиографию «О моей жизни» – альманах, составленный из глав на разные темы. Будучи на вершине славы, он получил вызов в Эдинбург, к одру архиепископа Сент-Эндрюса Джона Гамильтона. Гамильтон страдал от жестокой астмы. Но его состояние резко улучшилось после вмешательства Кардано, и медик покинул Шотландию, став богаче на 2000 золотых крон.

Он стал профессором в университете в Падуе, и всё шло прекрасно, пока его старший сын, Джамбаттиста, не женился тайком на Брандонии Серони, «никчемной, бесстыжей женщине», по оценке самого Кардано. Вместе со своей родней она публично унижала и издевалась над Джамбаттистой, и он отравил ее. Несмотря на все старания Кардано, его сына казнили. В 1570 г. Кардано был обвинен в ереси за то, что посмел составить гороскоп Иисуса Христа. Его посадили в тюрьму, затем отпустили, но лишили права преподавать в университете. Он переехал в Рим, где

неожиданно получил отпущение грехов у папы и снова был принят в коллегию врачей.

Он предсказал день своей смерти и постарался доказать свою правоту, совершив самоубийство[3]. Несмотря на всё пережитое, он до самого конца оставался оптимистом.

В XV в. появились первые примитивные символы, прежде всего буквы p и m для сложения и вычитания: *plus u minus*. Это скорее были сокращения, чем символы. Но и символы + и – появились примерно в то же время. Они пришли из области коммерции, точнее, от немецких купцов, обозначавших перевес или недовес. Математики быстро тоже стали ими пользоваться: первые письменные свидетельства относятся к 1481 г. Уильям Отред ввел символ × для умножения и был безжалостно (и справедливо) раскритикован Лейбницем за то, что его очень легко спутать с буквой x.

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДИОФАНТА И СОВРЕМЕННЫЕ

Величина	Современный символ	Символ Диофанта
Неизвестная	x	γ
В квадрате	x^2	Δγ
В кубе	x^3	Kγ
В четвертой степени	x^4	ΔγΔ
В пятой степени	x^5	ΔKγ
В шестой степени	x^6	KγK
Сложение	+	Слагаемые (члены) писались рядом: AB вместо A + B
Вычитание	–	↟
Равенство	=	ισ)

В 1557 г. английский математик Роберт Рекорд в своей книге «Точильный камень остроумия» ввел символ = для равенства, используемый по сей день. Он писал, что ему в голову не приходило ничего лучше, чем две параллельные линии равной длины. Правда, у него они были намного длиннее, чем те, которые ставим мы, что-то вроде: . Виет сперва писал вместо равенства слово «aequalis», но позже заменил его символом ~. Рене Декарт использовал другой символ – ∞.

Современные символы > и < для «больше» и «меньше» пришли к нам благодаря Томасу Хэрриоту. Круглые скобки () появились в 1544 г., а квадратные [] и фигурные { } изобрел Виет примерно в 1593 г. Декарт использовал символ квадратного корня √, представляющего стилизованную букву r для обозначения корня; для кубического корня он использовал символ √c.

Чтобы наглядно показать разницу между символами нашего времени и периода Возрождения, приведу цитату из «Великого искусства» Кардано:

5p: R m:15

5m: R m:15

25m: m:15 *qd. est* 40.

В современных символах получится:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-\left(-15\right)=40.$$

Итак, здесь мы видим p: и m: для плюса и минуса, R для квадратного корня и *qd. est* для латинского выражения «что есть». Кардано писал

qdratu aeqtur 4 *rebus p*: 32

там, где мы бы написали

$$x^2 = 4x + 32.$$

Он использовал разные сокращения, *rebus* и *aeqtur*, для неизвестного (предмета) и его квадрата. В остальных местах он использует *R* как неизвестное, *Z* для его квадрата и *C* для куба.

Влиятельной, хотя и малоизвестной фигурой был в свое время француз Никола Шюке, чья книга «Наука о числах в трех частях» («Le triparty en la science des nombres»), вышедшая в 1484 г., описывала три главные математические темы: арифметику, корни и неизвестные. Его обозначение для корней очень похоже на символ Кардано, но он первым ввел надстрочное написание степени неизвестного. Он называл первые четыре степени неизвестного *premier*, *champs*, *cubiez* и *champs de champs*[4]. Для того, что мы бы сейчас написали как $6x$, $4x^2$, $5x^3$, он использовал комбинации.6.1, 4.2 и.5.3. Он также применял ноль и отрицательные степени и писал.2.0 и.3.$^{1.m.}$, где мы бы написали 2 и $3x^{-1}$. Он использовал экспоненциальную запись (надстрочные символы) для степеней неизвестного, но не символы для самого неизвестного.

Это упущение исправил Декарт. Его запись уже очень близка к современной, за одним исключением. Там, где мы бы написали:

$$5 + 4x + 6x^2 + 11x^3 + 3x^4,$$

Декарт писал:

$$5 + 4x + 6xx + 11x^3 + 3x^4.$$

Как видите, xx используется вместо квадрата. Правда, время от времени Декарт тоже писал x^2. Ньютон обозначал степени неизвестного так же, как и мы, включая дроби и отрицательные показатели, например $x^3/^2$ для квадратного корня из x^3. А Гаусс окончательно отказался от xx в пользу x^2. И как только это совершил Гроссмейстер, все сочли своим долгом последовать его примеру.

Логика символов

Алгебра началась как способ систематизации задач по арифметике, но ко времени Виета уже жила собственной жизнью. До Виета алгебраические символы и операции рассматривались только как способы записать и выразить арифметические процедуры: во главе угла оставались числа. Виет ввел четкое различие между тем, что он называл логикой символов и логикой чисел. С его точки зрения алгебраическое уравнение представляет целый класс (вид символов) арифметических выражений. Это была новаторская концепция. В труде 1591 г. «Введение в аналитическое искусство» он объясняет, что алгебра – метод оперирования общими формами, а арифметика имеет дело с конкретными числами.

Возможно, вам это покажется педантизмом, но различие с новой точкой зрения значительно. По Виету, алгебраическое вычисление, например (в нашем написании)

$$(2x + 3y) – (x + y) = x + 2y,$$

выражает путь действий с символьными обозначениями. Отдельные выражения $2x + 3y$ и т. д. – математические объекты сами по себе. Они могут быть прибавлены, вычтены, умножены и разделены даже без учета того, какие числа представляют. Но для предшественников Виета то же уравнение – не более чем численное соотношение, верное только тогда, когда конкретные числа подставлены вместо символов x и y. Так алгебра обрела самостоятельную жизнь как раздел математики, посвященный символьным выражениям. Это был первый шаг к ее освобождению от ярлыка приложения к арифметике.

ЧТО АЛГЕБРА ДАЕТ НАМ

Главные «потребители» алгебры в современном мире – ученые, старающиеся представить законы природы в виде уравнений. Последние могут быть решены, чтобы выразить

неизвестные величины с использованием известных. Техника стала настолько привычной, что никто не замечает, что использует алгебру.

Алгебра очень эффектно была приложена к археологии в сериале «Команда времени», когда несгибаемый телеархеолог решает выяснить, насколько глубок был средневековый колодец. Первой идеей было что-нибудь туда кинуть и измерить время до момента, когда предмет упадет на дно. Это заняло шесть секунд. Соответствующая алгебраическая формула такова:

$s = {}^{1}/_{2} g t^2$,

где s – глубина колодца, t – время падения предмета, а g – ускорение свободного падения, примерно 10 м/с^2. Поставив 6 вместо t, по формуле мы получим глубину около 180 метров.

Из-за неуверенности в формуле – хотя, как выясняется позже, команда времени вспомнила ее правильно – герои решили опустить в колодец связанные вместе три мерные ленты.

И глубина колодца на самом деле оказалась очень близкой к 180 метрам.

Алгебра покажется нам еще более полезной, если мы будем знать глубину и захотим вычислить время. Теперь нам предстоит решить уравнение для неизвестной t с заданной s и получить результат по формуле

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Зная, что s = 180 м, например, мы можем предположить, что t равно квадратному корню из 360/10, или квадратному корню из 36, т. е. шесть секунд.

Глава 5. Вечные треугольники

Тригонометрия и логарифмы

Евклидова геометрия основана на треугольниках – главным образом потому, что любой многоугольник можно построить из нескольких треугольников, а практически все прочие важные фигуры, такие как круги и эллипсы, аппроксимируются с помощью многоугольников. Метрические свойства треугольников – те, что поддаются измерению, например длина их сторон, величина углов или общая площадь, – описаны разными формулами, подчас весьма изящными. Практическое приложение этих формул, особенно важных для навигаторов и землемеров, дало толчок развитию тригонометрии: само название этой отрасли знаний означает «измерение треугольников».

Тригономерия

Тригонометрия породила несколько специальных функций – математических правил для вычисления одной величины через другую. Они носят названия *синус*, *косинус* и *тангенс*. Тригонометрические функции стали незаменимым инструментом не только для измерения треугольников, но и для математики в целом.

Тригонометрия – наиболее широко используемый математический метод, участвующий буквально во всем: от определения местоположения корабля в навигации до работы спутниковой системы GPS в автомобилях. Ее применение в науке и технике настолько привычно, что происходит практически незаметно: такое характерно для самых универсальных инструментов. Исторически она тесно связана с логарифмами – искусным способом преобразования умножения (что достаточно трудоемко) в сложение (что намного проще). Главные идеи дисциплины были сформулированы между 1400 и 1600 гг., но она имеет длинную предысторию и массу более поздних дополнений, а ее система обозначений развивается до сих пор.

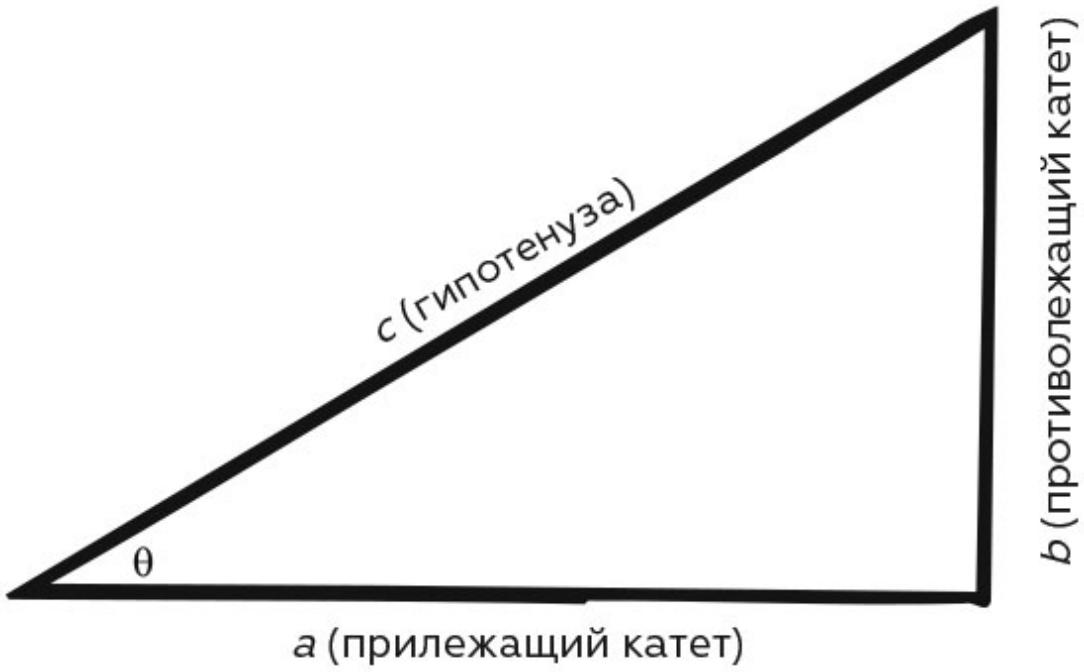
В этой главе мы проведем обзор основных тем: тригонометрические функции, экспоненциальная функция и логарифм. Также мы обратим внимание на несколько приложений, старых и новых. Многие из старых касаются техники счета и почти полностью забыты в наши дни из-за широкого применения компьютеров. Например, мало кто из наших современников до сих пор использует для умножения логарифмы. Никому не придет в голову лезть в таблицы логарифмов, раз компьютер способен моментально вычислить значение любой функции с гораздо большей точностью. Но когда логарифмы только появились, были составлены таблицы готовых расчетов из них, сделавшие их очень полезными, особенно в астрономии, где не обойтись без длинных и сложных вычислений. Составителям таблиц для нужд астрономии приходилось тратить годы – и даже десятилетия – на расчеты. Человечество очень многим обязано упорству этих преданных своему делу первопроходцев.

Происхождение тригонометрии

Главной проблемой тригонометрии было вычисление по известным данным о треугольнике (длинам сторон, величине углов) остальных его характеристик. Нам будет намного проще описать ее раннюю историю, если мы сперва резюмируем главные черты тригонометрии современной, которая по большей части является не более чем переработанной в XVIII в. областью науки, унаследованной от древних греков, если не от более ранних ученых. Краткое изложение обозначит рамки, в пределах которых мы можем описывать идеи математиков древности, не увязая в недоказуемых и со временем забытых концепциях.

ТРИГОНОМЕТРИЯ: ПЕРВЫЕ ШАГИ

Тригонометрия основана на ряде особых функций, из которых основными считаются синус, косинус и тангенс. Они применимы к углу, традиционно представленному греческой буквой θ (тета), и могут быть определены в терминах прямоугольного треугольника, чьи три стороны a, b и c соответственно называются прилежащим и противолежащим катетами и гипотенузой.



Тогда:

синус тета равен $\sin \theta = b/c$,

косинус тета равен $\cos \theta = a/c$,

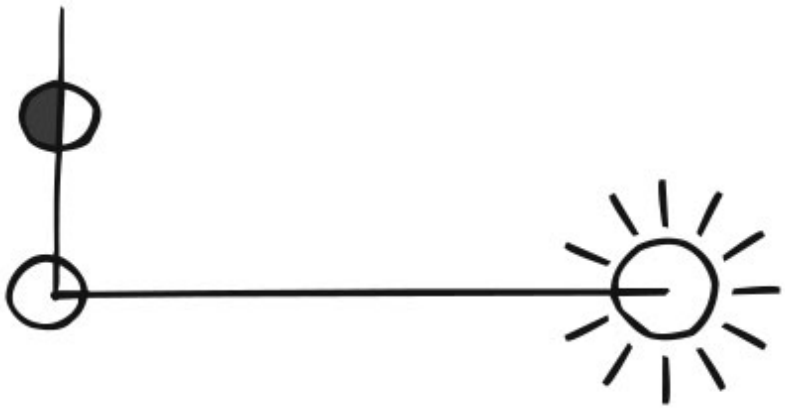
тангенс тета равен $\tan \theta = b/a$.

Получается, что значения этих трех функций для заданного угла θ определяет геометрия треугольника (одинаковый угол может быть у треугольников разных размеров). Но геометрия подобных треугольников подразумевает, что коэффициент подобия между ними не зависит от их размера. Однако когда эти функции были вычислены и занесены в таблицы, с их помощью стало легко «решать» треугольник (вычислять все его стороны и углы) по величине θ. Взаимоотношения между тремя функциями были описаны множеством красивых формул. В частности, теорема Пифагора заключает в себе следующее:

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

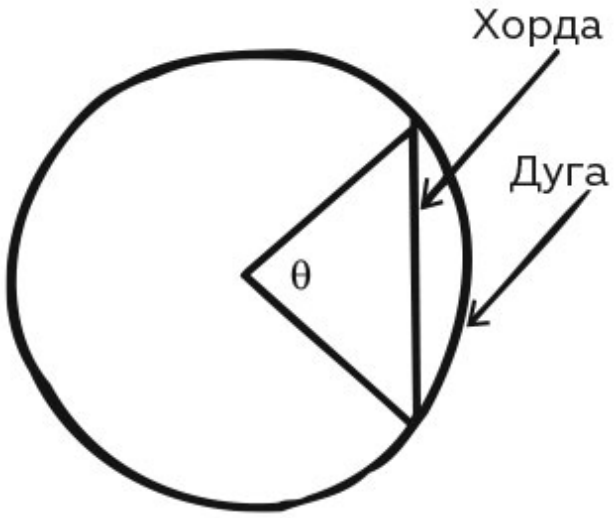
Судя по всему, тригонометрия ведет происхождение от астрономии, где относительно просто измерить углы, но очень трудно – невообразимые расстояния. Греческий астроном Аристарх в своем труде, датируемом примерно 260 г. до н. э., «О величинах и расстояниях Солнца и Луны», определил, что Солнце удалено от Земли на

расстояние, от 18 до 20 раз большее, чем расстояние от Земли до Луны. (Точная цифра ближе к 400, но Евдокс Книдский и Фидий доказывали, что верное число – 10.) Его объяснение было таково: когда Луна достигает половины полного размера, угол между направлениями от наблюдателя к Солнцу и Луне равен примерно 87° (в современных единицах). Используя свойства треугольников, что равнозначно тригонометрической оценке, он определил (в современных единицах), что величина sin 3° лежит между $^1/_{18}$ и $^1/_{20}$, что приводит к оценке соотношения расстояний до Солнца и до Луны. Сам метод был верен, не хватало точности наблюдений: точный угол равен 89,8°.



Положение Солнца, Луны и Земли, когда освещена половина Луны

Первые тригонометрические таблицы составил Гиппарх примерно в 150 г. до н. э. Вместо современной функции синуса он использовал очень близкое понятие, что с геометрической точки зрения было совершенно естественным. Представьте себе круг с двумя радиусами, которые образуют угол θ. Конечные точки радиусов на окружности можно соединить прямой, называемой *хорда*. Также их можно принять как конечные точки дуги окружности.



Дуга и хорда, соответствующие углу θ

Гиппарх составил таблицу соответствующих длин дуг и хорд для углов разной величины. Если радиус круга равен 1, то длина дуги равна θ в *радианах*. Простые геометрические построения демонстрируют, что длина хорды в современной нотации равна $2\sin {}^{\theta}/_{2}$. Итак, мы видим, что вычисления Гиппарха очень близко подводят нас к таблице синусов, хотя они и не были представлены именно в таком виде.



Астрономия

Любопытно, что первые труды по тригонометрии были гораздо сложнее, чем б*о*льшая часть материала, преподаваемого сегодня в школе, и снова благодаря астрономии (и позже навигации). Здесь мы имеем дело с естественным пространством, которое представляет собой не плоскость, а сферу. Небесные тела можно представить расположенными на воображаемой гигантской сфере. И самым точным представлением о небе будет его внутренняя поверхность, окружающая наблюдателя: на таком расстоянии действительно может показаться, что они лежат на этой сфере.

Как следствие, астрономические вычисления связаны с геометрией сферы, а не плоскости. Соответственно, и требования к ним определяются не плоскостной геометрией и тригонометрией, а геометрией и тригонометрией сферы. Одной из самых ранних работ на эту тему считают сочинение Менелая «Сферика» примерно 100 г. н. э. Пример одной из его теорем, не имеющей аналогов в геометрии Евклида, таков: если два треугольника имеют одинаковые углы, то они *конгруэнтны* – т. е. совпадают как по размеру, так и по форме (по Евклиду они подобны: имеют одну форму, но, возможно, разные размеры). В сферической геометрии сумма углов треугольника превышает 180°. Например, треугольник, чьи вершины лежат на Северном полюсе и двух точках экватора, разнесенных на 90°, явно имеет три прямых угла, т. е. их сумма равна 270°. И чем больше размеры треугольника, тем больше сумма его углов. Фактически эта сумма минус 180° пропорциональна общей площади треугольника.

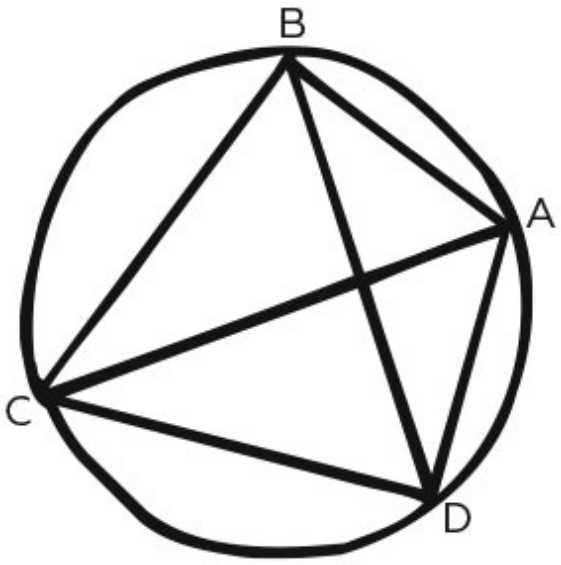
Эти примеры показывают, что геометрия сферы имеет свои характеристики и необычные черты. То же относится и к сферической тригонометрии, хотя и здесь основными остаются стандартные тригонометрические функции. Меняются только формулы.

Птолемей

Безусловно, вершиной тригонометрической мысли античности является текст Птолемея Александрийского Megale syntaxis («Великое построение»), датируемый примерно 150 г. н. э. Он больше известен как «Альмагест», что по-арабски означает «величайший», и включает тригонометрические таблицы, снова изложенные в понятиях хорд, вместе с методами вычисления их размеров, а также описание положений светил на небесной сфере. Превосходным примером сложнейшего хода мысли Птолемея служит его теорема, согласно которой если четырехугольник ABCD вписан в окружность (его вершины лежат на этой окружности), то

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

(произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон).



Четырехугольник, вписанный в окружность, и его диагонали

Современная интерпретация этого факта – знаменитая пара формул:

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi.$$

Главное следствие из этой формулы – возможность легко вычислить синус и косинус суммы двух углов, если вам известны синус и косинус каждого из них. Итак, начиная (например) с sin 1° и cos 1°, вы можете вычислить sin 2° и cos 2°, взяв $\theta = \varphi = 1°$. Затем вы можете получить sin 3° и cos 3°, взяв $\theta = 1°$, $\varphi = 2°$, и т. д. Вам только необходимо знать, как начать, но всё, что вам позже потребуется, не выходит за рамки арифметики. Вычислений будет довольно много, зато они несложные.

Начать эту цепочку легче, чем кажется, потребуются только арифметический и квадратный корни. Исходя из очевидного $\theta/2 + \theta/2 = \theta$, теорема Птолемея приводит к тому, что:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{2}.$$

Начав с cos 90° = 0, вы можете постоянно делить угол пополам, получая сколь угодно малые углы для синусов и косинусов (Птолемей использовал $1/4°$). Затем вы можете пойти в обратную сторону, используя все целочисленные кратные этого малого угла. Начиная с нескольких основных формул тригонометрии и нескольких простых значений величины некоторых углов, вы сможете вычислить величину практически любого угла. Это был выдающийся прорыв, который вывел астрономию на вершину науки на целое тысячелетие.

Еще одним выдающимся достижением «Альмагеста» стало то, как в нем вычислены орбиты планет. Любой, кто занимается наблюдением за светилами, очень быстро замечает, что планеты блуждают между определенных звезд, а пути, по которым они следуют, довольно сложные и могут то поворачивать назад, то сворачиваться в вытянутые петли.

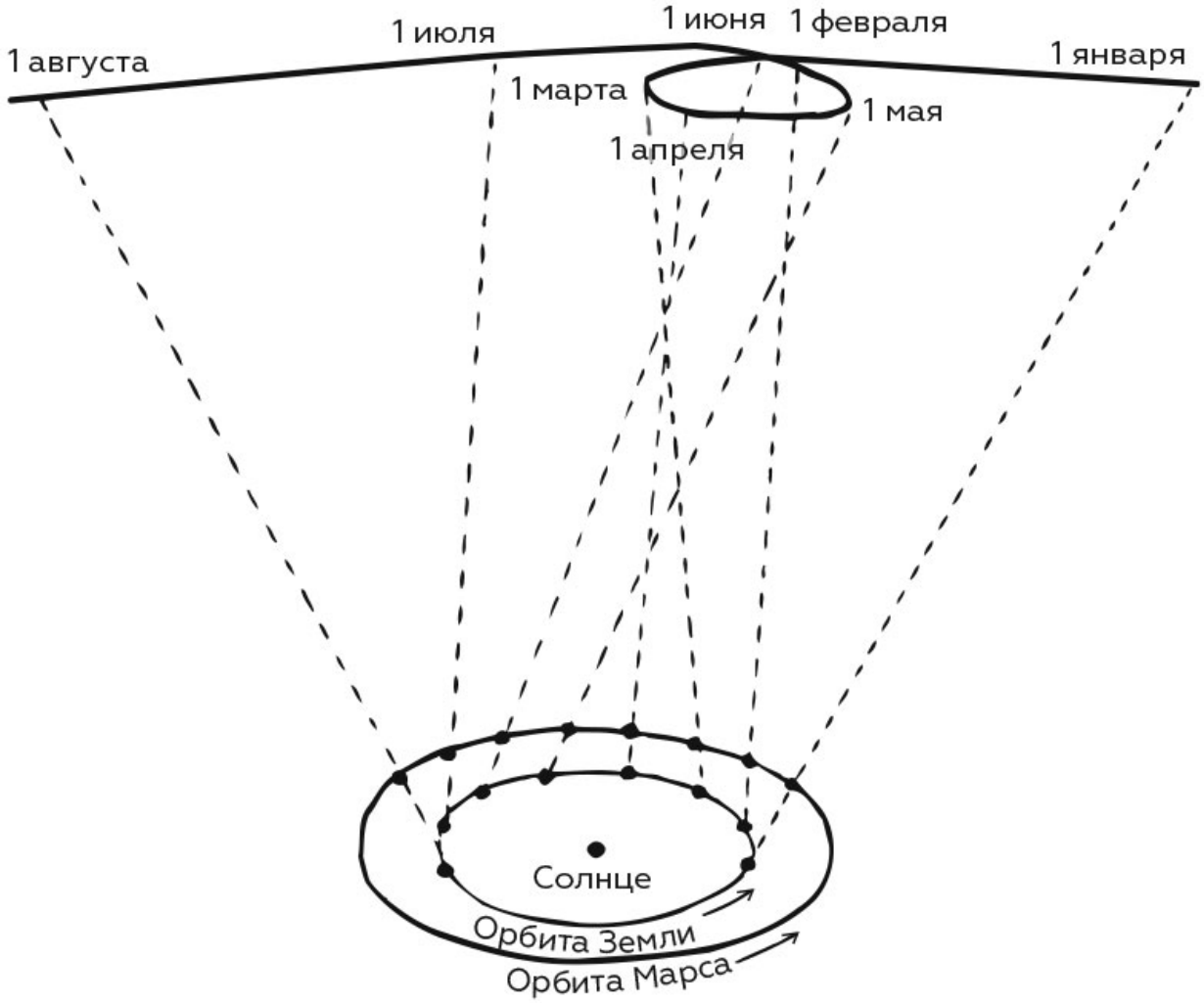
Евдокс, верный заветам Платона, нашел способ представлять эти сложные траектории в виде сфер, наложенных друг на друга. Его идею упростили Аполлоний и Гиппарх, предложив использовать эпициклы – окружности, чьи центры движутся по другим окружностям, и т. д.

Птолемей развил идею эпициклов, и это позволило построить очень точную модель планетарных орбит.

Ранняя тригонометрия

Ранние концепции тригонометрии появляются в трудах индийских математиков и астрономов: «Панча-сиддхантика» («Трактат, включающий пять сиддхант» Варахамихиры, 575 г.), «Брахма-спхута-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы» Брахмагупты, 628 г.) и более подробный «Сиддханта-широмани» («Венец учения») Бхаскары, 1150 г.

Индийские математики обычно использовали полухорду, или «арха-джива», по сути современный синус. Варахамихира вычислил эту функцию для 24 целочисленных кратных, с 3°45′ до 90°. Примерно в 600 г. в книге Маха-Бхаскария привел полезную приблизительную формулу для синуса острого угла, изобретение которой он приписал Арьябхате. Этим ученым принадлежит авторство многих базовых тригонометрических формул.



Движение Марса, наблюдаемое с Земли

Арабский математик Насир-Ад-Дин Туси в «Трактате о полном четырехстороннике» комбинировал плоскостную и сферическую геометрию в единую унифицированную систему и привел несколько базовых формул для сферических треугольников. Он исследовал эту тему скорее с математических позиций, нежели с астрономических. Но на Западе никто не знал о его работах вплоть до 1450 г.

Благодаря тесной привязке к астрономии почти вся тригонометрия оставалась сферической вплоть до 1450 г. В частности, геодезия – нынешняя главная «потребительница» тригонометрии – по сути представляет собой эмпирически разработанные методы, приведенные в систему еще римлянами. Но в середине XV в. плоскостная тригонометрия стала выделяться в отдельную отрасль знаний, и началось это в Северогерманском Ганзейском союзе. Союз

контролировал практически всю торговлю, поэтому был богатой и влиятельной организацией. И ему нужны были усовершенствованные методики навигации, наряду с точным измерением времени и практической прикладной астрономией.

Ключевой фигурой того времени был Иоганн Мюллер, более известный как Региомонтан. Он был учеником Георга Пурбаха, начавшего работу над новой редакцией «Альмагеста». В 1471 г. на деньги своего патрона Бернхарда Вальтера он работает над составлением новой таблицы синусов и таблицей тангенсов.

Другие талантливые математики XV–XVI вв. сумели создать собственные тригонометрические таблицы, зачастую поражающие своей точностью. Георг Иоахим Ретик вычислил синусы для окружности с радиусом 10^{15}, причем очень точно, вплоть до 15-го знака после запятой, но умножал все числа на 10^{15}, чтобы получить целые значения – для всех кратных с шагом в одну секунду дуги. Он открыл закон для сферических треугольников:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

а также закон для косинусов

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

в своем «Трактате о сферических треугольниках», написанном в 1562–1563 гг., но опубликованном только в 1596 г. Здесь буквы A, B и C обозначают углы треугольника, при этом a, b и c – его стороны, измеренные по углам, которые они образуют с центром сферы.

Виет создал много трудов по тригонометрии, из которых первым был «Математический канон», изданный в 1579 г. Он обобщил и систематизировал разные методы решения треугольников, а именно определение длины всех его сторон и величины углов исходя из другой информации о нем. Он открыл новые тригонометрические тождества, в том числе несколько интересных выражений для синусов и косинусов углов, кратных θ, представленных через синус и косинус угла θ.

Логарифмы

Второй темой этой главы были заявлены логарифмы, или log *x*, одна из важнейших функций в математике. Прежде всего они были важны, потому что удовлетворяли уравнению

$$\log xy = \log x + \log y$$

и тем самым могли использоваться для преобразования умножения (очень трудоемкого действия) в сложение. Чтобы перемножить две величины *x* и *y*, сперва надо найти их логарифмы, сложить их и затем найти число, логарифм которого является результатом этого сложения (*антилогарифм*). Это и будет произведение *xy*.

Как только математики составили таблицы логарифмов, они стали доступны любому, кто знаком с методом. С XVI в. вплоть до середины XX в. практически все научные вычисления, особенно астрономические, использовали логарифмы. Однако уже с 1960-х электронные калькуляторы и компьютеры потеснили логарифмы, сделали их ненужными. Но сама концепция остается жизненно важной для математики: логарифмы прочно занимают ведущие роли во многих отраслях этой науки, включая исчисление и комплексный анализ. Кроме того, многие процессы в физике и биологии были описаны в логарифмических функциях.

Современный взгляд на логарифмы определяет их как функцию, обратную показательной. Используя логарифмы с основанием 10, что вполне естественно для десятичной системы счисления, мы говорим, что *x* является логарифмом *y*, если $y = 10^x$. Например, поскольку $10^3 = 1000$, логарифм 1000 (с основанием 10) равен 3. Главное свойство логарифмов определяется свойством показательной функции:

$$10^{a+b} = 10^a \times 10^b.$$

Но чтобы логарифмами можно было пользоваться, необходимо уметь найти соответствующий *x* для всякого положительного вещественного *y*. Согласно утверждению Ньютона и большинства ведущих ученых того времени, главная идея состояла в том, что любое

рациональное число $10^{p/q}$ можно определить как корень *q*-й степени из 10^p. Поскольку любое вещественное число *x* может сколько угодно близко быть приближенным рациональным числом $^p/_q$, мы можем приблизить 10^x с помощью $10^{p/q}$. Это не самый эффективный способ *вычислить* логарифм, но самый простой способ доказать его существование.

Исторически изобретение логарифмов шло совсем не так гладко. У его истоков стоит шотландец Джон Непер, барон Мерчистон. Он всю жизнь увлекался самыми эффективными методами вычислений и в итоге сам изобрел знаменитые *палочки Непера* (или кости Непера). Начиная с 1594 г. он переходит в более отвлеченную область науки, и ему потребовалось 20 лет, чтобы подготовить свой труд к публикации. Судя по всему, он начал исследования с геометрических прогрессий – последовательностей чисел, где каждое последующее является произведением предыдущего на один и тот же множитель. Например, возведение в степень числа 2:

1 2 4 8 16 32 …

или степени десятки:

1 10 100 1000 10 000 100 000 …

Уже давно было замечено, что сложение показателей степени эквивалентно перемножению степеней. Это удобно, если вы перемножаете две целые степени числа 2 или, например, две целые степени 10. Но между этими числами большой разрыв, и степени 2 или 10 не очень помогут, если придется перемножать, например, 57,681 и 29,443.

ПЛОСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

В наши дни тригонометрия прежде всего развита на плоскости, где геометрия попроще и ее принципы легче понять. Можно только удивляться, как часто новые математические идеи возникают в сложном контексте, а

последующие упрощения появляются гораздо позже. Существует теорема синусов и теорема косинусов для треугольников на плоскости, и они стоят того, чтобы на них остановиться. Рассмотрим плоский треугольник с углами A, B и C и противолежащими им сторонами a, b, c.

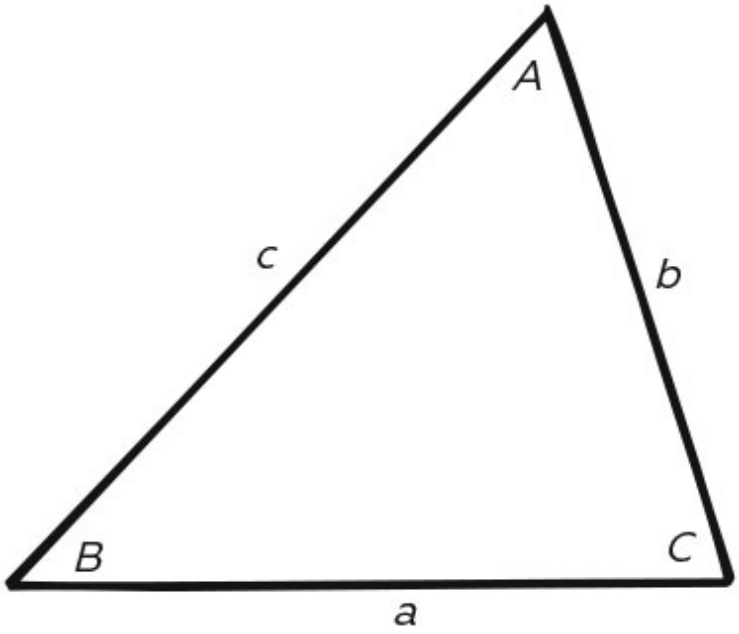
Тогда теорема синусов имеет следующий вид:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

а теорема косинусов:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

(соответствующие формулы можно получить и для других углов). Мы можем использовать теорему косинусов для того, чтобы найти углы треугольника по его сторонам.



Стороны и углы треугольника

Логарифмы Непера

Пока доблестный барон упорно искал способ заполнить разрывы в геометрических прогрессиях, лейб-медик шотландского короля Якова VI Джеймс Крейг рассказал Неперу об открытии, широко известном в Дании, с громоздким названием «простаферезис». Он применялся к любому способу, который заменял умножение на сложение. Главный метод его практического применения был основан на формуле, открытой Виетом:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{2}.$$

Имея таблицу синусов и косинусов, вы легко примените эту формулу для преобразования умножения в сложение. И хотя дело получалось хлопотное, но вычисления занимали меньше времени, чем если бы числа перемножались напрямую.

Непер ухватился за эту идею и развил ее. Он составил геометрические последовательности со знаменателем прогрессии, максимально близким к 1. Тогда вместо степеней 2 или 10 вы должны были использовать, скажем, степени 1,0000000001. Последовательность степеней такого числа очень близка и не зияет неудобными разрывами. По какой-то причине Непер выбрал знаменатель немного меньше 1, точнее, 0,9999999. Так его геометрическая последовательность обратилась *назад*, от бо́льших чисел ко всё более малым. Фактически он начал с 10 000 000 и затем умножал его на последовательность степеней от 0,9999999. Если мы запишем Naplog *x* для неперовского логарифма *x*, получим любопытные результаты:

Naplog 10 000 000 = 0,

Naplog 9 999 999 = 1

и т. д. Так логарифмы Непера, или Naplog *x*, удовлетворяют уравнению

Naplog (10^7xy) = Naplog (x) + Naplog (y).

Вы можете использовать их для подсчетов, потому что умножать и делить на степени 10 проще, но тогда потеряете в изяществе. Но это в

любом случае гораздо лучше, чем тригонометрическая формула Виета.

Десятичные логарифмы

Очередной важный шаг вперед был сделан на встрече Непера и приехавшего к нему Генри Бригса, первого савильского профессора геометрии в Оксфордском университете.

Бригс предложил заменить идею Непера на более простую: десятичный логарифм (с основанием 10), $L = \log_{10} x$, удовлетворяющий формуле

$$x = 10^L.$$

Тогда

$$\log_{10} x\,y = \log_{10} x + \log_{10} y,$$

и всё становится намного проще. Чтобы найти x, достаточно сложить логарифмы x и y и затем найти антилогарифм результата.

Непер скончался до того, как эти идеи получили распространение, в 1617 г., когда только-только увидела свет его «Рабдология», посвященная счетным палочкам. Его авторский способ вычисления логарифмов, «Описание удивительной таблицы логарифмов» (Mirifici Logarithmorum Canonis Decriptio), издали два года спустя. Бригс взят на себя задачу составить таблицу «бригсовских» (десятичных, с основой 10) логарифмов. Он начал с равенства $\log_{10} 10 = 1$ и последовательно брал квадратные корни. В 1617 г. он опубликовал таблицы Logarithmorum chilias prima («Первая тысяча логарифмов»), с 14-значными логарифмами для целых чисел от 1 до 1000. Изданный в 1624 г. труд Arithmetica logarithmica содержал таблицы десятичных 14-значных логарифмов для целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000.

ЧТО ТРИГОНОМЕТРИЯ ДАЛА ИМ

«Альмагест» Птолемея заложил основы всех последующих исследований движения планет, прежде всего

позволил Иоганну Кеплеру сделать вывод об эллиптической форме их орбит. Наблюдения за движением планет осложнялись относительным движением самой Земли, неизвестным фактором во времена Птолемея. Даже если бы планеты двигались с единой скоростью и строго по окружностям, проход Земли вокруг Солнца представлял бы собой головоломную комбинацию двух отдельных круговых движений, чья точная модель выглядела бы гораздо сложнее, чем у Птолемея. По схеме эпициклов Птолемея центр одной окружности вращается по другой окружности. Эта окружность, в свою очередь, может вращаться вокруг следующей, и т. д. Геометрия равномерного движения по окружности естественно подчиняется тригонометрическим функциям, и впоследствии астрономы использовали это свойство для вычисления путей небесных тел.

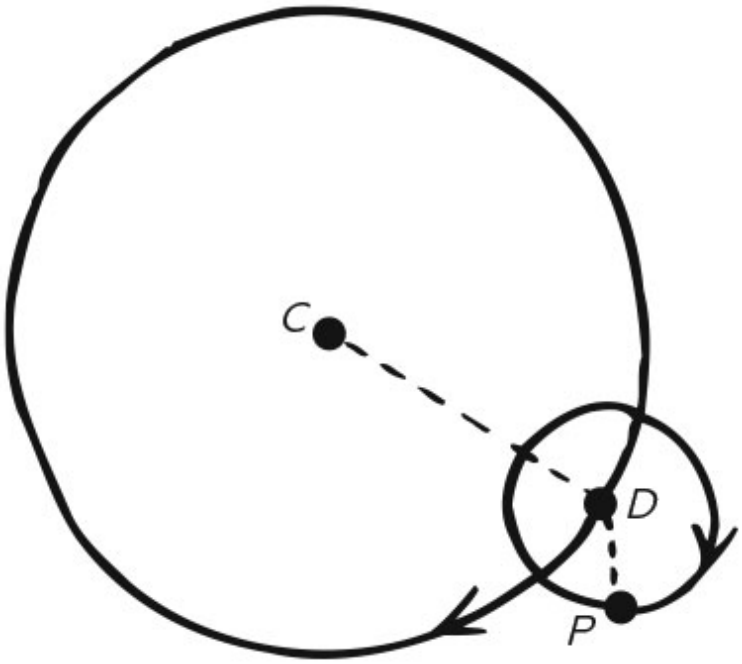


Схема эпицикла. Планета P равномерно вращается вокруг точки D, которая, в свою очередь, равномерно вращается вокруг точки C

Идея росла, как снежный ком. Джон Спайделл вычислил логарифмы тригонометрических функций (таких как log sin *x*) и опубликовал свои «Новые логарифмы» в 1619 г. Швейцарский мастер-часовщик Йост Бюрги опубликовал свой труд о логарифмах в 1620 г.

и вполне мог сам развить эту идею еще в 1588 г., задолго до Непера. Но история математики зиждется на том, что ученые успели опубликовать – буквально сделать доступным для публики, – а идеи, остававшиеся под спудом, не могли повлиять на развитие науки в целом. В итоге первенство (возможно, по праву) отдается смельчакам, которые запечатлели свои открытия в печатных трудах или по крайней мере в активной переписке (исключение составляют люди, издававшие идеи *других* как собственные, не имея на то права. Как правило, они остаются за кулисами).

Число e

В тесной связи с предложенной Непером версией логарифмов всегда рассматривается одно из важнейших чисел в математике, известное нам под обозначением *e*. Его величина приблизительно равна 2,71828. Оно получится, если мы попытаемся перейти от логарифмов к геометрической прогрессии со знаменателем чуть больше 1. Это приведет к выражению $(1 + {}^{1}/_{n})^{n}$, где *n* – очень большое целое число, и чем оно больше, тем ближе это выражение к одному определенному числу, которое мы обозначаем *e*.

Эта формула предполагает, что у логарифма существует натуральное основание, причем это не 10 или 2, а именно *e*. Натуральный логарифм числа *x* – это число *y*, которое удовлетворяет условию $x = e^{y}$. Сегодня математики натуральный логарифм записывают так: $y = \ln x$. Иногда математики обозначают основание *e* натурального логарифма: $y = \log_{e} x$, но в школьном курсе математики его обычно опускают, поскольку для высшей математики и науки важен именно натуральный логарифм. Десятичные логарифмы наиболее удобны для вычислений в десятичной системе, но в фундаментальной математике важнее натуральные.

Выражение e^{x} называется экспонентой *x*, и его по праву можно назвать одним из основополагающих понятий математики. Число *e* – одно из тех необычных чисел, что так любят математики, и играет огромную роль. Другим таким числом, несомненно, является π. Это верхушка айсберга – потому что есть еще много других знаменитых чисел. Их также по праву можно считать самыми важными и особенными, встречающимися повсюду на бескрайнем математическом ландшафте.

Что бы мы без них делали?

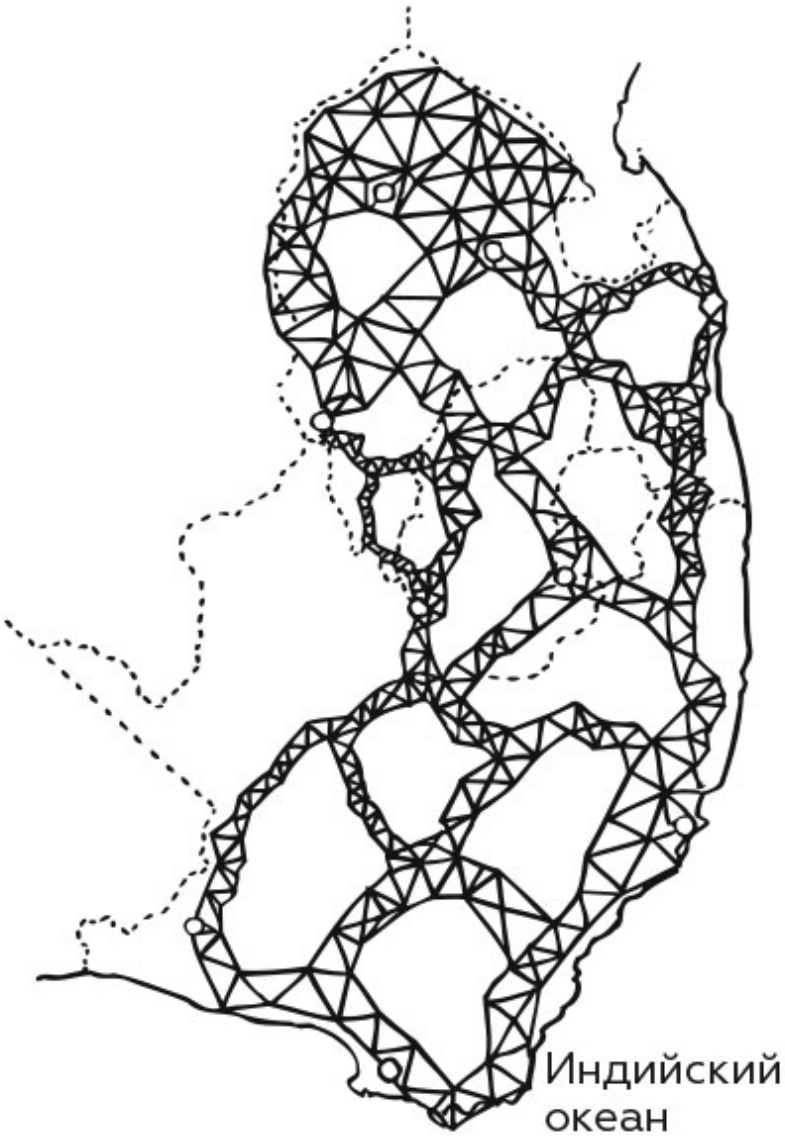
Наверное, невозможно переоценить долг человечества перед неведомыми предками, изобретшими логарифмы и тригонометрию и потратившими годы на составление численных таблиц. Их усилия обеспечили качественно иной взгляд на мир, не говоря уже о путешествиях по миру и торговле, получивших методы точной навигации и картографии. На тригонометрических вычислениях основана вся геодезия. Даже сейчас, когда геодезисты пользуются лазерными приборами и производят вычисления с помощью сверхскоростных электронных чипов, концепции построения самих лазеров и чипов уходят корнями в ту самую тригонометрию, что не давала покоя математикам древних Индии и Аравии.

Логарифмы позволили умножать любые числа быстро и точно. Двадцать лет, потраченных на составление численных таблиц одним математиком, сэкономили десятки тысяч рабочих человеко-лет его последователям, и те смогли полностью посвятить свое время трудоемкому научному анализу. Наука не смогла бы продвинуться дальше без этого метода. И невозможно подсчитать выгоду от него.

ЧТО ТРИГОНОМЕТРИЯ ДАЕТ НАМ

Тригонометрия играет главную роль во всем, что касается картографии, – от строительной площадки до континентов. Точно измерить углы относительно просто, а вот оценить так же точно расстояние – иная задача, особенно для пересеченной местности. Из-за этого геодезисты начинают работу с максимально точного измерения длины *базовой линии*, представляющей расстояние между двумя определенными точками. Затем они строят сеть треугольников и используют величины их углов плюс тригонометрию, чтобы вычислить длины сторон. Так можно построить очень точную карту любой области. Это процесс получил название триангуляции. Для проверки точности

данных после составления первой карты весь процесс может повториться с использованием другой базовой линии.



Триангуляция Южной Африки Лакайля

Приведенный здесь рисунок – не более чем пример: это знаменитая карта Южной Африки, составленная в 1751 г. известным астрономом аббатом Никола Луи де Лакайлем. Его главной целью было создание каталога звезд Южного полушария, но для получения точных результатов ему пришлось начать с измерения дуги меридиана земного шара.

Для этого он провел триангуляцию для территории к северу от Кейптауна.

Его результат позволил предположить, что кривизна земного шара меньше в северных широтах, чем в южных: удивительное для того времени явление, подтвержденное дальнейшими измерениями. Земля действительно слегка напоминает по форме грушу. Каталог, составленный ученым при помощи рефракторного телескопа, оказался поразительно точным: в нем обозначено 15 из известных сейчас 88 созвездий и перечислено 10 тыс. звезд.

Глава 6. Кривые и координаты

Геометрия – это алгебра – это геометрия

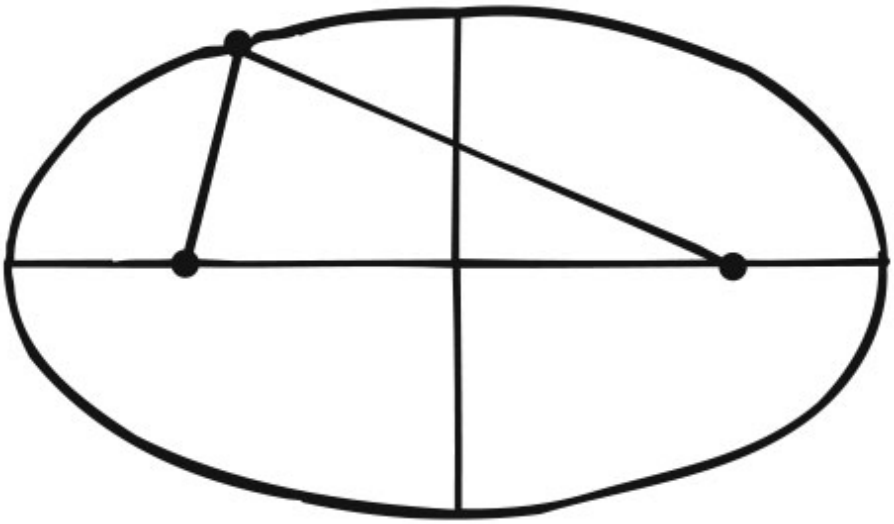
Мы привычно делим математику на такие самостоятельные области, как арифметика, алгебра, геометрия и т. д., но это скорее дань извечному стремлению человечества всё разложить по полкам. Ведь в математике нет строгих и непреодолимых границ между вроде бы независимыми областями, и проблема, на первый взгляд касающаяся одной сферы, может быть решена методами, изобретенными в другой. Многие великие прорывы в науке совершались именно благодаря неожиданно открытой связи между казавшимися независимыми темами.

ФермА

Греческие математики проследили такие связи между теоремой Пифагора и иррациональными числами, а Архимед использовал механические аналогии и методы для определения объема шара. Истинное значение и важность таких взаимно плодотворных пересечений стали очевидны в короткий период на десять лет раньше и позже 1630 г. За этот короткий отрезок истории два выдающихся математика успели открыть важную связь между алгеброй и геометрией. Фактически они показали, что каждую из этих областей можно преобразовать в другую с помощью координат. Вся геометрия Евклида и его последователей может быть сведена к алгебраическим вычислениям. А вся алгебра может быть интерпретирована в терминах геометрии: кривых и поверхностях.

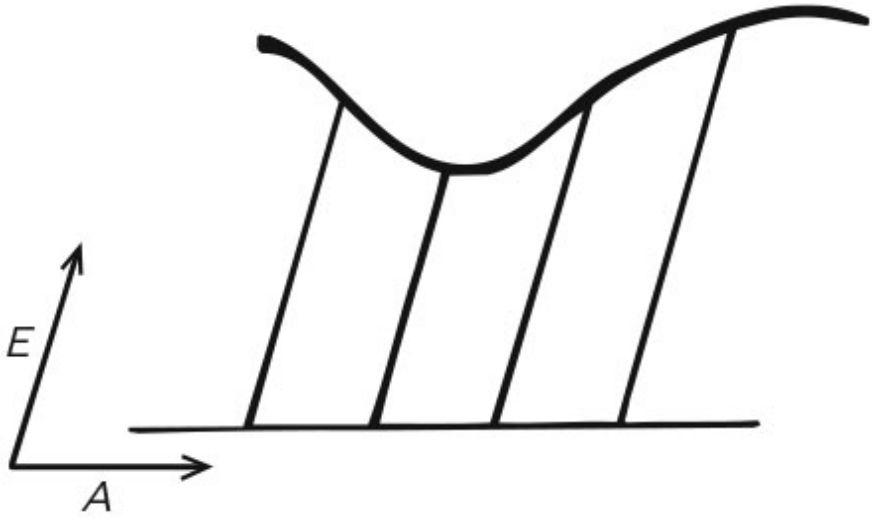
Кажется, что такие связи могут сделать одну из областей излишней. В самом деле, если всю геометрию можно заменить алгеброй, зачем она нужна? Однако каждая область имеет свою специфическую точку зрения, подчас гораздо более проницательную и плодотворную. Иногда ученому лучше мыслить геометрически, а иногда – алгебраически, чтобы решить задачу.

Первым ученым, создавшим систему координат, был Пьер де Ферм*а*. Он прежде всего известен благодаря своей теории чисел, но также изучал другие вопросы математики, включая вероятность, геометрию и приложение к оптике. Примерно в 1620 г. Ферма, пытаясь понять геометрию кривых линий, начал по сохранившимся до его времени крупицам сведений восстанавливать утраченный труд, названный когда-то Аполлонием «Плоские места». Закончив это, Ферма продолжил собственные изыскания, описанные им в 1629 г., но изданные только через 50 лет в книге «Введение к теории плоских и пространственных мест». Здесь он подробно рассмотрел преимущества преобразования геометрических понятий в алгебраические термины.



Свойства фокусов эллипса

Геометрическое место точек (ГМТ) определяет геометрическую фигуру как множество точек на плоскости или в пространстве, обладающих некоторым свойством. Например, мы можем искать ГМТ, сумма расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная. Это эллипс с двумя фокусами. Это свойство эллипса было известно еще древним грекам.



Подход Ферма к координатам

Ферма же обратил внимание на принцип: если условия, налагаемые на точку, можно выразить в виде одного уравнения с двумя неизвестными, соответствующее ГМТ будет кривой – или прямой

линией, которую мы будем рассматривать как определенный тип кривой во избежание ненужных расхождений.

Он иллюстрировал этот принцип схемой, на которой две неизвестных величины *A* и *E* представлены как расстояния в двух разных направлениях.

Затем он составил несколько отдельных уравнений, связующих *A* и *E*, и объяснил, какие кривые они представляют. Например, если $A^2 = 1 + E^2$, то ГМТ является гиперболой.

Ферма ввел косоугольную систему координат на плоскости (косвенно подразумевая, что этот угол не обязательно должен быть прямым). Переменные *A* и *E* – две *координаты*, которые мы называем *x* и *y*, для любой точки относительно данных осей. Итак, принцип Ферма убедительно утверждает, что любое уравнение с двумя переменными представляет кривую, и его примеры показывают нам, какое уравнение представляет какую кривую из перечня основных кривых, составленного греками.

Декарт

Современное представление о системе координат сложилось в трудах Декарта. В повседневной жизни мы сталкиваемся с двумерными и трехмерными пространствами, и нам нужна вся сила воображения, чтобы представить себе что-то более сложное. Наша зрительная система отображает внешний мир как двумерную картинку для каждого глаза – подобно той, что мы видим на экране телевизора. Мелкие различия в изображениях от каждого глаза наш мозг комбинирует и интерпретирует в ощущение глубины изображения, и мы получаем возможность воспринимать окружающий мир как трехмерное пространство.

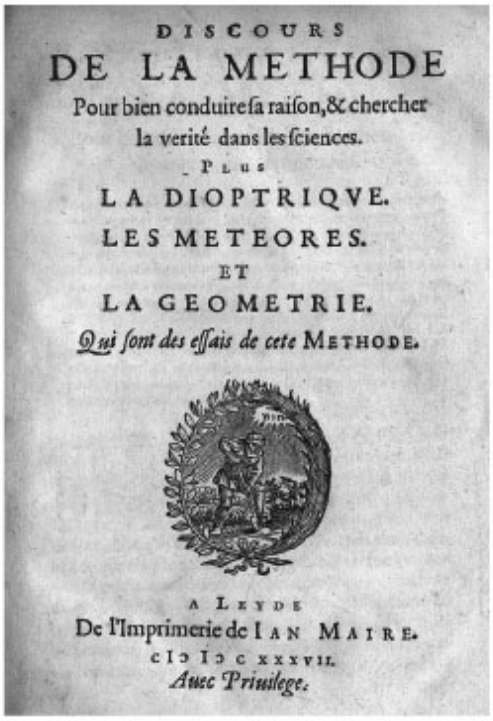
Ключом к представлению о многомерных пространствах является идея системы координат, представленная Декартом в виде приложения «Геометрия» к его труду «Рассуждение о методе». Его идея состояла в том, что геометрия на плоскости может быть представлена в алгебраических выражениях. Его подход аналогичен методу Ферма. Выберите точку на плоскости и назовите ее начальной. Проведите две оси – линии, проходящие через начальную точку и пересекающиеся под прямым углом. Обозначьте одну ось как x, другую – y. Тогда любая точка P плоскости будет определяться парой расстояний (x, y), которые говорят нам о том, как далеко находится эта точка от начала, если измерять соответствующие перпендикуляры от точки P до осей x и y. Например, на карте x может обозначать расстояние к востоку от начальной точки (с отрицательными числами, представляющими направление на запад), а y – расстояние к северу от исходной точки (с отрицательными показателями, представляющими направление на юг).

РЕНЕ ДЕКАРТ 1596–1650



Декарт начал изучать математику в 1618 г., став учеником голландского ученого Исаака Бекмана. Он покинул Голландию и путешествовал по Европе, пока в 1619 г. не вступил в баварскую армию. Он продолжал путешествовать с 1620 по 1628 г., побывал в Богемии, Венгрии, Германии, Голландии, Франции и Италии. В Париже в 1622 г. он познакомился с Мареном Мерсенном и с тех пор регулярно переписывался с ним, что позволяло ему постоянно быть в курсе последних достижений ведущих научных школ.

В 1628 г. Декарт осел в Голландии и начал свой первый труд «Мир» (Le Monde), в частности «Трактат о свете», описывавший свойства света. Когда Декарту стало известно о домашнем аресте Галилео Галилея, он испугался и задержал публикацию книги. Только после его смерти работа была издана в усеченном виде. Он продолжил развивать свои идеи о логическом мышлении в большом труде, изданном в 1637 г., «Рассуждение о методе…». У книги было три приложения: «Диоптрика», «Метеоры» и «Геометрия».


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.

Самая его амбициозная книга, «Первоначала философии», увидела свет в 1644 г. Она делилась на четыре части: «Об основах человеческого познания», «О началах материальных вещей», «О видимом мире» и «О земле». Это была попытка подвести единый математический фундамент под всеобъемлющую физическую Вселенную, преобразуя все естественные составляющие в механические объекты.

В 1649 г. Декарт отправился в Швецию, чтобы занять место наставника при королеве Кристине. Королева оказалась ранней пташкой, а Декарт не имел привычки подниматься раньше 11 часов. Необходимость вести уроки математики в пять утра, да еще в холодном сыром климате, подорвала здоровье Декарта. Через несколько месяцев он скончался от пневмонии.

Координаты работают и в трехмерном пространстве, но здесь двух значений уже недостаточно для локализации точки. А вот три достаточно. Кроме направления восток – запад или север – юг нам необходима еще и точка выше или ниже начальной. Обычно для

расстояний выше нее мы используем положительное число, ниже – отрицательное. Координаты в пространстве обозначаются (x, y, z).

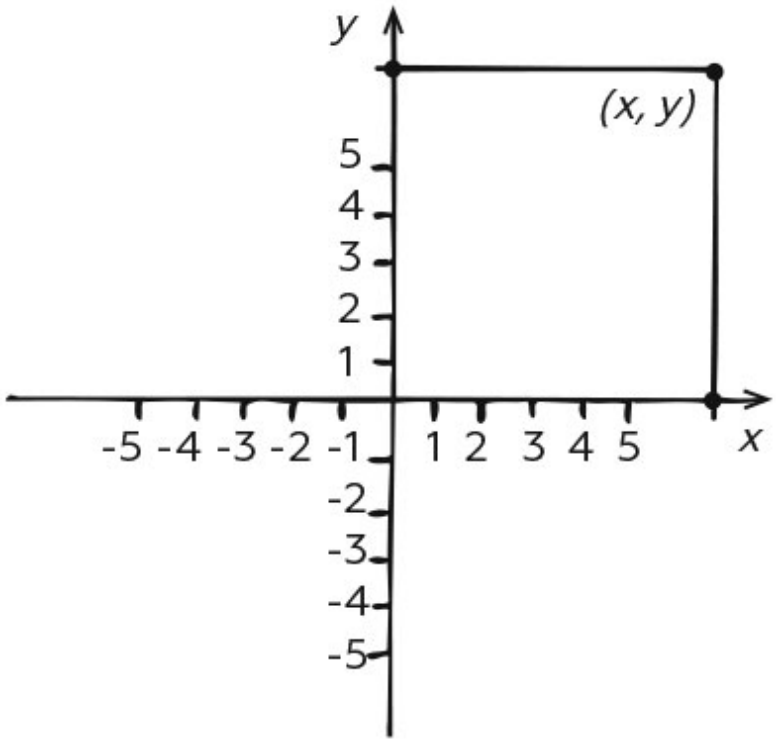
Поэтому плоскость называют двумерной, а пространство трехмерным. Число измерений зависит от того, сколько чисел нам необходимо для описания данной точки.

В трехмерном пространстве отдельное уравнение, содержащее x, y и z, обычно определяет поверхность. Например, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ утверждает, что точка (x, y, z) всегда расположена на расстоянии в одну единицу от начальной точки. Это позволяет предположить, что она лежит на единичной сфере с центром в начальной точке.

Обратите внимание, что слово «мера» применяется здесь не в буквальном значении. Мы не пытаемся найти количество измерений пространства через что-то, называемое мерой, чтобы затем подсчитать ее. Мы определяем, *сколько* чисел необходимо, чтобы определить положение в пространстве, – это и будет размерностью.

КООРДИНАТЫ В СОВРЕМЕННОМ ВИДЕ

Нам легче будет понять, как развивалась координатная геометрия, если познакомимся с тем, как работает современная система. Существует несколько вариантов, но все они основаны на том, что для начала на плоскость наносят две линии под названием *оси*. Точка их пересечения, общая точка, – *начальная точка*. Как правило, соблюдается такое условие: одна ось – горизонтальная, другая – вертикальная.



Вдоль каждой оси наносятся целые числа: положительные в одном направлении и отрицательные в другом. Соответственно, горизонтальная ось называется *x*, а вертикальная *y*. Символы *x* и *y* используются для представления точек с помощью соответствующих осей – это расстояния от начальной точки. Обычная точка на плоскости, на расстоянии *x* по горизонтальной оси и *y* по вертикальной, обозначается парой чисел (*x*, *y*). Эти числа и есть *координаты* точки.

Любое уравнение, содержащее *x* и *y*, накладывает ограничения на возможные точки. Например, если оно выглядит как $x^2 + y^2 = 1$, точка (*x*, *y*) должна находиться на расстоянии 1 от начальной, согласно теореме Пифагора. Такие точки образуют окружность. Мы скажем, что $x^2 + y^2 = 1$ – *уравнение* для этой окружности. Любое уравнение соответствует какой-то кривой на плоскости, а любая кривая соответствует уравнению.

Декартова система координат

Декартовы координаты алгебраически тесно связаны с коническими сечениями – кривыми в геометрии, которые древние греки строили как сечения двойного конуса. Алгебраически получается, что конические сечения являются следующим видом простейших кривых линий после прямых. Прямая линия описывается уравнением

$$ax + by + c = 0$$

с константами a, b и c. Коническое сечение описывается квадратным уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

с константами a, b, c, d, e, f. Декарт отмечал этот факт, но не смог его доказать. Но он разобрал случай, основанный на теореме, которая приписывалась Паппу и давала характеристики коническим сечениям. Он сумел доказать, что там результат описывается квадратным уравнением.

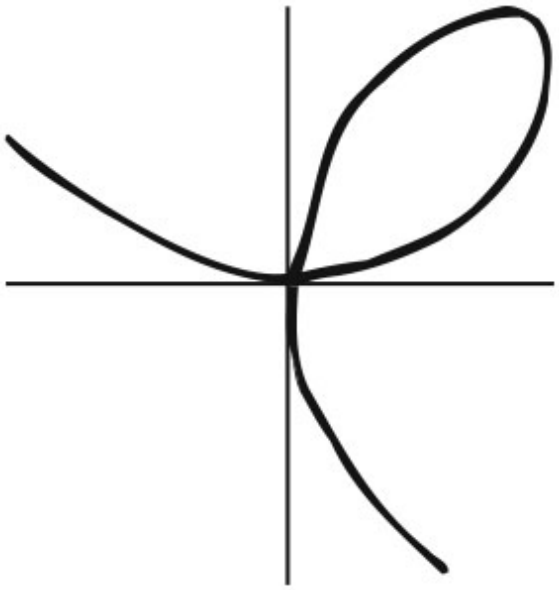
Он пошел дальше и обратился к уравнениям более высокого порядка, описывая более сложные кривые, чем те, с которыми имела дело классическая греческая геометрия. Типичным примером можно считать декартов лист, задаваемый уравнением:

$$x^3 + y^3 – 3axy = 0,$$

которое описывает петлю с двумя концами, уходящими в бесконечность.

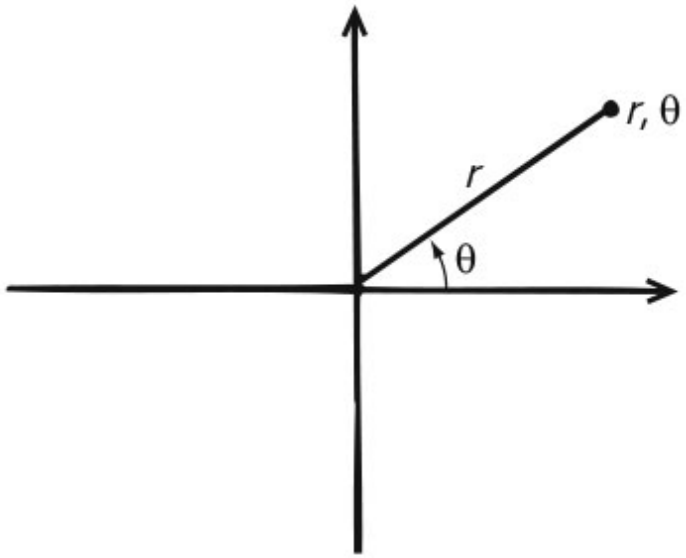
Пожалуй, главный вклад концепции координат проявляется именно в этом: Декарт смог уйти от греческого взгляда на кривые как на объекты, построенные с помощью особых геометрических приспособлений, и увидел в них визуальное представление любой алгебраической формулы. Как заметил в 1707 г. Исаак Ньютон, «современный подход, но намного более глубокий [чем у греков], позволяет любую линию в геометрии выразить в виде уравнения».

Более поздние ученые изобрели множество вариантов декартовой системы координат. В письме от 1643 г. Ферма рассматривает идеи Декарта и развивает их для трехмерного пространства. Он упоминает такие поверхности, как эллипсоид и параболоид, описываемые квадратными уравнениями с тремя переменными *x*, *y*, *z*. Важным вкладом было введение Якобом Бернулли *полярных координат* в 1691 г. Чтобы определять точки на плоскости, он использовал угол θ и расстояние *r* вместо пары осей. Теперь эти координаты стали обозначать как (*r*, θ).



Декартов лист

И снова уравнения соответствуют определенным кривым. Но теперь простые уравнения могут описать кривые, которые были чрезвычайно сложными в декартовых координатах. Например, $r = \theta$ описывает спираль, ту самую, что уже известна нам как *архимедова*.



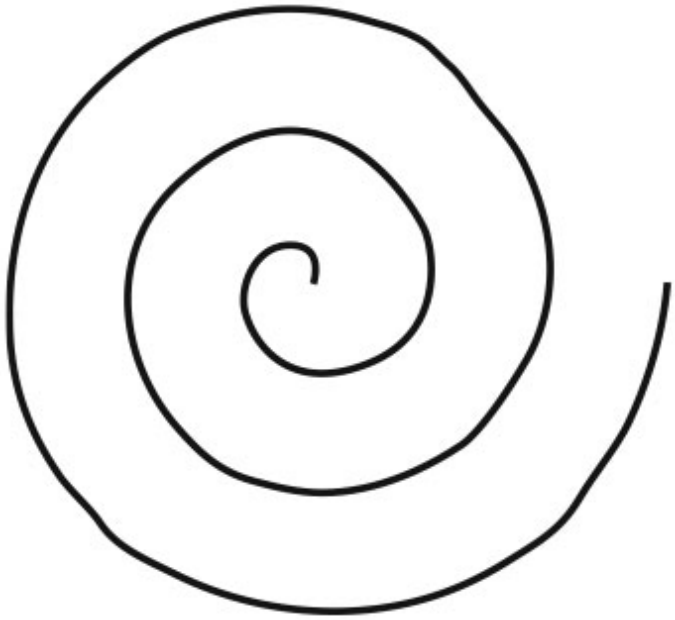
Полярные координаты

Функции

Важнейшее применение координат в математике – метод графического представления функций.

Функция – не число, но отношение между элементами, когда изменение в одном влечет перемены в другом. Оно часто выражается в формуле, которая приписывает каждому числу, x (возможно, с предварительными ограничениями), другое число, $f(x)$.

Например, функция квадратного корня определяется правилом $f(x) = \sqrt{x}$, т. е. извлечением квадратного корня из данного числа. Это отношение требует, чтобы x было положительным. Квадратная функция определяется уравнением $f(x) = x^2$, на этот раз нет ограничения для x.

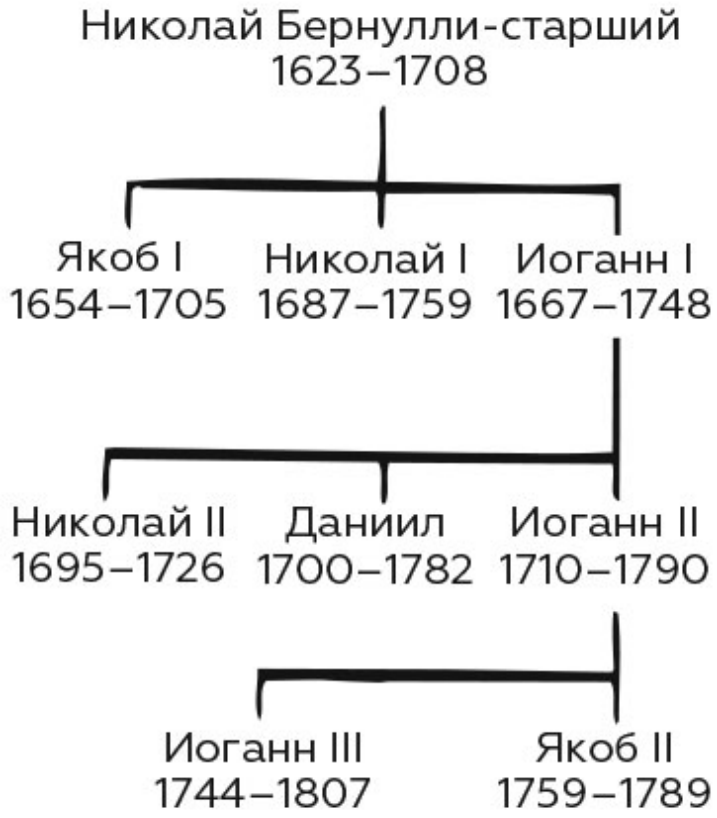


Архимедова спираль

Мы можем геометрически изобразить функцию, определяя координату y по заданному уравнению для x: $y = f(x)$. Это уравнение задает отношение между двумя координатами и таким образом определяет форму кривой. Такая кривая называется *графиком* функции f.

КТО ИЗ БЕРНУЛЛИ ЭТО СДЕЛАЛ?

На развитие математики заметно повлияло швейцарское семейство Бернулли. На протяжении четырех поколений из него выходили выдающиеся математики, поражавшие своим талантом. Часто называемые математической мафией, Бернулли обычно начинали свою карьеру в качестве слуг закона, медицины или церкви, но рано или поздно возвращались к главному призванию – математике, на профессиональном или любительском уровне.



Якоб I (1654–1705)

Изобрел полярные координаты, формулу для радиуса кривизны плоской кривой. Изучил специальные кривые, такие как цепная линия и лемниската. Вывел доказательство, что изохрона (кривая, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные

отрезки) является перевернутой циклоидой. Изучал изопериметрические фигуры, имеющие кратчайшую длину при различных условиях; позже это привело к развитию вариационного исчисления. Один из первых исследователей теории вероятностей и автор первой книги на эту тему, «Искусство предположений» («Ars conjectandi»). Якоб завещал выгравировать на своей могиле логарифмическую спираль и надпись на латыни: «Eadem mutata resurgo» («Измененная, я вновь воскресаю»).

Иоганн I (1667–1748)

Ввел новые способы счисления и распространил их в Европе. Маркиз де Лопиталь опубликовал труды Иоганна в своем первом учебнике по исчислению (точное название «Анализ бесконечно малых»). Правило Лопиталя для нахождения пределов, раскрывающих неопределенности вида 0/0, – заслуга Иоганна. Написал труды по оптике (отражение и рефракция), об ортогональных траекториях семейства кривых, длинах кривых и нахождении площадей с помощью интегрального исчисления, по аналитической тригонометрии и экспоненциальным функциям. Вычислил брахистохрону (кривую скорейшего спуска) и длину циклоиды.

Николай I (1687–1759)

Занял кафедру Галилея в Падуе. Написал труды по геометрии и дифференциальным уравнениям. Позже преподавал логику и право. Одаренный, но не слишком продуктивный математик. Вел переписку с Лейбницем, Эйлером и другими выдающимися учеными: его главное наследие – около 560 писем. Сформулировал Санкт-Петербургский парадокс в теории вероятностей.

Критиковал использование Эйлером расходящихся рядов. Способствовал посмертной публикации труда Якоба Бернулли «Искусство предположений». Поддерживал Лейбница в его противостоянии с Ньютоном.

Николай II (1695–1726)

Был приглашен преподавать в академии Санкт-Петербурга и утонул восемь месяцев спустя. Дискутировал с Даниилом по поводу Санкт-Петербургского парадокса.

Даниил (1700–1782)

Самый известный из трех сыновей Иоганна. Работал с теорией вероятностей, астрономией, физикой и гидродинамикой. Его труд «Гидродинамика» 1738 г. содержит описание закона Бернулли – связи между давлением и скоростью. Исследовал морские приливы, кинетическую теорию газов и колебание струн. Пионер в исследовании дифференциальных уравнений с частными производными.

Иоганн II (1710–1790)

Младший из трех сыновей Иоганна. Изучал право, но стал профессором математики в Базеле. Работал над математической теорией света и тепла.

Иоганн III (1744–1807)

Как и его отец, изучал право, но в итоге обратился к математике. В 19 лет был приглашен в Берлинскую академию наук. Автор трудов по астрономии, теории вероятностей и периодическим десятичным дробям.

Якоб II (1759–1789)

Автор важных работ по теории упругости, гидростатике и баллистике.

График функции $f(x) = x^2$ оказывается параболой. График функции квадратного корня $f(x) = \sqrt{x}$ образует половину параболы, которая «лежит на боку». Чем сложнее функция, тем сложнее описывающее ее уравнение. График функции синуса с уравнением $y = \sin x$ – волнообразная кривая.

