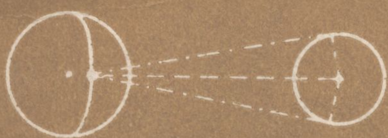
АНДРОНОВ, А. К. ОКУНЕВ

ТРИГОНОМЕТРИЯ ОСТРОГО УГЛА НА ОСНОВЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ



УЧПЕДГИЗ
1959

И. К. АНДРОНОВ и А. К. ОКУНЕВ

ТРИГОНОМЕТРИЯ ОСТРОГО УГЛА НА ОСНОВЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПОСОБИЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иван Козьмич Андронов
и Александр Кузьмич Окунев.
Тригонометрия острого угла на основе практических задач
Редактор *Л. А. Сидорова*
Художественный редактор *А. В. Максаев*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *К. Иванова*

Сдано в набор 2/I 1958 г. Подписано к печати 21/II 1959 г. $84\times108^1/_{32}$
Печ. л. 6 (4,92). Уч.-изд. л. 4,28 Тираж 30 000 экз. А 00978. Заказ № 30.
Цена 1 р 15 к.

Учпедгиз Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфический комбинат Ярославского совнархоза
Ярославль, ул. Свободы, 97.

ВВЕДЕНИЕ

Отметим, что как в русской, так и зарубежной школе и литературе сложились две системы преподавания тригонометрии: 1) система, имеющая дедуктивный характер, когда курс тригонометрии начинают с общего учения о круговых функциях любого действительного аргумента (гониометрии), а заканчивают решением треугольников и сводимых к ним фигур с частичным использованием таблиц круговых функций острого угла, а главным образом с помощью таблиц логарифмов круговых функций; 2) система, имеющая индуктивный характер, когда начинают с тригонометрии острого угла и ее применения при решении сперва прямоугольных треугольников, а затем любых треугольников и сводимых к ним фигур на основе полного использования таблиц круговых функций острого угла, а заканчивают обобщением — круговыми функциями любого действительного аргумента с установлением свойств этих функций и их применением при изучении различных гармонических движений.

Естественно, встает вопрос, как создались эти две системы в преподавании тригонометрии; для этого обратимся к истории тригонометрии и к истории ее преподавания.

I

Тригонометрия в своем развитии прошла две стадии. Первой стадией положены начала в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд и составляются таблицы хорд через каждые полградуса до 180° в трудах Александрийских ученых Гиппарха (II в. до н. э.) и Птолемея (II в. н. э.).

В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела способствовали развитию зачатков нового предмета, заложенного Гиппархом и Птолемеем. Особенно усиленно шло развитие тригонометрии в средневековое время, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Мухаммед сын бен-Мусы, Нассир Эддин, ал-Каши, ал-Бируни), Арабии (Ахмад Ибн-Абдаллах, ал-Батани), а затем и в Европе (Пейербах, Иоганн Мюллер — Региомонтан, Коперник, Ретик). Творения ученых этого периода привели к выделению нового самостоятельного предмета сперва в Азербайджане Насирэддином Туси (1201—1274) в его «Трактате о полном четырехстороннике», а позднее в 1595 году и в Европе в труде Варфоломея Питискуса «Triqonometria sive de Solutione triangulorum fractorum libris et perstricuns» (в переводе — «Тригонометрия, или краткий обзорный трактат о решении треугольников»).

Итак, на первой стадии тригонометрия сложилась как теория вычислительного приема решения треугольников и фигур, сводимых к ним, причем решение проводилось с помощью таблиц синусов и тангенсов, основой для вычисления которых послужили теоремы Пифагора и Птолемея.

Тригонометрия возникла на геометрических основах, имела геометрический язык и применялась к геометрическим задачам, которые выделялись из конкретных задач естествознания и техники того времени.

Вторая стадия, начало которой положено в трудах Франсуа Виета (1540—1603), полностью раскрывается в школе нашего академика Леонарда Эйлера (1707—1783), когда создается аналитическая теория тригонометрических (круговых) функций.

Эта стадия была подготовлена всем ходом развития механики колебательных движений, физики звуковых, световых и электромагнитных волн.

Так, если на первой стадии развития тригонометрии соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ лишь выражало зависимость между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1, то на второй стадии это соотношение отражает также сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией (см. рис. 1).

В этот период даны обобщения многим теоремам тригонометрии, и в частности выведены соотношения для $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, $\operatorname{tg} n\alpha$, где n — натуральное число, и другие.

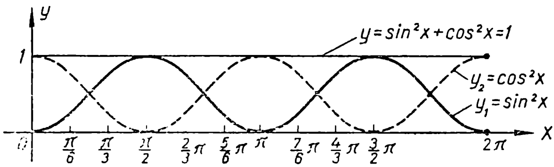


Рис 1.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ рассматриваются теперь как суммы степенных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Одновременно развивается учение о тригонометрических функциях комплексных чисел.

В связи с открытием великим геометром Николаем Ивановичем Лобачевским новой геометрии выясняется, что тригонометрия состоит из двух принципиально различных частей:

а) первой — г о н и о м е т р и и, части математического анализа, где независимо от геометрических соображений чисто аналитически раскрывается учение о трансцендентных тригонометрических функциях с их свойствами;

б) второй — с о б с т в е н н о т р и г о н о м е т р и и, где соединяются две ветви математики — математический анализ и геометрия того или иного пространства: в частности, тригонометрия евклидова пространства — учение об аналитическом решении треугольников и сводимых к ним фигур, рассматриваемых в евклидовом пространстве, и тригонометрия пространства Лобачевского — учение об аналитическом решении треугольников и фигур, сводимых к ним, рассматриваемых в пространстве Лобачевского.

Гониометрия не зависит от аксиомы параллельных, а тригонометрия в собственном смысле зависит от аксиомы параллельных. Соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ характеризует в общем виде операции с соответствующими рядами и только в евклидовом пространстве выражает соотношение между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой, равной единице.

Известное соотношение между сторонами и углами треугольника $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ верно в евклидовом пространстве, а в пространстве Лобачевского неверно, в последнем имеется соотношение более общего характера:

$$\frac{l_a}{\sin A} = \frac{l_b}{\sin B} = \frac{l_c}{\sin C},$$

где l_a, l_b, l_c — длины окружностей с радиусами a, b и c.

Благодаря сложному ходу развития тригонометрии становится все более затруднительной ее связь с содержанием учебного предмета тригонометрии. Если на первой стадии своего развития тригонометрия мало чем отличалась от ее учебного предмета, то во вторую стадию такое различие становится весьма большим и существенным. В XVIII и особенно в XIX в. в связи с бурным развитием дифференциального исчисления возникает новый предмет — математический анализ, и тригонометрия становится составной частью этого предмета, а учебный предмет тригонометрии с его первоначальной геометрической основой продолжает существовать самостоятельно. В содержании учебного предмета тригонометрии возникают два направления: прежнее — аналитическое решение треугольников, и новое — изучение свойств тригонометрических функций.

II

Возник вопрос методического характера: как построить преподавание тригонометрии с учетом двух ее направлений?

Впервые и сравнительно рано (середина XIX в.) дал на этот вопрос принципиально правильный ответ, как нам представляется, наш замечательный академик Михаил Васильевич Остроградский. Он предложил (1848) систему индуктивного характера преподавания тригонометрии так, что

а) сперва (в младших классах) изучается тригонометрия острого угла как учение о вычислительном приеме решения треугольников и фигур, сводимых к ним;

б) потом (в старших классах) обобщаются понятия тригонометрии острого угла, т. е. ставится теория тригонометрических функций любого действительного аргумента.

При жизни Остроградского его система была принята в кадетских корпусах (типа наших суворовских училищ), но в дальнейшем не нашлось смелых продолжателей его дела, умеющих ломать отживающие традиции.

Ф. И. Семашко, написавший первое издание учебника тригонометрии в духе Остроградского, в третьем издании (1886 г., после смерти М. В. Остроградского) отступает от новой системы и возвращается к системе дедуктивного характера.

В дальнейшем побеждает дедуктивное направление в методике тригонометрии, и в конце XIX — начале XX в. в нашей стране появляются учебники тригонометрии (Малинина, Шапошникова, Рыбкина, Злотчанского и др.), написанные по системе дедуктивного характера.

В годы политического подъема (1905—1906) нашей родины передовые педагоги настойчиво ставят проблему о коренном изменении характера преподавания математики, и в частности тригонометрии; выходят новые программы для одной из прогрессивных ветвей средней общеобразовательной школы — для реальных училищ, где тригонометрия изучается по индуктивной системе.

Появляются новые учебники и задачники, соответствующие новым программам (Слетова, Билибина, Мрочека, Лямина, Кильдюшевского, Глазенапа и др.).

Советская методика основ математических наук строит свою систему на идее развития и на психологических основах соответствия системы преподавания возрастным особенностям учащихся.

К сожалению, во многих программах по математике (с 1919 г. и далее) терялась мера в этом вопросе, переоценивались концентрические системы во многих отделах элементарной математики (в изучении действий над числами, в постановке учения об уравнениях, в учении о площадях и объемах соответствующих фигур), и в частности в системе преподавания тригонометрии.

Авторы данной работы считают, что индуктивная система в преподавании тригонометрии почти необходима или во всяком случае желательна; хорошо бы было, если бы передовые учителя начали ее экспериментировать.

Эта книга, являясь пособием для учителей, может быть рекомендована для внеклассного чтения учащимся, заинтересовавшимся предметом математики.

Нам представляется, что наилучшим местом для введения в школу систематического учения о приближенных измерениях и вычислениях являются начала тригонометрии. Вот почему с самого начала обращено внимание на точность как непосредственных, так и косвенных измерений; причем мы следовали известным правилам вычислений с приближенными данными по системе В. М. Брадиса, беря данные примерно одной и той же точности и давая ответ с точностью, обусловленной точностью данных значений величин.

Отметим, что в системе исчисления точности по Крылову—Брадису имеется один недостаток, выявляющийся при раздроблении именованных чисел. Так $3{,}7$ *м* $= 370$ *см* $= 3700$ *мм*, но первое число имеет два значащих знака, второе — три, третье — четыре: произошло кажущееся повышение точности в процессе раздробления именованного числа. Чтобы избегать указанного недостатка, авторы в данной книге всюду применяют такое обозначение: $3{,}7$ *м* $= 37\underline{0}$ *см* $= 37\underline{00}$ *мм*, подчеркивая снизу те знаки, за которые не ручаются.

СЛОВО К УЧАЩИМСЯ

Много трудностей преодолел каждый из вас при изучении различных предметов из основ математических наук.

Пройдена арифметика — учение о числах и действиях над ними, т. е. тот предмет, который создавали все народы всех времен, так как на протяжении всей истории от первобытной общины до наших дней в процессе труда люди нуждались в знании натуральных и дробных чисел и решали с их помощью практические задачи. Этот предмет в древней Греции (VI в. до н. э.) получил свое название: арифметика (слово греческое — арифмос — число и техния — искусство, действие, а в целом — числовое искусство).

Изучается алгебра — учение об обобщенных числах, некоторых элементарных функциях и уравнениях — берущая свое начало у передовых мыслителей древнего Китая, Египта и Вавилона за много столетий до нашей эры, получившая свое дальнейшее развитие в Индии (IV — VIII вв.) и оформившаяся в самостоятельный предмет в трудах гениального узбекского математика из Хорезма Мухаммеда бен-Мусы, в его книге «Ал-джебр вал-мукабала» (в переводе с арабского — «Членовосстановление и членоупрощение»). Особенно расцвел этот предмет позднее в XVI, XVII и XVIII вв., когда и название из Альджебр перешло в Альгебр и, наконец, в алгебру.

Изучается геометрия — учение о свойствах фигур и измерении геометрических величин. Этот предмет возник вначале на основе землеизмерения (что и сохранилось до сих пор в его греческом названии: гео — земля, метрия — измерять) и получил свое научное оформление в эпоху расцвета греческой культуры III в. до н. э. в особенности в трудах знаменитого Евклида.

Геометрические величины (отрезки, углы, площади) сперва научились измерять непосредственно. Так, чтобы измерить отрезок, к нему прикладывают соответствующим образом измерительную ленту (как это делает, например, портной); чтобы измерить угол, на него накладывают определенным образом транспортир (как это делает чертежник); чтобы измерить площадь фигуры, на нее накладывают палетку и подсчитывают число квадратиков, заключенных внутри фигуры (так, например, поступают с фигурами на топографических картах).

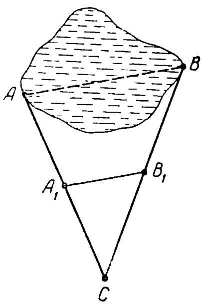


Рис. 2

Приемы непосредственного измерения величин и простейшие измерительные инструменты были изобретены еще в глубокой древности. Так, например, градусом как единицей меры угла и транспортиром пользовались вавилонские астрономы (звездочеты) за 2 тысячи лет до нашей эры.

Техника непосредственного измерения величин весьма проста и доступна каждому. Однако в окружающей нас жизни существует много таких величин, непосредственное измерение которых связано с большими трудностями, а иногда и вовсе невозможно. Как, например, измерить высоту дерева (не срубая его), ширину непроходимого болота, угол с недоступной вершиной, расстояние между планетами, диаметры планет и т. п. Оказывается, такие величины можно определять косвенно, т. е. через измерение некоторых вспомогательных величин и соответствующие вычисления. Так, для определения ширины болота AB (см. рис. 2) выбирают на местности точку C так, чтобы можно было провешить и измерить: 1) отрезок AC, 2) отрезок BC, 3) отрезок A_1B_1, где A_1 — середина AC и B_1 — середина BC. Затем по известному из геометрии свойству средней линии в треугольнике находят $AB = 2A_1B_1$. Пусть $A_1B_1 = 340$ *м*, тогда $AB = 680$ *м*.

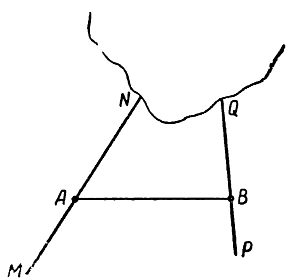


Рис. 3

Для определения угла с недоступной вершиной, например угла между двумя прямыми дорогами MN и PQ, пересекающимися в недоступной для нас местности[1] (см. рис. 3), провешивают прямую AB и измеряют углы NAB и QBA.

Пусть $\angle NAB = 57°$, $\angle QBA = 85°$, тогда по теореме о сумме углов треугольника находят искомый угол:

$$x = 180° - (57° + 85°) = 38°.$$

Однако изученная вами часть геометрии далеко не всегда дает средства косвенных измерений величин на основе вычислений.

Пусть требуется определить расстояния от пунктов C и B до недоступного нам предмета A, например, здания, расположенного за рекой (рис. 4), при условии, что данный предмет из этих пунктов виден и расстояние между C и B возможно измерить.

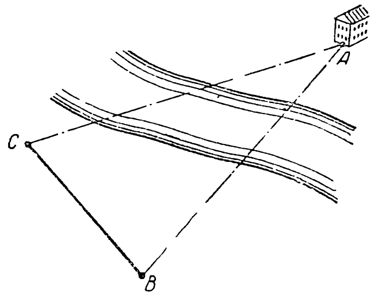


Рис. 4

Измерив расстояние между пунктами B и C и углы, образуемые прямой BC и направлениями из точек B и C на предмет A получим:

$$BC \approx 456\ м, \ \angle B \approx 82°30', \ \angle C \approx 65°20'.$$

Таким образом, треугольник ABC вполне определен стороной и двумя углами, однако найти в нем стороны AB и AC вычислением мы пока не можем. Геометрия дает в этом случае лишь графический метод, заключающийся в следующем:

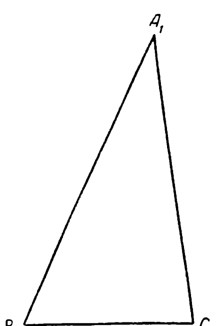


Рис. 5

Вычерчивают на листе бумаги треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 5), подобный треугольнику ABC, приняв за масштаб, например, 100 *м* в 1 *см*. Коэффициент подобия:

$$k = \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{45600}{2,28} = 20\,000.$$

Измеряют на чертеже неизвестные стороны треугольника $A_1B_1C_1$

[1] Местность, в которой пересекаются дороги, может оказаться недоступной в связи с наводнением, разрушением мостов и т. п.

получают: $A_1B_1 \approx 4{,}25$ *см*, $A_1C_1 \approx 3{,}85$ *см*. Умножив эти числа на коэффициент подобия, получают искомые расстояния:

$$AB \approx A_1B_1 \cdot k \approx 4{,}25 \cdot 10\,000 \approx 85\underline{0} \ (\textit{м});$$
$$AC \approx A_1C_1 \cdot k \approx 3{,}85 \cdot 10\,000 \approx 77\overline{\underline{0}} \ (\textit{м}).$$

Данный здесь графический метод обладает рядом существенных недостатков, из которых отметим два:

1) аккуратное вычерчивание треугольника $A_1B_1C_1$ и последующее измерение его сторон связано с затратой большого времени и труда и не всегда возможно (в полевых условиях, в условиях плавания на корабле и т. п.);

2) при таком определении расстояния неизбежны значительные погрешности, зависящие не только от неточности измерительных инструментов и измерений на местности, но и от неточности чертежа и чертежных инструментов, а также от неточности измерений, производимых на самом чертеже после его выполнения.

В самом деле, всякая линейная ошибка на чертеже влечет за собой в 20 000 раз бо́льшую ошибку на местности. Если, например, при вычерчивании треугольника $A_1B_1C_1$ и измерении его стороны A_1C_1 допустили ошибку только в 3 *мм*, то в результате мы получим отклонение от истинного расстояния AC, равное 3 *мм*$\cdot$20 000$\approx$6$\overline{0}$ *м*.

А если принять во внимание возможность и других неточностей чертежа, которые к тому же нельзя учесть, то становится очевидным, что геометрическим построительным методом мы не только не найдем истинных расстояний, но и не сможем оценить допущенные нами погрешности.

Более того, в случаях, когда в условии задачи имеются весьма малые углы, построительный прием вообще не применим, так как построение треугольника с углом, меньшим 1°, уже практически невозможно. А между тем в задачах на определение диаметров планет и расстояний до небесных светил (которые дальше будут рассматриваться) мы часто имеем дело с углами в несколько минут. Например, угол видимости Луны с нашей планеты равен 0°31′.

Возникает необходимость в открытии общего вычислительного приема нахождения сторон и углов любой фигуры по заданным элементам, вполне определяющим эту фигуру (например, треугольник вполне определяется заданием трех его независимых элементов, остальные его элементы надо научиться находить вычислением).

Этот новый прием зарождается в геометрии, в учении о подобии треугольников.

Исторически он возник в связи с развитием астрономии. Первыми творцами этого приема были греческие математики Гиппарх (II в до н. э.) и Птолемей (II в. н. э.). Их вычислительные способы решения задач были усовершенствованы индийским математиком Брамагуптой в VIII в., а затем узбекскими математиками ал-Каши и Улугбеком в XIII в.

Накопление и систематизация всех вычислительных приемов решения геометрических задач привели к выделению нового предмета математики, который назвали в конце XVI в. т р и г о н о м е т р и е й (т. е. треугольнико-измерение, понимая под этим косвенное измерение на основе свойств треугольника).

К изучению указанных приемов и началам предмета тригонометрии мы и приступим.

Глава I

ПЛОСКИЕ УГЛЫ И ИХ КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЧЕРЕЗ УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

§ 1. Непосредственное и косвенное измерение величин

Столяр непосредственно измеряет отрезки тех или иных поделок, но астроном находит вычислением расстояние от центра Земли до центра Солнца; так как это расстояние недоступно непосредственному измерению, его измеряют косвенно.

Чертежник непосредственным накладыванием транспортира измеряет плоский угол, а мастер, направляющий работу на токарном станке, находит угол конусности обтачиваемой детали косвенно посредством вычисления.

В лаборатории небольшой объем жидкости измеряют непосредственно градуированной мензуркой, а объем воды водохранилища находят косвенно, расчетом по установленной формуле.

