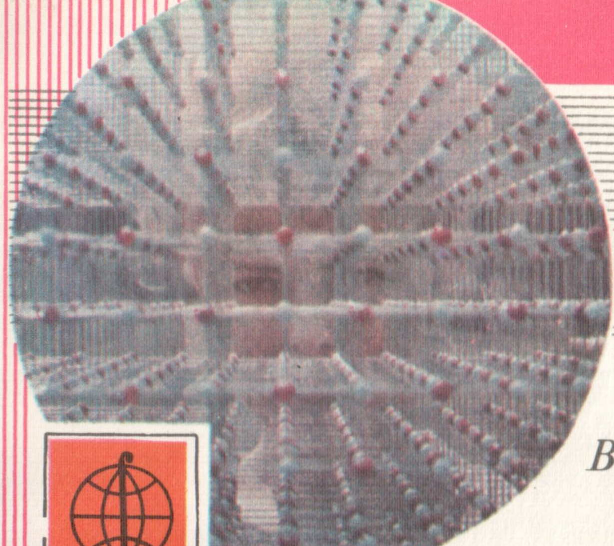
РАССКАЗЫ СИБИРСКИХ УЧЕНЫХ



ICM

Москва 1966

ТРОЕ В ОДНОЙ КАЮТЕ, НЕ СЧИТАЯ МАТЕМАТИКИ

12

Σ

ТРОЕ В ОДНОЙ КАЮТЕ, НЕ СЧИТАЯ МАТЕМАТИКИ

Что такое математика, есть ли в ней поэзия и юмор, а также „белые пятна“?

РАССКАЗЫВАЮТ

доктор
физико-математических наук
профессор

РОМАН НИКОЛАЕВИЧ
ЩЕРБАКОВ

и кандидат педагогических наук
доцент

ЛЕВ ФЕДОРОВИЧ
ПИЧУРИН

ЗАПАДНО-СИБИРСКОЕ
КНИЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Новосибирск

1975

001
Р 24

$Р \frac{70603-070}{М\ 143(03)-75} 70-75$

Меж ими все рождало споры
И к размышлению влекло...

А. С. Пушкин

То, что крайне абстрактно для одного поколения математиков, тривиально для следующего, и гневные крики, еще слышные по временам, обычно исходят от пожилых людей, явно опасающихся не поспеть за молодежью.

Ж. Дьедонне

Если не сумеем все знать, постараемся знать побольше и главное — поглубже...

О. Ю. Шмидт

Не замечали ли вы, что в наше время люди стали мало беседовать друг с другом? И вы, наверное, не очень-то поверите, что все, написанное дальше,— запись рассказа, услышанного авторами в учительской в начале учебного года. Пусть так... Прочитайте... Может быть, действительно, ничего не было: ни этого рассказа, ни Виктора, ни Анатолия Ивановича, ни даже Семена Борисовича. И все-таки это — правда.

„ГЕНЕРАЛ" БУРБАКИ

Как путешествовал? Здорово, впечатлений больше, чем надо, и не столько от самой поездки, сколько от попутчиков.

Вы знаете, начало маршрута — Новосибирск. Приехал туда, ну, думаю, теперь — все. Ни директора, ни завуча, ни отличников, ни двоечников, ни новой программы, ни успеваемости. Работаю пять лет, а отдыхаю по-настоящему — в первый раз. Две недели побыл на реке, отдышался, отоспался да и увидел немало. Право, нам надо больше ездить, а то все говорим «великие сибирские реки» и ничего о них не знаем. Для меня теперь хоть одна — не просто голубая змейка на карте, а что-то близкое и знакомое.

Теплоход — действительно красавец.

Вошел в каюту. На диване этакая длинная фигура с дикой прической, в невероятных джинсах с нашлепками на всех выдающихся местах и почитывает зелененькую книжицу, я подумал — детектив. Я ведь тоже в дорогу с собой беру либо детектив, либо что-нибудь вроде «Трое в одной лодке, не считая собаки» — незаменимое чтение на отдыхе. Присмотрелся повнимательнее к обложке — вот тебе и детектив! Помните, в институте усовершенствования учителей нам показывали «Линейную алгебру и элементарную геометрию» Жана Дьедонне?

Я пробовал читать и ничего не понял уже в первой главе. А это дитя акселерации мало того, что именно ее читает, так ведь еще и смеется. И на студента не похож, скорее — старшеклассник. Вместо приветствия спрашиваю:

— Над чем смеетесь, молодой человек?

— А вот над чем. Вы давно в школе учились? Математику не забыли? Послушайте! — и начинает читать мне абзац за абзацем о том, что задач на построение циркулем и линейкой решать не надо, что свойства традиционно изучаемых треугольников, четырехугольников и окружностей никому не нужны, что тригонометрические формулы полезны только для астрономов, геодезистов и составителей учебников по тригонометрии и что вообще вся математика, изучаемая в средней школе, предназначена для того, чтобы потом ее забыть, так как как ни в одном курсе высшего учебного заведения она не используется, а в жизни и вовсе бесполезна. И, конечно, все это его привело в восторг — еще бы, он теперь умнее своих учителей! Что мне оставалось сказать! Я его спрашиваю:

— Вы, наверное, знаете, что без тригонометрии не решить ни одной задачи на вычисление объемов и поверхностей, а эти задачи обязательно встречаются на приемных экзаменах в вузах? И при изучении высшей математики без тригонометрии не обойтись, как не обой-

«Генерал» Бурбаки, имя которого принял коллектив математиков (рисунок сделан с гравюры).

тись и без треугольников, четырехугольников и всего школьного курса математики.

Он посмотрел на меня с явным недоверием и сказал:

— Это все так говорят. А написал-то не кто-нибудь, а сам Дьедонне!

Я спросил, что значит «сам», и он, представьте, довольно обстоятельно рассказал, что во Франции есть коллектив ученых, публикующих под псевдонимом Никола Бурбаки серию книг под общим названием «Элементы математики». Более того, у него есть три книги из этой серии, но он в них ничего не понял, решил начать с чего-нибудь другого, попроще. Какой-то шутник ему и посоветовал начать с Дьедонне, потому что Дьедонне — один из самых активных членов этого коллектива.

ТРОЕ В ОДНОЙ КАЮТЕ

Заговорили мы о Бурбаки и Дьедонне, о том, с чего надо начинать. Я, конечно, говорю, что надо нажимать на школьную программу, в ней и есть истинное начало. Он мне свое: все, что делается в школе, устарело, неинтересно, и так далее. В этот момент и появился наш третий попутчик — высокий, худой, в ковбойке и тоже в джинсах, только без наклеек, да и прическа, вернее, то, что от нее осталось, поскромнее, чем у моего юного собеседника. Он как-то сразу сумел стать главным.

— О чем спорите? — говорит.— С чего начинать? С Дьедонне? Нет, начинать надо с материальных потребностей. Не лучше ли сначала поужинать? Вы уже познакомились с распорядком дня? Нет? А друг с другом? Тоже нет? Молодой человек, вы чем знамениты?

— Ничем не знаменит. Зовут Виктором, учусь в девятом классе, вернее, теперь в десятом, вот и все.

— Виктор? Виктор — это хорошо. Виктор — значит победитель.

— А я и вправду победитель, мне путевку дали за первое место на математической олимпиаде.

Теперь мне стало ясно, как сюда попал противник тригонометрии. Сначала-то мне не очень все это понравилось: я путевку в обкоме профсоюза, можно сказать, зубами выгрыз, а этому мальчишке кто ее дал? Ну, а так-то, пожалуй, не зря, все же не так много у нас любителей математики, да еще и участников олимпиад.

Попутчик наш назвал себя Семеном Борисовичем, пришлось и мне представиться.

— А где работаете?

Честно говоря, не очень хотелось отвечать — подумал, что сразу же начнутся разговоры об олимпиадах, потом об успеваемости, о том, какие ныне пошли умные и ленивые дети... Я ведь именно от этих разговоров и убежал. Хотел соврать, да вовремя вспомнил римскую поговорку о том, что лгун должен иметь хорошую память. Я все равно проговорился бы.

— О, учитель математики — это дело серьезное. В шахматы играете? — спросил Семен Борисович.

— Играю, — говорю, а сам думаю: хорошо, что он не спросил о преферансе. Картежники, пьяницы и храпуны — самые опасные попутчики.

— Ну, раз в шахматы играете, значит не пропадем. А то я было испугался: один — победитель, другой — учитель, вы ведь тут и заклевать меня можете. Так как все же насчет ужина? А спор о чем?

Я рассказал про скептическое отношение Виктора к школьной математике, про Бурбаки, про желание изучать новую математику. Надеялся на поддержку, но Семен Борисович сказал:

— Так, наверное, Виктор прав — новое обычно лучше старого. И вообще, зачем нужна ваша школьная математика? Чтобы в вуз поступить? А вы точно знаете, что́ именно там нужно? Вузов-то сотни, в каждом — свое. Я больше полжизни прожил, а тригонометрических уравнений так и не научился решать.

Я ему, естественно, возразил:

— Так вы, Семен Борисович, наверное, вообще не имеете отношения к математике?

— Да как вам сказать? Сейчас все имеет отношение к математике, вернее, математика ко всему, только смотря что называть математикой. Виктор, как ты думаешь, что такое математика?

МАТЕМАТИКА? ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

— А я не думаю, я знаю. У нас в классе над доской написано: «Математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира», Фридрих Энгельс.

— Что ж,— сказал Семен Борисович,— память у тебя неплохая. Но когда это было сказано! Ведь еще в начале нашего века, после Лобачевского и Кантора, философы, да и сами математики, были вынуждены задуматься над тем, что есть математика. Помнится, еще в студенческие годы мне пришлось читать и такие, например, высказывания: «Геометрия — это то, чем занимаются геометры», а «Математика — это доктрина, в которой неизвестно, о чем мы говорим и верно ли то, что мы говорим».

— А это когда было? И где это сказано?— не выдержал я.

Семен Борисович сразил меня наповал:

— Первое — несколько утрированная цитата из работы крупнейшего математика начала нашего века Освальда Веблена, второе — общеизвестный афоризм английского ученого, борца за мир Бертрана Рассела.

В первый раз Рассел написал это в начале века, а математики с удовольствием цитируют его до сих пор. Но школьный курс математики и даже та математика, которая существовала во времена Энгельса, т. е. около ста лет назад, не могли бы привести к таким мыслям. Так что я не удовлетворен твоим ответом, Виктор.