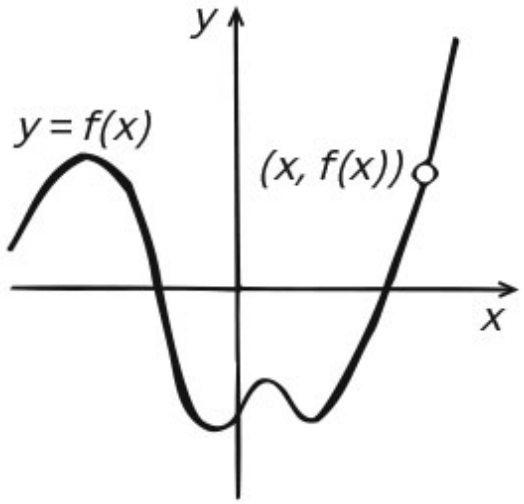
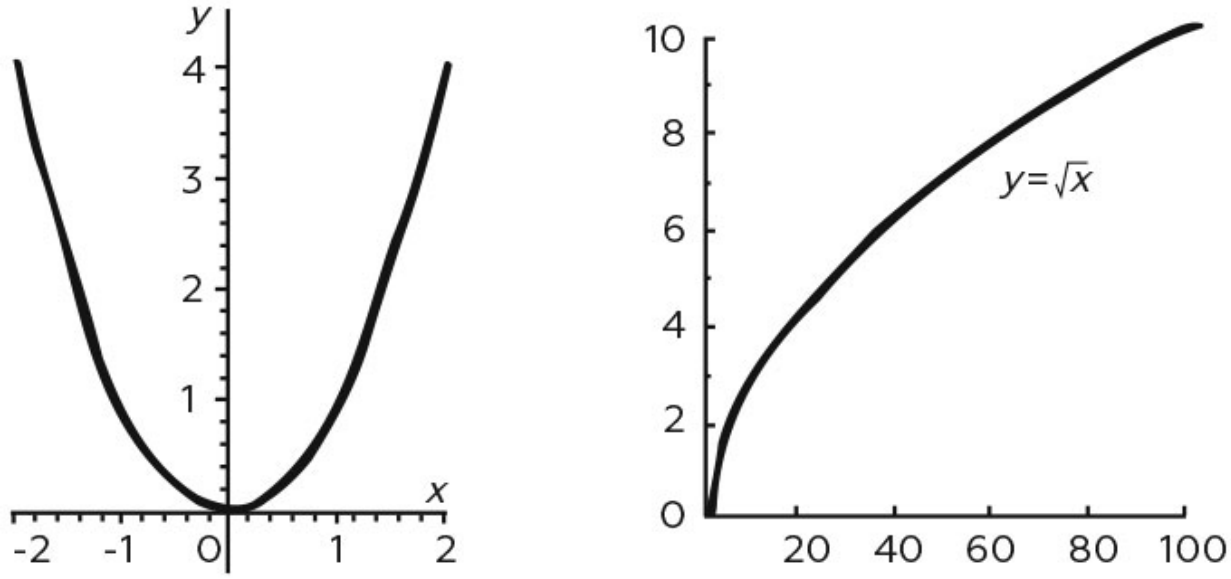


График функции *f*

Геометрия координат сегодня

Координаты – одна из тех простых идей, которые заметно изменили нашу жизнь. Мы используем их повсеместно, как правило, не отдавая себе в этом отчета. По сути, все графики в компьютере используют внутреннюю систему координат, а геометрия, демонстрируемая на экране, задана алгеброй. Даже такая простая операция, как поворот фотографии на несколько градусов, чтобы выровнять линию горизонта, основана на геометрии координат.



Графики квадратичной функции и функции квадратного корня

Еще более важное послание от геометрии координат связано с перекрестными связями в математике. Концепция, чья физическая реализация выглядит совершенно иной, может оказаться просто иным аспектом одного и того же объекта. Первое впечатление порой обманчиво. Математика оказалась настолько эффективной во многом потому, что стала способом взглянуть на привычные явления с точки зрения их восприимчивости к новым идеям, переходящим из одной области науки в другую. Математика незаменима для обмена технологиями. И именно перекрестные связи, впервые открытые еще 4000 лет назад, сделали математику таким всеобъемлющим, уникальным предметом.

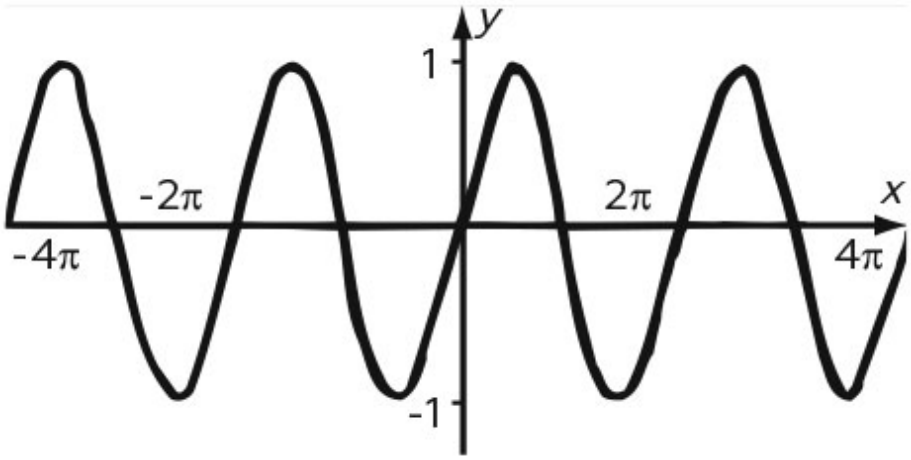
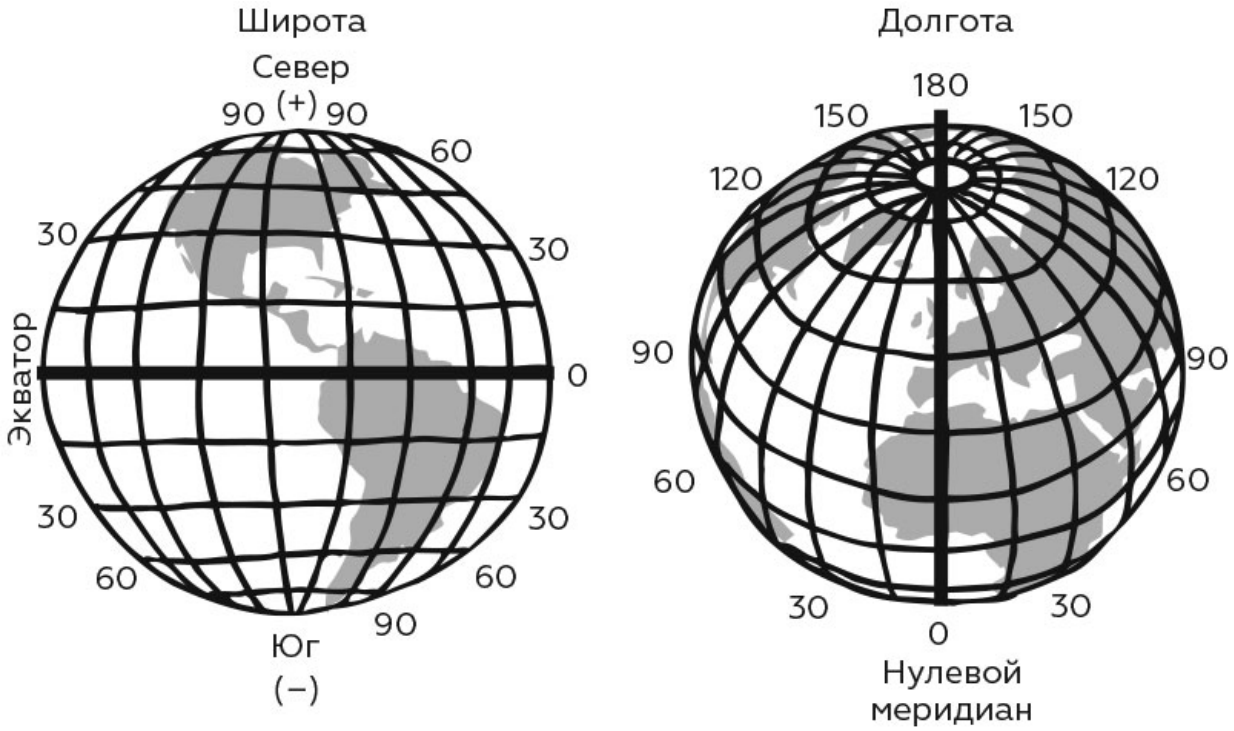


График функции синус

ЧТО КООРДИНАТЫ ДАЛИ ИМ

Геометрия координат может применяться на поверхностях более сложных, чем плоскость, например на сфере. Нам хорошо знакома такая система координат на ней, как долгота и широта. Вся картография, а также использование карт в навигации могут рассматриваться как практическое приложение геометрии координат.

Для капитанов главной проблемой навигации было определение широты и долготы, на которых оказался их корабль. С широтой обстояло немного проще: угол подъема солнца над горизонтом зависит от нее и может быть подсчитан. С 1730 г. стандартным инструментом для определения широты был секстант (в наши дни практически вытесненный из обихода системой GPS). Его изобрел Ньютон, но не опубликовал свое открытие. И его самостоятельно заново открыли двое: английский математик Джон Хэдли и американский изобретатель Томас Годфри. До той поры мореходы пользовались только астролябией, которая восходит к арабскому Средневековью.



Долгота и широта в качестве координат

Долгота – более коварная координата. Но проблему в итоге удалось решить при помощи высокоточных часов, выставленных на местное время в начале плавания. Время восхода и захода солнца, а также движение луны и звезд, зависящие от долготы, позволяли определить ее путем сравнения местного времени и того, что показывают часы. История изобретения Джоном Харрисоном хронометра, решившего проблему, изложена в известной книге Давы Собел «Долгота».

ЧТО КООРДИНАТЫ ДАЮТ НАМ

Мы по-прежнему используем координаты на картах, но еще одним примером активного применения стали графики колебаний цен на рынке ценных бумаг, где все изменения изображаются в виде кривой. Здесь по оси *x* отложено время,

а по оси *y* – цена. Трудно перечислить все виды финансовых и научных данных, отображаемых таким способом.



Данные рынка ценных бумаг, представленные в системе координат

Глава 7. Такие разные числа

Начала теории чисел

Несмотря на увлечение геометрией, математики никогда не теряли интереса к числам. Они стали задавать всё более сложные вопросы и на многие из них нашли ответы сами. Ряд вопросов удалось решить позже благодаря новым методам. А некоторые остались нерешенными по сей день.

Теория чисел

Числа всегда нас завораживали. Понятные, незатейливые, 1, 2, 3, 4, 5… Кажется, что может быть проще? Но под этой внешней простотой таятся неведомые глубины, и большинство неприступных вопросов в математике касаются самых очевидных свойств целых чисел. Эта область известна как теория чисел, и на поверку она оказалась очень сложной, поскольку ее составляющие касаются самых основ науки. Как раз простота целых чисел и оставляет так мало возможностей для сложных методов.

Самые первые шаги в теории чисел – которые доказаны фактами, а не одними предположениями – обнаруживаются в трудах Евклида, где эти идеи слегка завуалированы под геометрию. Теория чисел была выделена в отдельную область математики древним греком Диофантом, отрывки работ которого дошли до нас в более поздних списках. Теория чисел пережила период бурного развития в 1600-х гг., а благодаря работам Ферма и дальнейшим разработкам Леонарда Эйлера, Жозефа-Луи Лагранжа и Карла Фридриха Гаусса она превратилась в обширную самостоятельную область математики, тесно связанную со многими науками, на первый взгляд не имеющими к ней отношения. Именно эта связь была использована в конце XX в. для ответа на многие – хоть и не все – древние загадки, включая самую известную и интригующую: предположение Ферма, сформулированное им около 1650 г. и известное как Великая теорема (или Последняя теорема).

Большую часть своей истории теория чисел касалась сугубо математических научных трудов и почти не влияла на реальный мир. Если когда-то и существовала ветвь математической мысли, интересная лишь отшельникам, живущим в башнях из слоновой кости, то это могла быть только теория чисел. Однако всё изменилось с изобретением компьютеров. Они работают с электронным представлением целых чисел, и проблемы и возможности, связанные с ними, постоянно возвращают ученых к теории чисел. После 2500 лет существования в виде игр чистого разума теория чисел стала частью реальной жизни.

Простые числа

Любой, кому доводилось перемножать целые числа, замечал их фундаментальные отличия.

Многие числа можно разделить на меньшие части, из которых искомое получается путем их перемножения. Например, 10 можно получить умножением 2 на 5, а 12 равно 3 × 4. Но некоторые числа так разделить невозможно. Мы не можем выразить 11 как произведение двух *меньших* целых чисел, то же относится к 2, 3, 5, 7 и многим другим.

Составные числа – те, которые можно выразить как произведение двух меньших. *Простые числа* – те, которые нельзя так выразить. Согласно этому определению, 1 должно считаться простым числом, но в силу важных причин его решено выделить в отдельный класс и обозначать как *единицу*. Итак, первые простые числа выглядят так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41

По этому списку видно, что для простых чисел нет очевидного шаблона (за исключением того, что все, кроме первого, нечетные). Кажется, они появляются беспорядочно, и нет способа предсказать, каким будет следующее в списке. Но даже тогда несомненно, что это число всё же можно *определить* – одно за другим проверяя все последующие, пока снова не найдете простое.

Несмотря или, скорее, благодаря своему беспорядочному распределению они жизненно важны в математике. Они являются основными строительными блоками для всех прочих чисел, в том смысле, что бо́льшие числа получаются умножением меньших.

Химия утверждает, что любая молекула, какой бы сложной она ни была, состоит из атомов – неделимых частиц материи. А математика говорит нам, что любое число, каким бы большим оно ни было, состоит из простых – неделимых. Простые числа – это атомы теории чисел.

Это свойство простых чисел очень полезно, потому что в математике многие вопросы могут быть решены для всех целых чисел, если их решить для простых чисел, а простые числа имеют такие особые свойства, что иногда облегчают процесс. Эта дуальность простых чисел – простота, но непредсказуемость – всегда была предметом любопытства ученых.

Евклид

Евклид описал простые числа в книге VII «Начал» и доказал три их ключевых свойства. В современном изложении это звучит так.

• Любое число можно представить как производное простых чисел.

• Это выражение будет уникальным, за исключением порядка, в котором появляются простые числа.

• Простых чисел бесконечно много.

Однако то, что Евклид на самом деле утверждал, и то, что он доказал, – не совсем одно и то же. Предложение 31 из книги VII утверждает, что всякое составное число измеряется каким-то первым (простым) числом, т. е. его можно точно разделить на это простое число. Например, 30 – составное, и оно точно делится на несколько простых чисел, среди которых есть 5: действительно, 30 = 6 × 5. Повторяя этот процесс поиска *делителя* в виде простого числа или множителя, мы можем разложить любое составное число на произведение простых. Так, начав с 30 = 6 × 5, мы находим, что 6 также является составным (2 × 3). Теперь 30 = 2 × 3 × 5, причем все три множителя простые. Это была факторизация числа 30. Если бы мы начали с 30 = 10 × 3, нам пришлось бы вместо этого разложить 10, т. е. 10 = 2 × 5, т. е. 30 = 2 × 5 × 3. Получаем те же три простых числа, но перемноженные в другом порядке, – что, конечно, не влияет на результат.

Может показаться очевидным, что, каким бы образом мы ни раскладывали число на простые, мы всегда получим одинаковый результат, за исключением их порядка, но доказать это не так просто. Похожие утверждения для некоторых систем чисел, связанных математическими соотношениями, на поверку оказываются *ложными*, хотя для обычных целых чисел они и верны. Разложение на простые множители *уникально*. Евклид доказал ключевой факт, необходимый для утверждения об уникальности, в «Началах». Предложение 30, книга VII: если простое число делит произведение из двух чисел, то оно должно делить по крайней мере одно из них. Уникальность факторизации – прямое следствие предложения 30.

ПОЧЕМУ УНИКАЛЬНЫ И НЕ ТАК ОЧЕВИДНЫ ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Коль скоро мы признаем простые числа атомами теории чисел, вроде бы логично предположить, что при делении чисел на простые должны всегда получаться *одинаковые* атомы. В конце концов, атомы – неделимые частицы. Если вы можете поделить число двумя разными способами, не будет ли это расщеплением атома? И вот здесь аналогия с химией немного неточная.

Чтобы понять, что уникальность факторизации не очевидна, мы можем взять неполный набор чисел:

1 5 9 13 17 21 25 29

и т. д. Здесь выбраны числа, которые на единицу больше чисел, кратных 4. Произведения этих чисел также обладают схожими свойствами, т. е. мы можем построить такие числа, умножая меньшие числа подобного типа. Назовем квазипростыми любые числа в этом ряду, не являющиеся произведениями двух меньших в *исходном ряду*. Например, 9 будет квазипростым: меньше его только 1 и 5, а их произведение не равно 9. (То, что 9 = 3 × 3, остается в силе, но в исходном ряду у нас не было 3.) Очевидно – и верно, – что каждое составное число в ряду является произведением квазипростых. Однако, хотя эти квазипростые числа оказываются атомами для данного ряда, выходит нечто весьма странное. Число 693 (693 = 692 + 1, где 692 = 173 × 4, кратно 4) можно разбить двумя разными способами: 693 = 9 × 77 = 21 × 33, и все четыре множителя: 9, 21, 33 и 77 – *квазипростые*. А значит, уникальность факторизации не работает для этого типа чисел.

Предложение 20, книга IX, утверждает: «Простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел». В современном изложении это значит, что множество простых бесконечно. В доказательство можно привести пример: представьте, что существует только три простых числа: *a*, *b* и *c*. Перемножьте их и прибавьте единицу, вот так: *abc* + 1. Это число должно делиться на

какое-то простое, но оно не может быть одним из этих трех первоначальных, поскольку они нацело делят *abc*, но ни одно из них не сможет также разделить *abc* + 1, ведь тогда им придется делить еще и разницу, которая равна 1. Получается, что мы обнаружили еще одно простое число, а это противоречит предположению о существовании только трех простых чисел *a*, *b*, *c*.

Хотя в доказательстве Евклида использовано всего три числа, та же идея работает и для более длинного списка. Перемножьте все простые числа в нем, добавьте единицу, затем возьмите несколько простых множителей и проверьте результат: вы всегда сгенерируете новое число, которого нет в списке. То есть невозможно составить полный законченный перечень простых чисел.

НАИБОЛЬШЕЕ ИЗВЕСТНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО

Наибольшего простого числа не существует, но в сентябре 2006 г. было найдено наибольшее известное простое число, равное $2^{32\ 582\ 657} - 1$, в котором есть 9 808 358 десятичных цифр[5]. Числа вида $2^p - 1$, где p – простое число, называются числами Мерсенна, по имени ученого, в своем труде «Физико-математические размышления» (1644 г.) показавшего, что эти числа являются простыми для p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 и 257 и составными для всех остальных целых чисел, меньших 257.

Сейчас существуют специальные высокоскоростные методы проверки таких чисел, и мы знаем о пяти ошибках Мерсенна. Его числа получаются составными, если p = 67 и 257, и есть три пропущенных им простых числа с p = 61, 89, 107. На сегодня известно 49 чисел Мерсенна. Поиски новых могут считаться хорошей проверкой новых компьютеров, но не имеют практического значения.

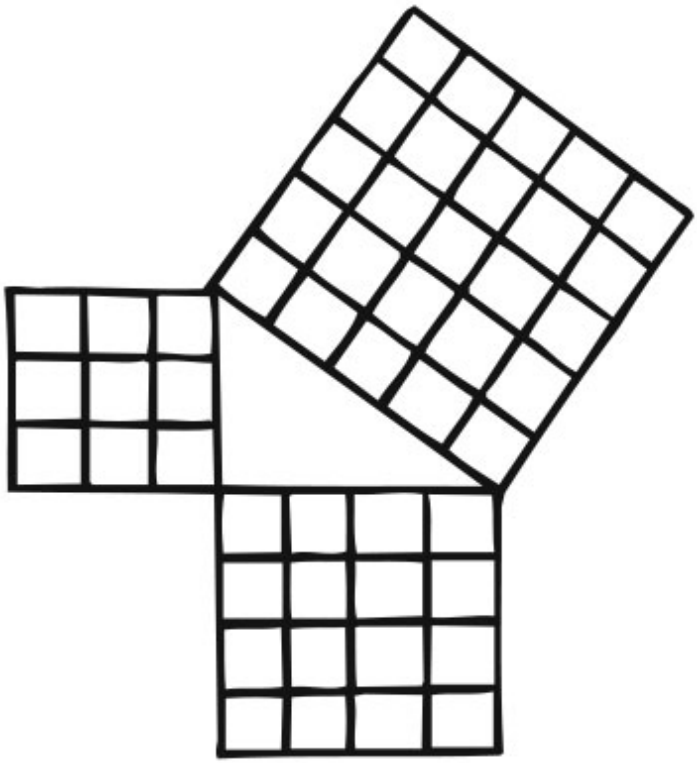
Диофант

Мы уже упоминали Диофанта Александрийского в связи с алгебраическими символами, но самое большое влияние на математику он оказал в области теории чисел. Он предпочитал изучать более глобальные вопросы, а не свойства отдельных чисел, хотя его *ответы* как раз и представляют собой отдельные числа. Например, «найдите три таких числа, чтобы их сумма, а также сумма любых двух из них являлась полным квадратом». Его ответ был 41, 80 и 320.

Для проверки: сумма всех трех $441 = 21^2$.

Сумма каждой пары: $41 + 80 = 11^2$, $41 + 320 = 19^2$ и $80 + 320 = 20^2$.

Одним из самых известных уравнений, решенных Диофантом, является любопытное изложение теоремы Пифагора. Мы можем выразить ее алгебраически: если у прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c сторона c – самая длинная, то $a^2 + b^2 = c^2$. Найдено несколько особенных прямоугольных треугольников, у которых стороны – целые числа. Самым простым и известным является треугольник, у которого стороны a, b, c соответственно равны 3, 4, 5; здесь $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Следующий самый простой пример: $5^2 + 12^2 = 13^2$.



Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц

На самом деле таких *пифагоровых троек* бесконечное множество. Диофант нашел все возможные решения с целыми числами, которые мы можем сейчас записать в виде уравнения $a^2 + b^2 = c^2$. Его метод состоит в том, чтобы взять любые два целых числа и получить разницу между их квадратами, удвоить их произведение и сложить их квадраты. Три таких числа обязательно составляют пифагорову тройку, и все треугольники, полученные таким путем, обеспечат нас возможностью строить по ним другие тройки, если все три числа умножить на одинаковую константу. Например, если взять числа 1 и 2, мы получим знаменитый треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Соответственно, поскольку есть бесконечно много способов выбрать эти два числа, существует бесконечное множество пифагоровых троек.

ФермА

После Диофанта теория чисел буксовала целое тысячелетие, пока ею не заинтересовался Ферма, сделавший немало важных открытий. Одна из его самых изящных теорем говорит нам, когда данное целое число n представимо в виде суммы квадратов двух чисел: $n = a^2 + b^2$. Решение находится легко, если n – простое число.

Ферма отметил, что существует три главных вида простых чисел:

а) 2, единственное четное простое;

б) простые числа, которые больше на единицу чисел, кратных 4, такие как 5, 13, 17 и т. д., – все нечетные;

в) простые числа, которые меньше на единицу чисел, кратных 4, такие как 3, 7, 11 и т. д., – тоже нечетные.

ЧЕГО МЫ НЕ ЗНАЕМ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Даже в наши дни простые числа не раскрыли всех своих тайн. Две самых известных из них – проблема Гольдбаха и гипотеза о бесконечном числе простых чисел-близнецов.

Христиан Гольдбах – известный математик, состоявший в переписке с Леонардом Эйлером. В письме от 1742 г. он формулирует утверждение о том, что каждое целое число, большее 2, можно представить в виде суммы трех простых. Гольдбах считал 1 простым числом. Сейчас оно таковым не считается, потому мы должны исключить числа 3 = 1 + 1 + 1 и 4 = 2 + 1 + 1. Эйлер сделал гипотезу еще строже: каждое четное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых. Например, 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, 10 = 5 + 5 и т. д. Эта гипотеза подразумевает точность гипотезы Гольдбаха. Эйлер не сомневался в своей правоте, но не смог найти доказательство, и до сих пор такового нет. Проверка на компьютере показывает, что гипотеза верна для всех четных чисел вплоть до 10^{18}. Лучший известный на сегодняшний день результат получен в 1973 г. Чэнь Цзинжунем с использованием сложных методов анализа. Он доказал, что

любое достаточно большое четное число является суммой двух простых или суммой простого и полупростого числа (произведения двух простых).

Гипотеза о простых числах-близнецах намного старше и ведет свое начало со времен Евклида. Она утверждает, что существует бесконечно много пар *простых чисел-близнецов p* и $p + 2$. Примеры – 5 и 7 или 11 и 13. Опять-таки, у нас нет ни доказательств, ни опровержений гипотезы. В 1966 г. Чэнь доказал, что существует бесконечно много простых чисел *p*, для которых и $p + 2$ являются простыми или полупростыми. На сегодняшний день самой большой из них считается пара $2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1$, обнаруженная в сентябре 2016 г.

Ферма утверждал, что простое число есть сумма двух квадратов, если оно принадлежит к типу *а* или *б*, но не является суммой двух квадратов, если принадлежит к типу *в*. Например, 37 относится к типу *б*, так как его можно представить как $4 \times 9 + 1$, и $37 = 6^2 + 1^2$ – это сумма двух квадратов. А $31 = 4 \times 8–1$ относится к типу *в*, и если вы испробуете все возможные способы выразить его как сумму двух квадратов, у вас ничего не получится. (Например, $31 = 25 + 6$, где 25 – квадрат, а 6 – нет.)

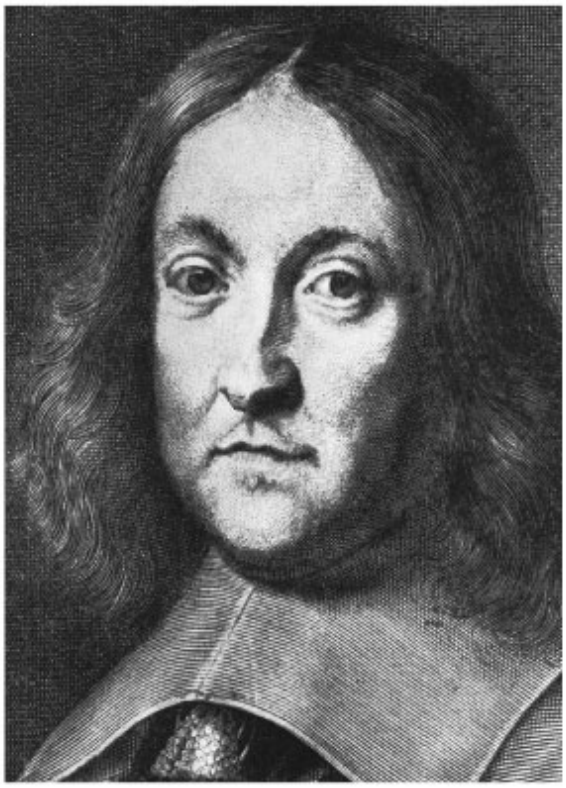
Вывод таков: число является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда любой его простой делитель вида $4k – 1$ имеет четную степень. Используя подобные методы, Жозеф-Луи Лагранж в 1770 г. доказал, что любое положительное целое число есть сумма четырех квадратов целых чисел (включая один или два нуля, если необходимо). Ферма еще раньше говорил об этом, но не представил доказательств.

Одно из самых влиятельных открытий Ферма одновременно оказалось самым простым. Оно известно как Малая теорема Ферма, чтобы отличать ее от Последней (иногда называемой Великой), и утверждает, что если *p* – любое простое число и *a* – любое целое число, то $a^p – a$ кратно *p*. Описанное свойство *обычно* неверно, когда *p* составное число, но не всегда.

На доказательство самой знаменитой теоремы Ферма ушло 350 лет. Он сформулировал ее примерно в 1640 г. и заявил, что доказал ее, однако всё, что нам известно о ней, – не более чем короткое

примечание. У Ферма имелась собственная копия «Арифметики» Диофанта, вдохновившая его на большинство исследований, и он часто записывал на полях свои мысли. Судя по всему, в какой-то момент он задумался над уравнением Пифагора – сложением двух квадратов, чтобы получить тоже квадрат. Он захотел понять, что получится, если вместо квадратов поставить кубы, но не нашел решения. Та же проблема возникла и с четвертой, и с пятой, и с прочими степенями. В 1670 г. сын Ферма Самуэль опубликовал новую редакцию перевода «Арифметики» Гаспара Баше, в которую вошли и заметки на полях, сделанные Ферма.

ПЬЕР ДЕ ФЕРМА 1601–1665



Пьер Ферма родился в 1601 г. во Франции, в городке Бомон-де-Ломань, в семье торговца кожами Доминика Ферма и Клэр де Лонг, дочери потомственного юриста. К 1629 г. он успел сделать ряд важных открытий в геометрии и методах исчисления, но предпочел карьеру юриста и выкупил

должность королевского советника парламента (члена высшего суда) в Тулузе в 1631 г. Так он получил приставку «де» к своему имени. После эпидемии чумы, унесшей жизни многих его предшественников, он быстро сделал карьеру. Уже в 1648 г. он стал членом Палаты эдиктов, где и служил до конца жизни, достигнув в 1652 г. высшей должности – председателя уголовного суда.

Он никогда не стремился к академической карьере, но математика была его страстью. В 1653 г. он заразился чумой, и пошли слухи о его скорой смерти, но он выжил. Он вел активную переписку с другими мыслителями своего времени, особенно с математиком Пьером де Каркави и монахом Мареном Мерсенном.

Он работал в сферах механики, оптики, теории вероятностей и геометрии, а его способ определения максимума и минимума функции проложил дорогу современному дифференциальному исчислению. Он стал одним из ведущих математиков мира, но почти не публиковал свои работы, главным образом из-за нежелания тратить время на их подготовку к печати.

Самое долгое влияние на науку имела его теория чисел, где он подтолкнул многих математиков к поиску доказательств ряда теорем и решения задач. Среди них (неверно названное) уравнение Пелля $nx^2 + 1 = y^2$ и утверждение, что сумма двух кубов, не равных нулю, сама кубом быть не может. Это частное утверждение из более общей гипотезы, Последней теоремы Ферма, где кубы заменили n-й степенью для любой величины $n \geq 3$.

Ферма скончался в 1665 г., через два дня после того, как вынес очередной приговор.

Одной из них стало известное утверждение, что если $n \geq 3$, сумма двух чисел в степени n не может быть производным числом в степени n. В приписке на полях говорилось: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, бо́льшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Кажется маловероятным, что, даже если это доказательство существовало, оно было корректно. Первым и пока единственным стало доказательство Эндрю Уайлса, найденное в 1994 г. Оно использует сложнейшие абстрактные методы, разработанные только в XX в.

После Ферма многие выдающиеся математики трудились над развитием теории чисел, среди них Лагранж и Эйлер. За это время удалось найти доказательство многих из сформулированных, но не доказанных Ферма теорем.

Гаусс

Следующий важный шаг в теории чисел сделал Гаусс, опубликовавший в 1801 г. свой шедевр «Арифметические исследования». Книга сразу обеспечила теории чисел ведущую роль в математической науке. Отныне и впредь она оставалась ключевым компонентом математического мейнстрима. Гаусс в основном занимался собственными, новыми исследованиями, но также сумел заложить основы современной теории чисел и систематизировать идеи предшественников.

Одной из самых важных фундаментальных перемен была простая, но великолепная идея – *модульная арифметика*. Гаусс открыл новый вид числовой системы, аналогичный целым числам, но отличный в одном важном аспекте: некое определенное число, или *модуль*, было отождествлено с числом 0. Эта любопытная идея оказалась фундаментальной для нашего понимания свойств делимости обычных целых чисел.

Вот как выглядит идея Гаусса. Для целого числа m чи*сла* a и b *сравнимы по модулю* m, обозначенному так:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

если разница $a - b$ делится на m без остатка. Тогда арифметика по модулю m работает точно так же, как простая арифметика, но теперь мы можем заменить m на 0 на любом этапе вычислений. А значит, любое умножение на число m можно игнорировать.

Чтобы передать дух идеи Гаусса, часто прибегают к выражению «арифметика часов». На часах число 12 можно считать эквивалентным 0, поскольку каждые 12 часов их значения повторяются (для континентальной Европы или военных более привычны 24 часа). Семь часов после шести часов будут обозначаться не 13, а 1 час, и по системе Гаусса $13 \equiv 1 \pmod{12}$. Модульная арифметика подобна часам, для которых потребуется m часов на прохождение полного круга. Ничего удивительного, что модульная арифметика позволяет исследовать любые объекты, которые меняются по повторяющимся циклам.

«Арифметические исследования» используют модульную арифметику как основу для более глубоких идей, о трех из которых мы упомянем в этой книге.

Значительная ее часть описывает дальнейшее развитие наблюдений Ферма о том, что простые числа вида $4k + 1$ являются суммой двух квадратов, а простые числа вида $4k - 1$ – нет. Гаусс подтвердил этот результат как свойство целых чисел, которые можно записать в виде $x^2 + y^2$, где и x, и y – целые числа. Затем он спрашивает, что получится, если вместо этой формулы мы используем общую *квадратичную форму:* $ax^2 + bxy + cy^2$? Его теоремы слишком сложны для того, чтобы обсуждать их здесь, но дают практически полное понимание этого вопроса.

Следующая тема – закон квадратичной взаимности, завороживший и лишивший Гаусса покоя на долгие годы. Отправной точкой стал простой вопрос: как выглядят полные квадраты чисел по заданному модулю? Предположим, что модуль равен 11. Тогда получается последовательность квадратов (для чисел меньше 11):

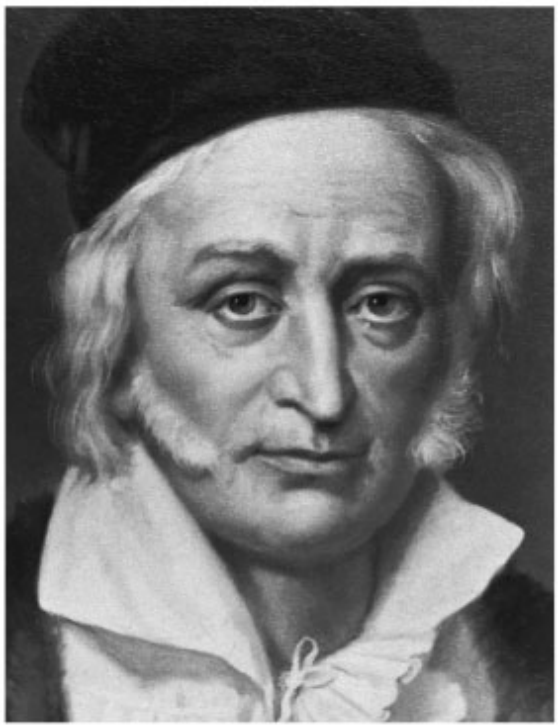
0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100,

откуда, уменьшая (по mod 11), получаем:

0 1 3 4 5 9,

где каждое число, не равное 0, появляется дважды. Эти числа и есть *квадратичные вычеты* по модулю 11.

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС 1777−1855



Гаусс был очень развитым ребенком, даже исправлял арифметические ошибки отца. В 1792 г. на стипендию, положенную ему герцогом Брауншвейгским, Гаусс поступил учиться в престижный Каролинум-колледж. Там он сделал несколько важных математических открытий, в их числе квадратичный закон взаимности и теорема о простых числах, но не сумел их доказать. С 1795 по 1798 г. он обучался в Гёттингене, где нашел способ построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. Его «Арифметические исследования», один из важнейших трудов по теории чисел, увидели свет в 1801 г.

Публичная репутация Гаусса, несмотря на это, опирается на астрономическое предсказание. В 1801 г. Джузеппе Пиацци открыл первый астероид – Цереру. Его наблюдения были столь неполны, что астрономы боялись не найти небесное тело снова, когда то покажется из-за Солнца. Поэтому многие астрономы взялись предсказать, где Церера появится вновь, в том числе Гаусс. Но прав оказался только он. Фактически Гаусс воспользовался методом, ставшим возможным благодаря его открытию, которое известно в наши

дни как метод наименьших квадратов и позволяет получить точные результаты в условиях ограниченных наблюдений. Ученый не опубликовал в свое время этот метод, хотя в итоге он лег в основу статистики и наблюдательных исследований.

В 1805 г. Гаусс женился на Иоганне Остгоф, которую горячо любил, а в 1807 г. перебрался из Брауншвейга в Гёттинген, где стал директором обсерватории. В 1808 г. скончался его отец, следом в 1809 г. родами второго сына умерла Иоганна, а вскоре и их новорожденный малыш.

Несмотря на все эти личные трагедии, Гаусс продолжил исследования и в 1809 г. опубликовал «Теорию движения небесных тел, движущихся в конических сечениях вокруг Солнца», в которой есть положения, до сих пор лежащие в основе вычислений небесной механики. Он женился снова на подруге Иоганны, Минне, но это был брак не по любви, а скорее по расчету.

Примерно в 1816 г. Гаусс составил обзор умозаключений из аксиомы параллельности, отличной от других аксиом Евклида, в которых он придерживается точки зрения, скорее всего, появившейся еще в 1800 г.: о возможности существования логически обоснованной геометрии, отличной от евклидовой.

В 1818 г. ему поручили провести геодезическую съемку Ганновера, в ходе которой он сделал несколько значительных вкладов в методы геодезии. В 1831 г., после кончины Минны, Гаусс вместе с физиком Вильгельмом Вебером приступил к изучению магнитного поля Земли.

Он открыл законы, известные нам как правила Кирхгофа для электрических цепей, и даже собрал пусть и неуклюжий, но вполне работоспособный телеграф. Когда в 1837 г. Веберу пришлось покинуть Ганновер, научная активность Гаусса пошла на спад, хотя он продолжал интересоваться трудами коллег, особенно Фердинанда Эйзенштейна и Георга Бернхарда Римана. Гаусс мирно скончался во сне.

Ответ на этот вопрос лежит в области простых чисел. Если p и q – простые числа, когда q является квадратом по mod p? Гаусс открыл, что если нет способа просто и прямо ответить на этот вопрос, то можно

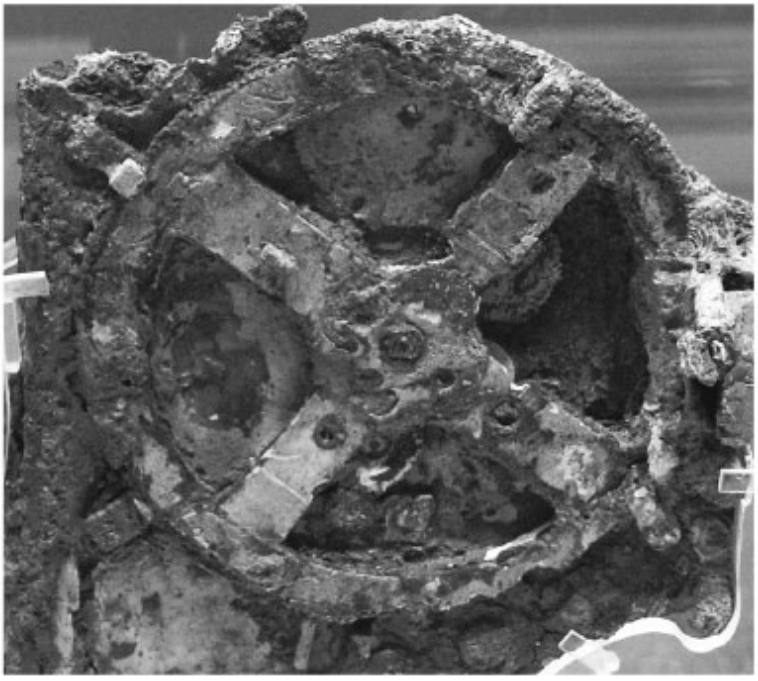
задать другой, имеющий прямое отношение к предыдущему: когда p является квадратом по mod q? Например, приведенный выше перечень квадратичных вычетов показывает, что $q = 5$ является квадратом по модулю $p \equiv 11$. Также верно и то, что 11 является квадратным модулем 5, потому что $11 \equiv 1 \pmod 5$ и $1 \equiv 1^2$. В общем, ответ на оба вопроса один.

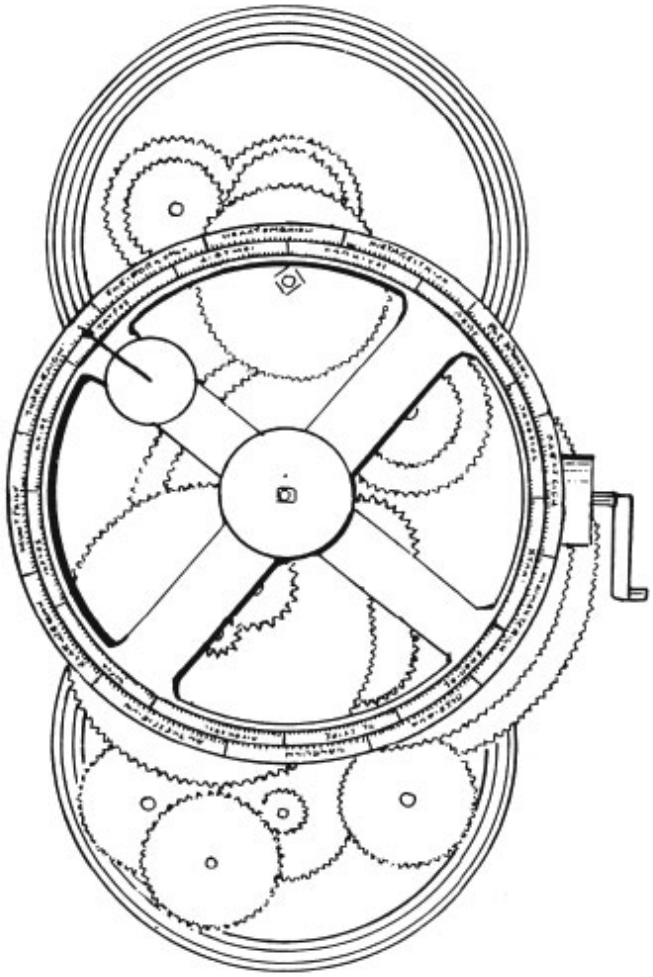
Гаусс доказал, что его квадратичный закон взаимности справедлив для любой пары случайно взятых нечетных простых чисел, за исключением тех вариантов, когда оба можно описать как $4k - 1$. Тогда на два вопроса есть два противоположных ответа. Например: для любых случайно взятых простых чисел p и q второе число есть квадрат по mod p тогда и только тогда, когда p есть квадрат по mod q, в случае, если p и q не описываются формулой $4k - 1$. Иначе q есть квадрат по mod p тогда и только тогда, когда p не есть квадрат по mod q.

Поначалу Гаусс не подозревал, что это не первое утверждение такого рода: Эйлер уже успел отметить ту же зависимость. Но, в отличие от Эйлера, Гаусс сумел доказать, что оно всегда верно. Доказательство оказалось крайне сложным, и у Гаусса ушло несколько лет на то, чтобы ликвидировать эту небольшую, но ключевую брешь.

ЧТО ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ ДАЛА ИМ

Одним из самых ранних применений теории чисел являются шестерни. Если два зубчатых колеса помещены так близко, что зубцы одного входят между зубцами другого, причем у одного m, а у другого n зубцов, то их совместное движение будет зависеть от этих чисел. Например, пусть у одного колеса 30 зубцов, а у другого семь. Если большое колесо совершит ровно один полный поворот, что будет с меньшим? Оно будет возвращаться в исходную позицию после 7, 14, 21 и 28 шагов. Тогда ему потребуются еще два завершающих шага до полных тридцати. Это число – остаток, который получается при делении 30 на 7. Значит, движение колес является механическим воплощением примера на деление с остатком, это и есть основа модульной арифметики.





Антикитерский механизм и его реконструкция

Зубчатые колеса использовали еще древние греки для создания замечательного устройства – антикитерского механизма. В 1900 г. в окрестностях острова Антикитера ловец губок Элиас Стадиатис поднял с глубины 40 м бесформенную окаменелость, датированную примерно 65 г. до н. э. В 1902 г. археолог Валериос Стаис обнаружил, что в камне скрыты остатки зубчатого колеса и что на самом деле это часть сложного бронзового механизма. На нем были выгравированы слова, написанные буквами греческого алфавита. По имевшимся у ученых описаниям и форме объекта удалось определить, что это древний астрономический калькулятор. Он состоял минимум из 30 зубчатых колес (по последней реконструкции 2006 г. их было 37). Количество зубцов соответствовало основным астрономическим соотношениям. В частности, два колеса имели по 53 зубца – не самое простое число для изготовления детали. Оно соответствует частоте появления Луны на самом большом удалении от Земли по ходу ее орбиты. Все простые множители из числа зубцов были взяты из двух главных астрономических циклов: метонического и сароса. Рентгенологическое исследование выявило новые надписи и позволило их прочесть; теперь нет сомнений, что прибор использовался для определения положения Солнца, Луны и, возможно, всех известных тогда десяти планет. Эти надписи датируют 150–100 гг. до н. э.

Антикитерский механизм – сложнейший прибор, и, судя по всему, его создавали на основе теории Гиппарха о движении Луны. Вероятно, здесь не обошлось без участия его учеников. Также возможно, что прибор был игрушкой одного из членов царской семьи – судя по изощренности и дороговизне исполнения.

Третья важная тема «Исследований» – то самое открытие, которое подтолкнуло 19-летнего Гаусса посвятить всю свою жизнь математике: геометрическое построение правильного семнадцатиугольника

(многоугольника с 17 сторонами). Евклид, использовавший линейку и циркуль, описал построение правильных многоугольников с тремя, четырьмя, пятью и пятнадцатью сторонами; он также знал, что эти числа сторон можно последовательно удваивать делением углов пополам, получая правильные многоугольники с шестью, восемью, десятью сторонами и т. д. Но Евклид не сумел построить многоугольники с семью или девятью сторонами – по сути, ни для одного числа, отличного от перечисленных выше. И на протяжении почти 2000 лет математики считали, что последнее слово осталось за Евклидом и невозможно построить иные правильные многоугольники. Гаусс опроверг это убеждение.

Легко заметить, что проблема в построении правильных *p*-угольников возникает, когда *p* – простое число. Гаусс указал, что построение такой фигуры подобно решению алгебраического уравнения:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Теперь, благодаря геометрии координат, построение с помощью линейки и циркуля может быть рассмотрено как последовательность квадратных уравнений. Если построение такого рода существует, оно следует правилу (не совсем тривиально), что $p - 1$ должно быть степенью 2.

Варианты древних греков, где $p = 3$ и $p = 5$, удовлетворяли этому условию: здесь $p - 1$ равно 2 и 4 соответственно. Но не только эти два простых числа удовлетворяют условию. Например, $17 - 1 = 16$, тоже степень 2. Это еще не доказывает, что 17-угольник возможно построить, но дает серьезную зацепку, и Гауссу удалось найти блестящий способ сократить уравнение 16-й степени до последовательности квадратных уравнений. Он утверждал, хотя и не сумел доказать, что построение возможно для любого числа сторон *p*, если $p - 1$ составляет степень 2 (по-прежнему с условием, что *p* – простое число), и построение невозможно для всех других простых чисел. Доказательство вскоре было найдено другими учеными.

Эти особенные простые числа получили название *чисел Ферма*, потому что именно он их изучил. Он отметил, что если *p* – простое число и $p - 1 = 2^k$, то *k* само должно быть степенью 2. Он составил первую последовательность простых чисел Ферма: 2, 3, 5, 17, 257, 65

537. Он предположил, что числа вида $2^{2m} + 1$ всегда простые, но это оказалось ошибкой. Эйлер открыл, что когда $m = 5$, то оно имеет множитель, равный 641.

МАРИ-СОФИ ЖЕРМЕН 1776–1831



Софи Жермен была дочерью торговца шелком Амбруаза-Франсуа Жермена и Мари-Мадлен Грюлин. В 13 лет она прочла о том, как Архимеда убил римский солдат за то, что ученый пытался защитить свои чертежи на песке, и твердо решила стать математиком. Несмотря на все усилия родителей, из лучших побуждений пытавшихся ее отговорить, – в те времена математика была не лучшим занятием для юной девушки, – она прочла все труды Ньютона и Эйлера под одеялом по ночам. Наконец родители сдались перед таким упорством и стали ей помогать, обеспечив на всю жизнь финансовую поддержку. Ей удалось получить

конспекты лекций Парижской политехнической школы, и она отправила Лагранжу письмо с изложением ряда своих работ под псевдонимом мсье Леблан. Лагранж был впечатлен ее талантом и вскоре выяснил, что автор письма – женщина. Нисколько не смутившись, он с радостью стал ее наставником и покровителем. Они плодотворно работали вместе, и некоторые результаты этих трудов были включены позже в труд Лежандра «Опыт теории чисел» («Essai sur le Théorie des Nombres», 1798).

Самым прославленным из ее собеседников был Гаусс. Софи изучила «Арифметические исследования» и с 1804 по 1809 г. создала целый ряд писем их автору, снова скрывая свой пол под псевдонимом Леблан. Гаусс давал высокую оценку работам Леблана в письмах другим ученым. В 1806 г., когда французы оккупировали Брауншвейг, он обнаружил, что на самом деле мсье Леблан – женщина. Устрашившись того, что Гаусса может постичь участь Архимеда, Софи обратилась за помощью к старинному другу ее семьи, одному из высокопоставленных чинов во французской армии генералу Пернети. Гауссу стало известно об этом ходатайстве, и тогда он узнал, что Леблан и есть Софи.

Но Софи тревожилась напрасно. На Гаусса новость подействовала ошеломляюще, и он написал ей: «Но как передать мой восторг и трепет при открытии, что мой досточтимый корреспондент, мсье Леблан, чудесным образом преобразился в столь поразительное создание… Женщина из-за своего пола и наших предрассудков встречается со значительно более трудными препятствиями, чем мужчина, постигая сложные научные проблемы. Но когда она преодолевает эти барьеры и проникает в тайны мироздания, она несомненно проявляет благородную смелость, исключительный талант и высшую гениальность».

Софи получила ряд результатов в работе над Великой теоремой Ферма, и никто не сумел ее превзойти в этом вплоть до 1840 г. С 1810 по 1820 г. она работала над законами колебаний упругих пластинок и за свой труд получила медаль Французской академии наук. В частности, объявленный

Академией конкурс касался так называемых фигур Хладни. Эти неожиданные узоры образуются при вибрации покрытых песком металлических пластинок под действием скрипичного смычка. Хотя и с третьей попытки, но в итоге Софи получила золотую медаль, однако по неизвестным причинам – возможно, в знак протеста из-за несправедливого отношения к ней как к женщине – не явилась на церемонию награждения.

В 1829 г. у Софи развился рак груди, но она продолжила исследования по теории чисел и кривизне поверхностей. Через два года ее не стало.

Далее можно предположить, что существует возможность построить с помощью линейки и циркуля многоугольники с 257 и 65 537 сторонами. В 1832 г. Фридрих-Юлиус Ришло построил многоугольник с 257 сторонами, и его работа не содержит ошибок. Иоганн Гермес десять лет посвятил тому, чтобы построить многоугольник с 65 537 сторонами, и добился успеха в 1894 г. Однако недавние исследования показали, что он ошибся.

Теория чисел становится интересной с точки зрения математики благодаря работам Ферма, открывшего многие закономерности в странном и сложном поведении простых чисел. Но его раздражающее пренебрежение доказательствами своих открытий пришлось компенсировать Эйлеру, Лагранжу и ряду менее значительных ученых, за единственным исключением Великой теоремы. Однако теория чисел в основном как раз и состояла из таких теорем – подчас поражающих своей глубиной и сложностью, но практически не связанных между собою.

ЧТО ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ ДАЕТ НАМ

На теории чисел основаны многие коды безопасности, применяемые в интернет-торговле. Самый известный из них – криптосистема RSA (Рональд Ривест, Ади Шамир и Леонард Адлеман), обладающая уникальной особенностью: зашифрованные сообщения могут быть посланы публично,

при этом нет возможности провести обратную процедуру, т. е. дешифровку.

Предположим, Алиса собралась отправить тайное послание Бобу. Предварительно они условились о том, какое значение будут иметь большие простые числа p и q (каждое должно состоять по меньшей мере из 100 знаков), и перемножили их, чтобы получить $M = pq$. При желании они даже могут обнародовать это число. Также они вычисляют $K = (p - 1)(q - 1)$, но этот результат держат в секрете.

Теперь Алиса представляет свое послание как число x в пределах от 0 до M – 1 (или последовательность таких чисел, если послание длинное). Для кодирования она выбирает число a, не имеющее общих множителей с K, и вычисляет $y = -x^a \pmod{M}$. Число a должно быть известно Бобу, его также можно не скрывать.

Чтобы расшифровать сообщение, Бобу необходимо знать b, удовлетворяющее условию $ab \equiv 1 \bmod K$. Это число (которое существует и уникально) держится в тайне. Чтобы расшифровать y, Боб вычисляет:

$y^b \pmod{M}$.

Почему это можно дешифровать? Потому что

$y^b \equiv (x^a)^b \equiv x^{ab} \equiv x^1 \equiv x \pmod{M}$,

согласно обобщению Малой теоремы Ферма, сделанному Эйлером.

Этот метод вполне практичен, поскольку существуют эффективные тесты для поиска больших простых чисел. Но пока нет действенного способа искать простые множители для больших чисел. А значит, даже зная произведение pq, посторонний не сможет вычислить p *и* q, а без этого невозможно найти значение b – ключ ко всему шифру.

Ситуация кардинально изменилась, когда за дело взялся Гаусс и открыл общие концептуальные основы теории чисел, такие как модульная арифметика. Также своими исследованиями свойств правильных многоугольников он связал теорию чисел с геометрией. С этого момента теория чисел превратилась в заметную нить на пестром ковре математики.

Интуиция Гаусса привела математиков к открытию принципиально новых структур – новых числовых систем, таких как целые числа по mod *n*, а также математических действий, таких как композиция квадратичных форм. Благодаря новым открытиям теория чисел конца XVIII – начала XIX в. породила абстрактную алгебру конца XIX – начала XX в. Математики уже не боялись выходить за рамки привычных концепций и структур в своих исследованиях. Несмотря на узкоспециализированную тему, «Арифметические исследования» стали значительной вехой на пути создания современного подхода к математике в целом. И это одна из причин, почему математики так высоко оценивают роль Гаусса.

Вплоть до конца XX в. теория чисел пребывала в рамках чистой математики – любопытная сама по себе, с многочисленными способами приложения к собственно математическим исследованиям. Но она всё еще не играла особой роли для остального мира. Однако всё изменилось с момента изобретения цифровой связи в конце XX в. Как только она стала полностью зависеть от чисел, теория чисел предсказуемо оказалась на переднем крае. Чтобы хорошая математическая идея обрела практическое значение, могут уйти годы – а иногда даже сотни лет, – но рано или поздно любая область, некогда считавшаяся важной только среди математиков, находит дорогу в реальный мир и занимает там подобающее ей место.

Глава 8. Система мира

Изобретение исчисления

Самым значительным прорывом в истории математики можно считать исчисление, независимо открытое примерно в 1680 г. Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем. Лейбниц первым опубликовал свой труд, но Ньютон – подталкиваемый патриотично настроенными друзьями – заявил о своем первенстве и обвинил Лейбница в плагиате. Этот конфликт почти на 100 лет разорвал связи между английскими математиками и учеными с континента, и в итоге в проигрыше оказались англичане.

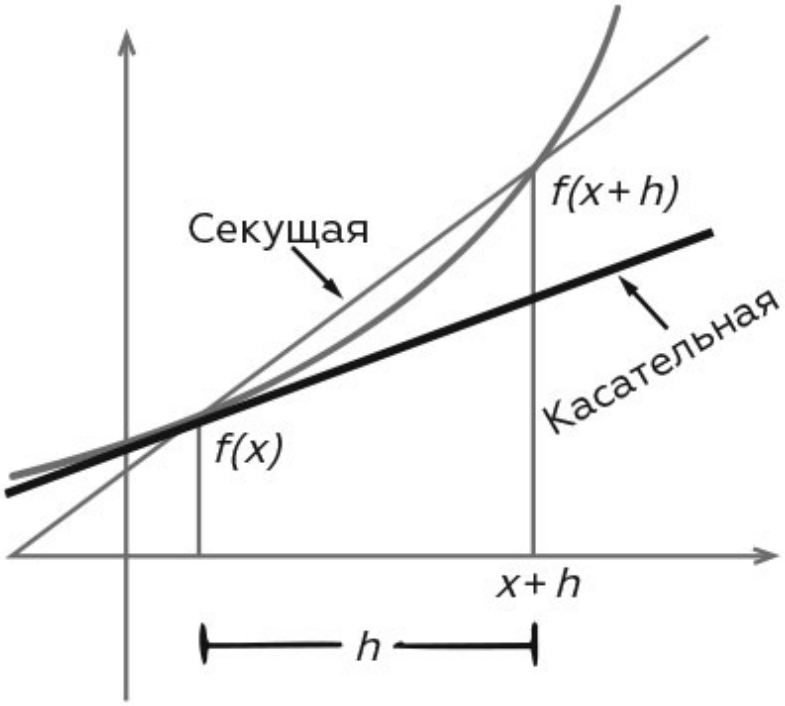
Система мира

Хотя Лейбниц скорее мог бы претендовать на первенство в открытии исчисления, Ньютон превратил его в главную технику зарождающейся отрасли науки – классической физики, позже ставшей главным инструментом в познании человечеством мира природы. Сам Ньютон назвал свою теорию «Система мира». Пожалуй, звучит не очень скромно, зато точно определяет предмет. До Ньютона представления людей о законах природы в основном исходили из идей Галилея о движении тел, в частности параболической траектории полета пушечного ядра, а также открытой Кеплером эллиптической формы орбиты Марса в небесах. После Ньютона математические формулы пронизали почти все области физического мира: движение земных и небесных тел, потока воздуха и воды, передачи тепла, света, звука, силу тяготения.

Тем более любопытно, что в главном опубликованном Ньютоном труде, «Математические начала натуральной философии», исчисление не упоминается вообще. Он посвящен изящному применению геометрии в стиле, заданном древними греками. Но внешность порой обманчива: неопубликованные документы, известные как «Портсмутские бумаги», доказывают, что во время работы над «Началами» Ньютон сформировал представление об идее исчисления. Очень похоже, что ученый *использовал* методы исчисления в большинстве своих открытий, однако предпочел не распространяться о них. Его наработки были опубликованы уже после его смерти, в книге «Метод флюксий и бесконечных рядов», в 1732 г.

Исчисление

Что такое исчисление? Метод, изобретенный Ньютоном и Лейбницем, проще понять, ознакомившись с более ранними идеями. Исчисление – это математика мгновенных изменений: насколько быстро изменяется определенная величина в *это самое мгновение*. Вот пример из физики: поезд движется по рельсам; как быстро он едет прямо сейчас? Исчисление делится на две главные ветви. *Дифференциальное исчисление* обеспечивает методы измерения скорости изменений и в большинстве случаев приложимо к геометрии, в частности при нахождении касательных к кривым. *Интегральное исчисление* подразумевает противоположное действие: исходя из скорости изменения некой величины, оно позволяет найти саму величину. Геометрические приложения интегрального исчисления включают способы вычисления площадей и объемов. Пожалуй, самым значительным открытием как раз и стала эта неожиданная связь между двумя внешне независимыми геометрическими вопросами: нахождение касательных к кривым и нахождение площадей.



Геометрический смысл производной

Исчисление неразрывно связано с *функциями* – действиями, когда берется некое исходное число и определяется другое, связанное с ним. Как правило, такое действие описывается формулой, где данному числу, обозначенному как x (возможно, с некими дополнительными условиями), вводится в соответствие число $f(x)$. В качестве примеров можно привести функцию квадратного корня $f(x) = \sqrt{x}$ (в этом случае x должно быть неотрицательным числом) и квадратную функцию $f(x) = x^2$ (в этом случае для x нет никаких условий).

Первой ключевой идеей исчисления является *дифференцирование*, т. е. взятие *производной* функции. Производная – это скорость изменения функции $f(x)$, сравниваемая с изменением x, т. е. скорость изменения $f(x)$ относительно x.

Геометрически скорость изменения – это тангенс угла наклона графика f в точке x. К нему можно приблизиться, определив угол наклона секущей – линии, пересекающей график в двух наиболее близких точках, соответствующих x, и $x + h$, где h невелико. Угол наклона секущей равен:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Теперь предположим, что h – очень малая величина. Тогда секущая приблизится к касательной на графике в точке x. Так что в определенном смысле необходимый угол наклона – производная f в точке x – будет пределом для этого выражения, поскольку h становится сколько угодно малым.

Попробуем произвести это вычисление для простого примера, $f(x) = x^2$. Получаем:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

А поскольку h становится всё меньше, угол наклона $2x + h$ всё ближе к $2x$. Производная f – это функция g, равная $g(x) = 2x$.

Здесь главный концептуальный вопрос в том, что мы подразумеваем под пределом. У математиков ушел почти век на то, чтобы дать ему логичное определение.

Другой ветвью исчисления стало интегральное. Этот процесс проще всего представить как обратный дифференцированию. Интеграл g, описанный формулой

$$\int g(x)\,dx^2;$$

является любой функцией $f(x)$, производная которой – $g(x)$. Например, поскольку производная $f(x) = x^2$ есть $g(x) = 2x$, интеграл от $g(x) = 2x$ равен $f(x) = x^2$.

$$\int 2x \cdot dx = x^2.$$

Необходимость в исчислении

Толчок к изобретению исчисления дали два направления. В области чистой математики дифференциальное исчисление эволюционировало из методов поиска касательной к кривой, а интегральное исчисление – из методов расчета площадей плоских фигур и объемов тел. Но главный стимул для исчисления пришел от физиков – в связи с укреплявшимся убеждением в том, что природа имеет свои законы. По причинам, до сих пор не полностью нам понятным, большинство фундаментальных законов природы включают в себя переменные. А значит, их можно исследовать и понять только с помощью исчисления.

В эпохи, предшествовавшие Возрождению, самую точную модель движения Солнца, Луны и планет удалось создать Птолемею. В его системе Земля оставалась неподвижной, а все остальные тела – в частности, Солнце – вращались вокруг по некоему набору (реальных или воображаемых – на усмотрение рассуждающего) окружностей. Последние преобразовались в сферы в работах древнегреческого астронома Гиппарха. Его сферы вращались вокруг гигантских осей, часть из которых были связаны с другими сферами и двигались по ним. Этот вид взаимосвязей казался необходимым для моделей планетарных орбит. Причем некоторые планеты, такие как Венера, Меркурий и Марс, на первый взгляд имели сложные орбиты, включавшие петли. Другие – Юпитер и Сатурн (остальные планеты тогда еще не были открыты) – вели себя более прилично, но даже они временами выкидывали странные штуки, известные еще древним вавилонянам.

Мы уже обсуждали систему Птолемея, известную как эпициклы, где окружности заменяли сферы, но сохранялась единая схема движения. Модель Гиппарха не была достаточно точной по сравнению с фактическими наблюдениями, а модель Птолемея отлично отражала все данные астрономов. Это сделало ее единственно «верной» на тысячу лет. Его труды, переведенные на арабский язык в «Альмагесте», служили астрономам многих культур.

Вера против науки

Но даже «Альмагест» не отражал всех передвижений планет. Вдобавок он был довольно сложен. Примерно в 1000 г. н. э. некоторые арабские и европейские мыслители стали задаваться вопросом, не следует ли объяснить дневное движение Солнца вращением Земли, а кое-кто даже пошел дальше и предположил, что Земля сама вращается вокруг Солнца. Но в то время эти идеи так и остались домыслами.

В эпоху Возрождения научный подход к описанию мира всё больше укоренялся среди передовых мыслителей, и во многом причиной тому были сами религиозные догмы. В то время католическая церковь безраздельно владела умами приверженцев и диктовала им свой взгляд на устройство Вселенной. И дело было не только в том, что христианскому богу приписывалось как само ее сотворение, так и всё, что происходило в ней каждый день. Церковь считала, что единственно верное толкование законов природы можно искать только в Библии, в буквальном смысле. Земля должна была считаться центром всего, непоколебимой основой, вокруг которой вращаются небеса. А человек, как вершина творения, провозглашался причиной создания остальной Вселенной.

Ни одно научное наблюдение не показало до сих пор признаков существования невидимого, непознаваемого творца. Но те же наблюдения поколебали убеждения в том, что Земля – центр Вселенной. И это стало причиной великого противостояния, в котором лишились жизни многие невинные люди, причем зачастую самыми жестокими и варварскими способами.

ИОГАНН КЕПЛЕР 1571–1630



Кеплер родился в семье наемника и дочери трактирщика. Когда в 18 лет он остался без отца (скорее всего, тот погиб в войне между Нидерландами и Священной Римской империей), им с матерью пришлось перебраться к деду, в его трактир. Юноша очень рано продемонстрировал математические способности и в 1589 г. был принят стипендиатом для занятий астрономией под руководством Михаэля Мёстлина в Университете Тюбингена. Здесь он досконально изучил систему Птолемея. В тот период астрономов больше интересовало точное вычисление орбит всех планет, никто не задавался общими вопросами о том, почему они движутся так, а не иначе. Но Кеплера с самого начала завораживали незримые тропы, по которым перемещаются небесные тела, а не предсказуемые сочетания эпициклов. Как только ему удалось познакомиться с системой Коперника, Кеплер поверил, что это и есть единственно верная идея, а не только математическая уловка.

Работа с Браге. В своей книге «Тайна мироздания» (Mysterium Cosmographicum, 1596) Кеплер попытался сопоставить орбитам пяти известных тогда планет (сферу Земли он выделял особо) различные платоновы тела (правильные многогранники). Эта странная модель не идеально сочеталась с фактическими наблюдениями, и Кеплер написал ведущему астроному Тихо Браге. Тот взял его к себе помощником по математической части, чтобы вычислить точную орбиту Марса. После смерти Браге Кеплер продолжал работу над этой проблемой. Браге оставил множество данных, и Кеплер, не жалея сил, пытался уложить их в разумную орбиту. Свой труд, под конец занявший около тысячи страниц, он называл «моей войной с Марсом». Полученная им орбита оказалась настолько точной, что расхождение с современными данными составляет всего несколько минут, накопившихся за прошедшие столетия.

Трудные времена. 1611-й был плохим годом. У Кеплера умер семилетний сын. Следом ушла жена. Император Рудольф, не притеснявший протестантов, отрекся от престола, и Кеплеру пришлось покинуть Прагу. В 1613 г. он женился во второй раз, и вопрос, который возник у него во время свадебных торжеств, привел к написанию книги «Новая стереометрия винных бочек» (1615).

В 1619 г. ученый опубликовал продолжение «Тайны мироздания». Эта книга отражает богатство новой математики, в ней много рисунков, похожих на плиточные узоры, а также многогранников. Во время работы над книгой ему сообщили, что его мать обвинили в колдовстве. При помощи факультета права Университета Тюбингена женщину удалось освободить, отчасти благодаря тому, что дознаватели не успели прибегнуть к предписанным в таком случае пыткам.

Коперник

Масла в огонь подлили в 1543 г., когда польский ученый Николай Коперник опубликовал поразительную, оригинальную и в чем-то еретическую книгу «О вращении небесных сфер». Как и Птолемей, для точности он использовал эпициклы. В отличие от Птолемея, в центр он поместил Солнце, а все остальные небесные тела, в том числе Земля (за исключением Луны), вращались вокруг него. Только Луна ходила вокруг Земли.

Главная причина такого радикального предположения Коперника была вполне прагматичной: вместо 77 эпициклов Птолемея у него оставалось всего 34. Среди эпициклов Птолемея встречалось много повторяющихся окружностей: то и дело обнаруживались фигуры одного и того же размера и скорости вращения, описывающие многие отдельные тела. Коперник обнаружил, что если все эти эпициклы приписать Земле, достаточно всего одного из них. Сейчас мы интерпретируем это в терминах движения планет относительно Земли. Если мы ошибочно предположим, что Земля неподвижна, как может показаться неискушенному наблюдателю, то ее движение вокруг Солнца как раз и придется переносить на другие планеты при помощи того самого дополнительного эпицикла.

Еще одним преимуществом теории Коперника стало то, что он придал всем планетам равный статус. Птолемею понадобились различные механизмы, чтобы описать движение планет, внутренних и внешних. Теперь же единственным отличием оставалось то, что внутренние планеты ближе к Солнцу, чем Земля, а остальные – дальше. Всё это выглядит очень логично и стройно – но было безоговорочно отвергнуто всеми учеными по многим причинам, не только религиозным.

Теория Коперника оказалась сложной, непривычной, а его книга – трудной для прочтения. Тихо Браге, один из лучших астрономов того времени, обнаружил несовпадения между гелиоцентрической теорией Коперника и отдельными мелкими данными, не совпадавшими и с теорией Птолемея. Он попытался найти разумный компромисс.

Кеплер

Когда Браге умер, его научное наследие досталось Кеплеру, который потратил многие годы на поиск закономерностей в изобилии данных. Кеплер был последователем мистической пифагорейской традиции и пытался притянуть к имевшимся у него данным откровенно искусственные объяснения. Самой известной из этих бесплодных попыток найти закономерности в небесах стало его изящное, но ошибочное описание пространственного расположения планет с точки зрения платоновых тел. В его время ученым были известны шесть планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн. Кеплер задался вопросом, нельзя ли описать расстояния от них до Солнца с помощью геометрической модели. Более того, он задумался, почему планет именно шесть. Он обнаружил, что они явно оставляют место еще для пяти промежуточных форм, а поскольку геометрия описывала ровно пять правильных тел, это и ограничивает число планет шестью. Он предложил для них шесть сфер, где каждая несет орбиту на своем экваторе. А между ними, точно снаружи от одной сферы и внутри следующей, он разместил пять правильных тел в таком порядке:

Меркурий

Октаэдр

Венера

Икосаэдр

Земля

Додекаэдр

Марс

Тетраэдр

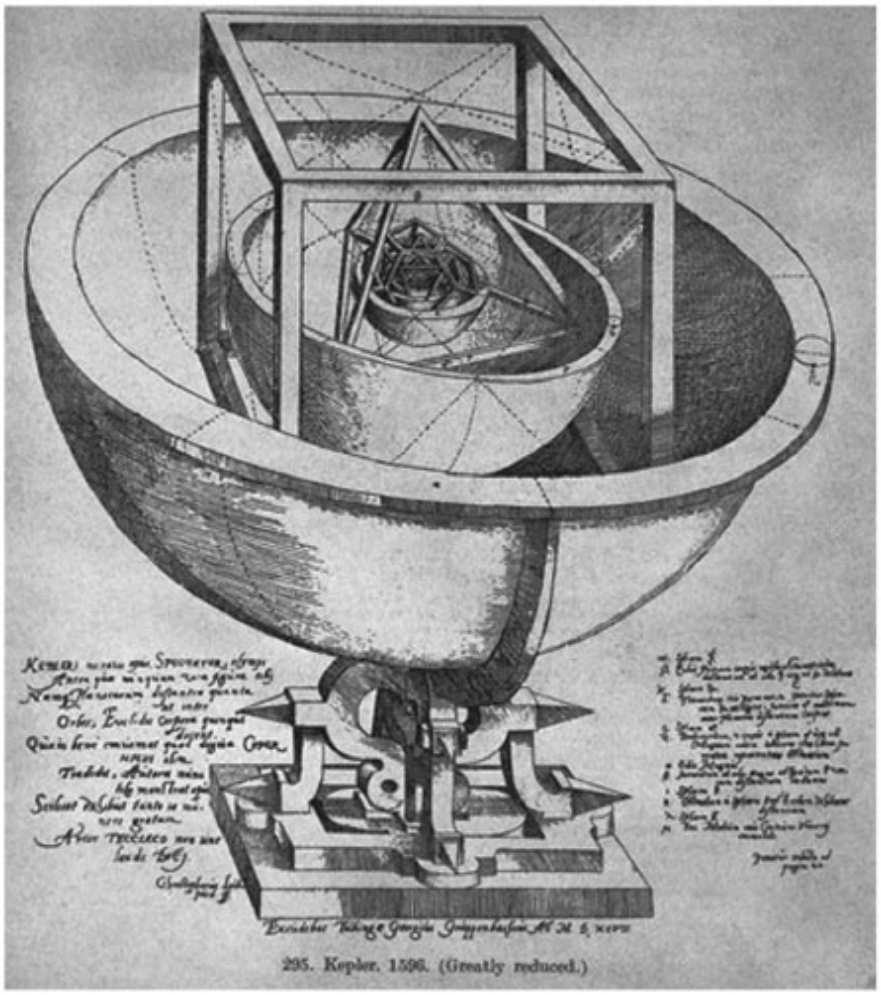
Юпитер

Куб

Сатурн

Все числа хорошо совпадали, особенно если учесть ограниченные возможности астрономов того времени. Но существовало 120 различных способов разместить пять правильных тел, так что

пространство в промежутках могло иметь разные размеры. Ничего удивительного, что один из этих вариантов оказался поразительно близок к реальности. Позже открытие новых планет нанесло роковой удар по всей теории, превратив ее в очередную тупиковую ветвь.



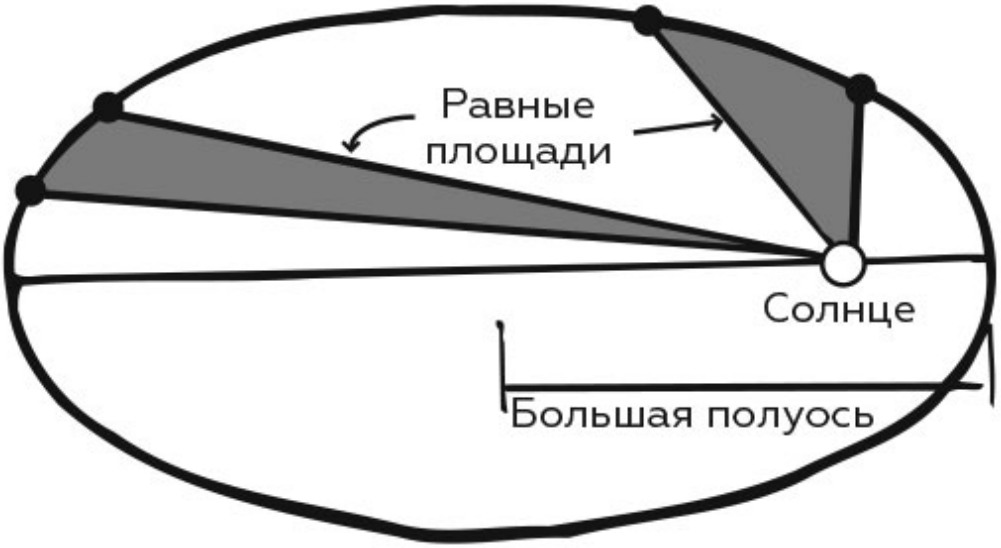
Теория Кеплера о расположении планетарных орбит

Однако в ходе своих исследований Кеплер открыл несколько законов, благодаря которым мы заслуженно считаем его гением. Эти *законы Кеплера* ученый установил интуитивно, исходя из анализа данных, собранных Тихо Браге. Вот как они звучат.

1. Все планеты Солнечной системы обращаются по эллипсам.

2. За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.



Движение планеты за равный промежуток времени

Самой оригинальной чертой работы Кеплера был отказ от классической окружности (якобы единственно возможной самой совершенной формы) в пользу эллипса. Этот шаг дался ученому с большим трудом, только когда он твердо убедился, что всё остальное не удовлетворяет его требованиям. У Кеплера не было оснований надеяться, что три закона будут точнее отражать реальность, чем гипотеза, основанная на платоновых телах, но это случилось. Три закона Кеплера имеют неоценимое значение для науки.

Галилей

Следующей выдающейся фигурой той эпохи стал Галилео Галилей, открывший математические формулы движения маятника и падающих тел. В 1589 г., занимая должность профессора математики в Пизанском университете, он проводил эксперименты по качению шара по наклонной плоскости, но не опубликовал результаты. Однако именно тогда он осознал важность контролируемого эксперимента для изучения законов природы: эта идея стала фундаментальной для науки. Он занимался астрономией и сделал несколько важных открытий, побудивших его признать теорию Коперника о гелиоцентрической планетарной системе. Это обострило его отношения с церковью, обвинившей ученого в ереси и посадившей под домашний арест.