Вес небольшого предмета находится непосредственным его взвешиванием на весах, а запасы ископаемых (например, руды, каменного угля и пр.) горные инженеры находят косвенно путем соответствующих расчетов.

Непосредственное измерение отрезков и углов, как и других величин, возможно только приближенно с соответствующей точностью. Точность непосредственных измерений отрезков и углов колеблется от 2-х до 5—6 значащих цифр и достигает только в исключительно обставленных условиях до 7—8 значащих цифр.

Степень точности измерений зависит не только от измерительных приборов и навыка мастера, производящего измерение, но также от материала, из которого изготовлена измеряемая деталь, и от цели измерения. Приведенная таблица, составленная на конкретных примерах, дает об этом некоторое представление.

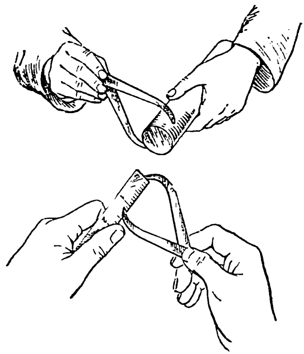


Рис. 6

№	Цели измерения	Из какого материала изготовлена деталь	Какими измерительными приборами производится измерение	Кто измеряет	Степень точности
I	Аккуратное изготовление ножек для столов	Из дерева	Кронциркулем и масштабной миллиметровой линейкой (рис. 6)	Токарь по дереву	3 значащих цифры
II	Изготовление вала для машины	Из стали	Предельным калибром или штангенциркулем (рис. 7)	Токарь по металлу 3—4 разряда	4 значащих цифры
III	Изготовление коленчатого вала для аэроплана	Из электростали высшего качества	Микрометром (рис. 8)	Токарь по металлу 8 разряда	5 значащих цифр

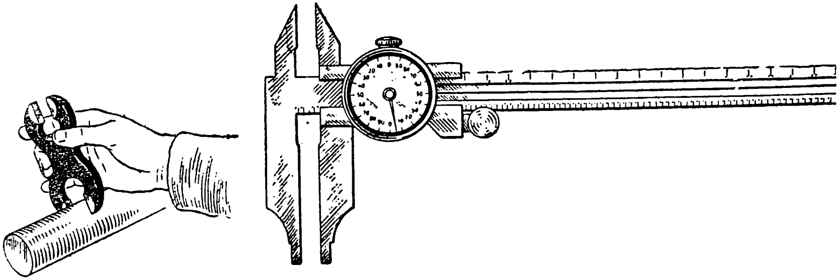


Рис. 7

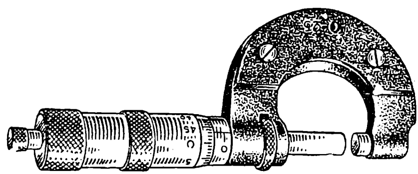


Рис. 8

Землемер ведет измерения на местности также с различной точностью в зависимости от измерительных приборов, например:

Отрезки (расстояния)	Измерительной лентой или цепью — с 3 значащими цифрами (рис. 9)	Жезлами — повышенная точность с 4—5 значащими цифрами	Специальной проволокой с учетом ее температуры — с точностью до 6—7 значащих цифр (рис. 9а)
Углы	Астролябией — с 3—4 значащими цифрами (рис. 10)	Гониометром — с 4—5 значащими цифрами (рис. 11)	Теодолитом — с 5—6 значащими цифрами (рис. 12). Наивысшая точность — 7 значащих цифр

Школьные измерения отрезков и углов на местности и на чертежах ведутся в основном с 2—3 значащими цифрами.

Так, например, $x \approx 5{,}6$ *м* — ширина класса, измеренная измерительной лентой; $y \approx 21{,}3$ *см* — длина отрезка на чер-

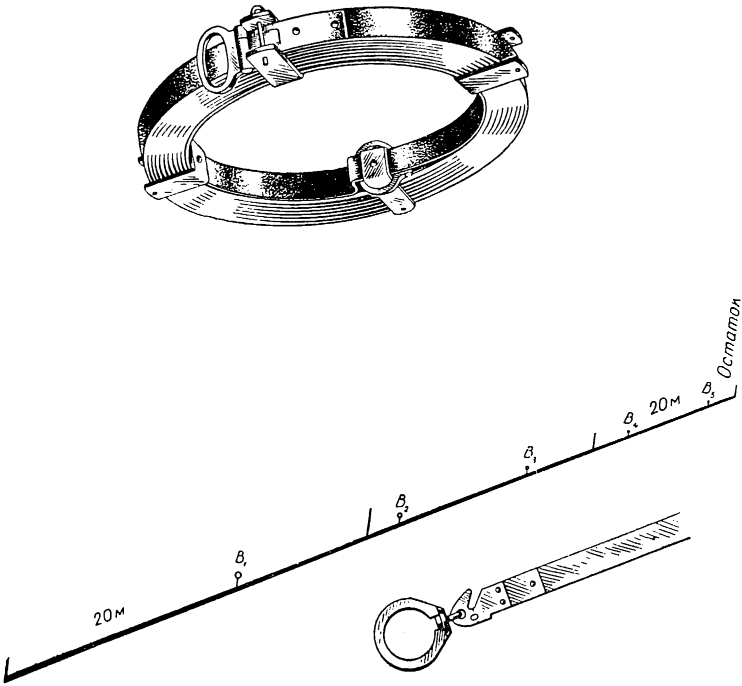


Рис. 9

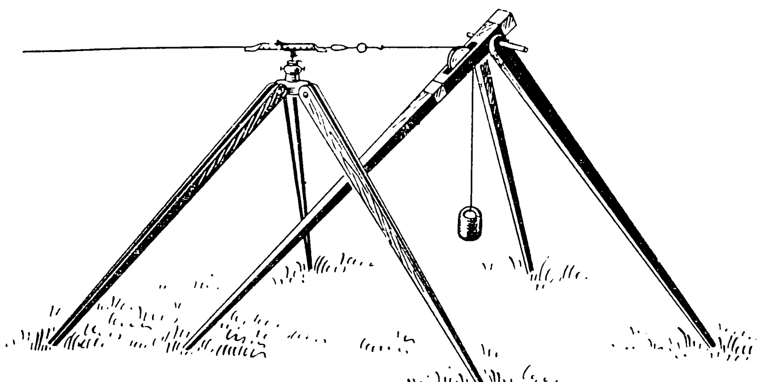


Рис. 9а

теже, измеренная масштабной линейкой; $z \approx 121°$ — угол, измеренный школьной астролябией, или эклиметром.

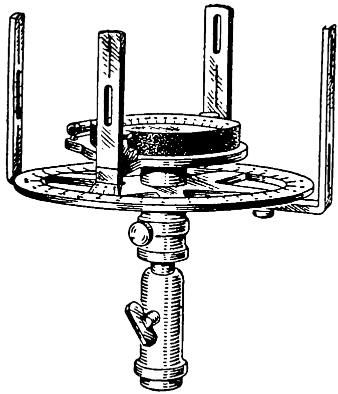


Рис. 10

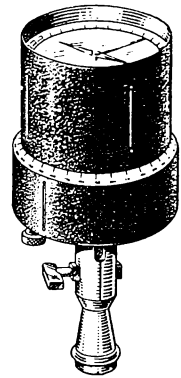


Рис. 11

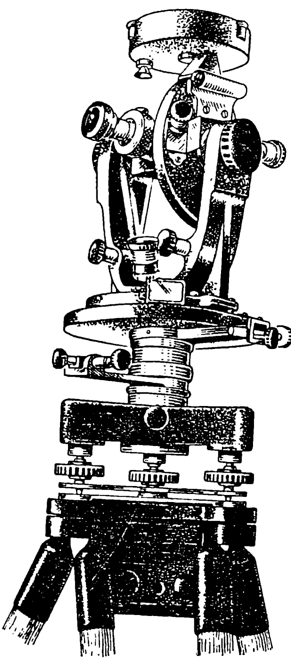


Рис. 12

Так как процесс «косвенного измерения» недоступных величин начинается непосредственным измерением некоторых вспомогательных величин и завершается вычислениями, в которых используются результаты непосредственных измерений, то точность косвенных измерений зависит от точности выполненных измерений. Если, например, результаты непосредственных измерений длины и ширины классной комнаты выразились числами 6,4 *м* и 8,7 *м* с двумя значащими цифрами, то уже никакими вычислениями мы не сможем найти площадь пола этой комнаты точнее, чем с двумя значащими цифрами, т. е. $S \approx 56$ *м*^{2}.

В сборнике математических таблиц В. Брадиса имеются правила, которых следует придерживаться при вычислениях, содержащих результаты каких-либо измерений, т. е. приближенные данные.

В качестве примера «косвенных измерений» длины недоступного отрезка рассмотрим один из приемов определения высоты фабричной трубы, находящейся на ровной местности (рис. 13).

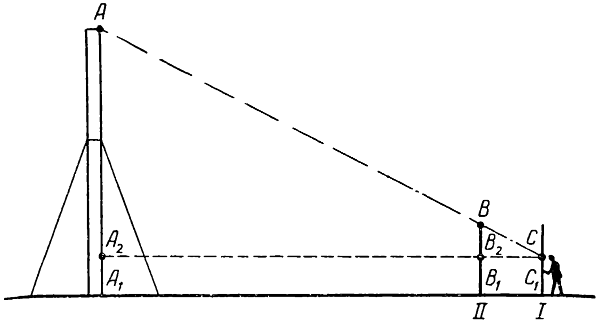


Рис. 13

I. Непосредственные измерения и подготовка формулы расчета.

1) Берут с собой две двухметровые рейки (2,00 *м*), разделенные на сантиметры, и ставят их вертикально в любом удобном месте так, чтобы труба и обе рейки находились в одной плоскости (как указано на рисунке).

2) Наблюдатель, стоящий у первой рейки, находит на ней точку C так, чтобы C, B и A были на одной прямой, и отмечает высоту этой точки $C_1C = h_1$ *м*.

3) Измеряют отрезки $A_1B_1 = a$ *м* и $B_1C_1 = в$ *м*.

4) Из подобия треугольников ACA_2 и BCB_2 получают:

$$\frac{AA_2}{BB_2} = \frac{A_2C}{B_2C} \quad \text{или} \quad \frac{AA_1 - A_1A_2}{BB_1 - B_1B_2} = \frac{A_2B_2 + B_2C}{B_2C}.$$

Используя обозначения, записывают уравнение:

$$\frac{x - h_1}{2{,}00 - h_1} = \frac{a + b}{b},$$

из которого и получают формулу для вычисления высоты трубы:

$$x = 2{,}00 + \frac{a}{b}(2{,}00 - h_1).$$

II. Вычисление

1) Пусть результаты измерений оказались следующими: $h_1 \approx 1{,}20$ *м*, $a \approx 40{,}0$ *м*, $в \approx 1{,}6$ *м*.

2) Находят x:

$$x \approx 2{,}00 + \frac{40{,}0}{1{,}6}(2{,}00 - 1{,}20) \approx$$

$$\approx 2{,}00 + 25{,}0 \cdot 0{,}80 \approx \quad \text{(по I, II и V правилам[1])}$$

$$\approx 2{,}00 + 20{,}0 \approx \quad \text{(по II и V правилам)}$$

$$\approx 22\ (м). \quad \text{(примечание к V правилу)}$$

§ 2. Косвенное измерение недоступных углов

Если угол изображен на чертеже, то его легко измерить непосредственно с помощью транспортира. Для измерения доступных углов на местности употребляют более совершенные измерительные приборы, с которыми вы уже частично знакомились в предшествующем параграфе.

Однако непосредственное измерение углов на практике часто связано с большими трудностями, а в тех случаях, когда вершина угла недоступна, такое измерение вообще невозможно. Так, например, нельзя измерить угол, под которым поднимаются в гору или спускаются с горы, угол подъема лестницы, крыши, угол между двумя прямыми дорогами, пересекающимися в недоступной нам местности, угол, под которым наша планета видна с другой планеты, и т. п.

Как же находить величины таких углов?

Оказывается, уже в далеком прошлом люди нашли способ определения величины угла, при котором измеряется не сам угол, а некоторые отрезки, связанные определенным образом с таким углом. Этот способ косвенного измерения угла основан на понятии углового коэффициента, к которому мы и переходим.

§ 3. Угловой коэффициент, или тангенс острого угла

Пусть дан любой острый угол $MAN = A$ (рис. 14). Возьмем на его стороне AN произвольно точки B, B_1, B_2, B_3 $\ldots B_n \ldots$ и опустим из них на другую сторону перпенди-

---

[1] См. «Правила подсчета цифр» в сборнике математических таблиц В. Брадиса.

кулярыы BC, B_1C_1, B_2C_2, ... B_nC_n ... Получим бесконечное множество подобных прямоугольных треугольников с одним и тем же острым углом A.

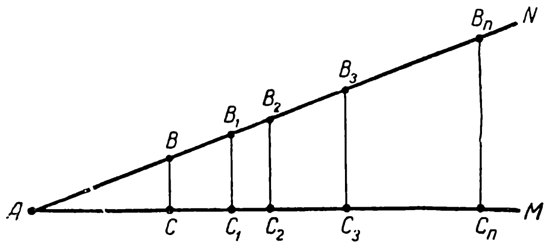


Рис. 14

Понятно, что ни один из катетов этих треугольников не может характеризовать величину угла A, так как с переходом от одного треугольника к другому катеты изменяются, а угол A остается неизменным. То же самое можно сказать и о гипотенузах треугольников.

Попробуем взять отношение катетов в построенных нами треугольниках. Так как эти треугольники подобны, то будем иметь:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots$$

Замечаем, что в каждом треугольнике отношение катета, противолежащего углу A, к катету, прилежащему к углу A, одно и то же. В таком же отношении будут находиться катеты в любом прямоугольном треугольнике с углом, равным A, так как такой треугольник будет подобен построенным нами треугольникам.

А что будет происходить с рассматриваемыми нами отношениями катетов, если угол A изменять, например увеличивать?

На рисунке 15 показано изменение угла MAN и отмечено три значения его:

$$\angle MAN < \angle MAN' < \angle MAN'',$$

причем построены прямоугольные треугольники ABC, $AB'C$ и $AB''C$ с общим катетом AC, прилежащим к рассматриваемым углам.

Видим, что катеты, противолежащие углу A, не равны, а именно: $BC<B'C<B''C$ (катеты увеличиваются).

Разделим каждый член этого неравенства на AC, получим:

$$\frac{BC}{AC}<\frac{B'C}{AC}<\frac{B''C}{AC},$$

т. е. с увеличением острого угла увеличивается и отношение катета, противолежащего этому углу, к прилежащему катету; с уменьшением угла указанное отношение катетов уменьшается, причем каждому углу соответствует определенное отношение катетов.

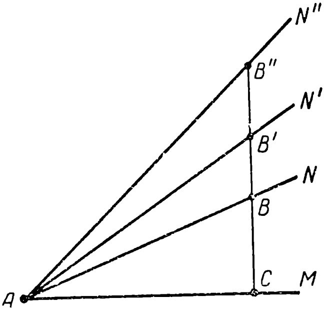


Рис. 15

Следовательно, величину любого острого угла можно характеризовать числом, равным отношению катетов соответствующего прямоугольного треугольника. Действительно, если дан острый угол A (рис. 14), то можно взять на его стороне произвольную точку B, опустить из нее на другую сторону перпендикуляр BC и в полученном треугольнике ABC найти отношение катетов $\frac{BC}{AC}=\frac{m}{n}$.

Обратно, если дано число $\frac{m}{n}$ равное отношению катета, противолежащего некоторому неизвестному нам углу, к катету прилежащему, то можно построить и сам этот угол. Пусть, например, $\frac{m}{n}=\frac{4}{7}$.

Примем за единицу измерения произвольный отрезок E (рис. 16). Построим прямой угол с вершиной C и на его сторонах отложим отрезки: $CB=4$ единицам измерения и $CA=7$ единицам измерения.

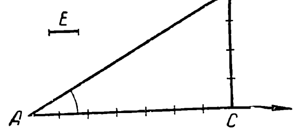


Рис 16

Проведем лучи AB и AC, получим искомый угол CAB. Приняв за единицу измерения какой-либо другой отрезок E', мы получили бы другой прямоугольный треугольник $C'A'B'$ (рис. 17); но этот треугольник будет подобен треугольнику CAB (по второму признаку подобия), поэтому его угол $C'A'B'$ равен углу CAB. Таким образом, данному отношению $\frac{m}{n}$ соответствует единственный угол. Но стоит лишь изменить отношение $\frac{m}{n}$, например взять $\frac{m_1}{n} > \frac{m}{n}$, и сразу же изменится определяемый угол, а именно:

$$\angle CAB_1 > \angle CAB.$$

Это показано на рисунке 18, где угол CAB соответствует отношению катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n} = \frac{4}{7}$, а угол CAB_1 соответствует отношению катетов $\frac{B_1C}{AC} = \frac{m_1}{n} = \frac{6}{7}$.

Связь угла с отношением катетов в прямоугольном треугольнике положена в основу косвенного измерения углов.

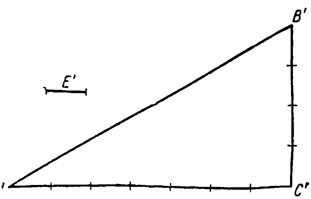


Рис. 17

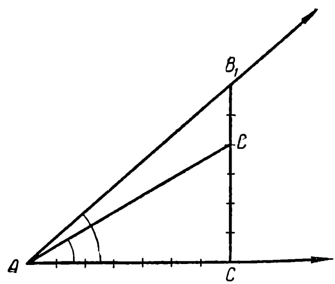


Рис. 18

Впервые такой метод был использован арабскими астрономами-математиками ал-Батани (850 — 929) (Багдад «Книга о звездах») и Абу-ль-Вефа (940—998) для определения угловой высоты солнца по тени от шеста (рис. 19).

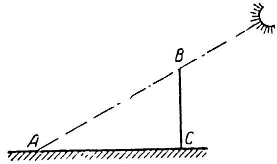


Рис. 19

Зная величину шеста $BC = m$ и длину его тени $AC = n$, они находили отношение катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n}$ в прямоугольном треугольнике ABC, а по отношению катетов определяли величину угла A. Отношение катета, противолежащего искомому углу, к катету прилежащему они называли Umbra versa (Тень) [Абу-ль-Вефа]. Позднее в XVI в. европейцы [Финк (1561—1656) «Геометрия круга», Копенгаген, 1583] стали называть это отношение по-латыни т а н г е н с о м.

Итак, *тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, противолежащего этому углу, к катету прилежащему*, что сокращенно со времен Жирара (1590—1633, Нидерланды) записывают так:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Например, если противолежащий катет $BC = 15$ *см*, а прилежащий $AC = 20$ *см*, то $\operatorname{tg} A = \frac{15}{20} = 0{,}75$.

Из всего сказанного выше можно сделать следующие выводы:

1. Любой данный острый угол вполне определяет единственное положительное число, являющееся тангенсом этого угла.

2. Двум неравным острым углам соответствуют неравные их тангенсы, причем большему углу соответствует больший тангенс.

1. Любое данное положительное число определяет единственный острый угол, причем данное число является тангенсом этого угла.

2. Двум неравным положительным числам, рассматриваемым как тангенсы углов, соответствуют неравные острые углы, причем большему числу соответствует и больший угол.

Надо заметить, что в строительной технике часто вместо величины угла дается тангенс угла.

Например, при постройке дома (рис. 20) мастеру обычно вместо величины угла ската крыши дают отношение длин двух стропил, а именно $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AD}$, т. е. тангенс этого угла. На рисунке 20 $\operatorname{tg} x = \frac{BC}{AC} = \frac{4{,}0}{5{,}0} = 0{,}80$.

Скат крыши изменяется в зависимости от кровельного материала. Он больше для соломенных крыш, меньше для деревянных, еще меньше для железных.

В строительном деле угол ската:

1) для соломенных крыш (рис. 21) изменяется от 1,0 до 1,6;

2) для деревянных крыш (рис. 22) » от 0,50 до 1,0;

3) для железных крыш (рис. 23) изменяется от 0,14 до 0,30.