Виктор обрадовался:

— Вот я же говорю, в школе не тому учат, не той математике.

Я, конечно, в амбицию. Но тогда Семен Борисович спросил меня про успеваемость и истинные знания. Ну, вы догадываетесь, что я ответил. А Виктор добавил, что у них половина класса в математике, честно говоря, почти ничего не понимает, а другая половина — так себе, даже и отличники. Тут наш спутник и говорит:

— Вот вам и загадка. Если согласиться с Вебленом и Расселом, то все понятно — конечно, то, о чем они говорят, недоступно для школьника. Но зачем заниматься вещами, недоступными простым смертным? Ну, а если говорить об определении Энгельса, то получается не очень-то гладко: живем в действительном мире, вокруг нас формы и отношения, все должно быть простым и понятным, а это простое и понятное не дается многим школьникам. В чем дело?

— Формул много,— сразу же ответил Виктор,— все надо помнить чуть ли не с первого класса, да и соображать надо как следует.

— Соображать? Хвастливый вы народ, уважаемые математики. Вас послушать, так литератору и биологу соображать уже не надо, математики — народ избранный. Так, может быть, уже в школе отделить этих избранных, их уж и учить как следует, а остальные — перебьются, им думать не надо. Так, что ли, Анатолий Иванович?

Ну, вы, конечно, знаете, что эта мысль не нова. Я сразу вспомнил наши вечные споры в учительской.

Действительно, зачем всех учить математике? Есть явно неспособные: хоть учи, хоть не учи, все равно толку не будет. Ведь сделано же в некоторых зарубежных странах так: в одних классах побольше математики, а в параллельных — нажимают на историю с географией, и так далее. Сделать так и у нас, и забот бы стало меньше. Все это я им подробно доложил, Виктор сразу же поддержал меня, а Семен Борисович съехидничал:

— А вас, Анатолий Иванович, в связи с сокращением классов с преподаванием математики, уволить за ненадобностью?

— Ну и какая беда? Пойду на завод.

— Диплом в рамочку и на стенку, а сам — к станку, токарем?

— Токарем тоже не так уж плохо, только сейчас и на заводе нужны квалифицированные математики. Наш брат никогда без куска хлеба не останется.

— Что, неужели «ваш брат» так уж нужен?

Что бы вы по этому поводу возразили? Я сказал, что уже сегодня требуются десятки тысяч вычислителей, программистов, инженеров-математиков, а к тому времени, когда наши ученики станут взрослыми, могут понадобиться чуть ли не миллионы таких рабочих-математиков. И тут Семен Борисович поймал меня снова:

— Поздравляю. А еще говорят, что у математиков железная логика в споре. У вас получается так: учить вы хотите не всех, а только избранных, математиков же с каждым годом потребуется все больше и больше. Вы не находите противоречия? Находите? А где же выход?

ОХ, НЕЛЕГКАЯ ЭТО РАБОТА...

...Гудок прервал наш спор: теплоход начал отчаливать. Мы пошли на палубу, однако я не мог уйти от всех этих вопросов. Ведь, действительно, десять лет, более двух тысяч уроков учим школьников математике, да еще сколько времени они сами занимаются, а результаты? Что математика — важная наука, это все понимают. А знают ее наши выпускники плохо, на приемных экзаменах проваливаются, конкурсы на физико-математические факультеты маленькие. Явное противоречие. И, конечно, причины могут быть разными. Либо мы не тех учим, либо не так учим, либо не тому, чему надо.

Н. Н. Лузин

Хотя, конечно, насчет «не тех» я неправ, это обычно говорится сгоряча. Во-первых, если учить математике только часть молодежи, то это будет несправедливо. Где-нибудь в глухой сибирской деревеньке нет хорошего учителя, вот вам и пожалуйста — сначала человек не получил предварительной подготовки, а потом его уже не пускают в математику.

Во-вторых, кто возьмется определить в шестом-седьмом классе, имеет ли ученик способности к математике? Папа с мамой? Да для родителей их чадо всегда самое умное и способное. К тому же, сейчас почти все родители понимают: математическое образование открывает для юноши или девушки очень большие перспективы. Короче говоря, на родителей не очень-то можно полагаться. Пусть решает учитель? Едва ли что получится. Известно же, что академик Николай Николаевич Лузин в томской гимназии учился посредственно. Если бы доверили в свое время этой гимназии судьбу Лузина, так и не было бы одного из самых крупных советских математиков! Михаила Васильевича Остроградского, выдающегося русского математика XIX века, в гимназии считали слабым именно по математике. Сам Ньютон в школе учился далеко не лучшим образом! Нет, доверять школе или родителям отбор способных и неспособных — сомнительный путь.

А потом еще одно. Вот мы говорим о способных и неспособных к математике. Но не путаем ли мы разные вещи: способность и работоспособность? Все же наша школьная программа вовсе не рассчитана на вундеркиндов, ею должны овладевать все. В первых классах все и овладевают, а потом уж начинается: один поленился, другой проболел, третьему не хватило настойчивости или у него от природы замедленная реакция, а мы уж сразу — неспособен.

К тому же обстановка изменилась. Раньше в классе было один-два любителя математики, они и шли потом в те вузы, где много математики. Вот нам и хватало стихийно развивающегося у некоторых ребят интереса к математике и увлеченности ею. А теперь? Ведь теперь понадобились не только математики-теоретики, но и математики-рабочие, двух-трех из класса действительно не хватит. Надо не просто отбирать способных к математике, а сделать всех или почти всех способными и интересующимися ею.

Так вот, учить, конечно, надо всех, тем более, что для особо интересующихся есть кружки, факультативы, олимпиады, журнал «Квант», множество популярных книжек. Только учить надо как-то по-иному, интереснее, современнее, что ли...

Изучали же все мы в пятом классе десятки искусственных приемов решения арифметических задач. Учителя доказывали нам, как это полезно и важно. Целый год на эту полезность тратили. А оказалось, что не только не полезно, а просто вредно. Сейчас ввели чуть ли не с первого класса алгебраический подход. Малыши преспокойно составляют и решают уравнения, и хуже они от этого не стали. И не только малыши! Когда-то теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника называлась «мостом ослов», так как студенты университета не могли преодолеть трудностей ее доказательства. Студенты университета! А я сейчас двойки ставлю шестиклассникам, если они не понимают этого доказательства, и ведь редко ставлю. В Парижском университете экзамен по геометрии на степень магистра искусств можно было заменить присягой в том, что экзаменующийся прослушал лекции по первым шести книгам «Начал» Евклида. А нынче содержание этих шести книг почти полностью соответствует программе восьмилетней школы. Содержание, а не форма изложения! Да таких примеров сколько угодно! Знаменитая работа Архимеда «Квадратура параболы» насчитывает восемнадцать страниц современного текста и в средние века была доступна только наиболее талантливым математикам. А сегодня ее содержание занимает несколько строчек в новом учебнике для десятого класса. Конечно, Архимеда и Евклида и сейчас читать не так уж легко, зато их открытия теперь так изложены в учебниках, что понять их совсем нетрудно. Может быть, в этом и заключается главное? Может быть, надо так построить школьную программу и так обучать, чтобы по содержанию все было на уровне нашего века, а по форме изложения — просто и доступно? Делают же так физики, биологи, химики... Правда, им все же проще. Узнали физики свойства атома — и уже рассказывают об этом в школе. Биологи говорят о генах, химики — о полимерах. И все это новое не так уж жестко связано с традиционным материалом. Вот они и исключают что-то «старое», добавляют «новое», преподают «на современном уровне». Так бы надо и нам, только в математике как-то очень уж все это страшно — не исключишь же, скажем, таблицу умножения, теоремы о равенстве треугольников и тригонометрические функции. А раз не удается исключить многого из старого, то куда же вставить новое?

Нам на лекциях по методике рассказывали о программах русских гимназий прошлого века. И оказалось, что эти программы почти не отличаются от современных. Даже в лицее, где учился Александр Сергеевич Пушкин, изучались почти те же вопросы математики, что и в наше время. Ну, ладно, не те же, но все-таки принципиального различия нет. Помните знаменитые слова Евклида о том, что в науке нет царской дороги? Обычная дорога еще тогда казалась длинной, какова же она теперь? Ведь надо изучить арифметику — без нее никуда не денешься, алгебру, геометрию — пройти весь путь, который человечество прошло за несколько тысячелетий от древних до Ньютона и Лейбница, а уж потом браться за современную математику. Как ни крути, а времени на все в школе наверное не хватит, вот и получается, что учим мы всему старому, а жизнь давно идет по-новому, мы в школе останавливаемся где-то на уровне восемнадцатого века, а в современной науке и технике работает математика двадцатого...

Так я размышлял, стоя вместе со своими попутчиками на палубе нашего теплохода и почти не замечая, как мы отошли от берега, как теплоход набрал скорость, как мимо нас проплыли трубы заводов, как незаметно стемнело, стало прохладно и палуба опустела. За ужином мы, действительно, не решали «мировых проблем» — в общем-то все устали с дороги, все только сегодня приехали в Новосибирск.

ЧТО ОСТАЛОСЬ ОТ КОТА?

А на второй день — вот она, Сибирь-матушка! Семен Борисович, первым выскочивший было на палубу, влетел в каюту, как пуля:

— Сегодня я домосед — на реке дождище, вся палуба мокрая, холодно, мрачно, берегов почти не видно. Что делать-то будем?

Я для начала прочел вслух вторую главу из «Трое в одной лодке...», то место, где герои попали ночью под дождь, у них снесло ветром палатку и так далее. В отличие от героев Джерома, настроение у нас не испортилось, а наоборот. Тем более, что Виктор не читал этой книги, за что ему изрядно влетело от Семена Борисовича:

— Юный друг, как же это так — увлекаетесь математикой, а юмористической литературой не интересуетесь? А наших сатириков вы читали? Нет? Да вы вообще что-нибудь, кроме задачников и вашего Дьедонне, читаете? Вам это ни к чему, вы твердо решили, что будете чистым математиком, и, следовательно, ничего, кроме математики, знать не желаете? Значит, и математики знать не будете. Ибо все настоящие математики — люди очень эрудированные, с широким кругозором, с разносторонними интересами.