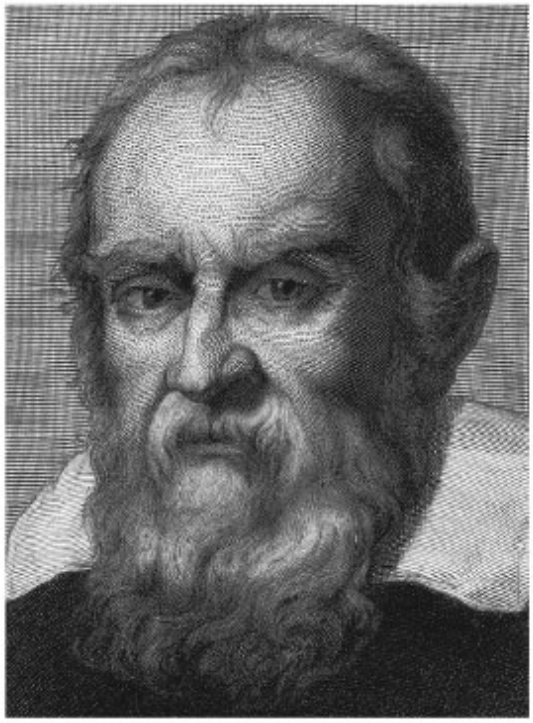
В последние годы жизни, уже окончательно ослабев здоровьем, Галилей создал «Беседы и математические доказательства двух новых наук», где объясняется его работа по движению тел на наклонных плоскостях. Он утверждал, что расстояние, на которое прокатится с постоянным ускорением изначально неподвижное тело, пропорционально квадрату времени. Основой его закона стало более раннее открытие, что снаряд летит по параболе. В сочетании с законами Кеплера о движении планет это заложило основу новой области науки – *механики*, математического описания движения тел.

Вот так и вышло, что физико-астрономические предпосылки привели ученых к исчислениям. Далее мы познакомимся с их математической основой.

Изобретение исчисления

Изобретение исчисления стало результатом более ранних исследований внешне не связанных проблем, обладавших скрытыми общими чертами. Сюда входит определение мгновенной скорости движения объекта в любой заданный момент, определение касательной к кривой, измерение длины кривой, определение максимального и минимального значения переменных величин, нахождение площади любой фигуры на плоскости и объема любого тела в пространстве. Ряд важных идей и примеров были разработаны Ферма, Декартом и не столь известным англичанином, Исааком Барроу, но методы решения по-прежнему оставались частными для каждой отдельной задачи. Требовался обобщенный поход.

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ 1564–1642



Галилео был сыном Винченцо Галилея, преподавателя музыки, использовавшего эксперименты со струнами для

подтверждения своей теории. В десять лет Галилео отдали на обучение в монастырь Валломброза с перспективой сделать его медиком. Но он не интересовался медициной и всё свое время посвящал математике и натуральной философии, которую позже мы назовем естественной наукой.

В 1589 г. Галилео занял пост профессора в Пизанском университете. В 1591 г. его пригласили на более высокооплачиваемое место в Университете Падуи, где он преподавал евклидову геометрию и астрономию студентам-медикам. В то время врачи широко прибегали к астрологии для лечения пациентов, и обе науки являлись обязательной частью программы обучения.

Узнав об изобретении телескопа, Галилео собрал для себя такой прибор. Он настолько поднаторел в этом, что поделился своими наработками с Венецианским сенатом, пообещав ему эксклюзивные права на прибор в обмен на повышение гонораров. В 1609 г. Галилей постоянно наблюдал за небом, и одно открытие следовало за другим: четыре луны Юпитера, отдельные звезды внутри Млечного Пути, горы на Луне. Козимо де Медичи, великий герцог Тосканы, был так впечатлен телескопом, что сделал Галилея своим первым математиком.

Он открыл существование пятен на Солнце и опубликовал свое открытие в 1612 г. К этому моменту собственные астрономические открытия убедили ученого в правоте теории Коперника, и в 1616 г. он публично выразил свое мнение в письме великой герцогине Кристине Лотарингской, утверждая, что теория Коперника отражает физическую реальность и это не просто практический способ упростить подсчеты.

На этот раз папа Павел V издал приказ инквизиции установить, верна или фальшива гелиоцентрическая теория, и инквизиторы признали ее ложью. Галилею приказали отказаться от теории, но на престол взошел новый папа, Урбан VIII, казавшийся более терпимым к этому открытию, и Галилей пренебрег запретом. В 1623 г. он опубликовал работу «Пробирных дел мастер» (итал. «Il Saggiatore»), посвятив ее

Урбану. В этом труде мы находим его знаменитое утверждение, что Вселенная «написана на языке математики, и знаки ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остается лишь блуждать в темном лабиринте».

В 1630 г. Галилей испросил позволения опубликовать новую книгу, «Диалог о двух системах мира», – сравнительный анализ геоцентрической и гелиоцентрической теорий. Когда в 1632 г. пришло разрешение на публикацию из Флоренции (но не из Рима!), он издал книгу. В ней утверждалось, что главным доказательством движения Земли являются морские приливы. Теория Галилея о приливах оказалась ошибочной, но церковные иерархи сочли этот труд настоящей бомбой под своей властью. Инквизиция запретила книгу, а Галилея призвали в Рим, на суд по обвинению в ереси. Ученого признали виновным, но пожизненное заключение заменили домашним арестом. Ему повезло по сравнению со многими другими еретиками, для которых сожжение у столба стало обычным наказанием. Под домашним арестом Галилей создал «Беседы», в которых изложил свою теорию движения небесных тел. Ее контрабандой удалось вывезти из Италии и напечатать в Голландии.

Лейбниц

Первый прорыв в этой области сделал Готфрид Вильгельм Лейбниц, юрист по профессии, посвятивший практически всю жизнь математике, логике, философии, истории и многим другим отраслям науки. Примерно в 1673 г. он начал работу над классической проблемой проведения касательной к кривой и обнаружил, что это обратная сторона проблемы измерения площадей и объемов. Последняя требовала найти кривую по заданной касательной, а первая подразумевала в точности обратное действие.

Воспользовавшись этой связью, в итоге Лейбниц сумел открыть то, что мы называем интегралами, используя сокращение omn (сокр. *omnia*, лат. «всё»). В его бумагах можно найти такие формулы:

$$\operatorname{omn} x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

К 1675 г. он уже заменил omn на знак ∫, используемый и по сей день и представляющий собой вытянутую букву s, обозначающую сумму. Он работал с понятиями бесконечно малых приращений *dx* и *dy* для величин *x* и *y* и использовал их соотношение *dy*/*dx* для определения скорости изменения *y* как функции *x*. Получается, что если *f* – это функция, Лейбниц мог написать:

dy = *f*(*x* + *dx*) – *f*(*x*),

таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx},$$

что и является обычной аппроксимацией секущей угла наклона касательной.

Лейбниц обнаружил, что это определение имеет свои недостатки. Если *dy* и *dx* не равны нулю, соотношение *dy*/*dx* будет не мгновенной скоростью изменения *y*, а лишь приближенным значением. Он

попытался обойти эту проблему, предположив, что *dy* и *dx* – бесконечно малые числа. Бесконечно малым считается число, не равное 0, но меньшее, чем любое другое число, не равное 0. К несчастью, сразу ясно, что таких чисел не существует (половина от бесконечно малого тоже будет не равна 0 и будет еще меньше), и такой подход – не что иное, как игнорирование проблемы.

К 1676 г. Лейбниц знал, как интегрировать и дифференцировать любую степень *x*, составив формулу

$dx^n = nx^{n-1}dx$,

которую сейчас мы пишем так:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

В 1677 г. он вывел правила дифференцирования суммы, произведения и частного для двух функций, а к 1680-му – формулу длины дуги кривой и объема тела вращения как интегралов от различных связанных величин.

Нам известны все эти факты, а также относящиеся к ним даты из его неопубликованных записок, но впервые свои идеи о методах исчисления он опубликовал намного позже, в 1684 г. Якоб и Иоганн Бернулли сочли эти записи туманными, назвав их «скорее загадкой, чем объяснением». Но теперь понятно, что к тому моменту Лейбниц успел открыть значительную часть основ исчисления, с возможностью применить их для таких сложных кривых, как циклоида, и приблизиться к пониманию таких концепций, как кривизна. К несчастью, его записки слишком отрывочны и не поддаются прочтению.

Ньютон

Еще одним создателем методов исчисления считается Ньютон. Двое его друзей, Исаак Барроу и Эдмунд Галлей, отдавали должное таланту ученого и убеждали в необходимости опубликовать его труды. Ньютон же очень плохо переносил критику и когда в 1672 г. издал свои исследования природы света, то услышал много нелестного о своей работе, что надолго отбило у него охоту предавать огласке свои открытия. Но эпизодически он всё же отваживался издать некоторые работы и даже написал две книги. А для себя Ньютон продолжал развивать свои идеи о тяготении, и в 1684 г. Галлей снова попытался уговорить его опубликовать эти труды. Но для этого, помимо страха перед критикой, существовало и техническое препятствие. В своих рассуждениях ученый был вынужден объявить планеты точечными частицами с массой, не равной 0, но нулевыми размерами, что не соответствовало действительности и заведомо привлекло бы к нему нежелательное внимание критиков. Он хотел бы заменить эти невероятные точки на сферические тела, но не мог доказать, что силы взаимного тяготения между сферами такие же, как и между предельно малыми точками с равной массой.

Только в 1686 г. Ньютону удалось заполнить этот пробел, и в 1687 г. свет увидели «Математические начала натуральной философии». Они содержали множество свежих идей. Самыми важными стали математические формулы законов движения, расширяющие работы Галилея, и тяготения, основанные на законах Кеплера.

Главный закон движения по Ньютону (есть и дочерние, следующие из него) утверждал, что сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение. Иными словами, скорость является производной от положения тела, а ускорение – производная от скорости. Значит, даже для *выражения* закона Ньютона нам не обойтись без второй производной положения тела относительно времени, что в современном написании выглядит так:

$$\frac{d^2x}{dt^2}.$$

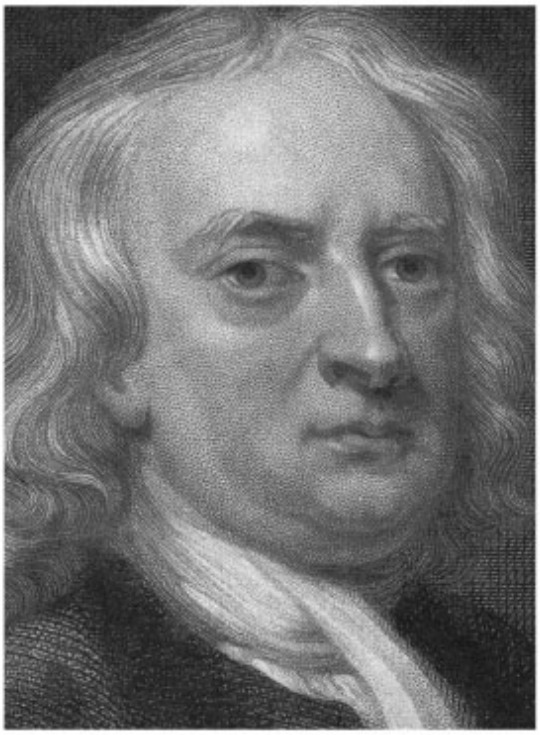
Только Ньютон вместо этого над *x* ставил две точки: $\ddot{x}$.

Закон тяготения утверждает, что все материальные частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Так, сила тяготения между Землей и Луной станет сильнее в четыре раза, если Луна будет ближе к Земле в два раза, или в девять, если расстояние уменьшится втрое. И снова, поскольку речь идет о воздействии силы, здесь имеется вторая производная.

Ньютон вывел свой закон из трех законов Кеплера о движении планет. Опубликованный им труд стал высшим достижением классической евклидовой геометрии. Ньютон сознательно избрал этот способ подачи материала, поскольку тот был основан на знакомых математических понятиях, а значит, менее уязвим для критиков. И всё же многие аспекты «Начал» появились на свет исключительно благодаря неопубликованным методам исчисления, открытым Ньютоном.

Среди первых его работ в этой области есть статья под названием «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», которую он распространил среди немногочисленных друзей в 1669 г. В современной терминологии он задается вопросом, как будет выглядеть уравнение для функции $f(x)$, если площадь под графиком равна x^m. (На самом деле вопрос касался более общих явлений, но давайте упростим.) К своему полному удовлетворению, он пришел к выводу, что ответ будет: $f(x) = mx^{m-1}$.

ИСААК НЬЮТОН 1642–1727



Ньютон рос на ферме в небольшой деревушке Вулсторп в графстве Линкольншир. Его отец скончался за два месяца до его рождения, и мать одна управлялась на ферме. Исаака отправили учиться в ближнюю школу, где он не выделялся особыми талантами, разве что отлично умел мастерить механические игрушки. Однажды он наполнил надувной шар горячим воздухом и испытал это средство воздухоплавания, посадив вместо пилота своего кота. Ни шар, ни кота никто больше не видел. Исаак поступил в Тринити-колледж в Кембриджском университете, где вполне успешно обучался по всем предметам – за исключением геометрии. Студентом он не производил впечатления будущего светила науки.

Чума

Позже, когда в 1665 г. великая эпидемия чумы опустошила Лондон и окрестности, студентов поспешно разослали по домам, пока мор не дошел до Кембриджа. Вернувшись на родительскую ферму, Ньютон стал серьезнее относиться к науке в целом и в частности к математике.

Тяготение

В 1665–1666 гг. он вывел свой закон тяготения, объясняющий движение планет, развил законы механики, чтобы проанализировать движения любого рода для всех физических тел, изобрел дифференциальное и интегральное исчисления, совершил важные открытия в оптике. Что характерно, он не спешил публиковать свои труды, но как ни в чем не бывало вернулся в колледж, получил степень магистра и стал членом Тринити-колледжа. Затем его избрали на должность Лукасовского профессора математики, а в 1669 г. подал в отставку предыдущий профессор, Барроу. Ньютон не прославился как преподаватель, на его лекциях было мало студентов.

Подход Ньютона к вычислению производных в основном напоминает подход Лейбница, только вместо *dx* он использовал *o*, а значит, его метод грешил той же логической проблемой: он давал приблизительный результат. Однако Ньютону удалось показать: если принять *o* за бесконечно малую величину, приближение станет намного точнее. И когда мы дойдем до предела, где *o* станет такой малой, какой нам угодно, ошибка исчезнет. Поэтому Ньютон утверждал, что его результат *точен*. Он изобрел новое слово «флюксия», чтобы подчеркнуть главную идею: величина стремится к 0, но никогда не достигает его.

В 1671 г. он создал более обширный труд, «Метод флюксий и бесконечных рядов». Первая книга, посвященная исчислению, так и не была опубликована вплоть до 1711 г., вторая увидела свет в 1736 г. Однако несомненно, что уже к 1671 г. Ньютон оперировал всеми основополагающими идеями исчисления.

Сановный противник этого метода епископ Джордж Беркли в 1734 г. в своей книге «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику» указывал, что это противоречит логике: делить числитель и знаменатель на *o*, если впоследствии *o* будет равно 0. В итоге вся процедура сводится к тому, что дробь на самом деле выглядит как 0/0, а это, как всем известно, полная бессмыслица. Ньютон возражал, что он не уменьшает *o* до нуля, он исследует результаты того, что она сколь угодно близко подходит к 0, *не*

становясь ему равной, и вообще его метод исследует флюксии, а не числа.

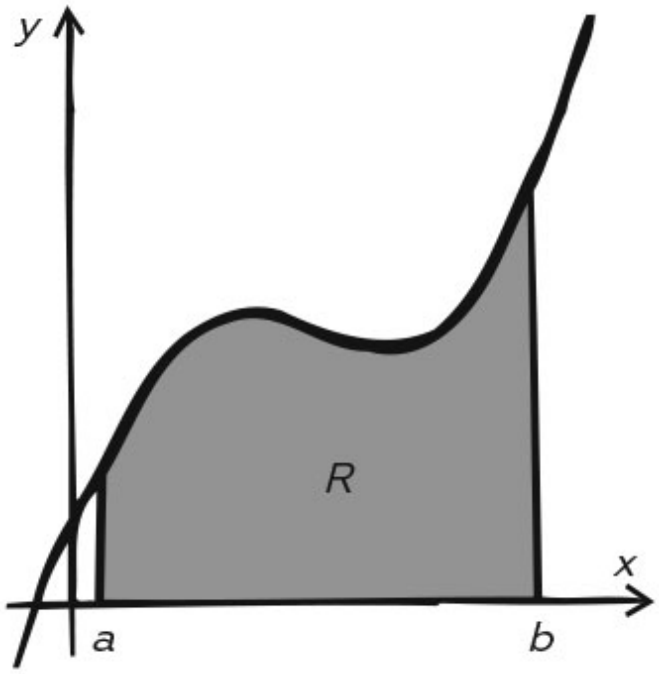
Математики пытались найти выход в аналогиях с физикой: Лейбниц прибегал к определениям «дух утонченности» и противоположному ему «дух логики», но по сути Беркли был прав. Ученым потребовался век, чтобы обнаружить убедительные ответы на его возражения, найдя для интуитивно открытого «приближения к пределу» строгое определение. Тогда-то исчисление преобразилось в более искусную науку – *математический анализ*. Но на протяжении этих 100 лет никого, кроме Беркли, так и не обеспокоили логические изъяны, и исчисление развивалось невзирая на них.

Метод процветал, потому что Ньютон был прав, но лишь через 200 лет его интуитивная концепция флюксий была сформулирована с безупречной логикой, в терминах пределов. К счастью для математиков, задержка с этим открытием не застопорила процесс развития науки в целом. Исчисление оказалось слишком востребованным и важным методом, чтобы отказаться от него из-за нескольких логических софизмов. Беркли в негодовании утверждал, что метод только кажется действенным, поскольку в нем различные ошибки взаимно компенсируют друг друга. Он был прав – однако понятия не имел о том, *почему* ошибки компенсируют друг друга. Ведь если это правда – то это и не ошибки вовсе!

С дифференцированием неразрывно связан обратный ему процесс – интегрирование. Интеграл от $f(x)$, или $\int f(x)dx$, восстановит значение функции $f(x)$ до ее дифференцирования. *Определенный интеграл*

$$\int_a^b f(x)dx —$$

это площадь под графиком между значениями $x = a$ и $x = b$.



Определенный интеграл

Производные и интегралы решили проблемы, из-за которых буксовали исследования предшественников. Скорости, касательные, максимумы и минимумы можно было вычислить при помощи дифференцирования. Длины, площади и объемы поддавались вычислению с помощью интегрирования. Но и это не всё. Как ни удивительно, но оказалось, что и законы природы могут быть изложены на языке исчисления.

Англия в отстающих

По мере того как росла важность исчисления для передовой науки, рос и престиж ученого, стоявшего у ее истоков. Но кто *был* этим ученым?

Как мы видим, Ньютон стал задумываться над исчислением примерно с 1665 г., хотя ничего не публиковал на эту тему до 1687 г. Лейбниц, чьи идеи развивались примерно тем же путем, что и у Ньютона, начал исследовать исчисление в 1673 г. и первые труды в этой области издал в 1684 г. Оба работали независимо, но Лейбниц *мог* узнать о трудах Ньютона, когда побывал в Париже в 1672 г. и в Лондоне в 1673 г. В 1669 г. Ньютон отослал копию «Анализа» Барроу, а Лейбниц встречался со многими людьми, также знавшими Барроу и, возможно, имевшими представление об этой работе.

Когда Лейбниц опубликовал свою книгу в 1684 г., кое-кто из окружения Ньютона ужасно возмутился – вероятно, потому, что Ньютона опередили с публикацией прямо перед финишной чертой. Все они с запозданием осознали, что было поставлено на кон, – и дружно обвинили Лейбница в краже идей Ньютона.

ЧТО ИСЧИСЛЕНИЕ ДАЛО ИМ

Примером ранних попыток использовать исчисление для описания явлений природы можно считать вопрос о подвешенной цепи. Ответ всегда оставался спорным: одни ученые утверждали, что это парабола, а другие не соглашались. В 1691 г. Лейбниц, Кристиан Гюйгенс и Иоганн Бернулли опубликовали предполагаемые решения. Самое удовлетворительное принадлежало Бернулли. Для описания положения цепи он использовал дифференциальное уравнение, исходя из ньютоновой механики и законов движения. Как показало это уравнение, решением стала не парабола, а кривая, известная теперь под названием *цепная линия*, с уравнением:

$$y = k(e^{x} + e^{-x}),$$

где k – константа.



Подвешенная цепь является графиком цепной линии

Зато несущие цепи на подвесных мостах имеют форму параболы. Эта разница возникает оттого, что цепи несут на себе и вес моста, и собственный. И снова это можно показать при помощи исчисления.



Клифтонский подвесной мост – парабола

Математики на континенте, особенно братья Бернулли, грудью встали на защиту Лейбница, полагая, что именно Ньютон был замешан

в плагиате. На самом деле оба сделали свои открытия почти независимо друг от друга, как показали их неопубликованные рукописи. Добавило туману и то, что оба во многом опирались на предыдущую работу Барроу, который, вероятно, имел больше оснований для жалоб, чем любой из них.

Обвинения могли быть легко сняты, но вместо этого спор стал более ожесточенным; Иоганн Бернулли перенес свою неприязнь к Ньютону на всех англичан. Результатом стала катастрофа английской математики: англичане застряли в ньютоновском геометрическим стиле мышления, который сложно было использовать, а математики с континента использовали более формальный алгебраический метод и продвигали исчисление вперед быстрыми темпами. Поэтому большая часть заслуг в математической физике ушла к французам, немцам, швейцарцам и голландцам, а английская математика томилась в тихой заводи.

Дифференциальное уравнение – что это?

Важнейшей идеей, порожденной изобилием трудов об исчислении, стало существование и использование принципиально нового типа уравнений – *дифференциальных уравнений*. Алгебраические уравнения описывают неизвестную величину с разными степенями. Дифференциальные же гораздо более изощренны: они описывают различные производные от неизвестной *функции*.

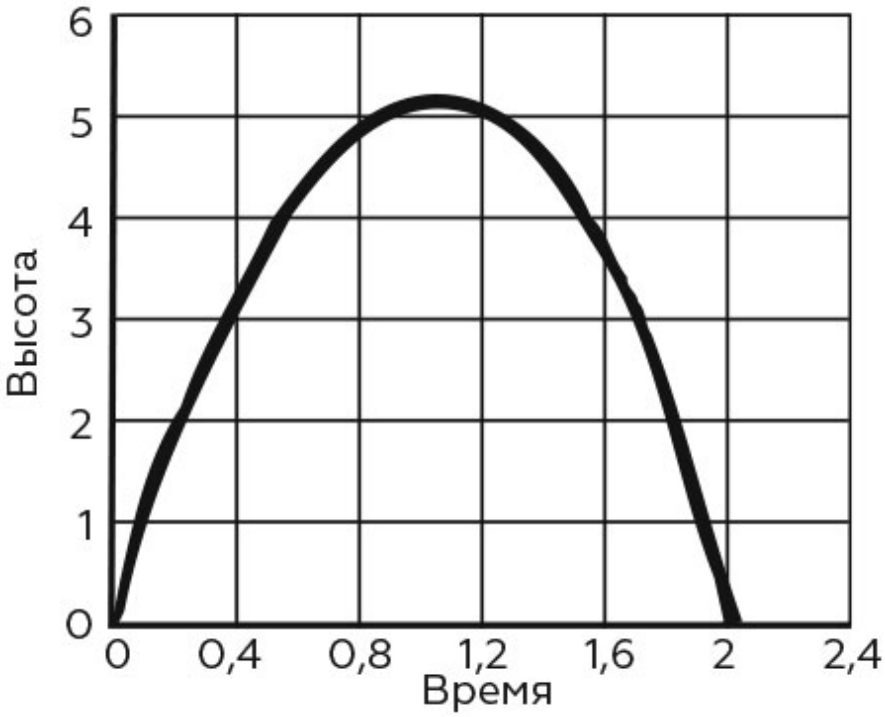
Законы движения Ньютона говорят о том, что если $y(t)$ – высота, на которой частица движется над поверхностью Земли, подвергаясь силе тяготения, то вторая производная d^2y/dt^2 пропорциональна воздействующей на нее силе g:

$$g = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

где m – масса. Это уравнение не определяет функцию y напрямую – оно показывает свойства ее второй производной. Чтобы найти саму y, необходимо решить дифференциальное уравнение. Дважды последовательно интегрируя, получим:

$$y = \frac{gt^2}{2m}y + at + b,$$

где b – исходная высота частицы, a – начальная скорость. Формула говорит нам, что график, описывающий изменение высоты y относительно времени t, представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Это наблюдение сделал еще Галилей.



Параболическая траектория снаряда

ЧТО ИСЧИСЛЕНИЕ ДАЕТ НАМ

Современная *наука изобилует дифференциальными уравнениями*: они оказались наиболее распространенным способом моделирования законов природы. Например, без них не обходится построение траектории полета исследовательских космических зондов, таких как «Маринер», направленный на Марс, или два корабля «Пионер», исследовавших Солнечную систему и предоставивших ученым превосходные снимки Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, или доставленные на Марс марсоходы «Спирит» и «Оппортьюнити» – шестиколесные роботы, исследовавшие Красную планету.



Марсоход «Спирит» (художественное воспроизведение, НАСА)

Еще один хороший пример – миссия «Кассини», нацеленная на изучение Сатурна и его лун. Среди сделанных в ее рамках открытий – существование морей из жидкого метана и этана на спутнике Сатурна Титане. Конечно, исчисление – далеко не единственный математический метод, примененный в космических исследованиях, но без него ни одна из миссий буквально не оторвалась бы от Земли.

Если вернуться на Землю, можно упомянуть любое воздушное судно, автомобиль, движущийся по дороге, подвесной мост или устойчивое к подземным толчкам здание, в создании которых исчисление сыграло важнейшую роль. Даже наше описание того, как относительно времени меняется популяция животных того или иного вида, исходит из дифференциальных уравнений. То же относится к описанию распространения эпидемий, где построенные с помощью исчисления модели помогают разработать эффективные меры подавления эпидемии. Недавно

разработанные модели распространения ящура в Великобритании показали недостаточную эффективность принимаемых мер.

Работы Коперника, Кеплера, Галилея и других ученых Возрождения открыли нам математические закономерности, описывающие реальный мир. Одни модели со временем оказались ошибочными, и от них отказались, другие в точности отражали действительность и развивались дальше. Именно в те давние времена выражение «работает как часы» стало всё чаще применяться к нашей Вселенной. Как выяснилось, она живет по строгим, непреложным законам, несмотря на упорные возражения религиозных иерархов, особенно католической церкви.

Величайшим открытием Ньютона стало то, что законы природы проявляют себя не как закономерности некоторых величин, но как взаимоотношения между их *производными*. Законы природы написаны на языке исчисления, и здесь важны не значения физических переменных, а скорость, с которой они меняются. Это было величайшее прозрение, и оно породило революцию, завершившуюся появлением более-менее современного научного подхода, который навсегда изменил нашу планету.

Глава 9. Примеры в природе

Формулирование физических законов

Самым важным посланием в «Началах» Ньютона являются не собственно открытые и использованные им законы, но общая идея, что таковые существуют, а также очевидность того, что их можно моделировать математически с помощью дифференциальных уравнений. И в то время как английские математики увязали в бесплодных инсинуациях вокруг предполагаемого (и надуманного) похищения Лейбницем идей Ньютона по поводу исчисления, их коллеги на континенте плодотворно продвигали эти идеи в жизнь, делая важные открытия в изучении механики небесных тел, сопротивления материалов, гидродинамики, а также природы тепла, света и звука – самой основы математической физики. Многие уравнения, полученные в те годы, применяются до сих пор, несмотря на несомненные достижения физики как науки, – а может, как раз благодаря им.

Дифференциальные уравнения

Прежде всего математики сосредоточились на поиске четких формул для решения частных типов самых простых дифференциальных уравнений. И в некотором смысле это было неудачным шагом: как правило, формул для таких типов уравнений просто не существует. В итоге внимание оставалось прикованным скорее к уравнениям, которые можно решить с помощью формул, нежели к тем, которые точно описывают законы природы. Хороший пример – дифференциальное уравнение движения маятника, принимающее форму:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \sin\theta = 0$$

с соответствующей константой k, где t – время, а θ – угол отклонения маятника (при $\theta = 0$ он принимает вертикальное положение). Для этого уравнения не существует решения в виде классических функций (многочленных, экспоненциальных, тригонометрических, логарифмических и т. д.). Но есть решение с использованием эллиптической функции, найденное век спустя. Однако если предположить, что угол сколько угодно мал, и мы видим, что маятник совершает совсем небольшие колебания, $\sin\theta$ становится практически равен θ, и чем меньше угол θ, тем точнее приближение. А значит, дифференциальное уравнение можно заменить таким:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0,$$

в итоге получим формулу для решения:

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt$$

для констант A и B, определяющих начальное положение и угловую скорость маятника.

Этот подход имеет ряд преимуществ: например, мы можем легко определить, что период колебаний маятника – время, необходимое на его полное движение, – равен $2\pi/k$. Главный недостаток с точки зрения математики в том, что решение делается неверным, когда θ становится достаточно большим (и здесь большим окажется даже угол в 20°, если мы хотим получить точный ответ). Тут уже возникает вопрос строгости: имеем ли мы тут случай, когда точное решение для приблизительного уравнения не противоречит приблизительному решению для точного? Ответ положительный, однако это удалось доказать только в 1900 г.

Второе уравнение можно решить точно, потому что оно линейное – содержит только первую степень неизвестной θ и ее производную, а коэффициенты – константы. Функция, которая является прототипом решения для всех линейных уравнений, – экспонента $y = e^x$. Она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Таким образом, e^x – собственная производная. Это свойство – одна из причин того, что логарифмы именно по основанию e принимаются как натуральные. Соответственно производная натурального логарифма $\ln x$ равна $1/x$, а интеграл от $1/x$ равен $\ln x$. Любое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами может быть решено с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций (последние, как мы уже видели, на самом деле являются экспоненциальными, только замаскированы).

Типы дифференциальных уравнений

Различают два типа дифференциальных уравнений. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (ОДУ) имеют дело с неизвестной функцией y от одной переменной x, а также с различными производными от y, такими как dy/dx или d^2y/d^2x. До сих пор приведенные здесь примеры дифференциальных уравнений относились к обыкновенным. Гораздо более сложной, но и более важной для математической физики является идея дифференциальных уравнений в *частных* производных (ДУЧП). Это уравнения, содержащие неизвестные функции от двух и более переменных, таких как $f(x, y, t)$, где x и y – координаты на плоскости, а t – время. ДУЧП содержат эту функцию в выражении с частными производными относительно каждой переменной. Новое выражение используется для описания производных от одних переменных с учетом других, а все остальные остаются неизменными. Таким образом, $\partial x/\partial t$ показывает скорость изменения x во времени, а y остается константой. Это называется частной производной, отсюда и термин «дифференциальные уравнения в частных производных».

Эйлер представил ДУЧП на суд ученых в 1734 г., а д’Аламбер опубликовал ряд работ по ним в 1743 г., но большинство ранних исследований проходило за закрытыми дверями. Первый большой прорыв случился в 1746 г., когда д’Аламбер вернулся к старой проблеме – колебаниям струны. Иоганн Бернулли обсуждал численный метод конечных элементов в 1727 г., учитывая колебания конечного числа точечных масс, расположенных равноудаленно друг от друга вдоль невесомой струны. Д’Аламбер рассматривает непрерывную струну с однородной плотностью, применяя вычисления Бернулли для n масс и предполагая, что число n стремится к бесконечности. Таким образом, непрерывная струна рассматривалась как бесконечное множество бесконечно малых сегментов, соединенных вместе.

Исходя из результатов Бернулли, основанных на открытом Ньютоном законе движения, и сделав некоторые упрощения (например, что размер колебаний небольшой), д’Аламбер пришел к формуле ДУЧП:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где $y = y\,(x, t)$ описывает форму струны в момент времени t как функцию горизонтальной координаты x. Здесь a – константа, определяемая по натяжению и плотности струны. В продолжение научного спора д'Аламбер доказал, что общее решение для ДУЧП имеет вид:

$$y(x, t) = f(x + at) + f(x - at),$$

где f периодична, причем период вдвое длиннее струны, и f – нечетная функция, т. е. $f(-z) = -f(z)$. Эта формула удовлетворяет естественному граничному условию, что концы струны неподвижны.

Уравнение волны

Сегодня мы называем ДУЧП д’Аламбера волновым уравнением и интерпретируем его решение как суперпозицию симметрично расположенных волн, из которых одна движется со скоростью a, а вторая со скоростью $– a$ (они перемещаются в противоположных направлениях). Это стало одним из самых важных уравнений в математической физике, потому что в природе волны встречаются повсюду, причем самые разные.

Эйлер ознакомился с работой д’Аламбера и тут же постарался улучшить ее. В 1753 г. он показал, что без граничных условий общее решение будет выглядеть так:

$$y(x, t) = f(x + at) + g(x – at),$$

где f и g периодичны, но не удовлетворяют никаким другим условиям. В частности, эти функции могут иметь различные формулы для разных областей x – особенность, которую Эйлер считал свойством функций, имеющих разрывы, хотя в современной терминологии они непрерывны, но имеют разрывную первую производную.

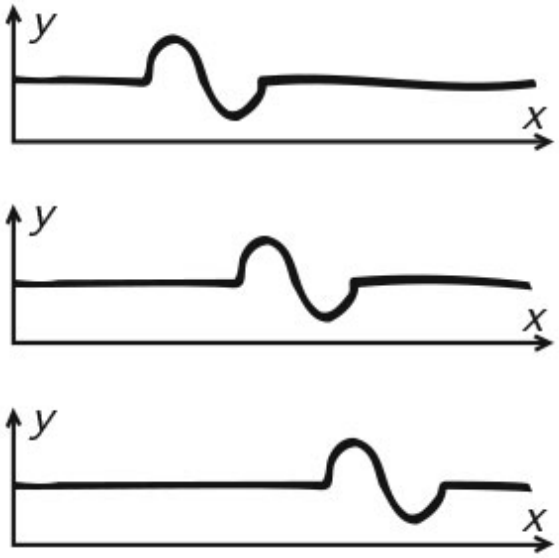
В более ранних работах, опубликованных в 1749 г., он указывал, что (для простоты мы принимаем, что длина струны равна единице) простейшие нечетные периодические функции являются тригонометрическими:

$$f(x) = \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x…$$

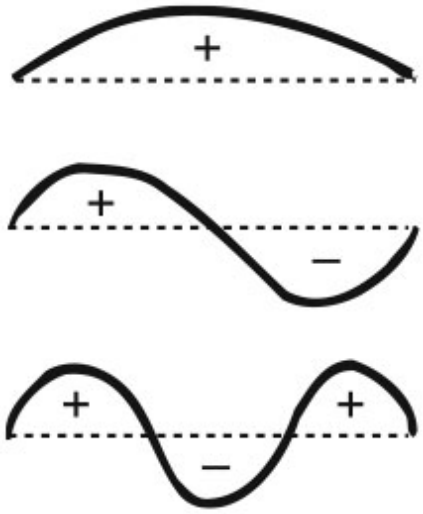
и т. д. Эти функции представляют простые синусоидальные колебания с частотой 1, 2, 3, 4 и т. д. Эйлер утверждал, что общим решением здесь является наложение (суперпозиция) таких кривых. Базовая синусоида $\sin x$ является основной модой колебаний, а остальные будут более высокими модами, – в итоге получается то, что мы теперь называем гармониками.

Сравнение решений волнового уравнения, предложенных Эйлером и д’Аламбером, привело к фундаментальному кризису.

Д’Аламбер не признал возможности существования разрывных функций в интерпретации Эйлера. Более того, рассуждения Эйлера грешили одной нестыковкой, поскольку тригонометрические функции всегда непрерывны, и, следовательно, конечны наложения (суперпозиции) из них. Эйлер предпочел не углубляться в это противоречие между конечными и бесконечными суперпозициями. Впрочем, в те дни никто не был очень строгим в подобного рода вопросах и никто из ученых еще не ступил на этот сложный путь важности обоснования новых методов. Однако в итоге такое упущение привело к серьезным проблемам. На время разногласия утихли, пока новая работа Фурье не подлила масла в огонь.



Последовательность изображений волны, движущейся слева направо



Режимы колебаний струны

Музыка, свет, звук и электромагнетизм

Древним грекам было известно, что колебание струны может давать много разных музыкальных нот в зависимости от расположения узлов, или неподвижных точек. Для основной частоты неподвижными остаются только точки крепления. Если у струны есть узел посередине, получается нота на октаву выше, и чем больше таких узлов, тем выше частота ноты. Более высокие колебания называют обертонами.

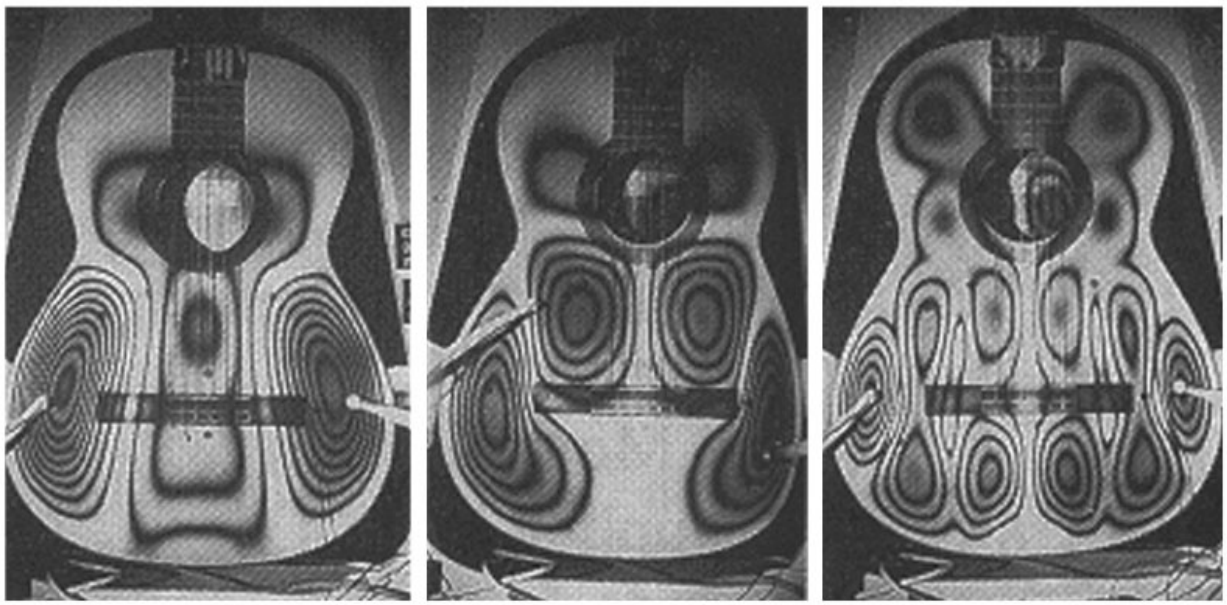
Колебания скрипичной струны представляют собой *стоячие волны*: форма струны в любой момент времени остается неизменной, за исключением того, что она либо растягивается, либо сжимается под прямым углом к своей длине. Наибольшее растяжение – это амплитуда волны, которая физически определяет тон ноты. Форма волны наглядно изображается в виде синусоиды, а их амплитуды соответствуют изменению синусоиды во времени.

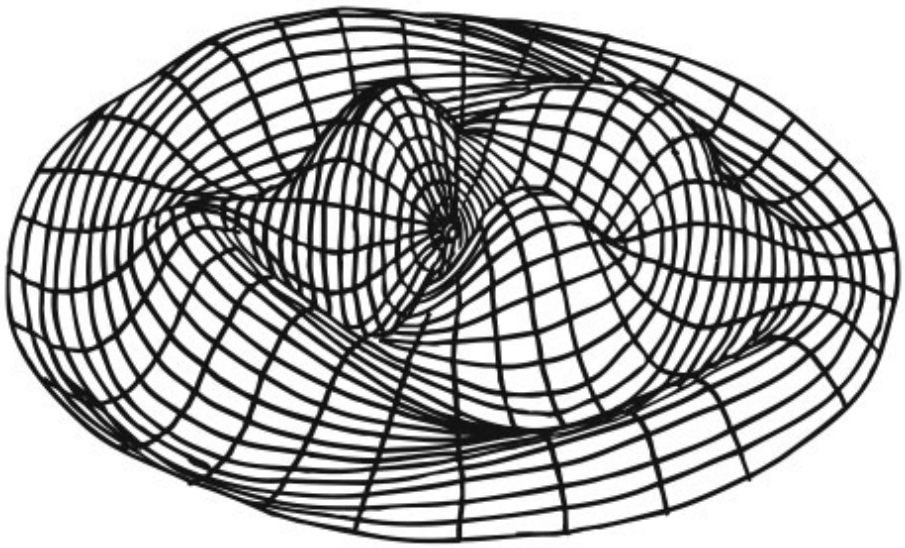
В 1759 г. Эйлер развил эти идеи, перейдя от струн к барабанам. И снова он вывел уравнение волны, описывающее продольные колебания барабанной мембраны во времени. Физической интерпретацией этого явления была закономерность, по которой ускорение отдельно взятой точки барабанной поверхности пропорционально среднему натяжению, полученному в результате совместного воздействия на этот участок соседних точек. Барабан отличается от струны не только количеством измерений (его поверхность – двумерная плоская мембрана), но и гораздо более интересными *границами*. Собственно, они здесь вообще играют решающую роль. Границей поверхности барабана может быть любая замкнутая кривая, и ключевым условием является ее *фиксированность*. Вся остальная поверхность барабана может двигаться, однако его обод надежно закреплен.

Математики XVIII в. были способны решить уравнения для колебаний мембраны барабанов разной формы. И снова они обнаружили, что любое колебание может быть составлено из более простых, и это дает нам уникальный набор разных частот. Самым простым случаем считается прямоугольный барабан, простейшие колебания которого являются комбинацией синусоидальных волн в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Более сложный случай – круговой барабан, который приводит к новым функциям – так

называемым функциям Бесселя. Амплитуды этих волн всё еще представляют собой синусоиды, меняющиеся во времени, но их пространственная структура намного сложнее.

Уравнение волны очень важно для науки. Волны возникают не только в музыкальных инструментах, но и в физике света и звука. Эйлер открыл трехмерный вариант уравнения, который приложил к звуковым волнам. Примерно веком позже Джеймс Клерк Максвелл получил такое же математическое выражение из своих уравнений, описывающих электромагнитные волны, и предсказал существование радиоволн.





Колебания поверхности круглого барабана, а также настоящей гитары

Земное притяжение

Еще одна область приложения ДУЧП – притяжение, или теория потенциала. Главной движущей силой развития теории стало изучение силы тяжести – Земли и любой другой планеты. Ньютон представлял планеты как идеальные сферы, хотя их истинная форма ближе к эллипсоиду. И хотя сила притяжения к сфере одинакова с притяжением к точечной частице (для расстояний, выходящих за границы сферы), это нельзя сказать об эллипсоидах.

Колин Маклорен совершил важный рывок в этой области в удостоенном награды труде от 1740 г. «Трактат о флюксиях», изданном в 1742 г. Его первым шагом был поиск доказательства того, что если жидкость однородной плотности вращается с постоянной скоростью под влиянием своей силы тяжести, то наиболее равновесной формой обязательно будет сфероид – эллипсоид вращения. Затем он изучил силы притяжения, создаваемые таким сфероидом, но не очень успешно. Главным результатом было то, что если у двух эллипсоидов одинаковые фокусы и частица находится либо на экваториальной плоскости, либо на оси вращения, то сила притяжения любого сфероида будет пропорциональна их массе.



Эллипсоид

В 1743 г. Клеро продолжил работу над этой проблемой, опубликовав свой труд «Теория фигуры Земли, извлеченная из принципов гидростатики». Но настоящий прорыв совершил Адриен-Мари Лежандр. Он доказал основное свойство, характерное не только для сфероида, но для любого тела вращения. Если вам известна сила тяготения по всей длине оси вращения, вы можете вычислить ее в любой другой точке. Метод Лежандра позволял представить силы тяжести как интеграл в сферических полярных координатах. Умело обращаясь с этим интегралом, он выразил его величину как композицию сферических гармоник, которые определяются специальными функциями, получившими название многочленов Лежандра. В 1784 г. он продолжил работу в этой области, доказав много основных свойств открытых им многочленов. Фундаментальным ДУЧП в теории потенциала является уравнение Лапласа. Его можно найти в пятитомнике «Небесной механики», которую он начал издавать в 1799 г. Схожие идеи уже возникали у его предшественников, но именно Лаплас придал им четкость и завершенность. Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

где $V(x, y, z)$ – потенциал точки (x, y, z) в пространстве. Интуитивно он пришел к выводу, что величина потенциала в любой заданной точке составляет среднюю величину от размеров крошечной сферы вокруг нее. Уравнение действительно и вне границ тела: внутри него необходима модификация. Это выражение ныне известно как уравнение Пуассона.

Тепло и температура

Успехи в изучении звука и силы тяготения побудили математиков обратить взор и на другие физические явления. Одним из самых притягательных было тепло. В XIX в. наука о теплопередаче приобрела практичную основу, главным образом из-за нужд развивающейся металлообрабатывающей промышленности и благодаря возросшему интересу к внутренней структуре Земли, в частности температуре внутри планеты. Измерить напрямую температуру в областях, расположенных в тысячах километров под земной корой, тогдашними методами, конечно, было невозможно. Оставалось найти косвенные пути, основанные на знании того, как тепло распространяется в телах разной консистенции.

В 1807 г. Жозеф Фурье представил свой доклад о путях распространения тепла Французской академии наук, но его не утвердили из-за серьезных недоработок. Чтобы подтолкнуть ученого к дальнейшим исследованиям, Академия даже учредила к 1812 г. Большую премию за изучение теплопроводности. Поскольку о награде стало известно заранее, Фурье уже в 1811 г. успел оформить свои идеи в виде доклада на соискание премии и выиграл ее. Но его труд всё равно жестоко критиковали за недостаток логической строгости, и Академия не разрешила его публиковать в виде научной статьи. Фурье, в ярости из-за такого отношения, написал труд «Аналитическая теория тепла», изданный в 1822 г. Туда почти полностью и без изменений вошел доклад 1811 г., но было и много новых материалов. Наконец в 1824 г. ученого оценили по заслугам: он был избран секретарем Академии и уже без помех опубликовал в виде научной статьи свой доклад от 1811 г.

Первым шагом Фурье был вывод ДУЧП для описания теплопроводности. Там имелось множество упрощений и допущений: тело должно быть однородным (с одинаковыми свойствами по всему объему) и изотропным (его свойства не зависят от направления) и т. д. В итоге он получил выражение, которое теперь известно как уравнение теплопроводности. Оно описывает распределение температуры в любой точке трехмерного тела и в зависимости от времени. Уравнение теплопроводности очень похоже с виду на уравнение Лапласа и на

волновое уравнение, но с частной производной по времени в первой степени, а не во второй. Это небольшое отличие очень важно для математики ДУЧП в целом.

Были выведены такие же уравнения для одномерных и двумерных тел (стержень и плоскость), полученные удалением переменной z (для двумерного тела) и y (для одномерного). Фурье решил уравнение теплопроводности для стержня (чью длину мы принимаем равной π), на концах которого сохраняется неизменная температура, с условием, что в момент времени $t = 0$ (начальное состояние) температура в точке x стержня принимает вид:

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

(выражение, полученное с помощью предварительных вычислений), и сделал вывод, что температуру должно описывать схожее, но более сложное выражение, где каждый член умножается на соответствующую экспоненциальную функцию. Аналогия с гармониками в волновом уравнении поразительна. Но там каждая мода задана обычной синусоидой, колеблется бесконечно с одинаковой амплитудой, а здесь каждая синусоидальная мода распределения температуры убывает экспоненциально по времени, и более высокие моды убывают быстрее.

КАК РАБОТАЮТ РЯДЫ ФУРЬЕ

Типичный пример разрывной функции – прямоугольная волна $S(x)$, которая принимает значение 1, когда $-\pi < x \leq 0$, и равна -1, когда $0 < x \leq \pi$, и имеет период 2π. Применив формулу Фурье к прямоугольной волне, мы получаем ряд $S(x) = \sin x + {}^1/_3 \sin 3x + {}^1/_5 \sin 5x + \ldots$

Синусоиды складываются, как мы видим на схеме ниже.



Представление с помощью ряда Фурье прямоугольной волны: вверху ее компоненты, синусоиды, внизу – их сумма

Хотя волна прямоугольной формы разрывная, каждое ее приближение будет непрерывно. Но по мере добавления всё бо́льших членов ряда колебания растут, делая график рядов Фурье всё более крутым около точек разрыва. Здесь мы видим, как бесконечный ряд непрерывных функций может превратиться в разрывную функцию.

Причина такого различия в том, что в волновом уравнении энергия сохраняется, и поэтому колебание не затухает. А в уравнении теплопроводности тепло *распространяется* по всему стержню и теряется на его концах, потому что они охлаждаются.

Результатом работы Фурье стало то, что мы можем разложить начальное распределение температуры в ряд Фурье – сумму синусов и косинусов, похожую на приведенную выше формулу, а значит, способны немедленно описать, как тепло распространяется по телу со временем. Фурье считал очевидным, что такое выражение можно составить для любого начального распределения температуры, – и здесь-то начинались его неприятности. Мало кому из современников ученого было интересно, какое отношение теплопроводность имеет к волнам. Ее изучение казалось гораздо более сложным занятием.

Доводы Фурье в пользу возможности разложить функцию на синусы и косинусы были слишком сложными, запутанными и недостаточно строгими. Ему пришлось воспользоваться всеми разделами математики, чтобы в конце концов получить простые выражения для коэффициентов b_1, b_2, b_3 и т. д. Обозначив начальное распределение температуры как $f(x)$, он получил:



В 1777 г. Эйлер уже вывел эту формулу во время работы над волновым уравнением для звука и доказал ее с помощью мудрого наблюдения, заметив, что разные моды, $\sin m\pi x$ и $\sin n\pi x$, являются ортогональными, т. е.



равен 0, если m и n – разные целые числа, не равные 0, т. е. на самом деле равен π/2, если $m = n$. Если предположить, что $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье, то, умножив обе стороны выражения на sin nx и проинтегрировав, мы избавимся от всех слагаемых, кроме одного, и в остатке получим формулу Фурье для b_n.

Гидродинамика

Ни одно обсуждение ДУЧП в математической физике не будет полным без упоминания гидродинамики. И правда, эта область очень важна для практического применения, поскольку уравнения описывают, как вода обтекает подводные лодки или воздух – воздушные суда, и даже показывают сопротивление воздуха во время гонок «Формулы-1».

Эйлер сделал первые шаги в этой области в 1757 г., выведя ДУЧП для движения жидкости с нулевой вязкостью («липкостью»). Это уравнение остается в силе для некоторых жидкостей, но из-за излишней упрощенности не очень практично. Уравнения для вязких жидкостей вывел в 1821 г. Клод Навье, а потом их получил в 1829 г. Пуассон. Уравнения включают различные частные производные скорости движения жидкости. В 1845 г. Джордж Стокс вывел те же уравнения исходя из базовых физических принципов, и в итоге они получили название *уравнения Навье – Стокса*.

ЧТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДАЛИ ИМ

Предложенная Кеплером модель эллиптических орбит была не так точна. Она была бы надежной в случае двух тел в Солнечной системе, но уже появление третьего начинает менять (нарушать) эллиптическую орбиту. Огромные расстояния между планетами несколько смягчают это воздействие, отчего большинство орбит всё же остаются близкими к эллипсам. Но Юпитер и Сатурн ведут себя очень странно: то замедляются и не попадают вовремя в ожидаемую точку, то, наоборот, делают рывок вперед, опережая график. Этот эффект возникает из-за их взаимного притяжения, а также из-за притяжения к Солнцу.

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном, не ограничивает число тел в системе, но вычисления по его формуле очень сложны, если тел три или больше. В 1748, 1750 и 1752 гг. Французская академия наук учреждала премии за точный расчет орбит движения Юпитера и Сатурна. В

1748 г. Эйлер с помощью дифференциальных уравнений описал, как притяжение Юпитера воздействует на орбиту Сатурна, и получил премию. Он повторил попытку в 1752 г., но на сей раз в его работу вкралось несколько серьезных ошибок. Однако идеи, заложенные им в основу метода в целом, оказались весьма полезны.



Юпитер и Сатурн, изображенные вместе

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ 1850–1891



Софья Ковалевская была дочерью генерала артиллерии и могла гордиться благородным происхождением. Но случилось так, что стены ее детской были обклеены страницами лекции по математическому анализу. В 11 лет ее впервые заинтересовали странные обои, и девочка сама научилась основам исчисления. Она всерьез заинтересовалась математикой, предпочтя ее всем прочим наукам. Отец пытался воспрепятствовать такому странному увлечению, но ничего не смог поделать: девочка читала книги по алгебре, когда родители спали. Чтобы получить свободу передвижения и продолжить образование, ей пришлось выйти замуж, однако брак не был удачным. В 1869 г. она начала изучать математику в Гейдельберге, но, поскольку в этот университет не принимали женщин, Софья ценой немалых усилий получила разрешение слушать курсы лекций неофициально. Продемонстрировав недюжинный математический талант, в 1871 г. она перебралась в Берлин, где ее наставником стал выдающийся аналитик Карл Вейерштрасс. И снова ей не удалось стать полноправной студенткой, но Вейерштрасс давал ей частные уроки.

Она занималась собственными исследованиями, и к 1874 г. Вейерштрасс решил, что ее работа достойна

докторской степени. Софья написала три статьи: о ДУЧП, эллиптических функциях и кольцах Сатурна. В тот же год ученая была удостоена докторской степени от Университета Гёттингена. Статья о ДУЧП опубликована в 1875 г.

В 1878 г. у Софьи родилась дочь, но уже в 1880 г. она вернулась в математику и стала изучать рефракцию света. В 1883 г. ее муж, с которым они давно жили раздельно, покончил с собой, а Софья всё глубже погружалась в математику в надежде заглушить чувство вины. Она получила место преподавателя в Стокгольмском университете в 1884 г. и читала там лекции. В 1889 г. она стала третьей женщиной, которой предложили стать профессором в европейском университете, после Марии Аньези (так и не решившейся занять этот пост) и физика Лауры Басси. Здесь Софья провела исследование о вращении твердого тела, выдвинула свою работу на конкурс, объявленный Академией наук в 1886 г., и выиграла. Жюри так восхитилось ее блестящей работой, что даже увеличило денежный приз. Следующая работа в той же области получила премию Шведской академии наук, а также стала поводом для избрания ее членом Императорской Санкт-Петербургской академии наук.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Мы посвятим этот раздел двум самым важным вкладам в применение ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) в механике. В 1788 г. Лагранж опубликовал свою «Аналитическую механику», с гордостью отметив во вступлении:

> В этой работе нет чертежей. Излагаемые мною методы не требуют построений, геометрических или механических рассуждений, а только алгебраических действий, подчиненных регулярному и единообразному ходу.

К тому времени стали очевидны ловушки и недостатки наглядных доказательств, и Лагранж задался целью не прибегать к ним. Теперь схемы и рисунки снова были в деле, подкрепленные неопровержимой логикой и доказательствами, но упорство Лагранжа, решившего описать законы механики только формулами, дало бесценный толчок развитию новой области знаний. Любая система может быть описана с помощью самых разных переменных. Например, для маятника обычная координата – угол его отклонения, но расстояние по горизонтали от него до вертикали ничем не хуже.



Скорость глобального ветра и колебания температуры, вычисленные по расширенной версии уравнений Навье – Стокса

Уравнения движения могут выглядеть совершенно по-разному в различных системах координат, и Лагранжу это казалось неэлегантным. Он нашел способ так переписать их, что они становились схожими для любой системы координат. Первым его изобретением стали парные координаты. Для каждой координаты q (такой, например, как угол отклонения маятника) существовала соответствующая ей координата скорости (угловая скорость движения маятника). Если имеется k координат положения, то будет и k координат скорости. Вместо дифференциальных уравнений второго порядка Лагранж вывел уравнения первого порядка по положению и скорости. Он

сформулировал это в терминах величины, сейчас называемой лагранжианом.

Уильям Гамильтон развил идеи Лагранжа, сделав их еще более элегантными. Физически он использовал импульс вместо скорости, чтобы определить дополнительные координаты. Математически он вычислил величину, известную сейчас как *гамильтониан*, или функция Гамильтона, которую можно интерпретировать – для многих систем – как энергию. В теоретических работах по механике, как правило, используется формализм Гамильтона, оказавшийся актуальным и для квантовой механики.

ЧТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДАЮТ НАМ

Между волновым уравнением и современными радио и телевидением есть самая прямая связь.

Примерно в 1830 г. Майкл Фарадей занялся экспериментами по электричеству и магнетизму, исследуя возникновение магнитного поля под воздействием электрического тока и появление электрического поля при движении магнита. Современные генераторы и электромоторы – прямые потомки сконструированных им аппаратов. В 1864 г. Джеймс Клерк Максвелл преобразовал выкладки Фарадея в математические уравнения, описывающие электромагнетизм, – *уравнения Максвелла*. Это были ДУЧП, относившиеся к явлениям электричества и магнетизма.

Простой вывод из уравнений Максвелла приводит нас к волновому уравнению. Этот расчет показывает, что электрическое и магнитное поля могут передвигаться вместе, подобно волне, со скоростью света. А что движется с такой скоростью? Свет! А значит, свет – электромагнитная волна. Уравнение не ставит пределов для частоты волны, световые волны демонстрируют сравнительно небольшой диапазон частот. Из этого физики заключили, что должны существовать и другие электромагнитные волны с иными частотами. Генрих Герц продемонстрировал физическое существование

таких волн, а Гульельмо Маркони обратил их к практической пользе, создав радио. Дальше число новых технологий стало расти как снежный ком. Телевизор и радар также работают на электромагнитных волнах, как и спутниковая навигационная система GPS, сотовые телефоны и беспроводные компьютерные сети.



Радиоволны

Физика становится математической

Невозможно переоценить значение для науки «Начал» Ньютона, заложивших математическую основу в описание самых сложных природных явлений. Но последующие события оказались не менее важными. Математики взялись за исследование всего, что прежде считалось предметом изучения физики: звука, тепла, света, гидродинамики, притяжения, электричества, магнетизма. И для всех этих явлений они вывели дифференциальные уравнения, поразительно точно описывавшие законы физики.

Еще более поразительными стали дальнейшие шаги науки. Множество самых выдающихся технических достижений, таких как изобретение радио и телевидения и обеспечение воздушных перевозок, зависело от математики дифференциальных уравнений. И эта область остается одной из наиболее активно развивающихся в науке, где практически каждый день совершаются новые открытия. Не будет преувеличением сказать, что изобретение Ньютоном дифференциальных уравнений, получивших практическое приложение благодаря его последователям в XVIII−XIX вв., во многом определило облик современного мира. Это очевидно, если вы дадите себе труд заглянуть за кулисы сегодняшней жизни.

Глава 10. Невозможные величины

Квадратные корни отрицательных чисел: возможно ли?

Математики различают несколько видов чисел с разными свойствами. Главное здесь не отдельные числа, а «сообщество», к которому они принадлежат, – иными словами, то, с кем они водят компанию.

Четыре из этих систем чисел хорошо нам знакомы: натуральные: 1, 2, 3, …; целые, куда также входит 0 и отрицательные не дробные; рациональные, включающие дроби вида p/q, где p и q – целые числа, причем q не равно 0; и действительные числа, обычно представляемые десятичными дробями с бесконечным количеством знаков после запятой – что бы это ни значило. Они включают рациональные числа, в том числе периодические десятичные дроби, и иррациональные, такие как $\sqrt{2}$, e и π, у которых в цифрах после запятой нет повторяющихся последовательностей.

Целые числа

Само название подразумевает нечто единое; остальные создают впечатление, что упомянутые системы представляют собой некие ощутимые, действительные вещи: натуральные, рациональные и, конечно, вещественные. Эти названия отражают и в то же время поддерживают давно сложившееся мнение, что числа – неотъемлемая черта окружающего нас мира.

Многие уверены, что единственный способ сделать открытие в математике – изобрести новые числа. И это убеждение ложно: многие разделы математики вообще не имеют дела с числами, и, во всяком случае, цель любого исследования – изобретение новых теорем, а не чисел. Однако порой появляются и «новые числа». И одно из таких изобретений – «невозможное», или «мнимое», число – коренным образом изменило облик математики, наделив ее поистине невероятной мощью. Этим числом стал квадратный корень из –1. Древним математикам сама эта идея показалась бы чушью, потому что в их времена квадрат любого числа мог быть только положительным. А значит, отрицательные числа не могут иметь квадратных корней. Но попробуйте представить, что они *есть*. Что тогда будет?

Математикам понадобилось очень много времени, чтобы понять: числа – не более чем искусственно созданные изобретения человеческого разума. Они незаменимы для постижения окружающего мира, но в то же время являются его *частью* не более, чем любой из треугольников Евклида или вычислительная формула. На протяжении истории нашей культуры математики противились этой философской проблеме, пока не убедились, что мнимые числа незаменимы, полезны и даже в чем-то схожи с более привычными нам действительными.

Проблемы с кубическим уравнением

Революционные идеи в математике редко зарождаются в простом и на поверку очевидном контексте. Чаще всего им необходима сложная почва. Так вышло с квадратным корнем из –1. Сейчас мы обычно вводим это число в квадратном уравнении $x^2 + 1 = 0$, решением для которого становится $\sqrt{-1}$ – что бы это ни значило. Первыми математиками, задавшимися вопросом, имеет ли это хоть какой-то смысл, стали алгебраисты эпохи Возрождения, пришедшие к проблеме квадратных корней из отрицательных чисел несколько необычным путем: в поисках решений для кубических уравнений.

Вспомним, как дель Ферро и Тарталья нашли решение для кубических уравнений, позже опубликованных Кардано в его труде «Великое искусство». В современных символах решение для кубического уравнения $x^3 + ax = b$ выглядит так:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}.$$

Математики эпохи Возрождения описали это выражение словами, но методика вычислений была точно такой же.

Иногда эта формула работает безупречно, но порой чревата проблемами. Кардано заметил, что, когда формулу применяют к уравнению $x^3 = 15x + 4$, с явным решением $x = 4$, результат выглядит так:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Но это выражение кажется не имеющим смысла, ведь у числа –121 не существует квадратного корня. Кардано зашел в тупик и написал Тарталье, попросив его объяснить это недоразумение, но Тарталья не уловил сути вопроса, и его ответ был невразумителен.

Решение проблемы нашел Рафаэль Бомбелли в своем трехтомном труде «Алгебра», изданном в Венеции в 1572 г. и в Болонье в 1579 г. Бомбелли не устраивали загадки и недоговоренности «Великого искусства» Кардано, и он взял на себя труд написать нечто более ясное. Он стал оперировать этим «нескладным» квадратным корнем, как если бы это было обычное число, отмечая:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$$

и выводя из этого любопытную формулу:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}.$$

Точно так же Бомбелли вывел формулу:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}.$$

Теперь мы можем записать сумму двух кубических корней как



Итак, этот странный метод всё же привел нас к верному ответу – безупречно целому числу, хотя нам и пришлось манипулировать «невозможными» величинами.

Да, это всё очень интересно, *но работает ли это*?

Мнимые числа

В поисках ответа на этот вопрос математикам пришлось найти надежные пути рассуждений о квадратных корнях из отрицательных чисел и способы вычислений с их использованием. Первые ученые, в том числе Декарт и Ньютон, считали эти мнимые числа верным признаком того, что у задачи нет решения. Если вам надо найти число, чей квадрат равен –1, то формальное решение является мнимым числом, а значит, решения не существует. Но вычисления Бомбелли предполагают, что только мнимостью здесь не ограничиться. Эти числа можно использовать для *поиска решения*, они показывают, что оно *существует*.

В 1673 г. Джон Валлис изобрел простой способ представлять мнимые числа в виде точек на плоскости. Он исходил из привычного метода построения действительных чисел в виде прямой, расставив на ней положительные числа по правую сторону и отрицательные по левую.

Затем он ввел еще одну прямую, под прямым углом к первой, и уже на ней расположил мнимые числа.

Это похоже на алгебраический подход Декарта к геометрии с использованием координатных осей. Только здесь на одной оси мы видим действительные числа, а на второй – мнимые. Валлис несколько иначе выразил эту идею: его версия скорее была ближе к подходу Ферма, чем напоминала систему координат Декарта. Но основной принцип тот же. Оставшаяся плоскость соотносится с комплексными числами, состоящими из двух частей: одна действительная, другая мнимая. В декартовой системе координат мы отмеряем действительную часть вдоль вещественной прямой, а мнимую – параллельно мнимой линии. Иными словами, число $3 + 2i$ будет отложено на три единицы вправо от начала координат и на две единицы вверх.



Линия действительных чисел

Идея Валлиса решила проблему придания смысла мнимым числам, но никому не пришло в голову обратить на это внимание. И всё же

медленно, но верно идея распространялась на уровне подсознания. Все больше математиков переставали беспокоиться, что $\sqrt{-1}$ не может занять место на действительной прямой, и понимали, что он разместится где-то в более просторном мире комплексной плоскости. Но были и такие, кто отвергал саму идею: в 1758 г. некто Франсуа Дэви де Фонсене категорически утверждал в своем труде, что совершенно не имеет смысла представлять, будто мнимые числа формируют линию, расположенную под прямым углом к линии действительных чисел. Но всё же больше было таких, кто искренне приветствовал идею Валлиса, понимая ее важность.



Две дублирующиеся линии с действительными числами, расположенные под прямым углом

Идея, что комплексная плоскость позволяет расширить вещественную прямую и дать приют мнимым числам, подразумевалась в работе Валлиса, хотя ее объяснение было несколько туманным. Более ясное изложение мы находим у норвежца Каспара Весселя в издании от 1797 г. Вессель был землемером, он стремился прежде всего представить геометрию плоскости с помощью чисел. И наоборот: его идеи можно рассматривать как способ представления комплексных чисел в терминах планиметрии. Но он опубликовал свою работу только в Дании, и она оставалась под спудом почти целый век, пока ее не перевели на французский. Французский математик Жан-Робер Арган опубликовал такой же способ представления комплексных чисел в 1806 г., а Гаусс открыл независимо от них то же самое в 1811 г.



Комплексная плоскость по Весселю

Комплексный анализ

Если бы комплексные числа так и остались полезны только для алгебры, им было бы суждено оставаться отвлеченным научным курьезом, занимающим исключительно математиков. Но по мере роста интереса к исчислению, который принял строгую форму математического анализа, люди стали замечать, что действительно интересное слияние вещественного анализа с комплексными числами – точнее, комплексный анализ – не только возможно, но и желательно. Действительно, для многих задач это существенно.

Это открытие выросло из первых попыток обдумать существование комплексных функций. Самые простые функции, такие как возведение в квадрат или в куб, зависят только от алгебраических операций, поэтому было легко определить их для комплексных чисел. Чтобы возвести в квадрат комплексное число, необходимо умножить его само на себя, и тот же прием годится для действительных чисел. Квадратные корни из комплексных чисел немного каверзнее, но приносят нам приятную награду за потраченные силы: *каждое* комплексное число имеет квадратный корень. И действительно, любое такое число, не равное 0, имеет ровно два квадратных корня (положительный и отрицательный, равные по модулю). Так мы обогатили действительные числа новым числом *i*, вдобавок обеспечив – 1 квадратным корнем и определив квадратные корни для любого числа в расширенной системе комплексных чисел. А как быть с синусами, косинусами, экспонентами и логарифмами? На этом этапе они особенно интересны, но и более головоломны. Особенно логарифмы.

Как и число *i* само по себе, логарифмы комплексных чисел тут же превратились в очередную проблему. В 1702 г. Иоганн Бернулли исследовал процесс интегрирования, применив его к обратным полиномам второй степени. Он нашел изысканный способ решения этой задачи, когда у квадратного уравнения есть два действительных корня: *r* и *s*. Теперь мы можем переписать это подынтегральное выражение, используя так называемые простейшие дроби:



что приводит нас к интегралу

$$A \ln (x - r) + B \ln (x - s).$$

А что, если квадратное уравнение не имеет действительного корня? Как, например, проинтегрировать величину, обратную $x^2 + 1$? Бернулли понимал, что раз уж вы занялись алгеброй комплексных чисел, трюк с простейшей дробью сработает и здесь, только в этом случае r и s будут комплексными числами. Например:



а интеграл этой функции принимает форму:

$$^1/_2 \ln (x + i) + {}^1/_2 \ln (x - i).$$

Этот финальный шаг не совсем удовлетворителен, поскольку требует определения логарифма комплексного числа. Возможно ли сделать корректным такое утверждение?

Бернулли считал, что можно, и благодаря этой идее добился потрясающего эффекта. Той же позиции придерживался и Лейбниц. Однако математические детали всё еще требовали доработки. К 1712 г. оба ученых сошлись в споре по самой сути такого подхода. Забудем про *комплексные* числа, – что такое логарифм *отрицательного действительного* числа? Бернулли считал, что он тоже должен быть действительным, а Лейбниц утверждал, что он будет комплексным. Бернулли представил нечто вроде доказательства своей правоты: с помощью обычного вычислительного формализма уравнение



может быть проинтегрировано, получим

$$\ln (-x) = \ln (x).$$

Однако Лейбница это не убедило, и он по-прежнему утверждал, что интегрирование будет верно только для положительного действительного x.

Этот узконаправленный спор был разрешен в 1749 г. Эйлером, и оказалось, что Лейбниц был прав. Бернулли забыл, что любой интеграл включает произвольную константу. И вместо полученного Бернулли выражения должно быть

$$\ln(-x) = \ln(x) + c$$

для некой константы c. Но что это за константа? Если логарифм отрицательных (и комплексных) чисел должен иметь свойства логарифма действительных чисел, что и является целью всей игры, то верно, что

$$\ln(-x) = \ln(-1 \times x) = \ln(-1) + \ln x,$$

так что $c = \ln(-1)$. Затем Эйлер привел последовательность изящных преобразований, получив еще более явную формулу для c. Прежде всего он нашел способ манипулирования различными формулами, содержащими комплексные числа, придя к выводу, что они ведут себя очень похоже на действительные, и получил соотношение между тригонометрической функцией и экспоненциальной:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Эта формула была предложена в 1714 г. Роджером Котсом. Установив, что $\theta = \pi$, Эйлер получил превосходный результат:

$$e^{i\pi} = -1,$$

связавший две основные математические константы: e и π. Вызывает восхищение как само существование этой связи, так и ее простота. Эта формула по праву считается одной из самых красивых формул всех времен.

Взяв логарифм, мы получаем:

$$\ln(-1) = i\pi,$$

приоткрывая тайну этой непостижимой константы c из предыдущего текста: она равна $i\pi$. В таком случае это мнимое число, т. е. Лейбниц был прав, а Бернулли ошибался.

Но и это еще не всё: ящик Пандоры едва успел открыться. Если принять, что θ = 2π, то

$$e^{2i\pi} = 1.$$

Значит, ln (1) = 2iπ. Тогда уравнение $x = x \times 1$ приводит к выводу:

$$\ln x = \ln x + 2\, i\pi.$$

Тогда для любого целого n

$$\ln x = \ln x + 2ni\pi.$$

На первый взгляд, бессмыслица: это означает, что 2niπ = 0 для любого n. Но есть и такой способ проинтерпретировать это выражение, что оно покажется осмысленным. В случае комплексных чисел логарифмическая функция многозначна. И действительно, кроме тех случаев, когда комплексное число z равно 0, функция ln z может принимать бесконечно много разных значений (когда z = 0, ее логарифм не определен).

ЧТО КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ДАЛИ ИМ

Действительные и мнимые части комплексной функции должны удовлетворять условиям Коши – Римана, что тесно связано с применением ДУЧП для гравитации, электричества, магнетизма и некоторых видов гидродинамики на плоскости. Это условие позволяет решать многие уравнения в математической физике – но только для двумерных систем.



Магнитное поле вокруг магнитного стержня, «увидеть» которое помогают железные опилки: комплексный анализ может быть использован при расчете таких полей

Математики привыкли пользоваться функциями, которые могут иметь несколько разных значений, и квадратный корень остается самым

очевидным примером: здесь даже действительное число имеет два разных корня, положительный и отрицательный. Но *бесконечно много* значений? Это действительно странно.

Интегральная теорема Коши

Большой переполох в этой области учинило открытие, что вы можете заниматься исчислением – комплексным анализом – с комплексными функциями, а полученная в результате теория элегантна и полезна. Настолько полезна, что само логическое обоснование данной идеи перестало волновать кого бы то ни было. Когда что-то *работает* и вы понимаете, что без этого не обойтись, вы обычно не особо задаетесь вопросом, почему так получилось.



Два разных пути P и Q от –1 до 1 на комплексной плоскости

Использование комплексного анализа, судя по всему, стало осознанным выбором математического сообщества: это обобщение столь явное и убедительное, что любой математик, наделенный здравым смыслом, захотел бы увидеть, к чему это приведет. В 1811 г. Гаусс пишет письмо своему другу астроному Фридриху Бесселю, излагая свой подход к комплексным числам как к точкам на плоскости. Также он упоминает о некоторых глубинных результатах. Среди них – базовая теорема, заложившая фундамент комплексного анализа в целом. Сегодня она известна нам как интегральная теорема Коши, хотя Гаусс сформулировал ее гораздо раньше в своих неопубликованных работах.

ОГЮСТЕН ЛУИ КОШИ 1789–1857



Огюстен Луи Коши родился в Париже в самый разгар политических неурядиц. Друзьями его семьи были Лаплас и Лагранж, так что Коши с детских лет был знаком с миром высшей математики. Он поступил в Политехническую школу и закончил ее в 1807 г. В 1810 г. его пригласили работать инженером в Шербуре. Здесь он участвовал в подготовке

планов вторжения Наполеона в Англию, но не оставил надежду заняться математикой и старательно штудировал «Небесную механику» Лапласа и «Теорию аналитических функций» Лагранжа. Несмотря на неудачные попытки получить академическую должность, Коши продолжил исследования в математике. Его знаменитая статья по интегрированию комплексных функций, давшая основу всему комплексному анализу, появилась в 1814 г. и наконец привела его к заветной цели: через год ему досталось место доцента по математическому анализу в Политехнической школе. Талантливый математик Коши опубликовал статью о волнах, принесшую ему в 1816 г. премию Академии наук. Он продолжил исследования в области комплексного анализа, и в 1829 г. в своем труде «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении» дал первое явное определение комплексной функции.

После революции 1830 г. Коши ненадолго эмигрировал в Швейцарию, а в 1831 г. стал профессором теоретической физики в Турине. Как преподаватель он проявил себя крайне неорганизованным. В 1833 г. он перебрался в Прагу, став преподавателем у внука Карла X. Однако принцу были одинаково противны как математика, так и физика, отчего Коши часто выходил из себя. Ученый вернулся в Париж в 1838 г., восстановился в качестве преподавателя в Академии, но не хотел преподавать, пока в 1848 г. не был низложен Луи-Филипп I. За свою научную карьеру Коши успел опубликовать 789 блестящих работ по математике.

Эта теорема касается определенных интегралов от комплексных функций, т. е. выражения:



где a и b – комплексные числа. В вещественном анализе это выражение можно оценить, найдя первообразную $F(z)$ для $f(z)$, т. е. такую функцию $F(z)$, чтобы ее производная $dF(z)/dz = f(z)$. Тогда определенный интеграл равен $F(b) - F(a)$. В данном случае его

величина зависит только от конечных точек a и b, а не от того, как вы движетесь от одной к другой.

В комплексном анализе, по словам Гаусса, всё иначе. Здесь величина интеграла может зависеть от *пути*, по которому переменная z движется от точки a к точке b. Поскольку комплексные числа формируют плоскость, их геометрия гораздо богаче, чем у вещественной прямой, и здесь очень важны дополнительные характеристики.

Например, представим, что вы интегрируете $f(z) = 1/z$ от $a = –1$ до $b = 1$. Если упомянутый путь представляет собой полуокружность P, расположенную выше вещественной оси, то интеграл получается равным $–\pi i$. Но если путь представляет собой полуокружность Q, расположенную ниже вещественной оси, интеграл будет равен πi. Это две разные величины, и разница между ними равна $2\pi i$.