Итак, для определения величины угла нет необходимости в непосредственном его измерении, достаточно знать тангенс этого угла, т. е. отношение противолежащего ему

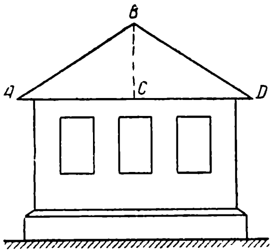


Рис. 20

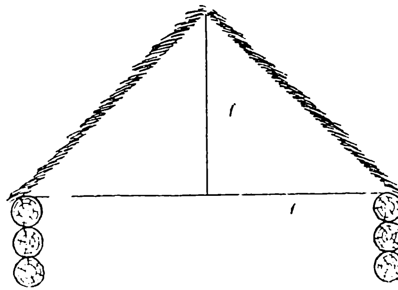


Рис. 21

катета к катету прилежащему. Поэтому на практике в случае, когда непосредственно измерить угол трудно или вовсе невозможно, находят его тангенс.

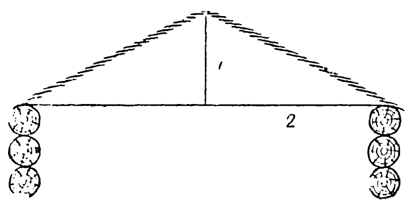


Рис. 22

Пусть, например, требуется найти угол спуска улицы, на которой находится школа (см. рис. 24). Измеряем длину фундамента школы и его высоту в начале и в конце здания, получаем

$$AB = l, \quad AC = h_1, \quad BD = h_2.$$

Находим тангенс искомого угла из прямоугольного треугольника CED:

$$\operatorname{tg} D = \frac{CE}{ED} = \frac{h_1 - h_2}{l} = k.$$

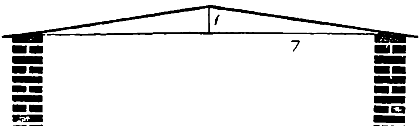


Рис. 23

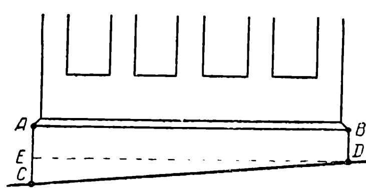


Рис. 24

Зная тангенс угла D, можно построить сам угол на бумаге, а затем, если потребуется измерить его транспортиром, и выразить в градусах.

Предположим, что результаты измерения фундамента оказались следующими: $l \approx 8{,}0$ *м*, $h_1 \approx 70$ *см*, $h_2 \approx 30$ *см*; тогда $\operatorname{tg} D \approx \frac{70-30}{800} = \frac{10}{200} = 0{,}050$,

Построив прямоугольный треугольник $C'D'E'$ с катетами 1,0 и 20 единиц, получим на бумаге угол D', равный искомому (рис. 25).

С помощью транспортира находим $D' \approx 3^\circ$ с точностью до одной значащей цифры, а не двух, так как на обычном школьном транспортире нет десятков минут.

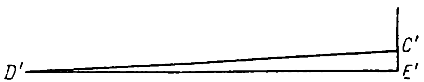


Рис. 25

Разумеется, построение угла с последующим измерением транспортиром можно не делать, если мы имеем под руками таблицу, содержащую тангенсы всех углов. По такой таблице мы сразу находим угол, тангенс которого равен 0,050, причем с точностью до 2-х значащих цифр, если таблица тангенсов будет достаточной точности.

Это обстоятельство было учтено людьми еще в глубокой древности. Первые таблицы тангенсов были составлены вычислением в Багдаде в X в. астрономами-математиками ал-Батани и Абу-ль-Вефа. Перейдем и мы к составлению такой таблицы в следующем параграфе.

Упражнения

1. Найти тангенсы острых углов прямоугольного треугольника ABC, у которого катет $AC = 15{,}8$ *см* и катет $BC = 7{,}2$ *см*.

2. Найти тангенсы углов, образованных:

а) диагональю классной доски с ее краями;

б) диагональю прямоугольника с его сторонами, если одна сторона прямоугольника в $1\frac{1}{2}$ раза больше другой.

3. Построить угол A, если

а) $\operatorname{tg} A = 0{,}75$;

б) $\operatorname{tg} A = 4{,}2$;

в) $\operatorname{tg} A = 0{,}08$.

4. Определите угол подъема улицы, на которой вы живете.

5. Определите подъем парадной и «черной» лестницы в школе.

6. Определите угол, под которым вы увидите верхнюю точку телеграфного столба высотой H *м*, если будете стоять в одной горизонтальной плоскости с основанием столба на расстоянии l *м* от него, а ваш рост h *м*.

Рассмотрите следующие случаи: $H = 10$ *м* и $h = 1{,}2$ *м*; $l = 5{,}0$ *м*; 15 *м*; 30 *м*; 100 *м*.

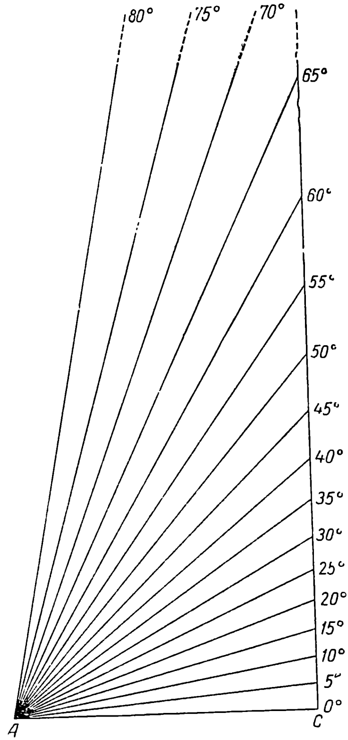


Рис. 26

§ 4. Составление двузначной таблицы тангенсов острых углов и пользование ею

Существуют различные приемы вычислений тангенсов углов, с которыми мы познакомимся в дальнейшем. В настоящее время вы можете находить тангенсы углов экспериментально с точностью до двух значащих цифр путем построений и измерений.

Возьмите разграфленный в клетку лист бумаги (а еще лучше лист миллиметровой бумаги), отметьте на этом листе буквой C вершину какого-нибудь одного из прямых углов, образованных линиями графления (рис. 26). На горизонтальной стороне угла отложите отрезок $CA = 20$ клеткам и в точке A постройте с помощью транспортира углы: 5°, 10°, 15°, 20°,..., 75°, 80°. Стороны этих углов пересекаются с другой стороной прямого угла C. В результате образуются прямоугольные треугольники с указанными острыми углами. Величина каждого катета у этих треугольников легко выражается в миллиметрах, так как известно, что у клеток графления сторона равна 5 *мм*. Следовательно, представляется возможным теперь вычислить с двумя значащими цифрами тангенсы углов этих треугольников (кроме tg 5°, определенного с 1 значащей цифрой).

Так, например, у треугольника с углом 20° противолежащий катет$\approx$36 *мм*, а прилежащий катет$\approx$100 *мм*, следовательно, $$\operatorname{tg} 20^\circ \approx \frac{36}{100} = 0{,}36.$$

Аналогичным образом найдем тангенсы остальных углов и расположим их в следующую таблицу:

A	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\operatorname{tg} A$	0,09	0,18	0,27	0,36	0,47	0,58	0,70	0,84

A	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
$\operatorname{tg} A$	1,0	1,2	1,4	1,7	2,1	2,7	3,7	5,7

Конечно, необходимо иметь таблицу тангенсов с большей точностью. Как это сделать?

Используя некоторые теоремы геометрии, можно найти точные значения тангенсов углов в 45°, 30° и 60°. Известно, что в прямоугольном треугольнике с углом в 45° катеты равны, следовательно, их отношение равно 1, а потому tg 45° = 1.

Для вычисления тангенсов углов в 30° и 60° можно использовать известную из геометрии теорему Пифагора[1], выражающуюся равенством:

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{1}$$

где a и b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 27).

Пусть в треугольнике ABC угол $A = 30°$, тогда по известной теореме противолежащий катет равен половине гипотенузы этого треугольника, т. е. $a = \frac{1}{2} c$.

[1] Открытие этой теоремы долгое время приписывали греческому математику Пифагору, жившему в VI в. до н. э., поэтому ее называли теоремой Пифагора. Ныне установлено, что данную теорему применяли за 1500 лет до Пифагора в древнем Вавилоне, однако название теоремы в учебниках пока сохраняется прежнее.

Подставив это значение катета в формулу (1), получаем:

$$\frac{1}{4}c^2 + b^2 = c^2, \text{ откуда } b = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Используя полученные результаты и определение тангенса, находим:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c}{2} : \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\ldots$$

Другой острый угол в данном треугольнике $B = 60^\circ$, следовательно, $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{2} : \frac{c}{2} = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

Сравнивая полученные точные значения тангенсов углов в 45°, 30° и 60° с теми значениями, которые мы нашли построением и вычислением, видим, что первые два знака у них совпадают, следовательно, составленные нами таблицы имеют двузначную точность.

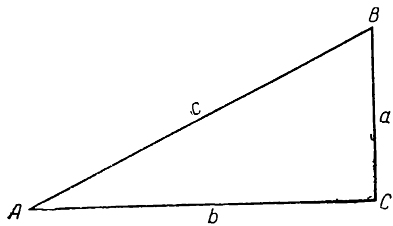


Рис. 21

Существуют способы вычислений тангенсов любых углов с любой степенью точности, но они требуют некоторых дополнительных знаний, которые вы приобретете во второй части курса тригонометрии.

На странице 96 дается таблица тангенсов трехзначной точности, причем углы в ней изменяются через 1°. По таблице тангенсов угла можно еще раз убедиться в том, что с увеличением острого угла растет и его тангенс, и обратно, однако прямой пропорциональной зависимости между углом и его тангенсом нет.

В самом деле, возьмем тангенсы двух каких-нибудь углов, например:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

видим, что с увеличением угла в два раза (60° : 30°) его тангенс возрос в три раза $\left(\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\right)$.

Покажем, как применяется таблица тангенсов при решении задач на определение углов.

Пример 1. Какова угловая высота солнца в то время, 1) когда длина горизонтальной тени от стоящего человека равна половине его роста; 2) когда она вдвое больше его роста, причем измерения проведены измерительной лентой с 2 значащими цифрами.

Решение. Обозначим искомые углы через x_1 и x_2, а рост человека через h, тогда в первом случае длина тени равна $\frac{1}{2}h$, а во втором — $2h$.

По определению тангенса имеем:

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{h}{\frac{1}{2}h} = 2{,}0; \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{h}{2h} = 0{,}50.$$

По таблице находим: $x_1 \approx 63°$, $x_2 \approx 27°$.

Пример 2. Пассажирский самолет, находящийся над пунктом A на высоте $h \approx 400$ *м*, начал приземление на аэродром, расположенный в 2,5 *км* от пункта A.

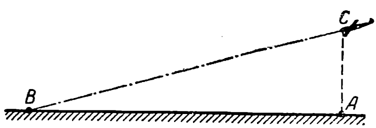


Рис. 28

Как велик будет в среднем угол приземления самолета?

Решение. Предположим, что точка приземления самолета B (рис. 28) находится на одной горизонтальной плоскости с пунктом A. Из прямоугольного треугольника ABC находим тангенс искомого угла B:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \approx \frac{400}{2500} = 0{,}16.$$

По таблице тангенсов находим $B \approx 9°$.

Упражнения

1. Определите при помощи тени от шеста угловую высоту солнца вашей местности в 9, 12 и 15 часов дня.

2. Ширина каждой ступеньки каменной домовой лестницы равна 32 *см*, а высота 14 *см*. Определить угол подъема лестницы.

(Ответ: 24°.)

Составьте и решите такую же задачу, используя размеры ступенек лестницы в вашем доме.

3. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол в 27°. Найти отношение сторон прямоугольника.

4. Профиль канавы имеет форму равнобочной трапеции, у которой нижнее основание равно 0,70 *м*, верхнее — 1,50 *м* и высота — 1,00 *м*. Выразить в градусах крутизну стенок канавы.

(Ответ: 68°.)

5. Известно, что графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат, причем число k называют угловым коэффициентом прямой.

Докажите, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс. (Взять случай, когда $k>0$.)

§ 5. Четырехзначные таблицы тангенсов острых углов и пользование ими

Выше мы пользовались и двузначными таблицами тангенсов с шагом в 5° и трехзначными с шагом в 1°, т. е. такими таблицами, в которых даны тангенсы углов через 5° или через 1°. Существуют таблицы и с меньшим шагом. Так, в сборнике математических таблиц Брадиса имеется таблица тангенсов с шагом в 0°,06′, короче — 6′, причем значение тангенсов в ней даны вначале с четырьмя десятичными знаками, а в дальнейшем с четырьмя значащими цифрами. Эта таблица позволяет решать задачи с большей точностью, чем та, с которой решались задачи в предшествующих параграфах. При чтении таблицы тангенсов различают два вида задач: прямую задачу, когда по данному углу находится его тангенс, и обратную задачу, когда по данному тангенсу угла находится сам угол.

Прямая задача. Дан угол A. Найти $\operatorname{tg} A$. Здесь возможны три случая[1].

I случай: данный угол A выражен целым числом градусов. В этом случае из всей таблицы используются только два первых столбца: в первом столбце читаем данный угол A, а во втором — его тангенс, например, для $A = 17°$, находим $\operatorname{tg} A \approx 0,3057$.

Такие таблицы, в которых значение угла читается в одном столбце, называют таблицами с одним входом. Следовательно, в рассматриваемом случае (как и в предшествующих параграфах) мы использовали только один вход в таблицу.

---

[1] Таблицы Брадиса.

II случай: данный угол содержит целое число градусов и еще целое число минут, кратное шести, например, $17°24'$.

Чтобы прочесть данный угол в таблице, надо использовать уже два входа в нее: целое число градусов ($17°$) читаем, как и раньше в первом столбце, а число минут ($24'$) ищем сверху в одном из следующих десяти столбцов, содержащих $0'$, $6'$, $12'$, $18'$, $24'$, $30'$, $36'$, $42'$, $48'$, $54'$. Значение тангенса угла $17°24'$ читаем на пересечении строки, начинающейся данным числом градусов ($17°$), и столбца с данным числом минут ($24'$).

Таким путем находим $\operatorname{tg} 17°24' \approx 0{,}3134$.

III случай: данный угол содержит целое число градусов и целое, но некратное шести число минут, например $17°26'$.

Берем ближайший к данному угол, содержащий кратное шести число минут. Для $17°26'$ таким углом будет $17°24'$. Как и прежде, используя два входа в таблицу, находим

$$\operatorname{tg} 17°24' \approx 0{,}3134.$$

В той же строке, где мы прочли значение тангенса «ближайшего угла», в последних трех столбцах даются поправки на $1'$, $2'$ и $3'$. Взятый нами ближайший табличный угол отличается от данного на $2'$, поэтому поправку берем в столбце с меткой $2'$; она равна 6 единицам последнего табличного разряда.

Так как с возрастанием угла растет и его тангенс, то поправку следует прибавить к найденному значению $\operatorname{tg} 17°24'$, и тогда получим $\operatorname{tg} 17°26' \approx 0{,}3134 + 0{,}0006 = 0{,}3140$. Здесь к двум основным входам в таблицу добавился третий — вход поправок.

Обратная задача. Дан $\operatorname{tg} A$. Найти угол A.

Здесь можно различать также три случая:

I случай: данное значение тангенса содержится в таблице и находится в столбце с меткой сверху $0'$, например, $\operatorname{tg} A = 0{,}4877$.

Число 0,4877 находим на пересечении строки с меткой $26°$ сверху и столбца с меткой $0'$ сверху; припоминая решение прямой задачи, делаем вывод, что искомый угол $A \approx 26°0'$.

II случай: данное значение тангенса также содержится в таблице, но находится не в первом, а в каком-нибудь другом столбце. Так, например, $\operatorname{tg} A = 2{,}703$ мы находим на пересечении столбца с меткой сверху $42'$ и строки с меткой слева $69°$; опираясь на решение прямой задачи, заключаем, что угол $A \approx 69°42'$.

III случай: данное значение тангенса отсутствует в таблице. Например, $\operatorname{tg} A = 1{,}2017$.

Находим ближайшее табличное значение тангенса; в нашем случае такое значение выражается числом 1,2002, расположенным на пересечении строки с $50°$ слева и столбца с $12'$ сверху, следовательно, $1{,}2002 \approx \operatorname{tg} 50°12'$.

Находим разницу между данным значением тангенса и найденным ближайшим табличным. У нас она оказалась равной 15 десятитысячным. В той же строке в столбцах поправок встречаются числа: 7, 14 и 22; из них ближайшее к 15 будет 14. Так как 14 принадлежит столбцу с меткой $2'$, то заключаем, что и на число 15 будет приходиться поправка около $2'$, которую следует прибавить к углу $50°12'$.

Итак, получаем:
$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 50°12' \\ 2' \end{array} \\ \hline A \approx 50°14' \end{array}$$

Может случиться, что ближайшее табличное значение тангенса окажется больше данного значения, тогда угловую поправку следует вычитать, так как с уменьшением тангенса угол убывает.

Пример: $\operatorname{tg} A = 0{,}8627$; найти A.

Ближайшее табличное значение тангенса 0,8632, т. е. на 5 десятитысячных больше данного значения. В нашей строке на 5 десятитысячных приходится поправка в $1'$. Кроме того, таблица нам показала, что $0{,}8632 \approx \operatorname{tg} 40°48'$. Следовательно, найдем искомый угол:
$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 40°48' \\ 1' \end{array} \\ \hline A \approx 40°47' \end{array}$$

Примечание. Если дано значение тангенса с большим числом десятичных знаков, то его предварительно надо округлить, сохранив лишь столько знаков, сколько содержит таблица.

Упражнения

1. Найти по таблице Брадиса тангенсы следующих углов: $63°$, $74°12'$, $4°45'$.
2. С помощью той же таблицы найти угол A, если:
   а) $\operatorname{tg} A = 0{,}7186$,
   б) $\operatorname{tg} A = 1{,}4638$,
   в) $\operatorname{tg} A = 3{,}291753$.

3. В прямоугольной системе координат даны две точки: A (1,000; 2,000) и B(2,500; 5,750). Какие углы образует прямая AB с осями координат?

(Ответ: $68°12'$, $21°48'$.)

4. В точке O (рис. 29) приложены две взаимно-перпендикулярные силы $P \approx 8,90$ *кг* и $Q \approx 5,20$ *кг*. Определить равнодействующую этих сил R и углы α и β, которые она образует с составляющими силами.

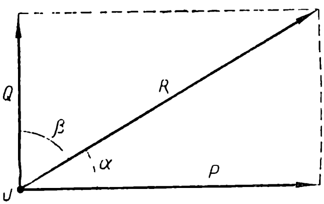


Рис. 29

(Ответ: $R \approx 10,3$ *кг*; $\alpha \approx 30°20'$; $\beta \approx 59°40'$).

5. На рисунке 30 изображены лампы, установленные на эскалаторах метрополитена, и подставки для ламп, имеющие в профиле форму прямоугольных треугольников. Определите угол подъема эскалатора, если вертикальный катет треугольника (высота подставки) равен 100 *мм*, а горизонтальный (длина подставки) — 173 *мм*.

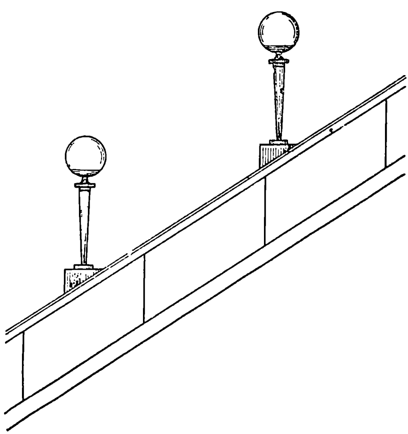


Рис. 30

(Ответ: $30°00'$.)

6. В 800 *м* от места подъема самолета впереди расположены деревья высотой до 20 *м*. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревьев?

(Ответ: не менее $1°5'$.)