Тут я поддержал Семена Борисовича. Я давно интересуюсь историей математики, вернее, не столько историей, сколько биографиями выдающихся математиков. Привел я Виктору всем известные примеры: Декарт был философом, Монж — морским министром, Софья Васильевна Ковалевская писала стихи и прозу, Александр Яковлевич Хинчин, известный математик и педагог, тоже писал стихи, Павел Сергеевич Александров, академик, крупный современный математик, читает студентам лекции, посвященные классической музыке, другой академик, Александров Александр Данилович — он работает в Новосибирске — превосходный спортсмен, мастер спорта... Я бы мог продолжить этот список, но Виктор нанес довольно увесистый ответный удар:

— Я читал, что заключение, сделанное на основании частных примеров, называется индуктивным и может оказаться ошибочным. Вы специально называете таких математиков, которые чем-то еще увлекались, кроме своей профессии. А наверняка есть и такие, которые, кроме своих уравнений, ничего не знают.

Помог мне Семен Борисович:

— Точно, есть и такие, только они все-таки составляют исключение из общего правила. А если уж тебе так хочется доказательства общего правила, то я, пожалуй, сумею его привести. Скажи, Витя, чем все-таки, по-твоему, занимаются математики?

— Задачки решают.

— Допустим. А зачем?

— Как зачем? Интересно.

— Интересно? Некоторые шахматные этюды еще интереснее, но государство обычно не субсидирует шахматные клубы, а математические институты — сколько угодно.

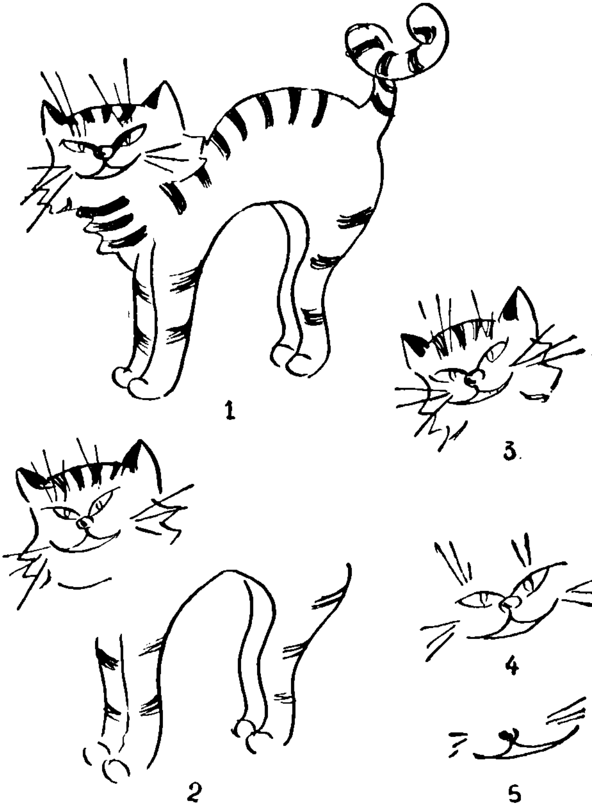
— Так ведь от шахматных этюдов польза только тем, кто их решает, а от математических задач — всем.

— Вот именно, всем. А почему всем? Потому, что математика изучает не сами вещи, окружающие нас, а их свойства, да еще взятые отдельно от вещей, свойства, общие для разных вещей. Не нравится? Не совсем понимаешь? Чеширского Кота помнишь?

— Какого еще кота?

— Эх ты! Анатолий Иванович, вы, кажется, неплохо знаете историю математики, расскажите юноше о Льюисе Кэрролле.

О Льюисе Кэрролле и его Алисе я могу говорить часами. Интересный был человек. Профессор математики



Оксфордского университета Чарлз Доджсон публиковал под псевдонимом Льюис Кэрролл сказки, очерки, стихи. Я не знаю точно, что именно он сделал в математике, но в литературу он вошел как один из самых знаменитых во всем мире детских писателей. А Чеширский Кот упоминается в наиболее известной из его книг: «Приключения Алисы в стране чудес». Кот этот был очень своеобразным: он, как и полагается сказочным котам, мог разговаривать с Алисой, но, кроме того, он очень странно уходил. Сначала исчезал хвост, потом ноги, спина, голова... А улыбка оставалась еще некоторое время без самого кота.

— Вот именно,— подхватил Семен Борисович,— улыбка кота без кота. Вот улыбку отдельно от кота и изучают математики.

— Знаете, товарищи взрослые, вы взялись мне голову морочить какой-то чепухой.

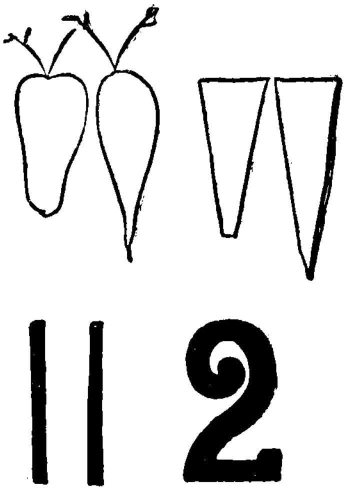
— Чепухой, говоришь?— Семен Борисович, похоже, рассердился всерьез.— Натуральные числа вы проходили? Ну, скажем, два. Не два поросенка и не две морковинки с зелеными хвостиками, а просто два. Тебе понятно, что это такое?

— Понятно.

— И не чепуха это?

— Конечно, нет

— Странно, насколько ты непоследователен. Ведь просто «два», без предметов, которых два, не бывает точно так же, как не бывает улыбки без того, кто улыбается. Нет кота — нет улыбки, нет предметов, нет и их числа. Но ты прэвосходно складываешь числа, умножаешь их и еще много чего делаешь. С улыбкой у тебя это не получается потому, что никто не знает, что такое, скажем, сумма двух улыбок и обладает ли она переместительным законом. Иначе говоря, на множестве улыбок не определено никакого «действия». Оно и не нужно — улыбки просто приятны без всяких операций над ними. Но важно-то другое: в состоянии ли человек отвлечься от одних свойств предмета, иногда почти от всех, и заняться другими свойствами? Может ли человек мысленным взором видеть числа без предметов, треугольники без цвета, кубы без массы, улыбки без котов и так далее? В состоянии ли человек, как говорят, мыслить абстрактно, может ли он развить в себе этот навык? Ведь если нет — трудно будет ему даваться математика, а уж заниматься ею после школы станет и вовсе невозможно.



— Хорошо,— согласился Виктор,— это я все понимаю, только тут сразу возникает еще несколько вопросов. Во-первых, как быть, если этого навыка нет?

— А как быть, если ты не можешь прыгать через гимнастического коня?

— Как быть? Работать, упражняться.

— Все ясно, давай второй вопрос.

— А второй вопрос очень простой — мы же начали с кругозора. При чем здесь кругозор?

— Вот при чем. Слышал такие строчки: «Словно я весенней гулкой ранью проскакал на розовом коне»? Правильно, Есенин. Хорошо сказано? А розовые лошади бывают? Или там же: «Все пройдет, как с белых яблонь дым». Тоже здорово? Но дым с яблонь идет точно так же, как скачут розовые лошади! Замечательно написано, поэт сумел увидеть и выделить главное в его видении свойство, да так написать, что ты поверил. Умение отвлекаться от частного, выделить главное, подчеркнуть интересное, описать его — для кого это важно? Для поэта, художника, музыканта — для тех, кто умеет образно мыслить, а также и для математика, который должен уметь мыслить отвлеченно. А этому тоже надо учиться и учиться необходимо на широком материале. Погоди.

погоди, это еще не все, это только половина причин, по которым математик должен быть широко эрудированным человеком. А вот вторая, главная половина. Ты говоришь, решать задачки. Но откуда они берутся, эти задачки? Часть из самой математики, из ее собственных запросов и потребностей. Но основная часть, и этим как раз и определяется государственное отношение к математике, есть задачи, которые ставят промышленность, транспорт, экономика вообще. Беда только в том, что сейчас очень часто люди, работающие рядом с математикой, не могут перевести свои задачи на язык современной математики, а некоторые математики не всегда знают, а иной раз и не очень-то хотят знать, где именно может быть применена облюбованная ими область чистой науки. Понятно? Пожалуйста, третий вопрос.

Третий вопрос задал я:

— Семен Борисович, все это довольно убедительно, только у меня давно уже возникает личный вопрос. Откуда вы все это так хорошо знаете?

— Да как вам сказать? Приходится знать, так сказать, по должности. Я заведую одной из математических кафедр в университете.

Мы с Виктором переглянулись и чуть ли не хором спросили:

— А чего же вы нам головы морочили? Спрашивали, что такое математика, боялись, что мы вас заклюем? Вот вы-то и должны нам рассказать, что такое математика и чем занимаются математики.

— А вы, действительно, хотите получить серьезный ответ на эти вопросы?

— Именно серьезный,— сказал я, а Виктор добавил:

— Только попонятнее.

— Ну, что же, я попробую, только одно условие — я рассказываю, пока погода скверная. При хорошей погоде я — турист. Согласны?

— Конечно, согласны.

Семен Борисович выглянул в иллюминатор, покачал головой, вздохнул, пробормотал что-то не очень лестное в адрес небесной канцелярии и начал рассказывать. А я набрался смелости и вытащил записную книжку, которую сейчас держу в руке.

ОЧЕНЬ СЕРЬЕЗНЫЙ РАЗГОВОР

— Итак, серьезный ответ на очень серьезный вопрос. Ясно, что мне не отделаться какой-нибудь цитатой и комментариями к ней. Кстати, вообще, нет ничего вреднее как для науки, так и для образования, чем злоупотребление цитатами.

Яркий пример — цитата, которую ты, Виктор, привел вчера. Вырванная из контекста полемического сочинения Фридриха Энгельса «Анти-Дюринг», она долгие годы кочевала по нашим учебникам и энциклопедиям и постепенно стала служить цели, противоположной той, которой она служила первоначально. У Энгельса речь идет только о «чистой» математике (в отличие от прикладной). Это, во-первых. Во-вторых, Энгельс делает логическое ударение на том, что пространственные формы и количественные отношения, то есть исходные, первоначальные понятия математики, взяты из «реального мира», имеют «реальный прообраз». Ему важно показать, что математика возникла из реального мира, а не из «чистого разума», что математика связана с действительностью, с производством, что ее первопричины материальны. Энгельс вовсе не собирался раскрывать подробно содержание предмета математики. Поэтому в последующем тексте Энгельс останавливается лишь на происхождении десятичной системы счисления, цилиндра, шара и так далее.