По мнению Гаусса, разница появляется, потому что функция $1/z$ ведет себя плохо. Она делается бесконечной в зоне, ограниченной двумя путями, а именно в точке $z = 0$, которая является центром окружности, образованной двумя путями. «Я утверждаю теперь, что интеграл ‹…› сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя путями, представляющими переход, функция нигде не равна бесконечности. Это прекрасная теорема, и доказательство к ней я при случае предоставлю». Однако последнего Гаусс так и не сделал.

Теорема была вновь открыта другим ученым, Огюстеном Луи Коши, подлинным основателем комплексного анализа. Да, Гаусс высказал много блестящих идей, но они бесполезны, пока лежат под спудом. Коши опубликовал свою работу. Он постоянно публиковал что-то новое. Говорят, что журнал Comptes Rendus de l’Academie Française принял негласное правило (действующее по сей день) не принимать статьи длиннее четырех печатных страниц как раз ради того, чтобы не позволить Коши заполонить все страницы. Но даже это не обескуражило ученого: он стал писать больше коротких статей. Основные принципы комплексного анализа с удивительной скоростью вылетали из-под его неутомимого пера. И он оказался гораздо более простой, изящной и во многом более полной теорией, чем вещественный анализ.

Например, в вещественном анализе функция может быть дифференцируемой, а ее производная – нет. Она может быть дифференцируемой 23 раза, а на 24-й – нет. Она может быть дифференцируема столько раз, сколько вам угодно, но не может быть представлена степенным рядом. Ни одна из этих неприятностей не грозит вам в комплексном анализе. Если функция дифференцируема, ее можно дифференцировать сколько угодно раз; более того, она может быть представлена степенным рядом. Причина – в тесном взаимодействии с теоремой Коши и, возможно, тем фактом, который Гаусс всё же применил в своем тайном доказательстве: чтобы быть дифференцируемой, комплексная функция должна отвечать очень жестким стандартам, известным как *условия Коши – Римана*. Эти условия прямо приводят нас к результатам Гаусса, что интеграл между двумя точками может зависеть от выбранного пути. Соответственно, как отмечал Коши, интеграл по *замкнутому* пути не может не равняться 0. Он равен 0 при условии, что данная функция дифференцируема (в этом случае она не бесконечна) в любой точке на пути.

Была открыта теорема о вычетах, которая позволяет вычислить величину интеграла вокруг замкнутого пути, зависящую только от расположения этих точек, где функция становится бесконечной, а также поведение функции вблизи этих точек. В двух словах: сама структура комплексной функции определяется ее особыми точками, в которых она себя «плохо» ведет. А самые важные точки – *полюсы*, где функция становится бесконечной.

Квадратный корень из –1 ставил в тупик математиков на протяжении столетий. Хотя, похоже, такой величины и не было, она использовалась в расчетах. Были намеки на то, что сама по себе идея должна иметь какой-то смысл, поскольку может быть использована для получения достоверных результатов, которые сами по себе не связаны с квадратным корнем из отрицательного числа.

Поскольку успешное использование этой невозможной величины продолжало развиваться, математики стали активно ее применять. Ее статус оставался неопределенным, пока не стало очевидно существование логически последовательного расширения традиционной системы действительных чисел, в которой $\sqrt{-1}$ – не более

чем новая грань числа, подчиняющаяся всем привычным законам арифметики.

ЧТО КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ДАЮТ НАМ

В наши дни комплексные числа широко применяются и в физике, и в инженерии. Простой пример – изучение колебаний – периодически повторяющихся движений. Вспомним колебания здания во время землетрясения, вибрации в движущемся автомобиле или передачу по проводам переменного тока.

Простейший и основной вид колебаний описывается выражением $a \cos \omega t$, где t – время, a – амплитуда колебаний, а ω – их частота. Удобно преобразовать эту формулу как действительную часть комплексной функции $e^{i\omega t}$. Использование комплексных чисел упрощает подсчеты, поскольку экспонента проще косинуса. Поэтому инженеры, изучающие колебания, предпочитают работать с комплексными экспонентами и обращаются к их действительной части только в самом конце вычислений.

Комплексные числа также определяют устойчивость стационарных состояний динамических систем и широко применяются в теории управления. Это отрасль науки, посвященная методам стабилизации систем, иначе остающихся нестабильными. Пример – использование контролируемых компьютером подвижных управляемых панелей, стабилизирующих в полете положение космического шаттла. Без такого приложения комплексного анализа шаттлы попадали бы с неба, как кирпичи.

Геометрически действительные числа образуют прямую, а комплексные – плоскость, причем вещественная прямая является одной из двух осей на этой плоскости. Алгебраически комплексное число – просто пара действительных чисел со своими формулами для выполнения над ними действий сложения или умножения.

В наши дни признанные полноправными комплексные числа быстро распространяются среди математиков, потому что значительно

упрощают подсчеты, избавляя от необходимости отдельно рассматривать положительные и отрицательные числа. Сегодня комплексные числа наряду с исчислением комплексных функций постоянно применяются как привычный инструмент почти во всех отраслях технических наук.

Глава 11. Прочные основы

Что заставило ученых обратиться к исчислению

Около 1800 математиков и физиков превратили исчисление в незаменимый инструмент познания мира, и возникшие в этой области проблемы дали толчок к открытию принципиально новых концепций и методов (например, способов решения дифференциальных уравнений), превративших исчисление в самую яркую и многообещающую область математики. Красота и сила его неотразимы. Но критические замечания о недостатках его логического обоснования, высказанные епископом Беркли, остались без ответа. А поскольку ученые уже успели продвинуться в более сложные области, здание в целом делалось всё более уязвимым. Первые приверженцы использования бесконечных рядов, еще не отдавая себе отчета в их огромном значении для науки, выдавали как заведомо ошибочные идеи, так и гениальные открытия. Фурье-анализ не имел основ, и разные математики требовали доказательств противоречивых теорем. В ход пошли такие термины, как «бесконечно малая», без четких определений; без конца возникали логические парадоксы; даже такое понятие, как функция, становилось предметом спора. Безусловно, столь плачевная ситуация не могла длиться вечно.

Чтобы разобраться в этом хаосе, требовались ясная голова и непоколебимая готовность заменить интуитивные построения точным знанием, даже ценой понимания. Главными игроками на этом поле стали Бернард Больцано, Коши, Нильс Абель, Петер Дирихле и – более всех – Вейерштрасс. Благодаря их усилиям к 1900 г. даже самые сложные манипуляции с рядами, пределами, производными и интегралами стали выполняться без опаски, четко и без парадоксов. Появилась новая отрасль математической науки – анализ. Исчисление

стало одним из центральных ее аспектов; получили логическое обоснование такие отвлеченные и фундаментальные концепции, как непрерывность и пределы, лежащие в основе идеи исчисления. А вот бесконечно малые величины были запрещены.

Фурье

Пока Фурье не взбаламутил омут, математики купались в приятной уверенности, будто они точно знают, что такое функция. Это был некий определенный процесс f, когда берут число x и получают другое, $f(x)$. Эти числа x вполне логично зависят от f. Если, например, $f(x) = 1/x$, то x не может быть равно 0. Если $f(x) = \sqrt{x}$ и мы имеем дело с действительными числами, то x должно быть положительным. Но когда дело дошло до точных определений, математики немного растерялись.

Как мы теперь понимаем, причиной затруднений было то, что они пытались свести сразу несколько различных свойств в единую концепцию функции: не просто сформулировать правило, по которому x связано с другим числом, $f(x)$, но найти свойства, которыми обладает это правило: непрерывность, дифференцируемость, возможность быть выраженной в виде формулы и т. д.

В частности, они даже не были уверены, как трактовать функции, имеющие разрыв, например:

$$f(x) = 0, \text{ если } x \leq 0; \; f(x) = 1, \text{ если } x > 0.$$

Эта функция внезапно скачет от 0 к 1, как только x минует 0. Все почему-то считают, что явной причиной такого прыжка становится изменение формулы: от $f(x) = 0$ к $f(x) = 1$. Интуитивно казалось, что это единственное объяснение появления такого скачка; что любая одинарная формула автоматически избавит нас от таких скачков, а значит, небольшое изменение x всегда повлечет за собой небольшое изменение $f(x)$.

Еще одним источником трудностей стали комплексные числа, где – как мы уже видели – такие естественные функции, как квадратный корень, имеют два значения, а комплексные логарифмы – бесконечное множество таковых. Очевидно, что логарифм должен быть функцией, но когда есть *бесконечное множество значений*, по какому *правилу* мы получаем $f(z)$ из z? Выходит, таких правил тоже должно быть бесконечно много, и все одинаково годные. Для разрешения всех этих умозрительных разногласий математикам предстояло переломать немало копий. И не кто иной, как Фурье, сумел разом решить их,

предложив гениальный ход: расписать любую функцию через бесконечный ряд синусов и косинусов, открытый им в ходе изучения теплопроводности.

Благодаря своей интуиции ученого Фурье понял, что его метод должен быть универсален. Теоретически вы можете представить себе, что удерживаете температуру металлического стержня на значении 0° на одной половине, но при этом сохраняете 10°, или 50°, или сколько необходимо, на остальной его длине. Физиков до сих пор не интересовали разрывные функции, чьи формулы внезапно меняются. Они вообще не имели обыкновения работать с формулами. Мы прибегаем к ним для отображения физической реальности, но это всего лишь техника, наш образ мышления. Конечно, температура окажется иной на стыке этих двух зон, но математические модели всегда имеют какие-то допущения по отношению к физической реальности. Метод Фурье для тригонометрических рядов, приложенный к разрывной функции такого рода, судя по всему, принес ощутимые результаты. Стальные стержни действительно продемонстрировали точно такое распределение температуры, как предсказывало его уравнение теплопроводности, решенное с помощью тригонометрических рядов. В своей «Аналитической теории тепла» он четко описал свою позицию: «В общем, функция $f(x)$ представляет последовательность значений, или ординат, каждая из которых произвольна. Мы не предполагаем, что эти ординаты подлежат общему закону. Они взаимодействуют между собой каждый раз по-своему».



Прямоугольная волна и некоторые ее Фурье-аппроксимации

Отважное утверждение; к сожалению, приведенное доказательство идеи не имело достаточно убедительной математической базы. Фактически оно оказалось еще более ошибочным, чем аргументы Эйлера или Бернулли. Если утверждение Фурье соответствовало истине, то его ряды в итоге могли стать общим законом для разрывных функций. Функция, приведенная выше, со значениями 0 и 1, имеет периодическую родственную прямоугольную волну. И эта волна характеризуется единственным рядом Фурье, причем вполне изящным, работающим одинаково надежно и там, где функция равна 0, и там, где

она равна 1. Иными словами, функция, которая кажется представленной двумя разными законами, может быть переписана в рамках одного правила.

Мало-помалу математики XIX в. научились разделять разные концептуальные вопросы в этой сложнейшей области. Первым стало значение самого термина «функция». Вторым – разные способы *представления* функций: в виде формулы, степенного ряда, ряда Фурье и т. д. Третий вопрос – какими *свойствами* обладают функции. Четвертый – какое представление функции *гарантирует* эти свойства. Простой многочлен, например, определяет непрерывную функцию. А обычный ряд Фурье, судя по всему, нет.

Очень быстро анализ Фурье превратился в тест для самой идеи функции. Это обострило проблемы, и важность приобрели скрытые различия технических приемов. Не кто иной, как Дирихле, в 1837 г. предложил современное определение функции в статье, посвященной рядам Фурье. В результате он согласился с Фурье: переменная y является функцией другой переменной x, если для каждого значения x (в определенном диапазоне) задано *единственное* значение y. Он недвусмысленно утверждал, что здесь не нужны специальный закон или формула – достаточно, чтобы y можно было определить некой четко прописанной последовательностью математических действий, примененных к x. На тот момент должен был казаться экстремальным пример, приведенный им ранее, а именно в 1829 г.: функция $f(x)$ принимает одно значение, когда x – рациональное число, и другое, когда x – иррациональное. Эта функция разрывная в каждой своей точке. (В наше время функции, подобные этой, рассматриваются как довольно невинные, так как возможно гораздо худшее поведение.)

Для Дирихле квадратный корень не был одной двузначной функцией. Это были две однозначные функции. Для действительного x это естественно – но не существенно: взять положительный квадратный корень как одну из них и отрицательный как другую. Для комплексных чисел нет очевидного естественного выбора, хотя какое-то число решений можно найти, чтобы облегчить жизнь.

Непрерывные функции

У математиков до сих пор есть привычка: несмотря на великое множество определений понятия «функция», они всё равно то и дело открывают у нее еще какие-то качества, выходящие за рамки определения. В частности, они предположили, что любая разумная формула, например многочлен, автоматически определяет непрерывную функцию. Однако они никогда не доказывали этого – и прежде всего потому, что не определили термин «непрерывная». По большей части данная область всё еще находилась под властью интуитивных построений, отнюдь не всегда правильных.

Первым начал серьезно разбираться в этом беспорядке священник из Богемии, философ и математик Бернард Больцано. Он подвел надежный логический фундамент под большинство основных идей исчисления; главным исключением было то, что он принял как данность существование действительных чисел. Он настаивал, что бесконечно малые и бесконечно большие величины не существуют, а значит, не могут быть использованы, как бы соблазнительно это ни выглядело. И он же дал первое вразумительное определение непрерывной функции. А именно: f непрерывна, если разница $f(x + a) – f(x)$ может быть настолько малой, насколько мы пожелаем, если a тоже достаточно мала. Предыдущие авторы предпочитали формулировки вроде «если a сколь угодно малая величина, то $f(x + a) – f(x)$ также сколь угодно мала». Но для Больцано a была всего лишь числом, подобным другим. Он рассуждал так: каким бы малым ни было $f(x + a) – f(x)$, вы всё равно должны найти для него соответствующую величину a. Не было необходимости, чтобы одна и та же величина использовалась каждый раз.

Например, $f(x) = 2x$ непрерывна, потому что $2(x + a) – 2x = 2a$. Если вы хотите, чтобы $2a$ было меньше определенного числа, скажем $10^{–10}$, вам нужно сделать a меньше $10^{–10}/2$. Если вы возьмете более сложную функцию, скажем $f(x) = x^2$, вычисления будут немного сложнее, потому что правильное значение a зависит от x так же, как и от выбранной нами величины, $10^{–10}$, но любой опытный математик решит эту задачу за пару минут. Пользуясь таким определением, Больцано *доказал* – впервые в истории, – что полиномиальная функция непрерывна. Но на

протяжении 50 лет до этого никому не было дела. Больцано опубликовал свою работу в журнале, который вообще не мог попасть в руки математика – не то чтобы его заинтересовать. В наши дни господства интернета в это трудно поверить, но еще 50 лет назад средства коммуникации не шли ни в какое сравнение с нашими. Что уж говорить о периодике 180-летней давности?

В 1821 г. Коши пришел практически к тому же выводу, но использовал несколько путанную терминологию. Его определение непрерывности функции f заключалось в том, что разница между $f(x)$ и $f(x + a)$ бесконечно мала, если бесконечно мала величина a, что на первый взгляд кажется старым, плохо определенным подходом. Однако бесконечно малой величиной для Коши было не *отдельное* число, почему-то бесконечно малое, а постоянно убывающая последовательность чисел. Например, последовательность 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 и т. д. бесконечно мала в понимании Коши, но каждое отдельное число, например 0,0001, – обычное действительное число. Возможно, малое, но не бесконечно. Учитывая терминологию, мы видим, что концепция непрерывности Коши в точности повторяет Больцано.

Очередным критиком недостатков в изучении бесконечных процессов стал Абель, жаловавшийся на то, что ученые используют бесконечные ряды, не дав себе труда поинтересоваться, имеет ли смысл их сумма. Его критика оказалась действенной, и мало-помалу в хаосе стали намечаться черты некоего порядка.

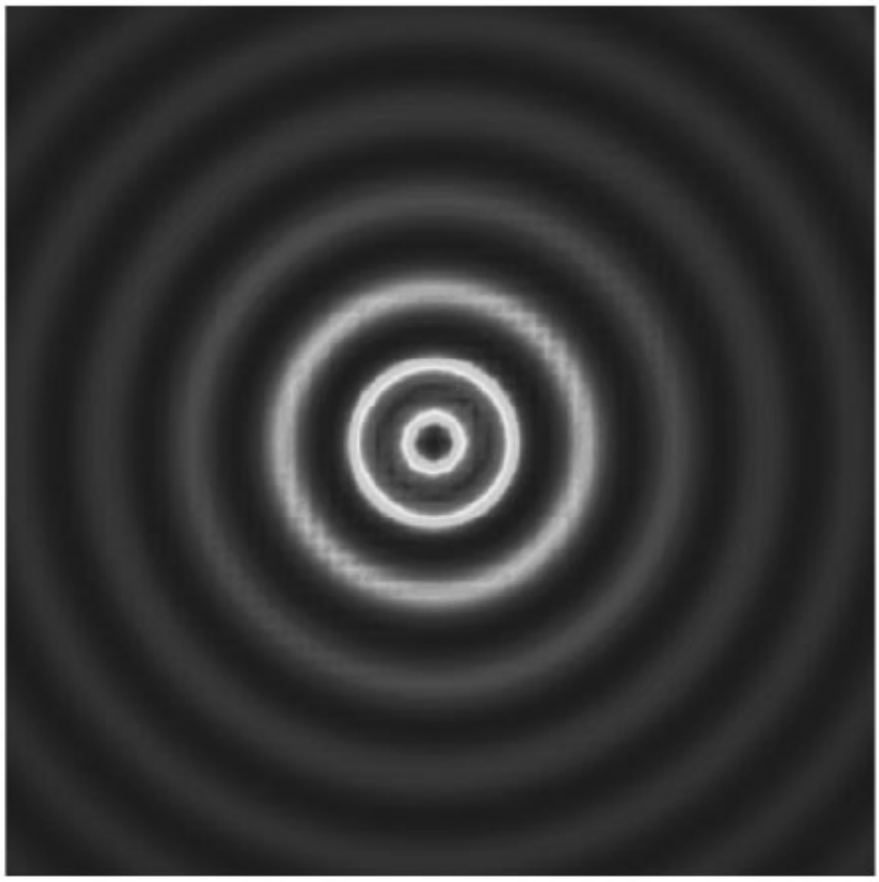
ЧТО АНАЛИЗ ДАЛ ИМ

Расцвет математической физики в XIX в. был ознаменован открытием ряда важнейших дифференциальных уравнений. Не имея современных высокоскоростных компьютеров, способных находить численные решения, математики того времени изобрели для уравнений новые специальные функции. И они работают по сей день. Примером может служить *уравнение Бесселя*. Первым его вывел Даниил Бернулли, а позже обобщил Бессель. Вот оно:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0.$$

Здесь обычные функции, такие как экспонента, синус, косинус или логарифм, не помогут найти решение. Но можно воспользоваться методами анализа в виде степенного ряда. Он определяет новые функции, так называемые функции Бесселя. Простейшая функция Бесселя обозначается как $J_k(x)$; но есть и другие. Степенные ряды позволяют вычислить $J_k(x)$ с необходимой точностью.

Функции Бесселя естественным образом возникают в задачах, связанных с кругами и цилиндрами, такими как колебание круглой мембраны, распространение электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, теплопроводность в цилиндрическом металлическом стержне и физика лазеров.



Интенсивность лазерного излучения описывается функцией Бесселя $J_1(x)$

Пределы

Идеи Больцано дали толчок дальнейшему усовершенствованию. Он сделал возможным определение предела бесконечной последовательности чисел и, следовательно, ряда, который является суммой бесконечной последовательности. Так, его формализм подразумевает:

$$1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} + {}^{1}/_{16} + \ldots$$

и т. д. до бесконечности. Это осмысленная сумма, и ее величина точно равна 2. Не чуть-чуть меньше, не бесконечно малой величине меньше 2, а ровно 2. Чтобы понять, как это работает, предположим, что у нас есть последовательность чисел:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

и т. д. до бесконечности. Мы можем сказать, что a_n стремится к пределу a по мере того, как n стремится к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что разница между a_n и a меньше, чем ε, для любого $n > N$. (Символ ε, один из традиционно используемых математиками, – греческая буква эпсилон.) В этом определении все числа конечные – никаких бесконечно малых или бесконечно больших. В дополнение к бесконечному ряду выше взглянем на его конечные суммы:

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1 + {}^{1}/_{2} = {}^{3}/_{2},$$
$$a_2 = 1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} = {}^{7}/_{4},$$
$$a_3 = 1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} = {}^{15}/_{8}$$

и т. д. Разница между a_n и 2 равна $1/2^n$. Чтобы сделать ее меньше ε, мы берем $n > N = \log_2 ({}^{1}/_{\varepsilon})$.

Ряд, имеющий конечный предел, называют сходящимся. Конечная сумма определяется как предел последовательности конечных сумм, полученных добавлением всё новых ее элементов. Если такой предел существует, ряд сходящийся. И производные, и интегралы – лишь разновидности пределов. Они существуют – иными словами, обретают математический смысл – при условии, что их пределы сходятся. Пределы, как отмечал Ньютон, – некая величина, которая позволяет определить, как некое другое число приближается к бесконечности или 0. Но при этом число не может достичь бесконечности или 0.

Сегодня исчисление в целом опирается на непоколебимый фундамент. Ранее его главным недостатком было то, что, прежде чем прибегнуть к поиску предела, никто не интересовался, есть ли вообще сходимость. Лучшим способом сделать это было бы доказательство еще нескольких более общих теорем о том, какие виды функций непрерывны, или дифференцируемы, или интегрируемы, и какие последовательности и ряды сходятся. Именно этим и занялись математики, и именно поэтому мы можем уже не тревожиться из-за нестыковок, отмеченным епископом Беркли. Поэтому мы больше не противимся использованию рядов Фурье: теперь можно точно определить, когда они сходятся, а когда нет, и уж, во всяком случае, четко понять, в каком смысле они сходятся. Существует достаточно возможностей выбрать тот ряд Фурье, который вам нужен.

Степенные ряды

Вейерштрасс открыл, что одинаковые идеи работают и с комплексными числами, и с действительными. Любое комплексное число $z = x + iy$ имеет модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, что, согласно теореме Пифагора, равно расстоянию от 0 до z на комплексной плоскости. Если мерить величину комплексного выражения с помощью его модуля, то определения предела, ряда и т. п., сформулированные для действительных чисел еще Больцано, тут же перенесутся в область комплексного анализа.

Вейерштрасс отметил, что один особый вид бесконечного ряда кажется особенно полезным. Он известен как степенной ряд и выглядит как многочлен бесконечной степени:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

где коэффициенты a_n – конкретные числа. Вейерштрасс углубился в исследование этого вопроса, стремясь полностью провести комплексный анализ степенных рядов. Результаты вышли блестящими.

Например, вы можете описать экспоненциальную функцию выражением:

$$e^z = 1 + z + {}^1\!/_2\, z^2 + {}^1\!/_6\, z^3 + {}^1\!/_{24}\, z^4 + {}^1\!/_{120}\, z^5 + \ldots,$$

где 2, 6, 24, 120 и т. д. являются *факториалами* – произведениями последовательности целых чисел (например, 120 = 1 × 2 × 3 × 4 × 5). Эвристически Эйлер уже выводил эту формулу, теперь же Вейерштрасс получил ее логическим путем. В очередной раз использовав страницы из книги Эйлера, он сумел преобразовать тригонометрические функции в экспоненциальные, определив:

$$\cos\theta = {}^1\!/_2\, (e^{i\theta} + e^{-i\theta}),$$
$$\sin\theta = {}^1\!/_{2i}\, (e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Все стандартные свойства этих функций вытекают из их выражений в виде степенного ряда. Вы даже можете определить π и доказать, что $e^{i\pi} = -1$, как утверждал Эйлер. И из этого, в свою очередь, вытекает, что комплексные логарифмы ведут себя именно так, как описывал Эйлер. Всё это наполнилось смыслом. Комплексный анализ перестал быть загадочным продолжением вещественного анализа: он превратился в самостоятельный серьезный предмет. На поверку вышло, что подчас работать в комплексной области даже проще, чтобы выразить в конце вещественный результат.

По Вейерштрассу, все эти достижения были лишь началом – первым этапом грандиозной программы. Но главное – были получены правильные основания. Теперь математики могли без опасений продолжать строить всё более сложное здание нового раздела науки.

Вейерштрасса отличал поразительно светлый ум, открывавший ему путь в самых сложных хитросплетениях пределов, производных и интегралов. И он не сбивался с выбранного курса. Также он заранее видел потенциально трудные места. Одна из его самых удивительных теорем доказывала, что существует функция $f(x)$ от действительной переменной x, непрерывная в любой точке, но не дифференцируемая ни в одной точке. Графиком такой функции является непрерывная кривая, но ее изгибы так прихотливы, что мы не можем провести ни одну касательную к ней. Его предшественники не верили в такую возможность, современники недоумевали, к чему ведет такая теорема. А его последователи развили теорему в самую захватывающую новую теорию XX в. – теорию фракталов.

Но об этом мы поговорим позже.

ГИПОТЕЗА РИМАНА

Самой известной нерешенной проблемой для всех математиков является гипотеза Римана: вопрос комплексного анализа, возникший в связи с простыми числами, отразился в итоге на всей математике.

Примерно в 1793 г. Гаусс предположил, что количество простых чисел, меньших x, приблизительно равно $x/\ln x$. На самом деле он сделал более точное приближение, названное

интегральным логарифмом. В 1737 г. Эйлер отметил многообещающую связь между теорией чисел и анализом: бесконечный ряд

$1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \ldots$

равен произведению, по всем простым p, следующего ряда:

$1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots = 1/(1 - p^{-s})$.

Здесь мы должны взять $s > 1$, чтобы ряд сходился.

В 1848 г. Пафнутий Чебышёв добился некоторого прогресса в доказательстве предположения Гаусса, используя комплексную функцию, родственную рядам Эйлера и позже названную дзета-функцией $\zeta(z)$. Роль ее полностью осветил Риман в 1859 г. в своей статье «On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude» («О числе простых чисел, не превышающих заданной величины»). Он показал, что статистические свойства простых чисел тесно связаны с нулями дзета-функции, т. е. решениями z уравнения $\zeta(z) = 0$.

В 1896 г. Жак Адамар и Шарль де ла Валле-Пуссен использовали дзета-функцию для доказательства теоремы о распределении простых чисел. Главной трудностью было показать, что $\zeta(z)$ не равна 0 для всех z вида $1 + it$. Чем лучше мы контролируем расположение нулей дзета-функции, тем больше узнаем о простых числах. Риман предположил, что все нули, за исключением тривиальных (получающихся при z, равной отрицательным четным целым числам), расположены на *критической прямой* $z = {}^1/_2 + it$.

В 1914 г. Харди доказал, что на этой прямой располагается бесконечное множество нулей. Мощные компьютерные данные позже подтвердили эту гипотезу. Себастьян Веденивский с помощью компьютерной программы ZetaGrid в 2001–2005 гг. удостоверил, что первые 100 миллиардов нулей лежат именно на критической прямой.

Гипотеза Римана отмечена номером 8 в знаменитом списке нерешенных кардинальных математических задач, составленном Давидом Гильбертом и содержащем 23 пункта. Кроме того, это одна из задач тысячелетия, за решение

которой Математический институт Клея предлагает миллион долларов.

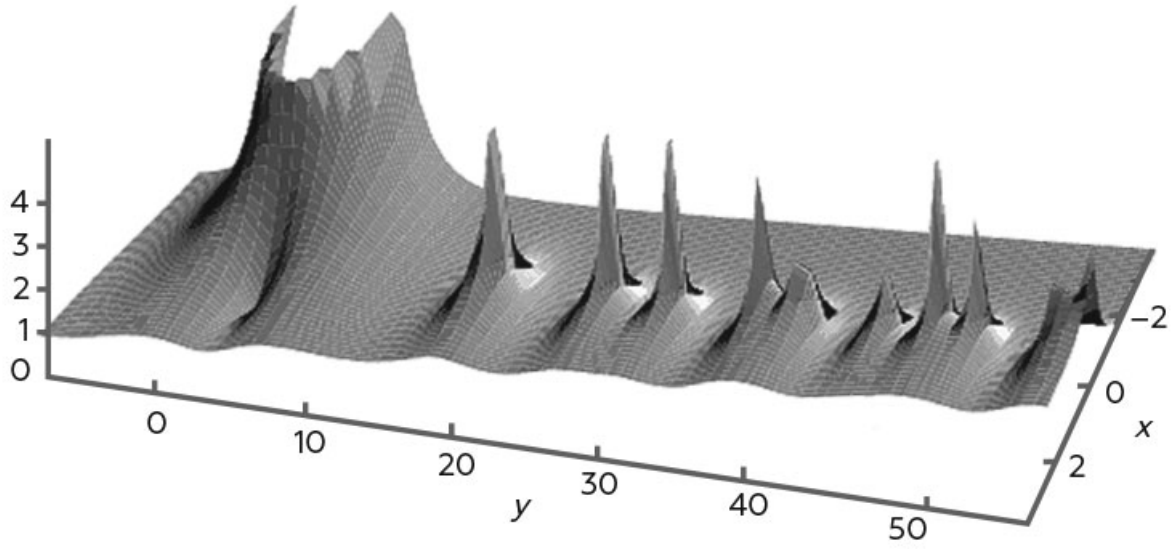
Прочные основы

Первопроходцы в области исчисления с кавалерийской отвагой оперировали бесконечностью. Эйлер предположил, что степенные ряды подобны многочленам, и использовал эту гипотезу с сокрушительным эффектом. Но в руках простых смертных такого рода наскоки легко могут привести к откровенной глупости. Даже сам Эйлер иногда высказывал неумные мысли. Например, он начал со степенного ряда $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$, чья сумма равна $1/(1 - x)$, положил $x = -1$ и вывел:

$$1\text{-}1 + 1–1 + 1–1 + \ldots = {}^{1}/_{2},$$

что является бессмыслицей. Степенные ряды не сходятся, если x не расположен строго между –1 и 1, что прояснила теория Вейерштрасса.

И только беспощадная критика, подобная той, что высказал епископ Беркли, в итоге обогатила математику и поставила ее на прочную основу. Благодаря этому сложился принцип: чем сложнее твое построение, тем важнее заручиться для него безукоризненным основанием.



Модуль дзета-функции Римана

В наши дни большинство пользователей математики снова пренебрегают ее тонкостями, будучи уверенными в том, что знания, которые они применяют и которые им кажутся разумными, вероятно, имеют строгое обоснование. В этой самоуверенности их укрепили открытия Больцано, Коши и Вейерштрасса. Тем временем профессиональные математики продолжали разрабатывать строгие концепции бесконечности. Даже появилось движение, ратовавшее за возвращение концепции бесконечно малой величины (флюксии), известное как нестандартный анализ, который является совершенно строгим и технически полезным для некоторых других малоподатливых проблем. Здесь удалось избежать логических нестыковок, провозгласив бесконечно малые новым видом чисел, а не условным действительным числом. По духу это близко к тому, как думал Коши. Нестандартный анализ – удел узких специалистов, но, возможно, он станет методом будущего.

ЧТО АНАЛИЗ ДАЕТ НАМ

Анализ используется биологами для изучения динамики роста популяций различных организмов. Простым примером может служить логистическое отображение, или модель Ферхюльста – Пирла. Здесь изменение величины популяции x является функцией от времени t, моделируемой дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{M}\right),$$

где константа M является «пропускной способностью», максимальной величиной популяции, которую может поддерживать окружающая среда.

Стандартный аналитический метод предлагает точное решение

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kt}},$$

которое называется логистической кривой. Соответственно модели численность популяции начинает расти очень быстро (экспоненциально), но по мере приближения величины популяции к половине пропускной способности кривая постепенно выравнивается, пока не достигает уровня пропускной способности.

Эта кривая не может точно отражать реальность, хотя достаточно четко воспроизводит поведение многих популяций. Более сложные модели такого типа представят данные, сильнее приближенные к реальности. Потребление человеком природных ресурсов также можно смоделировать в виде логистических кривых, обеспечивая возможность оценить потребности в этих ресурсах в будущем, а также сроки, на которые их хватит.



Мировое потребление нефти-сырца с 1900 по 2000 г.: сглаженная кривая – данные анализа, неровная кривая – реальные данные

Глава 12. Невозможные треугольники

Евклидова геометрия – единственно верная или нет?

В основу исчисления легли принципы геометрии, но и сама она была сокращена до символических вычислений, которые затем формализовались в анализ. Однако наглядное мышление по-прежнему важно для развития математики, особенно в одном новом и даже поначалу шокирующем направлении. На протяжении более 2000 лет имя Евклида было синонимом геометрии. Последователи успешно развивали его идеи, особенно в области конических сечений, но никто из них так и не внес радикальных изменений в основания дисциплины. Убеждение в том, что в мире существует лишь одна геометрия, евклидова, и строгое математическое описание пространства возможно лишь на его принципах, только укреплялось. Люди с трудом могли даже помыслить о какой-то альтернативе.

Так не могло продолжаться вечно.

Сферическая и проективная геометрия

Первое значительное отступление от правил евклидовой геометрии зародилось в недрах самого что ни на есть практического ее применения – навигации. На коротких расстояниях Земля может считаться практически плоской, и ее географические особенности можно точно перенести на плоскость. Но по мере того, как корабли совершали всё более длительные путешествия, учитывать истинную форму нашей планеты стало жизненно необходимо. Некоторые древние цивилизации знали, что Земля круглая. Доказательств было немало: начиная с того, как исчезает на горизонте уплывающий корабль, и кончая тенью планеты, падающей на Луну во время затмений. Это наталкивало древних ученых на мысль, что Земля – идеальный шар.

На самом деле этот шар слегка сплюснут: на экваторе его диаметр равен 12 756 км, а между полюсов 12 714 км. Разница относительно невелика – 300-я доля. В те времена, когда для навигаторов не считалась ошибкой промашка в несколько сотен километров, их вполне устраивала Земля как идеальный шар. Но тогда упор делался скорее на сферическую тригонометрию, а не геометрию – на саму суть навигационных расчетов, а не логический анализ сферы как особого вида пространства. Поскольку сфера относилась к трехмерному евклидову пространству, никто и не предполагал, что сферическая геометрия может чем-то отличаться от евклидовой. Все неточности списывали на кривизну Земли. Сама же геометрия пространства оставалась полностью евклидовой.

Значительным шагом за пределы евклидовой геометрии стала проективная геометрия, открытая в начале XVII в. На нее первыми обратили внимание не ученые, а художники: вспомните теоретические и практические исследования перспективы мастеров итальянского Возрождения. Их целью было сделать свои картины более реалистичными, а привело это к новому образу мышления в геометрии. И снова эти исследования могли быть восприняты как инновации в рамках классической евклидовой геометрии. Ведь речь шла не о самом пространстве, а о том, как мы *видим* его.

Открытие, что Евклид может быть не единственным авторитетом, что могут существовать логически обоснованные типы геометрии,

опровергающие многие из его теорем, пришло с возрождением интереса к логическим основаниям геометрии. Споры захватили ученых в середине XVIII в. и продолжались до середины XIX в. Больше всего вопросов вызвал так называемый пятый постулат Евклида, который весьма туманно утверждал существование параллельных линий. Попытки вывести его из остальных аксиом Евклида привели к открытию, что такой вывод невозможен и есть и другие виды геометрии, помимо евклидовой. Эта неевклидова геометрия давно стала незаменимым инструментом для исследований в математике и математической физике.

Геометрия и живопись

В истории Европы геометрия пребывала в подобии спячки примерно с 300 по 1600 г. И только вопрос перспективы в живописи вдохнул в нее жизнь, вернув науке практическую ценность: как реалистично изобразить трехмерный мир на двумерном полотне.

Художники Возрождения не занимались исключительно живописью. Многие были востребованы как талантливые инженеры для военных и мирных проектов. Их отношение к искусству всегда имело и практическую сторону, и геометрия перспективы как раз и стала гранью, важной для архитектуры ничуть не меньше, чем для живописи. Также в то время оживился интерес к оптике и математике света, что привело к изобретению телескопа и микроскопа. Первым мэтром, заинтересовавшимся математикой, был Филиппо Брунеллески. По сути, его искусство стало движущей силой для его математики. Стоит также упомянуть о книге Леона Баттисты Альберти «Живопись», созданной в 1435 г. и напечатанной в 1511 г. Альберти начал с принятия некоторых важных, хотя и относительно безвредных упрощений, проявив рефлекс настоящего математика. Человеческое зрение – очень сложная тема. Например, мы используем два слегка расставленных в пространстве глаза, чтобы генерировать стереоскопические образы, получая ощущение глубины. Альберти упростил реальность, предложив работать с одним глазом с точечным зрачком, действующим как камера с малым отверстием. Он представил, как художник готовится писать картину, устанавливая мольберт и стараясь создать картинку на полотне с помощью единственного глаза. И с полотна, и с реального объекта картинка попадает на сетчатку, расположенную в задней части глаза. Самым простым (умозрительным) способом было бы сделать полотно прозрачным, смотреть через него с неподвижной точки и рисовать на полотне точно то, что видит глаз. Так трехмерная картинка *проецируется* на полотно. Нацельте глаз на каждую ее деталь так, чтобы он смотрел прямо, и отметьте, где эта линия встречается с плоскостью полотна: здесь и следует рисовать эту деталь.

Эта идея вряд ли принесет пользу, если вы в точности станете следовать ей на практике. Но некоторые художники поступали именно так, используя полупрозрачные материалы или стекло вместо полотна.

Они часто применяли этот прием на подготовительном этапе, нанося набросок на полотно перед тем, как писать картину. Более практичным подходом было бы использовать эту концептуальную формулировку для связи геометрии трехмерной сцены с двумерной картинкой на полотне. Привычная нам евклидова геометрия работает со свойствами, остающимися неизменными при их перемещении: длиной и углами. Хотя сам Евклид не формулировал свои принципы именно так, его основной инструмент – конгруэнтные треугольники – производит такой же эффект (имеются в виду треугольники одинаковой формы и размеров, но расположенные в разных местах). Точно так же геометрия перспективы сводится к свойствам, которые остаются неизменными при проекции. Легко заметить, что длины и углы не ведут себя так же. Вы можете прикрыть Луну одним пальцем – получается, длина способна меняться? С углами еще хуже: если вы посмотрите на угол здания и он прямой, то он будет *казаться* прямым, только если вы посмотрите на него прямо.



Проецирование картинки. Гравюра Альбрехта Дюрера

Какие же свойства геометрических фигур сохраняет проекция? Самые важные кажутся нам такими простыми, что трудно поверить в их значение. Точки остаются точками. Прямые – прямыми. Образ точки, расположенной на прямой, останется на изображении этой линии. Получается, если две линии встречаются в какой-то точке, их изображения тоже встречаются в соответствующей точке. Отношения между точками и прямыми сохраняются в проекции.

Важной чертой, *не полностью* сохраняемой в проекции, является взаимодействие параллельных прямых. Представьте, что вы стоите посреди бесконечно длинной прямой дороги и смотрите вперед. Две ее стороны, параллельные друг другу в трехмерной реальности (никогда не встречающиеся), уже не выглядят параллельными. Они сходятся в одну точку где-то у горизонта. Они всегда ведут себя так, как будто находятся на идеально бесконечной плоскости, а не слегка скругленной Земле. По сути, они и могут вести себя так только на плоскости. На сфере будет едва заметный разрыв, слишком маленький, чтобы его

рассмотреть, там, где линии пересекают горизонт. Получается, все рассуждения о параллельных линиях на шаре весьма запутанны.

Такая особенность параллельных линий очень полезна для изображения перспективы. Это основа привычного рисования прямоугольных объектов в перспективе, когда используются линия горизонта и две исчезающие точки там, где параллельные линии коробки пересекают перпендикулярный им край. «О перспективе в живописи» – труд Пьеро делла Франческа, изданный в 1482–1487 гг., – развил метод Альберти в практические приемы для художников. Сам живописец успешно применял свои идеи в создании драматичных и весьма реалистичных полотен.

Труды художников Возрождения разрешили многие проблемы в геометрии перспективы, но они оставались полуэмпирическими, страдая нехваткой логических обоснований, поддерживавших здание евклидовой геометрии. Эта проблема обоснований была в итоге решена Бруком Тейлором и Иоганном Генрихом Ламбертом в XVIII в. Но к тому времени в геометрии произошли еще более поразительные перемены.

Дезарг

Первую нетривиальную теорему в проективной геометрии открыл инженер-архитектор Жерар Дезарг. Ее опубликовал в своей книге в 1648 г. Абрахам Босс. Дезарг доказал следующую важную теорему: «Предположим, треугольники *ABC* и *A´B´C´* находятся в перспективе. Это означает, что три линии, *AA´*, *BB´* и *CC´*, проходят через одну точку. Тогда три точки *P*, *Q* и *R*, в которых пересекаются продолжения трех пар сторон треугольника, лежат на одной прямой». Этот результат теперь нам известен как теорема Дезарга. В ней не упоминаются ни длина, ни углы: она целиком посвящена отношениям между прямыми и точками. А значит, это и есть проективная теорема.



Теорема Дезарга

Есть одна хитрость, делающая теорему очевидной: представьте себе, что рисуете изображение трехмерной фигуры, у которой два треугольника лежат в двух плоскостях. Тогда на линии, по которой пересекаются эти плоскости, и будут расположены три точки Дезарга *P*, *Q* и *R*. Без особого труда так даже можно доказать эту теорему, построив соответствующую трехмерную фигуру, чьи проекции выглядят как два треугольника. Значит, мы можем использовать методы Евклида, чтобы доказывать проективные теоремы.

Аксиомы Евклида

Проективная геометрия отличается от евклидовой настолько, насколько близка вам такая точка зрения (каламбур намеренный!), но корнями она по-прежнему уходит в геометрию Евклида. Это исследования новых видов преобразований, т. е. проекций, но изначально модель пространства, подвергающегося преобразованию, принадлежит Евклиду. Тем не менее проективная геометрия в целом заставила математиков стать более восприимчивыми к возможности существования нового образа геометрического мышления. И старый вопрос, пролежавший под спудом целые века, снова стал актуальным.

Практически все аксиомы Евклида настолько очевидны, что ни одному человеку в здравом уме не придет в голову подвергать их сомнению. Например, аксиома о том, что все прямые углы равны. Если она неверна, значит, что-то не так с самим определением прямого угла. Но пятый постулат, касающийся параллельных прямых, имеет совершенно другой оттенок. Он слишком сложен. Вот как его формулировал сам Евклид: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Звучит скорее как теорема, а не как аксиома. *Было* ли это теоремой? Может ли в таком случае быть у нее доказательство, исходящее из чего-то еще более простого, интуитивного?

Упростил формулировку постулата в 1795 г. Джон Плейфэр. Он выразил ее так: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. Эта аксиома логически эквивалентна пятому постулату Евклида: они являются следствием друг друга, при этом учитывают остальные аксиомы.

Лежандр

В 1794 г. Адриен-Мари Лежандр открыл еще одну эквивалентную формулировку постулата, в которой говорится о подобных треугольниках – фигурах, имеющих равные углы, но разные длины сторон. Однако он, как и большинство математиков того времени, предпочел бы что-то более интуитивное. Им казалось, что пятый постулат избыточен: это следствие из других аксиом, и что только для него упущено доказательство. И Лежандр перепробовал всё, что мог, чтобы доказать его. Используя только другие аксиомы, он доказал – для своего удовольствия, по крайней мере, – что сумма внутренних углов треугольника не превосходит 180°. (Ему наверняка было известно, что в сферической геометрии сумма больше, но ведь это геометрия сферы, а не плоскости.) Если сумма всегда равна 180°, то отсюда сразу логически вытекает пятый постулат. И он предположил, что сумма может быть меньше 180°, и построил свои рассуждения на этом.

Неожиданным следствием оказалась зависимость между площадью треугольника и суммой его углов. Точнее, то, что площадь пропорциональна разнице между реальной суммой углов и 180°. Это казалось многообещающим: если бы он мог построить треугольник, у которого стороны вдвое больше, чем у исходного, то столкнулся бы с противоречием, потому что площадь большего треугольника не может быть равной площади меньшего. Тем не менее он попытался построить больший треугольник и снова уперся в пятый постулат.

Однако ученый всё же извлек из своего опыта кое-что полезное. Безотносительно пятого постулата он доказал, что некоторые треугольники не могут иметь сумму углов больше 180°, а другие имеют сумму углов меньше 180°. Если один треугольник имеет углы, которые в сумме дают больше, чем 180°, то таким же свойством обладали бы и все треугольники; аналогично было бы при сумме меньше 180°. Значит, есть три возможных варианта:

• сумма углов в любом треугольнике равна 180° (по евклидовой геометрии);

• сумма углов в любом треугольнике меньше 180°;

• сумма углов в любом треугольнике больше 180° (случай, который Лежандр вроде бы исключил; позже выяснилось, что для этого он

воспользовался очередным недоказанным утверждением).

Саккери

В 1773 г. Джироламо Саккери, иезуитский священник из Павии, опубликовал своей героический труд «Евклид, очищенный от всех пятен» («Euclides ab omni naevo vindicatus»). Он также пришел к трем возможным вариантам, из которых первый соответствовал евклидовой геометрии, но для объяснения различий использовал четырехугольник. Предположим, у нас есть четырехугольник *ABCD*, где *A* и *B* – прямые углы, а *AC* = *BD*. Тогда, по утверждению Саккери, в евклидовой геометрии выходит, что *C* и *D* – прямые углы. Менее очевидно, если *C* и *D* будут прямыми углами в любом подобного вида четырехугольнике и что отсюда будет вытекать пятый постулат.

Не прибегая к пятому постулату, Саккери доказал, что углы *C* и *D* равны. Остается два возможных варианта:

• *гипотеза для тупых углов: C* и *D* больше прямого угла;

• *гипотеза для острых углов: C* и *D* меньше прямого угла.

Идея Саккери состояла в рассмотрении каждой из этих гипотез по отдельности, чтобы возникло логическое противоречие. Тогда евклидова геометрия оставалась единственной логически возможной.



Четырехугольник Саккери: сторона *CD* нарочно сделана кривой, чтобы избежать евклидовых заключений об углах *C* и *D*

Ученый начал с гипотезы для тупых углов и через ряд теорем вывел – как ему казалось, – что углы *C* и *D* должны в конце концов оказаться прямыми. Это противоречие, а значит, гипотеза для тупых углов ошибочна. Затем Саккери перешел к острым углам, что потребовало нового ряда теорем, причем все они были верны и любопытны сами по себе. Попутно ученый доказал довольно сложную теорему о семействе линий, проходящих через одну общую точку, в которой говорилось, что две из этих линий будут иметь общий перпендикуляр в бесконечности. На самом деле это не противоречие, хотя Саккери думал именно так и объявил гипотезу для острых углов также опровергнутой.

Оставался единственный вариант – с геометрией Евклида, и Саккери счел свою задачу выполненной. Но другие ученые заметили, что на самом деле никакого противоречия из гипотезы для острого угла не было, появилась лишь очередная удивительная теорема. И к 1759 г. д’Аламбер объявил статус пятого постулата: «скандал с началами геометрии».

ЧТО НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ДАЛА ИМ

К 1813 г. Гаусс успел окончательно убедиться, что антиевклидова, затем астральная и, наконец, неевклидова геометрия логически возможны. Он задался вопросом, что тогда можно считать истинной геометрией пространства, и измерил углы треугольника, образованного тремя горами в Нижней Саксонии: Броккен, Хохехаген и Инзельберг. Чтобы результаты не искажались кривизной Земли, в измерениях он использовал местную плоскость горизонта. Сумма измеренных им углов оказалась на 15 угловых секунд больше 180°. По всему выходило, что это тупой угол, но возможность ошибки в наблюдениях сводила на нет всю ценность опыта. Гауссу требовался гораздо больший треугольник и более точные инструменты для измерения углов.

Ламберт

Немецкий математик Георг Клюгель прочел книгу Саккери и выразил новаторское и даже несколько шокирующее мнение, что убежденность в правоте пятого постулата относится скорее к области опыта, чем логики. Он утверждал, что некая особенность нашего образа мышления и представления о пространстве заставляет нас верить в существование параллельных линий со свойствами, которые описал Евклид.

В 1776 г. Иоганн Ламберт, следуя предположению Клюгеля, занялся исследованиями, похожими на работу Саккери, но он начал с четырехугольника с тремя прямыми углами. Четвертый угол у него мог быть или прямым (евклидова геометрия), или тупым, или острым. Как и Саккери, он предположил, что тупой угол приводит к противоречию. Точнее, он решил, что это приводит к сферической геометрии, где давно известно, что сумма углов четырехугольника больше 360°, поскольку сумма углов треугольника больше 180°. Раз сфера – это не плоскость, вариант с тупым углом исключался.

Однако Ламберт ничего подобного не утверждал для острого угла. Зато он доказал ряд любопытных теорем, однако самой блестящей оказалась выведенная им формула вычисления площади многоугольника с n сторонами. Сложите все углы и вычтите их из суммы $2n - 4$ прямых углов: результат окажется пропорциональным площади многоугольника. Эта формула напомнила Ламберту похожую из сферической геометрии: сложите все углы и вычтите $2n - 4$ прямых угла: результат снова окажется пропорциональным площади многоугольника. Разница несущественна: вычитание выполняется в обратном порядке. Ученый подошел вплотную к неясному, но пророческому утверждению: геометрия острого угла такая же, как у сферы с *мнимым радиусом*.

Ламберт тут же написал короткую статью о тригонометрических функциях мнимых углов, выведя несколько изящных и идеально согласующихся формул. Теперь мы признаём эти функции: это так называемые гиперболические функции, которые можно вычислить, не прибегая к мнимым числам, и они удовлетворяют всем формулам

Ламберта. Было очевидно, что за его неожиданным, загадочным предположением кроется что-то интересное. Но что?

Дилемма Гаусса

К определенному моменту у наиболее информированных геометров сложилось твердое убеждение в том, что пятый постулат Евклида не может быть доказан с помощью остальных аксиом. Случай с острым углом оказался слишком логичным, чтобы привести к противоречию. С другой стороны, сфера с мнимым радиусом тоже не выглядела достаточно солидно, чтобы подкрепить это убеждение.

Одним из таких геометров был Гаусс, с юности веривший в вероятность существования логически последовательной неевклидовой геометрии и позже доказавший в этой области немало теорем. Но, как он откровенно заявил в 1829 г. в письме к Бесселю, у него не было намерения публиковать некоторые из своих работ из опасения стать объектом того, что он называл «криками беотийцев». Люди, лишенные воображения, не смогут его понять и в своем невежестве и приверженности традициям поднимут его на смех. Возможно, в этом опасении ученый укрепился из-за излишнего почтения к философскому авторитету Канта: тот утверждал, что геометрия пространства *должна* быть евклидовой.

В 1799 г. Гаусс написал венгерскому ученому Фаркашу Бойяи, признавшись, что его исследование «заставит меня сомневаться в истинности геометрии. Да, я добился того, что многие уверенно назвали бы доказательством (пятого постулата с помощью других аксиом), но в моих глазах это всё ничего не стоит».

Прочие математики оказались не столь щепетильными. В 1826 г. Николай Лобачевский уже читал в Казанском университете лекции по неевклидовой геометрии. Он ничего не знал о работах Гаусса, но доказал те же теоремы своими методами. Две статьи на эту тему появились в 1829 и 1835 гг. Никакого шума, как опасался Гаусс, они не подняли, скорее, без следа канули в неизвестность. В 1840 г. Лобачевский опубликовал книгу на ту же тему, где открыто посетовал на отсутствие интереса. В 1855 г. он выпустил новый труд, развивавший достижения первого.

Независимо от них сын Фаркаша Бойяи, Янош, армейский офицер, пришел к тем же идеям в 1825 г. и изложил их в 26-страничном труде, опубликованном в книге его отца по геометрии «Опыт введения

учащегося юношества в начала чистой математики» как приложение в 1832 г. Он признавался отцу: «Я сделал открытия столь поразительные, что сам растерялся».

Гаусс прочел эту работу, но объяснил Фаркашу, что не считает себя вправе хвалить молодого ученого, потому что «оценить это – всё равно что оценить себя». Возможно, это было не совсем справедливо, но таков уж был этот человек.

Неевклидова геометрия

История неевклидовой геометрии слишком сложна, чтобы описывать ее во всех подробностях, но мы можем резюмировать результаты, полученные благодаря усилиям ее первопроходцев. Была установлена глубокая связь между тремя случаями, отмеченными Саккери, Ламбертом, Гауссом, Бойяи и Лобачевским. Их всех объединяет идея кривизны. Неевклидова геометрия – на самом деле естественная геометрия криволинейной поверхности. Если поверхность имеет положительную кривизну, как сфера, мы имеем дело с тупым углом. Это долгое время отвергалось из-за слишком очевидных отличий сферической геометрии от евклидовой – например, потому что здесь любые две линии, т. е. большие круги, чьи центры совпадают с центром Земли, встречаются в двух точках, а не в одной, как мы ожидаем от евклидовых прямых.

Теперь нам ясно, что эти возражения необоснованны. Если мы отождествим в одну точку диаметрально противоположные точки на сфере – т. е. примем, что они идентичны, – то линии (большие круги) всё равно будут иметь смысл: если точка лежит на большом круге, на нем же будет лежать и диаметрально противоположная ей. С таким определением практически все геометрические свойства остаются неизменными, но теперь линии встречаются в *одной* точке. Топологически в результате мы получаем проективную плоскость, хотя задействованный здесь подход – далеко не общепринятая проективная геометрия. Сейчас мы называем ее эллиптической геометрией, и она так же востребована, как геометрия Евклида.

Если поверхность имеет отрицательную кривизну, как седло, мы переходим к случаю с острым углом. Полученная в результате геометрия называется *гиперболической*. Она имеет множество занимательных особенностей, отличающих ее от евклидовой.



Модель Пуанкаре гиперболической геометрии делает ее более ясной: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечно много параллельных (не пересекающих ее) линий

Если кривизна поверхности нулевая, как у евклидовой плоскости, то мы попадаем в область евклидовой геометрии. Все три геометрии удовлетворяют всем аксиомам Евклида, за исключением пятого постулата. Решение Евклида включить его было оправданным.

Эти различные геометрии могут быть выражены самыми разными способами. И здесь особенно многогранна гиперболическая геометрия. В одной модели соответствующее пространство может оказаться верхней комплексной полуплоскостью, без вещественной оси и всего, что ниже ее. Линия является полуокружностью, встречающейся с вещественной осью под прямыми углами. Топологически данное пространство есть не что иное, как плоскость, а его линии тождественны обычным. Изгиб линий отражает отрицательную кривизну гиперболического пространства.

Во второй модели гиперболической геометрии, исследованной Пуанкаре, пространство заключено внутри круга, не включает его границы, а линии являются дугами окружностей и пересекают границу под прямыми углами. И снова данный вид геометрии отражает кривизну пространства. Художник Мауриц Эшер создал много картин, основанных на этой модели гиперболической геометрии, с которой его познакомил канадский ученый Коксетер.

Обе модели затрагивают глубинные связи между гиперболической геометрией и комплексным анализом. Эти связи относятся к основным группам преобразований комплексной плоскости. Согласно «Эрлангенской программе» Феликса Клейна, гиперболическая геометрия является геометрией инвариантов таких преобразований. Другой класс трансформаций, так называемые преобразования Мёбиуса, в свою очередь, вводят в игру эллиптическую геометрию.

Геометрия пространства

Что значит геометрия пространства? Теперь мы все согласны с Клюгелем и не согласны с Кантом. Это был вопрос опыта, а не отвлеченных материй, решаемых исключительно силой мысли. Теория относительности Эйнштейна утверждает, что пространство (и время) может искривляться: кривизна – это гравитационный эффект материи. Более того: кривизна может меняться от одной зоны к другой в зависимости от распределения материи. Иными словами, дело тут не в геометрии пространства как таковой. Пространство может иметь разные геометрии на разных участках. Евклидова геометрия безупречно работает в человеческих масштабах, в мире человека: ведь гравитационное искривление столь незначительно, что мы не замечаем его в обыденной жизни. Но в масштабах Вселенной ведущая роль принадлежит неевклидовой геометрии.

Начиная с ученых древности и вплоть до XIX в. математики и реальный мир пребывали в безнадежном самообмане. Господствовало твердое убеждение в том, что математика – отражение основных и неизменных свойств реального мира и что математика – истина в последней инстанции. И нигде это убеждение не удерживало столь прочные позиции, как в классической геометрии. Пространство существует по законам Евклида, для всех и каждого, кто вообще об этом задумался. А разве могло быть иначе?

ЧТО НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ДАЕТ НАМ

Какова форма Вселенной? Вопрос может показаться простым, но ответить на него нелегко – отчасти из-за огромности Вселенной, но главным образом из-за того, что мы внутри и не имеем возможности кинуть взгляд со стороны. По аналогии, снова восходящей к Гауссу, муравей, живущий на некой поверхности и созерцающий мир только с нее, не сумеет уверенно сказать, является ли она плоскостью, сферой, тором или еще более сложной фигурой.

Теория относительности говорит нам, что вблизи от материального тела, такого как звезда, пространство-время искривляется. Уравнения Эйнштейна, демонстрирующие зависимость кривизны от плотности материи, имеют много разных решений. В самом простом из них Вселенная в целом имеет положительную кривизну и топологию сферы. Но, насколько мы можем судить, общая кривизна реально существующей Вселенной бывает и отрицательной.



Пространства с положительной, отрицательной и нулевой кривизной

Мы даже не уверены, простирается ли Вселенная бесконечно, как евклидово пространство, или имеет конечный размер, как сфера. Некоторые физики настаивают, что Вселенная бесконечна, однако экспериментальная основа этой идеи вызывает много вопросов. И большинство все-таки считает ее размеры конечными.

Удивительно, что конечная Вселенная может существовать, не имея границы. Это справедливо для двумерной поверхности сферы и для тора. Тор может быть описан плоскостной геометрией (планиметрией), ведь он наследник прямоугольника, у которого склеены противоположные стороны. Топологи также открыли, что пространство может быть конечным и в то же время иметь отрицательную кривизну. Один из способов построения такого пространства: берем конечный многогранник в гиперболическом пространстве и отождествляем различные его грани, так что линия, выходящая из одной грани многогранника, тут же входит в другую грань. Эта конструкция напоминает то, как меняются местами верхний и нижний края экрана во многих компьютерных играх.



Чтобы получить додекаэдрическое пространство Пуанкаре, нужно склеить противоположные грани додекаэдра с разворотом, чтобы они

совпали

> Если пространство конечно, должна быть возможность наблюдать одну и ту же звезду в разных направлениях, хотя в некоторых направлениях она может показаться более далекой, чем в других, и, кроме того, доступный для наблюдений сектор Вселенной может оказаться слишком мал для этого. Если конечное пространство имеет гиперболическую геометрию, это множит местонахождение одних и тех же звезд в разных направлениях, создавая в небесах систему гигантских окружностей, причем геометрия последних будет определять, какое именно гиперболическое пространство мы наблюдаем. Но окружности могут оказаться где угодно среди миллиардов звезд, видимых наблюдателю, т. е. попытки разглядывать их, основанные на статистической корреляции между кажущимися позициями звезд, будут безрезультатными.
>
> В 2003 г. данные, полученные с космического аппарата НАСА Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, позволили команде Жана-Пьера Люмине предположить, что пространство конечно, но имеет *положительную* кривизну. Они обнаружили, что додекаэдрическое пространство Пуанкаре – полученное путем отождествления противоположных граней искривленного додекаэдра – лучше всего согласуется с наблюдениями. Это предположение дошло до широкой публики как утверждение о том, что Вселенная имеет форму футбольного мяча. Однако это предположение не подтверждено, и мы по-прежнему не знаем, какова истинная форма Вселенной. Но по крайней мере у нас уже есть гораздо более полное представление о том, что нужно сделать, чтобы решить эту загадку.

Вопрос перестал быть риторическим с тех пор, как начали появляться логически обоснованные альтернативы геометрии Евклида. Да, потребовалось немалое время, чтобы убедиться в их логической состоятельности – по крайней мере, не менее логической, чем евклидова геометрия, – и еще большее, чтобы осознать, что наше

физическое пространство может оказаться вовсе не евклидовым. Как всегда, отрицательную роль сыграла узость взглядов: мы упорно пытаемся распространить ограниченное понимание нашего крошечного уголка на Вселенную в целом. Привычка пользоваться моделью Евклида делает нас предвзятыми, возможно потому, что в жестких рамках нашего опыта эта модель кажется самой простой и превосходно удовлетворяет наши запросы.

Благодаря отдельным ученым, наделенным богатым воображением и неординарным мышлением, часто подвергавшимся гонениям со стороны менее талантливых собратьев, наконец-то мы пришли к пониманию – по крайней мере, математики и физики, – что существует много альтернатив евклидовой геометрии и что природа физического пространства – предмет наблюдений, а не только мышления. Мы уже четко проводим границу между математическими моделями реальности и реальностью как таковой. Если уж на то пошло, многие математические построения вообще не имеют очевидного отношения к реальности – но это нисколько не умаляет их пользы.

Глава 13. Расцвет симметрии

Как не решить уравнение

Около 1850 математиков подготовили самые значительные перемены в истории науки, хотя это не всегда было очевидно их современникам. Вплоть до 1800 г. главными объектами математических исследований были понятия вполне конкретные: числа, треугольники, сферы. Алгебра предложила формулы для описания операций с числами, но сами по себе формулы воспринимались как символические описания неких процессов, а не просто объектов. Но к 1900 г. формулы и их преобразования стали восприниматься как объекты, а не процессы, и предметом алгебры стали более абстрактные и обобщенные понятия. Она стала почти всеобъемлющей. Даже такие основные законы, как коммутативный закон умножения $ab = ba$, заняли важное место во многих областях математики.

Теория групп

Эти перемены стали возможны во многом благодаря тому, что математики открыли теорию групп – раздел алгебры, который возник из безуспешных попыток решать алгебраические уравнения, особенно четвертой или пятой степени. Но только через 50 лет после своего открытия теория групп была оценена как верный подход для изучения концепции *симметрии*. По мере того как новый метод занимал место в общественном сознании, становилось ясно, что симметрия – глубокая и важная идея, со множеством приложений как к физическим, так и к биологическим исследованиям. Сегодня теория групп стала незаменимым инструментом в любой области математики и науки в целом, а ее связь с симметрий подчеркивается в большинстве предисловий научных трудов. Но потребовалось не одно десятилетие, чтобы эта точка зрения восторжествовала. Примерно в 1900 г. Анри Пуанкаре сказал, что теория групп представляет собой всю математику, самую ее суть. Несколько преувеличенное, но верное утверждение.

Поворотным пунктом в теории групп стала работа молодого француза Эвариста Галуа. Ей предшествовала долгая и запутанная предыстория: идеи Галуа появились не на пустом месте. Затем последовала не менее запутанная и даже в чем-то не очень чистая постистория, когда математики принялись экспериментировать с новой концепцией, пытаясь выяснить, что в ней важно, а что нет. Однако именно Галуа четче всех представлял необходимость понятия групп в математике, описал ряд самых фундаментальных их характеристик и продемонстрировал их ценность для основ математики. Не особо удивляет то, что его работа осталась незамеченной при жизни ученого. Возможно, она казалась чересчур оригинальной, но в этом, по правде говоря, отчасти может быть повинна репутация Галуа как ярого революционера. Он был трагической фигурой, жившей во времена множества личных трагедий, и его судьба выглядит одной из самых драматичных и, пожалуй, романтичных по сравнению с прочими выдающимися математиками.

Решаем уравнения

История теории групп уходит корнями в древние таблички вавилонян с решениями квадратных уравнений. Методы вавилонян преследуют прежде всего практические цели. Это была вычислительная методика, и, судя по всему, никто из древних особо не задавался глубокими вопросами, когда ею пользовался. Если вы умеете извлекать квадратные корни и владеете основами арифметики, то сумеете решить и квадратные уравнения.

Было найдено несколько свидетельств на глиняных табличках, что вавилоняне также подступались к решению кубических уравнений и даже уравнений четвертой степени. Греки, а вслед за ними и арабы открыли геометрические способы решения кубических уравнений с помощью конических сечений. (Мы сейчас знаем, что традиционные евклидовы линии и окружности не могут точно решить эту проблему. Здесь необходимо нечто более изощренное; так случилось, что эту работу взяли на себя конические сечения.) Одной из самых заметных фигур в этой области был персидский мыслитель Омар Хайям. Он решил все возможные виды кубических уравнений с помощью целой системы геометрических методов. Однако, как мы видели, алгебраическое решение уравнений третьей и четвертой степени появилось в эпоху Возрождения в работах дель Ферро, Тартальи, Фиоре, Кардано и его ученика Феррари.

Формулы, которые появились в их работах, были простыми, но зачастую с беспорядочными деталями. Вы можете решить любое кубическое уравнение, используя арифметические операции плюс квадратные корни плюс корни кубические. Вы можете решить любое уравнение четвертой степени, используя арифметические операции, квадратные и кубические корни, корни четвертой степени, – хотя последние могут быть сведены к двум последовательно взятым квадратным корням. Создавалось впечатление, что эту закономерность можно продолжать, так что вы сможете решить любое уравнение пятой степени, используя арифметические операции, квадратные и кубические корни, корни четвертой и пятой степеней. И так далее – для уравнений любой степени. Да, понятно, что все эти формулы

чрезвычайно сложны, и их поиск – еще более трудное дело, но практически ни у кого не возникало сомнений, что они существуют.

Шли века, но почему-то ни одна из этих формул не была открыта. И кое-кто из маститых математиков решил присмотреться повнимательнее к данной области, чтобы понять, что действительно происходит за ее кулисами, унифицировать известные методы и упростить их так, чтобы стало понятно, почему они работают. Тогда, как они полагали, это будет просто вопрос применения одних и тех же общих принципов, и уравнение пятой степени раскроет свои тайны.

Самую успешную и систематичную работу в этом направлении проделал Лагранж. Он переосмыслил классические формулы с точки зрения решений, которые собирался найти. Он утверждал, что важнее всего понять, как ведут себя в этих решениях определенные алгебраические выражения, когда вы ищете корни. Они будут перегруппированы, перестроены, примут другой вид. Он знал, что любое полностью симметричное выражение, зависящее от корней, которое остается неизменным, как бы ни менялся порядок корней при решении, может быть выражено через коэффициенты уравнения, становясь таким образом известной величиной. Более интересны были выражения, получавшие несколько разных значений, когда корни решения переставлялись. Казалось, здесь и зарыт ключ к общему принципу решения уравнений.

СИММЕТРИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Возьмем квадратное уравнение, немного упростив его форму:

$x^2 + px + q = 0$.

Предположим, есть два решения (корня) $x = a$ и $x = b$:

$x^2 + px + q = (x – a)\,(x – b)$.

Нам известно из школьного курса, что

$a + b = –p$ $ab = q$.

Значит, хотя мы всё еще не знаем корней, нам известны их сумма и произведение.

Почему так вышло? Сумма $a + b$ равна сумме $b + a$ – она не меняется от перестановки корней. То же верно и для $ab =$

ba. Получается, *любая* симметричная функция, зависящая от корней, может быть выражена через коэффициенты p и q. Верно и обратное: любое выражение для p и q всегда является симметричной функцией от a и b. Если смотреть шире, связь между корнями уравнения и коэффициентами определяется свойствами симметрии.

Асимметричные функции так себя не ведут. Хороший пример – разница $a - b$. Если мы меняем местами a и b, получаем $b - a$, т. е. другое значение. Однако – и это важнейшее наблюдение – оно *не совсем* другое. Это то, что мы получим из $a - b$, сменив его знак. Так что квадрат $(a - b)^2$ полностью симметричен. Но любая полностью симметричная функция от корней должна быть *неким* выражением в коэффициентах. Извлеките квадратный корень, и вы получите выражение для $a - b$ через коэффициенты, где не используется ничего более загадочного, чем квадратный корень. Мы уже знаем: $a + b = -p$. Также нам известно и $a - b$; сумма двух этих чисел равна $2a$, а разница $2b$. Поделив на 2, мы получим формулы для a и b.

Всё это мы проделали, чтобы доказать, что *должна существовать* формула для корней a и b, не включающая ничего более загадочного, чем квадратный корень, основанная на общих свойствах симметрии алгебраических выражений. Это впечатляет: мы доказали, что у задачи есть решение, не вдаваясь в запутанные детали и объяснения, что есть что. И в каком-то смысле мы отследили, *почему* древние вавилоняне смогли найти свой метод. Это небольшое исследование наделяет слово «понимать» новым смыслом. Вы можете понять, *как* метод вавилонян привел к решению, пройдя поочередно все этапы и убедившись в их логике. Но теперь мы знаем, почему здесь непременно должен быть такой метод, – не *показав* конкретное решение, но рассмотрев *общие* свойства предполагаемых корней. В данном случае таким ключевым свойством оказалась симметрия.

Не требуя больших усилий для того, чтобы вывести точное выражение для $(a - b)^2$, этот прием дает нам формулу

решения. Она эквивалента и той формуле, которую мы учили в школе, и методу, использованному в Вавилоне.

Чувство математической формы и красоты, очень высоко развитое у Лагранжа, подсказало ему, что здесь и кроется главная идея. Если что-то похожее можно получить для кубических уравнений и уравнений четвертой степени, должна быть возможность найти решения и для пятой степени.

Используя ту же основную идею, мы выясняем, что частично симметричные функции от корней позволяют свести кубическое уравнение к квадратному. Для его решения нужен квадратный корень, а благодаря сведению можно избавиться от необходимости использовать кубический корень. Так же и любое уравнение четвертой степени может быть сведено к кубическому, которое называется кубическая разрешающая (резольвента). Вы можете решить уравнение *четвертой степени*, используя квадратные и кубические корни, имея дело с кубической разрешающей и четырьмя корнями, и получить в ответ искомое решение. В обоих случаях ответы идентичны классическим формулам, открытым в эпоху Возрождения. Да иначе и быть не могло: это те же самые ответы. Но теперь Лагранж знал, почему это так, и был в курсе, *почему* эти ответы могут быть найдены. Наверное, на этом этапе исследований он испытал немалый подъем. Переходя к уравнениям пятой степени и используя те же техники, вы ожидаете, что получите разрешающую уравнения четвертой степени, – дело сделано! Но, забегая вперед в истории его разочарования, он так и не нашел разрешающее уравнение четвертой степени. Он получил разрешающее уравнение шестой степени. И вместо того, чтобы упростить решение, его метод превратил уравнение в еще более сложное.

В чем же крылся недостаток его метода? Мог ли какой-то более талантливый математик решить уравнение пятой степени? Судя по всему, Лагранж в это верил. Он выражал надежду, что его новый подход будет полезен любому, кто отважится на поиски решения уравнения пятой степени. Кажется, ему даже не приходило в голову, что здесь не может *быть* такого метода, что его подход ошибочен, потому что уравнения пятой степени вообще *не имеют* решений в «радикалах» – выражениях, включающих арифметические операции и корни разной степени, в том числе и пятой. Еще большую путаницу привносит то, что все-таки у *некоторых* уравнений пятой степени есть такие

решения. Например, уравнение $x^5 - 2 = 0$ имеет решение $x = \sqrt[5]{2}$. Но это простой случай, и уж точно не типичный.

Кстати, все уравнения пятой степени имеют *решения*: как правило, это комплексные числа, и их можно численно выразить довольно точно. Проблема кроется в алгебраических формулах для поиска этих решений.

Поиск решения

Становилось всё очевиднее, что идеи Лагранжа ошибочны, и в научной среде росла уверенность в том, что, возможно, задача вообще неразрешима: уравнения пятой степени в принципе нельзя решить с помощью радикалов. Судя по всему, к этой точке зрения склонялся и Гаусс, но в узком кругу, хотя на публике заявлял, что не считает эту задачу достойной внимания. Возможно, это был один из немногих случаев, когда ученого подвела интуиция, обычно безошибочно указывавшая ему на самые важные вопросы. Вторым таким случаем стала Великая теорема Ферма, но тут даже Гаусс не располагал необходимыми для решения методами: для их открытия потребовалось еще два века. Однако, по иронии судьбы, именно Гаусс инициировал поиск некоторых алгебраических доказательств отсутствия решений у уравнений пятой степени. Он ввел их в своей работе о построении правильных многоугольников с помощью линейки и циркуля. И он же создал прецедент, доказав (по крайней мере, для собственного удовольствия), что некоторые многоугольники не могут быть построены таким способом. В пример он привел правильный девятиугольник. Гаусс знал об этом, но так и не записал на бумаге доказательство – то самое, которое позже предложил Пьер Ванцель. Итак, Гаусс создал прецедент для предположения, что некоторые задачи не могут быть решены некими конкретными методами.

Первым ученым, попытавшимся доказать невозможность, стал Паоло Руффини, в 1789 г. занявший пост профессора математики в Моденском университете. Изучая идеи Лагранжа о свойствах симметричных функций, Руффини пришел к убеждению, что нет никакой формулы, включающей в себя только корни *n*-й степени (а не что-то более загадочное), чтобы решить уравнения пятой степени. В своем труде «Общая теория уравнений» в 1799 г. он дал доказательство тому, что «невозможно алгебраическое решение для уравнений степени больше, чем четыре». Но его доказательство оказалось таким длинным – 500 страниц текста, – что никто не отважился его проверить, особенно когда пошли слухи об ошибках. В 1803 г. Руффини опубликовал новое, упрощенное доказательство, но более благожелательных откликов не последовало. Так Руффини и не удалось

стяжать лавры человека, доказавшего отсутствие алгебраического решения у уравнений пятой степени.

Самым ценным вкладом Руффини в науку стало понимание, что перестановки можно как-то комбинировать. До тех пор они были переупорядочиванием некоторого набора символов. Например, если мы пронумеруем корни уравнения пятой степени как 1, 2, 3, 4, 5, эти символы можно переставить: 54321, или 42153, или 23154, или как угодно. Есть 120 возможных перестановок. Руффини догадался, что на такие перегруппировки можно посмотреть иначе – как на способ перестановки *любого другого набора* из пяти символов. Хитрость состояла в сравнении стандартного порядка 12345 с перегруппированным. В качестве простого примера представим, что перегруппированный порядок будет 54321. Тогда правило для получения нового варианта совсем простое: поставьте символы в обратном порядке. Но ведь вы можете поставить в обратном порядке *любую* последовательность из пяти символов. Если это *abcde*, обратный порядок – *edcba*. Если символы первоначально стоят так: 23451, то обратный порядок будет 15432. Этот новый взгляд подразумевает, что вы можете сделать две перестановки по очереди – своего рода умножение перестановок. В алгебре перестановок умножение такого рода и содержит ключ к уравнениям пятой степени.

Абель

Теперь мы знаем, что в доказательство Руффини закралась техническая ошибка, хотя в целом его идеи были верны и заполнили основные пробелы. Он, несомненно, добился одного: его книга создала необъяснимое, но широко распространившееся убеждение в невозможности решить уравнение пятой степени с помощью радикалов. Далеко не все считали, что Руффини *доказал* это, но математики хотя бы засомневались в существовании решения. К сожалению, дело кончилось тем, что ученые вообще отказались заниматься этой проблемой.

Единственным исключением стал Абель, молодой норвежец с огромным талантом в математике. Он был искренне убежден, что еще в школе решил уравнение пятой степени. Правда, он вскоре нашел ошибку, но это не повлияло на его увлеченность вопросом: работа продолжалась в полную силу. В 1823 г. он нашел безупречное доказательство тому, что уравнение пятой степени не имеет решения. Абель прибегал к той же стратегии, что и Руффини, но его тактика оказалась удачнее. На первых порах он ничего не знал о работе Руффини, позже он точно ее читал, но настаивал на ее неполноте. Правда, он так и не указал ни на одну конкретную дыру в доказательстве Руффини. По иронии судьбы, один из этапов в доказательстве Абеля оказался именно тем кирпичиком, которого так не хватало в работе Руффини.