7. На рисунке 31 дана часть топографической карты с изображением возвышенности. Масштаб карты: в 1 *см* 100 *м*. Определить среднюю крутизну склонов возвышенности в различных ее местах и направлениях, если известно, что горизонтали проведены через 5,0 *м* по высоте. Построить профиль рельефа изображенной части поверхности от A до B.

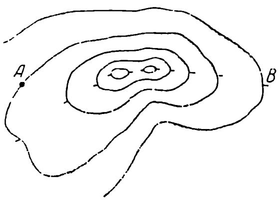


Рис. 31

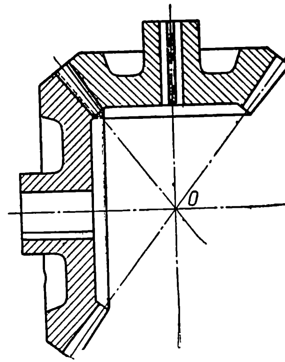


Рис. 32

8. На железнодорожной линии допускается предельный уклон в 10 тысячных. Это значит, что на каждые 1000 *м* пути по горизонтальному расстоянию возможен подъем пути в гору не больше чем на 10 *м*. Выразить величину предельного уклона пути в градусах.

(Ответ: $34'$.)

9. Два вала, расположенные под прямым углом друг к другу, соединены при помощи конических зубчатых колес (шестеренок) (рис. 32). Под каким углом наклонены зубцы шестеренок к осям валов, если одна шестеренка имеет 25 зубцов, а другая 43?

(Ответ: 60° и 30°.)

10. На токарных станках нередко производят обточку деталей «на конус», в связи с чем в технике существует особый термин «конусность», под которым понимают величину отношения $EF : AF$ (рис. 33), т. е. отношение разности радиусов оснований конуса к длине его оси. Это отношение иногда выражают в процентах.

Покажите, что величина конусности равна тангенсу угла, составленного образующей с осью конуса.

Напишите формулу для определения конусности и угла между образующей и осью конуса, у которого диаметры оснований D и d, а длина оси l. Примените эту формулу для конусов, размеры которых в миллиметрах заданы следующей табличкой:

D	50	75	75	30	80
d	25	25	50	20	50
l	50	75	75	80	150

11. Угол между образующими у вершины конуса равен 14° 10′. Определить конусность в процентах.

(Ответ: 12,4%.)

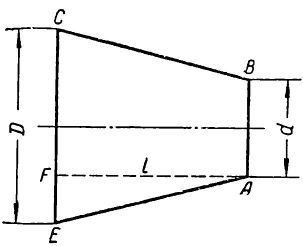


Рис. 33

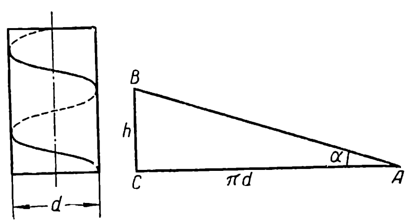


Рис. 34

12. В лесном деле вместо «конусности бревна» употребляют термин «сбег бревна». Наиболее ценным считается лес с небольшим «сбегом», так как в строительной технике в большинстве случаев приходится уничтожать конусность бревна его обработкой до цилиндрической формы.

Найти «сбег» и «угол сбега» у бревна длиной $l \approx 12$ *м* с диаметрами оснований $D \approx 45$ *см* и $d \approx 30$ *см*.

(Ответ: $\frac{1}{160}$; 0° 22′.)

13. Возьмем круглый прямой цилиндр с диаметром d. Начертим на бумаге прямоугольный треугольник ABC

так, чтобы один его катет AC равнялся длине окружности основания (поперечного сечения) цилиндра, т. е. πd, а другой катет BC можно взять произвольной длины h (рис. 34). Затем вырежем треугольник ABC и обернем вокруг цилиндра так, чтобы его катет AC расположился по окружности основания цилиндра. Наконец, начертим

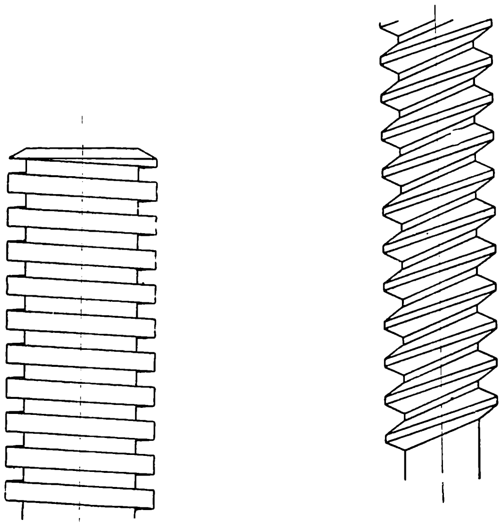


Рис. 35

на поверхности цилиндра ту линию, по которой расположится гипотенуза AB треугольника. Эту линию называют винтовой линией, точнее: одним оборотом винтовой линии. Перемещая соответствующим образом треугольник ABC по поверхности цилиндра и повторяя указанный процесс обертывания его вокруг цилиндра с вычерчива; ием линии расположения гипотезуны, можно продолжить винтовую линию так, что она образует на поверхности цилиндра два, три и т. д. оборота.

Угол α треугольника ABC, прилежащий к катету AC, называют углом подъема винтовой линии. Понятно, что за один оборот винтовая линия поднимается на высоту h, равную катету BC. Отрезок h называют шагом винтовой линии. Используя определение тангенса угла, можно выразить зависимость между диаметром цилиндра, шагом винтовой линии и углом ее подъема формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d}. \qquad (*)$$

В технической практике делают на цилиндре по направлению винтовой линии выемку треугольной и прямоугольной формы, получая при этом так называемый винт с треугольной или прямоугольной нарезкой (рис. 35). Мастеру-токарю, занимающемуся нарезкой винтов, часто приходится пользоваться формулой (*) для определения шага винта, внешнего и внутреннего диаметра нарезки и угла подъема нарезки. При определении угла подъема нарезки берут обычно так называемый средний диаметр винта $d = \frac{D_1 + D_2}{2}$, где D_2 и D_1 — внутренний и внешний диаметры нарезки.

Решите следующие задачи:

1) Средний диаметр винта $d \approx 24,6$ *мм*, шаг винта $h \approx 2,8$ *мм*; найти угол подъема нарезки.

2) Вся нарезка винта состоит из 12 нитей (оборотов), длина нарезанной части винта равна 36,1 *мм*, внешний диаметр нарезки $D_1 \approx 25,5$ *мм*, внутренний — $D_2 \approx 21,3$ *мм*. Определить угол подъема нарезки.

(Ответ: 1) $2^\circ 00'$; 2) $2^\circ 20'$.)

Глава II

НЕДОСТУПНЫЕ ОТРЕЗКИ И ИХ КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНСЫ СООТВЕТСТВУЮЩИХ УГЛОВ

§ 6. Определение расстояния между двумя пунктами, когда один из них недоступен

Измерение расстояния между двумя точками осуществляется масштабной линейкой. С помощью рулетки или мерной цепи производят измерение расстояний на местности между любыми доступными пунктами A и B, если возможно провешивание прямой AB (рис. 36).

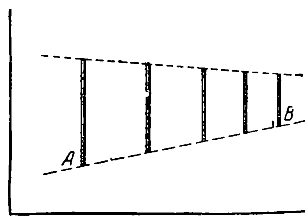


Рис. 36

Но как же определить расстояние между пунктами, разделенными непреодолимым препятствием, например рекой, лесом, горой и т. п.? Как узнать расстояние до предмета, недоступного нам, например до Луны или до летящего самолета? Как найти расстояние между такими предметами, к которым вовсе невозможно подойти, как например расстояние между островами или между двумя небесными светилами? Как определить размеры летящего самолета?

Разумеется, непосредственное измерение в этих случаях невозможно. Во всех подобных случаях прибегают к косвенному определению расстояний, основанному на использовании известного нам понятия тангенса угла.

В самом деле, вернемся еще раз к определению тангенса угла. Если в прямоугольном треугольнике ABC обозначить гипотенузу AB через c, а катеты, лежащие против углов A и B, соответственно через a и b (рис. 37), то по определению тангенса будем иметь:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \qquad (1) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Из этих равенств получаем следствия:

$$a = b \operatorname{tg} A; \qquad (3)$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}; \qquad (4)$$

или словами: *во всяком прямоугольном треугольнике любой катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или деленному на тангенс угла, прилежащего к первому катету.*

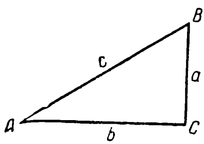


Рис. 37

Итак, формулы (3) и (4) дают возможность определять катет прямоугольного треугольника, если известен его острый угол и другой катет. На этом и основан способ косвенного измерения недоступных расстояний.

Покажем его на конкретных примерах.

Сперва рассмотрим случаи, когда определяется расстояние между пунктами, один из которых недоступен.

Пример 1. Допустим, что требуется определить высоту фабричной цилиндрической трубы, расположенной на горизонтальной площадке так, что к основанию трубы возможно подойти (рис. 38).

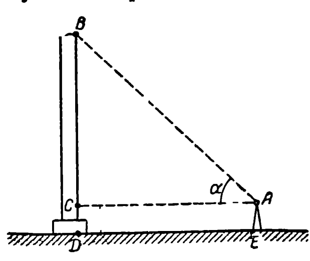


Рис. 38

На некотором расстоянии $AC = b$ (*м*) от основания трубы установим угломер AE и определим угол α между горизонталью и направлением на верхнюю точку B трубы. Применив к прямоугольному треугольнику ABC следствие (3), находим:

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Учтя высоту угломера $AE = h$ *м*, получаем формулу для определения высоты трубы:

$$BD = h + b \operatorname{tg} \alpha.$$

Пусть результаты измерения таковы:

$$b \approx 40 \text{ м}, \ h \approx 1{,}5 \text{ м и } \alpha \approx 31^\circ; \text{ тогда}$$

$$BD \approx 1{,}5 + 40 \cdot \operatorname{tg} 31^\circ \approx 26 \text{ м}.$$

Пример 2. Требуется узнать, какой длины мост надо построить через реку, если крайние его устои запроектировать в точках A и B, отмеченных на берегах реки (рис. 39). Для этого на берегу реки от точки A отложили отрезок $AC \approx 40{,}0$ *м* в направлении, перпендикулярном к AB, и в точке C с помощью угломера определили угол ACB, который оказался равным $81^\circ 30'$.

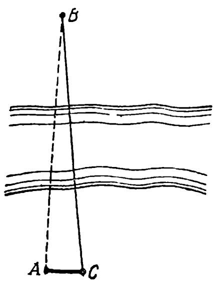


Рис. 39

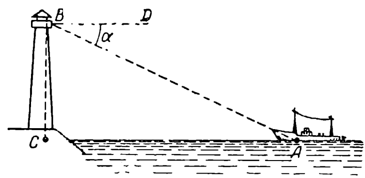


Рис. 40

Из прямоугольного треугольника ABC по формуле (3) нашли искомую длину моста

$$AB = AC \cdot \operatorname{tg} ACB \approx 40{,}0 \cdot \operatorname{tg} 81^\circ 30' \approx 268 \ (\text{м}).$$

Упражнения

1. В полдень при высоте солнца в 28° фабричная труба дает горизонтальную тень длиной в 76 *м*. Определить высоту трубы. (Ответ: 40 *м*.)

2. Фонарь маяка (рис. 40) находится на высоте $BC \approx 68$ *м* над уровнем моря. Из него виден корабль A под углом понижения $DBA = \alpha \approx 1^\circ 30'$. Найти расстояние от корабля до маяка.

(Ответ: 2,6 *км*.)

3. Угол откоса мелкого песка равен $\alpha \approx 31°$. Какой высоты можно насыпать кучу песка, если диаметр основания равен 3,5 *м*?

(Ответ: 1,0 *м*.)

4. Доказать, что произведение тангенсов острых углов во всяком прямоугольном треугольнике равно 1.

5. Написать формулу, выражающую зависимость между $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{tg}(90° - A)$, где A — произвольный острый угол.

Указание. Если один из острых углов прямоугольного треугольника равен A, то другой его острый угол равен $90° - A$.

§ 7. Определение расстояния между двумя пунктами, к которым невозможно подойти

Пример 1. Пусть требуется определить, на какой высоте летит самолет. Для этого заранее выводят необходимую формулу. Сделать это можно следующим образом: два наблюдателя устанавливают в горизонтальной плоскости угломерные приборы AA_1 и BB_1 так, чтобы плоскость AA_1BB_1 пересекала трассу полета самолета (рис. 41). В тот момент, когда самолет пересекает плоскость измерительных приборов AA_1BB_1, наблюдатель, находящийся у прибора AA_1, дает сигнал, по которому одновременно на приборах A и B фиксируются углы α и β. Затем измеряют расстояние между угломерными приборами $AB = a$ метров и высоту приборов $AA_1 = BB_1 = h$ метров, после чего переходят к следующим расчетам.

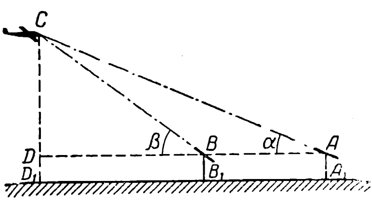


Рис. 41

Из прямоугольных треугольников CDB и CDA по формулам (3) (стр. 40) получают:

$$CD = DB \cdot \operatorname{tg} \beta \qquad (*)$$

$$CD = DA \cdot \operatorname{tg} \alpha, \qquad (**)$$

откуда $DB \cdot \operatorname{tg} \beta = DA \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Но $DA = DB + BA = DB + a$, поэтому последнее равенство перепишется так:

$$DB \cdot \operatorname{tg} \beta = (DB + a) \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$DB = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставив значение DB в равенство (*), получают

$$CD = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}. \qquad (***)$$

Таким образом, искомая высота полета самолета

$$CD_1 = CD + DD_1 = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} + h,$$

так как $DD_1 = BB_1 = AA_1 = h$.

Применим выведенную формулу для конкретного случая проведенных наблюдений и соответствующих измерений.

Пусть результаты измерения оказались следующими:

$$h \approx 1{,}50 \text{ м}, \; a \approx 93{,}5 \text{ м}, \; \alpha \approx 39^\circ, \; \beta \approx 44^\circ,$$

тогда самолет находится на высоте

$$CD_1 \approx \frac{93{,}5 \cdot \operatorname{tg} 39^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ}{\operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 39^\circ} + 1{,}50 \approx 47\underset{\smile}{0} \text{ (м)}.$$

Пример 2. С берега моря видны два предмета A и B, находящиеся на острове (рис. 42). Как определить расстояние между этими предметами, не совершая поездки на остров? Это можно сделать следующим образом: из точки C (см. рис. 42) провешим на берегу моря в перпендикулярном к AC направлении прямую CM и на ней с помощью угломера найдем точку D так, чтобы угол CDB был прямым[1].

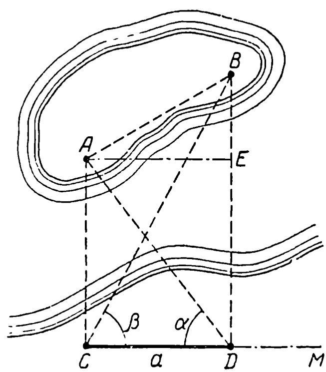


Рис. 42

Затем измерим углы $CDA = \alpha$ и $DCB = \beta$, а также длину отрезка $CD = a$ (м).

Если мысленно провести $AE \parallel CD$, то образуется прямоугольный треугольник ABE, из которого по теореме Пифагора получаем:

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2}, \qquad (*)$$

где $AE = CD = a$ и $BE = BD - AC$.

---

[1] Выбор такой точки D при наличии препятствий на местности может быть затруднительным, тогда данную задачу решают другим путем, с которым мы познакомимся в § 11.

Из прямоугольных треугольников ACD и BCD находим:

$$BD = a \operatorname{tg} \beta, \quad AC = a \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно, $BE = a(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$.

Подставив значение AE и BE в равенство ($*$), получим формулу для определения искомого расстояния:

$$AB = a\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Предположим, что фактические измерения дали следующие результаты: $a \approx 270$ *м*, $\alpha \approx 58^\circ$ и $\beta \approx 74^\circ$, тогда

$$AB = 270\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 74^\circ - \operatorname{tg} 58^\circ)^2} \approx 576 \text{ (м)} \approx 58\breve{0} \text{ (м)}.$$

Упражнения

1. Из окна, находящегося на высоте $h = 12,5$ *м* над уровнем реки, берега реки видны под углами понижения $\alpha_1 \approx$

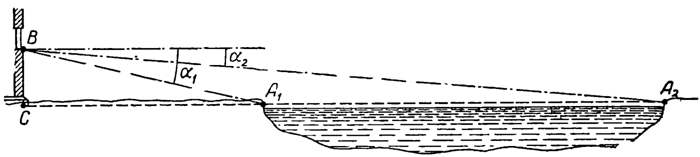


Рис. 43

$\approx 13^\circ 3\breve{0}'$ и $\alpha_2 \approx 5^\circ 30'$ (рис. 43). Оба угла находятся в одной плоскости, перпендикулярной к направлению реки. Определить ширину реки в наблюдаемом месте.

(Ответ: 77,9 *м*.)

2. Из некоторого пункта, лежащего в одной горизонтальной плоскости с основанием нового здания Московского университета, самая верхняя точка этого здания видна под углом в $35^\circ 00'$ к горизонту. Из другого пункта, расположенного в той же горизонтальной плоскости, но на 184 *м* ближе к зданию верхняя точка последнего видна под углом в $56^\circ 30'$.

Определить высоту нового здания университета.

(Ответ: 242 *м*).

3. Определите высоту деревьев, растущих на школьном дворе, высоту школьного здания и различных этажей его, для чего предварительно проделайте необходимые доступные измерения с помощью школьных измерительных приборов.

4. Составьте сами задачу, в которой требуется определить высоту подъема стратостата; подберите реальные числовые данные к ней и рассчитайте ответ.

5. Опишите способ определения высоты горы при условии, что у ее подножия имеется горизонтальная площадка, на которой возможно провешивание прямой в направлении на вершину горы., Составьте формулу для решения задачи в общем виде, а затем подберите реальные числовые данные и рассчитайте ответ.

Глава III

ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА — ТАНГЕНС, СИНУС И КОСИНУС, И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 8. Что такое функция?

Если нам скажут, что «двое пошли, гривенник нашли, а пятеро пойдут, сколько найдут?», то надо ответить, что найденная сумма денег не зависит от числа нашедших ее людей;

если скажут «сегодняшней ночью своим пением три петуха разбудили пять человек, сколько петухов разбудят семь человек?», то надо ответить, что здесь две величины не находятся в зависимости одна от другой.

Итак, могут быть две величины, которые изменяются независимо одна от другой.

Если известно, что a *кг* товара стоят b руб., то $2a$ *кг* того же товара будут стоить вдвое больше, так как между стоимостью и количеством товара существует определенная зависимость, а именно: прямая пропорциональность.

Если известно, что a человек могут вырыть канаву в b дней, то $2a$ человек могут вырыть ту же канаву в $\frac{b}{2}$ дней, так как между числом людей и числом дней, потребных на выполнение намеченной работы, существует определенная зависимость, а именно: обратная пропорциональность.

Если установлено, что стальной кубик с ребром a *мм* весит b *г*, то кубик с ребром в $2a$ *мм*, изготовленный из той же стали, будет весить $2^3 \cdot b$ *г*, т. е. $8\ b$ *г*, так как между весом кубика и его ребром существует зависимость, пропорциональная кубу ребра.

Прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, пропорциональность кубу и другие более сложные зависимости — суть частные случаи взаимозависимых величин; вместо выражения «величина, зависимая от данной величины», говорят короче «функция от данной величины».

«Функция» — слово латинское, в переводе на русский язык означающее «о т п р а в л е н и е, с в я з ь». Впервые это слово ввел в математику великий немецкий ученый-математик Г. Лейбниц (1646—1716).