Вульгаризаторы науки (именующие себя обычно популяризаторами) придали энгельсовскому определению еще более грубую форму: математика, дескать, есть наука о числах и фигурах, а что сверх того, то от лукавого, то идеализм. Не мудрено, что они с легкостью необыкновенной зачислили в идеалисты даже Отто Юльевича Шмидта...

Здесь мы перебили нашего профессора. Виктор знал, что академик Шмидт был известным полярником, Героем Советского Союза, руководителем экспедиции на «Челюскине» и организатором первой дрейфующей станции «Северный полюс», но не знал, что Шмидт был крупным специалистом в современной алгебре. Я не очень хорошо знаю современную алгебру, но все-таки кое-что о математических работах Шмидта слышал. Правда, меня всегда удивляло, как такой великий практик и организатор науки, такой «земной человек» совмещал все это с самыми абстрактными вещами в математике. Об этом мы и спросили Семена Борисовича.

— Видите ли, коллега, чистая математика — вся абстрактна. В абстрактности, в отвлеченности — ее суть. Энгельс подчеркивал эту сторону дела, но об этом както забывают, ибо многие студенты читают не столько классиков, сколько популярные брошюры об их работах, читают всякие отрывки, а потом зазубривают: «классами называются...», «империализмом называется...», «аксиомы есть...» и так далее. А в жизни не видят, где эти самые классы, а где живые люди. Не могут понять, как мог капиталист Энгельс стать вождем пролетариев, а лидер «рабочей партии» Голда Меир — цепным псом империализма, как любое утверждение можно принять за аксиому...

— Как это любое? — не выдержал Виктор. — Любую чепуху? Дважды два — пять?

— Ну здесь я, пожалуй, немного увлекся. Но мне хотелось вернуться к математике, а современная математика как раз базируется на так называемом аксиоматическом методе, причем основательно отличающемся от того, что известно школьникам как аксиоматика Евклида. Известно, Виктор?

— Конечно. Аксиомы — это истины, не требующие доказательства, так ведь, Анатолий Иванович?

— По-моему, так,— ответил я,— можно даже и поточнее. Ленин писал, что аксиомы — это логические фигуры, миллиарды раз повторенные...

— Стоп, друзья мои. Мы договорились не прятаться за цитаты. Кроме того, аксиомы в математике — это не совсем то, что аксиомы в философии, в жизни, в практике. И даже совсем не то!

— Ты, Виктор, прав, говоря, что «аксиомы в математике не требуют доказательства». Но только вовсе не потому, что они представляются истинными любому человеку a priori, то есть без всякой опытной проверки. Иными словами, математические аксиомы — это не тривиальные утверждения, не «вечные истины». Они не нуждаются ни в очевидности, ни в проверке «практикой». Они есть исходный пункт всей математической теории, это просто правила некой игры. Вот вы, Анатолий Иванович, играете в шахматы. Виктор, наверное, тоже?

— У меня второй разряд.

— Превосходно. Значит, правила этой игры — как могут ходить фигуры, как они «съедают» друг друга, в каком случае игра считается законченной и так далее — вам известны. Очевидны эти правила? Нет. Можно их доказать? Нет. А проверить практикой? Тоже нет. Эти правила и есть шахматные аксиомы. И вся шахматная теория, а по ней, кстати, написаны горы книг, следует из этих аксиом и имеет совершенно научный, строго доказательный характер. Так и в любой современной математической теории: аксиомы — это свод правил игры теми или иными фигурами.

— Позвольте, Семен Борисович,— вмешался я,— но в математике есть еще и определения.

— А что такое определения? Ведь это только сведение «нового» понятия к «старым». Ромб есть параллелограмм с равными сторонами... Параллелограмм есть четырехугольник с параллельными сторонами... Четырехугольник — это четыре точки, соединенные четырьмя непересекающимися отрезками... Что? Неправильно? Неправильных определений не бывает, они просто или соответствуют тому понятию, которое вы определяете, или не соответствуют. Ах, не так учили! И все-таки четыре точки, соединенные четырьмя непересекающимися отрезками,— та самая фигура, о которой ты, Виктор, думаешь? Очень хорошо, пошли дальше. Отрезок есть множество, состоящее из двух различных точек и всех точек, лежащих между ними...

— И здесь мы совсем не так учили. У нас было: «Отрезок есть часть прямой, ограниченная двумя точками».

— Видишь ли, Виктор, Анатолий Иванович на досуге сможет лучше меня объяснить особенности новой программы шестого класса по математике, мне сейчас не очень хочется начинать неинтересный спор о преимуществах тех или иных определений. Важно другое. Итак, мы добрались до отрезка, свели его определение к понятиям «точка», «множество», «прямая». Точка есть... Стоп, а что такое точка? Что такое множество? Что такое прямая? Ну-с, победитель олимпиады, дай определения!

— Не надо давать определений, нам говорили, что существуют неопределяемые понятия.

— Так уж совсем и неопределяемые?

Я сразу вспомнил один из самых скучных курсов в пединституте — «Основания геометрии», и сказал, что в этом-то курсе как раз и говорится, что аксиомы служат для того, чтобы определить основные понятия. Вот мы и заучивали двадцать аксиом Гильберта только для того, чтобы «обосновать» элементарную геометрию.

— Очень рад, что вы все же помните этот нелюбимый предмет. Преподаватели пединститутов и университетов тоже не очень-то его любят. На одном из совещаний университетские профессора дружно проголосовали за его исключение из учебных планов математических специальностей, но с условием замены его курсом «основания математики». И тут выяснилось, что во многих университетах этот курс никто не возьмется читать. Где же тогда рассказать о значении аксиоматического метода и о современной математике? Значит, «не то люби, что хочется, а то, что бог велит». А наш «бог» — производство, без математики немыслим. Математика же, в том числе и геометрия, с чего-то должна начинаться. И как вы ни крутитесь, а начинать придется с понятий: «точка», «прямая», «плоскость». Это как раз такие понятия, которые уже не к чему сводить. И такие первоначальные понятия есть в каждой области математики, в каждом ее разделе. Вот они и играют роль, подобную шахматным фигурам: о них ничего не известно, кроме того, что сказано в правилах игры, то есть в аксиомах. Ведь не случайно на шахматной игре вовсе не сказывается, сделаны ли фигуры из слоновой кости или из хлебного мякиша и вообще какой внешний вид они имеют — об этом в правилах игры ничего не говорится.

— Так получается,— спросил Виктор,— что шахматы и шашки есть разделы математики?

— В определенном смысле — да. Только чересчур сложные, поэтому сравнительно мало полезные разделы.

— Постойте, постойте,— перебил я.— Тут что-то не так. Ведь в общем-то известно, что играть в шахматы можно научить всех, практически все понемногу и умеют. Про математику этого не скажешь, а вы утверждаете, что в известном смысле шахматы сложнее математики. Тут нет противоречия?

— Есть. Только это вопрос не мне, а вам. Поставьте в школьную программу курс шахмат и шашек, и у вас сразу же возникнет проблема успеваемости. Я вам совсем неприличный пример приведу — подкидной дурак, есть такая игра, которой кое-кто чуть ли не с пеленок владеет. А там ведь тоже своя система основных понятий и система аксиом, не менее простая, чем система аксиом арифметики. И ничего, успевают.

— Ну, Семен Борисович,— возразил Виктор,— это же совсем другое дело. В подкидного-то дурака играют в свободное время, играют с азартом, для интереса.

— Вот-вот. Это, правда, не моя сфера, но обратите внимание — с интересом и с азартом. Вот если вы, уважаемый Анатолий Иванович, вместе со своими коллегами сумеете преподавать математику так, чтобы дело шло с азартом и интересом, то ваши воспитанники не будут убивать свободное время на достаточно бесполезные дела. Вообще же, некоторые игры с достаточно простыми правилами оказываются полезными для математики, например, игра в «крестики-нолики». Но, может быть, мы пока не будем отвлекаться от основной темы нашей беседы, а об отношениях между играми и математикой, о «теории игр» я расскажу вам в другой раз.

СТРАННОЕ СОВМЕСТИТЕЛЬСТВО

А сейчас вернемся к разговору о сущности теоретической математики. Термином «теоретическая» я хочу исключить все те ее разделы, которые непосредственно применяются в практике, прежде всего, искусство считать: считать на пальцах, на счетах, на арифмометрах и даже на ЭЦВМ; умение делать чертежи, рассчитывать, каким должен быть корабль, чтобы он не перевернулся, не затонул и не развалился хотя бы лет десять (то есть пока он морально не устареет). Математика давно научила людей делать все это, стала их незаменимой служанкой. Правда, немного ворчливой: «опять вы, механики, не доказали сходимость ряда», «опять вы, инженеры, неверно округляете десятичные дроби...» Точнее говоря, математика давно стала языком всех наук. И уже давно известна крылатая фраза, принадлежащая Иммануилу Канту, что всякая область знания достойна называться наукой только с того момента, когда она начинает пользоваться математикой. Кстати, само слово «математика» происходит от греческого «матема», что и значит «знание», «наука».

На этом месте Виктор у нас явно заскучал, обиделся, что роль его любимой великой науки стали сводить к роли всеобщей служанки, и собрался возразить. Я тоже почувствовал противоречие в словах профессора. Получается, что чистая математика вроде бы не нужна. Вообще непонятно, зачем она существует. Я где-то читал, что сейчас совсем нет различия между прикладной и чистой математикой. Об этом я и попытался начать говорить, но...

— Где-то читал, что-то слыхал! — профессор явно начал сердиться, причем, по-моему, вовсе не на меня, а на кого-то другого, с кем он не доспорил у себя в университете. — Дорогой коллега! Рискую вас обидеть, но хочу дать вам один совет. Поменьше читайте и еще меньше цитируйте популярные статейки о математике. Эти статейки могут возбудить интерес к современной математике, но не дают о ней достаточно полной информации. Лучше возьмите серьезную, но сравнительно «молодую» математическую книгу, одолейте одну-две главы, и вы получите если не информацию, то представление о том, что же такое чистая математика. Вот, возьмите хотя бы эту книжку Дьедонне. Почитайте, только с карандашом в руках и не торопясь. Тогда вы многое почувствуете... Чистая математика — царица всех наук, всеобщий язык всех наук, без которого они не могут ни взаимодействовать, ни даже существовать!

Профессор наш настолько разошелся, что казалось, будто он уже давно не в тесной каюте, а на кафедре в университетской аудитории и перед ним не два случайных попутчика, а солидные члены Ученого совета. Виктор хотел было спросить о странном совместительстве (и царица, и служанка), но Семена Борисовича уже нельзя было остановить.