Сейчас у нас есть возможность познакомиться с общей идеей Абеля, не погружаясь в технические тонкости. Он справился с проблемой, выделив два вида алгебраических операций. Предположим, мы начинаем с набора разных величин; это могут быть как конкретные числа, так и алгебраические выражения со многими неизвестными. Из них мы можем построить много других величин путем сложения, вычитания, умножения или деления. Для простого неизвестного x возможно составить такие выражения, как x^2, $3x + 4$ или $(x + 7)/(2x – 3)$. Алгебраически все эти выражения имеют тот же фундамент, что и сам x.

Другой способ получить новые величины из имеющихся – использовать радикалы. Возьмите для примера любую простую

величину и извлеките из нее корень. Назовем такой шаг применением радикала. Если это квадратный корень, скажем, что степень радикала равна 2, если кубический – 3, и т. д.

В этих терминах формула Кардано для кубического уравнения может быть представлена как результат двухшаговой процедуры. Начнем с коэффициентов для кубического уравнения (и любой безобидной комбинации из них). Применим радикал со степенью 2. Затем следующий радикал со степенью 3. И всё. Описание говорит нам, какого *вида* формула получилась, но не какая именно. Зачастую ключом к решению математической загадки становится не фокусировка на деталях, а более широкий взгляд на ее особенности. Меньшее может оказаться более важным. И когда этот прием срабатывает, остается только удивляться «чуду»; а здесь он срабатывает прекрасно. Он позволил Абелю свести любую гипотетическую формулу для решения уравнения пятого порядка до самых существенных шагов: извлечь некую последовательность радикалов в определенном порядке, с различными степенями. И всегда остается возможность построить выражение так, чтобы степень снизилась до более простой: например, для корня шестой степени это будет кубический корень из квадратного корня.

Назовем такую последовательность *башней радикалов*. Уравнение считается решаемым с помощью радикалов, если хотя бы одно его решение может быть представлено башней радикалов. Но вместо того, чтобы искать ее, Абель просто предположил, что она существует, и задался вопросом, как тогда должно выглядеть исходное уравнение.

Сам того не понимая, Абель заполнил пробел в доказательстве Руффини. Он показал, что если уравнение может быть решено с помощью радикалов, то должна существовать башня радикалов, приводящая к этому решению, обязательно содержащая только коэффициенты исходного уравнения. Это теорема Абеля о решении алгебраических уравнений; она содержит утверждение, что нельзя решить уравнение за счет включения множества новых величин, не связанных с исходными коэффициентами. Вроде бы очевидно, но Абель понимал, что это решающий момент для всего доказательства.

Ключом к абелеву доказательству невозможности стал искусный предварительный результат. Предположим, мы взяли некоторое выражение от корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 уравнения и извлекли его корень p-

й степени для некоторого простого числа p. Предположим, что исходное выражение не изменилось, когда мы применили две специальные перестановки:

$$S\text{: } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rightarrow x_2, x_3, x_1, x_4, x_5$$

и

$$T\text{: } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rightarrow x_1, x_2, x_4, x_5, x_3.$$

Затем Абель показал, что p-й корень из этого выражения *также* не изменяется, когда мы применяем S и T. Этот предварительный результат напрямую подводит нас к доказательству теоремы о невозможности подъема на «башню», ступень за ступенью. Предположим, уравнение пятой степени можно решить в радикалах, т. е. существует башня радикалов, начинающаяся с коэффициентов, по которой можно подняться к некоему решению.

Первый этаж башни – безобидное выражение с коэффициентами – не меняется, когда мы применяем перестановки S и T, потому что они влияют не на коэффициенты, а на корни. Поэтому, по предварительному результату Абеля, второй этаж башни также неизменен после применения S и T, ведь он был достигнут примыканием корня p-й степени к чему-то с первого этажа для некоего простого числа p. По той же причине третий этаж остается неизменным, когда мы применяем S и T. То же касается четвертого этажа, пятого… до самого верха.

Но последний этаж содержит некое решение. Может ли им быть x_1? Если да, x_1 должен оставаться неизменным, когда мы применили S. Но S, примененное к x_1, дает x_2, а не x_1; это нас не устраивает. По схожим причинам иногда после применения T решение, определяемое башней, не может быть x_2, x_3, x_4 или x_5. *Все пять корней* исключены из любой такой башни – и в итоге она на самом деле не может содержать решения.

Из этой логической ловушки нет выхода. Уравнения пятой степени не имеют решения, потому что любое решение в радикалах должно обладать взаимоисключающими свойствами, а значит, не может существовать.

Галуа

Эстафету в разгадке не только тайны решения уравнения пятой степени, но и алгебраических уравнений в целом принял Эварист Галуа, одна из самых трагических фигур в истории математики. Галуа сам перед собой поставил задачу определить, какие уравнения могут быть решены в радикалах, а какие нет. Как и многие его предшественники, он понимал, что ключ к алгебраическому решению кроется в поведении корней в результате перестановок. Проблема заключалась в симметрии.

Руффини и Абель понимали, что выражение корней может быть как симметричным, так и нет. Оно может оказаться частично симметричным: неизменным при одних перестановках и изменяемым при других.

Галуа заметил, что перестановки, фиксирующие некоторые выражения с корнями, не обязательно формируют такие соотношения для любого их старого набора. Они имеют простую и очень характерную особенность. Если вы берете любые две перестановки, фиксирующие выражение, и перемножаете их, результат *также* фиксирует перестановку. Такую систему перестановок он назвал *группой*. Как только вы поймете верность этой идеи, доказать ее будет очень просто. Секрет в том, чтобы ее осмыслить и осознать ее важность.

ЭВАРИСТ ГАЛУА 1811–1832



Эварист Галуа был сыном Николя-Габриеля Галуа и Аделаиды-Мари Демант. Он рос в сотрясаемой революцией Франции и проникся левыми политическими взглядами. Его огромный вклад в математику оставался неоцененным еще 14 лет после его смерти.

Французская революция началась со взятия Бастилии в 1789 г. и казни Людовика XVI в 1793 г. К 1804 г. Наполеон Бонапарт провозгласил себя императором, но после серии военных неудач был вынужден отречься от престола. Монархия возродилась только в 1814 г., при Людовике XVIII. В 1824 г. он скончался, и на престол сел Карл X.
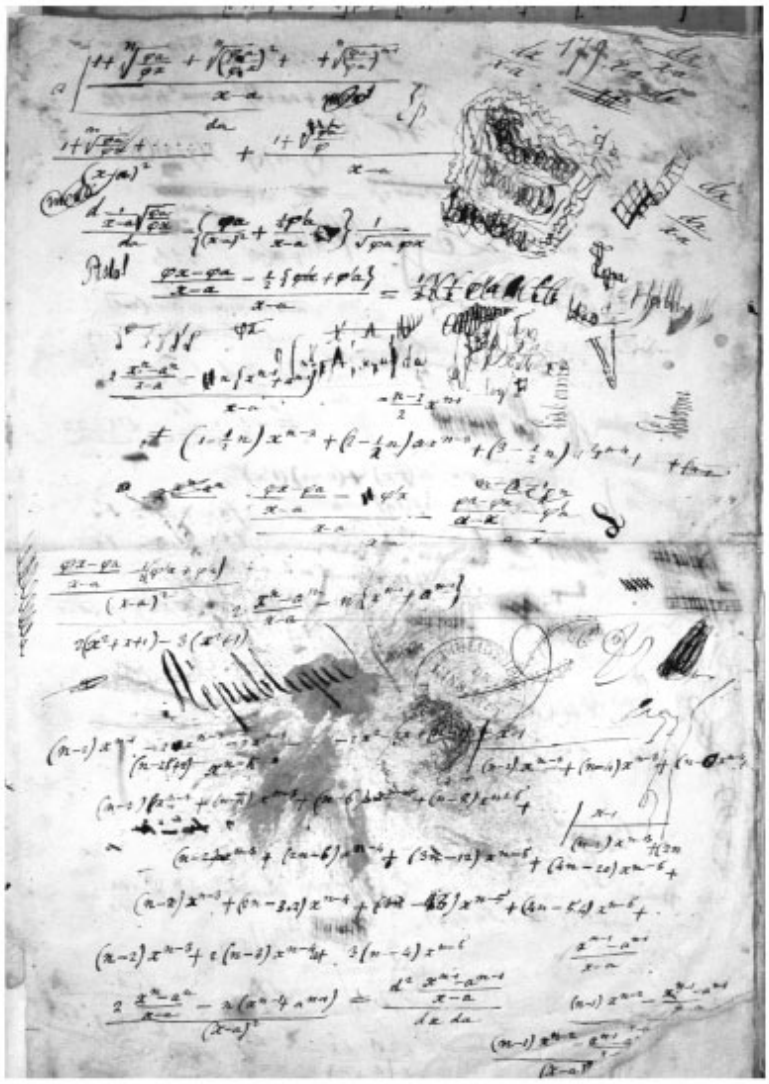
В 1827 г. Галуа продемонстрировал свой несравненный талант – подкрепленный ярым увлечением – к математическим исследованиям. Он попытался поступить в престижную Политехническую школу, но не прошел экзамен. В 1829 г. его отец, в то время мэр города, повесился из-за скандала по ложному обвинению, раздутого его политическими врагами. Вскоре после этого Галуа повторил попытку поступить в Политехническую школу и снова потерпел неудачу. Он обучался в Высшей нормальной школе.

В 1830 г. Галуа предоставил свои исследования по решению алгебраических уравнений на конкурс,

объявленный Академией наук. Председатель жюри Фурье скоропостижно скончался, бумаги были утеряны. Награда досталась Абелю (к тому времени он уже умер от туберкулеза) и Карлу Якоби. В том же году Карл X был низложен и вынужденно сбежал, чтобы спасти свою жизнь. Директор Высшей нормальной школы запер студентов в аудитории, чтобы помешать их участию в беспорядках. Галуа в приступе ярости написал злобное письмо, обвинив директора в малодушии, и был немедленно изгнан из школы.

Компромиссной фигурой в политической борьбе стал король Луи-Филипп. Галуа вступил в республиканское ополчение, артиллерию Национальной гвардии, но новый король ее распустил. Девятнадцать офицеров артиллерийской части были арестованы за подстрекательство к мятежу, но революционно настроенный суд снял все обвинения, и гвардейцы решили отметить освобождение праздничным обедом. Там Галуа произнес ироничный тост за короля, стоя с ножом в руке. Его арестовали, но оправдали, потому что (с его слов) тост звучал как «За Луи-Филиппа, если он не изменник», и не содержал угрозы в его адрес. Однако в День взятия Бастилии Галуа снова заключили под стражу за ношение отныне запрещенной формы Национальной гвардии.

В тюрьме ему стала известна судьба его научного труда. Пуассон даже не рассмотрел его из-за недостаточной ясности изложения. Галуа попытался наложить на себя руки, но его остановили соседи по камере. Его ненависть к любым официальным лицам стала неукротимой, налицо явные признаки паранойи. Однако из-за эпидемии холеры всех заключенных выпустили на свободу.



Отрывок манускрипта, написанного рукой Галуа

В это время Галуа влюбился в некую особу, чье имя долгие годы оставалось тайной. Наконец удалось выяснить, что ее звали Стефани дю Мотель, она была дочерью лечащего врача Галуа. Ничего хорошего из этого не вышло, и Стефани ушла. Один из соратников-революционеров вызвал Галуа на дуэль – вероятно, из-за Стефани. Наиболее приемлемой версией считается история Тони Ротмана: согласно ей, противником Галуа стал Эрнест Дюшатле, сидевший с ним в одной камере. Судя по всему, дуэль оказалась разновидностью русской рулетки, когда участники выбирают

из двух пистолетов, из которых заряжен только один, и обмениваются выстрелами у барьера. Галуа выбрал несчастливый пистолет, получил пулю в живот и скончался на следующий день.

Ночью накануне дуэли он написал длинное изложение своих математических идей, в том числе и доказательство невозможности решения в радикалах уравнений пятой степени и выше. В этой работе он развил концепцию группы перестановок и сделал первые важные шаги в исследовании теории групп. Его бумаги едва не затерялись, но всё же попали в руки члена Академии Жозефа Лиувилля. В 1843 г. тот выступил перед членами Академии с сообщением о том, что в бумагах Галуа «я обнаружил решение, точность которого не уступает его глубине, такой замечательной задачи: узнать, существует или не существует решение в радикалах…»[6]. Лиувилль опубликовал бумаги Галуа в 1846 г., сделав их наконец достоянием научного сообщества.

ЧТО ТЕОРИЯ ГРУПП ДАЛА ИМ

Одним из первых серьезных практических приложений теории групп стала классификация всех возможных кристаллических структур. В кристаллах атомы образуют правильную трехмерную решетку, и главной задачей математики стало выявление всех возможных групп симметрии в ней, потому что это эффективное формирование симметрии кристалла.

В 1891 г. Евграф Федоров и Артур Шенфлис доказали, что существует ровно 230 отдельных кристаллографических пространственных групп. Похожий, но незавершенный список составил и Уильям Барлоу.

Современные методики определения структуры биологических молекул, таких как протеины, основаны на прохождении рентгеновских лучей через их кристаллическую решетку и наблюдении полученной дифракционной картинки.

Симметрии кристалла очень важны для определения формы исследуемой молекулы. Так же важен анализ Фурье.

Дополнительным преимуществом идей Галуа стало открытие, что уравнение пятой степени не может быть решено в радикалах, поскольку обладает *неправильной симметрией*. Группа общего уравнения пятого порядка состоит из всех возможных перестановок для всех его пяти корней. Алгебраическая структура этой группы противоречит решению в радикалах.

Галуа работал и во многих других областях математики, добившись не менее впечатляющих открытий. В частности, он обобщил модульную арифметику и получил то, что мы сейчас называем *полями Галуа*. Это конечные системы, в которых могут быть определены арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) и для которых применимы все обычные законы. Размер поля Галуа – всегда степень простого числа, и существует только одно такое поле для каждой простой степени.

ЖордАн

В чистой форме концепция групп впервые появилась в работе Галуа, хотя и раньше намеки на нее мелькали как в эпических трудах Руффини, так и в элегантных построениях Лагранжа. На протяжении того десятилетия, когда благодаря Лиувиллю идеи Галуа получили широкое распространение, в математике появилась хорошо развитая теория групп. Главным архитектором теории считается Камиль Жордан, чей труд на 667 страницах «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» был опубликован в 1870 г. Жордан развил всю тему систематически и всеобъемлюще.

Увлечение Жордана теорией групп началось в 1867 г., когда он продемонстрировал ее связь с геометрией явным образом, классифицировав основные виды движения твердого тела в евклидовом пространстве. А главное, он предпринял очень плодотворную попытку объяснить, как эти виды движения могуть быть объединены в группы. Главным его мотиватором стала работа Огюста Браве по кристаллографии, инициировавшего математическое изучение кристаллической симметрии, особенно лежащей в основе атомной решетки. Работа Жордана обобщила труды Браве. Он объявил о своей классификации в 1867 г. и опубликовал детали в 1868–1869 гг.

Технически Жордан работал только с замкнутыми группами, в которых любая конечная последовательность движений внутри группы также является движением в той же группе. Это относится ко всем конечным группам по очевидным причинам, а также к группам, которые подобны всем поворотам окружности вокруг ее центра. Типичным примером незамкнутой группы, не рассмотренной Жорданом, могут служить все повороты окружности вокруг ее центра на углы, кратные рациональному углу $360°/n$. Эта группа существует, но не удовлетворяет свойству конечности (потому что, например, она не может включать в себя повороты на $360 \times \sqrt{2}$ градуса, поскольку $\sqrt{2}$ – не рациональное число). Незамкнутые группы движений невероятно разнообразны и практически не подлежат разумной классификации. В отличие от них замкнутые, хотя и с трудом, поддаются описанию.

Основные движения на плоскости – параллельные переносы, вращения, отражения и зеркальные отражения. В трехмерном

пространстве мы также отмечаем винтовые движения, как у штопора: объект передвигается вдоль фиксированной оси и одновременно вращается вокруг нее же.

Жордан начал с группы параллельных переносов и перечислил десять видов: все сочетания непрерывных параллельных переносов (на любое расстояние) в некотором направлении и дискретных переносов (с целочисленными кратными) от фиксированного расстояния в прочих направлениях. Также он перечислил главные конечные группы для вращений и отражений: циклическая, диэдральная, тетраэдральная, октаэдральная и икосаэдральная. Он выделил группу $O(2)$ всех вращений и отражений, которая сохраняет фиксированную линию в пространстве – *ось*, и группу $O(3)$ всех вращений и отражений, которая сохраняет фиксированную точку в пространстве и точку пересечения осей.

Позже стало ясно, что список неполон. Например, в нем нет некоторых трудноуловимых кристаллографических групп в трехмерном пространстве. Однако работа стала значительным шагом к пониманию перемещений фигур, сохраняющих их неизменными в евклидовом пространстве, что крайне важно для механики, а равно и для чистой математики.

Книга Жордана получилась действительно огромной. Она начинается с модульной арифметики и полей Галуа, которые наряду с примерами групп служат логическим фундаментом всех дальнейших идей. Средняя часть посвящена группам перестановок, которые Жордан называл подстановками. Он определяет основные идеи о нормальных подгруппах, которые Галуа использовал для демонстрации, что группа симметрии уравнения пятого порядка несовместима с решением в радикалах, и доказывает, что эти подгруппы можно использовать для деления общей группы на более простые части. Он доказывает, что величина этих частей не зависит от того, как именно поделили группу. В 1889 г. Отто Гёльдер развил этот результат, проинтерпретировав части в самостоятельные группы и доказав, что не только их размер, но и структура не зависят от того, как поделили группу. Сегодня этот результат известен как теорема Жордана – Гёльдера.

Группа считается *простой*, если не делится таким образом. Теорема Жордана – Гёльдера однозначно утверждает, что простые группы соотносятся с общими точно так же, как атомы с молекулами в

химии. Простые группы – атомные составляющие всех групп. Жордан доказал, что знакопеременная группа A_n, содержащая все перестановки из n символов, в которой символы попарно переставлены четное число раз, будет простой, если $n \geq 5$. Это и есть главная причина, по которой теоретики групп уверены, что уравнение пятой степени не решается в радикалах.

Главным достижением стала теория линейных подстановок Жордана. Здесь преобразования, производимые с группой, не являются перестановками конечного множества: это линейные изменения для конечного списка переменных. Например, три переменные x, y, z можно преобразовать в новые переменные X, Y, Z с помощью линейных уравнений:

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

где a, b и c с нижними индексами – константы. Чтобы сделать группу конечной, Жордан обычно брал их так, чтобы они являлись элементами поля целых чисел по модулю некоторого простого числа, или, в общем случае, поля Галуа.

Также в 1869 г. Жордан развил свою версию теории Галуа и включил ее в свой трактат. Он доказал, что уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима сама эта группа. Это означает, что все ее элементарные компоненты имеют простой порядок. Жордан применил теорию Галуа к геометрическим задачам.

Симметрия

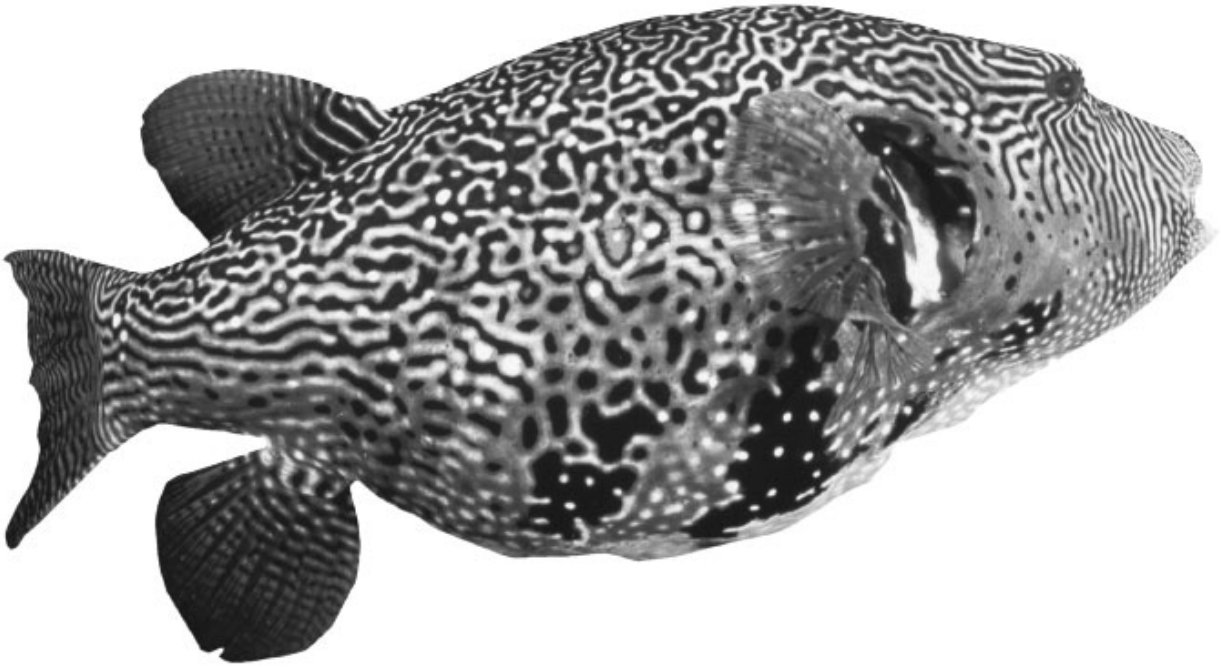
Четырехтысячелетний поиск решения прекратился, когда Руффини, Абель и Галуа доказали, что решение в радикалах невозможно. И хотя результат оказался отрицательным, сам факт исследования серьезно повлиял на дальнейшее развитие и математики, и науки в целом. Это стало возможно благодаря тому, что метод, использованный для доказательства невозможности, оказался центральным в математическом понимании симметрии, а та, в свою очередь, стала неотъемлемой частью математики и науки вообще.

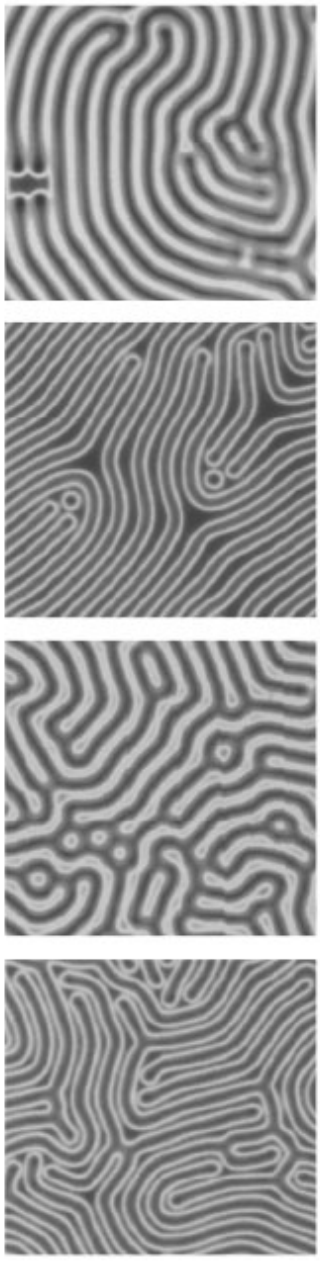
ЧТО ТЕОРИЯ ГРУПП ДАЕТ НАМ

В наше время теория групп неразрывно связана с математикой и широко применяется в науке. В частности, она появляется в теории формирования узоров в самых разных отраслях науки. Одним из примеров такого использования может быть реакционно-диффузная модель, предложенная Аланом Тьюрингом в 1952 г. как одно из возможных объяснений появления симметричных пятен на шкурах животных. В уравнениях модели набор химических веществ может создать диффузию в некоторой области пространства, и эти вещества также вступают в реакции, производя новые. Тьюринг предположил, что некоторые из этих процессов могли быть заложены как образец узора в развивающемся зародыше, что позже может выразиться в образовании пигментов и пятен на шкуре взрослой особи.

Для простоты предположим, что эта область является плоскостью. Тогда уравнения будут симметричными для всех обычных движений. Единственное решение уравнений (которое симметрично для всех этих движений) однородно, одинаково везде. Для животного это означает, что у него не будет каких-то особых отметин, везде один цвет. Однако однородность может оказаться нестабильной, и в таком случае конечное видимое решение будет симметричным для

некоторых движений, но не для всех остальных. Этот процесс называется деформацией, *нарушающей симметрию*.





Математическая модель и рыба: и там, и там узоры Тьюринга

Типичный узор, нарушающий симметрию на плоскости, состоит из параллельных полос. Еще один – повторяющиеся наборы пятен. Возможны и более сложные. Любопытно, что полосы и пятна – типичные узоры на шкурах животных. Хотя истинный биологический процесс, включающий генетические эффекты, намного сложнее построений

> Тьюринга, лежащий в его основе механизм нарушения симметрии должен быть очень близок к математической модели.

Последствия этого трудно переоценить. Теория групп привела к более абстрактному взгляду на алгебру и заодно на математику. Хотя много ученых-практиков поначалу активно противостояли этому, в итоге стало очевидно, что абстрактные методы зачастую более эффективны, чем конкретные, и противодействие исчезло само по себе. Теория групп также научила исследователей ценить отрицательные результаты и понимать, что упорные поиски доказательств иногда приводят к грандиозным открытиям. Представьте себе, что было бы, если бы математики просто приняли на веру, что уравнения пятой степени не решаются, не потрудившись найти доказательства. Тогда не появилась бы на свет теория групп, объясняющая, *почему* их нельзя решить. Выбери математики этот путь, смирись с невозможностью решений – и сама математика, и наука в целом были бы бледным подобием того, что есть сейчас.

Вот почему математикам всегда так важно доказательство.

Глава 14. Взросление алгебры

Числа прокладывают путь структурам

К 1860 г. теория групп перестановок была уже хорошо развита. Теория инвариантов – алгебраических выражений, которые не меняются, когда происходят некие изменения с переменными, – привлекла внимание к различным бесконечным множествам преобразований, таким как проективная группа всех проекций пространства. В 1868 г. Камиль Жордан изучал группы движений в трехмерном пространстве, и в ходе его исследований два направления слились в одно.

Изощренные концепции

Начала появляться новая алгебра, для которой объектами изучения стали не неизвестные числа, а более изощренные концепции: перестановки, преобразования, матрицы. Прошлогодние процессы с наступлением нового года уходили «в архив». Правила алгебры, долгое время остававшиеся незыблемыми, всё чаще нуждались в изменении, чтобы удовлетворить нужды новых структур. Наряду с группами математики взялись за изучение структур так называемых колец и полей, не говоря уже о разных новых видах алгебр.

Стимулы для этого изменения взгляда на алгебры пришли из уравнений в частных производных, механики и геометрии. Это обусловило развитие групп Ли и алгебры Ли. Другим источником вдохновения была теория чисел: здесь алгебраические числа можно было использовать для решения диофантовых уравнений, понимания законов взаимности и даже атак на Великую теорему Ферма. И кульминацией всего происходящего стало доказательство Великой теоремы Ферма Эндрю Уайлсом в 1995 г.

Ли и Клейн

В 1869 г. норвежский математик Софус Ли подружился с немецким математиком Клейном. Они оба интересовались линейной геометрией – ответвлением проективной геометрии, открытым Юлиусом Плюккером. Ли высказал очень оригинальную идею: мол, теория Галуа для алгебраических уравнений должна иметь аналог для дифференциальных уравнений. Алгебраическое уравнение может быть решено в радикалах, только если обладает необходимыми свойствами симметрии, – это так называемая разрешимая группа Галуа. Ли предположил, что и дифференциальное уравнение может быть решено классическими способами, только если оно остается неизменным в непрерывном семействе преобразований. Ли и Клейн работали над вариантами этой идеи в 1869–1870 гг. Кульминацией стало описание геометрии через инварианты групп, данное Клейном в 1872 г. в его «Эрлангенской программе».

Она стала результатом нового подхода к евклидовой геометрии – с точки зрения симметрии. Жордан уже указал, что симметрии евклидовой плоскости представлены разного рода движениями без деформации тела: переносом, когда плоскость скользит в каком-то направлении; вращениями, которые поворачивают ее вокруг некой фиксированной точки; отражениями, которые переворачивают ее вокруг неподвижной линии, и, что менее очевидно, зеркальными отражениями, которые отражают и затем переносят ее в направлении, перпендикулярном линии зеркала. Эти преобразования образуют *евклидову группу*, и они жесткие – в том смысле, что они не меняют расстояния между точками. Соответственно, они не меняют и углы. Теперь длины и углы являются основными понятиями евклидовой геометрии. И Клейн понял, что это и есть инварианты для евклидовой группы: величины, которые не меняются, когда группа подвергается преобразованию.

ФЕЛИКС КЛЕЙН 1849–1925



Клейн родился в Дюссельдорфе в элитарной семье: его отец был секретарем главы прусского правительства. Он собирался стать физиком и отправился учиться в Университет Бонна, но устроился подрабатывать в лаборатории Юлиуса Плюккера. Тот вроде бы должен был заниматься прикладной математикой и экспериментальной физикой, но его интересы сосредоточились на геометрии, и Клейн попал под его влияние. Диссертация Клейна, датированная 1868 г., была посвящена линейной геометрии, ее приложениям к механике.

В 1870 г. Клейн работал вместе с Ли над теорией групп и дифференциальной геометрией. В 1871 г. он совершил открытие, что неевклидова геометрия – это геометрия проективной поверхности с определенным коническим сечением. Этот факт весьма откровенно и бескомпромиссно доказал, что неевклидова геометрия логически обоснована, точно так же как и евклидова. Этот довод практически положил конец дискуссии о статусе неевклидовой геометрии.

В 1872 г. Клейн стал профессором университета в Эрлангене, и в своей «Эрлангенской программе» 1872 г. он унифицировал практически все известные в то время виды

геометрии и четко описал связи между ними, рассматривая геометрию через инварианты группы преобразований. Так геометрия стала ответвлением теории групп. Клейн написал статью по этой теме для своей торжественной речи (при утверждении его профессором), но так и не смог обнародовать ее в тот день. Сочтя Эрланген недостаточно продвинутым местом, ученый в 1875 г. перебрался в Мюнхен. Он женился на Анне Гегель, внучке великого философа. Через пять лет он переехал в Лейпциг, где расцвел его талант математика.

Клейн был уверен, что лучшая его работа была по теории функций комплексного переменного, где он провел глубокое исследование инварианта функций для различных групп преобразований комплексной плоскости. Особенно подробно в этом контексте он развил теорию простой группы порядка 168. В решении проблемы униформизации комплексных функций он вступил в соперничество с Пуанкаре, но резко подорвал здоровье – возможно, из-за слишком напряженной борьбы.

В 1886 г. Клейн занял должность профессора в Университете Гёттингена и сосредоточился на административной деятельности – учреждении самой внушительной в мире математической школы. Он возглавлял ее вплоть до ухода на пенсию в 1913 г.

Если вам известны евклидовы группы, вы сможете вычислить их инварианты и также из них получить евклидову геометрию. То же относится и к другим видам геометрии. Эллиптическая подразумевает изучение инварианта группы движений в пространстве с положительной кривизной, гиперболическая – инварианта группы движений в пространстве с отрицательной кривизной, проективная – изучение инварианта групп проекций и т. д. Точно так же, как координаты отражают связь алгебры с геометрией, инварианты выражают связь теории групп с геометрией. Каждый вид геометрии определяет группу всех преобразований, которые сохраняют соответствующие геометрические концепции. Верно и обратное: каждая группа преобразований определяет соответствующую геометрию, со своими инвариантами.

Клейн использовал эти взаимосвязи, чтобы доказать, что одни виды геометрии практически не отличаются от других, поскольку их группы идентичны, за исключением интерпретации. Более глубокий смысл этой идеи в том, что всякий вид геометрии определяется его симметрией. Есть лишь одно исключение – риманова геометрия поверхностей, чья кривизна может меняться от одной точки к другой. Она не совсем вписывалась в программу Клейна.

Группы Ли

Общие усилия Ли и Клейна привели Ли к открытию одной из самых важных идей в современной математике – идеи группы непрерывных преобразований, известной сейчас как *группа Ли*. Это концепция, совершившая революцию не только в математике, но и в физике, ведь группы Ли включают большинство самых важных видов симметрий физической Вселенной, для которой именно симметрия остается важнейшим организационным принципом – как для основополагающих философских взглядов на описание окружающего мира с помощью математических законов, так и для чисто технических расчетов.

Софус Ли создал теорию групп Ли на всплеске научной активности осенью 1873 г. Концепция групп значительно развилась со времени его ранних работ. В современных терминах группа Ли – структура, обладающая как алгебраическими, так и топологическими свойствами, тесно связанными между собой. Точнее говоря, это группа (некое множество) с операцией композиции, удовлетворяющей различным алгебраическим тождествам, особенно ассоциативному закону и топологическому многообразию (пространство, локально сходное с евклидовым, с несколькими фиксированными измерениями, которое может быть искривлено или еще как-то деформировано на глобальном уровне), с непрерывным законом композиции (малые изменения в элементах в итоге дадут малое изменение в результате). Концепция Ли была более конкретна: группа непрерывных преобразований со многими переменными. Он пришел к изучению таких групп преобразований в поисках теории разрешимости или неразрешимости дифференциальных уравнений, аналогично тому, как вышло у Галуа с алгебраическими уравнениями. Но его открытие обусловило великое множество математических приложений, причем изначально Ли нацеливался вовсе не на это.

Пожалуй, самым простым примером групп Ли является множество поворотов окружности. Любой из них однозначно определен углом от 0 до 360°. Это множество относится к группам, потому что композиция из двух поворотов также является поворотом – как сумма соответствующих углов. Это будет одномерное многообразие, потому

что углы один к одному соответствуют точкам окружности, а небольшие дуги окружности – не более чем слегка искривленные отрезки той самой прямой, которая и является одномерным евклидовым пространством. Наконец, композиционный закон непрерывен, потому что малые изменения в углах в результате сложения дадут небольшое изменение их суммы.

Более любопытным примером будет группа всех поворотов в трехмерном пространстве с фиксированным началом координат. Каждый поворот здесь определяется осью – прямой, проведенной через начало координат в произвольном направлении, – и углом поворота вокруг этой оси. Для определения оси необходимы две переменные (скажем, долгота и широта точки, в которой ось встречается с соответствующей сферой с центром в начале координат) и третья переменная для определения угла поворота. Так, эта группа имеет размерность 3. В отличие от группы поворотов окружности, она некоммутативна: здесь результат объединения двух преобразований зависит от порядка их выполнения.

В 1873 г. после углубленной работы с ДУЧП Ли вернулся к теории групп преобразований, исследуя свойства бесконечно малых (инфинитезимальных) преобразований. Он показал, что такие преобразования непрерывной группы не являются замкнутыми относительно композиции, но *обязательно* замкнуты относительно новой операции, названной *скобкой Ли* и обозначаемой как $[x,y]$. В матричной записи это выражение называется коммутатором $xy - yx$ для x и y. Полученная в результате алгебраическая структура известна нам как *алгебра Ли*. Вплоть до 1930-х гг. термины «группа Ли» и «алгебра Ли» не использовались: вместо этого говорилось о непрерывной и инфинитезимальной группах соответственно.

Существуют сильные взаимосвязи между структурами группы Ли и алгебры Ли, которую сам ученый описал в трехтомном труде «Теория групп преобразований», созданном совместно с Фридрихом Энгелем. Соавторы подробно обсудили четыре классических семейства групп, два из которых – группы поворотов в n-мерном пространстве для четного или нечетного n. Эти два случая были выбраны из-за своих выраженных особенностей. Например, при нечетном числе измерений поворот требует фиксированной оси, а в пространстве с четным числом измерений она не обязательна.

Киллинг

Очередной значительный шаг в развитии теории групп сделал Вильгельм Киллинг. В 1888 году он заложил основу теории структуры для алгебр Ли, в частности создал классификацию всех *простых* алгебр Ли – основных строительных блоков, из которых собираются все остальные алгебры Ли. Киллинг начал с известной структуры для самой понятной простой алгебры Ли – *специальной линейной* алгебры $\mathrm{sl}(n)$ для $n \geq 2$. Начнем со всех матриц размера $n \times n$ с комплексными числами при условии, что скобка Ли для двух матриц A и B равна $AB - BA$. Эта алгебра Ли не только простая, но и подалгебра $\mathrm{sl}(n)$. Для всех матриц, чьи диагональные значения в сумме дают 0, она действительно простая. Она имеет размерность $n^2 - 1$.

Ли знал структуру этой алгебры, и он показал, что любая простая алгебра Ли имеет схожую структуру. Замечательно, что он смог это доказать, исходя лишь из знания того, что алгебра Ли простая. Его метод состоял в привязке любой простой алгебры к геометрической структуре под названием «система корней». Он использовал методы линейной алгебры для изучения и классификации системы корней, а затем выводил структуру соответствующей алгебры Ли от этой системы. Значит, классификация возможной геометрии системы корней равнозначна классификации простых алгебр Ли.

Результат работы Киллинга трудно переоценить. Он доказал, что простые алгебры Ли укладываются в четыре бесконечных семейства, ныне известных как A_n, B_n, C_n и D_n. Вдобавок есть пять исключений: G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. На самом деле Киллинг считал, что исключений шесть, но два оказались равнозначными алгебрами, описанными в разных выражениях. Размерности в исключительных алгебрах Ли равны 14, 56, 78, 133 и 248. Они по-прежнему несколько загадочны для ученых, хотя мы четко понимаем, почему они существуют.

Простые группы Ли

Из-за столь тесной связи между группами Ли и соответствующими им алгебрами классификация простых алгебр Ли ведет к классификации простых групп Ли. В частности, четыре семейства A_n, B_n, C_n и D_n являются алгебрами Ли для четырех классических семейств групп преобразований. Ими же являются, соответственно, группы всех линейных преобразований в $(n + 1)$ – мерном пространстве, группы поворотов в $(2n + 1)$ – мерном пространстве, симплектическая группа в пространстве с $2n$ измерениями, что особенно важно в классической и квантовой механике и оптике, и группа поворотов в $2n$-мерном пространстве. Несколько заключительных штрихов к этой истории были добавлены позже, в частности введение Гарольдом Скоттом Макдональдом Коксетером и Евгением Дынкиным графического подхода к комбинаторному анализу системы корней, известного сейчас как диаграммы Коксетера – Дынкина.

Группы Ли важны для современной математики по многим причинам. Например, в механике многие системы обладают симметрией, и это позволяет найти решения для динамических уравнений. В основном именно симметрии образуют группы Ли. В математической физике изучение элементарных частиц во многом опирается на математический аппарат групп Ли, опять-таки благодаря определенным принципам симметрии. Исключительная группа Киллинга E_8 играет важную роль в теории суперструн – основополагающем направлении в поисках связей между квантовой механикой и общей теорией относительности. Сделанное Саймоном Дональдсоном в 1983 г. эпохальное открытие о том, что четырехмерное евклидово пространство обладает нестандартными дифференцируемыми структурами, открывает новый взгляд на группы всех поворотов Ли в четырехмерном пространстве. Теория групп Ли по-прежнему жизненно важна для всех отраслей математики.

Абстрактные группы

В «Эрлангенской программе» Клейна особый упор делается на то, что исследуемые группы состоят из преобразований, т. е. элементы группы действуют в некотором пространстве. И бо́льшая часть ранних работ по теории групп предполагает такую структуру. Но более поздние исследования потребовали нового уровня абстрагирования: сохранить свойства группы, но отказаться от понятия пространства. Группа состоит из математических объектов, которые могут быть объединены для получения аналогичных объектов, но они не обязательно должны быть преобразованиями.

Это могут быть числа. Два числа (целые, рациональные, действительные, комплексные) могут быть сложены, и результатом также станет число такого же вида. Числа образуют группу с помощью операции сложения. Но число – не преобразование. Несмотря даже на роль групп как преобразований, объединивших геометрии, от понятия связанного с ними пространства лучше отказаться, чтобы объединить теорию групп.

Одним из первых математиков, решившихся предложить такой шаг, стал Артур Кейли в трех своих статьях от 1849 и 1854 гг. Он говорил, что группа содержит набор операторов 1, a, b, c и т. д. Объединение ab двух любых операторов должно быть другим оператором; особый оператор 1 удовлетворяет условию $1a = a$ и $a1 = a$ для всех операторов a; ассоциативный закон $(ab)c = a(bc)$ должен сохраняться. Но его операторы по-прежнему опирались на что-то еще (множество переменных). Кроме того, он пропустил решающее условие: для любого a должно быть обратное a', такое, что $a'a = aa' = 1$. Так Кейли хотя и подобрался к призу, но промахнулся на волосок.

В 1858 г. Рихард Дедекинд позволил членам группы быть произвольными сущностями, а не только преобразованиями или операторами, однако включил в свое определение коммуникационный закон $ab = ba$. Эта идея отлично послужила для его цели – теории чисел, но оставляла в стороне самые любопытные группы в теории Галуа, не говоря о более широком математическом мире. Современная концепция абстрактной группы была предложена Вальтером фон Диком в 1882–1883 гг. Он допускал обратимость, но отрицал необходимость

закона коммутативности. Полноценный аксиоматичный подход к группам появился позже, в 1902 г., благодаря Эдуарду Хантингтону, Элиакиму Муру (1902) и Леонарду Диксону (1905).

С абстрактной структурой группы отделились от конкретной интерпретации, и их теория стала стремительно развиваться. Ранние исследования по большей части касались частных случаев: ученые, заинтересовавшиеся примерами отдельных групп или каких-то особых их типов, старались выявить их общие черты. Необходимые в этой области основные понятия и методы появились на удивление быстро, и теперь эта тема процветает.

Теория чисел

Еще одним источником новейших алгебраических идей стала теория чисел. Начало ей положил Гаусс, представив ученым то, что сейчас называется *гауссовыми целыми числами*. Это были комплексные числа $a + bi$, где a и b целые числа. Сумма и произведение этих чисел имеют такой же вид. Гаусс открыл, что понятие простых чисел обобщается на гауссовы целые числа. Они простые, если не могут быть выражены как произведение других гауссовых целых чисел, за исключением тривиальных случаев. Разложение гауссовых целых чисел на простые множители уникально. Некоторые из простых чисел, например 3 и 7, остаются простыми, даже если выражены через гауссовы простые числа, другие – нет: например, $5 = (2 + i)(2 – i)$. Этот факт тесно связан с теоремой Ферма о простых числах и их представлении как суммы двух квадратов, причем гауссовы простые числа иллюстрируют эту теорему и родственные ей.

Если мы разделим одно гауссово целое число на другое, полученный результат окажется не обязательно гауссовым целым числом, но, по крайней мере, близким к нему: он будет иметь вид $a + bi$, где a и b – рациональные числа. Это и есть *гауссовы числа*. Используя более общий подход, ученые, занимающиеся теорией чисел, открыли, что происходит нечто одинаковое, если мы возьмем любой многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами и затем рассмотрим все линейные комбинации $a_1x_1 + … + a_nx_n$ от его корней $x_1, …, x_n$. Положим, что $a_1, …, a_n$ – рациональные числа, тогда мы получаем систему комплексных чисел, которая замкнута относительно сложения, вычитания, умножения и деления; это значит, что, когда эти действия применяются к такому числу, в результате получается число подобного же рода. Такая система представляет собой *поле алгебраических чисел*. Если же вместо этого мы потребуем, чтобы $a_1, …, a_n$ были целыми, то система станет замкнутой относительно сложения, вычитания и умножения, но не деления: тогда мы получим *кольцо алгебраических чисел*.

Самым знаменитым приложением этих новых числовых систем стала Великая теорема Ферма – утверждение о том, что уравнение Ферма, $x^n + y^n = z^n$, не имеет целочисленного решения, если n равно или

больше 3. Никому не удавалось восстановить якобы найденное Ферма «чудесное доказательство», и чем дальше, тем больше было сомнений в том, что он в принципе его создал. Но был достигнут и некоторый прогресс. Ферма нашел доказательство для третьей и четвертой степеней, Петер Лежён Дирихле в 1828 г. преодолел пятую степень, Анри Лебег нашел доказательство для седьмой степени в 1840 г.

В 1847 г. Габриель Ламе заявил, что нашел доказательство для любой степени, но Эрнст Эдуард Куммер указал на допущенную им ошибку. Ламе без доказательств принял утверждение, что *единственность* разложения числа на простые множители справедлива для алгебраических чисел, но это *неверно* для некоторых (скорее, для большинства) полей алгебраических чисел. Куммер показал, что единственность не соблюдается для поля, полученного в исследовании Великой теоремы Ферма для 23-й степени. Однако это не обескуражило Куммера, и он нашел способ обойти возражение, изобретя новый математический аппарат – теорию идеальных чисел. В 1847 г. он доказал теорему Ферма для всех подряд степеней вплоть до 100, за исключением 37, 59 и 67. Развивая свое изобретение, ученый сумел справиться и с этими случаями в 1857 г. К 1980-м гг. эти методы позволили найти доказательства для всех случаев до 150 000-й степени, но их возможности к этому моменту оказались практически исчерпаны.

Кольца, поля и алгебры

Определение Куммера для идеального числа было громоздким, и Дедекинд заново сформулировал его в терминах идеалов – специальных подсистем целых алгебраических чисел. Благодаря школе Давида Гильберта в Гёттингене, в частности Эмми Нётер, эта отрасль науки получила солидный фундамент в виде аксиом. В их списке, кроме групп, были определены три другие алгебраические системы: кольца, поля и алгебры.

В кольце определены такие действия, как сложение, вычитание и умножение, причем они удовлетворяют всем обычным законам алгебры, за исключением коммутативного для умножения. Если же в системе выполняется и он, значит, мы имеем дело с коммутативным кольцом.

ЭММИ АМАЛИЯ НЁТЕР 1882–1935



Эмми Нётер появилась на свет в еврейской семье математика Макса Нётера и Иды Кауфманн. В 1900 г. она получила право преподавать языки, но решила связать свое будущее с математикой. К тому времени в немецких университетах уже позволяли женщинам обучаться на неофициальной основе с позволения их профессора, чем Нётер и пользовалась с 1900 по 1902 г. в Университете Эрлангена. Затем она перебралась в Гёттинген, чтобы прослушать курсы лекций Гильберта, Клейна, Минковского в 1903 и 1904 гг.

Она написала докторскую диссертацию под руководством Пауля Гордана в 1907 г. Диссертация была посвящена вычислениям очень сложной системы инвариантов. Для мужчины следующим шагом стало бы получение степени хабилитированного доктора, но это было невозможно для женщины. Она оставалась дома в Эрлангене, ухаживая за больным отцом, однако продолжала свои исследования и быстро заслужила репутацию серьезного ученого.

В 1915 г. ее снова пригласили в Гёттинген Клейн и Гильберт, приложившие все силы, чтобы получить для нее разрешение работать на факультете. Им удалось добиться своего в 1919 г. Вскоре после своего прибытия она доказала фундаментальную теорему, известную как теорема Нётер, о связывающей симметрии физической системы с законом сохранения. Ряд ее работ Эйнштейн использовал для формулировки некоторых частей своей общей теории относительности. В 1921 г. она написала статью по теории колец и идеалов, изложив ее с точки зрения абстрактной аксиоматики. Ее работа заметно повлияла на классический труд Бартеля Леендерта ван дер Вардена «Современная алгебра». Когда Германия оказалась под властью нацистов, Нётер уволили из-за еврейского происхождения, и она эмигрировала в США. Ван дер Варден говорил, что для нее взаимоотношения между числами, функциями и преобразованиями абсолютно прозрачны и легко поддаются обобщению и обработке, подчиняясь общей концепции.

Для поля определены такие действия, как сложение, вычитание, умножение и деление, и они удовлетворяют всем обычным законам алгебры, в том числе и коммутативному для умножения. Если последний не работает, мы имеем дело с алгебраическим телом.

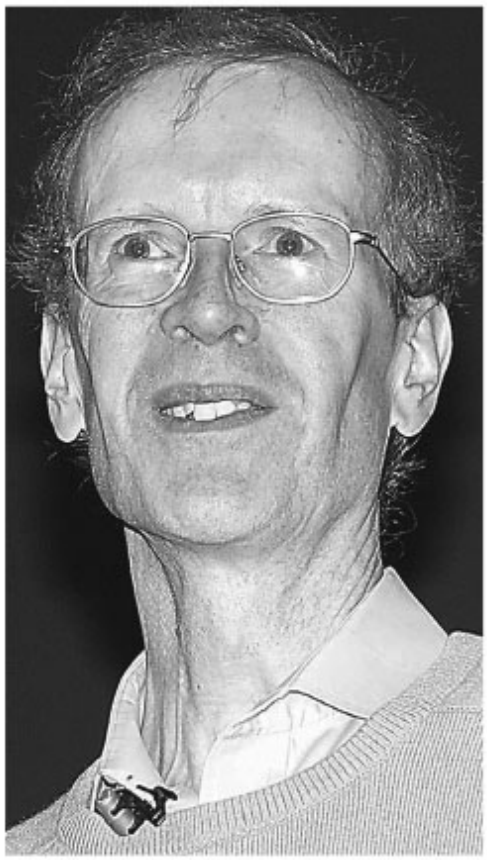
Любая *алгебра* подобна кольцу, но число ее элементов можно также умножить на различные константы, действительные, комплексные числа или – в самом общем случае – на поле. Законы сложения самые обычные, а умножение должно удовлетворять набору разных аксиом. Если при этом выполняется ассоциативность, мы имеем дело с ассоциативной алгеброй. Если они удовлетворяют законам, связанным с коммутатором $xy – yx$, то это будет алгебра Ли.

Существуют десятки, если не сотни, различных типов алгебраических структур, каждая со своим списком аксиом. Некоторые были созданы только для изучения последствий отдельных интересных аксиом, но большинство обязаны своим появлением необходимости решить какую-то определенную проблему.

Простые конечные группы

Высшим достижением исследований XX в., посвященных конечным группам, стала успешная классификация самых простых из них. Это открытие Киллинг совершил, работая с группами и алгебрами Ли. Это буквально привело к полному описанию всех возможных базовых элементарных кирпичиков для конечных групп, а именно *простых* групп. Если под группой подразумеваются молекулы какого-то вещества, простыми группами будут образующие их атомы.

ЭНДРЮ УАЙЛС род. 1953



Эндрю Уайлс родился в Кембридже в 1953 г. В возрасте десяти лет он прочел о Великой теореме Ферма. Тогда он решил стать математиком и доказать ее. К тому времени, как

ученый получил докторскую степень, он практически отказался от этой идеи, поскольку теорема казалась неразрешимой. Уайлс предпочел заняться теорией чисел эллиптических кривых – вроде бы совершенно другой областью математики. Он переехал в США и стал профессором в Принстоне.

К 1980-м гг. уже стало ясно, что между Великой теоремой Ферма и глубокими и трудными вопросами по эллиптическим кривым есть неожиданная связь. Герхард Фрай сделал ее явной с помощью так называемой гипотезы Таниямы – Симуры. Когда Уайлс узнал об идее Фрая, он прекратил все другие исследования, чтобы полностью сосредоточиться на Великой теореме Ферма. После семи лет исследований он убедил себя, что нашел доказательство, основанное на особом случае гипотезы Таниямы – Симуры. Как выяснилось, в этом доказательстве была серьезная дыра, но Уайлсу с Ричардом Тейлором удалось ее закрыть: полное доказательство было опубликовано в 1995 г.

Другие математики вскоре расширили доказательство гипотезы Таниямы – Симуры, продолжая развивать новый метод. За свою работу Уайлс удостоился больших почестей, в том числе премии Вольфа. В 1998 г., уже не подходя по возрасту для конкурса на Филдсовскую премию и медаль, по традиции присуждаемые ученым до 40 лет, он был награжден специальной серебряной тарелкой от Международного математического союза. В 2000 г. он был посвящен в рыцари-командоры ордена Британской империи.

Классификация Киллинга для простых групп Ли доказала, что они могут относиться к одному из четырех бесконечных семейств A_n, B_n, C_n и D_n с пятью исключениями: G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Возможными классификациями всех простых конечных групп занимались слишком многие математики, чтобы перечислить их поименно, но общее направление в решении этой проблемы было задано Даниэлем Горенштейном. Его ответ, опубликованный в 1988–1990 гг., до странности знаком: список бесконечных семейств и список

исключений. Но в нем уже гораздо больше семейств, а число исключений увеличилось до 26.

Семейства включают знакопеременные группы (известные еще Галуа) и ряд групп типа Ли, похожих на простые, но заданных над разными конечными полями, а не над комплексными числами. В этой области есть несколько любопытных вариаций. Исключениями оказываются 26 отдельных групп с некоторыми намеками на общие свойства, но без унифицированной структуры. Первое доказательство того, что классификация полная, пришло из совокупности трудов сотен математиков общим объемом около 10 тыс. страниц. Ряд самых важных частей доказательства так и не был опубликован. Последние работы тех, кто продолжает исследовать эту область, посвящены построению более простой и прозрачной классификации, – подход, ставший возможным благодаря тому, что ответ уже известен. Результаты выходят в свет в виде сборников статей, объем которых в сумме уже составляет около 2000 страниц.

Самой загадочной из входящих в число исключительных простых групп и самой большой из них остается так называемый *монстр*. Его порядок таков:

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^{9} \times 7^{6} \times 11^{2} \times 13^{3} \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71,$$

что равно

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000,$$

это приблизительно 8×10^{53}. Существование монстра предположили в 1973 г. Бернд Фишер и Роберт Грисс. В 1980 г. Грисс доказал, что он существует, и построил его алгебраическую конструкцию как группу симметрии алгебры с 196 884 измерениями. Этот монстр, судя по всему, имеет неожиданные связи с теорией чисел и комплексным анализом, сформулированные Джоном Конвеем как «гипотеза чудовищного вздора». Гипотеза была доказана в 1992 г. Ричардом Борчердсом, за что он получил Филдсовскую медаль – самую престижную награду для математика.

Великая теорема Ферма

Применение алгебраических числовых полей к теории чисел стремительно развивалось во второй половине XX в., причем возникало всё больше связей с прочими областями математики, включая теорию Галуа и алгебраическую топологию. Кульминацией этой работы стало доказательство Великой теоремы Ферма почти через 350 лет после ее первого упоминания.

Идея, обеспечившая возможность решения этой задачи, пришла из прекрасной области, заключенной в самом сердце современных трудов по диофантовым уравнениям, – теории эллиптических кривых. Это те кривые, у которых полный квадрат равен кубическому многочлену, и они представляют ту область уравнений Диофанта, которая понятна математикам. Однако сам предмет не лишен своих нерешенных проблем. Самой значительной остается гипотеза Таниямы – Вейля, названная в честь Ютаки Таниямы и Андре Вейля. Она гласит, что любую эллиптическую кривую можно описать в терминах модулярных функций – обобщений тригонометрических функций, в частности изучавшихся Клейном.

ЧТО АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА ДАЛА ИМ

В своем труде «Исследование законов мышления», опубликованном в 1854 г., Джордж Буль показал, что алгебра применима к логике, и в результате открыл то, что сейчас называется булевой алгеброй.

Я могу дать лишь набросок высказанных Булем идей. Самыми важными логическими операциями являются *не*, *и*, *или*. Если утверждение S истинно, то утверждение «*не* S» ложно, и наоборот. Утверждение «S *и* T» будет истинно тогда и только тогда, когда оба утверждения, S и T, истинны. Утверждение «S *или* T» истинно, когда истинны либо S, либо T, либо они оба одновременно. Буль обратил внимание на то, что если вместо T мы поставим 1, а вместо S – 0, алгебра этих логических операций будет очень напоминать обычную, если

мы примем, что 0 и 1 – целые числа по модулю 2; тогда 1 + 1 = 0 и – S по абсолютной величине равно S. Тогда «не S» есть 1 + S, «S *и* T» есть ST и «S *или* T» есть S + T + ST. Сумма S + T соответствует *исключающему или* (*xor* на языке компьютерщиков). «S *xor* T» истинно при условии, что истинно либо T, либо S, но не оба одновременно. Буль открыл, что его курьезная алгебра логики полностью самосогласована, если вы запомните ее немного странные правила и будете использовать их систематически. Это был один из первых шагов в сторону формальной теории математической логики.

В начале 1980-х гг. Герхард Фрай открыл связь между Великой теоремой Ферма и эллиптическими кривыми. Предположим, что решение для уравнения Ферма существует; тогда вы можете построить эллиптическую кривую с очень необычными свойствами, такими, что даже само существование такой кривой покажется невероятным. В 1986 г. Кеннет Рибет развил эту идею, доказав, что если гипотеза Таниямы – Вейля верна, то кривая Фрая существовать не может. Получается, предположенное ранее решение теоремы Ферма тоже не может существовать, что доказывает Великую теорему Ферма. Этот подход основан на гипотезе Таниямы – Вейля и к тому же показывает, что Великая теорема Ферма – не просто исторический курьез. Напротив, она лежит в основе современной теории чисел.

Эндрю Уайлс с детства мечтал найти доказательство Великой теоремы Ферма, но, став профессионалом, решил, что это не более чем отдельная проблема – пусть нерешенная, но не такая уж и важная. Работа Рибета заставила его изменить мнение. В 1993 г. он заявил о доказательстве гипотезы Таниямы – Вейля для отдельного класса эллиптических кривых, достаточно общем, чтобы найти доказательство Великой теоремы Ферма. Но когда статья уже была готова к публикации, в ней обнаружился серьезный пробел. Уайлс был готов сдаться, когда «внезапно, неожиданно на меня снизошло это невероятное откровение… это было столь неописуемо прекрасно, столь элегантно и просто, и я оцепенел, не в силах поверить». При участии Ричарда Тейлора он пересмотрел свое доказательство и сумел исправить пробел. Его статья вышла в 1995 г.

В одном мы можем быть уверены: что бы ни подразумевал сам Ферма, заявляя, что у него есть доказательство его Великой теоремы, его подход был совершенно иным по сравнению с методами Уайлса. Нашел ли Ферма на самом деле простое и изящное доказательство, или он обманывал сам себя? Эту загадку, в отличие от самой теоремы, мы не разгадаем никогда.

Абстрактная математика

Развитие всё более абстрактного подхода в математике представляется естественным следствием роста разнообразия ее областей. Когда математика по большей части имела дело с числами, алгебраические символы служили не более чем простой заменой им. Но по мере развития математики росли и символы сами по себе, всё больше обретая самостоятельную жизнь. Смысл их становился всё менее важным по сравнению с правилами, по которым с ними можно было манипулировать. Но даже эти правила не были под запретом: традиционные законы арифметики, например коммутативный, далеко не всегда справлялись с новым контекстом.

И не только алгебра стала абстрактной. И анализу, и геометрии тоже пришлось сфокусироваться на более отвлеченных понятиях, причем по тем же причинам. Поворотным временем в изменении общего подхода стал период с середины XIX до середины XX в. Потом начался период консолидации, когда математики старались сбалансировать противоречия между требованиями абстрактного формализма и прикладной науки. Абстракция и обобщения шли рука об руку, но абстракция также способна и затенять значение математики. По крайней мере, больше не возникало споров о необходимости абстракции как таковой: подобные методы доказали свою важность в решении множества давних задач, таких как Великая теорема Ферма. И то, что еще вчера казалось не более чем отвлеченными играми разума, завтра могло запросто стать жизненно важной областью науки или источником хорошего дохода.

ЧТО АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА ДАЕТ НАМ

Поля Галуа создали надежный фундамент для системы кодирования, которая широко используется в различных коммерческих предложениях, особенно для CD и DVD. Всякий раз, слушая музыку или смотря видео, вы используете абстрактную алгебру.

Эти методы получили название кодов Рида – Соломона, в честь Ирвинга Рида и Густава Соломона, открывших их в 1960 г. Эти коды с исправлением ошибок, основанные на многочленах, с коэффициентами в конечных полях, применяются при кодировании данных, таких как музыка или видеосигналы. Известно, что многочлен степени n однозначно определяется своими значениями в различных точках. Идея состоит в вычислении многочлена в более чем n точках. Если здесь нет ошибок, любое подмножество из n точек восстановит тот же самый многочлен. Если это не так, то, исходя из предположения, что количество ошибок не слишком велико, мы всё еще сможем вывести нужный многочлен.

На практике данные представлены в виде кодированных блоков с $2^m - 1$ m-байтных символов в каждом, где байт – двоичный символ: 0 или 1. Чаще всего выбирается значение $m = 8$, потому что многие старые компьютеры работают в байтах – последовательностях из восьми битов. Тогда число символов в блоке равно 255. Один обычный код Рида – Соломона содержит 223 байта закодированных данных в каждом 223-байтном блоке, и оставшиеся 32 байта отводятся на символы четности, в которых указано, должны ли определенные комбинации цифр в данных быть нечетными или четными. Такой код может исправлять до 16 ошибок в одном блоке.

Глава 15. Геометрия на резиновом листе

Количество переходит в качество

Все важные элементы евклидовой геометрии: прямые, углы, окружности, площади и т. д. – так или иначе связаны с измерением. Отрезок прямой имеет длину, угол – определенный размер, он может немного отличаться от прямого (90°), варьируя между 89 и 91°, окружности определяются с помощью их радиусов, площадь фигуры зависит от длины ее сторон. Скрытый элемент, благодаря которому работает геометрия Евклида в целом, – это длина, метрическая величина, которая остается неизменной при движениях и определяет евклидов эквивалент концепции движения – конгруэнтность.

Топология

Новые типы геометрии тоже оказались метрическими. В неевклидовой геометрии можно определять длину и угол, они просто имеют другие свойства, нежели длина и угол на евклидовой плоскости. С открытием проективной геометрии всё изменилось: проективные преобразования могут изменять длину, а также угол. Евклидова геометрия и два основных вида неевклидовой относительно жесткие. Проективная более гибкая, но даже здесь есть более тонкие инварианты, и в представлении Клейна это определяет геометрию как группу преобразований и соответствующих инвариантов.

На исходе XIX в. математики начали развивать еще более гибкую разновидность геометрии – столь гибкую, что она получила название «геометрия на резиновом листе». Нам более привычно иное наименование – *топология*. Это геометрия форм, которые можно исказить чрезвычайно запутанными способами. Прямые могут искривляться, сжиматься или растягиваться; окружности сжимают так, что они превращаются в треугольники или квадраты. Единственное, что имеет значение, – *непрерывность*. Трансформации, разрешенные в топологии, непременно должны быть непрерывными в смысле анализа. Грубо говоря, это значит, что если две точки изначально достаточно близки между собой, они и в итоге останутся близкими, – отсюда и образ резинового листа.

Здесь всё еще слышны отголоски привычного метрического образа мышления: «достаточно близкие» – метрическая концепция. Но к началу XX в. математики избавились и от них, и топологические преобразования обрели независимое существование. Это тут же повысило научный статус топологии, вплоть до того, что она заняла ведущую роль в математике, – хотя с самого начала производила впечатление очень странной и бессодержательной области. Если преобразования *настолько* гибкие, то что же тогда может быть инвариантом? На поверку выходит, что очень многое. Однако тип инварианта, который тогда вступил в игру, еще никогда не рассматривался в геометрии. Связность: сколько именно частей имеет этот объект? А отверстия: то ли видна петля, то ли туннель сквозь объект? Узлы – как они образовались и можно ли их распутать? С точки

зрения тополога, и бублик, и чашка кофе идентичны (зато не идентичны бублик и стакан); однако оба отличаются от круглого мяча. Простой узел отличается от узла-восьмерки, но для доказательства этого потребовалось изобрести новый подход, и долгое время вообще никому не удавалось доказать, существуют ли узлы.

Кажется невероятным, чтобы нечто столь зыбкое и расплывчатое могло оказаться для нас столь важным. Но внешность обманчива. Непрерывность – одно из фундаментальных качеств мира природы, и любое сколь-нибудь серьезное исследование непрерывности приводит к топологии. Даже сегодня мы косвенно пользуемся топологией наряду со множеством других техник.

Вы не найдете примеров откровенной топологии у себя на кухне – по крайней мере явных. (Хотя иногда вы можете заметить ее элементы в хаотичной работе посудомоечной машины, использующей беспорядочные перемещения двух вращающихся лопастей для пущей эффективности процесса. Кроме того, наше понимание феномена хаоса зиждется на топологии.) Главными практическими потребителями топологии стали теоретики квантовых полей, – возможно, это не очень привычное использование слова «практический», но, несомненно, важная область физики. Другое приложение идей топологии демонстрирует молекулярная биология, где с помощью топологических концепций ученые исследуют изгибы и повороты молекулы ДНК.

В скрытом виде топология приносит информацию в математический мейнстрим в целом и способствует развитию других методов с более очевидным практическим применением. Это строгое исследование *качественных* геометрических характеристик – в противоположность количественным, таким как длина. Вот почему математики придают топологии такое значение, хотя вполне возможно, что остальной мир об этом не знает.

Многогранник и кенигсбергские мосты

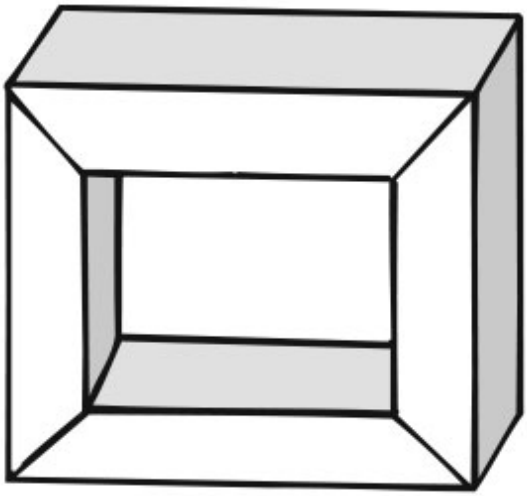
Как полноправная наука топология обособилась только в 1900-х гг., но она уже проявлялась и ранее в математических исследованиях. Два вопроса в предыстории топологии были рассмотрены Эйлером: его формула для многогранника и решение задачи о кенигсбергских мостах.

В 1639 г. Декарт отметил любопытную черту нумерологии правильных тел. Взять, к примеру, куб. Это 6 граней, 12 ребер и 8 вершин. Сложите 8 и 6, и вы получите 14, на 2 больше, чем 12. А как насчет додекаэдра? У него 12 граней, 30 ребер и 20 вершин. И 12 + 20 = 32, что на 2 больше 30. То же повторяется у тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. Та же особенность, судя по всему, присуща практически всем многогранникам. Если тело имеет F граней, E ребер и V вершин, то $F + V = E + 2$, что можно переписать как

$F – E + V = 2$.

Декарт не опубликовал свое открытие, но записал его в своем манускрипте, прочитанном Лейбницем в 1675 г.

Эйлер первым опубликовал это соотношение в 1750 г. Он добавил доказательство в 1751 г. Его увлекли эти взаимоотношения, потому что он пытался разработать классификацию многогранников. В работе над классификацией ученому приходится учитывать любое общее свойство предметов, подобное этому.



Многогранник с отверстием

Существует ли формула, верная для всех многогранников? Не совсем так. Если наш многогранник имеет форму рамы для картины, с квадратным поперечным сечением и прямыми углами, то у него 16 граней, 32 ребра и 16 вершин, т. е. здесь $F + V – E = 0$. Причиной такого несоответствия оказывается наличие отверстия. Фактически если многогранник имеет g отверстий, то

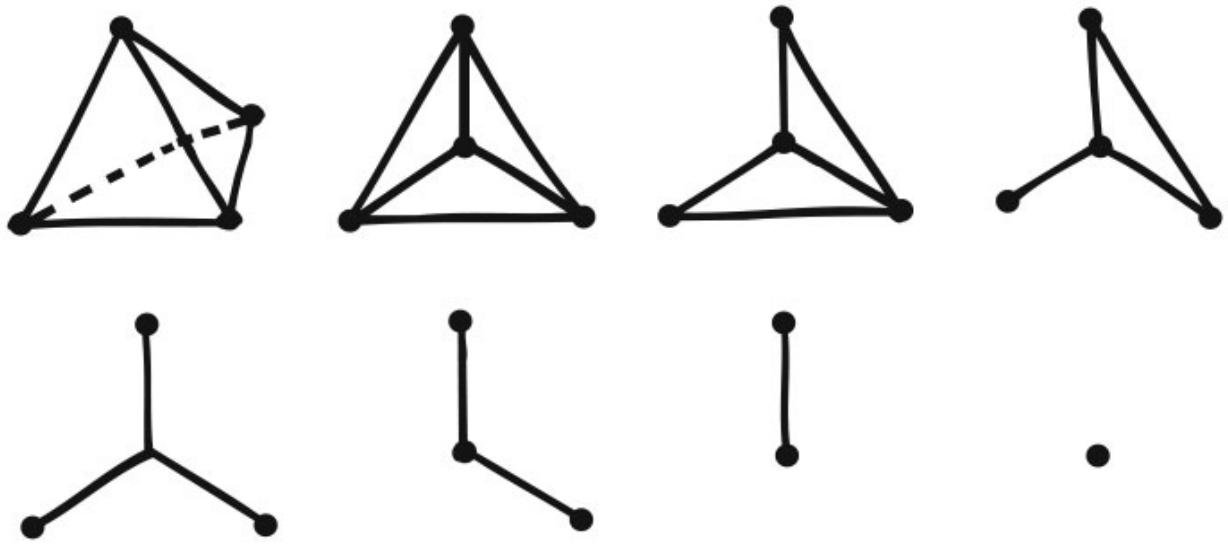
$$F + V – E = 2 – 2g.$$

Что же это – отверстие? Ответ найти труднее, чем кажется. Во-первых, речь идет о поверхности многогранника, а не о его сплошном внутреннем пространстве. В реальной жизни для того, чтобы сделать отверстие в чем-либо, мы внедряемся в его твердую сплошную внутренность, но приведенные выше формулы не имеют отношения к ней – только к граням, образующим его поверхность, заодно с их ребрами и вершинами. Всё, с чем мы имеем дело, лежит на поверхности. Во-вторых, единственный вид отверстий, влияющий на численные данные, – те, что пронзают тело насквозь, образуя туннель с двумя концами. Проще говоря, это не такое отверстие, которое может вырыть рабочий на дороге. В-третьих, такие отверстия могут не быть на поверхности, хотя отчасти именно поверхности очерчивают их. Отверстие существует только в качестве пустого места в бублике, но даже в этом случае вы покупаете твердую внутренность бублика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОШИ ДЛЯ ФОРМУЛЫ ДЕКАРТА – ЭЙЛЕРА

Удалим одну грань и растянем поверхность тела на плоскости. Это уменьшит F на 1, т. е. теперь мы доказываем, что в результате плоская конфигурация для ребер, линий и точек удовлетворяет формуле $F – E + V = 1$. Чтобы этого достичь, сначала преобразуем все грани в треугольники, начертив, если надо, добавочные диагонали. Каждая из новых диагоналей оставит V неизменной, но увеличит и E, и F на 1, так что $F – E + V$ не изменится. Теперь начнем удалять ребра

начиная с наружных. Каждое из удалений уменьшает и F, и E, так что $F – E + V$ снова останется тем же. Когда вы закончите с удалением плоскостей, у вас останутся в случае тетраэдра три ребра и три вершины не имеющие замкнутых контуров. Одну за другой удалим крайние вершины заодно с ребрами, подходящими к ним. Теперь и E, и F уменьшатся на 1, и снова $F – E + V$ остается таким же. Этот процесс остановится только на последней вершине. Теперь $F = 0$, $E = 0$ и $V = 1$, так что $F – E + V = 1$, что и требовалось доказать.



Пример доказательства Коши

Наверное, проще исходить из определения, что значит «не отверстие». Многогранник не имеет отверстий, если его можно непрерывно деформировать, получая искривленные грани и ребра, пока он (вернее, его поверхность) не превратится в сферу. Для таких поверхностей $F + V – E$ на самом деле всегда будет равно 2. И обратное утверждение верно: если $F + V – E = 2$, многогранник можно деформировать в сферу.

Непохоже, что многогранник в виде рамы для картины можно деформировать в сферу, – куда же денется отверстие? Для строгого доказательства этого мы не должны заглядывать дальше того факта, что для этого многогранника $F + V – E = 0$. Такое соотношение невозможно для поверхностей, способных деформироваться в сферу. Итак, числа многогранников описывают для нас важные особенности их геометрии,

и последние могут быть топологическими инвариантами – неизменными при деформациях.

Сейчас формула Эйлера кажется нам замечательным намеком на очень полезную связь между комбинаторными аспектами многогранника, такими как количество граней, и его топологическими аспектами. Получается, что проще двигаться в обратном направлении.

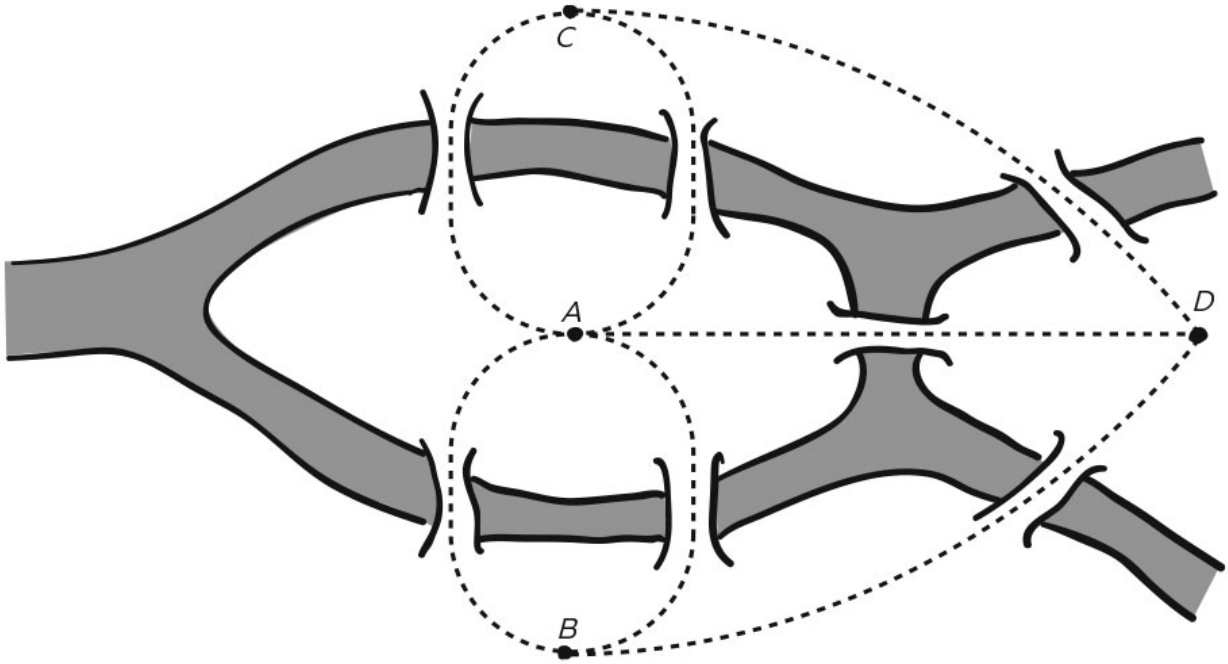
Чтобы вычислить количество отверстий на поверхности, возьмем $F + V – E – 2$, разделим на 2 и изменим знак:

$$g = –(F + V – E – 2)/2.$$

Курьезный вывод: теперь мы можем вычислить количество отверстий в многограннике, не давая определения отверстия.

Преимущество такой процедуры в том, что она естественна для многогранника, не требует визуального контакта с ним в окружающем трехмерном пространстве – того, как видят отверстие наши глаза. Необычайно разумный муравей, обитающий на поверхности многогранника, может решить, что там есть какое-то отверстие, даже если видит только поверхность. Эта естественная точка зрения присуща топологии. Она изучает форму предметов как таковую, саму по себе, а не как часть чего-то еще.

На первый взгляд задача о кенигсбергских мостах не имеет отношения к комбинаторике многогранников. Город Кенигсберг (ныне Калининград), некогда принадлежавший Пруссии, расположен по обоим берегам реки Преголя, на которой есть два острова. Те связаны с берегами и друг с другом семью мостами. Понятно, что жители Кенигсберга долго гадали, можно ли так проложить маршрут воскресной прогулки, чтобы только один раз пройти по каждому из мостов.