Точное определение понятия функции в математике было дано в XIX в. сперва в России великим геометром Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856), а затем в Германии талантливым математиком Лежен-Дирихле (1805—1859). Это определение функции можно передать так: *если имеются две величины и известно, что каждому значению первой из них соответствует определенное значение второй, то вторую из этих величин называют функцией первой.*

Например:

I величина	II величина
длина ребра куба (x)	объем куба (x^3)
1 *см*	1 *см*^{3}
2 *см*	8 *см*^{3}
3 *см*	27 *см*^{3}

I величина	II величина
острый угол (A)	тангенс угла ($\operatorname{tg} A$)
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$

Таким образом, объем куба так же, как и его вес, есть функция длины ребра куба, тангенс острого угла есть функция этого угла.

§ 9. Синус острого угла

В предыдущих главах мы раскрыли зависимость между острым углом прямоугольного треугольника и отношением катетов и показали на различных примерах, как эта зависимость используется при выполнении косвенных измерений углов и отрезков.

Естественно поставить теперь вопрос, не существует ли в прямоугольном треугольнике аналогичная функциональная зависимость между острым углом и отношением катета к гипотенузе.

Тригонометрия дает положительный ответ: такая зависимость существует, и она также может быть использована как эффективное средство для косвенного измерения отрезков и углов.

Чтобы выяснить это, вернемся снова к рисунку 14 (стр 21), на котором изображено множество подобных прямоугольных треугольников ABC, AB_1C_1, $AB_2C_2, \ldots,$ AB_n $C_n, \ldots$ с одним и тем же острым углом A.

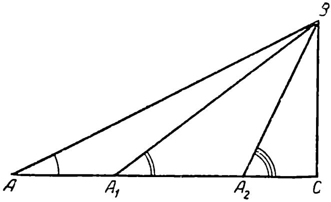


Рис. 44

Во всех этих треугольниках в силу их подобия отношение катета, противолежащего углу A, к гипотенузе имеет одну и ту же величину:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\ldots=\frac{B_nC_n}{AB_n}=\ldots$$

Но стоит только изменить угол A, и сразу же изменится величина указанных отношений.

В самом деле, рассмотрим изображенные на рисунке 44 прямоугольные треугольники ABC, A_1BC и A_2BC с общим катетом BC, но неравными противолежащими этому катету острыми углами:

$$\angle BAC < \angle BA_1C < \angle BA_2C. \qquad (*)$$

Отметим, что:

1. $BC = BC = BC$ (совпавшие катеты трех треугольников),

2. $AB > A_1B > A_2B$ (по свойству наклонных, проведенных к одной прямой AC из одной точки B).

Разделим почленно соотношение 1 на 2, получаем неравенство:

3. $\frac{BC}{AB} < \frac{BC}{A_1B} < \frac{BC}{A_2B}$

(из двух дробей с положительными членами и равными числителями больше та, у которой меньше знаменатель).

Сопоставляя это неравенство с неравенством (*), видим, что с увеличением угла в прямоугольном треугольнике увеличивается и отношение противолежащего катета к гипотенузе, и наоборот, с уменьшением этого угла рассматриваемое отношение уменьшается.

Следует заметить, что указанная связь в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением противолежащего ему катета к гипотенузе была открыта и практически использована еще в V в. индусским математиком Ариабхата (476 г. н. э.).

Отношению противолежащего катета к гипотенузе он дал особое название ardhajya — ардхжиа (полухорда), которое европейцы перевели в XII в. на латинский язык словом «синус».

Итак, дадим определение.

Определение. *Во всяком прямоугольном треугольнике отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе называют синусом этого угла.*

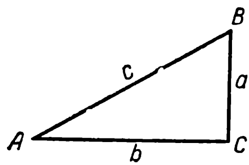


Рис. 45

Это коротко записывают так (см. рис. 45):

$$\frac{a}{c} = \sin A, \tag{5}$$

где знак sin является сокращением слова sinus.

Пример 1. В так называемом египетском треугольнике катет $a = 3$ единицам, катет $b = 4$ единицам, гипотенуза $c = 5$ единицам.

Обозначим углы, лежащие против катетов a и b, соответственно буквами A и B, тогда по данному определению синуса будем иметь:

$$\sin A = \frac{3}{5} = 0{,}6; \qquad \sin B = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Пример 2. Выше в § 4 (стр. 29) мы установили, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и острым углом $A = 30°$ противолежащий этому углу катет $a = \frac{1}{2}c$, а прилежащий $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, следовательно, по определению синуса имеем:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Заметив, что другой острый угол в таком треугольнике $B = 60^\circ$, находим:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660.$$

Из определений синуса острого угла и проведенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы:

1) синус всякого острого угла меньше единицы, так как во всяком прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы;

2) равные острые углы имеют равные синусы; большему острому углу соответствует больший синус, т. е. с увеличением острого угла увеличивается и его синус.

Следует, однако, заметить, что прямой пропорциональной зависимости между углом и его синусом нет. Сопоставляя, например, значения синусов углов в 30° и 60°, замечаем, что $30^\circ : 60^\circ = 1 : 2 = 0{,}5$, а $\sin 30^\circ : \sin 60^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : \sqrt{3} = 1 : 1{,}732\ldots = 0{,}57\ldots$; видим, что $0{,}5 \neq 0{,}57\ldots$;

3) величина острого угла вполне определяется его синусом; если задан синус угла, то можно построить и сам угол.

Пусть, например, дан $\sin A = \frac{3}{4}$.

Для построения угла A возьмем произвольный прямой угол MCN (рис. 46), отложим на одной из его сторон от вершины отрезок $CB = 3$ единицам (произвольного масштаба); из точки B опишем дугу радиусом $R = 4$ единицам (того же масштаба) до пересечения в точке A с другой стороной угла. Проводим прямую AB, получаем искомый угол A. Действительно, по определению синуса имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

Постройте сами угол A, если дан $\sin A = 0{,}7$;

4) синус острого угла есть функция этого угла. В самом деле, острый угол A и его синус суть две величины, к которым подходит определение функции (стр. 47), так как каждому значению величины угла A соответствует определенное значение $\sin A$. Чтобы найти это значение синуса, достаточно построить прямоугольный треугольник с углом A и взять в нем отношение катета, лежащего против угла A, к гипотенузе.

Пусть, например, дан острый угол $MAN = A$ (рис. 47). Чтобы найти синус этого угла, возьмем на его стороне AM произвольную точку B и опустим из нее на другую сторону перпендикуляр BC, тогда отношение $\frac{BC}{AB} = \sin A$.

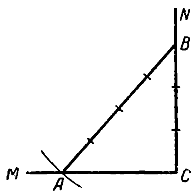


Рис. 46

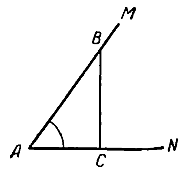


Рис. 47

Если окажется, например, $BC = 17$ *мм*, $AB = 20$ *мм*, то будем иметь: $\sin A = \frac{17}{20} = 0{,}85$.

Теперь можно было бы перейти к решению различных практических задач с помощью синуса. Однако предварительно мы рассмотрим еще одну функцию острого угла, часто употребляемую на практике.

§ 10. Косинус острого угла

В предыдущем параграфе мы установили зависимость в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением *противолежащего* ему катета к гипотенузе.

Несколько иная зависимость имеет место в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением *прилежащего* (к нему) катета к гипотенузе. Изучение этой зависимости начнем также с рассмотрения рисунка 14 (стр. 21), на котором изображены прямоугольные треугольники ABC, AB_1C_1, $AB_2C_2, \ldots$ с одним и тем же острым углом A.

Так как эти треугольники подобны, то в каждом из них отношение катета, прилежащего к углу A, к гипотенузе имеет одну и ту же величину:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \ldots = \frac{AC_n}{AB_n} = \ldots$$

Но стоит только изменить угол A, и сразу же изменится величина этих отношений.

В самом деле, рассмотрим изображенные на рисунке 15 (стр. 22) прямоугольные треугольники ACB, ACB' и ACB'' с общим катетом AC, прилежащим к неравным острым углам:

$$\angle CAB < \angle CAB' < \angle CAB'' \qquad (*)$$

Отметим, что:

1. $AC = AC = AC$ (совпавшие катеты трех треугольников).

2. $AB < AB' < AB''$ (по свойству наклонных, проведенных из одной точки A к одной прямой CB''). Разделим почленно (1) на (2), получим следующее неравенство:

3. $\frac{AC}{AB} > \frac{AC}{AB'} > \frac{AC}{AB''}$ (из двух дробей с положительными членами и равными числителями та больше, у которой знаменатель меньше).

Сопоставляя это неравенство с неравенством (*), приходим к выводу, что с увеличением угла в прямоугольном треугольнике отношение к гипотенузе катета, прилежащего к рассматриваемому углу, уменьшается, и наоборот, с уменьшением этого угла рассматриваемое отношение увеличивается.

Определение. *Во всяком прямоугольном треугольнике отношение катета, прилежащего к острому углу, к гипотенузе называют косинусом этого угла.*

Это принято записывать короче так (см. рис. 45):

$$\frac{b}{c} = \cos A, \qquad (6)$$

где знак cos является сокращением слова cosinus[1].

Пример 1. Как уже говорилось, в египетском треугольнике гипотенуза $c = 5$ единицам, катет $a = 3$ единицам и катет $b = 4$ единицам.

Если к катету a прилежит угол B, а к катету b — угол A, то будем иметь:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8; \qquad \cos B = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

---

[1]Слово cosinus само представляет сокращенную запись двух слов: complementi (комплементи — дополнительный) и sinus. Причина такого названия выяснена в следующем параграфе.

Пример 2. Выше (в § 4) мы установили, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и острым углом $A = 30°$, прилежащий к этому углу катет $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, а противолежащий $a = \frac{1}{2}c$. Следовательно, применив к этому треугольнику определение косинуса, будем иметь:

$$\cos 30° = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660;$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Из определения косинуса острого угла и проведенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы:

1) косинус всякого острого угла меньше единицы, так как во всяком прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы;

2) равные острые углы имеют равные косинусы; большему острому углу соответствует меньший косинус, т. е. с увеличением острого угла его косинус уменьшается.

Следует также заметить, что между углом и его косинусом нет обратной пропорциональной зависимости Например,

$$\cos 30° : \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1 = 1{,}73...;$$

$$30° : 60° = 1 : 2 = 0{,}5.$$

Следовательно, угол возрос в 2 раза, а косинус уменьшился только в отношении 1,73...;

3) величина острого угла вполне определяется его косинусом; если задан косинус угла, то можно построить и сам угол.

Постройте сами угол A, если, например, $\cos A = 0{,}35$;

4) косинус острого угла есть функция этого угла.

В самом деле, острый угол A и его косинус суть две величины, к которым подходит определение функции, так как каждому значению величины A соответствует определенное значение $\cos A$. Чтобы найти это значение косинуса, достаточно построить прямоугольный треугольник с углом A, как это мы делали для синуса (см. рис. 47), и взять в нем отношение прилежащего к углу A катета к гипотенузе. Тогда получим

$$\frac{AC}{AB} = \cos A.$$

Если, например, окажется $AC=11$ *мм* и $AB=20$ *мм*, то

$$\cos A = \frac{11}{20} = 0{,}55.$$

Решим следующую задачу:

Лестница длиной $l \approx 7{,}5$ *м* приставлена к стене так, что ее нижний конец удален от стены на расстояние $a \approx 2{,}5$ *м*. Какой угол образует лестница с плоскостью пола?

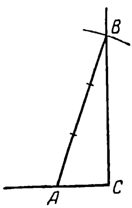


Рис. 48

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол через A, тогда по определению косинуса будем иметь:

$$\cos A = \frac{a}{l} \approx \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}.$$

Строим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 3$ единицам произвольного масштаба и катетом $AC = 1$ того же масштаба (рис. 48). Угол A и будет искомым.

Измерив его транспортиром, получаем $A \approx 71°$.

§ 11. Построение и чтение таблицы синусов и косинусов острых углов

В предыдущем параграфе было показано, как построением найти угол, если известен его синус или косинус.

Однако никаких построений производить не потребовалось бы, если бы у нас была таблица синусов или косинусов острых углов.

Первые такие таблицы были составлены еще в V в. н. э. индусским астрономом Ариабхата, а в IX в. в переработанном виде такая таблица вышла из-под пера узбекского выдающегося математика Мухаммеда бен-Мусы из Хорезма.

Таблицу синусов и косинусов двузначной точности вы можете составить сами путем аккуратного построения и измерения прямоугольных треугольников с различными острыми углами, т. е. так же, как мы составляли таблицу тангенсов (см. § 4).

С более совершенными вычислительными методами составления таких таблиц мы познакомимся в дальнейшем.

Следует заметить, однако, что между синусом и косинусом острых углов существует такая зависимость, которая избавляет нас от необходимости составления двух отдельных таблиц, так как таблица синусов может служить одновременно и таблицей косинусов.

В самом деле, по определению синуса и косинуса острых углов A и B в прямоугольном треугольнике ABC (см. стр. 49, рис. 45) можно записать:

$$\cos A = \frac{b}{c}, \qquad \sin B = \frac{b}{c},$$

откуда $\cos A = \sin B$.
Но $B = 90° - A$, следовательно,

$$\cos A = \sin(90° - A),$$

т. е. косинус любого острого угла равен синусу дополнительного угла, и наоборот. Например:

$$\cos 60° = \sin 30°,$$

$$\cos 27° = \sin 63°.$$

Это соотношение и послужило основанием образования слова cosinus — косинус, состоящего из двух слов: complementi — дополнение sinus (compl. sinus — cosinus — cos), т. е. дополнительный синус (синус угла, дополняющего до 90°).

На странице 95 этой книги дана трехзначная таблица синусов острых углов с шагом в 1°, которая является одновременно и таблицей косинусов острых углов.

Каждая строка этой таблицы содержит два угла, дополняющих друг друга до 90°, а между ними число, которое является синусом угла, напечатанного слева, и косинусом угла, напечатанного справа. Такое расположение возможно благодаря тому, что у дополнительных углов синус и косинус имеет одно и то же значение.

Например, в 14-й строке читаем слева 14°, в середине 0,242, а справа 76°, следовательно,

$$\sin 14° \approx 0{,}242 \approx \cos 76°.$$

Чтобы не спутать, что число 0,242 является $\sin 14°$ и $\cos 76°$, а не наоборот, пишут сверху таблицы слово «синусы», а снизу — «косинусы» и помнят, что надпись «синусы» относится только к углам левого столбца, а «косинусы» — к углам правого столбца.

Четырехзначная таблица синусов углов с шагом в 6′, являющаяся одновременно и таблицей косинусов углов, имеется в сборнике математических таблиц В. Брадиса. Эта таблица устроена и читается точно так же, как и четырехзначная таблица тангенсов, описанная в § 4, поэтому на ее объяснении мы здесь не останавливаемся.

Упражнения

1. Не пользуясь таблицей, найти синус и косинус угла в 45°.

2. Катет прямоугольного треугольника относится к гипотенузе, как 1 к 2,4. Найти синусы и косинусы острых углов треугольника.

3. Проекция отрезка на прямую равна $\frac{1}{n}$ длины отрезка. Чему равен косинус угла, образованного отрезком с прямой?

Найти этот угол: 1) построением; 2) с помощью таблицы для $n = 2, 3, 4, 10$.

4. Найти по таблице: $\sin 12°42'$, $\sin 0°53'$, $\cos 45°18'$, $\cos 10°27'$.

5. Найти по таблице угол A, если:

1) $\sin A = 0{,}2504$; 3) $\cos A = 0{,}9033$;

2) $\sin A = 0{,}7590$; 4) $\cos A = 0{,}0042$;

5) $\sin A = 0{,}3000$.

6. Доказать, что сумма синусов (косинусов) двух острых углов всякого прямоугольного треугольника больше единицы, но меньше двух.

7. Откос насыпи полотна железной дороги 15,2 *м*, а высота насыпи 9,3 *м*. Какой угол составляет откос с горизонтальной плоскостью?

(Ответ: 38°.)

8. Катер, делающий в среднем 15 *км* в час, должен пересечь реку по перпендикулярному к берегам направлению. Какое направление надо придать корпусу катера, если скорость течения воды в реке равна 2,5 *м* в секунду? (Ответ: отклонение от перпендикулярного направления против течения 37°.)

9. Для удобства загрузки силосной башни (рис. 49) к ее верхней части на высоту 3,7 *м* устроили наклонный подъезд длиной 21 *м*. Найти угол подъема этого подъезда.

(Ответ: 10°.)

10. К стене надо приделать полку для книг на кронштейнах (подпорах). Какой длины следует взять подпору a (рис. 50), чтобы ее наклон к стене был равен 40°, если ширина полки $b \approx 17{,}5$ *см*?

(Ответ: 27,2 *см*.)

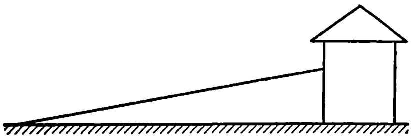


Рис. 49

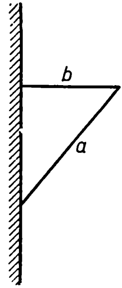


Рис. 50

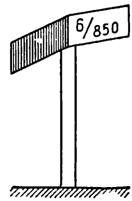


Рис. 51

11. Телеграфный столб высотой 9,0 *м* надо закрепить железным тросом, образующим с поверхностью грунта угол в 50°. Какой длины надо взять трос, если он прикрепляется к столбу на расстоянии $\frac{3}{2}$ высоты столба, считая от поверхности земли? Поверхность грунта горизонтальна.

(Ответ: 7,8 *м*.)

12. Вдоль железнодорожного полотна ставятся указатели уклона. На рисунке 51 изображен такой указатель с двумя числами 6 и 850. Первое число показывает, что угол уклона пути (угол между плоскостью полотна и горизонтальной плоскостью) имеет тангенс 0,006, а второе число дает в метрах длину участка пути с таким уклоном. Выразить данный уклон в градусах. Определить, на какую высоту поднялся поезд, прошедший 730 *м* по данному участку пути.

(Ответ: 4,4 *м*).

§ 12. Применение синуса и косинуса при косвенных измерениях недоступных углов и расстояний

Возможность косвенных измерений углов и отрезков с помощью синуса и косинуса усматривается в самих определениях этих функций.

В самом деле, если искомый острый угол A принадлежит некоторому прямоугольному треугольнику ABC

(рис. 45), у которого можно измерить гипотенузу[1] c и один из катетов a или b, то по определению синуса и косинуса найдем:

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \text{или} \quad \cos A = \frac{b}{c}. \qquad (5), \quad (6)$$

Зная синус или косинус угла A мы можем по таблице найти и сам угол.

Если же искомыми являются катеты прямоугольного треугольника ABC, недоступные для непосредственного измерения, а гипотенузу треугольника и один из острых углов можно измерить, то на основании тех же формул (5) и (6) получим:

$$a = c \sin A \text{ и } b = c\cos A. \qquad (7;\ 8)$$

Эти формулы так часто употребляются на практике, что их полезно запомнить. Читаются они так: в *прямоугольном треугольнике любой катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего угла.*

Наконец, если возможно непосредственное измерение острого угла прямоугольного треугольника и одного из катетов, то гипотенузу можно найти вычислением, используя те же формулы (7; 8), из которых получаем:

$$c = \frac{a}{\sin A} \quad \text{или} \quad c = \frac{b}{\cos A}.$$

Рассмотрим несколько примеров, где косвенные измерения недоступных углов и расстояний осуществляются с помощью синуса и косинуса.

1. На рисунке 52 изображены две прямые дороги MN и PQ, пересекающиеся где-то за лесом в недоступном для нас пункте X. Требуется определить расстояние от некоторого пункта A, расположенного на дороге MN, до пункта X, а также найти угол, под которым пересекаются дороги.

---

[1]Читатель не должен забывать, что здесь говорится о возможности измерения сторон не того треугольника, который изображен на рисунке 45 (на рисунке передана лишь условная модель-схема треугольника, которая помогает нам выяснять условие задачи), а такого треугольника, который по условию задачи находится, например, где-то на местности так, что некоторые его стороны и углы действительно не могут быть измерены или такое измерение связано с большими затруднениями.

Решение данной задачи можно провести следующим образом.

Выберем на дороге PQ точку B так, чтобы возможно было измерить расстояние от A до B и определить углы BAN и ABQ.