— Да, да, да! Даже существовать! Так же, как производство не может существовать без прикладной математики, прежде всего механики, так и эти последние немыслимы без самостоятельно существующей и по своим внутренним законам развивающейся теоретической, то есть «чистой», как говорил Энгельс, математики.

„ОПАСНЫЕ" МЫСЛИ

...Я подумал: и все же здесь явно попахивает идеализмом, во всяком случае, догматик-формалист обязательно придрался бы к словам уважаемого профессора. Я бы, наверное, не стал возражать, но ведь Виктор еще молод, надо бы все же поосторожнее. Мне захотелось несколько оградить парня от опасных мыслей. Воспользовавшись тем, что Семен Борисович закашлялся, я вмешался, рискуя вновь отвлечь профессора от основной темы:

— Так-так... Значит, «вначале было слово»?

Увы, я закашляться не успел. Профессор окончательно взорвался:

— Опять цитаты? Впрочем, наименьший вред науке приносят цитаты из библии — сочинения абсолютно ненаучного, хотя и весьма высокохудожественного. Я уверен, что, по крайней мере, в искусстве и литературе еще долго не исчезнут библейские цитаты и библейские образы, так же, как греческие мифы и латинские поговорки...

Профессор снова закашлялся, но неожиданно в защиту Виктора от возможного «влияния идеализма» выступил сам Виктор:

— Я знаю, что «было вначале». Очень часто подчеркивают, что производство обязано науке, но забывают при этом, что наука обязана производству гораздо большим — самим своим существованием. Фридрих Энгельс. Правильно, Семен Борисович?

— Молодец, Виктор! Снимаю перед тобой шляпу — за два дня первый раз цитата к месту. И похоже, что Энгельса ты знаешь не по одним цитатам. Да, конечно, с тех пор, как наши предки стали не только браконьерствовать, но и трудиться, они начали накапливать знания, то есть заниматься наукой, а следовательно, и математикой, хотя бы и в самом первоначальном, примитивном виде.

Но вот что важно: уже на первых шагах математики натолкнулись на задачи, которые возникали естественно, имели внешне «прикладной» характер, но упорно не поддавались решению. Знаменитая проблема «квадратуры круга», то есть задача вычисления площади, ограниченной простейшей кривой — окружностью,— не была решена древнегреческими геометрами, несмотря на все усилия. Даже диагональ квадрата им не удавалось «выразить» математически через его сторону — ведь греки не знали алгебры и не знали, что такое $\sqrt{2}$. Именно эти — практически не очень важные — задачи в течение столетий занимали математические умы. Ученые глубокой древности умели решать квадратные уравнения. Итальянские математики эпохи Возрождения научились решать уравнения третьей и четвертой степеней. Франсуа Виет и Рене Декарт по существу создали алгебраическую символику. Все это очень и очень непросто. А великие задачи древности, столь простые по своей формулировке, оставались нерешенными. Более того, появлялись новые «простые» задачи, на которые не удавалось дать простых ответов. Почему, например, уравнение $x^2-1=0$ имеет два решения, $x^2-2x+1=0$ — одно, а $x^2+1=0$ — ни одного?

Но стоило ввести понятие комплексного числа — первое понятие, которое не является ни «пространственной формой», ни «количественным отношением» в обычном смысле этих слов,— как теория алгебраических уравнений получила замечательную основную теорему алгебры: всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет минимум один корень и максимум — n. Правда, по ходу дела пришлось ввести «иррациональные числа» — еще одно «чисто математическое» понятие, доступное теперь каждому ученику восьмого класса. Не возражайте, Анатолий Иванович, если у вас кое-кто плохо понимает сущность этого понятия, то это кое-кто виноват, а не математика! Так вот, все это было сделано, а квадратура круга по-прежнему «не решалась». А весь фокус в том, что число «пи» — отношение длины окружности к диаметру — нельзя задать никаким алгебраическим уравнением и, следовательно, в том смысле, о котором говорили греки, задача вообще неразрешима. Это число «трансцендентно», то есть — ни много ни мало,— потусторонне, оно находится с той, другой стороны, именно там, где математики сами создают правила своей игры. Я не буду формулировать соответствующие аксиомы математического анализа, этой великолепной игры, на которой держалась вся техника прошлого века.

ЕЩЕ БОЛЕЕ СЕРЬЕЗНЫЙ РАЗГОВОР

А пока почти все математики резвились, получив эту новую игру и разыгрывая все новые и новые ее партии, гениальный француз Эварист Галуа штурмовал чисто абстрактную и никому «для практического применения» не нужную задачу: как определить, можно ли решение наперед заданного алгебраического уравнения записать в виде конечной комбинации корней из обычных чисел?

Судьба Галуа, решившего эту задачу, трагична.

В двадцатилетнем возрасте он был убит на дуэли, подстроенной его политическими противниками, его труды не были поняты современниками-математиками. А ведь он создал одну из важнейших чисто математических теорий — ту самую теорию групп, которой посвятил свою математическую жизнь Отто Юльевич Шмидт.

Абстрактная теория групп оперирует вещами, о которых ничего неизвестно. Неизвестно даже их количество (если число элементов конечно, то это уже специальная глава — теория конечных групп). Требуется только, чтобы существовала «композиция», то есть возможность единственным образом по двум вещам находить третью, или, говоря на математическом языке, композиция единственным образом ставит в соответствие двум элементам некоторого множества третий элемент этого же множества:

$$a \cdot b \longrightarrow c.$$

Эти элементы могут и совпадать, например, может быть, что

$$a \cdot e \longrightarrow a.$$

Возможность композиции — первое правило игры. Второе правило: $(a \cdot b) \cdot c$ и $a \cdot (b \cdot c)$ — одно и то же. Пока понятно?

— Так это как раз и написано у Дьедонне в первой главе, только буквы греческие!

— Это и без Дьедонне известно каждому ученику четвертого класса: это так называемый ассоциативный, или сочетательный, закон.

— Вы совершенно правы, Анатолий Иванович, это, действительно, известно каждому школьнику. Но далеко не каждый учитель обращает внимание своих учеников на тот удивительный факт, что свойство ассоциативности чрезвычайно часто встречается в математике. А это очень важно. Дьедонне даже обмолвился как-то, что вот уж неассоциативные-то композиции — никчемная игра, и жизнь, то есть математика, жестоко посмеялась над ним. Неассоциативных «структур» тоже появилось довольно много, ими занимается, например, всемирно известная школа саратовского математика Виктора Владимировича Вагнера. Но мы о таких структурах пока говорить не будем, а вернемся к группам. Две аксиомы у нас уже есть. Имеются еще две (еще два правила игры). Во-первых, существует такой элемент e, что для всякого a будет

$$a \cdot e \to a.$$

Во-вторых, для всякого a существует такое b, что

$$a \cdot b \longrightarrow e.$$

e обычно называют нейтральным элементом, а b — обратным элементом (по отношению к a). Вот и все! Всего четыре правила, то есть гораздо меньше, чем в шахматах или шашках, не говоря уже о подкидном дураке. Значит, и игра проще, и результаты общée. Но сколько в ней поэзии, интересных образов, изящных результатов! Вот, например,

$$e \cdot a \longrightarrow a.$$

Это уже теорема. Ее уже можно доказать, и она доказывается в любом учебнике современной алгебры. А вот из $a \cdot b \to c$ и $b \cdot a \to d$ вовсе не следует совпадение c и d. Это — тоже теорема.

— Подождите, Семен Борисович, пожалуйста! Ведь если эти элементы не совпадут, то получится, что не выполняется переместительный закон! Разве он может не выполняться?

— Конечно, может, Витя, ведь такого правила игры мы не ввели!

— Странно. Даже для целых чисел $2+3=3+2$! А уж куда проще, ведь это в первом классе изучают.

— Вот именно, в первом классе. Поэтому всем и кажется, что проще некуда. А в действительности теория целых чисел, то есть по существу — арифметика, очень трудная наука. В ней, как и в элементарной геометрии, нам очень мешают опыт, сила нашей привычки. Там очень трудно отличить аксиому от теоремы. Все и так ясно! А оказывается, что почти все не ясно. Сколько математиков всю жизнь потратили на решение какой-нибудь одной, простой и очевидной на первый взгляд, задачи теории целых чисел! И не могли решить. «Король математиков» Карл Фридрих Гаусс страстно любил выполнять простые арифметические вычисления, находил в них «чарующую прелесть» и сделал немало открытий. А когда скончался его предшественник на математическом троне петербургский академик Леонард Эйлер, то о нем сказали величественно и просто: «он прекратил вычислять и жить». И, может быть, потому, что математики теперь «стесняются» вычислять без хитроумных приспособлений (до ЭЦВМ включительно), теория чисел после Эйлера и Гаусса продвинулась вперед меньше всех других разделов математики. В ней высказано очень много любопытных догадок, начиная с великой теоремы Ферма[1]. Большинство этих догадок и возникло

---

[1] Эта теорема формулируется очень просто: не существует тройки целых чисел x, y, z, для которых равенство $x^n + y^n = z^n$ выполняется хотя бы для одного целого n, большего двух. При $n=2$ таких троек сколько угодно, например, $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ и т. д. Пьер Ферма сформулировал теорему более трехсот лет назад, но ее доказательство пока так и не найдено.

в процессе «простых» вычислений, то есть «экспериментально». Но эксперимент в математике не средство доказательства, а только средство разрушения доказательств. Сколько великолепных теорем было разрушено хитрыми «контрпримерами»! Математика — очень требовательная и даже жестокая наука!

А все дело в том, что «правила игры», то есть аксиоматика теории целых чисел, намного сложнее, чем в самых модных, самых современных математических дисциплинах. И здесь математик лишен возможности сам задавать эти правила, ибо и сами положительные целые числа, и правила действий над ними возникли в сознании людей задолго до возникновения какой бы то ни было науки.

Вот почему один верующий математик торжественно заявил: «Господь бог создал целые числа, все остальное — дело рук человеческих».

— А может быть, дело все-таки еще и в том, что сама по себе теория целых чисел почти не находит, насколько мне известно, практических, технических приложений, на нее нет общественного заказа?

— Во-первых, Анатолий Иванович, это не совсем верно. Очень многие результаты этой теории находят свое приложение в вычислительной математике. Во-вторых, очень часто математические теории входят в практику значительно позже их создания. Ну, а в-третьих, в некотором смысле вы правы. Так ведь обстоит дело не только с теорией целых чисел. Возьмите геометрию. Многие современные математики избегают заниматься ею, а, например, начертательную геометрию вообще третируют.