Задача о кенигсбергских мостах

Загадку в 1735 г. решил Эйлер; хотя правильнее будет сказать, он доказал, что здесь нет решения, и объяснил почему. Он использовал два важных приема: упростил задачу и сократил ее до самых элементарных требований, а затем обобщил ее, сравнив со всеми головоломками такого рода. Он указал, что для решения важны не размеры и форма островов, а то, как именно связаны между собой острова, берега и мосты. Всю проблему можно было изобразить простой схемой точек (вершин), соединенных линиями (ребрами), как это показано наложением на нашей карте.

Чтобы составить такую схему, мы расположим по одной вершине на каждом массиве суши: северный берег, южный берег и два острова. Соединим две вершины ребром всякий раз, когда есть мост, связывающий соответствующие фрагменты суши. Тогда мы получаем четыре вершины *A, B, C* и *D* и семь ребер, по одному для каждого моста.

Теперь задачу можно заменить более простым эквивалентом на схеме. Возможно ли найти на ней маршрут – связанную последовательность ребер, чтобы он включал по одному разу каждое ребро?

Эйлер определил два типа маршрутов: *открытый*, у которого начало и конец находятся в разных вершинах, и *замкнутый*, у которого

начало и конец приходятся на одну вершину. Он доказал, что именно для этой схемы не существует маршрута ни одного из этих типов.

Ключом к загадке станет рассмотрение валентности каждой вершины: в данном случае это число сходящихся в ней ребер. Сперва рассмотрим вариант замкнутого маршрута. Здесь каждое ребро, приходящее к вершине, соединяется с другим – следующим, по которому маршрут покидает эту вершину. Если замкнутый маршрут возможен, количества ребер для каждой вершины должны, соответственно, быть четными. Иными словами, у всех вершин должна быть равная валентность. Но на схеме мы видим три вершины с валентностью 3 и одну с валентностью 5 – всё это нечетные числа. Значит, замкнутого маршрута не существует.

Те же критерии мы применяем к открытому маршруту, но здесь получится минимум две вершины с нечетной валентностью: одна в начале и другая в конце. Поскольку на схеме Кенигсберга есть четыре вершины с нечетной валентностью, открытого маршрута не существует.

Эйлер сделал еще один важный шаг – доказал, что эти необходимые условия для существования маршрута являются также достаточными при условии, что на диаграмме есть связь (т. е. две любые вершины связаны каким-либо путем). Это общее свойство доказать несколько труднее, и у Эйлера ушло некоторое время на поиски решения. Сейчас мы можем записать доказательство в нескольких строках.

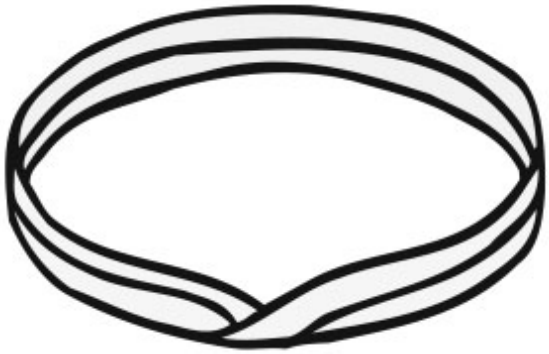
Геометрические свойства плоских поверхностей

Два открытия Эйлера кажутся принадлежащими к весьма далеким друг от друга разделам математики, но при внимательном рассмотрении легко заметить общие для них детали. Они используют комбинаторику схем многогранников. Одно считает грани, ребра и вершины, а другое – валентности; одно выводит общие соотношения между тремя числами, другое ищет что-то общее в имеющихся маршрутах. Но они явно родственны по духу. И даже больше, причем эта особенность оставалась незамеченной на протяжении более чем столетия: оба являются инвариантами непрерывных преобразований. Само расположение вершин и ребер здесь не имеет значения: нам важно лишь то, как они связаны между собой. Обе проблемы покажутся одинаковыми, если мы нарисуем эту схему на резиновом листе, который потом деформируется. Единственный способ создать значимые различия – разрезать или разорвать этот лист и склеить потом его куски; но эта операция уничтожит саму непрерывность.

ЛЕНТА МЁБИУСА

Топология может преподнести сюрпризы. Самый известный из них – лента Мёбиуса (лист Мёбиуса). Чтобы ее получить, нужно взять длинную полоску бумаги и склеить ее противоположные концы, повернув один из них вполоборота. Без поворота мы получим обычный цилиндр. Различие между этими двумя поверхностями станет понятно, если мы попробуем их покрасить. У цилиндра мы легко сможем выкрасить наружную поверхность в красный цвет, а внутреннюю в синий. Но если вы начнете красить красным одну сторону ленты Мёбиуса и будете поступательно двигаться от окрашенной части к неокрашенной, окажется, что вы выкрасили в красный цвет всю ленту. Из-за

полуоборота внутренняя поверхность соединилась с наружной.



Еще одно отличие проявится, если вы разрежете ленту пополам вдоль всей ее длины. Да, она разделится на две части, но они останутся связанными друг с другом.

Проблески общей теории первым заметил Гаусс, время от времени пытавшийся привлечь внимание коллег к необходимости некой теоретической базы для геометрических свойств схем. Он также изобрел новый топологический инвариант, который мы сейчас называем *коэффициентом зацепления*, для исследований магнетизма. Это число определяет, как одна замкнутая кривая обкручивается вокруг другой. Гаусс вывел формулу для подсчета коэффициента зацепления на основе аналитических выражений, описывающих кривые. Такой же инвариант, *число оборотов* (или индекс точки) для замкнутой кривой по отношению к точке, был использован в одном из доказательств Основной теоремы алгебры.

Наибольший вклад в становление топологии внесли студент Гаусса Иоганн Листинг и ассистент Август Мёбиус. Листинг учился у Гаусса в 1834 г., и в его труде «Предварительные исследования по топологии» впервые используется термин «топология». Сам Листинг сначала применял выражение «геометрия позиций», но его уже пустил в обиход Карл фон Штаудт для описания проективной геометрии, и Листингу пришлось искать другой вариант. Кроме того, Листинг искал способ обобщения формулы Эйлера для многогранников.

Мёбиус сумел четко обозначить важную роль непрерывных преобразований. Его нельзя было назвать самым продуктивным ученым, но он отличался чрезвычайно кропотливым подходом к любой

исследуемой им теме. В частности, именно он обратил внимание на то, что у поверхности отнюдь не всегда есть две четко разделенные стороны, приведя в пример свою знаменитую ленту. Эту поверхность независимо друг от друга открыли и Мёбиус, и Листинг в 1858 г. Листинг опубликовал свое открытие в книге «Der Census Räumlicher Complexe» («Описание пространственной сложности»), а Мёбиус – в статье об исследовании свойств поверхностей.

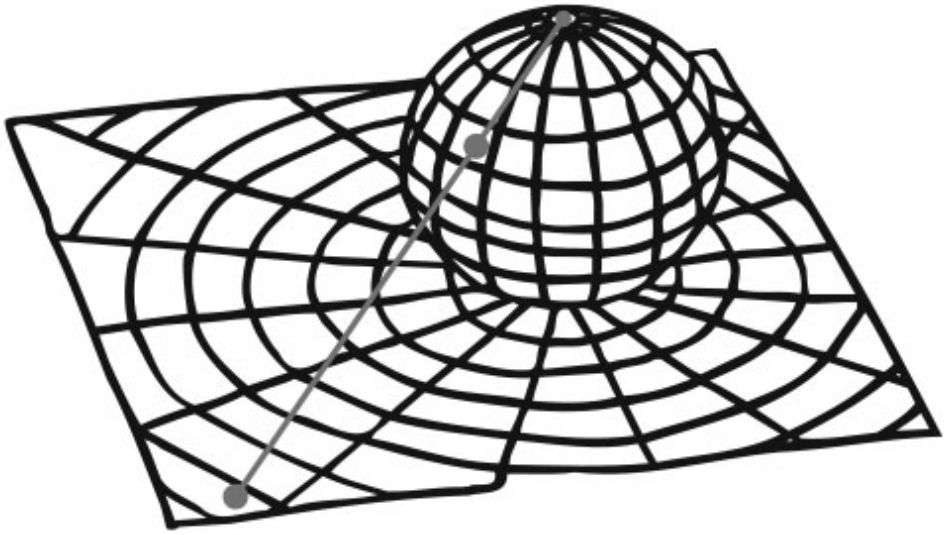
Долгое время идеи Эйлера о многогранниках оставались в стороне от основных направлений математической мысли, но в какой-то момент несколько маститых ученых открыли новый подход к геометрии, который они назвали тогда *analysis situs*, т. е. анализ размещений. Под этим подразумевалась *качественная* теория форм как самостоятельная дисциплина, дополняющая более привычную тогда количественную теорию длин, углов, площадей и объемов. Этот взгляд делался всё более популярным по мере появления новых открытий в традиционных исследованиях основных направлений математики. Ключевым шагом стало открытие связей между комплексным анализом и геометрией поверхностей, сделанное Риманом.

Сфера Римана

Очевидный способ осмысления комплексной функции f состоит в том, чтобы интерпретировать ее как отображение из одной комплексной плоскости в другую. Базовая формула для такой функции, $w = f(z)$, предлагает нам взять любое комплексное число z, применить к нему f и получить другое комплексное число w, связанное с z. Геометрически z принадлежит одной комплексной плоскости, а w – фактически второй, независимой копии комплексной плоскости.

Но эта точка зрения была не особо популярна среди ученых, и причиной тому стали так называемые сингулярности. Комплексные функции часто имеют такие интересные точки, в которых их регулярное, нормальное поведение становится странным. Например, функция $f(z) = 1/z$ ведет себя очень предсказуемо во всех точках, за исключением 0. Когда $z = 0$, значение функции равно 1/0, что не имеет смысла для обычного комплексного числа, хотя с помощью некоторой доли воображения его можно представить как бесконечность (символ ∞.). Если z слишком близко подойдет к 0, $1/z$ окажется особенно большим. Бесконечность в этом смысле не число – это всего лишь термин, описывающий численный процесс: число становится сколь угодно большим. Гаусс уже отметил, что бесконечности такого рода создают новый тип поведения при комплексном интегрировании. Это оказалось существенным.

Риман счел полезным включить ∞ в ряд прочих комплексных чисел и нашел для этого красивый геометрический способ. Разместите единичную сферу так, чтобы она оказалась поверх комплексной плоскости. Теперь ассоциируйте точки на плоскости с точками на сфере с помощью стереографической проекции. Это значит соединить точку на плоскости с северным полюсом сферы и посмотреть, где эта линия будет пересекать сферу.



Сфера Римана и комплексная плоскость

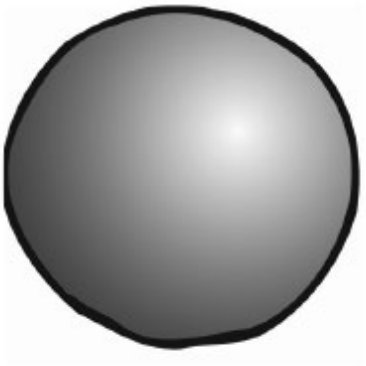
Такая конструкция называется *сферой Римана*. Новая точка – своего рода северный полюс сферы: единственная точка, которая не соответствует какой-либо точке на комплексной плоскости, и будет являться бесконечностью. Поразительно, как прекрасно эта конструкция вписывается в стандартные расчеты в комплексном анализе, ведь теперь уравнение вроде $1/0 = \infty$ обретает безукоризненный смысл. Точки, в которых комплексная функция f принимает значение ∞, называются *полюсами*, и на поверку выходит, что вы сможете больше выяснить о f, если знаете, где лежат ее полюса.

Одна лишь сфера Римана не привлекла бы столь пристального внимания ученых к топологическим аспектам комплексного анализа, но второе свойство сингулярности, под названием *точка ветвления*, сделало топологию незаменимой. Простейший пример – комплексная функция квадратного корня, $f(z) = \sqrt{z}$. Большинство комплексных чисел имеет два разных квадратных корня, как и действительные числа. Они различаются лишь знаком: один положительный, другой отрицательный, причем по модулю они равны. Например, квадратные корни из $2i$ равны $1 + i$ и $–1 – i$, почти как действительные квадратные корни из 4 равны 2 и –2. Но есть одно комплексное число с *одним* квадратным корнем: 0. Почему? Потому что + 0 и –0 равны.

Чтобы понять, почему 0 оказывается точкой ветвления для функции квадратного корня, представим себе для начала точку 1 на комплексной плоскости и выберем один из двух квадратных корней.

Явным выбором станет 1. Теперь постепенно перемещайте точку вокруг единичной окружности и по мере движения выбирайте для каждого положения точки тот из квадратных корней, который меняется непрерывно. К тому моменту, когда вы пройдете половину окружности до –1, квадратный корень пройдет лишь четверть окружности, до + *i*, поскольку √–1 = + *i* *или* – *i*. Продолжая путь по кругу, мы вернемся в исходную точку 1. Но квадратный корень, двигающийся с половинной скоростью, остановится только у –1. Чтобы вернуть его к исходному значению, точке придется пройти окружность полностью *дважды*.

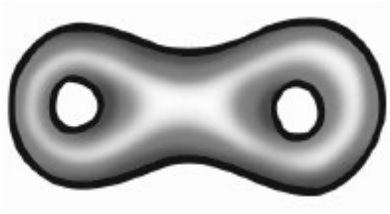
Риман нашел способ справиться с такой разновидностью сингулярности: он удвоил сферу Римана до двух слоев. Они отделены друг от друга, за исключением точек 0 и ∞ – второй точки ветвления. В них слои сливаются – или, наоборот, разветвляются от одиночного слоя при 0 и ∞. Возле двух этих особых точек геометрия слоев выглядит как винтовая лестница: необычно то, что если вы поднимете на два полных оборота по этой лестнице, то окажетесь там, откуда начали. Геометрия этой поверхности говорит нам очень многое о функции квадратного корня, и та же идея остается верной для других комплексных функций.



Сфера



Тор



Тор с двумя отверстиями

Описание поверхности смутное, и возникает вопрос: что у нее за форма? Вот здесь и вступает в игру топология. Мы можем непрерывно деформировать винтовую лестницу во что-то более легкое для визуализации. Специалисты по комплексному анализу открыли, что топологически всякая поверхность Римана является либо сферой, либо тором, либо тором с двумя отверстиями, либо тором с тремя отверстиями и т. д. Число отверстий g известно как *род* поверхности, и это то же g, которое встречалось нам в обобщенной формуле Эйлера для поверхностей.

Ориентируемые поверхности

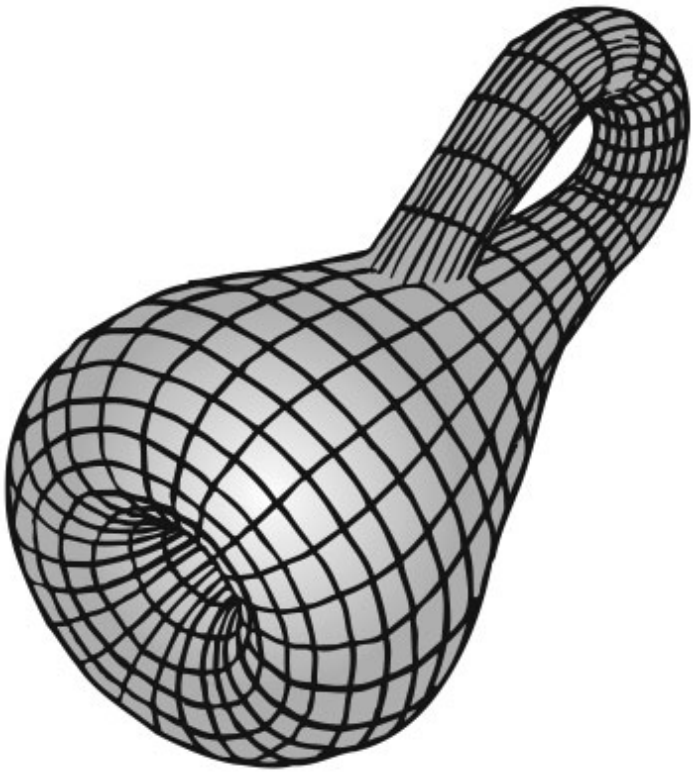
Понятие рода оказалось важным для многих глубинных вопросов в комплексном анализе, что вынудило ученых обратить внимание на топологию поверхностей. Постепенно стало ясно, что существует второй класс поверхностей, отличных от торов с g отверстиями, но тесно с ними связанный. Отличие в том, что торы с g отверстиями – ориентируемые поверхности; интуитивно это означает, что они имеют две четко различающиеся стороны. Они наследуют это свойство от комплексной плоскости, имеющей верхнюю и нижнюю стороны, поскольку винтовые лестницы соединяются так, что это различие сохраняется. Если вместо этого вы соедините два лестничных пролета так, чтобы пол одного из них повернулся вверх, то стороны, ранее бывшие раздельными, соединятся.

О возможности соединения такого рода первым заговорил Мёбиус, чья лента имела одну сторону и один край. Клейн пошел дальше, концептуально склеив в круглый диск края ленты Мёбиуса, чтобы избавиться от края. Получившаяся поверхность, в шутку прозванная *бутылкой Клейна*, имеет только одну сторону и вовсе не имеет краев. Если мы попытаемся изобразить ее в привычном трехмерном пространстве, ей придется пройти себя насквозь. Но в качестве абстрактной поверхности (или поверхности, помещенной в четырехмерное пространство) она не пронзит себя.

Теперь теорему о торах с g отверстиями можно переформулировать так: любая ориентируемая поверхность (или конечное пространство без границ) топологически эквивалента сфере с g дополнительными отверстиями (где g может быть равно 0). Есть соответствующая классификация и для неориентируемых (односторонних) поверхностей: они могут быть образованы поверхностью под названием *проективная плоскость* путем добавления g отверстий. Бутылка Клейна как раз и является проективной поверхностью с одним отверстием.

Комбинация этих двух результатов называется теоремой о классификации поверхностей. Она позволяет описать в топологическом эквиваленте *любую возможную поверхность* (или конечное пространство без границ). С доказательством этой теоремы топология

двумерных пространств – поверхностей – может считаться вполне изученной. Это, конечно, не значит, что на любой вопрос о поверхностях теперь легко найти ответ, но по крайней мере это дает хороший задел для исследований новых сложных проблем. В любом случае, теорема о классификации поверхностей – чрезвычайно важный инструмент двумерной топологии.



Бутылка Клейна. Видимое самопересечение – не более чем иллюзия, возникающая из-за трехмерности изображения

ЖЮЛЬ-АНРИ ПУАНКАРЕ 1854–1912



Анри Пуанкаре родился во французском Нанси. Его отец Леон был профессором медицины в Университете Нанси, его мать звали Эжени Лануа. Его кузен, Раймон Пуанкаре, стал французским премьер-министром и даже занимал пост президента страны во время Первой мировой войны. Анри отлично успевал по всем предметам в школе, особенно выделяясь в математике. Прекрасная память и способность легко представить себе объемное изображение даже самой сложной формы помогали компенсировать его слабое зрение: ученик едва различал классную доску, не говоря уж о том, что на ней было написано.

Его первой должностью был пост преподавателя в университете города Кан в 1879 г., но уже в 1881 г. он удостоился гораздо более денежного и престижного места в Парижском университете. Там он стал одним из ведущих математиков своего времени. Он работал систематически – каждый день по четыре часа, разбитых на два двухчасовых промежутка, утром и вечером. Но полет его мысли не поддавался столь строгой организации, и зачастую он принимался писать статью, не имея даже представления о том, к чему приведет его новое исследование и как оно закончится. Его отличала высочайшая интуиция, и лучшие

идеи приходили часто в те моменты, когда он размышлял о чем-то постороннем.

Среди своих современников он, несомненно, был самым выдающимся математиком, сделавшим немало важных открытий в теории комплексного переменного, дифференциальных уравнений, неевклидовой геометрии и топологии – которую отчасти и создал. Он много занимался прикладными исследованиями в области электричества, сопротивления материалов, оптики, термодинамики, теории относительности, квантовой теории, астрономии и космологии.

Он завоевал главный приз в конкурсе, объявленном в 1887 г. королем Швеции и Норвегии Оскаром II. Темой была объявлена «задача трех тел» – исследование движения гравитационно взаимодействующих трех тел. В поданную на конкурс работу закралась ошибка, которую удалось быстро исправить. В результате были открыты возможности того, что сейчас известно под названием «хаос»: беспорядочное, непредсказуемое движение в системе, подчиняющейся детерминированным законам. Также он опубликовал несколько чрезвычайно популярных и известных книг: «Наука и гипотеза» (1901), «Ценность науки» (1905), «Наука и метод» (1908).

Тем, кто хочет научиться мыслить в понятиях топологии, часто помогает представление об изучаемом пространстве как о единственном существующем предмете. Вовсе ни к чему пытаться вписать его в окружающее пространство. Это позволяет полностью сосредоточиться на *внутренних* свойствах пространства. Представьте на минуту мелкое существо, обитающее, так сказать, на топологической поверхности. Как может такая козявка, не имея представления обо всем окружающем ее пространстве, пытаться понять, на чем она обитает? Как прикажете ей давать характеристики такой поверхности «изнутри»? К 1990 г. стало ясно, что единственный способ ответить на этот вопрос – представить существование на этой поверхности замкнутых петель и способы их деформации. Например, на сфере любая замкнутая петля может непрерывно деформироваться до точки – стянувшись в нее. Окружность, вращающаяся вокруг экватора, может

постепенно смещаться к северному полюсу, делаясь всё меньше, пока не совпадет с самим полюсом.

И наоборот, всякая поверхность, не эквивалентная сфере, содержит петли, которые не могут быть деформированы до точки. Они проходят сквозь отверстие, и то не дает им стягиваться. Итак, сфера может быть определена как *единственная* поверхность, в которой всякая замкнутая петля может стянуться до точки.

Топология в трех измерениях

Естественным шагом после плоскостей – двумерных топологических пространств – становится трехмерное пространство. Теперь объектами изучения станут многообразия в понимании Римана, за исключением того, что понятия расстояния игнорируются. В 1904 г. Анри Пуанкаре, один из величайших математиков всех времен, пытался понять свойства трехмерных многообразий. Он открыл ряд методов для достижения этой цели. Один из них, *гомология*, изучает взаимоотношения между областями в многообразиях и их границами. Другой – *гомотопия* – отслеживает изменения, происходящие с замкнутыми петлями в многообразиях в процессе их деформации.

Гомотопия тесно связана с методами, отлично служившими при изучении плоскостей, и Пуанкаре искал аналогичные результаты для трехмерного пространства. Так он пришел к одному из самых важных вопросов математики.

Он помнил о свойстве сферы как единственной поверхности, у которой всякая замкнутая петля может стянуться. Работает ли это свойство в трех измерениях? На первых порах он предположил, что да. Это казалось очевидным, и ученому даже не пришло в голову, что он делает необоснованное допущение. Позже ему стало ясно, что одна из правдоподобных версий этого утверждения откровенно ошибочна, а другая тесно связанная с нею формулировка может оказаться верной, несмотря на сложности с доказательством. Он задал вопрос, впоследствии названный гипотезой Пуанкаре. Если трехмерное многообразие (без границ, или конечного пространства, и т. д.) обладает тем свойством, что всякая замкнутая петля в нем может стянуться до точки, то такое многообразие топологически должно быть эквивалентно 3-сфере (естественному аналогу обычной сферы).

Последовавшие попытки доказать теорему завершились успешными обобщениями для четырех и более измерений. Топологи продолжали работу с изначальной гипотезой Пуанкаре, в трех измерениях, – без успеха.

В 1980-х гг. Уильям Тёрстон высказал идею, которая могла бы превзойти гипотезу Пуанкаре, будучи более амбициозной. Его гипотеза геометризации пошла дальше, обобщая свойства всех трехмерных

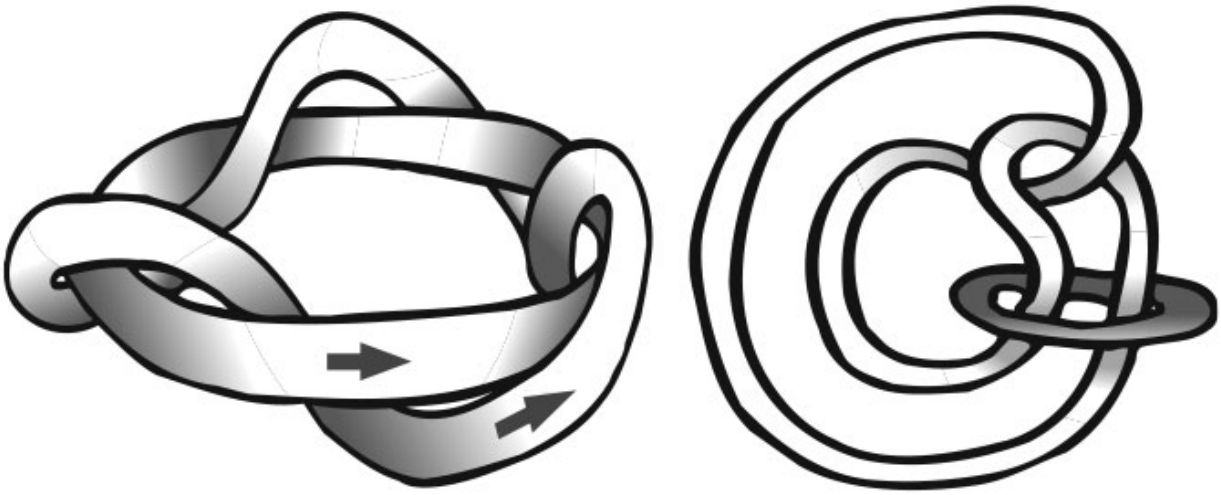
многообразий, а не только тех, где всякая замкнутая петля может стянуться. Отправной точкой стала новая интерпретация классификации поверхностей в терминах неевклидовой геометрии.

Тор можно получить, взяв квадрат в евклидовой плоскости и отождествив его противоположные края. Тогда он плоский – с нулевой кривизной. У сферы имеется постоянная положительная кривизна. Тор с двумя или более отверстиями может быть представлен как поверхность с постоянной отрицательной кривизной. Иными словами, топология поверхностей может быть заново интерпретирована в терминах геометрии трех типов: одного евклидова и двух неевклидовых, точнее, собственно евклидовой геометрии, эллиптической геометрии (положительная кривизна) и гиперболической (отрицательная кривизна; геометрия Лобачевского).

Может ли быть нечто аналогичное в трех измерениях? Тёрстон указывал на ряд осложнений: оказывается, здесь задействовано не три, а восемь типов геометрий. И уже нет возможности использовать какую-то одну из них для данного многообразия: последнее должно быть разбито на несколько частей, чтобы для каждой использовать свою геометрию. Он сформулировал свою гипотезу геометризации: всегда есть систематический способ разбить трехмерное многообразие на части, каждая из которых соответствует одной из восьми геометрий.

ЧТО ТОПОЛОГИЯ ДАЛА ИМ

Один из простейших топологических инвариантов был открыт Гауссом. При исследованиях электрических и магнитных полей его заинтересовало, как могут быть связаны две замкнутые петли. Он изобрел коэффициент зацепления, который обозначает, сколько раз одна петля оборачивается вокруг другой. Если число зацеплений не равно 0, петли не могут быть разделены с помощью топологического преобразования. Однако данный инвариант не помогает достоверно определить, когда две соединенные петли невозможно разделить, ведь в некоторых случаях инвариант связывания равен 0, однако петли разделить невозможно.



Слева: петли с коэффициентом зацепления 3. Справа: эти связи нельзя разделить топологически, хотя их коэффициент зацепления равен 0

> Он даже составил аналитическую формулу для такого числа, взяв интеграл подходящей величины вдоль соответствующей кривой. Открытия Гаусса положили начало такой современной отрасли математики, как алгебраическая топология.

Теперь гипотеза Пуанкаре становится ее прямым следствием, поскольку условие, что все петли стягиваются, исключает семь геометрий, оставляя только геометрию постоянной положительной кривизны – трехмерной гиперсферы.

Альтернативный подход предлагает геометрия Римана. В 1982 г. Ричард Гамильтон открыл в этой области новые приемы, основанные на математических идеях, которые были использованы Альбертом Эйнштейном для обоснования общей теории относительности. По Эйнштейну, пространство-время можно считать изогнутым, а кривизна описывает силу притяжения. Она измеряется так называемым тензором кривизны, который имеет более простого родственника, известного как тензор Риччи (назван в честь его изобретателя Грегорио Риччи-Курбастро). Изменения в геометрии Вселенной, связанные со временем, описываются уравнениями Эйнштейна, где говорится, что кривизна пропорциональна силе тензора. В результате гравитационные

искривления Вселенной стараются со временем выпрямиться, и уравнения Эйнштейна количественно описывают эту идею.

Тот же фокус можно проделать и с использованием версии кривизны Риччи, и мы получим ту же модель поведения: поверхность, подчиняющаяся уравнениям для потока Риччи, естественным путем стремится к упрощению своей геометрии, более справедливо распределяя свою кривизну. Гамильтон показал, что гипотеза Пуанкаре для двумерного пространства может быть доказана с помощью потока Риччи – на основании того, что поверхность, на которой все петли стягиваются, упрощает саму себя по мере того, как следует потоку Риччи, так что в конце получается идеальная сфера. Гамильтон также предложил обобщить этот подход для трехмерного пространства и даже добился определенного успеха в своих исследованиях, пока не натолкнулся на ряд трудностей.

Перельман

В 2002 г. Григорий Перельман произвел сенсацию, выложив несколько своих статей на arXiv – сайте, созданном физиками и математиками для нерецензируемых публикаций и подчас даже еще не законченных исследований. Так ученые могли избежать проволочек из-за реферирования, неизбежных при официальной публикации своих открытий. Ранее этой же цели служили периодически издававшиеся на бумаге неофициальные препринты. На первый взгляд статьи Перельмана посвящены потоку Риччи, но на самом деле становится понятно, что если открытия автора верны, они послужат доказательством гипотезы геометризации, которую сформулировал Пуанкаре.

Основную идею предложил еще Гамильтон. Возьмите произвольное трехмерное многообразие, снабдите его понятием расстояния так, чтобы можно было применить поток Риччи, и позвольте многообразию следовать потоку, упрощая себя. Главным возможным осложнением становятся особенности, которые возникнут там, где многообразие сжимается, когда оно перестает быть гладким. При сингулярности предложенный метод не работал. Свежая идея состояла в том, чтобы устранить эти сингулярности, тем самым открыть появившиеся отверстия и удалить все препятствия для потока. Если многообразию удастся упростить самое себя полностью после того, как появилось только конечное число сигулярностей, каждая часть будет поддерживать только одну из восьми геометрий, и операции, обратные вырезанию (хирургия, или перестройка Морса), покажут нам, как снова склеить эти части в целое и восстановить многообразие.

Гипотеза Пуанкаре стала столь знаменитой по другой причине: она была включена в список восьми математических задач тысячелетия, составленных Институтом Клея, и за их решение – подкрепленное вескими доказательствами – можно получить приз в миллион долларов. Но у Перельмана оказалась своя особая причина не желать этой награды – вернее, не желать никакой награды, кроме самого решения, поэтому ученый и не имел особого стимула расшифровать свои малопонятные наброски на arXiv в нечто более достойное публикации.

ГРИГОРИЙ ПЕРЕЛЬМАН род. 1966



Перельман родился в 1966 г. в стране, называвшейся тогда СССР. Он выиграл золотую медаль, набрав 100 %-ный результат в школьной Международной олимпиаде по математике. Перельман работал и в США, и в Институте Стеклова в Санкт-Петербурге, но так и не получил преподавательской должности. Его замкнутый и неуживчивый характер стал очередным дополнением к расхожему представлению о математиках как о людях не от мира сего. Остается только пожалеть, что его история усиливает стереотип эксцентричного математика.

Эксперты в этой области науки были вынуждены предлагать свои версии развития его идеи, стараясь заполнить пробелы в его логике и в итоге добившись результата, приемлемого в качестве доказательства. Некоторые из таких исследований были опубликованы, и понятная и

четкая версия доказательства Перельмана одобрена сообществом топологов. В 2006 г. ему присудили медаль Филдса за исследования в этой области, но и от этого приза ученый отказался. Как видим, не всех манит мировая слава.

Топология и реальный мир

Топологию изобрели, поскольку математика не могла функционировать без нее; это было вызвано решением ряда основных вопросов в областях вроде комплексного анализа. Она решает вопрос «Какова форма этого предмета?» в очень простом, но глубоком виде. Более привычные геометрические понятия, такие как длина, теперь можно было рассматривать как дополнительные свойства к основной информации, полученной с помощью топологии.

Когда-то было высказано несколько первых топологических идей, но лишь к середине XIX в. топология стала полноправной областью математической науки со своими сущностью и влиянием, когда у математиков сложилось достаточно полное представление о топологии плоскостей, или двумерных форм. Расширение исследований на более многомерные пространства приняло бурный характер в конце XIX – начале XX в., во многом благодаря работам Анри Пуанкаре. Дальнейшие важные шаги были совершены в 1920-х гг. Новый взлет в этой области приходится на 1960-е, хотя по иронии судьбы именно тогда топология окончательно ушла от привычной нам прикладной науки.

Разбив аргументы традиционных критиков чистой математики в XX в., развившаяся в результате теория стала неотъемлемой частью многих областей математической физики. Ученым удалось справиться даже с самой ее неразрешимой проблемой, а именно гипотезой Пуанкаре. Сейчас уже ясно, что главными препятствиями для развития топологии всегда становились ее внутренние противоречия, лучше всего решаемые с помощью абстрактных понятий. Ее связям с реальным миром пришлось подождать, пока не были до конца отработаны основные техники исследования.

ЧТО ТОПОЛОГИЯ ДАЕТ НАМ

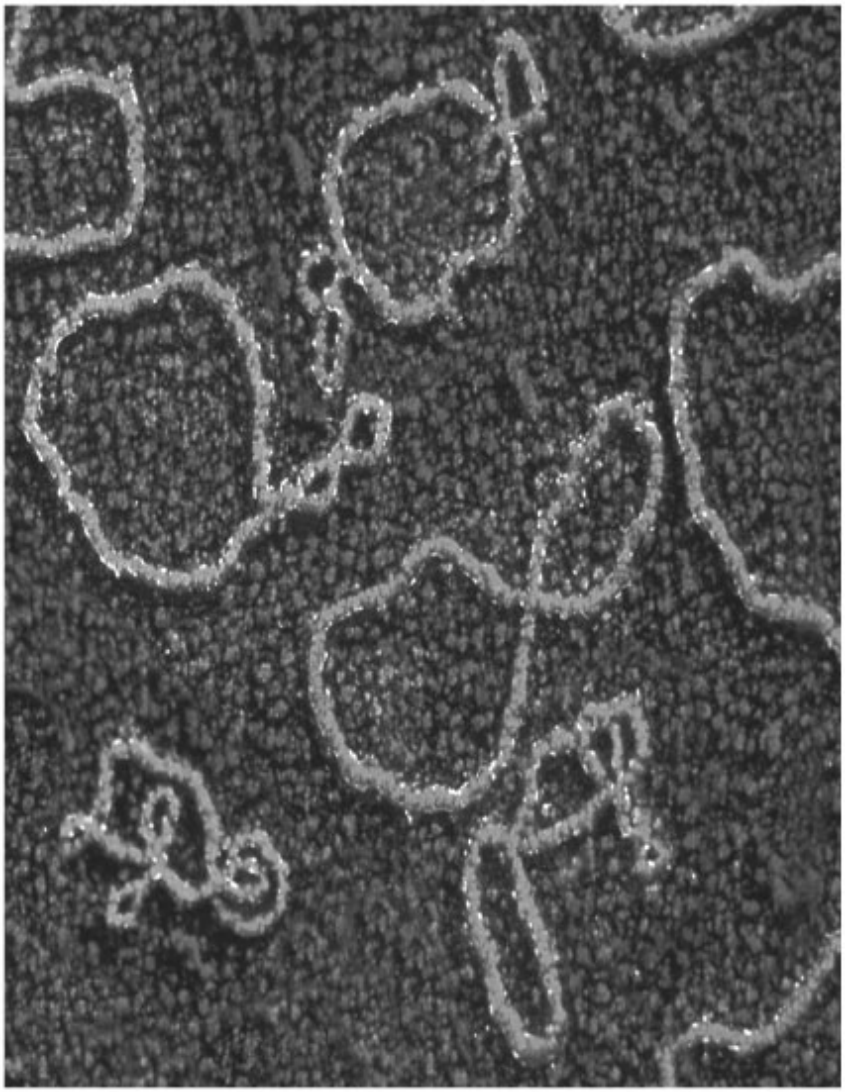
В 1956 г. Джеймс Уотсон и Френсис Крик открыли тайну строения двойной спирали молекулы ДНК – основы, на которой записывается и хранится генетическая информация.

Сегодня топология узлов используется для понимания того, как распутать две нити спирали, определяющих схему развития всякого живого организма.

Спираль ДНК напоминает двужильную веревку, где одна жила виток за витком закручена вокруг другой. При делении генетическая информация попадает в обе новые клетки благодаря тому, что пряди спирали расплетаются и копируются, чтобы потом образовать пару. Любой, кому приходилось расплетать достаточно длинный обрезок обычной веревки, знает, как это трудно: нити норовят закрутиться в узлы в ответ на любую попытку их разделить. В случае ДНК всё еще хуже: сами спирали свернуты, как будто канат смотан в катушку. Представьте себе километровые нити, закрученные в подобие теннисного мяча, и вы получите отдаленное представление о сложной структуре ДНК в клетке.

Генетической биохимии остается лишь искать способы сплетать и расплетать эти нити достаточно точно, аккуратно и быстро: на них держится сама жизнь! Но как этого добиться? Биологи научились с помощью ферментов разрезать цепочку ДНК на куски, достаточно короткие для подробных исследований. Любой сегмент ДНК представляет собой сложный молекулярный узел, причем один и тот же узел может стать неузнаваемым после неких манипуляций, искажающих его вид.

Новые техники в изучении узлов открывают и новые направления атаки для молекулярных генетиков. И здесь топология узлов уже выходит за границы чистой математики, превращаясь в важный практический инструмент для биологов. Недавно была открыта математическая модель взаимосвязи между оборотами спирали ДНК и количеством образуемых ею суперклубков.



Узлы нитей ДНК

Глава 16. Четвертое измерение

Геометрия за пределами нашего мира

В своей научно-фантастической книге «Машина времени» Герберт Уэллс описывал скрытую природу пространства и времени в стиле, уже нам знакомом, но наверняка вызвавшем бы недоумение у современников из викторианской эпохи: «И всё же существуют четыре измерения, из которых три мы называем пространственными, а четвертое – временным». В поддержку своего мнения он добавляет: «Правда, существует тенденция противопоставить три первых измерения последнему, но только потому, что наше сознание от начала нашей жизни и до ее конца движется рывками лишь в одном направлении этого последнего измерения… Однако некоторый философские умы задавали себе вопрос: почему же могут существовать только три измерения? Почему не может существовать еще одно направление под прямым углом к трем остальным? Они пытались даже создать Геометрию Четырех Измерений». Его главный герой идет еще дальше: преодолевает традиционную ограниченность человеческого сознания и путешествует в четвертом измерении, времени, как если бы это было одно из «нормальных» измерений пространства.

Четвертое измерение

Искусство автора научной фантастики состоит в умении подать читателям самые невероятные вещи, и Уэллс сообщает читателям, что всего около месяца тому назад профессор Саймон Ньюком излагал эту проблему перед Нью-Йоркским математическим обществом. Здесь Уэллс мог даже ссылаться на реальное событие. Нам известно, что Ньюком был маститым астрономом и даже читал лекцию о четырехмерном пространстве примерно в то же время. Он выражал свежие веяния в математической и научной мысли, освободившейся от традиционного представления о том, что пространство имеет только три измерения. Само по себе это не делает возможным путешествие во времени, но позволяет Уэллсу сформулировать некие наблюдения о человеческой натуре современников, отправив путешественника во времени в беспокойное будущее.

«Машина времени», увидевшая свет в 1895 г., отражала одержимость четвертым измерением, свойственную викторианской эпохе. Это непостижимое, невидимое человеку пространство традиционно считалось местом обитания всяческих призраков, духов или даже самого Всевышнего. Четвертое измерение понравилось не только шарлатанам и писателям: о нем принялись рассуждать ученые, и понятие такого пространства формализовали математики. Прошло лишь несколько десятилетий, и мы видим, что математики привычно оперируют не только четырьмя, но и пятью, и шестью, и десятью, и миллионом, и даже бесконечным числом измерений. Приемы и образ мышления, сложившиеся в многомерной геометрии, стали применяться практически во всех отраслях науки – вплоть до биологии и экономики.

Многомерные пространства пока остаются практически неизвестными вне научного сообщества, однако трудно представить себе современное мышление без использования этих методов, какими бы отстраненными они ни казались с точки зрения обыденной жизни. Ученые в попытке объединить две основные теории о законах существования физической вселенной, теорию относительности и квантовую механику, склоняются к предположению, что актуальное для нас пространство скорее имеет девять или десять измерений, а не три, как нам обычно кажется. В свете нового всплеска дискуссий о

неевклидовой геометрии трехмерное пространство всё чаще рассматривается как всего лишь одно из многих, а не единственное возможное.

Эти изменения стали реальны благодаря тому, что такие понятия, как пространство и измерение, стали интерпретироваться более обобщенно, не противореча привычному пониманию этих слов в быту или СМИ, однако оставляя лазейку и для других возможностей. Для математиков пространство обозначает набор неких объектов с определенным расстоянием между каждыми двумя из них. Воспользовавшись приемом Декарта, предложившего идею координат, мы можем определить число измерений пространства *по количеству чисел*, необходимых для описания некоего объекта. Принимая за объекты точки и используя обычное понятие расстояния на плоскости или в пространстве, мы находим, что плоскость имеет два измерения, а пространство – три. Но возможны и другие наборы объектов с четырьмя измерениями или более.

Предположим, что объекты – сферы в трехмерном пространстве. Нам потребуется четыре числа (x, y, z, r), чтобы описать сферу: три координаты для ее центра (x, y, z) плюс радиус r. Иными словами, пространство всех сфер имеет *четыре* измерения. Примеры вроде этого показывают, что даже самый естественный математический вопрос легко приводит нас к многомерным пространствам.

Конечно, современные математики давно ушли дальше. Абстрактно четырехмерное пространство *определяется* как множество всех числовых четверок (x_1, x_2, x_3, x_4). Пространство с n измерениями – для любого целого n – определяется как множество всех наборов (x_1, x_2, …, x_n) из n чисел. В каком-то смысле это уже знакомая история: интригующее и загадочное понятие многомерности рассыпается до тривиальности – очередной длинной цепочки чисел.

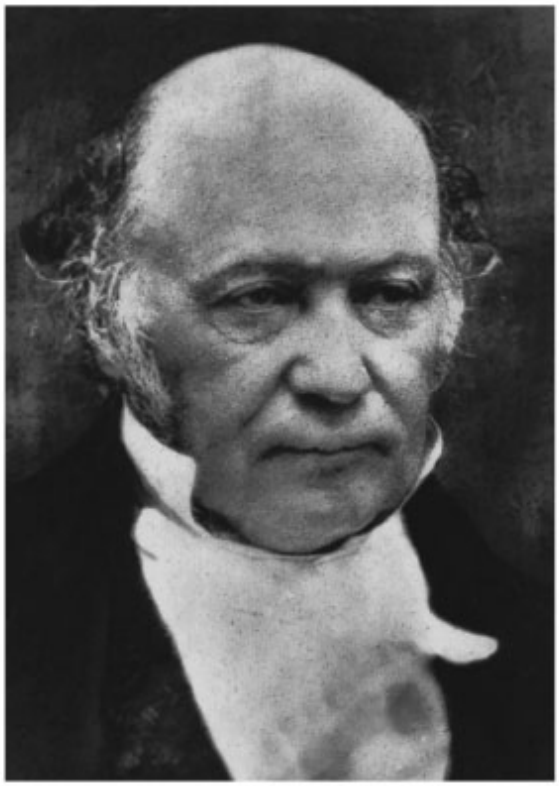
Сейчас нам понятна такая точка зрения, но ей потребовалось немало времени, чтобы укрепиться в сознании ученых. Математики отчаянно спорили, едва ли не с пеной у рта, о значении и реальности существования многомерных пространств. Понадобилось почти 100 лет, чтобы эти идеи распространились достаточно широко. Однако использование этих пространств и связанного с ними геометрического воображения оказалось столь эффективным, что возражения иссякли сами собой.

Трех- или четырехмерное пространство

Ирония в том, что современная концепция многомерных пространств была порождена алгеброй, а не геометрией – как следствие неудачной попытки развить трехмерную числовую систему, аналогичную двумерной системе комплексных чисел. Разделение между двумя и тремя измерениями восходит к «Началам» Евклида. Первая часть его книги посвящена геометрии плоскости – двумерному пространству. Вторая же связана с геометрией тел – это геометрия трехмерного пространства. Вплоть до XIX в. само слово «измерение» воспринималось исключительно в этом знакомом контексте.

Греческая геометрия была не более чем формализацией наших визуальных и тактильных ощущений, позволяющих мозгу выстроить мысленную модель отношений расстояний во внешнем мире. Она изначально ограничена возможностями наших органов чувств и восприятия мира, в котором обитаем. Греки верили, что геометрия описывает *реальное* пространство, где мы живем, и делали вывод, что физическое пространство должно быть евклидовым. Отвлеченный математический вопрос «Может ли четырехмерное пространство существовать в некоем концептуальном плане?» перекликался с физическим «Может ли существовать *реальное* пространство с четырьмя измерениями?». А этот вопрос перекликался с «Могут ли существовать четыре измерения где-то внутри *нашего знакомого пространства*?». Иными словами, существовало убеждение, что четырехмерное пространство невозможно.

УИЛЬЯМ РОУЭН ГАМИЛЬТОН 1805–1865



Математический гений Гамильтона проявился так рано, что он был назначен профессором астрономии в Тринити-колледже в Дублине, еще будучи студентом, в возрасте 21 года. Этот пост принес ему титул королевского астронома Ирландии.

Он совершил немало прорывов в математике, но самым значимым всегда считал открытие кватернионов. Он утверждал: «Кватернионы ‹…› полностью сформировались и зажили своей жизнью 16 октября 1843 г., когда я пешком шел с леди Гамильтон по Дублину и оказался на мосту Брум. Там я в буквальном смысле тут же ощутил замкнутую гальваническую цепь мысли, и искры, выпавшие из нее, были фундаментальными уравнениями для *i*, *j* и *k* – *в точности в том виде*, в каком я использовал их с тех пор. Я тут же выхватил из кармана записную книжку, которая до сих пор хранится у меня, и сделал наброски. И *в тот же миг* мне стало ясно, что ради этого результата я трудился не покладая рук последние десять, а то и пятнадцать лет. В тот момент я почувствовал, что *проблема решена*, и мой ум испытал

желанное облегчение от того груза, что не давал мне покоя целых пятнадцать лет».

Гамильтон немедленно вырезал свое уравнение на камнях моста:

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk - 1$.

Геометрия начала избавляться от оков этого ограниченного мировоззрения, когда алгебраисты итальянского Ренессанса невольно натолкнулись на возможность более глубокого расширения концепции чисел, признав существование квадратного корня из –1. Валлис, Вессель, Арган и Гаусс разработали принципы интерпретации получаемых в результате комплексных чисел в виде точек на плоскости, избавив тем самым числа от оков одномерности вещественной прямой. В 1837 г. ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон упростил эту тему до алгебраического выражения, определив комплексное число $x + iy$ как *пару* действительных чисел (x, y). Он далее определил сложение и умножение таких пар правилами:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

При таком подходе пара вида $(x, 0)$ ведет себя как действительное число x, а особая пара $(0, 1)$ – как i. Идея проста, но для ее принятия потребовалось изобрести изощренную концепцию математического мировосприятия.

Следом Гамильтон обратил свое внимание на нечто более амбициозное. Было хорошо известно, что комплексные числа дают возможность разрешить множество проблем математической физики, связанных с задачами на плоскости, используя простые и изящные методы. Такому же приему для трехмерного пространства не было бы цены. И ученый попытался изобрести *трех*мерную числовую систему в надежде, что соответствующие вычисления решат важные проблемы математической физики в трехмерном пространстве. Он по умолчанию предположил, что эта система будет удовлетворять всем обычным законам алгебры. Но, несмотря на героические усилия, он так и не нашел такую систему.

А потом он понял почему. Это было невозможно.

Среди общепринятых законов алгебры имеется *коммутативный закон умножения*, согласно которому $ab = ba$. Гамильтон потратил годы на то, чтобы создать эффективную алгебру для трех измерений. И он все-таки нашел ее – числовую систему под названием *кватернионы*. Однако это была алгебра для четырех измерений, а не для трех, и здесь умножение не было коммутативно.

Кватернионы похожи на комплексные числа, но вместо одного нового числа i здесь их три: i, j, k. Кватернион является комбинацией этих чисел, например $7 + 8i – 2j + 4k$. Точно так же, как комплексные числа двумерны, поскольку составлены из двух независимых величин 1 и i, кватернионы *четырех*мерны, так как составлены из независимых величин 1, i, j и k. Они могут быть формально определены алгебраически как четверки действительных чисел со своими правилами сложения и умножения.

Многомерное пространство

Когда Гамильтон совершил прорыв, математики уже принимали многомерные пространства как нечто вполне естественное и даже открыли ряд физических толкований того, почему основными элементами пространства может быть что-то кроме точек. В 1846 г. Юлиус Плюккер указывал, что для описания *линии* в пространстве необходимы *четыре* числа. Два определяют, где линия пересекает некую фиксированную плоскость, а еще два – направление относительно этой плоскости. Значит, если наше знакомое пространство считать набором *линий*, оно имеет не три, а четыре измерения. Но оставалось ощущение, что такое построение чересчур умозрительно и что пространство, образованное четырьмя измерениями, неестественно. Кватернионы Гамильтона можно естественным образом проинтерпретировать как вращения, и их алгебра безупречна. Они так же естественны, как комплексные числа, – а значит, и четырехмерное пространство так же естественно, как плоскость.

Идея быстро вышла за рамки четырех измерений. Гамильтон продвигал свои возлюбленные кватернионы, а преподаватель математики Герман Гюнтер Грассман в это время занимался открытием расширения числовой системы для пространства с любым количеством измерений. Он опубликовал свою идею в 1844 г. в своем «Учении о линейной протяженности». Его выкладки оказались слишком загадочными и абстрактными, поэтому не привлекли особого внимания. В 1862 г., не желая с этим мириться, ученый выпустил переработанную версию своего труда, «Учение о протяженности», уверенный, что на этот раз материал изложен более доступно. Увы, это было не так.

Несмотря на холодный прием, работа Грассмана была фундаментально важной. Он открыл, что можно заменить четыре единицы 1, i, j и k кватернионов любым количеством единиц. Комбинации последних он назвал *гиперчислами*. Он отдавал себе отчет в том, что его подход имеет ограничения, ему стоит быть осторожным и не возлагать лишних надежд на арифметику гиперчисел: рабское подчинение законам традиционной алгебры никуда его не приведет.

Тем временем физики развивали свое в*и*дение многомерных пространств, опираясь не на геометрию, а на уравнения Максвелла для электромагнетизма. Здесь и магнитное, и электрическое поля были *векторами* – обладали *направлением* в трехмерном пространстве наряду со скалярной величиной (численным значением). Векторы при желании изображаются стрелками, выстроенными в линии магнитного или электрического поля. Длина стрелки показывает силу поля, а острие – направление, куда оно обращено.

Со временем уравнений Максвелла набралось всего восемь, причем туда входило две группы по три уравнения: по одному для каждого компонента электрического или магнитного поля с учетом всех трех измерений пространства. Жизнь была бы намного легче, если бы удалось собрать каждую из этих троек в единое векторное уравнение. Максвеллу удалось достичь этого благодаря кватернионам, но его подход оказался грубоватым. Независимо друг от друга физик Джозайя Уиллард Гиббс и инженер Оливер Хевисайд нашли более простой путь для алгебраического представления векторов. Гиббс в 1881 г. тайно напечатал свою статью «Элементы векторного анализа» в помощь своим студентам. Он пояснил, что его идеи необходимы скорее для практического использования, чем для математической изысканности. Над его заметками поработал также Эдвин Уилсон, и в 1901 г. они опубликовали совместный труд «Векторный анализ». Хевисайд высказал те же самые общие идеи в первом томе своей «Электромагнитной теории» в 1893 г. (следующие два тома вышли в 1899 и 1912 гг. соответственно).

Изначально различные системы: кватернионы Гамильтона, гиперкомплексные числа Грассмана и векторы Гиббса – очень быстро сошлись к одному и тому же математическому описанию вектора. Это тройка чисел (x, y, z). Так спустя 250 лет и математики, и физики из разных частей света нашли свой путь обратно к Декарту – только теперь его идея координат оказалась лишь частью истории. Тройки представляли не просто точки, а направленные величины. Здесь заключалась огромная разница – и это не был формализм; это стало новой интерпретацией, физическим *толкованием*.

Математики гадали, какими свойствами порадуют их системы гиперкомплексных чисел. Для них вопрос звучал не «Есть ли от них польза?», а «Интересны ли они ученым?». Так математики

сосредоточились на алгебраических свойствах систем *n*-х гиперкомплексных чисел для любого *n*. Фактически здесь уже шла речь о *n*-мерных пространствах *плюс* алгебраических действиях, но на первых порах все предпочитали мыслить алгебраически, оставляя геометрические аспекты проблемы под спудом.

Дифференциальная геометрия

Геометры ответили на вторжение на их территорию алгебраистов, подвергнув гиперкомплексные числа геометрической интерпретации. Ключевой фигурой в этом действе стал Риман. Он работал над своей хабилитацией в надежде получить право брать плату с обучавшихся у него студентов. Кандидату на степень хабилитированного доктора полагалось прочесть публичную лекцию на тему его собственного исследования. Следуя привычной процедуре, Гаусс попросил Римана представить ему список тем, из которых он мог бы что-то окончательно выбрать. Одна из тем называлась «О гипотезах, лежащих в основе геометрии», и Гаусс, также интересовавшийся этими вопросами, выбрал именно ее.

Риман был в ужасе: мало того, что он вообще терпеть не мог выступать на публике, так и тема была им почти не проработана. Но сама идея оказалась блестящей: геометрия для n измерений, под которой он подразумевал систему с n координатами (x_1, x_2, …, x_n), в которую введено понятие расстояния между близлежащими точками. Он назвал такое пространство многообразием. Предложение было весьма радикальным, но оно привело к еще более радикальному выводу: многообразия могут искривляться. Гаусс занимался изучением кривизны поверхностей и вывел изящную формулу, естественно описывающую кривизну по существу – исключительно в терминах поверхности, а не пространства, где та помещается.

Риман намеревался вывести похожую формулу для кривизны многообразия, обобщив формулу Гаусса для n измерений. Она тоже должна была стать неотъемлемой для многообразия – для нее не надо будет использовать какое-либо пространство. Попытки Римана развить понятие кривизны в пространстве с n измерениями привели его на грань нервного срыва. Положение усугубилось еще и тем, что он активно помогал коллеге Гаусса Веберу, занимавшемуся исследованием электричества. Риман не сдавался, и наблюдения за взаимодействием электрических и магнитных сил привели его к новой концепции силы, основанной на геометрии. На него снизошло такое же озарение, благодаря какому десятилетия спустя Эйнштейн открыл общую теорию относительности: силу может заменить искривление пространства.

В традиционной механике тела движутся по прямой, пока не подвергнутся воздействию силы. В криволинейных геометриях существование прямых вовсе не обязательно, а пути изогнуты. Если пространство искривлено, то, вынужденно отклоняясь от прямой линии, тело испытает не что иное, как силу. Теперь благодаря этому озарению Риман почувствовал себя вполне готовым к публичной лекции. Он прочел ее в 1854 г. Это был великий триумф. Идеи Римана быстро распространились, и восхищение его открытием только возрастало. Вскоре ученые принялись читать популярные лекции о новой геометрии. Среди них был и Герман фон Гельмгольц, первым заговоривший о существах, обитающих на сфере или иной криволинейной поверхности.

Технические аспекты римановой геометрии многообразий, в настоящее время известной как дифференциальная геометрия, получили дальнейшее развитие в трудах Эудженио Бельтрами, Эльвина Бруно Кристоффеля и ученых итальянской школы под руководством Грегорио Риччи и Туллио Леви-Чивита. Позже оказалось, что именно их разработок не хватало Эйнштейну для открытия его теории.

Матричная алгебра

Алгебраисты тоже не сидели сложа руки, а развивали всё новые приемы вычисления для *n*-вариабельной алгебры – формальный символизм *n*-мерного пространства. Одним из таких методов стала матричная алгебра – прямоугольные массивы чисел, предложенные в 1855 г. Артуром Кейли. Такая абстракция естественным образом родилась из идеи об изменении координат. Это стало рутинным приемом – упрощать алгебраическое выражение, заменив переменные, например *x* и *y*, линейными комбинациями, например:

$$u = ax + by,$$
$$v = cx + dy$$

для констант *a*, *b*, *c* и *d*. Кейли представил пару (*x*, *y*) как вектор-столбец, а коэффициенты – таблицей размера 2 × 2, или матрицей. С соответствующим определением для умножения мы можем переписать изменение координат так:

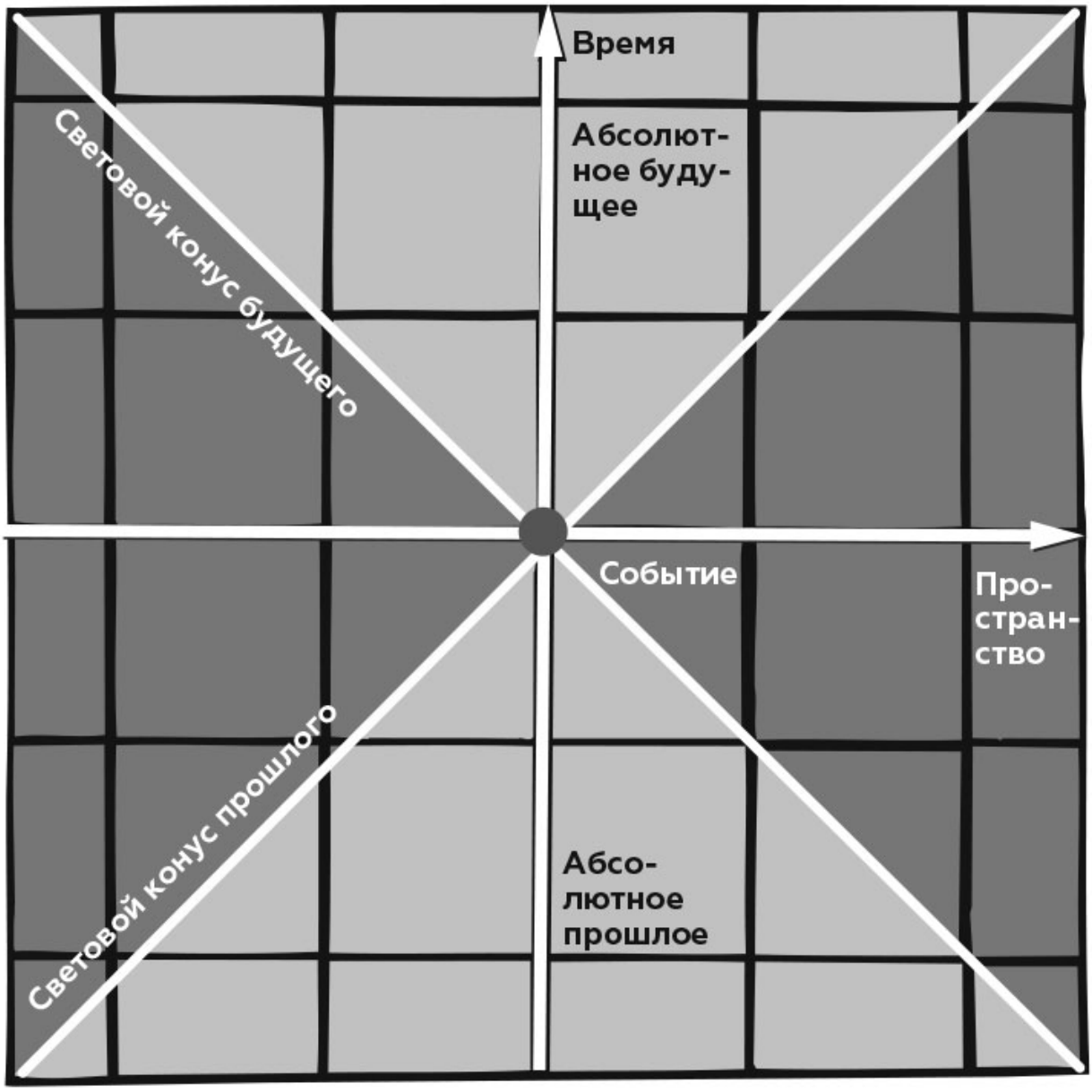
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Метод легко распространяется на таблицы с любым числом строк и столбцов, представляющие линейные изменения для любого числа координат.

ЧТО ГЕОМЕТРИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДАЛА ИМ

Примерно в 1907 г. немецкий математик Герман Минковский сформулировал теорию относительности Эйнштейна для четырехмерного *пространства-времени*, скомбинировав одномерное время и трехмерное пространство

в единый математический объект. Он известен нам как *пространство-время Минковского*.



Требования теории относительности говорят, что естественная метрика пространства-времени Минковского не определяется теоремой Пифагора, в которой квадрат расстояния от точки (x, t) до начала координат равен $x^2 + t^2$. Это выражение следует заменить интервалом $x^2 - c^2t^2$, где c – скорость света. Принципиальным изменением здесь является

знак минус, который говорит о том, что события в пространстве-времени связаны с двумя конусами. Один (на нашей схеме это треугольник, поскольку пространство сократили на одно измерение) представляет будущее от нашего события, а другой – прошлое. Это геометрическое представление стало практически универсальным для современной физики.

Матричная алгебра позволяет делать расчеты для *n*-мерного пространства. По мере распространения новых идей складывался и новый геометрический язык для этого пространства, основанный на абстрактной алгебраической системе вычислений. Кейли считал свою идею не более чем удобным обозначением и предсказывал, что она никогда не получит иного применения. Сегодня эта методика распространилась во всех областях науки, особенно в такой, как статистика. Медики – одни из самых активных потребителей матриц, занимающиеся поисками статистически значимых связей между причиной и следствием.

Геометрические образы упрощают доказательство теорем. Критики утверждают, что эти новомодные геометрии относятся к пространствам, которые никогда не существовали. Алгебраисты возражают, что алгебра для *n* переменных существует практически наверняка, и в любом случае всякий прием, позволяющий сделать новые открытия в столь многих областях математики, заслуживает серьезного и пристального интереса. Джордж Сальмон писал: «Я уже полностью обсудил эту проблему (решения некоторой системы уравнений), когда даны три уравнения с тремя переменными. Теперь перед нами стоит вопрос о схожей задаче в пространстве с *p* измерениями, и мы склонны считать это чисто алгебраическим вопросом, независимым от каких-либо геометрических соображений. Но нам придется местами прибегнуть к геометрическому *языку*… потому что так легче понять, как применить к системе *p* уравнений процесс, аналогичный тому, который применили к системе из трех уравнений».

Реальное пространство

Существуют ли многомерные пространства? Конечно, ответ зависит от того, что мы подразумеваем под словом «существуют», но большинство людей не склонны вникать в такие тонкости, особенно если им что-то не нравится. Проблема стала очевидной в 1869 г. В знаменитом обращении к Британской ассоциации содействия развитию наук, позже напечатанном под заголовком «Мольба к математикам», Джеймс Джозеф Сильвестр указал, что важнейшим условием развития математики является обобщение. Ученый утверждал, что здесь главное – *допустимость*, а не прямое подтверждение физического опыта. Он говорил далее, что при наличии определенного навыка можно легко представить себе четыре измерения, а значит, пространство с четырьмя измерениями допустимо.

Это так разъярило ученого-шекспироведа Клемента Инглби, что он вдохновил великого философа Иммануила Канта доказать, будто трехмерность – неотъемлемая и бесспорная характеристика пространства, абсолютно отвергая доводы Сильвестра. Природа реального пространства не является предметом математического спора. В то время подавляющее большинство английских математиков соглашалось с Инглби. Но ряд ученых с континента не были с ним согласны. Грассман утверждал: «Теоремы “Учения о протяженности” не просто служат переводом геометрических результатов на язык абстракции; они обладают гораздо более важным обобщающим значением, ибо в то время, когда обычная геометрия остается узницей трех [физических] измерений, абстрактная наука не имеет никаких пределов».

Сильвестр обозначил свою позицию: «Немало ученых предпочли бы считать обобщенное понятие пространства всего лишь замаскированной формой алгебраической абстракции, но то же можно сказать о нашем представлении бесконечности, или о невозможных линиях, или о линиях, образующих угол, равный 0, в геометрии – понятиях, в пользе и необходимости которых уже никто не сомневается. Доктор Сальмон в своем расширенном изложении теории Мишеля Шаля о характеристиках поверхностей, мистер Клиффорд в вопросах о вероятности и я сам в теории о разбиении числа, а также в моей статье

о барицентрической проекции ощущали и получали доказательства практической пользы четырехмерного пространства, как если бы оно было допустимо».

Многомерное пространство

В итоге в споре победил Сильвестр. Современные математики допускают существование явления, если оно логически непротиворечиво. Это может противоречить физическому опыту, что не имеет отношения к математической сущности. Тогда многомерные пространства ничуть не менее реальны, чем привычное нам пространство с тремя измерениями, поскольку мы можем без труда дать ему формальное определение.

Теперь математика многомерных пространств стала чисто алгебраической дисциплиной и основана на явных обобщениях, начинающихся с маломерных пространств. Например, любая точка на плоскости (в двумерном пространстве) может быть описана двумя координатами, а любая точка в трехмерном пространстве – тремя координатами. Отсюда остается сделать короткий шаг к описанию точки в четырехмерном пространстве как набору четырех координат и в более общем плане к определению точки в *n*-мерном пространстве как списку из *n* координат. Тогда само по себе *n*-мерное пространство (*n*-пространство) будет всего лишь набором таких точек.

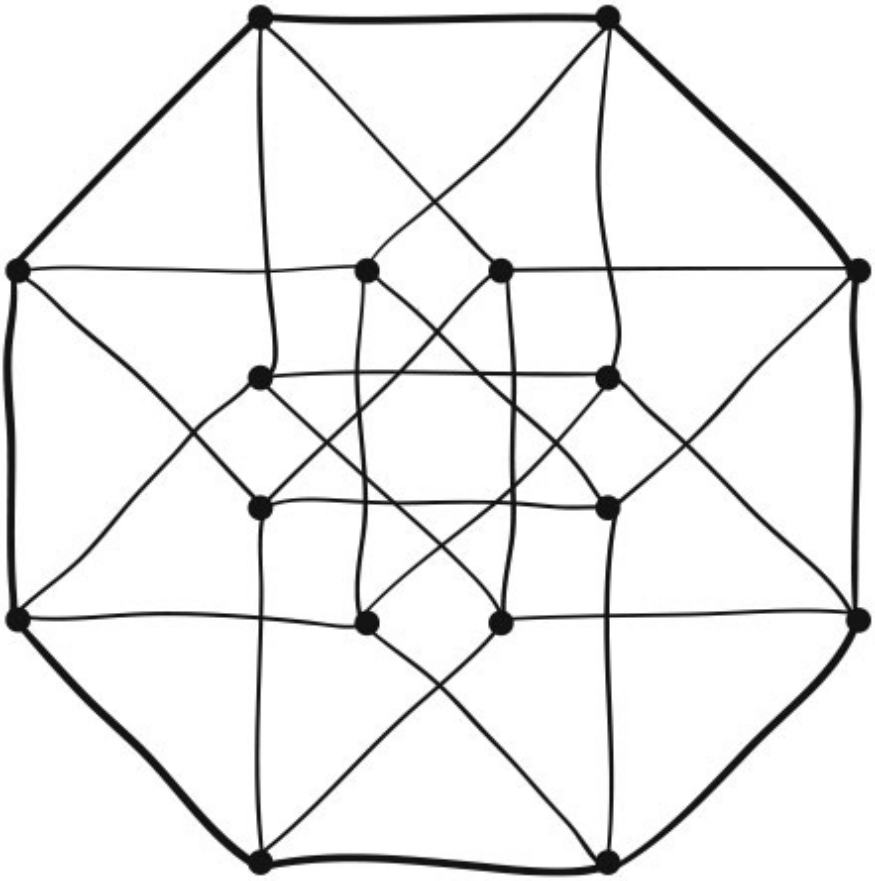
Аналогичные алгебраические операции позволят вычислить расстояние между двумя любыми точками в *n*-пространстве, угол между двумя любыми линиями и т. д. Отныне и впредь главную роль играет воображение: самые обычные геометрические формы в двух или трех измерениях имеют прямые аналоги в *n* измерениях, и чтобы их найти, нужно описать знакомые формы с использованием алгебры координат, а затем расширить это описание до *n* координат.

Например, окружность на плоскости или сфера в трехмерном пространстве состоят из всех точек, что лежат на фиксированном расстоянии (радиус) от выбранной точки (центр). Явным аналогом для *n*-пространства будет всё множество точек, расположенных на фиксированном удалении от выбранной. Используя формулу для расстояний, мы превращаем это в чисто алгебраическое условие, и полученный в результате объект известен как ($n - 1$) – мерная гиперсфера, или ($n - 1$) – сфера. Число измерений уменьшается с *n* до $n - 1$, потому что, например, окружность в двумерном пространстве становится кривой, т. е. одномерным объектом. А сфера в пространстве

является двумерной поверхностью. *Сплошная* гиперсфера в n измерениях называется n-шар. Таким образом, Земля – это 3-шар, а ее поверхность – 2-сфера.

В наше время такая точка зрения называется линейной алгеброй. Она используется не только в математике, но и в других областях науки, особенно в инженерии и статистике. Также она является стандартной техникой вычислений в экономике. Кейли утверждал, что его матрицы вряд ли получат какое-то практическое применение. Конечно, он ошибался.

К 1900-м гг. предсказание Сильвестра воплотилось в жизнь, особенно с освоением тех областей математики и физики, где концепция многомерного пространства стала серьезным подспорьем. Одной из таких областей стала теория относительности Эйнштейна – своего рода гениальный прорыв в четырехмерной геометрии пространства-времени. В 1908 г. Герман Минковский осознал, что три координаты обычного пространства, объединенные с еще одной, временной, как раз и образуют четырехмерное *пространство-время*. Всякая точка в нем называется событием: это некая частица, которая появилась на мгновенье, а потом исчезла. Теория относительности действительно имеет дело с физическими свойствами событий. В традиционной механике точечная частица, движущаяся в пространстве, имеет координаты $(x(t), y(t), z(t))$ в любой момент времени t, и это положение меняется со временем. С точки зрения пространства-времени Минковского собрание таких точек является кривой в пространстве-времени, *мировой линией* этой частицы, и это самостоятельный объект со своими свойствами, существующий всё время. В теории относительности четвертое измерение имеет единственную и неизменную интерпретацию – *время*.



Четырехмерный гиперкуб, проекция на плоскость

Последующее включение силы притяжения в теории относительности потребовало широкого применения революционных римановских геометрий, хотя и модифицированных так, чтобы удовлетворять описанию Минковского для геометрии плоского пространства-времени. То, что происходит с пространством и временем в отсутствие массы, которая вызывает гравитационные искажения, Эйнштейн смоделировал как кривизну.

Математики предпочитали более гибкое понятие размерности и пространства, причем на рубеже XIX–XX вв. сама математика, судя по всему, всё больше требовала принятия многомерной геометрии. Теория функций двух комплексных переменных как естественное продолжение комплексного анализа нуждалась в представлении о пространстве с двумя комплексными измерениями. Но каждое такое измерение сводится к двум действительным измерениям, а значит, нравится вам это или нет, вы рассматриваете четырехмерное пространство.

Римановское многообразие и алгебра многих переменных обеспечили дальнейшую мотивацию для исследований в этом направлении.

Обобщенные координаты

Однако еще одним мощным стимулом к принятию многомерной геометрии стало толкование механики в терминах обобщенных координат, сделанное Гамильтоном в 1835 г. Это исследование было инициировано Лагранжем в его «Аналитической механике» в 1788 г. Механическая система имеет столько же координат, сколько у нее степеней свободы – иными словами, возможностей изменять свое состояние. По сути, число степеней свободы – не что иное, как замаскированное измерение.

Например, необходимо шесть обобщенных координат, чтобы описать конфигурацию элементарного велосипеда: одна для угла, под которым руль крепится к раме, две для угловой позиции каждого из колес, еще одна для педальной оси и еще две для точек вращения педалей. Конечно, велосипед – трехмерный *объект*, но пространство для его возможных *конфигураций* получается шестимерным; и это одна из причин того, почему порой так трудно научиться ездить на велосипеде, пока вы не обретете сноровку. Вашему мозгу необходимо сконструировать внутреннее представление о взаимодействии этих шести переменных – научиться прокладывать курс в шестимерной геометрии велосипед-пространства. Когда велосипед на ходу, приходится следить, соответственно, за шестью скоростями: динамика, по существу, получится *12*-мерной.

К 1920 г. это соперничество физиков, математиков и механиков благополучно разрешилось, и использование геометрического языка для задач со многими переменными – многомерной геометрии – уже не вызывало такого возмущения, разве что у некоторых философов. А к 1950 г. наука продвинулась вперед настолько, что для математиков стало совершенно естественным формулировать всё подряд в n измерениях с самого начала. Ограниченные теории о двух или трех измерениях оказались в списке устаревших и даже нелепых.

Язык многомерных пространств стремительно распространился во все области науки, захватив даже такие отрасли, как экономика и генетика. Сегодняшние вирусологи, например, воспринимают вирусы как точки в пространстве последовательности ДНК, у которых запросто может оказаться несколько сотен измерений. Под этим они

подразумевают, что геном этих вирусов состоит из нескольких сотен оснований ДНК, и тогда геометрический образ вируса оказывается не просто отвлеченной метафорой: он становится эффективным способом решения проблемы.

Ничто из этого, однако, не означает, что существует мир духов, что наконец-то у привидений есть свой дом или что в один прекрасный день нас может (как описал в своей «Флатландии» Эдвин Эбботт) навестить Гиперсфера – существо из Четвертого измерения, принявшее для нас облик сферы с загадочно переменчивыми размерами, способное сжиматься до точки и исчезать из нашей Вселенной. Однако физики, ведущие исследования в теории суперструн, в последнее время склоняются к тому, что на самом деле наша Вселенная может иметь *десять* измерений, а не четыре. По их мнению, мы никогда не замечали еще шесть дополнительных измерений, поскольку те скручены так плотно, что их невозможно обнаружить.

Многомерная геометрия стала одной из самых впечатляющих областей, где, похоже, математики утрачивают всякую связь с реальностью. Коль скоро физическое пространство трехмерно, как может существовать пространство с четырьмя и более измерениями? И даже если их можно описать математически, какой от этого прок?

Главной ошибкой здесь является восприятие математики как очевидного, буквального толкования реальности, наблюдаемой непосредственно. Но фактически мы окружены объектами, которые лучше всего будут описаны с помощью большого количества переменных, «степеней свободы» этих объектов. Например, для описания положения скелета человека требуется 100 переменных. Математически естественное описание таких объектов происходит в терминах многомерных пространств, с одним измерением для каждой переменной.

Математикам потребовалось много времени, чтобы формализовать такие описания, и еще больше на то, чтобы убедить остальных, что от этого есть польза. Сегодня всё это так глубоко вошло во все области науки, что используется практически на рефлекторном уровне. Подходы стандартны для экономики, биологии, физики, инженерии, астрономии… список можно продолжать бесконечно.