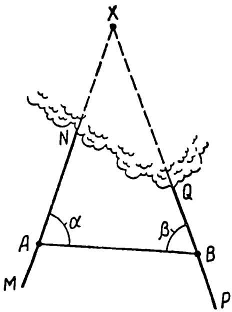


Рис. 52

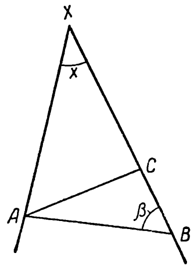


Рис. 52, *а*

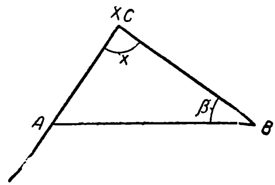


Рис. 52, *б*

Пусть оказалось: $AB = l$ (*м*), $\angle BAN = \alpha$ и $\angle ABQ = \beta$. Искомый угол пересечения дорог обозначим через x. Применив к треугольнику ABX теорему о сумме углов, получим:

$$x = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Здесь может быть три случая:

1) $\alpha + \beta > 90^\circ$, тогда угол x — острый (рис. 52 и 52, *а*);
2) $\alpha + \beta = 90^\circ$, тогда угол x — прямой (рис. 52, *б*);
3) $\alpha + \beta < 90^\circ$, тогда угол x — тупой (рис. 53 и 53, *а*).

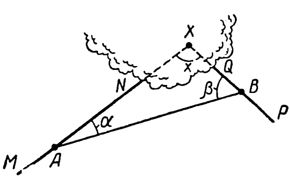


Рис. 53

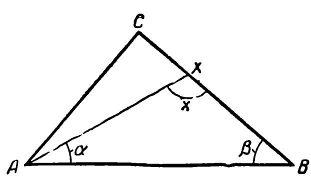


Рис. 53, *а*

В каждом из этих случаев в треугольнике ABX проведем мысленно высоту AC из вершины A.

При этом в первом случае (рис. 52, *а*) выделится прямоугольный треугольник ABC, из которого по определению синуса имеем:

$$\frac{AC}{AB} = \sin B, \text{ откуда } AC = AB \cdot \sin B = l \sin \beta.$$

Из прямоугольного треугольника ACX имеем: $\frac{AC}{AX} = \sin x$, откуда искомое расстояние

$$AX = \frac{AC}{\sin x} = \frac{l \sin \beta}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}.$$

Пусть, например, действительные измерения дали:
$l \approx 1{,}24$ *км*, $\alpha \approx 83^\circ\ 00'$ и $\beta \approx 55^\circ 30'$, тогда
$x \approx 180^\circ - (83^\circ 00' + 55^\circ 30') = 41^\circ 30'$;
$AC \approx 1{,}24 \cdot \sin 55^\circ 30' \approx 1{,}022 \approx 1{,}02$ (*км*).

$$AX \approx \frac{1{,}022}{\sin 41^\circ 30'} \approx 1{,}54 \text{ (км)}.$$

Во втором случае угол $x = 90^\circ$, следовательно, точка C совпадает с точкой X (рис. 52, *б*), а поэтому

$$AX = AC = l \sin \beta.$$

В третьем случае, когда угол $x > 90^\circ$ (рис. 53 и 53, *а*), в прямоугольном треугольнике ACX острый угол AXC будет равен $180^\circ - x$, как смежный с углом AXB, поэтому

$$\frac{AC}{AX} = \sin(180^\circ - x).$$

Но $180^\circ - x = \alpha + \beta$, следовательно, $\frac{AC}{AX} = \sin(\alpha + \beta)$.

$$\text{Откуда} \quad AX = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{l \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Так, при $l \approx 1{,}24$ *км*, $\alpha \approx 20^\circ 10'$ и $\beta \approx 61^\circ 30'$
имеем: $x \approx 180^\circ - (20^\circ 10' + 61^\circ 30') = 98^\circ 20' > 90^\circ$, следовательно,

$$AX \approx \frac{1{,}24 \cdot \sin 61^\circ 30'}{\sin 81^\circ 40'} \approx 1{,}10 \text{ (км)}.$$

Примечание. Может случиться, что местность между дорогами MN и PQ непроходима (например, заболочена) и, следовательно, расстояние AB нельзя измерить. Если при этом пункт A возможно видеть хотя бы из двух мест B и B_1 на дороге PQ и можно тем или иным путем пройти в пункт A для измерения угла $BAN = \alpha$, то задача может быть решена и при таких условиях. А именно: измеряют расстояние $BB_1 = a$ (рис. 54) и углы $ABQ = \beta$ и $AB_1Q = \beta_1$.

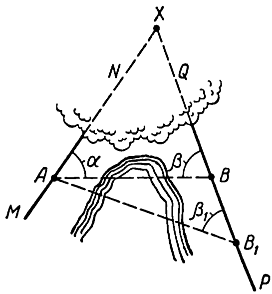


Рис. 54

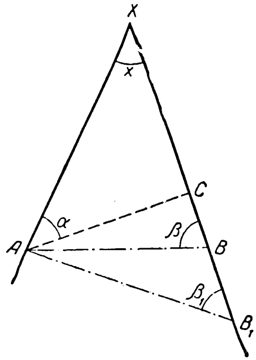


Рис. 54, *а*

По этим данным находят высоту AC в треугольнике ABX (рис. 54, *а*) (см. формулу, полученную при решении аналогичной задачи 1 в § 7):

$$AC = \frac{a \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta_1}.$$

Далее задача решается, как в предшествующих случаях.

2. Еще в III в. до н. э. греческий математик и астроном Аристарх Самосский высказал гипотезу, что Земля имеет форму шара. Основываясь на этой гипотезе, греческий ученый Эратосфен (276—196 гг. до н. э.) нашел радиус Земли, равный $50 \cdot 10^3$ стадиям (мера длины в древней Греции).

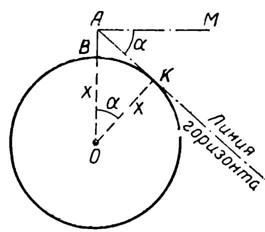


Рис. 55

Радиус Земли можно найти следующим путем.

С горы AB высотой h *м* определяют угол понижения горизонта $MAK = \alpha$ (рис. 55), где MA — перпендикуляр к отвесной линии AO и AK — линия горизонта, т. е. касательная к кругу, представляющему сечение земного шара плоскостью по отвесной линии AO. Треугольник AKO прямоугольный, так как $OK \perp AK$ как радиус круга, проведенный в точку касания. Обозначим радиус земного шара через R, тогда гипотенуза $OA = R + h$. Из треугольника AKO находим:

$$\frac{OK}{OA} = \cos KOA.$$

Но катет $OK = R$, $\angle KOA = \angle MAK$ как углы со взаимно-перпендикулярными сторонами, следовательно, полученное равенство можно записать так:

$$\frac{R}{R+h} = \cos\alpha, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{h \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Так, с гор побережья Черного моря у Гагр с высоты над уровнем моря, равной 1,8 *км*, измерили угол понижения горизонта $\alpha \approx 1°24'$ и нашли

$$R \approx \frac{1,8 \cdot \cos 1°24'}{1 - \cos 1°24'} \approx \frac{1,8 \cdot 0,9997}{0,0003} \approx \frac{0,59998}{0,0001} \approx \frac{0,6}{0,0001} =$$
$$= 6000 \text{ км} = 6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Более точные измерения показали, что радиус Земли неодинаков всюду; так радиус экватора 6378 *км*, а наименьший радиус меридиана 6357 *км*; это показывает, что Земля не вполне шар, ее форма ближе к форме эллипсоида. При вычислениях принимают средний радиус Земли

$$R_{\text{сред}} = \frac{6378 + 6357}{2} \approx 637\underline{0} \text{ км}.$$

3. Зная радиус земного шара, можно определить расстояние от Земли до других планет, и в частности до спутника нашей планеты — Луны.

Для этого отмечают на земном меридиане, плоскость которого проходит через центр Луны L (рис. 56), два пункта K_1 и K_2, из которых одновременно Луна видна на горизонте, а затем определяют широту каждого из этих пунктов.

Широта пункта K (рис. 57) равна дуге меридиана AK или (что то же самое) центральному углу $AOK = \varphi°$, который стягивает эту дугу и измеряется одним и тем же с ней числом градусов. В северном полушарии этот угол оказывается равным высоте Полярной звезды над горизонтом, т. е. углу MKP, где MK — линия горизонта (касательная в точке K), а KP — направление на Полярную звезду P. В самом деле, Полярная звезда P находится почти на продолжении земной оси ON, следовательно, в силу ее чрезвычайно большой отдаленности [1] можно считать, что направления на нее из центра Зем-

[1] Луч света от Полярной звезды доходит до нас за 4,2 года со скоростью $3\underline{0}0 \cdot 10^3$ *км* в секунду.

ли O и из точки K параллельны между собой. Но $OP \perp OA$ и $MK \perp \perp OK$, следовательно, $< AOK = < MKP$ как острые углы со взаимно-перпендикулярными сторонами.

На рисунке 58 видно, как практически с помощью школьного транспортира производится определение высоты Полярной звезды, т. е. широты данного места.

Определив широты φ_1 и φ_2 тех мест K_1 и K_2, в которых наблюдали Луну на горизонте, легко найти центральный угол K_1OK_2; он измеряется суммой дуг AK_1 и AK_2, а потому равен сумме широт $\varphi_1 + \varphi_2$ (см. рис. 56).

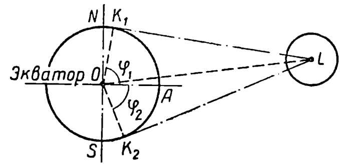


Рис. 56

Фактические измерения показывают, что сумма широт пунктов наблюдения K_1 и K_2 равна около $178°6'$, следовательно, $\angle K_1OK_2 \approx 178°6'$.

Так как из пунктов K_1 и K_2 Луна видна на горизонте, то прямые K_1L и K_2L являются касательными к меридианному кругу, а потому треугольники OK_1L и OK_2L имеют

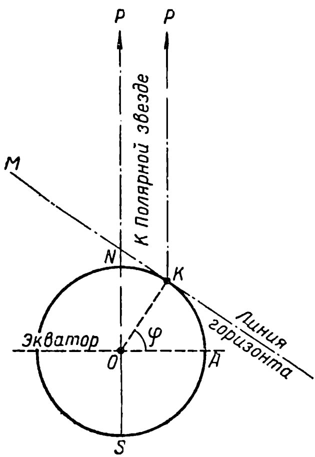


Рис. 57

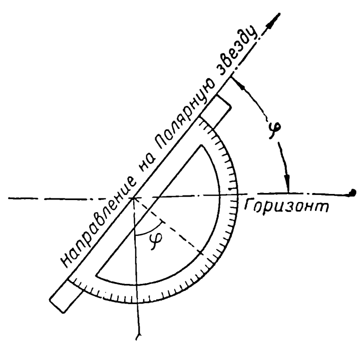


Рис. 58

при вершинах K_1 и K_2 прямые углы. Гипотенуза OL у этих треугольников общая, а катеты OK_1 и OK_2 равны между собой как радиусы земного шара, следовательно, равны и сами треугольники, а поэтому $\angle K_1OL = \angle K_2OL \approx 89°3'$.

Но в треугольнике OK_1L отношение $\frac{OK_1}{OL}=\cos 89°3'$, следовательно, искомое расстояние между центрами Земли и Луны

$$OL=\frac{OK_1}{\cos 89°3'}\approx\frac{6370}{\cos 89°3'}\approx\frac{6370}{0{,}0166}\approx 384\cdot 10^3\ (км).$$

4. Зная расстояние до какой-нибудь планеты, можно найти диаметр этой планеты. Для этого достаточно определить угол видимости данной планеты с Земли.

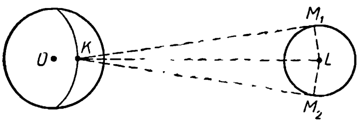


Рис. 59

Например, измерения показывают, что Луна видна с Земли под углом $M_1KM_2\approx 0°31'$ (рис. 59), где K — пункт, в котором производилось наблюдение, $M_1L=LM_2$ — радиусы Луны, проведенные в точки касания. Так как прямоугольные треугольники KM_1L и KM_2L равны, то

$$\angle M_1KL=\angle M_2KL\approx 15'30''.$$

Из треугольника KM_1L имеем:

$$\frac{M_1L}{KL}=\sin\angle M_1KL \text{ или } M_1L\approx KL\cdot\sin 15'30''.$$

Но расстояние $KL\approx OL\approx 384\cdot 10^3$ ($км$), следовательно, радиус Луны $M_1L\approx 384\cdot 10^3\cdot\sin 15'30''\approx 178\cdot 10$ ($км$).

Аналогично находятся расстояния от центра Земли до центров Солнца, Марса, Юпитера и т. д., а также радиусы Солнца и планет.

Упражнения

1. На какую высоту надо подняться над Москвой, чтобы был виден в подзорную трубу город Калинин, зная, что расстояние от Москвы до Калинина 160 *км*.

(Ответ: около 2 *км*.)

2. Найти длину параллелей земного шара для различных широт φ, например, для $\varphi=60°$ — широта Ленинграда, для $\varphi=56°$ — широта Москвы, для $\varphi=66°30'$ — Полярный круг, а также длину параллели, соответствующей вашей местности.

3. Определите диаметр Солнца, видимого с Земли под

углом $\alpha \approx 31'$, если известно, что расстояние от Земли до Солнца равно $149 \cdot 10^6$ *км*.

(Ответ: $1{,}4 \cdot 10^6$ *км*.)

4. Для определения направления скорости ветра в верхних слоях атмосферы с аэродрома пустили шар-пилот диаметром 1,5 *м*. На каком наименьшем расстоянии от наблюдателя шар станет невидимым для невооруженного глаза, если предельный угол видимости равен $1'$?

(Ответ: 5,2 *км*.)

5. Подвесная канатная горная дорога имеет в длину 3380 *м* при среднем подъеме в 29°. Определить разницу высот над уровнем моря у начала и конца дороги.

(Ответ: 1640 *м*.)

6. Поперечное сечение железнодорожной насыпи имеет форму равнобочной трапеции, у которой верхнее основание равно 2,9 *м*, боковая сторона равна 8,0 *м* и наклонена к основанию под углом в 42°. Определить высоту насыпи и ее ширину у подножия.

(Ответ: высота 5,4 *м*, основание 15 *м*.)

7. Прямоугольное здание, измерения которого равны 20 *м* и 25 *м*, требуется покрыть крышей с наклоном 40°. Определить величину поверхности этой крыши в квадратных метрах, если известно, что края крыши отступают от стен на полметра.

(Ответ: 720 $м^2$).

8. Две прямые дороги пересекаются под углом в 47°. На одной из этих дорог в $6\frac{1}{2}$ *км* от перекрестка находится пункт, из которого хотят проложить кратчайший путь до другой дороги. Какой длины будет этот путь?

(Ответ: 4,8 *км*.)

9. Для изготовления крышки цилиндра паровой машины из листового железа вычерчивают на листе железа две концентрические окружности; по внешней из этих окружностей вырезывают (с помощью автогена) крышку, а на внутренней окружности делают разметку для высверливания отверстий, вычислив предварительно расстояния между центрами отверстий. Сделайте такие вычисления при условии, что диаметр внутренней окружности равен 180 *мм* и на ней надо отметить центры для 5 отверстий на одинаковых расстояниях.

(Ответ: расстояние между центрами отверстий 106 мм.)

10. Из круглого (цилиндрического) железного прута диаметром в 2,0 дюйма желают выфрезеровать правильную восьмиугольную призму наибольшего сечения. Определить размеры поперечного сечения призмы и процент железа, уходящего в стружку.

(Ответ: 1,8 дюйма; 9,4%.)

11. Бочка с керосином весом в 140 *кг* должна быть удержана на плоскости, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом 14°30′ (рис. 60). Какую силу надо приложить к бочке по направлению наклонной плоскости, чтобы удержать бочку? (Силу трения не учитывать.)

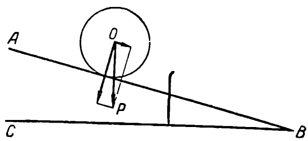


Рис. 60

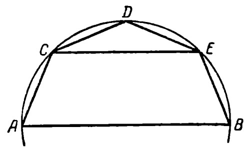


Рис. 61

Указание. Силу $OP \approx 140$ *кг* надо разложить на две составляющие силы, одна из которых направлена перпендикулярно плоскости AB, а другая параллельна этой плоскости. Последняя из этих составляющих будет равна искомой силе.

12. Простейший способ проектирования мансардной кровли состоит в следующем: на отрезке AB, изображающем ширину перекрытия (рис. 61), описывают полуокружность, делят ее на четыре равные части и точки деления C, D и E соединяют прямыми линиями, как показано на рисунке. Какую длину будут иметь скаты кровли AC и CD и «затяжка» CE и каковы углы наклона кровли, если ширина перекрытия $AB \approx 11,5$ *м*?

(Ответ: $AC = CD \approx 8,81$ *м*, $CE \approx 16,3$ *м*, наклон ската AC равен 67°30′, наклон ската CD — 22°30′.)

Глава IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 13. Графический и вычислительный методы решения геометрических задач и их достоинства и недостатки

В начале книги мы уже обращали внимание на недостатки графического метода решения геометрических задач и достоинства вычислительного метода. Для сравнительной оценки этих методов рассмотрим еще одну задачу, встречающуюся в заводской практике при обточке цилиндрических валов «на конус».

Пусть требуется обточить «на конус» конец цилиндрического вала диаметром $D \approx 154{,}2$ *мм* (рис. 62) так, чтобы угол уклона конуса $\alpha \approx 8°30'$, а длина обточки $H \approx 270{,}0$ *мм*.

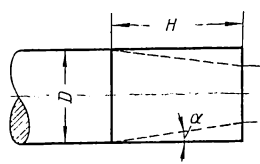


Рис. 62

Чтобы установить вал на токарном станке для указанной обработки, надо знать, какой диаметр d будет иметь конец вала после его обточки. Найти этот диаметр можно графическим или вычислительным методом.

а) Графический метод

1) Выбрав подходящий масштаб, например $\frac{1}{10}$, строим на листе бумаги (лучше миллиметровой) осевое сечение обтачиваемой части вала. Это будет прямоугольник $ABCE$ (рис. 63) со сторонами:

$$AB = H' \approx 270{,}0 \cdot \frac{1}{10} = 27{,}00 \ (мм),$$

$$BC = D' \approx 154{,}2 \cdot \frac{1}{10} = 15{,}42 \ (мм).$$

2) Затем с помощью транспортира строим $\angle BAB_1 = \angle CEC_1 = 8°30'$; фигура AB_1C_1E представляет изображение прежней части вала после ее обточки, отрезок B_1C_1 изображает искомый диаметр.

3) Измеряем отрезок B_1C_1, получаем: $B_1C_1 = d' \approx 15$ *мм*, следовательно, искомый диаметр $d \approx 15$ *мм* $\cdot 5 \approx 75$ *мм*.

Достоинством этого приема является то, что для решения задачи не потребовались никакие формулы и вычисления,

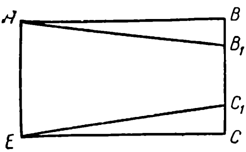


Рис. 63

причем в процессе решения схематически воспроизводилась форма искомой детали; недостатком является то, что результат решения получен с пониженной точностью, так как построение фигуры и последующее измерение искомого отрезка ведется приближенно, причем степень точности не вполне известна; кроме того, при малых углах конусности точность решения сильно понижается. В некоторых случаях графическое решение задач почти невозможно. Так, например, в рассмотренных нами ранее задачах на отыскание радиусов Земли и Луны и расстояния до Луны углы в соответствующих треугольниках столь малы, что их построение затруднительно даже с точностью одного знака.