— Вот-вот, здесь у Дьедонне как раз написано: «Что же касается перечисленных выше «псевдонаук», то нужно надеяться, что забудется достаточно скоро само их существование (и даже названия!) — и чем скорее это произойдет, тем лучше».

— Так не только Дьедонне пишет. У Бурбаки до сих пор нет книги, посвященной специально геометрии. Некоторые недальновидные математики «зажимают» не только начертательную геометрию, прикладную и совершенно необходимую науку, но и так называемую «классическую дифференциальную геометрию», которая началась с исследования линий и поверхностей средствами дифференциального исчисления. А ведь на ее основе возникли многие разделы современной математики, например, теория непрерывных групп, тензорное исчисление, теория дифференцируемых многообразий и так далее. Эта геометрия дала совершенно готовый математический аппарат специальной и общей теории относительности... И, тем не менее, почти все, что сделано в классической дифференциальной геометрии, так же мало походит на современную математику, как и теория чисел.

— Разве Бурбаки теорию чисел тоже не признает? — спросил я.

— Признает, но весьма своеобразно. В «Архитектуре математики» (это своего рода кредо Бурбаки) математика уподобляется некоему архисовременному городу с величественными проспектами и площадями, на которых в образцовом порядке возвышаются здания математических дисциплин, покоящиеся на простых и прочных фундаментах, то есть наборах аксиом. И в основе всего — три кита, весьма поэтично названные «материнскими структурами». О них вы, Анатолий Иванович, конечно, читали, ну, а Виктору я расскажу в другой раз.

— Мне тоже не мешает послушать.

— Хорошо. Но сначала о городе, спроектированном Н. Бурбаки. В нем пока не прописана теория целых чисел. Не прописана, потому что она до сих пор не представила необходимых документов — ни свидетельства о дате рождения, ни сведений о родителях — в бога Бурбаки не верит. У нее довольно сложный фундамент — не разработанная до конца аксиоматика. И, самое главное, нет того кита, той материнской структуры, к которой ее естественно было бы отнести. Поэтому Бурбаки помещает теорию чисел в некой «неплановой» постройке, которой только еще предстоит включиться в «черту города». Точнее говоря, Бурбаки считает, что современная математика еще недостаточно развита, чтобы решать проблемы теории чисел, так как аксиоматика последней слишком сложна и слишком мало связана с другими аксиоматиками.

— Эту игру не надо включать в Олимпийские игры?

— Пожалуй, можно и так сказать.

— Семен Борисович, а вы не находите здесь любопытной аналогии?

— Какой, Анатолий Иванович?

— Когда-то Евклид написал «Начала», своеобразную энциклопедию греческой математики. Там было почти все, что успели открыть древние геометры. Почти, но не все. Например, эллипс, гиперболу и параболу греки хорошо знали (сами слова эти — греческие!). Однако, в «Началах» им не нашлось места, они как-то не «вписывались» в евклидовскую математику. Так вот, Бурбаки тоже ведь пишет своеобразную энциклопедию современной математики, и совсем не случайно он назвал ее точно так же, как и Евклид — «Элементы математики»; ведь слово «элементы» как раз и означает «начала». И вот у Бурбаки тоже не все «вписывается» в его математику, как и у Евклида. По-моему, это очень любопытно.

— Согласен с вами. Только обратите внимание, что Евклид все сумел сделать один, а Бурбаки — это коллектив. Но вы правы; как для греческих математиков оказалась непосильной задача обстоятельного изучения конических сечений (то есть эллипса, гиперболы и параболы) — нужны были новые методы, так и для современной математики многие проблемы теории чисел пока непосильны. Эту мысль подтверждают безуспешные попытки доказать теорему Ферма, или, например, целая жизнь замечательного сибирского самородка Николая Павловича Романова, отданная проблеме Гольдбаха[1]. Нет у теории чисел достаточно сильного метода, нет тесных контактов с другими математическими дисциплинами! Об этом так образно и говорит Бурбаки.

Правда, советские математики Лев Генрихович Шнирельман, Иван Матвеевич Виноградов и другие решили некоторые важные задачи теории чисел. И все-таки она не идет ни в какое сравнение с другими математическими теориями. Ее здание не выглядит планомерно строящимся этаж за этажом, а только чем-то таким, чего не видно за лесами. Каким оно будет — пока не ясно ни строителям, ни архитекторам.

— А как все же с геометрией, куда она делась у Бурбаки?

— Видишь ли, Виктор, трактат Бурбаки пока не закончен. Может быть, геометрия — настолько сложный элемент в «Элементах математики», что до него надо построить еще много более простых. А может быть, геометрия вообще не элемент, а некоторая структура более высокого порядка, из тех, которые в «Элементах» вообще не будут описаны. Ведь Бурбаки все время подчеркивает, что он излагает только простейшую, но зато всеобщую основу математики, и стремится показать, что математика — единая наука. И эта цель, пожалуй, уже достигнута. Впервые современная математика изложена достаточно полно как единая наука, что и дает возможность ответить на ваш основной вопрос — что же такое математика?

---

[1] Эта проблема по формулировке даже проще теоремы Ферма: «Доказать, что любое число, большее трех, представляет собой сумму трех простых чисел». Например, $12=2+3+7$; $107=29+31+47$.

МАТЕМАТИКА? ВОТ ЧТО ЭТО ТАКОЕ!

...Как в хорошем детективе, на самом интересном месте повествование прекратилось — нас пригласили на обед. После обеда Семен Борисович заявил, что одним из ценнейших качеств математики он считает вырабатываемую ею привычку к дисциплине, организованности и порядку во всем. А посему, раз на теплоходе после обеда рекомендуется соблюдать «адмиральский час», то он немедленно приступит к выполнению этой рекомендации. Виктор попытался было читать лежа, но тоже моментально уснул, чему явно способствовало «чудовище Дьедонне» — так когда-то была названа рукопись одного из первых томов «Элементов математики».

Я стал было приводить в порядок мои записи, те самые, которыми пользуюсь сейчас, но я немножко похож на одного из героев Джерома К. Джерома. Вид людей, которые спят, когда он уже встал, приводил его, как вы, наверное, помните, в неистовство. Я не пришел в аналогичное состояние, но, во избежание недоразумений, осторожно вышел из каюты и вскоре нашел на палубе место, где можно было укрыться от дождя и спокойно поразмышлять.

Главное, что меня тогда смущало,— настойчивое отгораживание «чистой» математики от жизни, от практики, сравнение ее с игрой. Они пронизывали всю первую часть прослушанной нами «лекции». А ее конец, когда «лектор», следуя Бурбаки и Дьедонне, выбросил «за борт современности» геометрию, само название которой означает в буквальном переводе «землемерие», противоречил всему тому, что я вынес из институтских аудиторий. Уж очень вся эта «революционность» была похожа на действия печальной памяти «лефовцев», пытавшихся выбросить из литературы Пушкина. Хотелось задать «лектору» много вопросов, хотелось спросить, и я вновь направился в каюту.

Профессор уже встал. Он выглядел, как будто вернулся после пятиминутного перерыва между двумя часами лекции. Ему явно хотелось продолжать. Виктора в каюте не было. Как выяснилось, Семен Борисович уже давно разбудил его и отправил искать меня. Он, видимо, тоже придерживался джеромовской схемы: раз он готов говорить, то остальные должны быть готовы слушать. Честно говоря, мы уже изрядно устали, но «лектор» был явно «в ударе». Как только возвратился Виктор, вторая половина «лекции» началась.

— Конечно, я не буду подробно излагать вам идею трактата Бурбаки. В великолепном очерке «Архитектура математики», уже трижды опубликованном на русском языке, он сделал это сам. Очень советую вам, прочтите!

— А я смогу в нем разобраться? И где его найти?

— Конечно, Виктор, это будет не развлекательное чтение, но почти все ты сможешь усвоить. Кстати, не исключена возможность, и даже почти наверняка твой любимый Дьедонне приложил к нему руку. Так что, если тебе очень уж хочется начинать с Дьедонне, то начни с «Архитектуры математики».

Итак, я все-таки пытаюсь дать вам определение предмета современной математики, отправляясь от ее основ, которые — хочу еще раз подчеркнуть это — гораздо проще, чем, скажем, основы шахматной игры. Это подтверждается еще и тем, что самые лучшие ЭЦВМ прескверно играют в шахматы, но великолепно справляются со всевозможными арифметическими вычислениями и более или менее удовлетворительно — с доказательствами простых теорем из тех областей математики, в которых «правила игры» достаточно просты.

Так вот, современная математика и занимается созданием и развитием наиболее простых логических игр, именуемых «теориями», или «исчислениями». Теория групп, о правилах-аксиомах которой я рассказывал, является одной из этих «игр», может быть, самой важной. На основе четырех правил, определяющих в этой теории композицию «вещей» — элементов произвольной природы, средствами одной только формальной логики построена великолепная наука. Помню, что эта наука построена еще Аристотелем и посвящена она законам мышления.

В теории групп были и свои гении, первооткрыватели, такие, как уже упоминавшиеся нами Галуа и Шмидт, как величайшая из женщин-математиков Эмми Нетер; были и свои систематизаторы, среди которых — один из самых известных — недавно скончавшийся лидер советских алгебраистов Александр Геннадиевич Курош.

Конечно, теория групп может быть развита в различных направлениях. Получатся новые теории. Уверяю вас, что все они чрезвычайно занимательны сами по себе. Более того, они находят широчайшие применения почти во всех разделах чистой математики, так как дают целые циклы готовых «отношений»-теорем между объектами этих «других» разделов. И это понятно — ведь в этих теориях рассматриваются элементы произвольной природы, самые «общие», вот поэтому-то их отношения годятся в огромном числе «частных» случаев.

Еще несколько слов о дальнейшем развитии композиционных структур, то есть «игр», аналогичных теории групп. Можно увеличить число самих композиций. Например, если к структуре коммутативной группы добавить еще одну композицию, то в зависимости от правил-аксиом этой второй композиции получатся так называемые «кольца», «тела», «поля». Примеры полей вам хорошо известны. Ты, Виктор, знаешь множества рациональных, действительных, комплексных чисел — все они и есть числовые поля, а роль композиции в них выполняют обыкновенные операции сложения и умножения.

— Комплексных мы еще не проходили.