Главное преимущество многомерной геометрии в том, что человечество получило возможность визуализировать такие

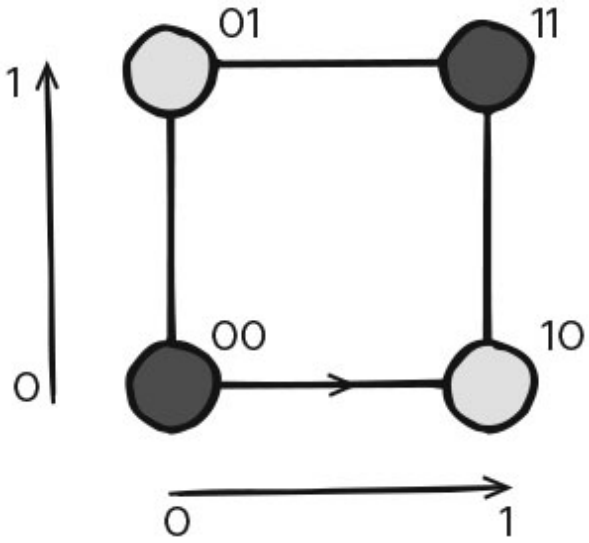
сверхсложные задачи, которые в принципе увидеть нельзя. А поскольку эволюционно наш мозг приспосабливался именно к визуальному мышлению, такой прием чаще приводит к неожиданным прозрениям, гораздо труднее достигаемым другими методами. Математические концепции, изначально не имеющие прямого отношения к реальному миру, часто обладают гораздо более глубокими, хотя и незримыми, связями. И эти скрытые связи делают математику такой полезной.

ЧТО МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДАЕТ НАМ

Прекрасный пример использования многомерных пространств – ваш мобильный телефон. То же относится к выходу в интернет, кабельному или спутниковому телевидению и практически к любой современной технологии, обеспечивающей обмен информацией. Все современные коммуникации – цифровые. Информация – даже разговоры по телефону – переводится в сочетания нулей и единиц – двоичные числа.

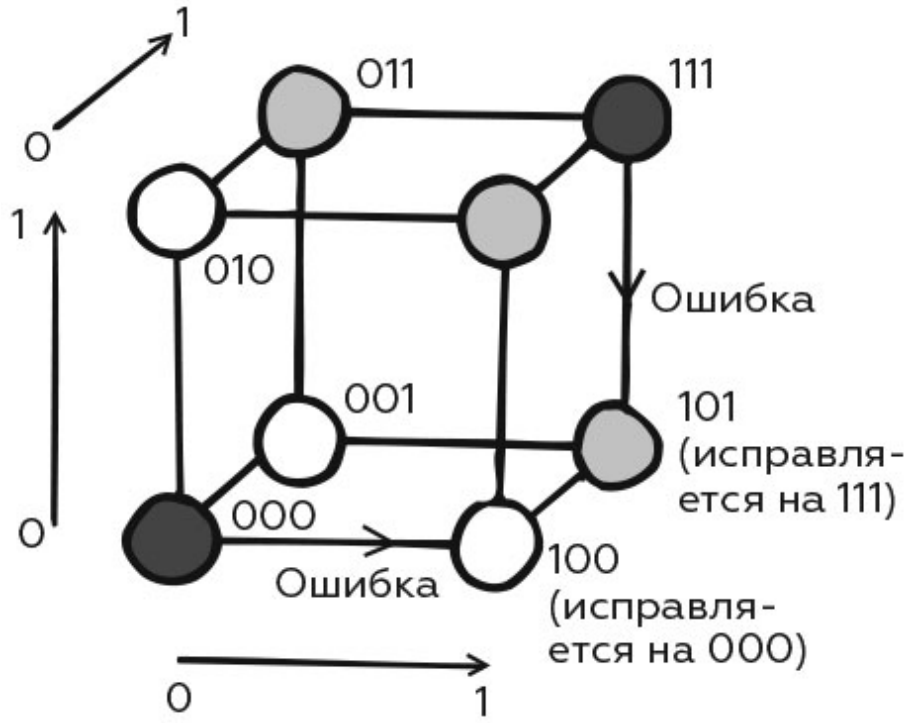
От коммуникаций не будет большого толку, если они ненадежны: отправленное послание должно точно соответствовать полученному. Электрические послания по проводам не могут обеспечить такую надежность из-за помех, возникающих вследствие интерференции или даже космического луча, который может вызвать ошибки. И инженерам-электронщикам пришлось прибегнуть к математическим методам для такой кодировки сигналов, где ошибки будут не только распознаваться, но и исправляться. А основой таких кодов стала математика многомерных пространств.

Такие пространства были открыты, потому что строку, скажем, из десяти двоичных чисел, или бит, такую как 1001011100, выгоднее рассмотреть как точку в десятимерном пространстве с координатами, упрощенными до 0 или 1. Многие важные вопросы о кодах, обнаруживающих и исправляющих ошибки, лучше всего решать в рамках геометрии такого пространства.



Геометрия для пары двоичных чисел

Например, мы можем обнаружить (но не исправить) одну ошибку, если закодируем каждое послание, заменяя каждый 0 на 00 и каждую 1 на 11. Тогда такое послание, как 110100, превратится в 111100110000. Если его получат в виде 11**10**00110000, с ошибкой в четвертом бите, мы поймем: что-то не так, ведь выделенная жирным пара 10 не должна там присутствовать. Но нам неизвестно, должно ли это быть 00 или 11. Это можно точно проиллюстрировать на двумерной фигуре (где 2 – длина, которая соответствует кодовым словам 00 и 11). Рассматривая биты в кодовых словах как координаты, относящиеся к двум осям (соответственно для первой и второй цифр в кодовом слове), мы можем начертить схему, где настоящие кодовые слова 00 и 11 окажутся в диагонально противоположных углах квадрата.



Код, исправляющий ошибки, использует строки длиной 3

Любая ошибка переведет их в кодовые слова на двух других углах – не являющиеся действительными (их мы изначально не включили в код) кодовыми словами. Но поскольку эти углы смежны с обоими настоящими кодовыми словами, разные ошибки могут привести к одному результату. Чтобы получить код, исправляющий ошибки, мы можем использовать кодовые слова длиной 3 и закодировать 0 как 000, а 1 как 111. Теперь кодовые слова находятся по углам куба в трехмерном пространстве. Любая единичная ошибка приведет в результате к соседнему кодовому слову; более того, каждое недействительное кодовое слово соседствует только с одним действительным: 000 или 111.

Такой подход к кодированию цифровых посланий первым предложил Ричард Хэмминг в 1947 г. Геометрическая интерпретация идеи появилась очень скоро, и это стало решающим толчком к развитию еще более эффективных кодов.

Глава 17. Форма логики

Подведение под математику непоколебимого фундамента

Наблюдая за непрерывным ростом науки, некоторые из математиков начали удивляться: где же надежный фундамент, поддерживающий вес этих знаний? Ряд серьезных научных кризисов – особенно дискуссия об основных понятиях исчисления и треволнения вокруг рядов Фурье – показали, что во избежание логических ловушек всякая математическая концепция должна иметь аккуратное и четкое определение. Иначе возведенная над нею башня выводов и заключений может легко рухнуть под ударом логических противоречий из-за неопределенности или двусмысленности.

Сперва такие тревоги касались лишь самых сложных и изощренных идей, таких как ряды Фурье. Но математический мир постепенно понял, что под подозрением может оказаться любая основная идея. И главной среди них была идея числа. Ужасная правда заключалась в том, что математики, положившие столько усилий на глубочайшие исследования свойств чисел, не потрудились ни разу задаться вопросом, что же такое число. И когда дело дошло до логичного определения, они не смогли его сформулировать.

Дедекинд

В 1858 г., читая лекции по исчислению, Дедекинд задался вопросом о самой основе своей темы. Его интересовал не вопрос использования пределов, а сама система действительных чисел. Он опубликовал свои идеи в 1872 г. в труде «Непрерывность и иррациональные числа», указав, что вроде бы явные качества действительных чисел никогда не были доказаны сколько-нибудь строгим образом. В пример он привел уравнение $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Явно оно вытекает из возведения в квадрат обеих сторон равенства. Вот только умножение для иррациональных чисел никогда не было определено. В 1888 г. в своей книге «Что такое числа и для чего они служат?» ученый отметил ряд серьезных пробелов в логическом обосновании системы действительных чисел. Собственно говоря, никто даже не доказал, что такие числа существуют.

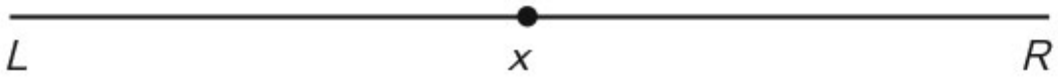
Он также предложил свой способ заполнить пробелы, прибегнув к приему, известному нам как дедекиндовы сечения. Нужно было начать с признанной системы чисел, рациональных, и распространить ее, чтобы получить более широкую систему действительных чисел. Он сперва определил свойства, отличающие действительные числа, нашел способ описать их в ключе рациональных чисел и затем совершил обратную процедуру, интерпретируя эти особенности рациональных чисел как определения для действительных. Этот прием обратного конструирования новых концепций из старых с тех пор применяется часто.

Предположим на миг, что действительные числа существуют. Имеют ли они отношение к рациональным? Некоторые действительные числа – не рациональные, очевидный пример – $\sqrt{2}$. Теперь, хотя оно и не дробь, его можно приблизить сколь угодно близко к рациональному числу. Оно занимает особое место где-то в плотном ряду всех возможных рациональных чисел. Но как мы определим его положение?

Дедекинд понимал, что $\sqrt{2}$ четко разделяет последовательность рациональных чисел на две части: те, что меньше его, и те, что больше. Отчасти это разделение – или *сечение* – определяет $\sqrt{2}$ в рамках рациональных чисел. Единственная загвоздка в том, что мы прибегаем к $\sqrt{2}$ с целью определить две части разреза. Но есть способ это

преодолеть. Рациональные числа больше √2 определенно положительные, и их квадрат больше 2. Рациональные числе меньше √2 – все остальные. Эти два множества рациональных чисел теперь определены без явного использования √2, но точно указывают его положение на прямой действительных чисел.

Дедекинд показал: если предположить, что действительные числа существуют, то сечение, удовлетворяющее этим двум частям, может быть связано с любым действительным числом в последовательности *R* из всех рациональных чисел, б*о*льших этого числа, и последовательности *L* из всех рациональных чисел, меньше этого числа или равных ему. (Последнее условие необходимо для связи сечения с любым *рациональным* числом. Мы ведь не хотим от них отказываться.) Здесь *L* и *R* могут восприниматься как левая и правая части на привычном изображении прямой действительных чисел.



Два множества, *L* и *R*, подчиняются нескольким довольно строгим условиям. Во-первых, каждое рациональное число принадлежит только одному из них. Во-вторых, каждое число во множестве *R* больше, чем любое число во множестве *L*. Наконец, существует техническое ограничение, связанное с рациональными числами как таковыми: *L* может иметь или не иметь самое большое число, а *R* никогда не имеет самого малого. Назовем любую *пару* подмножеств рациональных чисел с такими свойствами *сечением*.

В обратном конструировании не нужно предполагать существование действительных чисел. Вместо этого мы можем использовать сечения для *определения* действительных чисел, так что фактически такое число *является* сечением. Обычно мы не рассматриваем действительные числа именно так, но Дедекинд понял, что при желании это возможно. Главная задача – определить, как складывать и умножать сечения, чтобы действовала арифметика действительных чисел. Оказалось, это просто. Чтобы сложить два сечения (L_1, R_1) и (L_2, R_2), положим, что $L_1 + L_2$ будет множеством всех чисел, получаемым добавлением чисел из L_1 к числам из L_2, и так же определим $R_1 + R_2$. Тогда суммой двух сечений будет сечение ($L_1 + L_2$,

$R_1 + R_2$). Умножение выполняется так же, хотя здесь есть небольшое различие между положительными и отрицательными числами.

Наконец, нам надо убедиться, что арифметика сечений обладает всеми свойствами, ожидаемыми от действительных чисел. К ним относятся стандартные законы алгебры, которые аналогичны свойствам рациональных чисел. Главное свойство, отличающее действительные числа от рациональных, заключается в том, что предел бесконечной последовательности сечений существует (при применении определенной техники). Также существует сечение, соответствующее любому бесконечному расширению десятичных дробей. Это тоже несложно.

Исходя из того, что всё перечисленное возможно, посмотрим, как Дедекинд смог доказать, что $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Мы уже видели, что $\sqrt{2}$ соотносится с сечением (L_1, R_1), где R_1 состоит из всех положительных рациональных чисел с квадратами больше 2. А $\sqrt{3}$ соотносится с сечением (L_2, R_2), где R_2 состоит из всех положительных рациональных чисел с квадратами больше 3. Легко доказать, что произведением этих сечений будет (L_3, R_3), где R_3 состоит из всех положительных рациональных чисел, квадраты которых больше 6. Но это и есть сечение, которое соответствует $\sqrt{6}$. Готово!

Красота подхода Дедекинда в том, что он упрощает все вопросы, относящиеся к действительным числам, до соответствующих вопросов рациональных чисел, точнее, *пары множеств* рациональных чисел. Так мы получаем определение для действительных чисел только в рамках рациональных чисел и операций, относящихся к ним. К тому же действительные числа существуют (в математическом смысле), если существуют рациональные.

А вот небольшая плата за эту простоту: теперь действительное число определяется как пара множеств рациональных чисел – не совсем привычное для нас описание. Если это звучит слишком странно, вспомните, что обычное представление действительного числа – десятичная дробь, состоящая из бесконечной последовательности цифр от 0 до 9.

Концептуально это как минимум так же сложно, как сечение Дедекинда. И правда, непросто представить сумму или произведение двух бесконечных десятичных дробей, ведь обычные арифметические методы сложения или умножения десятичных дробей начинаются с их

правого конца. А когда десятичная дробь бесконечна, она *не имеет* правого конца.

Аксиомы целых чисел

Книга Дедекинда была очень хороша для тренировки базовых навыков, но общие вопросы определения терминов в ней опущены. Она всего лишь сместила фокус с действительных чисел на рациональные. Но откуда нам знать, что *рациональные* числа существуют? Если мы предположим, что существуют целые числа, это просто: определим рациональное число p/q как пару целых чисел (p, q) и составим формулы для сумм и произведений. Если целые числа существуют, то существуют и их пары.

Но откуда нам знать, что существуют целые числа? Кроме знаков + и –, целые числа – обычные натуральные числа (включая 0)[7]. А учесть знаки не составит труда. Иными словами, целые числа существуют, если существуют натуральные.

Но мы так и не пришли к концу. Мы так хорошо знакомы с натуральными числами, что нам и не приходит в голову поинтересоваться, существуют ли на самом деле знакомые нам 0, 1, 2, 3 и т. д.? И если да, то *что это такое*?

В 1889 г. Джузеппе Пеано обошел вопрос существования, воспользовавшись подходом Евклида. В своей книге Евклид вместо спора о существовании точек, линий, треугольников и прочих фигур привел список аксиом – описание свойств, очевидных без сомнений. Ему было не важно, *существуют ли* точки и прочие элементы. Вот гораздо более интересный вопрос: если они существуют, какие свойства вытекают из этого? Итак, Пеано составил свой список аксиом для натуральных чисел. Вот основные из них.

• Число 0 существует.

• Каждое число n имеет следующее за ним $s(n)$, которое мы принимаем как $n + 1$.

• Если $P(n)$ – свойство, такое, что $P(0)$ верно, и каждый раз, когда $P(n)$ верно, то и $P(s(n))$ тоже верно, тогда $P(n)$ верно для любого n (принцип математической индукции).

Затем он определил числа 1, 2 и т. д. с точки зрения этих аксиом, в частности получив:

$1 = s(0)$,

$2 = s(s(0))$

и т. д. И еще он определил базовые арифметические действия и доказал, что они подчиняются обычным законам. В его системе 2 + 2 = 4 – доказуемая теорема, которая констатирует, что $s(s(0)) + s(s(0)) = s(s(s(s(0))))$.

Огромное преимущество такого аксиоматичного подхода в том, что он точно определяет то, что мы должны доказать, если хотим как-то показать, что натуральные числа существуют. Нам лишь надо сконструировать некую систему, удовлетворяющую всем аксиомам Пеано.

Здесь более глубоким вопросом становится значение самого существования для математики. В реальном мире существующим считается объект, который мы можем наблюдать или, если это не удается, сделать вывод о его существовании благодаря тому, что мы *можем* наблюдать. Например, мы знаем о существовании силы притяжения, поскольку можем наблюдать ее эффекты, хотя и не ее саму.

В реальном мире мы можем обоснованно заявлять о существовании двух кошек, двух велосипедов или двух ломтей хлеба. Но с *числом* два всё не так просто. Это не предмет, а идея. В реальном мире мы никогда не встретим число два. Ближе всего к этому можно считать символ «2», написанный, или напечатанный на бумаге, или высветившийся на экране компьютера. Но никто не думает, что символ – то же, что представляемый им предмет. Слово «кот», написанное черным по белому, не кот. Точно так же символ «2» не число два.

Значение слова «число» оказалось неожиданно трудной концептуальной и философской проблемой. Положение усугубляется тем, что все мы превосходно разбираемся в том, как использовать числа. Мы знаем, как они себя ведут, но не знаем, что они собой представляют.

Множества и классы

В 1880-х гг. Готлоб Фреге попытался решить эту концептуальную проблему, конструируя натуральные числа из еще более простых объектов – множеств, или, как он сам назвал их, классов. Его отправной точкой была стандартная ассоциация чисел со счетом. Согласно Фреге, два является свойством этих множеств, и только их, и его можно взаимно однозначно сопоставить со стандартным множеством {*a, b*} с несовпадающими элементами *a* и *b*. Тогда:

{один кот, другой кот}
{один велосипед, другой велосипед}
{один ломоть, другой ломоть}

могут соответствовать {*a, b*}, а значит, все они определены – что бы это ни значило – одинаковым *числом*.

К несчастью, использование списка стандартных множеств в качестве чисел, скорее всего, породит вопросы: слишком легко спутать символ с тем, что он представляет. Но как еще описать свойство этих множеств, которое можно взаимно однозначно сопоставить со стандартным множеством? Что есть это свойство? Фреге посетила превосходная идея. Есть четко определенное множество, связанное с любым свойством, буквально состоящее из всего обладающего этим свойством. Свойство «простой» ассоциируется со множеством *всех* простых чисел; свойство «равнобедренный» – со множеством *всех* равнобедренных треугольников и т. д.

Фреге предположил, что число два есть множество, включающее в себя *все* множества, которые можно взаимно однозначно сопоставить со стандартным множеством {*a, b*}. В более общем виде число является множеством всех множеств, которые можно сопоставить с любым заданным множеством. Так, например, число три – множество: {… {*a, b, c*}, {один кот, другой кот, еще один кот}, {*X, Y, Z*}, …}, хотя, пожалуй, лучше использовать математические объекты вместо котов или букв.

Исходя из этого Фреге открыл, что может подвести под всю арифметику целых чисел логическую основу. Вся она упрощается до явных свойств множеств. Всё это он изложил в своем труде «Основы

арифметики: логически-математическое исследование о понятии числа» в 1884 г. Но, к его великому разочарованию, Георг Кантор, ведущий специалист в области математической логики, отмел эту книгу как бесполезную. В 1893 г. Фреге, не утративший решимости, опубликовал первый том другой книги, «Основные законы арифметики», в которой представил интуитивно правдоподобную систему аксиом арифметики. Пеано просмотрел ее, а все остальные проигнорировали. Через десять лет Фреге наконец-то подготовил к печати второй том, но к тому моменту сам успел обнаружить большой недостаток в своих аксиомах. Другие тоже заметили его недочеты. Том еще не вышел из-под пресса, а уже разразился скандал. Фреге получил письмо от известного философа и математика Бертрана Рассела. Говорилось там примерно следующее: «Дорогой Готлоб, представьте себе множество всех множеств, которые не являются элементом самих себя. Искренне Ваш, Бертран».

Как безупречный логик, Фреге тут же понял намек Рассела – тем более что уже был готов к неприятностям. В целом его подход подразумевал, хотя и без доказательств, что любое описываемое свойство определяет значимое множество, состоящее из объектов, что обладают упомянутым свойством. Но здесь подразумевалось именно свойство, а не элемент множества как таковой, который явно не соответствовал множеству.

ПАРАДОКС РАССЕЛА

Менее формальный вариант парадокса, предложенного Расселом, – брадобрей, который бреет всякого, кто не бреется сам. Кто же тогда бреет его самого? Если он бреется сам, то определенно его бреет сельский брадобрей – т. е. он сам! Если он не бреется сам, его должен брить брадобрей, т. е. опять-таки он сам.

Если не прибегать ко всяким трюкам – например, брадобрей женского пола, – единственный возможный вывод таков: этого брадобрея не существует. Рассел переформулировал этот парадокс в рамках множеств. Допустим, множество X состоит из всех множеств, которые

не являются элементом самих себя. Будет ли тогда *X* элементом самого себя или нет? Если нет, то по определению оно принадлежит *X* – самому себе. Если да и оно элемент себя, то, подобно всем элементам *X*, оно не должно являться элементом самого себя. Но на этот раз выхода нет: женские множества пока не стали частью математических построений.

Мрачный Фреге был вынужден выпустить приложение к своему грандиозному опусу, в котором обсуждал возражения Рассела. Он нашел кратковременное решение: исключить из царства множеств те из них, которые являются элементами самих себя. Но даже ему самому это предложение не показалось достойным.

Рассел же попытался заполнить пробел Фреге в построении натуральных чисел с помощью множеств. Его идея состояла в ограничении того типа свойств, которые могут быть использованы для определения множества. Конечно, ему нужно было найти доказательство, что этот ограниченный тип свойств не приведет к парадоксу. В сотрудничестве с Альфредом Нортом Уайтхедом он пришел к сложной и искусственной *теории типов*, казавшейся достаточно объективной по крайней мере им самим. Они изложили свой подход в увесистом трехтомнике «Принципы математики», выпущенном в 1910–1913 гг. Определение числа два попало в конец первого тома, а теорема 1 + 1 = 2 доказана на с. 86 второго тома. Но и «Принципам математики» не суждено было положить конец фундаментальным спорам. Теория типов сама по себе была спорной. Математики желали получить что-то более простое и изящное.

Кантор

Эти исследования фундаментальной роли счета как основы для чисел привели к одному из самых нашумевших открытий в математической науке – теории Кантора о *трансфинитных числах* – разных размерах бесконечности.

Бесконечность, в самых разных ипостасях, неизбежна в математике. Здесь нет самого большого натурального числа – потому что с добавлением единицы мы всегда получаем число еще большее, – а значит, существует бесконечно много натуральных чисел. Геометрия Евклида работает на бесконечной плоскости, и он доказал, что существует бесконечное множество простых чисел. В преддверии исчисления несколько человек, в том числе и Архимед, сочли полезным рассмотреть площадь и объем как сумму бесконечно многих и бесконечно тонких слоев. Когда исчисление изобрели, картина была примерно такой же: применялись эвристические методы для вычисления площадей и объемов, даже если имеющиеся доказательства говорили об ином.

Эти проявления бесконечности можно перефразировать в конечных терминах, чтобы избежать философских споров. Например, вместо того чтобы говорить «натуральных чисел бесконечно много», мы можем сказать «не существует самого большого натурального числа». Второе утверждение логически эквивалентно первому, при этом в нем нет явного упоминания бесконечности. По сути здесь бесконечность рассматривается как процесс, который можно продолжить без всяких конкретных ограничений, но фактически *не завершенный*. Такую бесконечность философы называют потенциальной. В противовес этому явное использование бесконечности как математического объекта само по себе оказывается актуальной бесконечностью.

Предшественники Кантора обратили внимание на то, что актуальные бесконечности обладают парадоксальными чертами. В 1632 г. Галилей написал свой «Диалог о двух системах мира», в котором два персонажа, проницательный Сальвиати и смышленый мирянин Сагредо, обсуждают причину приливов с геоцентрической и гелиоцентрической точек зрения. По требованию церкви все

упоминания о приливах были вычеркнуты, и книга превратилась в гипотетическое словесное упражнение, содержащее мощные доводы в пользу гелиоцентрической теории Коперника. Персонажи между делом обсуждали и некоторые парадоксы, связанные с бесконечностью. Сагредо вопрошал: «Может ли быть чисел больше, чем квадратов?» – и указывал, что, коль большинство целых чисел не являются полными квадратами, ответ должен быть «да». Сальвиати отвечал, что всякое число можно однозначно сопоставить с его квадратом:

1	2	3	4	5	6	7	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	49	…

Таким образом число целых чисел должно быть таким же, как и число квадратов, и, значит, ответ «нет».

Кантор преодолел эти препятствия, указав, что в диалоге персонажей слово «больше» используется с двумя разными смыслами. Сагредо указывает, что множество всех квадратов является собственным подмножеством множества всех целых чисел. Позиция Сальвиати не столь однозначна: он возражает, что существует однозначное соответствие между множеством квадратов и множеством всех целых чисел. Это два разных утверждения, и оба могут быть верны – без каких-либо выводов.

Так Кантор пришел к изобретению арифметики бесконечности, которая объясняла предыдущие парадоксы и в то же время предлагала новые. Эта работа стала частью более обширной программы, теории множеств, *Mengenlehre* (от нем. Menge – множество или скопление). Кантор стал размышлять о множествах из-за некоторых сложных вопросов Фурье-анализа, так что его идеи уходят корнями в широко признанные математические теории. Однако полученные им ответы оказались столь странными, что многие из математиков того времени предпочти их проигнорировать. В то же время другие ученые сразу оценили их важность, особенно Давид Гильберт, утверждавший, что «никто не сможет изгнать нас из рая, созданного Кантором».

Размер множества

Отправной точкой для Кантора стала наивная концепция *множества* как совокупности объектов, или его элементов. Один из способов описать множество – перечисление его членов с использованием фигурных скобок. Например, множество всех натуральных чисел от 1 до 6 будет описано так:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

В другом варианте множество может быть описано с помощью правила для его элементов:

$$\{n\colon 1 \leq n \leq 6, \text{ где } n \text{ – натуральное число}\}.$$

Множества, определенные выше, идентичны. Первое обозначение ограничено конечным множеством, второе не имеет такого ограничения. Таким образом, множества

$$\{n\colon n \text{ – натуральное число}\}$$

и

$$\{n\colon n \text{ – полный квадрат}\}$$

точно указаны и оба бесконечны.

Самое простое, что вы можете сделать со множеством, – пересчитать его элементы. Насколько оно велико? Множество {1, 2, 3, 4, 5, 6} имеет шесть элементов. То же относится к множеству {1, 4, 9, 16, 25, 36}, состоящему из соответствующих квадратов. Мы говорим, что *мощность* множества равна 6, и называем 6 *кардинальным числом*. (Есть и другая концепция: ординальное (порядковое) число, связанное с построением чисел по порядку, и поэтому прилагательное «кардинальное» здесь не лишнее.) Множество всех натуральных чисел невозможно пересчитать таким образом, но Кантор отметил, что вы можете установить между множеством всех натуральных чисел и множеством всех квадратов взаимно однозначное соответствие,

используя ту же схему, что и Галилей. Тогда каждое натуральное число n окажется в паре со своим квадратом n^2.

Кантор определил, что два множества *равномощные* (не его термин), если между ними есть взаимно однозначное соответствие. Если множества конечны, это свойство эквивалентно одинаковому количеству элементов. Но если они бесконечны, то нет смысла говорить о количестве элементов, а идея равномощности обретает очень важный смысл. Но Кантор пошел дальше. Он предложил систему *трансфинитных чисел*, или *бесконечных кардинальных чисел*, которые дали возможность определять, сколько элементов содержится в бесконечном множестве. Более того, два множества равномощны тогда и только тогда, когда они имеют равное количество элементов – равные кардинальные числа.

Начальной точкой стал новый вид чисел, который Кантор обозначил символом $\aleph_0$. Это буква алеф из иврита с нижним индексом 0, или алеф-ноль. Это число по определению является кардинальным для множества всех натуральных чисел. Но, настаивая на том, что равномощные множества также имеют одно и то же кардинальное число, Кантор затем рассудил, что всякое множество, для которого может быть установлено взаимно однозначное соответствие со множеством натуральных чисел, также должно иметь мощность $\aleph_0$. Например, множество всех квадратов имеет мощность $\aleph_0$. То же относится ко множеству всех четных чисел:

1	2	3	4	5	6	7	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	4	6	8	10	12	14	…

и множеству всех нечетных:

1	2	3	4	5	6	7	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	3	5	7	9	11	13	…

Одно из следствий этого определения таково: меньшее множество может иметь мощность, равную мощности б*о*льшего множества. Но здесь в определении Кантора не было логических противоречий, он решил считать эту особенность естественным следствием своей идеи и не прогадал. Главное – не считать, что бесконечные кардинальные числа могут вести себя точно так же, как и конечные. Да и с какой стати? Ведь они не конечны!

Как вы думаете, количество целых чисел (и положительных, и отрицательных) больше количества натуральных? Будет ли их вдвое больше? Нет, потому что мы можем сопоставить эти два множества вот так:

1	2	3	4	5	6	7	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	–1	2	–2	3	–3	…

Арифметика бесконечных кардинальных чисел тоже довольно странная. Например, мы только что увидели, что множества четных и нечетных натуральных чисел имеют кардинальное число $_0$א. Поскольку у них нет одинаковых элементов, кардинальное число их объединения – множества, полученного в результате их совмещения, – должно быть $_0$א $_0$א +. Номы знаем, что представляет собой такое объединение: это натуральные числа с кардинальным числом $_0$א. Видимо, придется заключить:

$$_0א = {}_0א + {}_0א.$$

Так мы и поступим. Но и здесь нет противоречий: мы не можем поделить $_0$א, чтобы получить 1 + 1 = 1, потому что $_0$א не является натуральным числом. Такое деление невозможно, поскольку не имеет смысла. Действительно, это равенство показывает, что деление на $_0$א не имеет смысла. И снова мы принимаем это как плату за прогресс.

Всё это очень хорошо, однако кому-то может показаться, что $_0$א не более чем новый забавный символ для старой доброй бесконечности и по сути ничего нового здесь не сказано. Разве это не тот случай, когда

все бесконечные множества имеют кардинальное число $\aleph_0$? Разве все бесконечности не равны?

Один из кандидатов на бесконечное кардинальное число, большее, чем $\aleph_0$, – точнее, на бесконечное множество, для которого невозможно установить взаимно однозначное соответствие с множеством целых чисел, – это множество всех рациональных чисел, обычно обозначаемое Q. В конце концов, есть бесконечно много рациональных чисел в промежутке между двумя любыми последовательными целыми числами, и здесь уже не работает та хитрость, которая помогала нам с целыми числами.

Однако в 1873 г. Кантор доказал, что Q также имеет кардинальное число $\aleph_0$. Взаимно однозначное соответствие основательно перемешивает числа, но никто и не говорил, что они должны располагаться согласно порядковым номерам. Кажется, всё выглядит замечательно: всякое бесконечное множество имеет кардинальное число $\aleph_0$.

В том же году Кантор совершил важный прорыв. Он доказал, что последовательность $\mathbb{R}$ всех действительных чисел не имеет кардинального числа $\aleph_0$. Неожиданную теорему об этом он опубликовал в 1874 г. Так что даже в неординарном понимании Кантора существует *больше* действительных чисел, чем целых. Одна бесконечность может быть больше другой.

Насколько велика мощность действительных чисел? Кантор надеялся, что это будет $\aleph_1$, следующее наибольшее кардинальное число после $\aleph_0$. Но он не смог этого доказать и потому обозначил новое кардинальное число C, от первой буквы слова «континуум». Ожидаемое уравнение $C = \aleph_1$ было названо континуум-гипотезой. Математики сумели вывести соотношение между C и $\aleph_0$ только в 1960 г., когда Пол Коэн доказал, что ответ зависит от аксиом, которые вы выбираете для теории множеств. С одним разумным набором аксиом два кардинальных числа равны. Но с набором других, не менее обоснованных, аксиом они будут разными.

Обоснованность равенства $C = \aleph_1$ зависит от выбранных аксиом, но связанное с ним равенство от этого не зависит. Это равенство $C = 2^{\aleph_0}$. Для любого кардинального числа *A* мы можем определить 2^A как

кардинальное число множества (мощностью A) всех его подмножеств. И мы можем очень легко доказать, что 2^A всегда больше A. Это значит, что не только некоторые бесконечности больше, чем другие, но и нет бесконечно большого кардинального числа.

Противоречия

Однако величайшей целью фундаментальной математики было все-таки не доказательство существования математических идей. Гораздо важнее было доказать, что математика логически последовательна. Ведь всем сегодня понятно: можно выстроить некоторую четкую последовательность безупречно правильных логических шагов, приводящую к абсурдному выводу. Может, вы соберетесь доказать, что 2 + 2 = 5 или 1 = 0, например. Или что 6 – простое число, или что π = 3.

Ведь может показаться, что одно незначительное противоречие будет иметь ограниченные последствия. В быту люди вообще спокойно воспринимают такие противоречия, заявляя в один момент, что глобальное потепление уничтожает планету, а в другой – что авиакомпании-лоукостеры – гениальное изобретение. Но для математики последствия не могут быть ограниченными, и вы не избежите логических противоречий, просто закрыв на них глаза. В математике, как только что-то доказано, вы можете использовать это для других доказательств. Доказательство того, что 0 = 1, повлечет еще больше неприятностей. Например, утверждение, будто все числа равны. Если x – любое число, то сначала умножим обе части равенства 0 = 1 на x. Тогда 0 = x. И если y – любое другое число, то 0 = y. Значит, $x = y$.

Хуже того, стандартный метод доказательства от противного означает, что может быть доказано что угодно, если доказано, что 0 = 1. Чтобы доказать Великую теорему Ферма, мы рассуждаем так.

Предположим, что Великая теорема Ферма неверна.

Тогда 0 = 1.

Противоречие.

Значит, теорема Ферма верна.

Если бы было верно неудовлетворительное равенство [0 = 1], этот метод доказал бы, что Великая теорема Ферма неверна.

Предположим, что Великая теорема Ферма неверна.

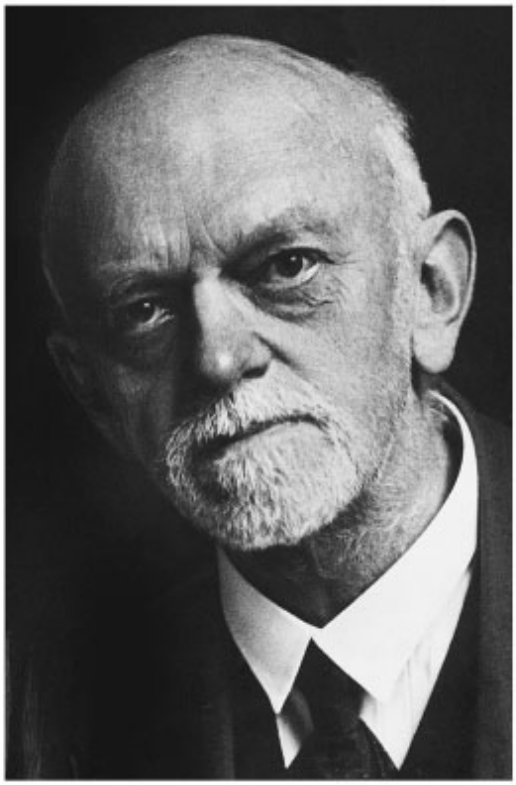
Тогда 0 = 1.

Противоречия нет.

Значит, теорема Ферма неверна.

Коль скоро всё правда – и при этом ложь, о чем вообще может идти речь? Вся математика превращается в пустую и глупую игру.

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ 1862–1943



Давид Гильберт окончил в 1885 г. университет в Кенигсберге, защитив сразу свою диссертацию по теории инвариантов. Он работал в университете, пока не стал профессором в Гёттингене в 1895 г. Но он продолжал развивать теорию инвариантов, доказав свою теорему о базисе в 1888 г. Его методы отличались от принятых в то время способов исследования абстрактным подходом, и один из ведущих ученых того времени, Пауль Гордан, вообще счел его труды неудовлетворительными. Перед публикацией в авторитетном математическом журнале Mathematische Annalen Гильберт переработал свою статью, после чего Клейн назвал ее «самой важной работой по общей алгебре из всего, что когда-либо публиковал этот журнал».

В 1893 г. Гильберт начал писать более всеобъемлющую монографию по теории чисел под названием «Отчет о числах». Хотя изначально целью было обобщение уже накопленных сведений, ученый включил в статью много собственных открытий, ставших позже основой для того, что сейчас нам известно как теория полей классов.

К 1899 г. он снова поменял направление исследований и занялся аксиоматическим обоснованием геометрии Евклида. В 1923 г. на Втором международном конгрессе математиков в Париже он представил список из 23 главных нерешенных проблем. Этот список, известный как проблемы Гильберта, оказал решающее влияние на главные направления математики в последующие годы.

Примерно в 1909 г. его работа по интегральным уравнениям привела к открытию *гильбертовых пространств*, сейчас составляющих основу квантовой механики. Также в статье от 1915 г. он подошел вплотную к открытию уравнений Эйнштейна для общей теории относительности. Он добавил в доказательство примечание о том, что его статья согласуется с уравнениями Эйнштейна. Из-за этого сложилось ошибочное убеждение о том, что Гильберт якобы предвосхитил открытие Эйнштейна.

В 1930 г. Гильберт ушел в отставку и получил титул почетного гражданина Кенигсберга. Его речь на церемонии заканчивалась словами: «Мы должны знать. Мы будем знать» – кратким выражением его веры в математику и решимости справиться с любыми проблемами.

Гильберт

Следующий важный шаг был сделан Давидом Гильбертом, пожалуй, самым великим математиком своего времени. Он имел привычку заниматься одной областью математики примерно десять лет, полируя решения основных задач, а затем переходить в другую. По убеждению Гильберта, рано или поздно удастся доказать, что математика никогда не может привести к логическому противоречию. Также он осознал, что в этом проекте не будет пользы от физического восприятия. Если математика противоречива, то должно быть возможно доказать, что 0 = 1, и тогда физическая интерпретация уравнения будет: 0 коров = 1 корова, т. е. коровы могут растворяться в воздухе, как дым. Это непохоже на правду. Но нет никакой гарантии, что математика натуральных чисел обязана отвечать физике коров, или, по крайней мере, нельзя себе представить, что коровы способны внезапно исчезнуть (это может произойти в квантовой механике, но с крайне малой вероятностью). В конечной Вселенной числу коров есть предел, но нет предела в математике количеству целых чисел. Значит, наша интуиция может оказаться обманчивой, и ее следует игнорировать.

Гильберт пришел к такой точке зрения в своей работе над аксиоматическим обоснованием евклидовой геометрии. Он обнаружил в системе аксиом Евклида логические недостатки и понял, что Евклид был введен в заблуждение своим зрением. Поскольку он воспринимал линию как длинный тонкий предмет, окружность как круг и точку как крапинку, он безоговорочно признавал за этими предметами определенные свойства, не придавая им форму аксиом. После нескольких попыток Гильберт сумел составить список из 21 аксиомы и обсудил их роль в евклидовой геометрии в 1889 г. в своем труде «Основания геометрии».

Гильберт также настаивал, что логический вывод должен быть обоснованным независимо от особенностей его интерпретации. Всё, что удовлетворяет какой-то интерпретации аксиом, но не удовлетворяет другой, чревато логическими ошибками. И именно этот подход к аксиоматике, а не частные исследования геометрии стал в итоге самым весомым вкладом Гильберта в основания математики. Его точка зрения повлияла на саму суть математики, делая ее намного проще – и

респектабельнее – при изобретении новых концепций путем составления для них списка аксиом. Большинство абстрактных исследований в математике начала XX в. исходит как раз из позиции Гильберта.

Часто говорят, что Гильберт отстаивал утверждение, будто математика – отвлеченная игра в символы, но это преувеличение. Гильберт считал, что если вы хотите подвести под свою идею надежную логическую основу, следует рассуждать о ней так, *как если бы* она была отвлеченной игрой в символы. Всё остальное не имеет отношения к логической структуре. Но ни один человек, достаточно серьезно относящийся к математическим открытиям Гильберта и имеющий представление о его беззаветной преданности науке, не сказал бы, что этот ученый считал, будто дело его жизни – это отвлеченная игра.

ЧТО ЛОГИКА ДАЛА ИМ

Чарльз Лютвидж Доджсон, более известный как Льюис Кэрролл, использовал свои формулировки для раздела математической логики, известного нам как *логика высказываний*, чтобы составлять и решать логические загадки. Типичный пример такой формулировки он приводит в своем труде «Символическая логика» от 1896 г.

• Никто из тех, кто действительно ценит Бетховена, не станет шуметь во время исполнения «Лунной сонаты».

• Морские свинки безнадежно невежественны в музыке.

• Те, кто безнадежно невежествен в музыке, не станут соблюдать тишину во время исполнения «Лунной сонаты».

Вывод таков: ни одна морская свинка не ценит Бетховена. Такая форма логического построения называется силлогизмом и уходит корнями в классические труды древних греков.

Преуспев в геометрии, Гильберт обратил взор на гораздо более амбициозный проект: подвести под всю математику непоколебимый логический фундамент. Для этого он внимательно изучал труды современных ему логиков и составил подробную программу для того,

чтобы раз и навсегда привести в порядок основания математики. В дополнение к доказательству того, что математика свободна от противоречий, он полагал, что нерешаемых проблем не существует в принципе и любое математическое утверждение может быть или доказано, или опровергнуто. Успех на первых порах убедил Гильберта в том, что он на верном пути и приблизился к своей основной цели.

Гёдель

Но нашелся всё же логик, которого так и не убедили доводы Гильберта в пользу того, что математика логически последовательна. Его звали Курт Гёдель, и его беспокойство по поводу программы Гильберта навсегда изменило наше отношение к математической истине.

До Гёделя математика просто считалась верной – и это был высший пример истины, потому что истина утверждения 2 + 2 = 4 была чем-то из сферы чистой мысли, независимой от физического мира. Математические истины не могут быть опровергнуты дальнейшими экспериментами. В этом смысле они превосходят физические истины вроде ньютоновского закона о силе гравитационного притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния, опровергнутого наблюдениями за движением в перигелии Меркурия, которые подтверждают новую теорию гравитации, предложенную Эйнштейном.

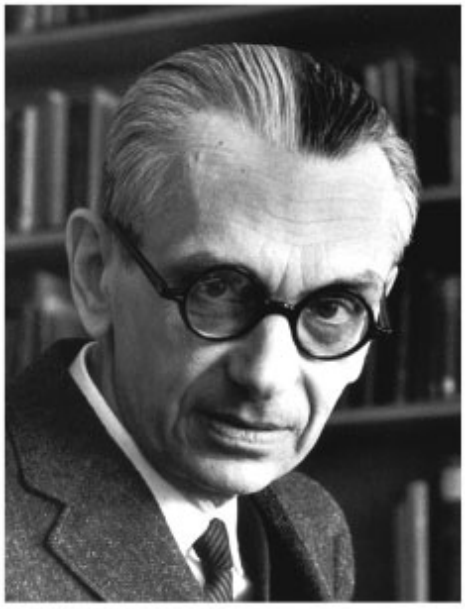
Благодаря Гёделю математическая истина стала восприниматься как иллюзия. Существуют лишь математические *доказательства*. Их внутренняя логика может быть безупречной, но при этом они существуют в более широком контексте фундаментальной математики, где нет гарантий, что игра в целом вообще имеет смысл. Гёдель не просто предположил это, – он это доказал. По сути, два его достижения в совокупности разрушили до основания аккуратную, оптимистичную программу Гильберта.

Гёдель доказал, что если математика логически последовательна, то доказать это невозможно. И не потому, что он сам не смог найти доказательство, а потому, что *доказательства не существует*. И если вдруг, паче чаяния, вам удастся доказать, что математика последовательна, следом тут же придет доказательство тому, что это не так. Он также доказал, что ряд математических утверждений не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты. И вновь не потому, что он лично не смог этого добиться, но потому, что это *невозможно*. Утверждения такого рода называются *неразрешимыми*.

Он доказал эти утверждения изначально в рамках признанных логических математических формулировок, принятых Расселом и Уайтхедом в их «Принципах математики». Поначалу Гильберт

надеялся, что есть выход: надо просто найти более прочный фундамент. Но когда логики ознакомились с работой Гёделя, то очень быстро поняли, что те же идеи сработают для *любой* логической формулировки в математике, достаточно строгой, чтобы ясно выразить основные понятия арифметики.

КУРТ ГЁДЕЛЬ 1906–1978



В 1923 г., когда Гёдель поступил в университет в Вене, он еще не мог выбрать, изучать ли ему математику или физику. На его решение повлияли лекции парализованного Филиппа Фуртвенглера (брата известного дирижера и композитора Вильгельма). Сам Гёдель с детства был слаб здоровьем, и воля Фуртвенглера, сумевшего преодолеть физическую немощь, произвела на него большое впечатление. На семинарах под руководством Морица Шлика Гёдель начал изучать «Введение в математическую философию» Рассела, и тогда ему стало окончательно ясно, что его будущее связано с математической логикой.

Его докторская диссертация от 1930 г. доказывала, что одна ограниченная логическая система – исчисление высказываний первого порядка – является полной. Всякая

истинная теорема может быть доказана и всякая ложная – опровергнута. Больше всего он известен благодаря доказательству гёделевых теорем о неполноте. В 1931 г. Гёдель опубликовал свою судьбоносную статью «О принципиально неразрешимых положениях в системе Principia Mathematica и родственных ей системах». В ней он доказывал, что ни одна система аксиом не будет логически полной для безупречной формализации математики. В 1931 г. он вступил в дискуссию о своей работе с логиком Эрнстом Цермело, но встреча ученых прошла неудачно, возможно потому, что Цермело успел прийти к таким же открытиям, только не смог их опубликовать.

В 1936 г. Шлик погиб от руки студента-нациста, и у Гёделя случился нервный срыв (уже второй). Оправившись от болезни, Гёдель выступил с несколькими лекциями в Принстоне. В 1938 г. он вопреки желанию матери женился на Адели Поркерт и вернулся в Принстон после включения Австрии в состав Германии. После начала Второй мировой войны Гёдель из опасений быть призванным на службу в немецкую армию эмигрировал в США, пробираясь через Россию и Японию. В 1940 г. он получил второй плодотворный результат, доказав, что отрицание континуум-гипотезы Кантора недоказуемо в стандартной аксиоматике теории множеств.

Он получил гражданство США в 1948 г. и провел остаток жизни в Принстоне. С годами он всё больше опасался за свое здоровье, пока не убедил себя в том, что кто-то пытается его отравить. Он отказался от пищи и скончался в больнице. До самого конца он любил вести философские диспуты со своими посетителями.

Любопытным следствием открытий Гёделя стал вывод, что всякая аксиоматическая система в математике должна быть неполна и вы никогда не сможете написать конечный список аксиом, который однозначно определит все истинные и ложные теоремы. Исключения не было: программа Гильберта не работала. Поговаривают, что сам Гильберт пришел в ярость, впервые услышав о работе Гёделя. Однако гневаться скорее стоило на себя, ведь основная идея в работе Гёделя

была безупречна. (Техническое воплощение этой идеи оказалось очень сложным, но Гильберт всегда отлично справлялся с такими трудностями.) Скорее всего, Гильберт понял, что он должен был предвидеть появление теорем Гёделя.

Рассел свел на нет значение книги Фреге своим логическим парадоксом о сельском брадобрее, который бреет всякого, кто не бреется сам: множество всех множеств, не являющееся элементом самого себя. Гёдель свел на нет значение программы Гильберта другим логическим парадоксом – человека, который сказал: это утверждение ложно. По сути, это неразрешимое утверждение Гёделя – на котором строится всё остальное – теорема Т, которая утверждает: «Эта теорема не может быть доказана».

Если всякая теорема не может быть ни доказана, ни опровергнута, то утверждение Гёделя Т противоречиво в обоих случаях. Предположим, Т можно доказать. Тогда Т утверждает, что Т не может быть доказано, – противоречие! А если Т можно опровергнуть, то утверждение Т ложно, и будет ошибкой утверждать, что Т не может быть доказано. Получается, Т можно доказать, – снова противоречие. Следовательно, предположение о том, что всякую теорему можно доказать или опровергнуть, говорит нам, что Т может быть доказано тогда и только тогда, когда оно не может быть доказано.

К чему же мы пришли?

Теоремы Гёделя изменили наш взгляд на логические основания математики. Они заставили предположить, что кажущиеся нам сейчас неразрешимыми проблемы могут вообще не иметь решения: ни подтверждающего их, ни опровергающего, а вечно пребывать в чистилище неразрешимости. И такими предстают перед нами очень многие интересные проблемы. Однако эффект от работ Гёделя на практике так и не вышел далеко за пределы фундаментальной математики, в лоне которой и появился на свет. Математики продолжают искать доказательства для гипотез Пуанкаре и Римана, не жалея времени на открытие новых доводов за и против. Они отдают себе отчет в том, что проблема может оказаться неразрешимой, и даже могут заняться поисками доказательств этой неразрешимости, если найдут исходную точку. Однако большинство из известных нам неразрешимых проблем манят ученых именно неразрешимостью, и вряд ли кому-то удастся ее доказать.

ЧТО ЛОГИКА ДАЕТ НАМ

Важнейший вариант гёделевых теорем о неполноте был открыт Аланом Тьюрингом. Их анализ очертил путь для создания первых компьютеров. В своей работе On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem («О вычислимых числах, приложение к проблеме разрешения»), опубликованной в 1936 г., Тьюринг предложил формализацию алгоритмических вычислений – следующую заранее написанному алгоритму – в рамках так называемой машины Тьюринга. Это математическая идеализация устройства, которое пишет символы 0 и 1 на движущейся ленте, подчиняясь конкретным правилам. Он доказал, что проблема остановки машины Тьюринга – выполнится ли окончательное вычисление для данного ввода данных – *неразрешима*. А значит, нет такого алгоритма, который бы предсказал, остановится ли вычисление или нет.

Тьюринг доказал свой результат, предположив, что проблема остановки разрешима, и построив алгоритм, который останавливается тогда и только тогда, когда не останавливается. Вот и противоречие. Его результат показывает, что существуют ограничения для вычислимости. Некоторые философы расширили эти идеи для определения пределов рационального мышления, и было выдвинуто предположение, что сознание не может функционировать алгоритмически. Однако их аргументы пока не так уж и убедительны. Они показали, что наивно полагать, будто мозг работает как современный компьютер, хотя это не значит, что компьютер не может имитировать работу мозга.

По мере того как на основе предшествующих теорий математики постоянно строили всё новые конструкции, одна сложнее другой, сверхструктура математики начала раскалываться из-за нераспознанных предположений, которые на поверку оказались ложными. Для предотвращения коллапса требовалась серьезная работа по укреплению фундамента.

Последующие работы углубились в истинную природу чисел, двигаясь вспять от комплексных чисел к действительным, рациональным и, наконец, натуральным. Но и там процесс не закончился. Сами числовые системы подверглись пересмотру с точки зрения еще более простых составляющих – множеств.

Теория множеств принесла немало преимуществ, включая разумную, хотя и неортодоксальную систему бесконечных чисел. Она также открыла несколько фундаментальных парадоксов, связанных с понятием множества. Их решение не стало, как надеялся Гильберт, полным обоснованием аксиоматической математики и доказательством ее логической последовательности. Но оно доказало, что математика по природе своей имеет ограничения и некоторые задачи *вообще не имеют решения*. В результате нам пришлось кардинально изменить свое отношение к понятиям математической истины и определенности. И это прекрасно: лучше жить в осознании пределов наших возможностей, чем в обманчивом раю.

Глава 18. Насколько это вероятно?

Рациональный подход к случайности

В XX и начале XXI в. **математика развивалась** взрывными темпами. За последние 100 лет в ней было сделано больше открытий, чем за всю предыдущую историю человечества. Даже для краткого их перечисления потребуются тысячи страниц, так что придется выбирать лишь некоторые примеры из обилия доступных сведений.

Одна из самых юных областей математики – теория вероятностей, изучающая возможности появления случайных событий. Это математика неопределенности. Первые робкие шаги делались на протяжении долгих веков: это и попытки вычислить с помощью комбинаторики шансы выигрыша в азартных играх, и методы повышения точности астрономических наблюдений, несмотря на ошибки наблюдателей, но только к началу XX в. теория вероятностей приобрела статус самостоятельной науки.

Вероятность и статистика

В настоящее время теория вероятностей – обширнейшая область математики, и ее прикладная ветвь, статистика, оказывает важное влияние на повседневную жизнь – возможно, более значительное, чем любой из прочих основных разделов математики. Статистика стала одним из главных аналитических методов даже в медицине. Ни одно лекарственное средство не допускается на рынок и ни один метод лечения не разрешается в больнице, пока клинические испытания не докажут их полную безопасность и эффективность. Здесь безопасность относительна: лечение может быть предложено больным, страдающим от смертельно опасного недуга, когда шансы на успех слишком малы, но не в менее тяжелых случаях.

Также теория вероятностей чаще всех прочих областей математики страдает от неверного толкования и искажений. Но ее точное и разумное применение приносит человечеству неоценимую пользу.

Игра случая

Некоторые вопросы из теории вероятностей уходят корнями в Античность. Из Средних веков до нас дошли записи дискуссий о шансе выбросить различные числа на двух игральных костях. Чтобы лучше представить себе, как это работает, начнем с одной кости. Предположим, она не доработана[8] – что очень трудно доказать – и на ней шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, которые выпадают одинаково часто в конечном счете при длительной игре. В короткой игре такое равноправие невозможно: первый бросок, например, даст в результате только одно из чисел. Даже после шести бросков вы, скорее всего, не получите по одному разу каждое из чисел. Но в длинных сериях бросков, или попыток, мы вправе ожидать появления каждого числа примерно в каждом шестом броске, т. е. вероятность равна $^1/_6$. Если этого не происходит, то у кости, вероятно, смещен центр тяжести.

Событие с вероятностью 1 достоверно, а с вероятностью 0 – невозможно. Все вероятности лежат между 0 и 1, и вероятность события обозначает долю в числе попыток, с которой происходит данное событие.

Вернемся к вопросу из Средних веков. Предположим, мы одновременно бросаем два кубика (как во многих играх – от костей до «Монополии»). Какова вероятность того, что сумма очков на них равна 5? По результатам вычислений с огромным числом аргументов и даже нескольких экспериментов получено число $^1/_9$. Почему? Предположим, мы взяли две кости, красную и синюю. На каждой из них может независимо выпасть шесть разных чисел, итого получаем 36 возможных пар, и все с одинаковой вероятностью. Сочетания (красная + синяя), дающие 5, – 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1; это отдельные случаи, поскольку синяя кость выдает разные числа при каждом броске, как и красная. Значит, при большом количестве бросков мы ожидаем получить сумму, равную 5, в четырех случаях из 36: вероятность равна $4/36 = {}^1/_9$.

Другая давняя практическая проблема – как поделить ставки в азартной игре, если она по какой-то причине прервалась. Алгебраисты Возрождения Пачоли, Кардано и Тарталья оставили записи по этому

вопросу. Позже шевалье де Мере задал тот же вопрос Паскалю, и тот обменялся с Ферма несколькими письмами на эту тему.

Из этих ранних работ следовал неявный вывод, какова вероятность и как ее подсчитать. Но всё это выглядело неопределенно и неубедительно.

Сочетания

Рабочее определение вероятности некоего события – относительное число случаев, в которых оно происходит. Если речь о кости, у которой может одинаково часто выпасть любая из шести граней, вероятность выпадения каждой грани равна $^1/_6$. Более ранние работы по вероятности основаны на подсчете количества вариантов появления каждого события и делении его на общее число возможностей.

Главной проблемой здесь были сочетания. Скажем, если взять колоду из шести карт, сколько в ней будет разных подмножеств по четыре карты? Один из способов – перечислить все эти подмножества: если у нас карты с достоинством 1–6, получится:

1234	1235	1236	1245	1246
1256	1345	1346	1356	1456
2345	2346	2356	2456	3456

т. е. их всего 15. Но такой метод слишком громоздкий для большего количества карт, и здесь нужно нечто более систематическое.

Представим, что мы выбираем по одному элементу из подмножества. Первый можно выбрать шестью способами, второй только пятью (один использован), третий – четырьмя, четвертый – тремя. Общее число выборов в этом порядке равно 6 × 5 × 4 × 3 = 360. Но каждое подмножество сосчитано здесь 24 раза: начав с 1234, далее мы найдем 1243, 2134 и т. д. и получим 24 способа (4 × 3 × 2) переставить четыре объекта. Значит, точный ответ будет 360/24, т. е. 15. Этот аргумент показывает, что количество способов выбрать *m* объектов из общего числа *n* объектов равно:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\times 2\times 3\times \ldots \times m}.$$

Это выражение называется *биномиальным коэффициентом*, потому что появляется и в алгебре. Если мы преобразуем его в таблицу, чтобы *n*-я строка содержала биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n},$$

то результат будет выглядеть так.

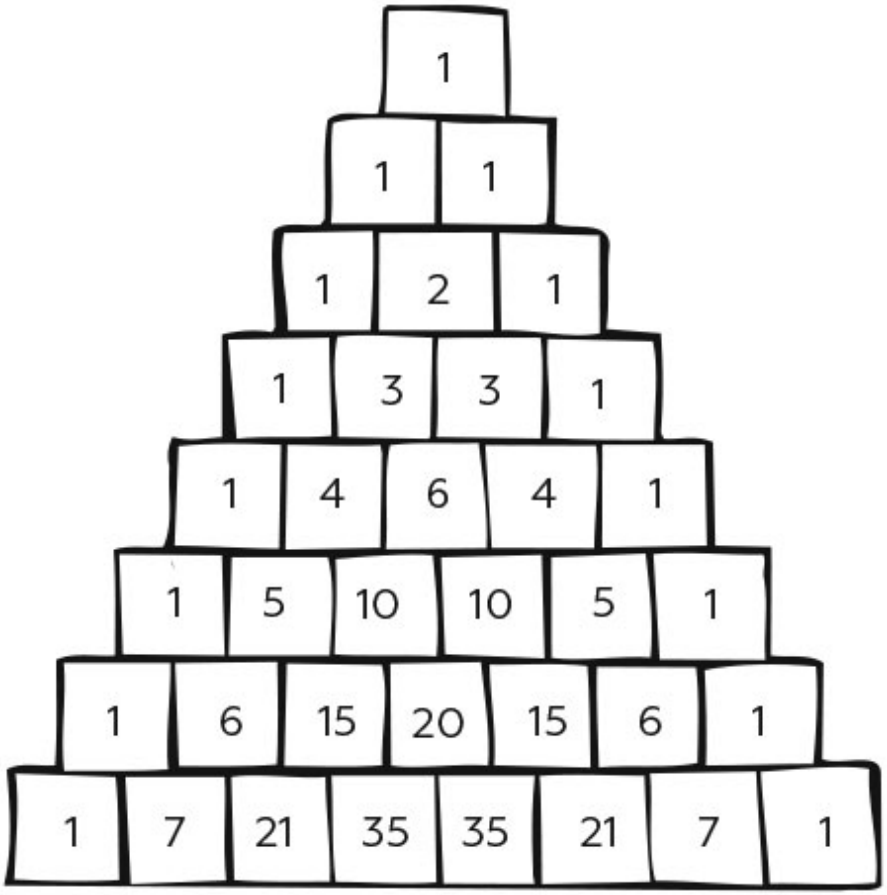
В шестой (счет начинается с нуля) строке мы увидим числа 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Сравним с формулой

$(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1,$

и мы видим, что те же числа появляются как коэффициенты. Это не совпадение.

Треугольник чисел назван треугольником Паскаля, потому что обсуждался Паскалем в 1655 г. Однако известен он был гораздо раньше: первое упоминание в древнеиндийском шастре «Чандас шастра» датируется примерно 950 г. Также его знали персидские математики Аль-Караджи и Омар Хайям (в современном Иране его называют треугольником Хайяма).



Треугольник Паскаля

Теория вероятностей

Биномиальные коэффициенты с большим успехом были использованы в первой книге по теории вероятностей – труде под названием «Искусство предположений», написанном Якобом Бернулли в 1713 г. В книге автор поясняет столь необычное название.

> Мы определяем искусство предположений, или стохастическое искусство, как искусство точной оценки вероятностей, чтобы в наших суждениях и действиях мы всегда опирались на то, что признано лучшим, наиболее приемлемым, наиболее определенным или рекомендуемым; это единственная основа для мудрости философа и благоразумия государственного мужа.

Возможно, правильнее было бы назвать эту книгу «Искусство догадок».

Бернулли принимал как данность, что чем больше количество испытаний, тем лучше можно будет оценить вероятность.

> Предположим, без вашего ведома в урну поместили 3000 белых камней и 2000 черных. Пытаясь определить количество этих камней, вы вынимаете один камень за другим (каждый раз возвращая его обратно) и обращаете внимание, как часто попадаются белый и черный камни. Насколько часто вам придется так делать: 10 раз, или 100 раз, или 1000 раз и т. д., что более вероятно, ‹…› чтобы [в итоге] выбранные белые и черные камни находились в том же соотношении 3:2, что и в урне?

Здесь Бернулли не только задал один из основных вопросов, но и изобрел стандартный иллюстративный пример – камни в урне. Он явно был уверен, что пропорция 3:2 будет разумным результатом, но понимал, что в реальности эксперименты могут лишь приблизиться к ней. Однако он был уверен еще и в том, что при достаточном количестве попыток эта аппроксимация будет всё точнее и точнее.

Тут была своя трудность, надолго затормозившая развитие этой науки. В подобных экспериментах всегда есть определенная *возможность*, что по чистой случайности все вынутые из урны камни окажутся белыми. Нет достаточно надежной гарантии, что пропорция *будет* всегда стремиться к $^3/_2$. В лучшем случае мы можем утверждать, что с очень высокой вероятностью числа будут приближаться к этому значению. Но тогда возникает риск круговой логики: мы используем пропорции, полученные в опытах, чтобы оценить вероятности, но также используем вероятности, чтобы получить этот вывод. Как мы видим, что вероятность вытащить только белые камни крайне мала? Если мы добиваемся этого в большем числе испытаний, то должны учесть и возможность того, что результат по какой-то причине окажется ошибочным. Единственным выходом из этого тупика кажется проведение еще большего числа испытаний, чтобы показать, как низка вероятность такого результата. В итоге мы попадаем в состояние, слишком напоминающее бесконечное движение по кругу.

К счастью, первые исследователи теории вероятностей не позволили этому логическому препятствию себя остановить. Как и в случае с исчислением, они знали, чего хотят и как этого добиться. Философские суждения были для них менее важны, чем поиск ответов на вопросы.

Книга Бернулли содержала много важных идей и результатов. Один из них, *закон больших чисел*, показывает нам, в каком именно смысле долгосрочные наблюдения за пропорциями в испытаниях соответствуют вероятностям. Главным образом он доказывает следующее: вероятность того, что пропорция не будет близка к правильной вероятности, стремится к нулю при неограниченном росте количества испытаний.

ЧТО ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДАЛА ИМ

В 1710 г. Джон Арбетнот представил в Королевское общество Великобритании статью, в которой с помощью теории вероятностей доказывал существование Бога. Он проанализировал ежегодное число крещений младенцев мужского и женского пола в 1629–1710 гг. и обнаружил, что

мальчиков было немногим больше, чем девочек. Более того, эта разница оставалась практически неизменной каждый год. Этот факт был уже тогда хорошо известен, но Арбетнот вычислил вероятность того, что пропорция постоянна. Его результат получился очень маленьким: 2^{-82}. Он указал, что если такой эффект наблюдается во всех странах, во все времена и у всех народов, то шанс был бы еще меньше. Из чего он сделал вывод, что всё происходит не по случайности, а благодаря божественному провидению.

А в 1872 г. Фрэнсис Гальтон использовал теорию вероятностей для оценки действенности молитв исходя из того, что огромное число людей каждый день возносят молитвы о здоровье королевской семьи. Он собрал данные по «средней продолжительности жизни мужчин из различных сословий, проживших более 30 лет, от 1758 до 1843 г.», добавив, что «исключил смерти от несчастного случая». В его выборку вошли аристократы, королевская семья, духовенство, адвокаты, врачи, дворяне, купцы, офицеры армии и флота, деятели науки, литературы и искусства. Он обнаружил, что «властители буквально самые коротко живущие из всех состоятельных слоев общества. Таким образом, молитвы совершенно бесполезны, если только не прибегнуть к весьма спорной гипотезе, будто условия жизни королевской семьи настолько фатальны, что отчасти, хотя и не полностью, могут нейтрализовать эффект народных молитв».

Другая базовая теорема может быть рассмотрена для случая повторных бросков бракованной (смещенной) монеты с вероятностью p для выпадения орла и $q = 1 - p$ для выпадения решки. Если монету бросить дважды, какова будет вероятность того, что орел выпадет 2, 1 или 0 раз? Ответ Бернулли был p^2, $2pq$ и q^2. Таковы результаты при разложении выражения $(p + q)^2$ в $p^2 + 2pq + q^2$. А если монету бросить три раза, вероятность того, что орел выпадет 3, 2, 1 или 0 раз, равна последовательности множителей в выражении $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3q^2p + q^3$.

В более общем виде, если монету бросить n раз, вероятность выпадения орла m раз будет равна:

$$\binom{m}{n} p^m q^{n-m},$$

т. е. соответствующему члену в разложении $(p + q)^n$.

В 1730–1738 гг. Абрахам де Муавр продолжил опыты Бернулли со смещенной монетой. Когда m и n достаточно велики, трудно точно вычислить биномиальный коэффициент, и де Муавр вывел приблизительную формулу, соответствующую биномиальному распределению Бернулли, которое сейчас мы называем *функцией ошибок* или *нормальным распределением*:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}.$$

Де Муавр заслуженно считается первым математиком, явно показавшим эту связь. Это стало краеугольным камнем в развитии как теории вероятностей, так и статистики.

Определение вероятности

Основной проблемой теории вероятностей оставалось определение вероятности. Даже самые простые задачи – на которые все знают ответ – были чреваты логическими затруднениями. Если мы бросаем монету, то в длительном периоде ожидаем равного числа выпадений орлов и решек, и вероятность для каждого варианта равна $^1/_2$.

Естественно, для такой вероятности монета должна быть «честной». Поврежденная может всё время выпадать орлом. Но что значит «честной»? Прежде всего, что орел и решка равновозможны. Но само выражение «равновозможны» подразумевает вероятность. Логика кажется круговой. Чтобы вычислить вероятность, нужно знать, что она собой представляет.

Чтобы выйти из этого тупика, придется вернуться к Евклиду, вдохновившему алгебраистов XIX и XX вв. Аксиомы. Хватит тревожиться о том, что такое вероятность. Запишите свойства, которыми, по вашему мнению, она должна обладать, и представьте их в виде аксиом. А потом выводите из них всё остальное.

Тогда возникает вопрос: что такое правильные аксиомы? Когда вероятность определяется по конечному множеству событий, ответить на него несложно. Однако применение теории вероятностей часто относится к потенциально бесконечному множеству возможностей. Скажем, если вы измерите угол между двумя звездами, то он будет равен некоему действительному числу между 0 и 180°. Но там бесконечно много действительных чисел. Если вы метаете дротик в доску долгое время с равным шансом попасть в любую точку на ней, то вероятность попасть в конкретную область будет равна площади этой области, деленной на общую площадь доски. Но на доске для дротиков имеется бесконечно много точек, а значит, бесконечно много областей.

Эти трудности рождали все виды проблем и парадоксов. И наконец их удалось решить новой идеей анализа – понятием меры.

Специалисты по математическому анализу, работавшие над теорией интегралов, сочли необходимым пойти дальше Ньютона и дать определение еще более сложным понятиям: что представляет собой интегрируемая функция и каков ее интеграл. После ряда попыток многих предшественников Анри Лебегу удалось определить самый

общий тип интеграла, сейчас известный как интеграл Лебега, со многими приятными и полезными аналитическими свойствами.

Ключом к его определению стала *мера Лебега*, которая представляет собой способ применить концепцию длины к весьма сложным подмножествам вещественной прямой. Предположим, множество состоит из непересекающихся интервалов с длинами 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ и т. д. Эти числа образуют сходящийся ряд с суммой 2. Здесь Лебег утверждал, что это множество имеет меру 2. В его идее обнаруживается элемент новизны: она была *счетно-аддитивной*. Если вы сложите бесконечный набор непересекающихся множеств и если он счетен в канторовском смысле, с кардинальным числом $\aleph_0$, мера всего множества равна сумме бесконечного ряда, образованного мерами отдельных множеств.

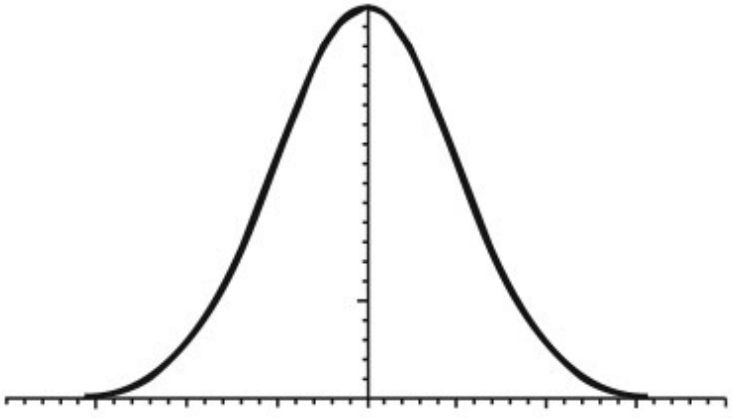
Во многих смыслах идея меры оказалась важнее, чем интеграл, к которому она привела. В частности, вероятность и есть та же мера. На данное свойство указал в 1930-х гг. Андрей Колмогоров, составивший аксиомы для вероятностей. Точнее, он определил вероятностное пространство. В него включено множество X, набор B подмножеств X, именуемых *случайными событиями*, и мера m для B. Аксиомы утверждают, что m – мера и что $m(X) = 1$ (т. е. вероятность того, что *что-то* случится, всегда равна 1). Набор B также должен обладать теоретико-множественными свойствами, чтобы поддерживать понятие меры.

В случае с костями множество X состоит из чисел 1−6, а множество B содержит все подмножества X. Мерой любого множества Y в составе B будет количество элементов Y, деленное на 6. Эта мера согласуется с интуитивной идеей, что любая грань кости имеет вероятность выпадения $^1/_6$. Однако использование меры требует от нас учитывать не только число граней, но и сами множества граней. С таким множеством Y связана вероятность того, что выпадет одна из граней множества Y. Интуитивно это будет размер Y, деленный на 6.

Благодаря этой простой идее Колмогоров положил конец спорам, в том числе вековым, и создал строгую теорию вероятностей.

Статистические данные

Главным приложением и ответвлением теории вероятностей стала статистика, использующая вероятности для анализа данных реального мира. Она выросла из астрономии XVIII в., когда возникла необходимость учитывать ошибки наблюдений. Эмпирически и теоретически они распределены согласно функции ошибок, или нормальному распределению. Кривая этой функции формой напоминает колокол и часто называется колоколом Гаусса (колоколообразной кривой). Здесь величина ошибки откладывается по горизонтальной оси с нулевым значением посередине, а вершина кривой представляет вероятность ошибки соответствующей величины. Мелкие ошибки гораздо вероятней, серьезные случаются гораздо реже.



Колоколообразная кривая

В 1835 г. Адольф Кетле выступил с предложением использовать колоколообразную кривую для моделирования социальных данных: рождений, смертей, разводов, преступлений и суицидов. Он открыл, что, хотя такие события непредсказуемы для отдельных лиц, они обладают статистическими закономерностями, если рассматривать их по популяции в целом. Он воплотил свою идею, создав «среднестатистического человека», фиктивную личность со средними показателями по всем параметрам. По Кетле, среднестатистический человек вовсе не был отвлеченной математической концепцией: это объект социальной справедливости.

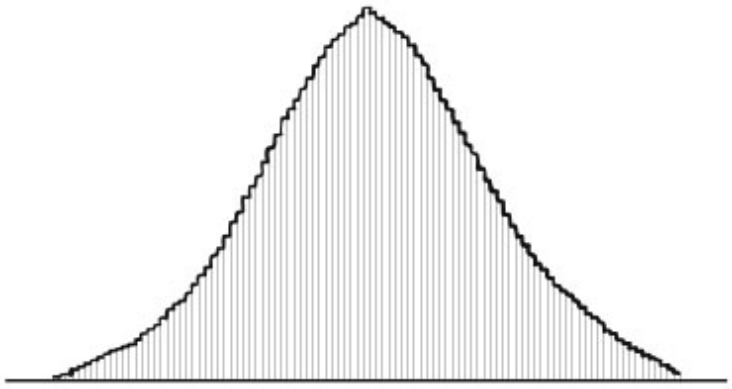


График Кетле для количества людей, имеющих данный вес. Вес откладывается по горизонтальной оси, количество людей – по вертикальной

Начиная с 1880-х общественные науки существенно расширили использование идей статистики, особенно колоколообразной кривой, в качестве замены реальному эксперименту. В 1865 г. Фрэнсис Гальтон занялся исследованием наследственности человека. Как рост ребенка соотносится с ростом его родителей? А как насчет веса или умственных способностей? Он принял колоколообразную кривую Кетле, но воспринимал ее как способ разделения определенных популяций, а не как моральный императив. Если какие-то данные демонстрировали два пика вместо одного на колоколообразной кривой, значит, популяция должна состоять из двух субпопуляций, каждая со своей кривой. К 1877 г. исследования Гальтона подвели его к изобретению регрессионного анализа – способа сравнения одного множества данных с другим для выявления наиболее вероятных взаимоотношений.

Другой заметной фигурой был Исидор Эджуорт. Он не был наделен воображением Гальтона, а был, скорее, технократом и сумел подвести под идеи Гальтона надежную математическую основу. Третьим был Карл Пирсон, внесший значительный вклад в развитие математики. Однако наибольшую пользу своими открытиями Пирсон принес в качестве «продавца идеи»: он убедил весь мир, что статистика – очень полезная наука.

ЧТО ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДАЕТ НАМ

Чрезвычайно важная область приложения теории вероятностей – медицинские испытания новых лекарств. В этих экспериментах проводится сбор данных о воздействии препарата: действительно ли он лечит болезнь и имеет ли какие-то нежелательные побочные эффекты. Что бы ни показывали полученные цифры, главным вопросом остается их статистическая значимость: являются ли они результатом непосредственного воздействия лекарства, или это плод чистой случайности? Проблему помогает решить использование статистического метода под названием *проверка гипотезы*. Он сравнивает данные исследования со статистической моделью и определяет вероятность того, что результат случаен. Если, например, вероятность меньше 0,01, данные с вероятностью 0,99 не получены случайно. Эффект значим на 99 %. Такие методы позволяют с высокой степенью достоверности определить, какое лекарство самое эффективное, а какое имеет побочные эффекты и не годится для использования.

Ньютон и его последователи показали, что математика может быть очень эффективным способом постижения закономерностей природы. Открытие теории вероятностей и ее прикладной ветви, статистики, имело то же значение для постижения нерегулярности природы. Безусловно, и в случайных событиях можно найти числовые закономерности. Однако они проявляются только в статистических величинах, таких как долгосрочные тренды и средние значения. Они позволяют делать предположения, но лишь о вероятности некоего события. Они не предсказывают, когда событие произойдет. Несмотря на это, теория вероятностей стала одним из самых популярных математических приемов, востребованных и в науке, и в медицине – везде, где необходимо решить, является ли полученный эффект значимым или кажущейся закономерностью, полученной в результате совпадений.

Глава 19. Мельницы для чисел

Вычислительные машины и вычислительная математика

Математики всегда мечтали создать машины, которые избавили бы их от занудных, рутинных вычислительных операций. Чем меньше времени уходит на вычисления, тем больше остается на размышления. Еще с доисторических времен человечество использовало палочки и камешки для счета, пока кучки камней не привели к изобретению счетов, где нанизанные на проволоку бусинки заменили разряды числа. Особенно удачным оказался японский вариант абака. Опытный пользователь мог легко и точно выполнить на нем любое арифметическое действие. Примерно в 1950-х гг. японский абак удалось преобразовать в механический ручной калькулятор.

Мечта становится явью?

К XXI в. изобретение компьютеров и широкое распространение и доступность интегральных схем (чипов) дали машинам огромное преимущество. Они могут работать гораздо быстрее, чем человеческий мозг или механические устройства: скорость в миллиарды и триллионы арифметических операций в секунду сейчас воспринимается как должное. Быстрее, чем я наберу эти строки, произведенная IBM Blue Gene/L способна выполнить квадриллион вычислений (операций с плавающей запятой) за секунду. Современные компьютеры к тому же имеют огромные объемы памяти и хранят эквивалент сотен книг так, что любые сведения из них нам доступны практически моментально. Цветные схемы и анимации достигли пика своего качества.