б) В ы ч и с л и т е л ь н ы й п р и е м р е ш е н и я т о й ж е з а д а ч и

1) Используя рисунок 62, выражаем зависимость между данными и искомым;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D-d}{2H},$$

откуда получаем формулу для определения искомого диаметра:

$$d = D - 2H \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

2) Подставив числовые данные, находим:

$$d \approx 154{,}2 - 2 \cdot 270{,}0 \cdot \operatorname{tg} 8°30' \approx 154{,}2 - 540{,}0 \cdot 0{,}1495 \approx$$
$$\approx 154{,}2 - 80{,}73 \approx 73{,}5 \ (\text{мм}).$$

Достоинством этого приема является: а) общность решения задачи (выведенная формула пригодна для любых конкретных значений входящих в нее величин D, H и α); б) известна точность результата (в рассмотренном примере она трехзначная); в) точность ответа зависит только от точности данных.

К недостаткам вычислительного приема следует отнести: а) необходимость вывода формулы, выражающей искомое через данные величины; б) необходимость выполнения вычислений по установленной формуле; (причем в некоторых случаях и то и другое требует много времени и усилий).

§ 14. Треугольник как элемент любой прямолинейной фигуры

В геометрии особенно большое внимание уделяется треугольнику. Подробно изучаются виды треугольников, признаки равенства и подобия, зависимость между различными элементами треугольника. Рассмотренные нами определения тригонометрических функций (тангенса, синуса и косинуса) и их приложения также связаны с треугольниками.

Чем же это объяснить? Ведь в практической жизни мы редко встречаемся с предметами, имеющими форму треугольника.

Как химик изучает в первую очередь элементы, а затем сложные вещества, как биолог сперва изучает живую клетку, а потом сложные организмы, так и математик в геометрии изучает в первую очередь простейшие элементы геометрических фигур — точки, отрезки и треугольники, из которых состоят все геометрические фигуры.

Среди простейших геометрических образов треугольник играет исключительную роль потому, что всякая сложная прямолинейная геометрическая фигура может быть разложена на треугольники, а умея находить угловые и линейные элементы треугольников, можно найти и все элементы сложной фигуры. Именно так мы поступали при изучении параллелограмма, трапеции, любого четырехугольника или многоугольника. Поэтому исторически и создалось специальное учение о треугольниках — треугольникоизмерение или по-латыни — тригонометрия.

А так как всякий треугольник может быть разбит одной из высот на два прямоугольных треугольника, элементы которых находятся в более простой зависимости, то исходным элементом при изучении прямолинейных фигур можно считать прямоугольный треугольник.

Следует отметить, что в строительной и технической практике широко используется еще одна особенность треугольника — жесткость его формы. Стержневые шарнирные четырехугольники и многоугольники легко деформируются, а треугольники такой деформации не поддаются. Вот почему при сооружении мостовых арок и перекрытий над зданиями делают многочисленные укосы, разбивающие всю конструкцию на сеть треугольников. Это особенно видно в конструкции подъемных кранов и опорных мачт электросети высоких напряжений.

§ 15. Вычислительный тригонометрический метод решения прямоугольных треугольников

«Решить треугольник» — это значит по известным элементам треугольника найти все его основные элементы, т. е. стороны и углы.

Из геометрии известно, что треугольник вполне определяется заданием трех его основных независимых элементов. Так как в прямоугольном треугольнике один элемент (прямой угол) уже известен, то для его решения достаточно знать еще два каких-нибудь независимых элемента.

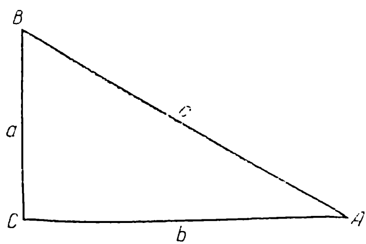


Рис. 64

Задачи на решение прямоугольных треугольников можно разбить на следующие типы:

I. Известны сторона и острый угол:
 а) катет и острый угол;
 б) гипотенуза и острый угол.

II. Известны две стороны:
 а) два катета;
 б) катет и гипотенуза.

В каждой задаче требуется вычислить неизвестные основные элементы — стороны и углы.

При решении указанных задач будем пользоваться принятыми нами ранее (см. § 6) обозначениями: a, b — катеты, A, B — противолежащие им углы, c — гипотенуза и C — прямой угол (рис. 64).

Для удобства приведем здесь сводку всех выведенных выше формул, выражающих зависимости между основными элементами в прямоугольном треугольнике:

$$a^2+b^2=c^2; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B=\frac{b}{a}; \qquad (2)$$

$$a=b\operatorname{tg} A, \quad b=a\operatorname{tg} B; \qquad (3)$$

$$a=\frac{b}{\operatorname{tg} B}, \quad b=\frac{a}{\operatorname{tg} A}; \qquad (4)$$

$$\sin A=\frac{a}{c}, \quad \sin B=\frac{b}{c}; \qquad (5)$$

$$\cos A=\frac{b}{c}, \quad \cos B=\frac{a}{c}; \qquad (6)$$

$$a=c\sin A, \quad b=c\sin B; \qquad (7)$$

$$a=c\cos B, \quad b=c\cos A; \qquad (8)$$

$$A+B=90^\circ. \qquad (9)$$

Переходим к решению задач.

I. **а)** Известны: A, a; требуется найти: B, b, c.

Решение. 1) По формуле (9): $B=90^\circ-A$;

2) по формуле (3): $b=a\cdot\operatorname{tg} B$;

3) по формуле (5): $c=\frac{a}{\sin A}$;

4) правильность расчетов можно проверить применением к результатам вычислений формулы (1).

Числовой пример. $a\approx3{,}71$, $A\approx19^\circ30'$.

Решение. 1) $B\approx90^\circ-19^\circ30'=70^\circ30'$;

2) $b\approx3{,}71\cdot\operatorname{tg}70^\circ30'\approx3{,}71\cdot2{,}824\approx10{,}5$;

3) $c\approx\frac{3{,}71}{\sin 19^\circ30'}\approx\frac{3{,}71}{0{,}3338}\approx11{,}1$;

Проверка. $a^2+b^2=3{,}71^2+10{,}5^2\approx124{,}1$;

$c=\sqrt{a^2+b^2}\approx\sqrt{124{,}1}\approx11{,}1$.

Следовательно, первые три цифры в результатах вычислений надежные, а большее число верных значащих цифр получить невозможно, так как данное $a=3{,}71$ содержит лишь три значащих цифры.

I. **б)** Известны: A, c; требуется найти B, a, b.

Решение. 1) По формуле (9): $B=90^\circ-A$;

2) по формулам (7) и (8) $a=c\cdot\sin A$, $b=c\cdot\cos A$.

Проверка результатов по формуле (1).

Числовой пример. $A \approx 32°20'$, $c \approx 18{,}2$.

Решение. 1) $B = 90° - 32°20' = 57°40'$;
2) $a \approx 18{,}2 \cdot \sin 32°20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}5349 \approx 9{,}74$;
$b \approx 18{,}2 \cdot \cos 32°20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}8450 \approx 15{,}4$.

Проверка. $a^2 + b^2 \approx 9{,}74^2 + 15{,}4^2 \approx 332{,}1$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{332{,}1} \approx 18{,}2.$$

II. а) Известны: a, b; требуется найти: A, B, c.

Решение.

1) По формуле (2) находим $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, а затем по таблице находим угол A;

2) по формуле (9) находим: $B = 90° - A$;

3) по формуле (1): $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

4) для проверки возьмем формулу (8) $a = c \cdot \cos B$, так как она содержит искомые величины и при вычислениях не употреблялась в данной задаче.

Числовой пример. $a \approx 23{,}5$, $b \approx 40{,}2$.

Решение.

1) $\operatorname{tg} A \approx \frac{23{,}5}{40{,}2} \approx 0{,}5846$; по таблице находим угол $A \approx 30°18' \approx 30°20'$;

2) $B \approx 90° - 30°18' \approx 59°42' \approx 59°40'$;

3) $c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{23{,}5^2 + 40{,}2^2} \approx 46{,}5$;

Проверка. $a \approx 46{,}5 \cdot \cos 59°42' \approx 46{,}5 \cdot 0{,}5045 \approx 23{,}5$.

II. б). Известны: a, c; требуется найти: A, B, b.

Решение.

1) По формуле (5): $\sin A = \frac{a}{c}$, а затем по таблице находим угол A;

2) по формуле (9): $B = 90° - A$;

3) по формуле (7): $b = c \cdot \sin B$;

4) для проверки вычислений можно взять формулу (3)

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A,$$

так как она содержит искомые величины и при вычислениях в задаче не употреблялась.

Числовой пример. $a \approx 6{,}35$, $c \approx 8{,}92$.

Решение. 1) $\sin A \approx \frac{6{,}35}{8{,}92} \approx 0{,}7119$; по таблице находим угол $A \approx 45°24' \approx 45°20'$;

2) $B \approx 90°—45°24' \approx 44°36' \approx 44°40'$;

3) $b \approx 8{,}92 \cdot \sin 44°36' \approx 8{,}92 \cdot 0{,}7\overline{0}22 \approx 6{,}26$.

Проверка. $a \approx 6{,}26 \cdot \operatorname{tg} 45°24' \approx 6{,}26 \cdot 1{,}0141 \approx 6{,}35$.

Упражнения

1. Найти неизвестные стороны и углы в прямоугольных треугольниках, если даны:

1. $a \approx 12{,}0$, $A \approx 53°2\underline{0}'$. Ответ: $b \approx 8{,}93$, $c \approx 15{,}0$, $B \approx 36°4\underline{0}'$.
2. $b \approx 3{,}9$, $A \approx 64°$. Ответ: $a \approx 8{,}0$, $c \approx 8{,}9$, $B \approx 26°$.
3. $c \approx 25$, $A \approx 37°$. Ответ: $a \approx 15$, $b \approx 20$, $B \approx 53°$.
4. $c \approx 241$, $B \approx 29°5\underline{0}'$. Ответ: $a \approx 209$, $b \approx 120$, $A \approx 60°1\overline{0}'$.
5. $a \approx 20$, $b \approx 21$. Ответ: $c \approx 29$, $A \approx 44°$, $B \approx 4\overline{6}°$.
6. $a \approx 88{,}0$, $b \approx 105$. Ответ: $c \approx 137$, $A \approx 40°00'$, $B \approx 50°0\overline{0}'$.
7. $a \approx 56$, $c \approx 65$. Ответ: $b \approx 33$, $A \approx 60°$, $B \approx 3\overline{0}°$,
8. $b \approx 2{,}85$, $c \approx 2{,}93$. Ответ: $a \approx 0{,}680$, $A \approx 13°20'$, $B \approx 76°4\overline{0}'$.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 25 *см*, высота на боковую сторону — 21 *см*. Найти боковую сторону и угол при вершине.

(Ответ: 23 *см*; 66°.)

3. Сторона ромба $a \approx 64{,}5$ *см*, угол $\alpha \approx 28°3\underline{0}'$. Определить его диагонали.

(Ответ: $d_1 \approx 125$ *см*; $d_2 \approx 31{,}7$ *см*.)

4. В круге радиуса $R \approx 225$ *м* дана хорда $l \approx 325$ *м*. Как велик соответствующий этой хорде центральный угол α?

(Ответ: $\alpha \approx 92°3\underline{0}'$.)

5. Определить угол α между касательными к кругу радиуса $R \approx 15$ *см*, проведенными из точки P, удаленной от центра на расстоянии 33 *см*.

(Ответ: 54°.)

§ 16. Решение любых треугольников через сведение к решению прямоугольных треугольников

Если в треугольнике ABC (рис. 65, *а*, *б*) провести высоту AD, то образуются два прямоугольных треугольника ABD и ACD. Оказывается, решение треугольника ABC всегда возможно свести к «совместному» решению этих двух прямоугольных треугольников. Мы покажем, как это делается на ряде примеров, охватывающих все четыре основных типа задач на решение треугольников любого вида, а именно:

I. Решение треугольника по стороне и двум углам.

II. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

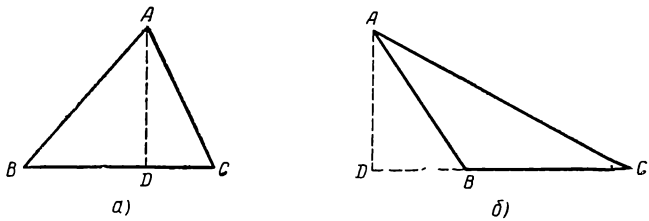


Рис. 65

III. Решение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон.

IV. Решение треугольника по трем сторонам.

Чтобы сократить запись, будем в дальнейшем обозначать углы треугольника ABC буквами A, B и C, а противолежащие им стороны буквами a, b и c.

Задачи I типа

Пример. Даны: $A \approx 103°00'$, $B \approx 54°30'$, $a \approx 28{,}5$.
Найти: C, b, c.

Решение. Изобразим от руки какой-нибудь треугольник ABC с тупым углом при вершине A (рис. 66).

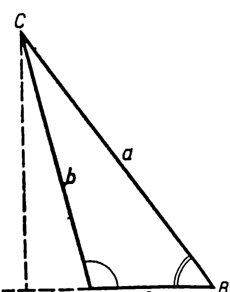


Рис. 66

Из геометрии известно, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, следовательно,

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) \approx 180° - (103°00' + 54°30') = 22°30'.$$

Для определения сторон b и c проведем в треугольнике ABC высоту CD из вершины C; ее основание D упадет на продолжение стороны AB за вершину угла A, так как угол A тупой.

Сторона b служит гипотенузой прямоугольного треугольника ACD, следовательно, $b = AC = \frac{CD}{\sin CAD}$.

Но CD есть катет прямоугольного треугольника CBD, в котором известна гипотенуза a и острый угол B, поэтому $CD = a \cdot \sin B \approx 28{,}5 \cdot \sin 54°30' \approx 28{,}5 \cdot 0{,}8141 \approx 23{,}20$.

Угол $CAD = 180° - A \approx 180° - 103°00' = 77°00'$, следовательно, $b = \frac{23{,}20}{\sin 77°00'} \approx \frac{23{,}20}{0{,}9744} \approx 23{,}8$.

Сторона $c = AB = DB - DA$.

Но DB — катет треугольника DBC, DA — катет треугольника CAD, следовательно,

$DB = a \cdot \cos B$, $DA = b \cdot \cos(180° - A)$;

$c = a \cdot \cos B - b \cdot \cos(180° - A) \approx 28{,}5 \cdot \cos 54°30' - 23{,}8 \times$
$\times \cos 77°00' \approx 16{,}55 - 5{,}35 \approx 11{,}2$.

Итак, $C \approx 22°30'$, $b \approx 23{,}8$, $c \approx 11{,}2$.

Задачи II типа

Пример. Даны стороны $a \approx 510$, $b \approx 317$ и угол между ними $C \approx 76°20'$; найти углы A, B и сторону c.

Решение. Сделаем от руки набросок искомого треугольника ABC и проведем в нем высоту AD (рис. 67). Точка D будет находиться между B и C, так как угол C острый и $a > b$.

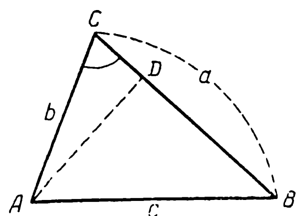


Рис. 67

В прямоугольном треугольнике ABD имеем $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$.

Но $AD = b \cdot \sin C \approx 317 \times$
$\times \sin 76°20' \approx 317 \cdot 0{,}9716 \approx 308{,}0$;
$BD = BC - DC = a - b \cdot \cos C \approx$
$\approx 510 - 317 \cdot \cos 76°20' \approx 510 -$
$- 74{,}9 \approx 435{,}1$,

следовательно, $\operatorname{tg} B \approx \frac{308{,}0}{435{,}1} \approx 0{,}7081$, откуда по таблицам находим угол $B \approx 35°18' \approx 35°20'$.

Угол $A = 180° - (B + C) \approx 180° - (35°20' + 76°20') \approx$
$\approx 68°20'$.

Искомая сторона c является гипотенузой треугольника ABD, поэтому $c = \frac{AD}{\sin B} \approx \frac{308{,}0}{\sin 35°18'} \approx \frac{308{,}0}{0{,}5779} \approx 533$.

Итак, $A \approx 68°20'$, $B \approx 35°20'$, $c \approx 533$.

Задача. На строительстве железной дороги потребовалось проложить на участке AB (рис. 68) тоннель. Для определения длины и направления тоннеля были измерены расстояния от точек A и B до некоторой точки C (из которой видны точки A и B), а также угол ACB. Результаты измерения оказались следующими: $AC \approx$ ≈ 320 *м*, $BC \approx 400$ *м*, угол $ACB \approx 110°20'$. Найти длину и направление тоннеля.

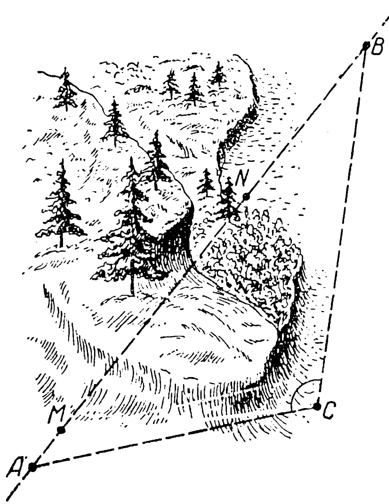


Рис. 68

Решение. Изобразим от руки треугольник ABC с тупым углом C (рис. 69) и будем считать, что он подобен тому треугольнику, вершины которого A, B и C расположены на местности (рис. 68), тогда по условию задачи в треугольнике ABC сторона $a \approx 400$ *м*, $b \approx 320$ *м* и угол между ними $C \approx 110°20'$.

Проведем в треугольнике ABC высоту AD из вершины A; точка D будет лежать на продолжении стороны BC, так как угол C тупой.

В прямоугольном треугольнике ADB имеем

$$\operatorname{tg} B = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{DC+CB}.$$

Из прямоугольного треугольника ADC находим:

$AD = DC \cdot \sin ACD = b \times$ $\times \sin(180° - C) \approx 320 \times$ $\times \sin 69°40' \approx 320 \cdot 0{,}9377 \approx$ $\approx 300{,}1$ *м*;

$DC = AC \cdot \cos ACD = b \times$ $\times \cos(180° - C) \approx 320 \times$ $\times \cos 69°40' \approx 320 \cdot 0{,}3464 \approx$ $\approx 110{,}8$ *м*.

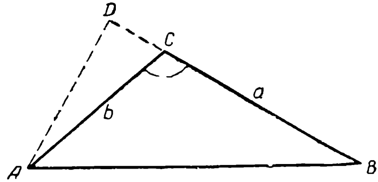


Рис. 69

Следовательно, $\operatorname{tg} B \approx \frac{300{,}1}{110{,}8 + 400} \approx \frac{300{,}1}{510{,}8} \approx 0{,}5875,$

откуда по таблице находим угол $B \approx 30°27'$.

Из прямоугольного треугольника ADB имеем:

$$AB = \frac{AD}{\sin B} \approx \frac{300,1}{\sin 30°27'} \approx \frac{300,1}{0,5067} \approx 593.$$

Угол $A = 180° - (B + C) \approx 180° - (30°27' + 110°20') \approx \approx 39°13'$.

Итак, после необходимых округлений имеем: $AB \approx 593$ *м*, $\breve{A} \approx 39°10'$, $\breve{B} \approx 30°30'$.

Зная углы A и B, провешили прямую из точек A и B до начала M и конца N тоннеля и измерили отрезки AM и BN; оказалось: $AM \approx 38$ *м*, $BN \approx 76$ *м*, следовательно, длина тоннеля $MN = AB - (AM + NB) \approx 593 - 114 \approx \approx 479$ (*м*).

Задача III типа

Задача. Известны две стороны треугольника и угол, лежащий против одной из них, например, a, b и A; требуется найти углы B и C и сторону c.

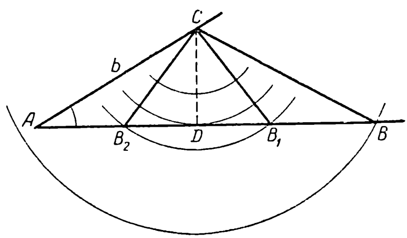


Рис. 70

Решению задачи данного типа предшествует обычно небольшое исследование. Проведем его в общем виде с тем, чтобы выводы использовать в дальнейшем во всех конкретных случаях.