Ф. Э. Молин

— Ну, не проходили, так когда-нибудь пройдете. Кроме них есть еще много систем «чисел», которые первый сибирский математик Федор Эдуардович Молин[1] назвал гиперкомплексными. Теперь среди них особенно часто выделяют так называемые кватернионы и их разновидности и обобщения. Кватернионами особенно довольны физики, так как в кватернионах соединяются некоторые свойства и чисел, и векторов. А в современной физике давно уже соединились понятия пространства, которое описывается векторами, и времени, для отсчета которого нужны действительные числа. Кстати, теория векторов, именуемая также теорией линейных пространств, есть тоже очень простая композиционная структура. В этой теории есть два сорта вещей, про которые первоначально известно только то, что это — вещи двух разных множеств. Заметьте, до сих пор разговор шел об аксиомах и композициях, но «вещи» были «общие, из одного множества». А теперь начинается обобщение в ином направлении — появилось два множества. В каждом из этих двух множеств устанавливаются свои композиции. В одном — две, и оно обычно имеет структуру поля, во втором — одна, и это множество обычно имеет структуру группы. Элементы поля называют скалярами, элементы группы — векторами. Чтобы их не перепутать, элементы разных множеств обозначают буквами разных шрифтов или алфавитов. И, наконец, чтобы «связать» эти множества, вводится еще одна, объединяющая их композиция — умножение вектора на скаляр. И получается хорошо известная «векторная алгебра» (пока без произведения векторов). Та самая векторная алгебра, в которой так просто строится тригонометрия. Вернее — ее содержательная часть, а не справедливо критикуемый Дьедон-

[1] Ф. Э. Молин (1861—1941) — один из основателей современной алгебры. В 1900 году переехал из Дерпта (Тарту) в Томск в связи с открытием Технологического института (ныне Томский политехнический институт имени С. М. Кирова).

не «псалтырь тригонометрических формул и их калейдоскопических преобразований». Кстати, такой «псалтырь», видимо, можно составить для любой математической теории, а уж где он может пригодиться и насколько деревья этих формул и преобразований закроют для обучаемого лес самой теории — это другой вопрос. Ну, об этом я могу многое сказать, только давайте вернемся к предмету нашего разговора — чистой математике.

Структура линейного пространства и структура группы, о которых мы говорили — это основные «структуры композиции», основа всей современной алгебры и, следовательно, всей современной математики. Я уже говорил, что Бурбаки выделяет три типа «материнских» структур. Одна из них названа, вторая называется структурой порядка и третья — структурой непрерывности, или топологической структурой. Я не буду описывать их...

— Вы, наверное, думаете, что я не смогу понять?

— Нет, Витя, просто педагогический опыт гласит: не перекармливай ребенка, а то...

— Да не такой уж я ребенок!

— Витя, я вовсе не хотел иметь в виду тебя, под ребенком я понимаю любую аудиторию. Но мне сейчас важно другое. «Устройство» структуры группы ты понял?

— А чего тут не понять?

— Так вот, остальные структуры столь же просты по «правилам игры» и столь же универсальны по применению. С целью экономии времени я прошу этому поверить. Согласны? Теперь, наконец, можно говорить о том, что же такое современная математика.

Современная математика есть совокупность абстрактных, полностью отвлеченных от содержания, формально, то есть логически развиваемых теорий об отношениях между объектами, определяемыми аксиоматически, то есть «правилами игры», сформулированными тоже абстрактно. Короче, предмет математики — это формы (элементы) и отношения (теоремы, теории), отвлеченные от содержания.

Тут я вспомнил экзамены по философии и не выдержал:

— Простите, Семен Борисович, но я хорошо помню философское положение о том, что нельзя отрывать форму от содержания.

— А ну-ка, еще раз скажите, чего нельзя?

— Нельзя отрывать форму от содержания.

— Дорогой Анатолий Иванович! Так спорить нельзя! Я ведь не требую отрывать! Я говорю о том, что можно, нужно и полезно изучать, рассматривать, анализировать форму отдельно от содержания. В этом и есть суть любой абстракции. Изучать и отрывать — вовсе не одно и то же.

— И все же как-то неуютно! Где об этом написано?

— Что, не верится? Возьмите серьезную статью по философским проблемам современной математики. Или еще проще. Найдите философскую энциклопедию, том, кажется, третий, статья «Математика». Она начинается словами: «Математика — наука о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания».

— О, Семен Борисович, теперь вы хватаетесь за цитату!

— Витя, во-первых, не забывай о том, что скромность украшает человека, и не торопись делать замечания, а, во-вторых, ты не справедлив. Я не хватаюсь за цитату, а заканчиваю ею по просьбе Анатолия Ивановича. Кроме того, я не против цитат вообще, а против злоупотребления ими.

А ГДЕ ЖЕ ПРАКТИКА?

— И все же, Семен Борисович,— вмешался я,— вы меня не совсем убедили. А где же действительность? Где практика?

— Что касается практики, или природы и производства, то путь к ней — через прикладную математику, которая базируется на чистой, пользуется ею, не может развиваться без нее. И если практика дает заказ тому или иному разделу прикладной математики, стимулирует ее развитие, то прикладная математика дает соответствующие стимулы и заказы чистой математике. Только так можно мыслить воздействие практики, производства, общества на чистую математику, ибо последняя представляет собой «абстракцию от абстракции», высшую ступень абстракции, почти такую же, как философия.

Что же касается действительности, реального мира, то здесь дело проще. Абсолютно все, что есть в сознании человека, является отражением реального мира и ничем другим. И математика, конечно же, возникла, и развивалась, и развивается как одно из звеньев этого всеобщего процесса отражения действительного мира в коллективном разуме человечества.

— Семен Борисович, у нас в школе, конечно, не было философии, но все же, еще раз извините, получается что-то не так.

— Ну-ну, пожалуйста, возражай, что тебе показалось не так?

— А вот что. По-вашему выходит: все, что есть в сознании, отражает реальный мир. Тогда и знахарство, и религия, с одной стороны, и разные игры, причем не только разумные, вроде шахмат, но и «подкидной дурак», с другой, тоже отражают действительность? Так, что ли?

— Конечно, так. Вопрос только в том, насколько точно отражают, насколько полезно это отражение. Кривое зеркало тоже, даже в буквальном смысле, отражает действительность. А что толку? Жизненный опыт, практика доказывают нам, насколько бесполезны и вредны знахарство и религия. Только жизненный опыт и практика могут ответить на вопрос о том, насколько полезен или бесполезен тот или иной вид отражений. Одни виды доставляют человеку удовольствие, наслаждение, способствуют его духовному росту — они этим и полезны. Я имею в виду обычные игры, исключая, может быть, азартные, и искусство, исключая, может быть, некоторые подделки под искусство. Другие виды — прежде всего, прикладные науки — непосредственно воздействуют на производство, способствуют техническому прогрессу. Третьи — «теоретические» науки, в том числе и математика, способствуют развитию прикладных наук и, в конечном счете, тоже способствуют прогрессу. И самые абстрактные научные теории потому и называются научными, что они правильно, «адекватно», как говорят философы, отражают реальный мир. Вот почему нет и не может быть такой математической теории, которая оказалась бы абсолютно бесполезной. И напрасно господин Бурбаки удивляется тому, что, как он говорит: «между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь». Видимо, он не так уж силен в философии. Впрочем, обратимся к авторитетам практики, производства. Анатолий Иванович, напомните, пожалуйста, что говорил по этому поводу один из крупнейших наших математиков-прикладников Алексей Николаевич Крылов.

— С удовольствием, я часто привожу эту мысль своим школьникам. Кстати, Виктор, Алексей Николаевич Крылов — еще один пример удивительной разносторонности, широты интересов, многообразия талантов. Так вот, он говорил: Митрофанушка в комедии «Недоросль» утверждает, что дверь, прилаженная к своему месту, есть имя прилагательное, а дверь, лежащая в чулане и не пристроенная к месту, есть имя существительное. Многие математические предложения долгое время оставались «существительными» по «теории» Митрофанушки: они существовали, но не находили применения. Однако рано или поздно всякая правильная математическая идея находила применение в том или ином деле. Это вы имели в виду, Семен Борисович?

— Да, именно это. И Крылову стоит верить, уж кто-кто, а он, замечательный кораблестроитель, адмирал, Герой Социалистического Труда, знал цену математическим теориям и их приложениям...

— Что такое математика, я более или менее понял, но вот что мне делать, чтобы стать хорошим математиком, я не знаю. То ли браться за изучение всех этих структур, то ли учить математику вперед, по вузовским учебникам, или еще что? Ответьте мне, пожалуйста,— попросил Витя.

— Вы знаете,— добавил я,— мне ведь тоже, как и Виктору, пока не стало легче отвечать на свои вопросы. Что я должен делать, чтобы мои ученики действительно хорошо знали математику? Только, пожалуйста, не говорите, что надо тщательно готовиться к урокам, работать с отстающими, помогать отличникам — это я хорошо знаю.

— Друзья мои, вы напрасно считаете, что мое служебное положение позволяет мне быть знатоком истины в последней инстанции и дает право отвечать на любые вопросы. Я и сам о многом задумываюсь в связи с тем, что пока есть еще это обидное несоответствие между потребностью общества в грамотных людях вообще, в математиках в частности, красотой и доступностью нашей науки для всякого нормального человека и слабыми знаниями школьников и студентов. Мне ведь тоже, наверное, многое надо сделать, и я тоже многого пока не знаю... Так вот, есть такое предложение — слышали сигнал на ужин? Тоже ведь некоторая абстракция — от желудка сигнал достаточно отвлечен, а мы определенно верим его значению. Так ясен вам смысл моего предложения? Хватит на сегодня вопросов, давайте отдыхать.

Последние несколько дней были самыми насыщенными по количеству чисто туристских впечатлений, поэтому мы с Виктором так и не узнали ничего о математической теории игр и о многом другом из обещанного Семеном

Борисовичем. Зато природа вознаградила нас... Впрочем, о туристских впечатлениях и о природе расскажу в следующий раз. До чего мы все же договорились и какие сделали для себя выводы?

ОЧЕНЬ ЭТО ЗДОРОВО — РАБОТАТЬ С КОЛМОГОРОВЫМ

Выводы мы сделали в последнюю ночь перед возвращением, когда, устав от путешествия, все трое долго не могли уснуть.