Компьютеры на пьедестале

Ранние машины были более скромными, но и они позволяли сэкономить немало времени и сил. Пожалуй, первым значительным шагом после абака стали кости, или палочки, Непера: набор маркированных палочек, изобретенный Непером перед тем, как он придумал логарифмы. По сути, палочки были универсальными компонентами обычного процесса умножения. И хотя они могли заменить бумагу и карандаш и избавляли от необходимости записывать каждую цифру, они лишь имитировали ручные вычисления.

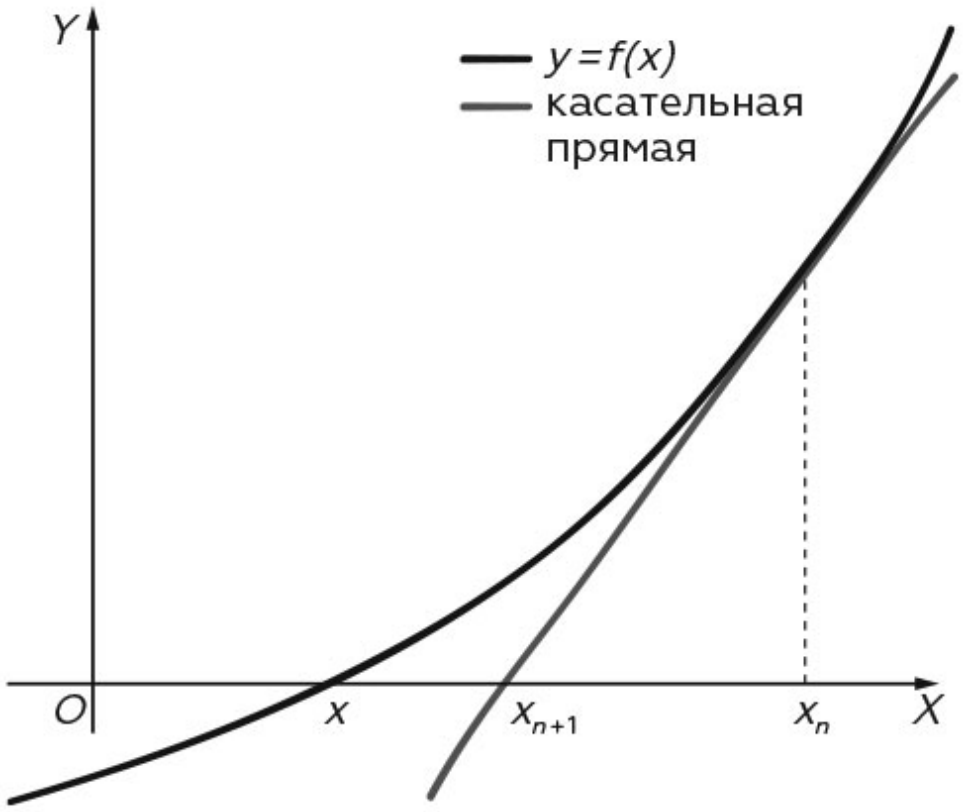
В 1642 г. Паскаль изобрел действительно механический калькулятор, арифметическую машину, чтобы помочь в подсчетах своему отцу. Устройство выполняло сложение и вычитание, но не умножение и деление. Оно имело восемь вращающихся дисков с числами, т. е. подходило для чисел вплоть до восьмизначных. В последующие десять лет Паскаль создал 50 аналогичных машин, большинство из которых сейчас хранится в музеях.

В 1671 г. Лейбниц придумал схему машины для умножения и собрал ее в 1694 г., заметив: «Негоже достойным людям, как рабы, терять часы над вычислениями, которые легко мог бы выполнить любой, имейся у него нужная машина». Он назвал свое устройство Staffelwalze (ступенчатый счетчик). Основная идея его изобретения широко использовалась последователями.

Автором самого амбициозного проекта вычислительной машины стал Чарльз Бэббидж. По его словам, в 1812 г. он «сидел в помещении Аналитического общества в Кембридже, клюя носом над раскрытыми передо мной таблицами логарифмов. Другой член общества вошел в комнату, увидел, что я вот-вот засну, и воскликнул: “Ну, Бэббидж, и о чем ты тут грезишь?” На что я ответил, кивнув на логарифмы: “Я думаю о том, что все эти таблицы можно было бы вычислить с помощью машины”». Этой мечте Бэббидж следовал до конца жизни, сконструировав прототип машины, названной им разностной. Он пытался получить от правительства помощь на создание более мощных устройств. Его самый амбициозный проект, аналитическая машина, по сути была программируемым механическим компьютером. Ни один такой аппарат не был построен, хотя удалось собрать некоторые его

компоненты. Современная реконструкция аналитической машины хранится в Музее науки в Лондоне – и она работает. Большой вклад в труд Бэббиджа внесла Августа Ада Лавлейс, написав первую в мире компьютерную программу для его машины.

Первым калькулятором, поступившим в массовое производство, стал арифмометр, выпущенный Томасом де Кольмаром в 1820 г. В его основе лежал ступенчатый валиковый механизм, и еще в 1920 г. его производство процветало. Следующим принципиальным изменением стал механизм штифтового колеса, изобретенный шведским инженером Вильгодтом Однером. Его калькулятор был прототипом для десятков, если не сотен, аналогичных механизмов, выпускавшихся на множестве фабрик. Движущей силой был сам оператор, крутивший рукоятку и проворачивавший таким образом ряд дисков с цифрами от 0 до 9. Имея определенные навыки, человек мог достаточно быстро выполнять даже самые сложные операции. Во время Второй мировой войны научные и инженерные расчеты для Манхэттенского проекта по созданию первой атомной бомбы производились как раз на таких машинах, управляемых специально отобранным подразделением «вычислителей» – главным образом молодых женщин. Изобретение в 1980-х гг. дешевых и мощных электронных компьютеров моментально вывело механические устройства из игры, но вплоть до этого времени они оставались широко распространенными и востребованными в деловых и научных кругах.



Метод Ньютона для численного решения уравнения

Вычислительные машины выполняли не только простые арифметические действия, поскольку многие научные расчеты могут быть численно реализованы как длинный ряд арифметических операций. Один из первых численных методов, позволявших решать уравнения с достаточно высокой точностью, был изобретен еще Ньютоном и стал известен как *метод Ньютона*. Он решает уравнение $f(x) = 0$ с помощью вычисления ряда последовательных приближений к решению, где каждое следующее уточняет предыдущее, но основано на нем. От некоего начального предположения, обозначим его как x_1, улучшаем наши приближения корней x_2, x_3, …, x_n, x_{n+1} согласно формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

где f' – производная от f. Метод основан на геометрии кривой $y = f(x)$ рядом с решением. Точка x_{n+1} находится там, где касательная прямая к точке x_n пересекается с осью X. Как показано на графике, она ближе к решению – точке x, чем исходная точка.

АВГУСТА АДА КИНГ, ГРАФИНЯ ЛАВЛЕЙС 1815–1852



Августа Ада была дочерью поэта лорда Байрона и Анны Милбенк. Ее родители расстались через месяц после рождения девочки, и она больше никогда не видела отца. Ребенком она уже показала способности к математике; в отличие от своих современников, леди Байрон сочла это отличным упражнением для развития ума своей дочки и поощряла ее в этом увлечении. В 1833 г. Ада познакомилась с Чарльзом Бэббиджем на званом обеде, и очень скоро, побывав на демонстрации его прототипа аналитической машины,

девушка нашла ее восхитительной и моментально разобралась в ее устройстве. Она стала графиней Лавлейс, когда в 1838 г. ее муж получил титул графа.

В 1843 г. к своему переводу статьи Луиджи Менабреа «Заметки об аналитической машине Чарльза Бэббиджа» Ада добавила небольшое приложение, впоследствии ставшее образцом программ, разработанных ею собственноручно. Она писала, что «отличительной особенностью аналитической машины… является использование в ней принципа управления с помощью перфокарт, изобретенного Жаккардом для изготовления самых сложных узоров для парчовых тканей. Можно сказать, что аналитическая машина сплетает алгебраические формулы так же, как ткацкий станок Жаккарда – цветы и листья».

В 36 лет у женщины развился рак матки, и после долгих мучений она умерла от кровопускания на руках у своих врачей.

Вторым важным приложением численных методов стало решение дифференциальных уравнений. Предположим, мы решаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и нам дано, что $x = x_0$ в момент времени $t = 0$. Согласно Эйлеру, простейший способ – аппроксимация dx/dt с помощью

$$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon},$$

где ε очень мала. Тогда аппроксимация дифференциального уравнения принимает вид:

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon\, f(x(t)).$$

Начиная с $x(0) = x_0$ мы последовательно найдем значения $f(\varepsilon)$, $f(2\varepsilon)$, $f(3\varepsilon)$ – в общем, $f(n\varepsilon)$ для любого целого $n > 0$. Обычное значение ε, скажем, 10^{-6}. Миллион итераций (повторов) формулы покажет $x(1)$, следующий миллион $x(2)$ и т. д. Для современных компьютеров миллион вычислений – пустяк, и это уже вполне практичный метод.

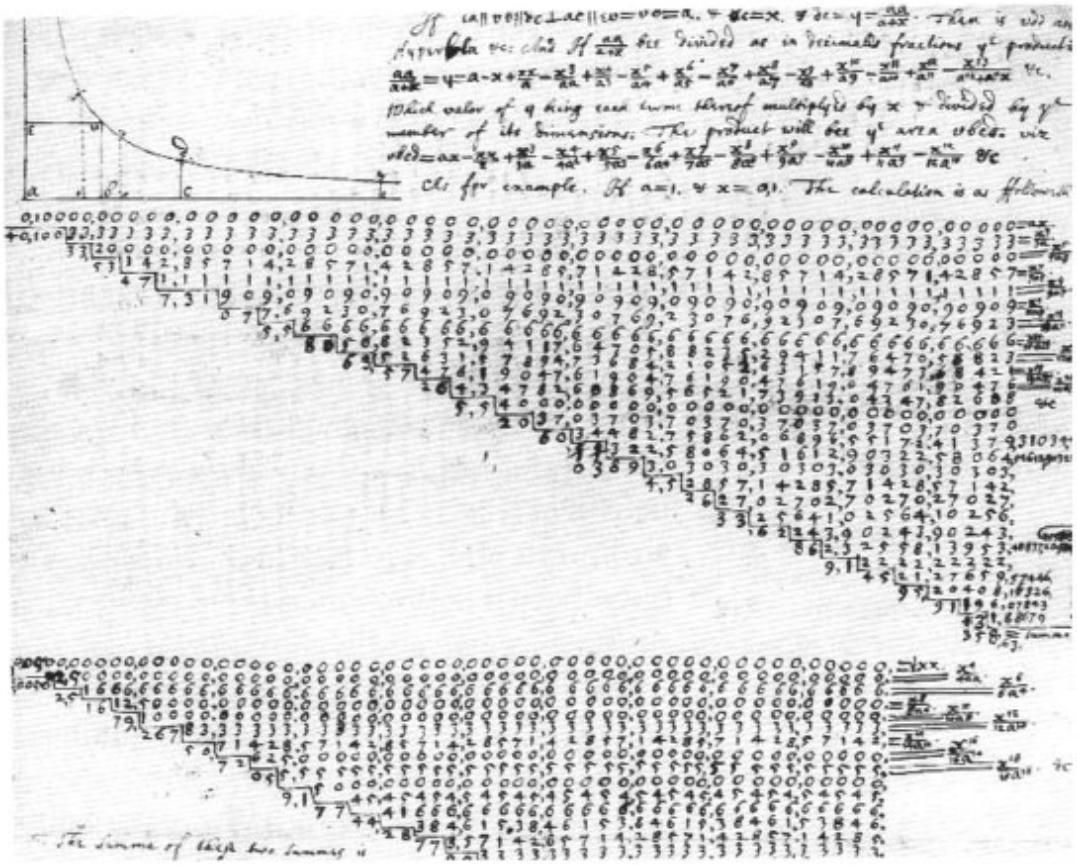
Однако метод Эйлера оказался слишком прост для ученых, и пришлось изобрести множество улучшений. Самым известным стал целый класс методов Рунге – Кутты, названный в честь немецких математиков Карла Рунге и Мартина Кутты, впервые предложивших их в 1901 г. Один из них, так называемый метод Рунге – Кутты четвертого порядка, широко используется в инженерии, прикладной и теоретической математике.

Нужды современной нелинейной динамики породили несколько сложнейших методов, позволяющих избежать накопления ошибок даже в длительных временны*х* периодах, которые сохраняют определенную структуру, связанную с точным решением. Например, в механической системе без трения полная механическая энергия сохраняется. И есть возможность настроить численный метод так, чтобы на каждом шагу энергия сохранялась *точно*. Такая процедура исключает риск, что вычисленное решение будет мало-помалу отклоняться от точного, подобно тому как маятник постепенно останавливается, теряя энергию.

ЧТО ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДАЛИ ИМ

Ньютону не только пришлось разобраться в природе вычислений – ему удалось изобрести эффективные методы вычислений. Он широко внедрил степенны*е* ряды для описания функций, потому что научился дифференцировать и интегрировать эти ряды одно выражение за другим. Он также использовал их для вычисления значения функций, создав один из ранних численных методов, который используется до сих пор. На одной из страниц его манускриптов, датируемой 1665 г., показано численное определение площади под гиперболой, которую мы теперь распознаем как логарифмическую функцию. Он исследовал свойства

бесконечных рядов, вычислив их суммы с поразительной точностью, до 55-го десятичного знака после запятой.



Ньютоновский расчет площади под гиперболой

Более сложные структуры – симплектические интеграторы, с помощью которых решаются дифференциальные уравнения механических систем с высокой точностью, сохраняя симплектическую структуру гамильтоновых уравнений. Это любопытная, но чрезвычайно важная разновидность геометрии, адаптированная для двух типов переменных, положения и импульса. Симплектические интеграторы особенно важны для исследований небесной механики, где – например – астрономы могут захотеть отследить движения планет Солнечной системы на протяжении миллиардов лет.

Используя симплектические интеграторы, Джек Уиздом, Жак Ласкар и другие ученые показали, что в длительных временны*х* периодах поведение Солнечной системы хаотично, Уран и Нептун были гораздо ближе к Солнцу, чем сейчас, и в настоящее время орбита

Меркурия смещается в сторону Венеры, так что одна из этих планет в итоге может оказаться вытесненной из Солнечной системы. Только симлектические интеграторы дают нам достаточную уверенность в том, что результаты для такого длительного промежутка точны.

Компьютерам нужна математика

Компьютеры помогают в математике, но и использование математики помогает компьютерам. Математические принципы были важным условием для работы ранних вычислительных устройств – как в плане доказательства самой концепции, так и в конструировании самих машин.

Все современные цифровые компьютеры работают на двоичной системе, где числа представляются последовательностями всего двух цифр: 0 и 1. Главное преимущество двоичной системы – в ее соответствии переключению: 0 – выключено, 1 – включено. Или 0 – нет напряжения, а 1 – это пять вольт или какой-то иной вариант, используемый в схеме проектирования. Символы 0 и 1 могут также быть интерпретированы в рамках математической логики как *значения истинности*: 0 означает ложь, 1 – истина. Иными словами, компьютеры могут выполнять логические вычисления так же, как и арифметические. Конечно, логические операции здесь базовые, а арифметические можно рассматривать как последствия логических. Алгебраический подход Буля к математике 0 и 1, изложенный в его «Исследовании законов мышления», обеспечивает эффективный формализм для логики компьютерных вычислений. Поисковые системы интернета выполняют булевы логические запросы: ищут ответы, определенные некоторой комбинацией логических критериев, такие как «содержит слово “кошка”, но не содержит слово “собака”».

Алгоритмы

Математика внесла свой вклад в компьютерную науку, но и компьютерная наука подтолкнула к открытию поразительной новой математики. По одному из определений, *алгоритм* – систематический порядок действий для решения задачи. Это слово восходит к арабскому ученому Аль-Хорезми. И тут возникает любопытный вопрос: как зависит время работы алгоритма от объема вводимых данных?

Например, алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел m и n, где $m \leq n$, выглядит так.

• Разделить n на m и получить остаток r.

• Если $r = 0$, то наибольший общий делитель – m: СТОП.

• Если $r > 0$, тогда заменить n на m, а m на r и вернуться к началу.

Можно показать, что если m включает d десятичных цифр (мера объема вводимых данных для алгоритма), то алгоритм останавливается максимум после $5d$ шагов. Это значит, в частности, что если нам заданы два числа с 1000 цифр, то мы можем вычислить их наибольший общий делитель не более чем за 5000 шагов – на что современному компьютеру требуется доля секунды.

Алгоритм Евклида имеет линейное время работы – продолжительность вычислений, пропорциональную объему (в цифрах) вводимых данных. В более широком смысле алгоритм имеет полиномиальное время работы, или относится к классу P, если его время работы пропорционально некой фиксированной степени (квадрат или куб) от объема вводимых данных. В противоположность этому все известные алгоритмы для нахождения простых множителей числа имеют экспоненциальное время работы – некую фиксированную константу в степени, зависящей от объема вводимых данных. Это и делает (гипотетически) безопасной криптосистему RSA.

Проще говоря, алгоритмы с полиномиальным временем работы применяются на практике в вычислениях на современных компьютерах, а алгоритмы с экспоненциальным временем работы – нет, и соответствующие подсчеты для них на практике произвести невозможно, даже для относительно малых объемов вводимых данных. Это отличие является эмпирическим правилом: полиномиальный алгоритм может иметь такую большую степень, что будет

непрактичным, и некоторые алгоритмы со временем работы, худшим, чем полиномиальное, всё равно на поверку оказываются полезными.

Тут возникает главная теоретическая трудность. Если взять определенный алгоритм, для него можно довольно легко подсчитать, как его время работы зависит от объема вводимых данных, и определить, относится он к классу P или нет. Но невероятно трудно решить, существует ли более эффективный алгоритм, который быстрее решит ту же задачу. Итак, хотя мы знаем, что многие задачи способен решить алгоритм класса P, мы понятия не имеем о том, не относится ли любая серьезная задача к классу не-P.

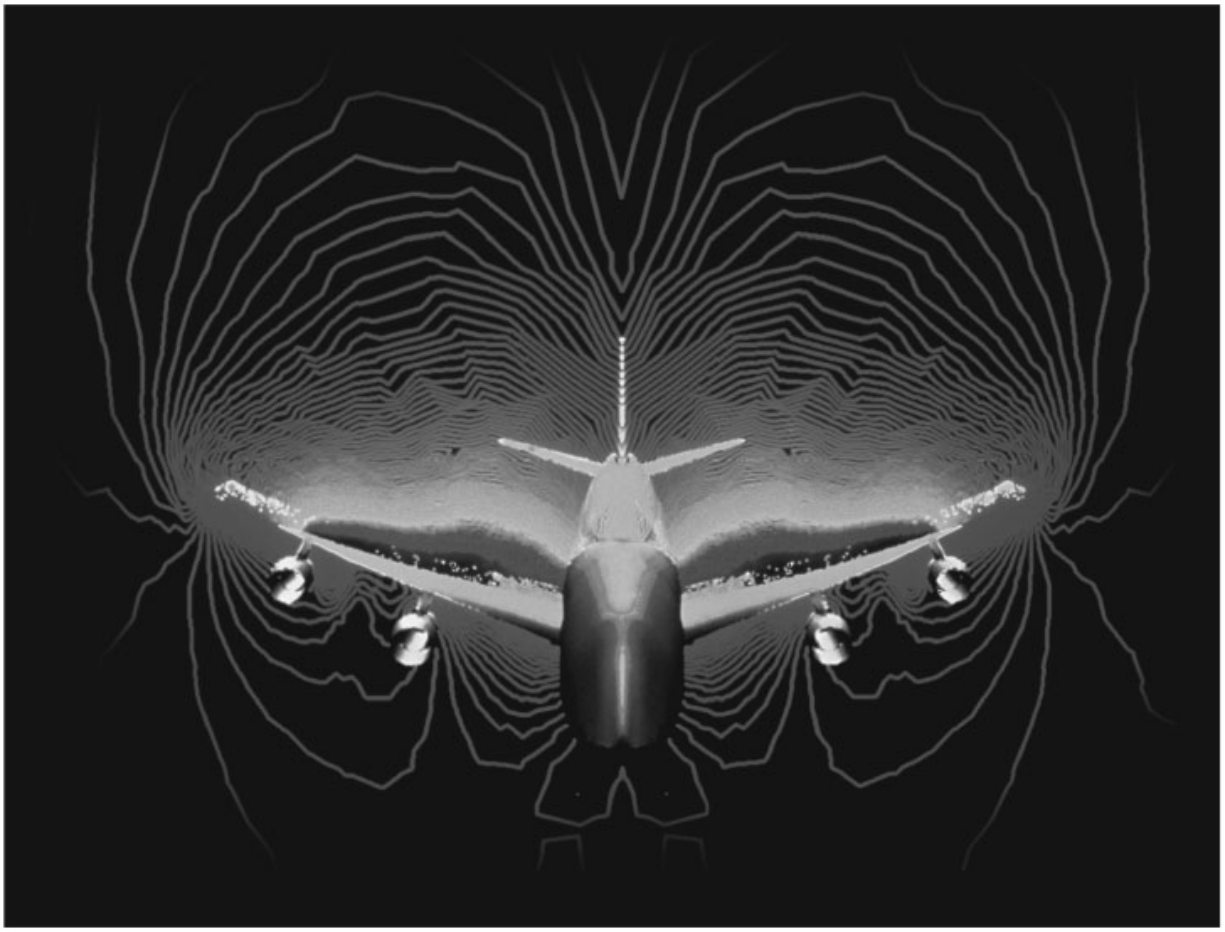
Здесь полезно вспомнить о технической интерпретации. Некая проблема должна быть не-P просто потому, что для получения ответа требуется не-P время работы. Например, нам надо составить список всех возможных способов расставить по порядку *n* символов. Чтобы работать с такой явно не-P проблемой, нужна другая концепция: класс NP *недетерминированных* полиномиальных алгоритмов. Алгоритм относится к классу NP, если любой предполагаемый ответ можно проверить за время, пропорциональное некоторой фиксированной степени, зависящей от объема вводимых данных. Например, угадав простой множитель большого числа, мы легко можем проверить его одним делением.

Задача из класса P автоматически является задачей из класса NP. Многие важные задачи, для которых неизвестны P-алгоритмы, имеют такие алгоритмы в NP. Мы подошли к самой серьезной и сложной проблеме в данной области, за решение которой объявлена премия в миллион долларов Математическим институтом Клея. Являются ли классы P и не-P одним и тем же? Самым правдоподобным ответом кажется «нет», поскольку P = NP означает, что многие из считавшихся чрезвычайно сложными вычислений на самом деле легки – просто мы пока не нашли упрощающих их преобразований.

ЧТО ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДАЮТ НАМ

Численные методы играют центральную роль в проектировании современных воздушных судов. Совсем недавно инженерам приходилось конструировать

аэродинамические трубы, чтобы проверить, как поток воздуха будет обтекать проектируемые ими крылья и фюзеляжи. Они помещали в такую трубу модель своего самолета, с помощью вентилятора нагнетали поток воздуха и следили, что происходит. Уравнения Навье – Стокса позволяли делать разные теоретические догадки, но не могли применяться к реальным воздушным судам, имевшим слишком сложные формы.



Численный расчет обтекания воздухом движущегося самолета

Сегодняшние компьютеры настолько мощны, а численные методы для решения ДУЧП стали такими эффективными, что во многих случаях реальная аэродинамическая труба уступает место цифровой – компьютерной модели самолета. Уравнения Навье – Стокса

так точны, что их можно без опаски использовать при таком подходе. Преимущество компьютерного моделирования в том, что любая мыслимая особенность воздушного потока может быть визуализирована и проанализирована.

Проблему «P = NP?» усугубляет загадочный феномен, получивший название NP-полной задачи. Многие задачи NP таковы, что если они действительно сводятся к классу P, то и *любая другая* задача из NP сводится к классу P. Такая задача и называется *NP-полной*. Если для конкретной NP-полной задачи может быть доказано, что она является P, то P = NP. А если для некоторой NP-полной задачи может быть доказано, что она не-P, то P – не то же, что NP. Одной из NP-полных задач, недавно привлекшей внимание ученых, была задача, связанная с популярной компьютерной игрой «Сапер». В математической интерпретации она известна как задача выполнимости булевых формул: есть некое высказывание математической логики; будет ли оно истинным, если присвоить значения «истина» или «ложь» ее переменным?

Численные методы

Математика – далеко не одни вычисления, хотя они являются неотъемлемой частью более концептуальных исследований. С ранних времен математики не прекращали поиск механических приспособлений, способных освободить их от скучных, рутинных вычислений и повысить точность полученных результатов. Ученые прошлого позавидовали бы нашему доступу к электронным компьютерам и подивились бы их скорости и точности.

Вычислительные машины – не просто «обслуживающий персонал» для математиков. Их проектирование и работа с ними поставили перед учеными новые теоретические вопросы. Последние варьируют от обоснования приближенных численных методов решения уравнений до более глубоких аспектов основ вычислений.

К началу XXI в. математики получили доступ к мощному программному оборудованию, позволяющему совершать не только численные расчеты, но и алгебраические и даже аналитические. Эти инструменты открывают новые области, помогают решить давние проблемы и освободить время для глубоких теоретических раздумий. В результате сама математика стала богаче как наука, а ее применение на практике заметно расширилось. У Эйлера было всё теоретически необходимое для изучения протекания потока вокруг сложных форм, и хотя в то время еще не было изобретено воздухоплавание, ученые исследовали многие занимательные вопросы, относящиеся к водным судам. Но у него не было практических методов для полноценной технической реализации своих задумок.

Еще один аспект развития, пока не упоминавшийся на этих страницах, – использование компьютеров для помощи в поиске доказательств. Несколько важных теорем, доказанных недавно, требовали огромного объема рутинных вычислений, легко выполненных компьютерами. Есть мнение, что доказательства, полученные с помощью компьютеров, искажают саму фундаментальную природу доказательства, противореча условию, что оно может быть проверено только человеческим разумом. Это утверждение противоречиво, но даже если оно истинно, плоды

технического прогресса в любом случае превратили математику в еще более надежного помощника человеческой мысли.

Глава 20. Хаос и сложность

Упорядоченный беспорядок

К середине XX в. математика вступила в фазу стремительного роста благодаря ее активному применению на практике и появлению новых мощных методов. Достоверная история современной математики займет не меньше места, чем перечисление всех ее предшествовавших достижений. Остается выбрать лишь самые выразительные примеры, чтобы показать, что математики по-прежнему отличаются оригинальностью и творческим мышлением. Одной из таких тем, привлекавших пристальное внимание широкой публики в 1970–1980-х гг., является теория хаоса (так называют СМИ нелинейную динамику). Другая тема – сложные системы, требующие менее ортодоксального образа мышления и рождающие не только новые разделы математики, но и новые области науки.

Хаос

Вплоть до 1960-х гг. у слова «хаос» было лишь одного значение – бесформенный беспорядок. Но с того времени открытия в фундаментальных науках и математике наделили его вторым, более отвлеченным значением: сочетание аспектов беспорядка с аспектами формы. Ньютоновские «Начала» упростили систему мира до дифференциальных уравнений, и это был *детерминизм* Нового времени. Подразумевалось, что если известно исходное состояние системы, ее будущее определено однозначно и навсегда. С точки зрения Ньютона, Вселенная работала как часы, приведенные в движение рукой творца и с тех пор идущие по одному неизбежному пути. Такой подход не оставлял пространства для свободы воли, и в нем могла крыться одна из причин ранних убеждений, что наука – нечто холодное и даже бесчеловечное. Но эта же точка зрения хорошо послужила человечеству, дав нам радио, телевидение, радары, мобильные телефоны, воздушные перевозки, спутники связи, искусственные волокна, пластмассы и компьютеры.

Рост научного детерминизма сопровождался смутной, но глубоко укоренившейся верой в сохранение сложности. Привычное убеждение, что простые причины должны рождать простые эффекты, предполагает, что у сложных эффектов наверняка есть не менее сложные причины. Из-за этого убеждения при взгляде на сложный объект или систему в нашем мире мы сразу начинаем гадать, откуда взялась такая сложность. В чем причины, например, сложности жизни в целом, если исходить из того, что она появилась на мертвой планете? Мы очень редко догадываемся, что сложность может появиться сама по себе, но именно это показывают нам новейшие математические методы.

Единая формула?

Детерминированность законов физики следует из простого математического факта: для любого дифференциального уравнения с заданными начальными условиями существует не более одного решения. В романе Дугласа Адамса «Автостопом по галактике» суперкомпьютер Думатель на протяжении пяти миллионов ведет вычисления ради ответа на великий вопрос жизни, Вселенной и всего сущего и с триумфом получает ответ: 42. Этот эпизод – пародия на знаменитое утверждение, в котором Лаплас выразил математическую точку зрения на детерминизм.

> Разум, который для какого-то данного момента знал бы все силы, действующие в природе, и относительное расположение ее составных частей, если бы он, кроме того, был достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, объял бы в единой формуле движения самых огромных тел во Вселенной и самого легкого атома; для него не было бы ничего неясного, и будущее, как и прошлое, было бы у него перед глазами.
>
> И тут же он одной фразой обрушивает читателей с небес на землю:
>
> Человеческий разум способен представить лишь бледную тень этого совершенного замысла, наблюдаемого в астрономии.

Ирония в том, что именно изучение небесной механики, всегда считавшейся самой детерминированной областью физики, и положило конец жесткому детерминизму Лапласа. В 1886 г. король Швеции Оскар II (правивший также в Норвегии) объявил награду за решение задачи устойчивости Солнечной системы. Будет ли наш клочок великого часового механизма Вселенной тикать вечно, либо какой-то планете суждено рухнуть на Солнце или вовсе убежать в межзвездное пространство? Любопытно, что физические законы сохранения энергии

и импульса не отрицали возможности обоих вариантов, но можно ли было пролить свет на более детальное описание Солнечной системы?

Пуанкаре был твердо намерен получить эту премию, и для начала он решил упростить задачу, рассмотрев движения трех небесных тел. Уравнения для трех тел были не намного сложнее, чем для двух, и почти не отличались по форме. Однако разминка с тремя телами оказалась на поверку крепким орешком и привела к весьма тревожному открытию. Решения таких уравнений оказались совершенно не похожи на решения для двух тел. Они были настолько сложными, что для них не удавалось записать математические формулы. Более того, Пуанкаре достаточно хорошо разбирался в геометрии – а именно в топологии – этих решений, чтобы доказать без тени сомнений, что движения, представленные в этих решениях, могут время от времени становиться беспорядочными и нерегулярными. «Можно только поражаться, – писал он, – сложностью этого рисунка, который я даже не дерзаю попытаться изобразить. Ничто не может сильнее убедить нас в величайшей сложности проблемы трех тел». Сейчас эта сложность считается классическим примером хаоса.

ПРОСЧЕТ ПУАНКАРЕ

Джун Барроу-Грин, изучавшая архивы Института Миттаг-Леффлера в Стокгольме, недавно раскопала скрытую до поры довольно неприятную историю. В работе Пуанкаре, получившей когда-то королевскую премию, содержалась серьезная ошибка. Вопреки всеобщему мнению, ученый был далек от открытия хаоса, напротив, заявлял, будто доказал, что такового не существует. В оригинале его работы есть доказательство того, что все движения в задаче о трех телах регулярны и предсказуемы.

Уже получив премию, Пуанкаре запоздало обнаружил свою ошибку и тут же понял, что она полностью дискредитирует его доказательство. Но удостоенная награды статья уже была опубликована в одном из номеров институтского журнала. Номер успели изъять, и Пуанкаре за свой счет перепечатал его – уже с описанием

> гомоклинических петель, которые мы сейчас называем хаосом. Это обошлось ему в значительно бо́льшую сумму, чем премия. Удалось отозвать практически все экземпляры ошибочной версии работы, но одна ускользнула из его сетей и сохранилась в архиве института.

Его работа получила премию короля Оскара II, хотя в ней и не было окончательного решения проблемы. Примерно 60 годами позже она стала важнейшим толчком для изменения наших взглядов на Вселенную и ее связь с математикой.

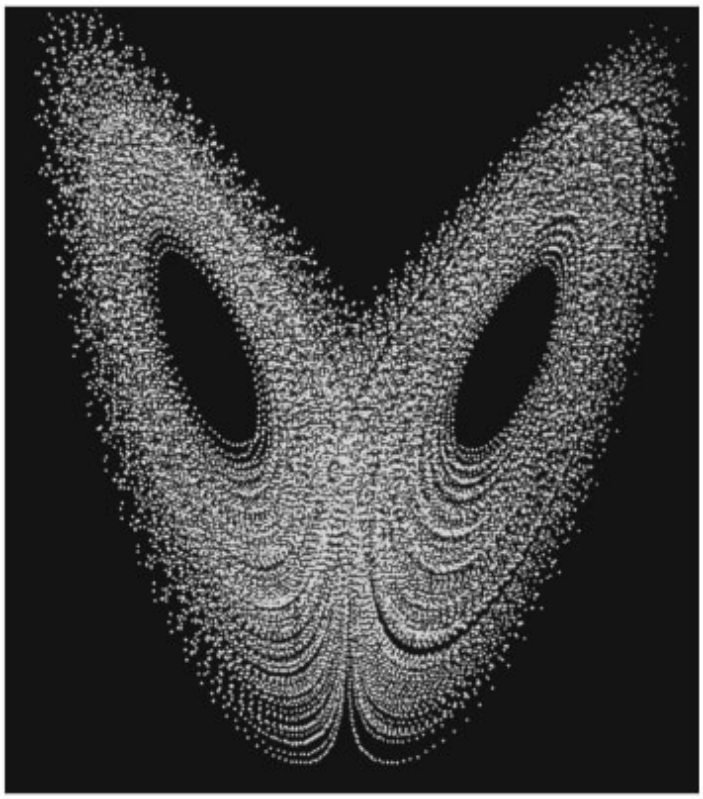
В 1926–1927 гг. голландский инженер Балтазар ван дер Пол сконструировал электронную схему для создания математической модели сердца и обнаружил, что в определенных условиях возникающие колебания становятся не периодическими, как полагается сердцу, а нерегулярными. Его работа получила солидное математическое обоснование во время Второй мировой войны в исследовании Джона Литлвуда и Мэри Картрайт, посвященной радарам. Но прошло еще 40 лет, прежде чем стало ясно истинное значение этих открытий.

Нелинейная динамика

В начале 1960-х гг. американский математик Стивен Смэйл открыл новую эру в теории динамических систем, собравшись разработать полную классификацию типичных образцов поведения электронных схем. Изначально ожидая получить в ответе некие комбинации периодических движений, он очень быстро понял, что здесь возможно гораздо более сложное поведение. В частности, он развил открытое Пуанкаре сложное движение в ограниченной задаче трех тел, создав упрощенную геометрию для описания системы, получившей название подковы Смэйла. Он доказал, что система подковы, хоть и детерминированная, обладает некоторыми случайными чертами поведения. Другие примеры подобных явлений были открыты представителями американской и советской школ теоретических динамических систем. Самый значительный вклад внесли Александр Шарковский и Владимир Арнольд, благодаря чему появилась общая теория. Термин «хаос» предложили Джеймс Йорк и Тьен-Йен Ли в 1975 г. в краткой статье, упростившей один из результатов советской школы – теорему Шарковского (1964) с описанием любопытной закономерности в периодических решениях дискретной динамической системы – той, где время движется отдельными шагами, а не непрерывно.

Тем временем описания хаотичных систем то и дело появлялись в научной литературе – и снова были сильно недооценены научным сообществом. Самое известное из них дал в 1963 г. метеоролог Эдвард Лоренц. Он создал модель атмосферной конвекции, аппроксимировав очень сложные уравнения для этого явления с помощью более простых с тремя переменными. Решая их численно на компьютере, он открыл, что решение колебалось нерегулярным, почти случайным образом. Он также открыл, что если те же самые уравнения решались с использованием исходных значений переменных, отличавшихся друг от друга незначительно, разница в решениях увеличивалась, пока они не становились абсолютно разными. Его описание для этого явления в последующих лекциях открыло очень популярную в настоящее время тему – эффект бабочки, когда взмаха крыльев бабочки оказалось

достаточно, чтобы через месяц из-за него разразился ураган на другой стороне планеты.



Аттрактор Лоренца

Этот жутковатый сценарий вполне возможен, хотя и с малой вероятностью. Предположим, вы могли бы повлиять на погоду дважды: один раз с бабочкой и второй – без нее. Тогда вы действительно получите значительные различия, и вполне возможно, что в первом случае это будет ураган, а во втором обойдется без него. Понятно, что этот эффект был получен при компьютерном моделировании уравнений, обычно используемых для предсказаний погоды, где он способен создать большие проблемы. Но было бы ошибкой считать, что бабочка и есть *причина* урагана. В реальном мире погоду формирует не одна бабочка, а статистические особенности триллионов бабочек – не считая иных неуловимых факторов. И только все вместе они определяют, когда и где зародится очередной ураган и куда он двинется.

Используя методы топологии, Смэйл, Арнольд и их коллеги доказали, что странные решения, смущавшие Пуанкаре, оказываются

неизбежным следствием *странных аттракторов* в уравнениях. Странный аттрактор – запутанное движение, к которому система неизбежно приходит. Его можно наглядно представить в виде очертаний в пространстве состояний (которое отражает изменение состояний системы), образованном переменными, которые описывают систему. Аттрактор Лоренца, описывающий уравнения Лоренца, немного похож на маску Одинокого рейнджера, только каждая из ее кажущихся поверхностей имеет бесконечно много слоев.

Сама структура аттракторов объясняет любопытную особенность хаотичных систем: они предсказуемы в кратком периоде (в отличие, например, от бросков костей), но непредсказуемы в длительном. Почему невозможно несколько краткосрочных предсказаний объединить вместе для создания долгосрочного? Потому что точность, с которой мы можем описать хаотичную систему, размывается со временем, и чем дальше, тем быстрее, и возникает такой горизонт для предсказаний, за который мы не в состоянии заглянуть. Тем не менее система остается на том же странном аттракторе – хотя ее траектория вдоль аттрактора существенно меняется.

Это изменяет наш взгляд на эффект бабочки. Насекомые могут только подталкивать погоду по одному и тому же странному аттрактору, и это всегда вполне правдоподобная погода. Она лишь слегка отличается от того, что могло бы быть без бабочек.

Давид Рюэль и Флорис Такенс очень быстро нашли потенциальное применение странным аттракторам в физике: обескураживающая проблема турбулентных течений. Стандартные уравнения потока жидкости, известные как уравнения Навье – Стокса, являются дифференциальными в частных производных и как таковые детерминированы. Обычный тип потока жидкости, с ламинарным (струйчатым) течением, – гладкий и постоянный, точно такой, как вы могли бы ожидать от детерминированной теории.

МЭРИ ЛЮСИ КАРТРАЙТ 1900–1998



Когда Мэри Картрайт в 1923 г. закончила Оксфордский университет, она стала пятой женщиной, получившей здесь диплом математика. Недолго поработав преподавателем, она защитила докторскую диссертацию в Кембридже. Хотя официально ее руководителем считался Годфри Харди, на самом деле она работала с Эдвардом Титчмаршем, поскольку Харди в то время был занят в Принстоне. Темой ее диссертации был комплексный анализ. В 1934 г. она была назначена младшим преподавателем в Кембридже и в 1936 г. стала руководителем научного направления в Гиртон-колледже.

В 1938 г. в сотрудничестве с Джоном Литлвудом она выполняла заказ Департамента научных и промышленных исследований по дифференциальным уравнениям, необходимым для работы радаров. Ученые открыли, что решения этих уравнений чрезвычайно сложны; это были первые предвестники такого явления, как хаос. Благодаря этой работе Картрайт в 1947 г. стала первой женщиной,

избранной членом Королевского общества. В 1948 г. она получила пост главы Гиртона и с 1959 по 1968 г. читала лекции в Кембридже. Она была удостоена многих наград, а в 1969 г. стала дамой-командором ордена Британской империи.

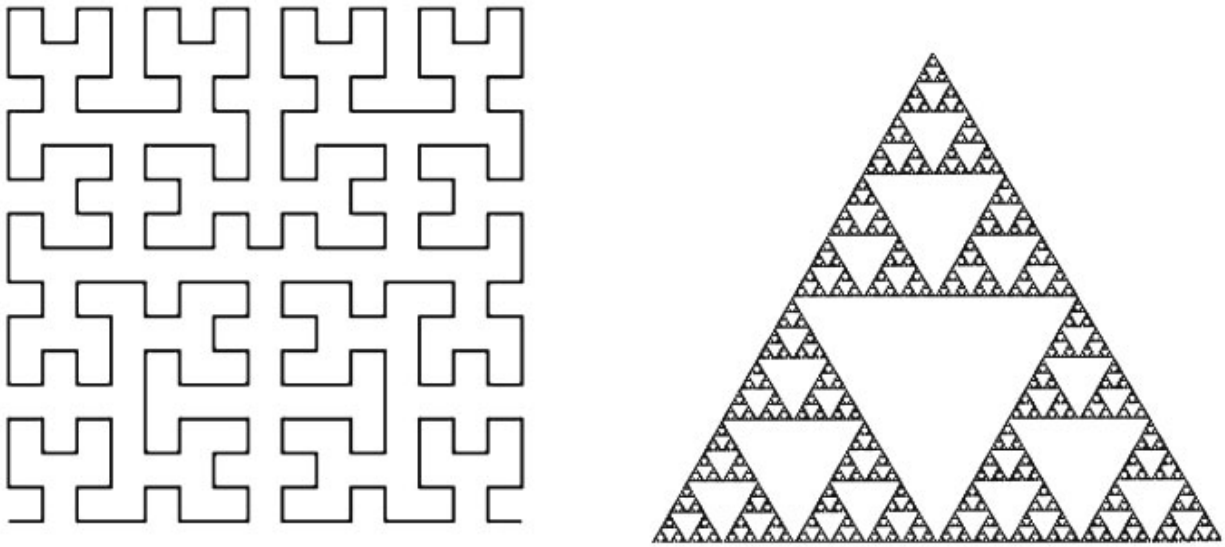
А вот другой тип потока, турбулентный, вовсе не такой ровный: он нерегулярный и едва ли не случайный. Предыдущие теории описывали турбулентный поток либо как особенно сложную комбинацию из слагаемых, каждое из которых очень простое и регулярное само по себе, либо как искаженные турбулентным режимом уравнения Навье – Стокса. Однако Рюэль и Такенс выдвинули третью теорию. Они предположили, что турбулентность есть физическое проявление странного аттрактора.

Поначалу эта теория вызвала изрядный скептицизм, но сейчас мы уже знаем, что она верна по сути, хотя некоторые ее детали вызывают вопросы. Последовали другие успешные ее применения, и слово «хаос» стало признанным названием для такого поведения.

Теоретические монстры

Пора обратить внимание на вторую тему этой главы. В 1870–1930 гг. многие математики независимо друг от друга увлеклись изобретением невозможных форм с единственной целью доказать ограниченность классического анализа.

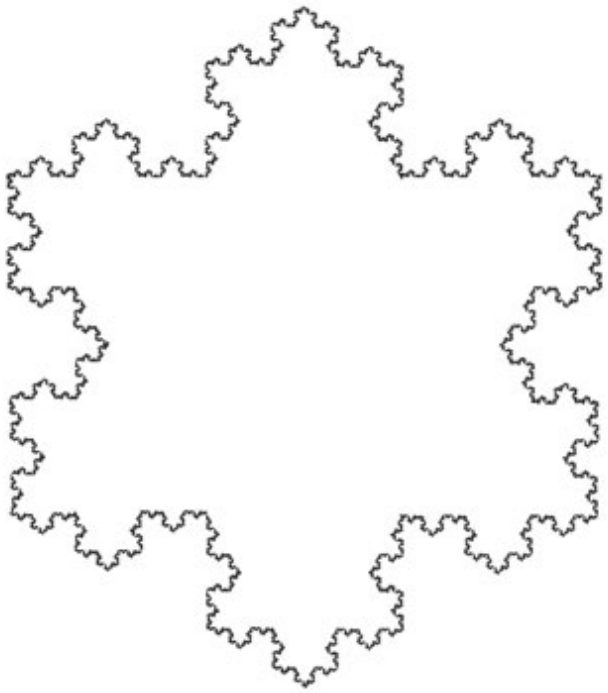
На самых ранних порах развития исчисления математики пришли к выводу, что всякая непрерывная изменяющаяся величина почти везде должна иметь вполне определенный темп изменения. Например, предмет, непрерывно движущийся в пространстве, имеет четко определенную скорость, за исключением относительно редких моментов, когда она резко меняется. Однако в 1872 г. Карл Вейерштрасс доказал, что это давнишнее утверждение неверно. Предмет может двигаться непрерывно, но так нерегулярно, что его скорость будет резко меняться в любой момент. Это значит, что на самом деле он *не имеет* разумной скорости вообще.



Стадии построения кривой Гильберта, заполняющей пространство, и треугольник Серпинского

Следующим вкладом в этот странный набор аномалий стали кривые, заполняющие всю область пространства (одну открыл Пеано в 1890 г., другую Гильберт в 1891-м), кривая, пересекающая саму себя в

каждой точке (открыта Вацлавом Серпинским в 1915 г.), и кривая бесконечной длины, заключенная в конечной области. Последний пример геометрической странности, открытый в 1906 г. Хельге фон Кохом, получил название кривой-снежинки, и вот как ее можно получить. Нужно взять равносторонний треугольник и добавить к нему треугольные выступы ровно посередине каждой стороны (так, чтобы их основание занимало треть длины стороны), при этом убирая основание каждого выступа, чтобы в итоге получилась шестиконечная звезда. Затем добавить меньшие выступы в середине каждой из 12 сторон и так далее до бесконечности. Из-за шестикратной симметрии в результате получится форма безупречной снежинки. Правда, в природе снежинки растут по иным правилам, но это уже другая история.



Снежинка Коха

Математический мейнстрим тут же провозгласил эти курьезы «патологиями» из «собрания монстров», но с годами число таких возмутительных «курьезов» только росло и уже не могло игнорироваться научным сообществом: точка зрения одиночек дала свои плоды. Логика, скрытая в анализе, так тонка, что очень велика опасность соскользнуть к ошибочным выводам: подобного рода

монстры предупреждают нас о том, что что-то не так. Итак, к началу века математики уже успели смириться с собранием этих странных изобретений. Они относились к этому исключительно как к чистой теории, которая не имеет каких-либо практических приложений. Тот же Гильберт в 1900-х гг. мог отзываться обо всей математике как о рае, не опасаясь шквала критики.

Только в 1960-х, вопреки всем ожиданиям, галерея теоретических монстров начала применяться в прикладной науке. Бенуа Мандельброт открыл, что эти нелепые кривые – первые ключи к ожидающей открытия теории самоподобных множеств в природе. Он дал им название «фракталы». До этого ученым вполне хватало традиционных геометрических форм вроде прямоугольников и сфер, но Мандельброт настаивал, что такой подход слишком ограничен. Окружающий мир насыщен сложными и нерегулярными структурами: береговыми линиями, горами, облаками, деревьями, ледниками, речными системами, океанскими волнами, кратерами вулканов, цветной капустой, о которых традиционная геометрия ничего сказать не может. Необходима новая геометрия природы.

Сейчас ученые приняли фракталы как вполне естественный способ мышления, как и их предшественники в конце XIX в., признав нелепые формы, изобретенные их коллегами. Вторая часть статьи «Атмосферная диффузия на дистанционном графе ближайших соседей» Льюиса Фрая Ричардсона от 1926 г., посвященная исследованиям атмосферы, вышла под заголовком «Есть ли скорость у ветра?». Сейчас это кажется вполне резонным вопросом. Движения слоев атмосферы турбулентны, турбулентность – фрактал, а фракталы могут вести себя как монструозная функция Вейерштрасса: двигаться непрерывно, но не иметь определенной скорости. Мандельброт находил примеры фракталов как в многочисленных областях науки, так и за ее пределами: форма дерева, ветвящаяся дельта реки, колебания цен на рынке.

Хаос повсюду!

Странные аттракторы математиков, рассматриваемые с точки зрения геометрии, на поверку оказались фракталами, и два направления научной мысли сплелись в новую отрасль, известную нам как теория хаоса.

Хаос можно найти практически в любой области науки. Джек Уиздом и Жак Ласкар открыли, что динамика Солнечной системы хаотична. Нам известны все уравнения, массы и скорости, необходимые для предсказания всех движений в вечности, но есть горизонт предсказаний примерно в 10 млн лет из-за хаоса в динамике. Если вам захочется узнать, по какую сторону от Солнца окажется Плутон через 10 млн лет, – лучше и не мечтайте. Те же астрономы доказали, что лунные приливы стабилизируют Землю от воздействий, которые иначе привели бы к хаотичному движению с моментальными сменами климата от жарких периодов к ледниковым и обратно. Так теория хаоса показывает, что без Луны Земля превратилась бы в весьма неприятное место для жизни.

Хаос возникает почти в любой математической модели биологических популяций, и последние эксперименты (где жуков разводят в контролируемых условиях) доказывают, что он отражает реальные законы существования популяций. Экосистемы в природе не достигают сбалансированного состояния сами по себе: они мечутся вдоль странных аттракторов, как правило кажущихся очень знакомыми на первый взгляд, но всегда разных. Наша неспособность разобраться в этих тончайших механизмах регуляции экосистем – одна из причин того, что мы истощили мировые запасы рыбы.

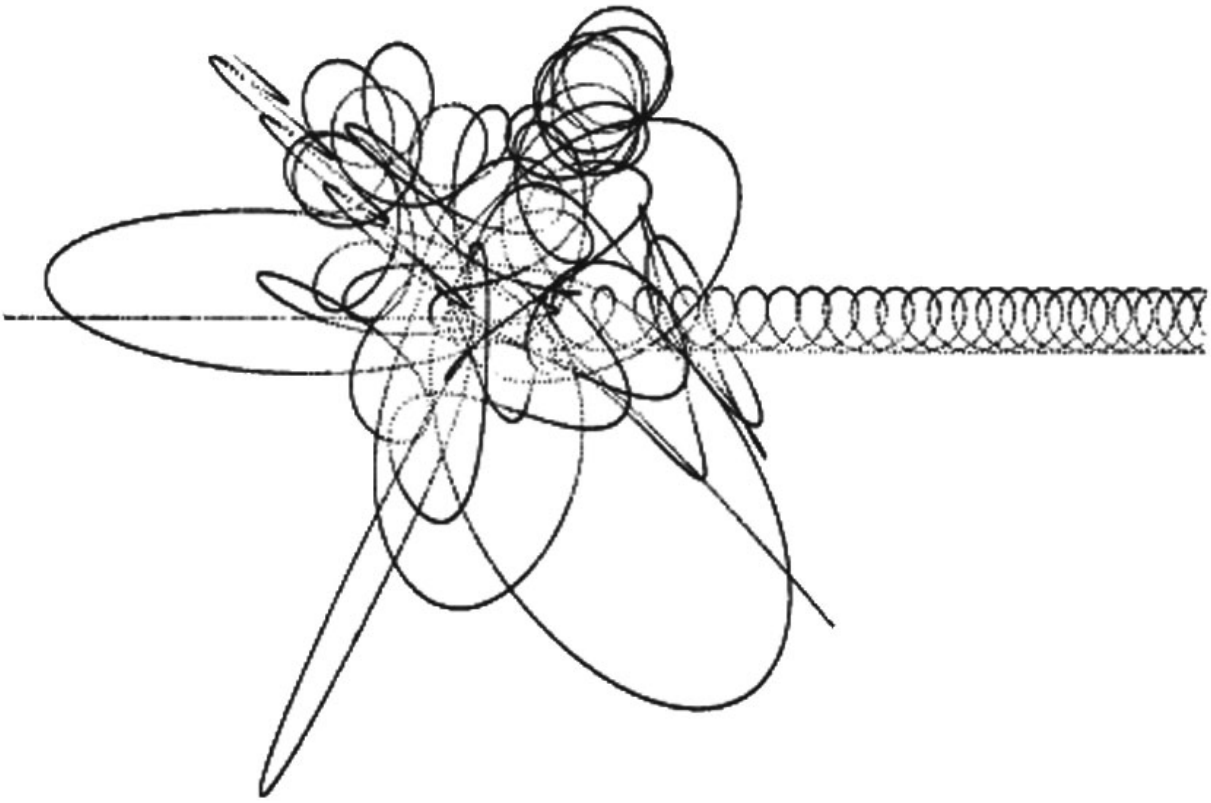
Сложность

От хаоса самое время перейти к сложности. Большинство проблем, с которыми пришлось столкнуться современной науке, поражают своей необычайной сложностью. Чтобы управлять жизнью кораллового рифа, леса или запасами рыбы в океане, необходимо понимать нюансы экосистемы, в которой вроде бы безобидные изменения могут вызвать неожиданные проблемы. Реальный мир настолько сложен и так неохотно поддается измерению, что традиционные способы моделирования тут практически неприменимы, а проверить их еще труднее. В ответ на этот вызов всё больше ученых убеждается в том, что для описания реального мира нам необходимы фундаментальные изменения в том, как мы моделируем наш мир.

В начале 1980-х гг. Джордж Кован, бывший глава исследовательского центра в Лос-Аламосе, решил, что один из способов двигаться вперед лежит в области развития теорий нелинейной динамики. Здесь незначительные факторы могут породить мощные эффекты, жесткие правила – привести к анархии, привычные предметы – обрести невероятные свойства. Иными словами, здесь есть всё, что характерно для реального мира. Но достаточно ли этих сходств для того, чтобы добиться истинного понимания законов природы?

ЧТО НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДАЛА ИМ

Пока нелинейная динамика не стала главной темой в научном моделировании, ей отводилась в основном теоретическая роль. Самой известной работой стало исследование Пуанкаре для задачи трех тел в небесной механике. Оно предсказало существование чрезвычайно сложных орбит, однако не помогло понять, как они выглядят. Главной целью работы было доказать, что у простых уравнений может не быть простых решений – что сложность не закладывается изначально, а может иметь простой источник.



Современные компьютеры могут вычислить сложные орбиты для задачи трех тел

Кован высказал идею о целесообразности создания нового научно-исследовательского института для междисциплинарных исследований и развития нелинейной динамики. Его поддержал Марри Гелл-Ман, нобелевский лауреат по физике элементарных частиц. В 1984 г. они создали объединение, позже названное Институтом Рио-Гранде. Сейчас он известен как Институт Санта-Фе, международный центр по изучению сложных систем. Теория сложности уже стала источником новейших математических методов и подходов с использованием компьютеров для создания цифровых моделей природы. Благодаря машинам ученые анализируют эти модели и открывают потрясающие свойства сложных систем. И они используют нелинейную динамику и другие области математики, чтобы понять, что выдают им компьютеры.

Клеточный автомат

В одном из видов новых математических моделей, известном как *клеточный автомат*, такие объекты, как деревья, птицы или белки, воплощаются в виде маленьких разноцветных ячеек. Они взаимодействуют с соседними ячейками в математической компьютерной игре. Но их простота обманчива: такие игры занимают передовой край современной науки.

Клеточный автомат получил признание в 1950-х гг., когда Джон фон Нейман старался понять способность живых организмов к самовоспроизведению. Станислав Улам предложил воспользоваться системой, открытой пионером компьютеростроения Конрадом Цузе еще в 1940-х. Представьте вселенную, состоящую из огромной решетки квадратов, названных *ячейками*, вроде гигантской шахматной доски. В любой момент любой квадрат может существовать в определенном состоянии. На этой доске-вселенной действуют все законы природы, описывающие, как именно должно меняться состояние каждой ячейки в следующий миг. Изменения состояния удобно представлять разными цветами. Тогда правила можно выразить так: если ячейка красная, а рядом с нею две синих, она должна стать желтой. Любая система такого рода называется клеточным автоматом: клеточным из-за строения, автоматом из-за слепого подчинения предписанным правилам.

Чтобы смоделировать фундаментальные особенности живых существ, фон Нейман создал конфигурацию ячеек, способных воспроизводиться – создавать копии себя. Потребовалось 200 тыс. ячеек и 29 разных цветов для алгоритмического описания всей системы. Она может слепо копироваться и использоваться в качестве шаблона для новых конфигураций того же типа. Фон Нейман не публиковал свою работу до 1966 г.: к этому времени Крик и Уотсон уже успели открыть структуру ДНК, и стало ясно, как на самом деле жизнь воспроизводит этот цикл репликации. Клеточный автомат пребывал в забвении еще 30 лет.



Клеточный автомат

Однако к 1980-м гг. стал расти интерес к системам, состоящим из большого количества простых частей, которые, взаимодействуя, способны производить сложное целое. Традиционно считалось, что математическая модель системы будет тем лучше, чем больше исходных данных удастся в нее включить. Но такой высокодетализированный подход оказался бесполезным для очень сложных систем. Предположим, например, что вы хотите смоделировать рост популяции кроликов. Вам нет нужды включать в

модель ни длину кроличьей шерсти, ни длину ушей, ни особенности их иммунитета. Вам необходимо лишь несколько основных фактов о каждом животном: возраст, пол, беременная самка или нет. Только так вы сможете ориентировать ресурсы своего компьютера на то, что действительно важно.

И для такого рода систем клеточный автомат оказался чрезвычайно эффективным. Он позволяет игнорировать бесполезные детали, касающиеся отдельных компонентов, и вместо этого фокусироваться только на том, как они взаимодействуют. Это оказался прекрасный способ выяснить, какие факторы действительно важны, и приоткрыть завесу тайны над тем, почему сложные системы делают то, что они делают.

Геология и биология

Сложной системой, бросающей вызов традиционной технике моделирования, является процесс формирования речных бассейнов и устья реки. Питер Барроу использовал клеточный автомат, чтобы объяснить, почему эти природные объекты выглядят именно так, как выглядят. Автоматы моделируют взаимодействие между водой, берегами и донными отложениями. Результат объясняет, как разная скорость эрозии почвы влияет на форму русла и как реки вымывают почву, – крайне важные вопросы для речной инженерии и управления. Высказанные здесь идеи также заинтересовали нефтедобывающие компании, поскольку нефть и газ часто обнаруживают в геологических пластах, некогда бывших донными отложениями.

Другой отличный пример приложения клеточного автомата дает нам биология. Ганс Мейнхардт использовал его для моделирования образования узоров на шкуре животных, от раковин моллюсков до зебр. Ключевым фактором оказывается концентрация определенных химических веществ. Взаимодействия – реакции внутри отдельной клетки и диффузия между соседними клетками. Два вида взаимодействия в сочетании создают правила для последующего формирования узора. Результаты показали те закономерности активации и подавления, которые включают и выключают ответственные за синтез пигментов гены во время развития каждого организма.

Стюарт Кауфман применил множество методов теории сложности для проникновения в другую загадку биологии – формирование индивидуального организма. Рост организма неизбежно включает множество законов развития, и это не может быть простым переводом в органическую форму информации, зашифрованной в ДНК. Самым перспективным направлением стало описание развития как сложной нелинейной динамической системы.

Клеточные автоматы сейчас стали признанным методом исследования, с ними связывают даже надежду на открытие новой теории происхождения жизни. Изобретенный фон Нейманом автомат самовоспроизведения чрезвычайно необычен, тщательно продуман для копирования одной очень сложной начальной конфигурации. Типичное

ли это поведение для самовоспроизводящегося автомата, или мы можем увидеть, как самовоспроизведение начнется без обязательной и весьма специфической начальной конфигурации? В 1993 г. Чуи-Хсиен Чу и Джеймс Реггиа изобрели клеточный автомат с 29 состояниями, для которого случайно выбранное исходное состояние, или зародышевый бульон, породило самовоспроизводящиеся структуры более чем в 98 % случаев. В таком автомате самовоспроизводящиеся объекты становятся виртуальной сущностью.

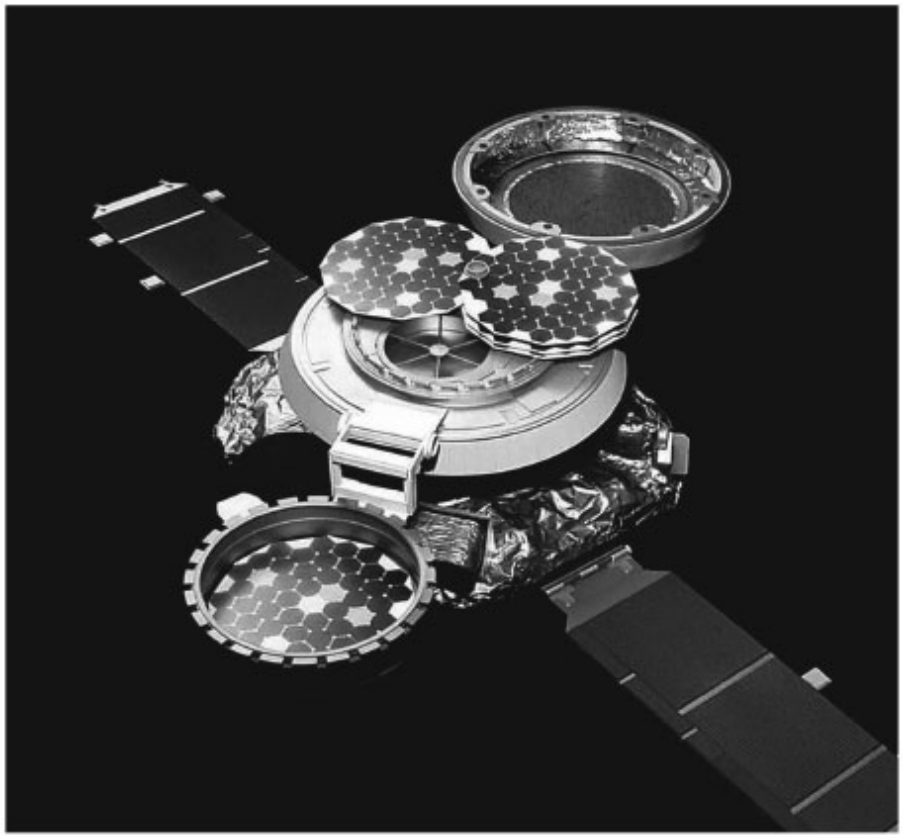
Сложные системы поддерживают точку зрения, согласно которой на безжизненной планете с достаточно сложным химическим составом есть вероятность спонтанного зарождения жизни, способной самостоятельно организоваться в более сложные и изощренные формы. Остается лишь понять, какие правила необходимы для спонтанного появления самовоспроизводящихся конфигураций в нашей Вселенной, – иными словами, какие физические законы сделали этот первый судьбоносный шаг к появлению жизни не просто возможным, а неизбежным.

ЧТО НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДАЕТ НАМ

На первый взгляд может показаться, что хаос не имеет практического приложения из-за своей нерегулярности, непредсказуемости и высокой чувствительности к самым незначительным воздействиям. Но из-за того, что в основе хаоса лежат детерминированные законы, он оказывается очень даже полезным именно в силу этих обстоятельств.

Одно из важнейших его приложений – управление хаосом. В 1950-е математик Джон фон Нейман предположил, что нестабильность погоды в один прекрасный день может стать ее преимуществом, поскольку есть вероятность, что значительный *желаемый* эффект может быть достигнут несравнимо ничтожными воздействиями. В 1979 г. Эдвард Бельбруно понял, что такой эффект может быть использован в астронавтике, чтобы космическое судно смогло преодолеть невообразимо большое расстояние с минимальным расходом горючего. Однако полученные таким образом орбиты

потребовали бы слишком длительного путешествия – два года от Земли до Луны, например, и НАСА тут же потеряло интерес к новой идее.



Спутник «Генезис», НАСА

В 1990 г. Япония запустила небольшой лунный спутник «Хагоромо», отделившийся от большего спутника «Хитэн», который остался на земной орбите. К сожалению, радиопередатчик на «Хагоромо» испортился, и «Хитэн» фактически стал ненужным. Японцы стремились хотя бы частично спасти миссию своих кораблей, но у «Хитэна» оставалось всего 10 % топлива, необходимого для достижения Луны по стандартной орбите. Один из инженеров вспомнил об идее Бельбруно и попросил его помочь. За десять месяцев «Хитэн» добрался до Луны и вернулся, собирая по пути частицы космической пыли, сохранив половину имевшегося топлива. Со времен этого первого

успеха технология использовалась неоднократно, особенно при запуске спутника «Генезис», получившего пробы солнечного ветра, а также миссии ЕКА (Европейского космического агентства) «Смарт-1».

Как мы видим, методы нелинейной динамики стали применяться не только на Земле, но и в космосе. В 1990 г. Селсо Гребоджи, Эдвард Отт и Джеймс Йорк опубликовали фундаментальную работу по теории использования эффекта бабочки в управлении хаотичными системами. Метод применили для синхронизации целого ряда лазеров; для контроля нарушений сердечного ритма (здесь открылась возможность создания разумного кардиостимулятора); для управления электрической активностью мозга (для предотвращения эпилептических припадков); а также для более гладкого движения в турбулентном потоке (со временем это позволит существенно экономить топливо для самолетов).

Как была создана математика

История математики – длинная и причудливая. Первопроходцы в этой науке то совершали гениальные прорывы, то устремлялись по ложным тропам, забредая в тупики, из которых подчас не могли выбраться веками. Но такова судьба любых людей, пытающихся освоить неизведанное. Если бы дальнейший путь был прост и ясен, его мог бы преодолеть любой желающий. Зато в итоге за четыре тысячелетия сложилась та изысканная сложнейшая наука, которую мы называем математикой. Она возникла в сугубо практических целях, и в ней периоды неудержимой активности и роста сменялись временами застоя. Даже центры ее развития перемещались по планете в соответствии со всплесками и провалами развития человеческой культуры. В какие-то периоды ее развитие отвечало практическим запросам отдельной культуры, иногда она выбирала направление самостоятельно, и ее адепты становились в глазах общества просто чудаками, увлеченными игрой разума. И тем удивительнее было каждый раз, когда эти игры окупались в нашем мире, стимулировали развитие новых технологий и нового мировоззрения.

Математика никогда не стояла на месте. Новые приложения требовали новой математики, и она всегда отвечала на этот вызов. В частности, биология требовала от математики новых способов моделирования и взаимопонимания. Да и внутреннее развитие математики было бы невозможно без новых идей и теорий. Многие важные теоремы до сих пор не доказаны, однако математики не перестают работать над ними.

На протяжении всей своей долгой истории математика неизменно черпала вдохновение из двух источников: окружающего нас реального мира и мира человеческого воображения. Какой из них важнее? Никакой. Для нас имеет значение только их сочетание. Исторический подход убеждает нас в том, что математика черпала и мощь, и красоту равным образом из обоих источников. Времена древних греков часто воспеваются историками как Золотой век, когда логика, математика и философия были поставлены на службу человеку. Однако преимущества, полученные благодаря древним грекам, со временем стали лишь небольшой частицей истории. Математика еще никогда не

была столь активна, столь многолика и необходима, как в нашем обществе.

Добро пожаловать в Золотой век математики!

Дополнительная литература

Печатные издания

Гаусс К. Ф. Арифметические исследования // Труды по теории чисел / общ. ред. И. М. Виноградова. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1959.

Собел Д. Долгота. М.: Астрель, 2012.

Belbruno E. Fly Me to the Moon. Princeton: Princeton University Press, 2007.

Bell E. T. Men of Mathematiccs: in 2 vols. Harmondsworth: Pelican, 1953.

Bell E. T. The Development of Mathematics: reprint. New York: Dover, 2000.

Bourgne R., Azra J.-P. Écrites et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois. Paris: Gauthier-Villars, 1962.

Boyer C. B. A History of Mathematics. New York: Wiley, 1968.

Bühler W. K. Gauss: a Biographical Study. Berlin: Springer, 1981.

Cardan J. The Book of My Life / trans. Jean Stoner. London: Dent, 1931.

Cardano G. The Great Art or the Rules of Algebra / trans. T. Richard Witmer. Cambridge, MA: MIT Press, 1968.

Coolidge J. The Mathematics of Great Amateurs. New York: Dover, 1963.

Dantzig T. Number – the Language of Science / ed. J. Mazur. New York: Pi Press, 2005.

Euclid. The Thirteen Books of Euclid's Elements: in 3 vols. / trans. by sir Thomas L. Heath. New York: Dover, 1956.

Fauvel J., Gray J. The History of Mathematics – a Reader. Basingstoke: Macmillan Education, 1987.

Fowler D. H. The Mathematics of Plato's Academy. Oxford: Clarendon Press, 1987.

Hyman A. Charles Babbage. Oxford: Oxford University Press, 1984.

Joseph G. G. The Crest of the Peacock – non-European Roots of Mathematics. Harmondsworth: Penguin, 2000.

Katz V. J. A History of Mathematics. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.

Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford: Oxford University Press, 1972.

Koblitz A. H. A Convergence of Lives – Sofia Kovalevskaia. Boston: Birkhäuser, 1983.

Koblitz N. A Course in Number Theory and Cryptography. 2nd ed. New York: Springer, 1994.

Livio M. The Golden Ratio. New York: Broadway, 2002.

Livio M. The Equation That Couldn't Be Solved. New York: Simon & Schuster, 2005.

Maior E. *e* – the Story of a Number. Princeton: Princeton University Press, 1994.

Maior E. Trigonometric Delights. Princeton: Princeton University Press, 1998.

McHale D. George Boole. Dublin: Boole Press, 1985.

Neugebauer O. A History of Ancient Mathematical Astronomy: in 3 vols. New York: Springer, 1975.

Ore O. Niels Hendrik Abel: Mathematician Extraordinary. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.

Reid C. Hilbert. New York: Springer, 1970.

Rothman T. The short life of Évariste Galois // Scientific American. April 1982. P. 112–120.

Rothman T. A Physicist on Madison Avenue. Princeton University Press, 1991.

Stewart I. Does God Play Dice? – The New Mathematics of Chaos. 2nd ed. Harmondsworth: Penguin, 1997.

Stewart I. Why Beauty is Truth. New York: Basic Books, 2007.

Stigler S. M. The History of Statistics. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986.

van der Waerden B. L. A History of Algebra. New York: Springer-Verlag, 1994.

Welsh D. Codes and Cryptography. Oxford: Oxford University Press, 1988.

Электронные ресурсы

Большинство тем проще всего найти в поисковой системе. Вот три главных сайта.

Исторический архив математики:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Wolfram MathWorld, подборка информации на математические темы:
http://mathworld.wolfram.com

«Википедия», свободная онлайн-энциклопедия:
http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Авторские права на иллюстрации

© Tetra Images/Corbis; © Museum of Natural History Belgium; © Visual Arts Library (London)/Alamy; © The Print Collector/Alamy; © Bill Casselman, с любезного разрешения владельцев таблички YBC7289; Painting of Euclid Greek mathematician by Justus von Ghent © Bettmann/Corbis; сверху © Hulton-Deutsch Collection/Corbis, снизу © Time Life Pictures/Getty Images; © Maiman Rick/Corbis Sygma; © Charles Bowman/Alamy; © Bettmann/Corbis; © RubberBall/Alamy; © Tetra Images/Corbis; © Hulton-Deutsch/Corbis; © Bettmann/Corbis; © iStockphoto/Alija; © Bettmann/Corbis; © David Lees/Corbis; © Bettmann/Corbis; © Science Source/Science Photo Library; © Sheila Terry/Science Photo Library; © Comstock Select/Corbis; © Bettmann/Corbis, репродукция с любезного разрешения Brotherton Collection, Leeds University Library; © National Archaeological Museum, Athens; © Bettmann/Corbis; © Bettmann/Corbis; © National Archaeological Museum, Athens; разрешение: Sophie Germain (1776–1831), иллюстрации из Histoire du Socialisme, Leray, Auguste; Private Collection/Archives Charmet/The Bridgeman Art Library; с разрешения NASA/JPL–Caltech; © Bettmann/Corbis; © Bettmann/Corbis; © Bettmann/Corbis; © Bettmann/Corbis; © Burke/Triolo Productions/Brand X/Corbis, снизу © Martyn Goddard/Corbis; с разрешения NASA/JPL–Caltech; © nagelestock.com/Alamy; © Jack Newton/PhototakeInc/Alamy; © Bettmann/Corbis; © Werner H. Muller/Corbis; © Werner H. Muller/Corbis; © Bettmann/Corbis; Perspective study of a chalice, 1430–40 (ручка и чернила на бумаге), Uccello, Paolo (1397–1475) Gabinetto dei Disegni e Stampe, Uffizi, Florence, Italy/Alinari/The Bridgeman Art Library Nationality; © Stapleton Collection/Corbis; © Robert Yin/Corbis; © Bettmann/Corbis, J-L Charmet/Science Photo Library; © Los Alamos National Laboratory/Science Photo Library, © Robert Yin/Corbis; © Science Photo Library; © Science Photo Library; © C. J. Mozzochi, Princeton N.J.; M.C. Escher’s “Mobius II” © 2008 The M.C. Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com; © Hulton-Deutsch Collection/Corbis; © epa/Corbis; Phototake Inc./Alamy; © Hulton-Deutsch Collection/Corbis; © The Barber by Amman, Jost (1539–91) Bibliotheque Nationale, Paris, France/Giraudon/The Bridgeman Art Library; © Bettman/Corbis; © Alfred

Eisenstaedt/Time Life Pictures/Getty Images; © ImageBroker/Alamy; NASA/Science Photo Library; © Science Photo Library; © Cambridge University Library; NASA/Science Photo Library; © Prof. E. Lorenz, Peter Arnold Inc., Science Photo Library; иллюстрация любезно предоставлена Girton College, Cambridge; Artist’s conception courtesy of JPL

Все рисунки Тима Оливера.

Дизайн и оформление: Харта Маклеода, Кембридж.

Эту книгу хорошо дополняют:

Удовольствие от X
Стивен Строгац

Теория игр
Авинаш Диксит и Барри Нейлбафф

Кому нужна математика
Нелли Литвак и Андрей Райгородский

Стратегические игры
Авинаш Диксит, Сьюзан Скит и Дэвид Рейли-младший

Голая статистика
Чарльз Уилан

---

notes

Сноски

1

А 19 октября 2011 г. Александр Йи и Сигэру Кондо рассчитали число с точностью в 10 трлн цифр после запятой. *Прим. науч. ред.*

2

Сомнительно. Отец оставил Кардано небольшое имущество, но право на наследство оспаривалось многими людьми. Кардано выиграл суды, но через 23 года. Кроме того, в силу преимуществ из знания теории вероятностей он обыгрывал людей в азартные игры, причем прилично. Источник: Гутер Р., Полунов Ю. Джероламо Кардано. М., 2010. *Прим. науч. ред.*

3

По легенде, Кардано предсказал день своей смерти (лет за сорок до нее) и, чтобы оправдать это и авторитет знаменитого астролога, покончил с собой (по одной версии – уморил себя голодом, по другой – принял яд). На самом деле он умер позже, ошибившись на три года и назначив день своей кончины на декабрь 1573 г. *Прим. науч. ред.*

4

В переводе с французского – «первый», «поверхность», «кубический» и «поверхность на поверхность». *Прим. науч. ред.*

5

Теперь, по состоянию на январь 2016 г., самым большим известным простым числом является $2^{74\ 207\ 281} - 1$. Оно содержит 22 338 618 десятичных цифр. *Прим. науч. ред.*

6

Цит. по: Стюарт И. Истина и красота. Всемирная история симметрии. М.: Corpus: Астрель, 2010. С. 175. *Прим. науч. ред.*

7

В русской математике принято определение, что натуральные числа – те, которые мы применяем при счете: 1, 2, 3… В англоязычной немного иначе: натуральными числами являются те, которыми обозначается количество предметов: 0 предметов, 1 предмет… Поэтому далее в этой главе 0 вслед за автором мы будем причислять ко множеству натуральных чисел. *Прим. науч. ред.*

8

Речь о том, что кость не подвергалась доработке, все грани одинаковы, ни одна не утяжелена. *Прим. науч. ред.*