Проще всего оказалось мне. Я теперь твердо убежден не только в необходимости, но и в возможности преподавания математики по-новому и в школе, и в вузе. Конечно, придется много, очень много заниматься, причем заниматься всерьез, основательно. И знаете, что мне кажется главным? Я теперь по-другому стал смотреть на свою работу. Она ведь вовсе не сводится только к благороднейшему делу воспитания молодежи — это было и раньше. Но сейчас наступает такое время, когда работа учителя математики становится особенно интересной и важной — мы получили возможность по-настоящему участвовать в прогрессе, быть на переднем крае борьбы за все новое!

Конечно, мы сами не успеем сделать все, нам не обойтись без талантливой молодежи. И поэтому я впредь обязательно буду стараться направлять своих учеников на математические факультеты. Андрею Николаевичу нужны настоящие помощники.

Какому Андрею Николаевичу? Колмогорову. Академик Колмогоров — один из самых крупных математиков в мире. Он как раз и является наиболее страстным и деятельным поборником нового в школьной математике: составляет программы, пишет учебники, выступает перед учителями и даже занимается со школьниками. Андрей

Академик А. Н. Колмогоров

Николаевич руководит коллективом ученых и учителей, осуществляющих реформу математического образования в нашей стране. Этот коллектив пока не очень велик, это только штаб, а армию надо еще создавать. Вот в эту-то армию и хорошо бы призвать наиболее талантливых и самоотверженных молодых людей!

Что мы посоветовали Виктору? Он попросил нас четко сформулировать, какие качества ему необходимо воспитывать в себе, чтобы стать хорошим математиком, и что для этого надо делать.

Общими усилиями мы попробовали назвать «правила этой игры». Правда, Семен Борисович несколько раз подчеркнул, что эти правила вовсе не обладают свойственной для аксиом полнотой.

Вот эти «аксиомы».

Первое. Творческая работа в науке, особенно в математике,— это самоотверженный, не ограниченный никаким временны́м регламентом напряженный труд, умение преодолевать любые препятствия, включая необходимость изучения «скучных» и кажущихся ненужными вопросов... Давно известно, что гений и талант проявляются только в напряженном труде. И поэтому нельзя надеяться в науке на «везение», «гениальное прозрение» и тому подобные чудеса. Хотя математика и похожа на игру, но «случайно выиграть» в ней еще никому не удавалось!

Нельзя, во-вторых, ограничиваться только тем, что тебе «подано сверху», «разжевано на уроке». Без любознательности никакое движение вперед невозможно.

Третье. Самое опасное в любой науке — верхоглядство. Приучить себя к мысли, что процесс познания бесконечен, что чем больше ты узнаешь, тем больше остается непознанного, тем больше надо работать, думать — важнейшая задача. Семен Борисович сначала хотел даже поставить эту мысль на первое место, так как очень уж много приходилось ему видеть «всезнающих» первокурсников, с треском проваливавшихся на экзаменах во время первой же сессии из-за отсутствия систематических знаний по самым элементарным вопросам. Он видел и довольно много молодых ученых, которые после первого же успеха отвыкали трудиться и быстро исчезали из науки.

Далее. Все истинно мудрое — красиво и просто. Надо научиться видеть красоту, уметь понимать ее и чувствовать, уметь ее создавать не только в изящном доказательстве, ярком решении, но и в мелочах: в умении сделать красивый, лишенный излишних подробностей чертеж или рисунок, в умении красиво оформить экзаменационную работу или текст статьи, четко записать формулу.

Пятая «аксиома» — учиться мыслить. Учиться мыслить критически, даже дерзко, как выразился Семен Борисович, тщательно проверять ход всех своих рассуждений, уметь сомневаться даже в том, что на первый взгляд кажется совершенно правильным и очевидным, но и не торопиться объявлять неверными рассуждения коллег, если ты в этих рассуждениях пока еще не разобрался.

Тренировать память. Правда, Семен Борисович подчеркнул, что хорошая память для математика не так уж обязательна, многие математики ее-то как раз и не имеют, она больше нужна биологу или лингвисту, но все же определенный минимум фактов приходится твердо помнить и математику.

Необходимо, далее, развивать у себя наблюдательность, стараться увидеть закономерности там, где их вроде бы и нет, подметить порядок и логическую стройность в кажущемся хаосе и беспорядке. Как следствие из этой аксиомы — уметь обобщать свои наблюдения.

И последнее. Развивать геометрическое воображение и «алгоритмические» способности — способность достаточно быстро усваивать технику и правила всякого рода вычислений, преобразований, построений.

Вот примерно такой список мы перечислили нашему юному другу, он внимательно выслушал, улыбнулся и сказал:

— По поводу ваших аксиом у меня тоже есть две аксиомы. Во-первых, почти все, что вы сказали, имеет такое же отношение к математике, как и к другим наукам,— всем надо работать, всем надо мыслить, всегда надо быть любознательным...

Семен Борисович перебил его:

— А кто тебе сказал, что для усвоения математики нужны какие-то особенные качества? Ведь то, что математика дается не всем, придумали сами математики, чтобы набить себе цену, или бездельники, чтобы оправдать свое безделье. Для того, чтобы стать математиком, надо быть, прежде всего, настоящим современным человеком в лучшем смысле этого слова. А это требуется в любой профессии. Считай это еще одной аксиомой. Согласен? Что там у тебя еще есть?

— Во-вторых, почти все, что вы мне сказали, я слышал от учителей и от папы с мамой — «без труда не вытащишь и рыбку из пруда», «учись, мой сын: наука сокращает нам опыты быстротекущей жизни». Это все прописные истины...

— Знаете, Виктор, что я вам скажу,— неожиданно на «вы» обратился к Виктору профессор,— это как раз тот случай, когда аксиомы — отражение многовекового опыта людей, а не абстрактные правила «игры». Стоит все же достаточно часто повторять некоторые прописные истины, ибо именно о них-то чаще всего и забывают. А дело в них идет не о шахматах, и не о «крестиках-ноликах», и даже не о теории групп, а о будущей жизни и судьбе каждого человека и всего человечества!

Мне показалось, Виктор пожалел, что «вылез» со своей второй аксиомой. А мы с Семеном Борисовичем не обиделись на него. Молодым всегда трудно признавать свои заблуждения. И пока мы с вами, коллеги, понимаем это, мы не старики. И найдем с ними, молодыми, общий язык...

* * *

...Прозвенел звонок. Анатолий Иванович вместе с остальными учителями ушел на урок. Мы записали его рассказ прежде всего для Виктора и его сверстников. Может быть, кому-нибудь из них наши записки помогут определить свою судьбу и свое место в жизни.

Тем же, кому предстоит принять решение уже скоро, мы рекомендуем заглянуть в небольшое справочное приложение, где перечислены вузы западносибирского региона, ведущие подготовку математиков, и дан список наиболее доступных книг, имеющихся, как правило, в школьных и массовых библиотеках. Знакомство с этими книгами поможет вам заглянуть в мир современной математики несколько глубже, чем чтение брошюр хорошо известных серий «Популярные лекции по математике», «Библиотека физико-математической школы». Разумеется, чтение этих брошюр, журнала «Квант» и брошюр серии «Математика, кибернетика» также дает полезную информацию об отдельных разделах математики. Рекомендуемые же нами книги дают представление о математике в целом.

Вузы западносибирского региона, ведущие подготовку математиков

Новосибирский государственный университет. 630090, Новосибирск, 90, Академгородок, ул. Пирогова, 2.

Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева. 634010, Томск, 10, проспект Ленина, 36.

Эти два университета ведут преимущественно подготовку научных работников. Каждый студент на третьем курсе прикрепляется к научному руководителю — преподавателю факультета или сотруднику научно-исследовательского института, под руководством которого ведет самостоятельные научные исследования.

Тюменский государственный университет. 625003, Тюмень, ул. Семакова, 10.

Кемеровский государственный университет. 650043, Кемерово, 43, просп. Советский, 117.

Омский государственный университет. 644077, Омск, просп. Мира, 55а.

Алтайский государственный университет. 656099, Барнаул, просп. Социалистический, 68.

Математические факультеты этих университетов готовят учителей математики средних школ и научных работников. Они работают в тесном сотрудничестве с ведущими университетами региона — Томским и Новосибирским.

Подготовку учителей математики ведут и педагогические институты Западной Сибири, находящиеся в Барнауле, Бийске, Горно-Алтайске, Ишиме, Кургане, Новокузнецке, Омске, Тобольске, Томске, Шадринске.

Более подробные сведения о каждом из перечисленных вузов можно получить, направив запрос на математический факультет интересующего вас вуза.

ЛИТЕРАТУРА

Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Изд-во «Просвещение». М., 1967.

Люсьенн Феликс. Элементарная математика в современном изложении. Изд-во «Просвещение». М., 1967.

Математика в современном мире. Изд-во «Мир», М., 1967.

Математика, ее содержание, методы и значение (в 3-х томах). Изд-во Академии наук СССР. М., 1956.

Д. Пойа. Как решать задачу. Учпедгиз. М., 1961.

Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. Изд-во иностранной лит-ры. М., 1957.

Д. Пойа. Математическое открытие. Изд-во «Наука». М., 1970.

У. Сойер. Путь в современную математику. Изд-во «Мир». М., 1972.

Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Панен. Современная математика. Изд-во «Мир». М., 1966.

Я. И. Хургин. Ну и что? Изд-во «Молодая гвардия» (серия «Эврика»). М., 1970.

Ю. А. Шиханович. Введение в современную математику. Начальные понятия. Изд-во «Наука». М., 1965.

И. М. Яглом. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. Изд-во «Наука», М., 1969.

Содержание

Щербаков Роман Николаевич,
Пичурин Лев Федорович

ТРОЕ В ОДНОЙ КАЮТЕ,
НЕ СЧИТАЯ МАТЕМАТИКИ

Для старших школьников и юношества

Редактор-составитель *Л. В. Белявская*
Художник *Е. Ф. Зайцев*
Художественный редактор *В. П. Минко*
Технический редактор *В. Л. Лобкова*
Корректор *О. М. Кухно*

Сдано в набор 11 мая 1975 г. Подписано к печати 13 августа 1975 г. Формат 70×108/32. Бумага тип. № 1. 2,45 печ. л., 2,38 изд. л. МН 00640. Тираж 50000 экз. Заказ № 52. Цена 9 коп.

Западно-Сибирское книжное издательство, Новосибирск, Красный проспект, 32.
Полиграфкомбинат, Новосибирск, Красный проспект, 22.

Цена 9 коп.