Как известно из геометрии, чтобы построить треугольник ABC по двум сторонам a, b и углу A, откладывают на стороне этого угла отрезок $AC = b$ (рис. 70), а затем из точки C как из центра описывают окружность радиусом a. При этом может быть четыре случая:

1) окружность не пересечет другой стороны угла A, и тогда задача не будет иметь решения;

2) окружность коснется другой стороны угла A в точке D, и тогда треугольник ACD будет искомым; в нем угол D будет прямым, так как радиус CD окружности перпендикулярен касательной AD;

3) окружность пересечет другую сторону угла A в двух точках B_1 и B_2, тогда искомых треугольников окажется два: ACB_1 и ACB_2, причем угол $AB_2C = 180° - \angle AB_1C$, короче: $\angle B_2 = 180° - \angle B_1$;

4) окружность пересечет другую сторону угла A в одной точке B, тогда искомым будет один треугольник ACB.

Поскольку в тригонометрии решение треугольников проводится вычислительным методом, то возникает вопрос: нельзя ли только на основании числовых данных, не выполняя указанных построений, определять, с каким из этих четырех случаев приходится иметь дело?

Оказывается, это возможно и весьма просто. В самом деле, заметив, что при $A < 90°$ перпендикуляр $CD = b \cdot \sin A$, и учтя необходимые условия пересечения окружности с лучом, приходим к следующему выводу:

1) случай, если $a < CD$, т. е. $a < b \sin A$ (решений нет);

2) случай, если $a = CD$, т. е. $a = b \sin A$ (искомый треугольник прямоугольный);

3) случай, если $AC > a > CD$, т. е. $b > a > b \sin A$ (два решения);

4) случай, если $a > AC$, т. е. $a > b$ (одно решение).

Очевидно, при $A > 90°$ будет иметь место только четвертый случай, так как против тупого угла всегда лежит большая сторона.

Установив по данным задачи (до ее решения), с каким из указанных случаев приходится иметь дело, переходят к самому решению.

Пример 1. Дано; $a \approx 19{,}1$, $b \approx 28{,}2$, $A \approx 31°17'$.
Найти: B, C, c.

Решение. 1) Определяем, какому случаю соответствуют данные:

$$CD = b \sin A \approx 28{,}2 \cdot \sin 31°17' \approx 14{,}64,$$

следовательно, $b > a > b \sin A$, что соответствует второму случаю, когда задача имеет два решения: треугольник ACB_1 с острым углом B_1 и треугольник ACB_2 с тупым углом $B_2 = 180° - B_1$.

2) Находим первое решение. Из прямоугольного треугольника CDB_1 (рис. 70) имеем:

$$\sin B_1 = \frac{CD}{CB_1} = \frac{b \cdot \sin A}{a} \approx \frac{14{,}64}{19{,}1} \approx 0{,}7665,$$

откуда по таблице находим угол $B_1 \approx 50°03'$.

$$\angle ACB_1 = 180° - (A + B_1) \approx 180° - (31°17' + 50°03') \approx \approx 98°40'.$$

Сторона $AB_1 = AD + DB_1 = b \cos A + a \cos B_1 \approx 28{,}2 \times \times \cos 31°17' + 19{,}1 \cdot \cos 50°03' \approx 36{,}4$.

3) Находим второе решение. Треугольник CB_1B_2 равнобедренный (рис. 70), поэтому угол $AB_2C = B_2 = 180° - -B_1 \approx 180° - 50°03' \approx 129°57'$.

Угол $ACB_2 = 180° - (A + B_2) \approx 180° - (31°17' + 129°57') \approx \approx 18°46'$.

Сторона $AB_2 = AD - DB_2 = b \cdot \cos A - a \cdot \cos B_1 \approx \approx 28{,}2 \cdot \cos 31°17' - 19{,}1 \cdot \cos 50°03' \approx 11{,}8$.

Итак, после необходимых округлений получаем следующие ответы:

$B_1 \approx 50°00'$, $C_1 \approx 98°40'$, $AB_1 \approx 36{,}4$;

$B_2 \approx 130°$, $C_2 \approx 18°50'$, $AB_2 \approx 11{,}8$.

Задачи IV типа

Пример. Даны стороны треугольника: $a \approx 12{,}0$ *см*, $b \approx 10{,}3$ *см* и $c \approx 15{,}0$ *см*; найти его углы A, B и C.

Решение. Сделаем от руки набросок искомого треугольника ABC и проведем в нем высоту CD из вершины C, лежащей против большей стороны (рис. 71).

Обозначим отрезок AD через x, тогда $BD = c - x$,

$$\cos A = \frac{x}{b} \text{ и } \cos B = \frac{c - x}{a}. \quad (\ )$$

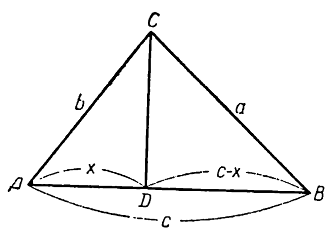


Рис. 71

Для определения x применим теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках ACD и BCD, получим систему уравнений:

$$CD^2 = b^2 - x^2;$$

$$CD^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

откуда
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

или
$$2cx = b^2 + c^2 - a^2, \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Подставив выражение x в отношение (*) и используя числовые данные, получаем:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{10,3^2+15,0^2-12,0^2}{2\cdot 10,3\cdot 15,0} \approx \frac{187,1}{309,0} \approx 0,6006;$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{12,0^2+15,0^2-10,3^2}{2\cdot 15,0\cdot 12,0} \approx 0,7300.$$

Используя таблицы косинусов, находим:

$$A \approx 53°05' \approx 53°00', B \approx 43°07' \approx 43°10'.$$

Наконец, $C = 180° - (A + B) \approx 180° - (53°05' + 43°07') \approx$

$$\approx 83°48' \approx 83°50'.$$

Задача. Технику надо было проверить точность кладки угла в доме между двумя стенами.

Убедившись с помощью отвеса и уровня, что ребро угла находится в вертикальном положении, а плоскость пола в горизонтальном, техник отметил на каждой стене у самого пола точки A и B (рис. 72) на расстоянии 1,50 *м* от ребра угла и измерил расстояние от A до B, оно оказалось равным 2,18 *м*.

Затем вычислением он нашел, что угол между стенами дома равен 93°10'. Как же решил задачу техник?

Р е ш е н и е. В треугольнике ABC известны три стороны, но этот треугольник равнобедренный, следовательно, нет необходимости повторять общий ход решения задачи III типа.

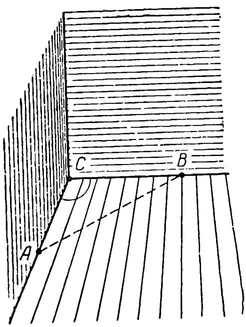


Рис. 72

В самом деле, сделаем от руки рисунок равнобедренного треугольника ABC и проведем в нем высоту CD (рис. 73), тогда искомый угол $ACB = 2\,DCB$.

$$\text{Но} \quad \sin DCB = \frac{DB}{CB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{CB} \approx \frac{1,09}{1,50} \approx 0,7267.$$

По таблице находим:

$$\angle DCB \approx 46°36'.$$

Следовательно, $\angle ACB \approx 93°12' \approx 93°10'$.

Проверьте таким же путем точность кладки угла между стенами в вашем доме.

Упражнения.

1. Найти неизвестные стороны и углы в треугольнике, если даны:

1. $a \approx 13$, $A \approx 54^\circ$, $B \approx 67^\circ$. Ответ: $b \approx 15$, $c \approx 14$.

2. $b \approx 81{,}7$, $B \approx 44^\circ 1\underline{0}'$, $C \approx 110^\circ 4\underline{0}'$. Ответ: $a \approx 49{,}9$, $c \approx 110$.

3. $a \approx 650$, $b \approx 433$, $C \approx 31^\circ 3\underline{0}'$. Ответ: $c \approx 361$, $A \approx 109^\circ 4\underline{0}'$.

4. $a \approx 20{,}0$, $b \approx 13{,}0$, $A \approx 67^\circ 2\underline{0}'$. Ответ: $c \approx 21{,}0$, $B \approx 36^\circ 5\underline{0}'$.

5. $a \approx 37{,}0$, $b \approx 13{,}0$, $c \approx 40{,}0$. Ответ: $A \approx 67^\circ 2\underline{0}'$, $B \approx 18^\circ 5\underline{0}'$.

2. Для определения величины угла на местности на его сторонах от вершины отложили цепью по 10 *м*, а затем измерили расстояние между полученными точками, которое оказалось равным 16,5 *м*. Как же нашли величину угла?

3. Под каким углом виден прямолинейный край леса $AB \approx 1240$ *м* из пункта C, удаленного от A на расстояние 1600 *м* и от B на 1170 *м*?

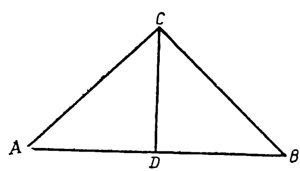


Рис. 73

(Ответ: $44^\circ 2\underline{0}'$.)

4. Даны две стороны треугольника a, b и угол между ними C; доказать, что площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \qquad \text{если } C \geqslant 90^\circ$$

и

$$S = \frac{1}{2} ab \sin (180^\circ - C), \quad \text{если } C > 90^\circ.$$

5. Используя формулы предыдущей задачи, вычислить площадь треугольника, у которого две стороны равны 4,7 *дм* и 6,1 *дм*, а угол, заключенный между ними, равен 49°.

(Ответ: 11 *дм*².)

§ 17. Вычислительный тригонометрический метод решения многоугольников через сведение к решению треугольников

1. Определение расстояния между недоступными пунктами в общем случае

Данный нами выше (§ 7, пример 2) способ решения подобной задачи может оказаться затруднительным или вовсе неприемлемым, если на местности будут препятствия, не позволяющие провешить прямую требуемого (при этом способе решения) направления.

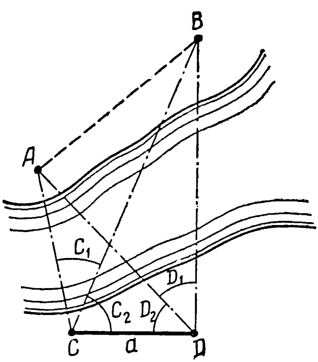


Рис. 74

В таком случае для отыскания расстояния между недоступными вершинами A и B выбирают на местности любые две доступные точки C и D так, чтобы возможно было измерить между ними расстояние CD и чтобы из этих точек можно было видеть вершины A и B (рис. 74).

Такой отрезок CD называют базисом. С помощью угломера находят углы:
$\angle ACB = C_1$, $\angle BCD = C_2$, $\angle ADB = D_1$ и $\angle ADC = D_2$.

В треугольниках ACD и BCD известны: сторона $CD = a$ и прилежащие к ней углы[1]. Можно, следовательно, вычислить длины AC и BC (задачи I типа).

Теперь в треугольнике ABC известны две стороны и угол C_1 между ними заключенный, следовательно, можно вычислить третью сторону AB, т. е. искомое расстояние (задача типа II).

---

[1] Мы предполагаем, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости; если же это не так, то потребуется измерение и углов ACD и BDC.

Проделайте сами необходимые вычисления, используя следующие результаты измерений:

$$CD \approx 120 \text{ м}, \ C_1 \approx 34°, \ C_2 \approx 71°, \ D_1 \approx 50°, \ D_2 \approx 26°.$$

2. Метод триангуляции при съемке планов и определении далеких расстояний

Если два пункта A и B находятся на большом расстоянии друг от друга, то определить это расстояние указанным выше способом уже невозможно, так как на местности не найдется такого (допускающего измерение) базиса CD, из концов которого видны оба пункта A и B.

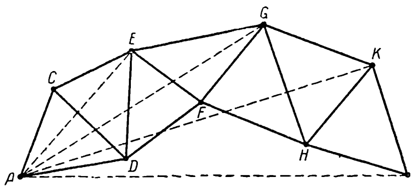


Рис. 75

В этом случае выбирают на местности (рис. 75) некоторое число точек C, D, E, F, G, H, K так, чтобы образовалась сеть треугольнинов ACD, CDE, DEF,..., HKB, удовлетворяющая следующим условиям:

1) возможно измерить с достаточной точностью хотя бы одну из сторон какого-нибудь из этих треугольников;

2) в любом треугольнике из каждой его вершины можно видеть две другие его вершины.

Пусть оказалось возможным измерить сторону CE в треугольнике CED. Тогда измеряют прилежащие к CE углы этого треугольника и находят его стороны CD и ED вычислением (§16, задачи I типа). Затем измеряют углы в треугольниках CDA и EDF, прилежащие к сторонам CD и ED, и находят вычислением стороны этих треугольников AC и EF (задачи I типа). Далее, измерив в треугольнике EFG углы, прилежащие к стороне EF, находят его стороны EG и FG. Так, переходя последовательно от одного треугольника к другому, «смежному с ним», находят вычислением все отрезки ломаной $ACEGKB$, соединяющей пункты A и B. После этого рассматривают вспомогательные треугольники

ACE, AEG, AGK и AKB. В первом из этих треугольников известны две стороны AC и CE и угол между ними ACE, равный сумме известных углов ACD и ECD[1]; используя эти данные, находят вычислением третью сторону треугольника AE и его угол AEC (§ 16, задачи II типа). Затем переходят к следующему вспомогательному треугольнику AEG, в котором также известны две стороны AE и EG и угол между ними AEG, находят в нем сторону AG и угол AGE. Аналогичным образом в следующем вспомогательном треугольнике AGK находят сторону AK и угол AKG и, наконец, в последнем из этих треугольников AKB определяют сторону AB, т. е. искомое расстояние между пунктами A и B.

Измерение расстояний таким методом называется **триангуляцией**. Впервые триангуляция в грандиозных масштабах была проведена для определения дуги Парижского меридиана между параллелями Дюнкерха и Барселоны.

Все необходимые измерения и вычисления были начаты в 1780 г. крупнейшими математиками Парижской академии наук и продолжались около 20 лет. Одна сорокамиллионная часть длины Парижского меридиана сначала и была названа метром и положена в основу метрической десятичной системы. Отметим, что при решении треугольников были сделаны соответствующие поправки на кривизну поверхности Земли (сферические треугольники).

В России в еще более грандиозных размерах впервые была проведена триангуляция известным астрономом В. Я. Струве (1793—1864) в Финляндии и в Прибалтийских губерниях. Измеренная при этом дуга меридиана составила 25°20′. В триангуляционную сеть вошло 258 треугольников, для которых в разных пунктах было измерено 10 базисов (лишние базисные отрезки являлись контрольными отрезками), и также при решении треугольников были сделаны поправки на кривизну поверхности Земли.

3. Навигационные задачи

а) Капитану корабля X (рис. 76) надо определить расстояние до гавани A. С этой целью он пеленгует (определяет) с помощью особого радиоаппарата направления на га-

---

[1] Мы решаем задачу в предположении, что выбранные нами на местности точки C, D, E, F, G, H, K расположены в одной горизонтальной плоскости, в противном случае решение задачи будет более сложным.

вань A и на сигнальную станцию C, относительное положение которых ему известно по карте.

Результаты пеленгования оказываются следующими:

$$\angle AXC = X_1 \approx 25°,6,$$

$$\angle CXN = X_2 \approx 148°,2,$$ где SN — направление по меридиану к северному полюсу.

Карта показывает, что $AC = l \approx 31,0$ *км*,

$$\angle ACN = C \approx 167°,8.$$

Затем для определения искомого расстояния производятся соответствующие расчеты[1], основанные на решении треугольника ACX.

В треугольнике ACX известна сторона $AC = l$ и все углы. Действительно, $XN \parallel CN$, следовательно,

$$\angle XCA = C - (180° - X_2) \approx 136°$$

$$A = 180° - (X_1 + 136°) \approx 18°,4.$$

Изобразим от руки треугольник ACX (рис. 77) и проведем в нем $CB \perp AX$, тогда $AX = AB + BX$.

Но $AB = l \cos A$, $BX_1 = \frac{BC}{\operatorname{tg} X_1}$, $BC = l \sin A$, следовательно,

$$AX = l \cos A + \frac{l \sin A}{\operatorname{tg} X_1} = l\left(\cos A + \frac{\sin A}{\operatorname{tg} X_1}\right).$$

Подставив данные, получаем:

$$AX \approx 31,0 \left(\cos 18°,4 + \frac{\sin 18°,4}{\operatorname{tg} 25°,6}\right) \approx 49,8 \text{ (км)}.$$

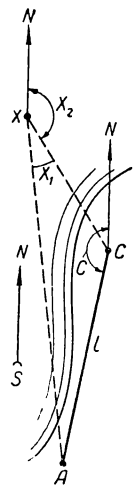


Рис. 76

б) Для определения места нахождения, курса и скорости корабля X_1 на него определили направление с помощью радиопеленгаторов одновременно из двух пунктов A и B, затем то же самое сделали еще раз спустя $t = 30$ минут (рис. 78). Результаты первого наблюдения оказались следующими:

$$\angle BAX_1 = A_1 \approx 85°30',$$

$$\angle ABX_1 = B_1 \approx 46°12'.$$

---

[1] Следует заметить, что в современных условиях техника радиолокации ушла так далеко вперед, что расстояние от корабля до гавани можно определять (с некоторой точностью) и без сигнальной станции, при этом все необходимые расчеты выполняются автоматически и почти мгновенно.

Результаты второго наблюдения следующие:

$$\angle BAX_2 = A_2 \approx 62°0',$$
$$\angle ABX_2 = B_2 \approx 60°18'.$$

Затем произвели расчеты, учтя, что $AB = l \approx 59{,}5$ *км*. Это можно сделать следующим образом.

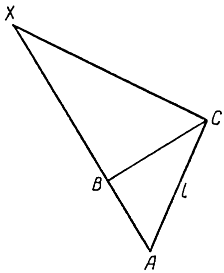


Рис. 77

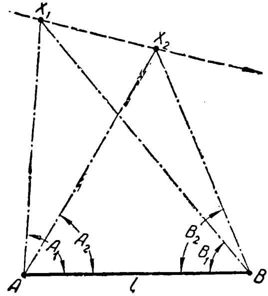


Рис. 78

Решая треугольник ABX_1 по стороне l и прилежащим к ней углам A_1 и B_1 (см. § 16,1), найдем $AX_1 \approx 57{,}5$ *км*.

Затем решаем аналогичным путем треугольник ABX_2 по стороне l и прилежащим к ней углам A_2 и B_2, находим $AX_2 \approx 61{,}1$ *км*.

Наконец, решаем треугольник AX_1X_2 по двум сторонам AX_1 и AX_2 и углу между ними $X_1AX_2 = A_1 - A_2 \approx 23°30'$ (см. § 16, п. II), находим:

$$X_1X_2 \approx 24{,}4 \text{ км и } \angle AX_1X_2 \approx 70°0'.$$

В заключение определяем скорость корабля:

$$v = \frac{X_1X_2}{t} \approx \frac{24{,}4 \text{ км}}{0{,}5 \text{ час}} \approx 48{,}8 \text{ км/час} \approx 49 \text{ км/час}.$$

На практике своевременно делаются поправки на сферичность рассматриваемых треугольников.

4. Задачи из землемерной практики

а) Через данную точку C надо провешить прямую, параллельную недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 79).

Решение. 1) Измеряем $CD = l$ (базис).

Измеряем углы: $\angle ACD = C_1$, $\angle ACB = C_2$,

$$\angle ADC = D_1 \text{ и } \angle BDC = D_2.$$

3) Решаем треугольник ACD по стороне l и прилежащим к ней углам C_1 и D_1 (см. § 16, 1), находим AC.

4) Аналогично решаем треугольник BCD, находим BC.

5) Решаем треугольник ABC по двум сторонам AC и BC и углу между ними C_2, находим $\angle CAB = A$.

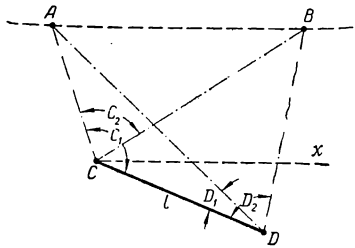


Рис. 79

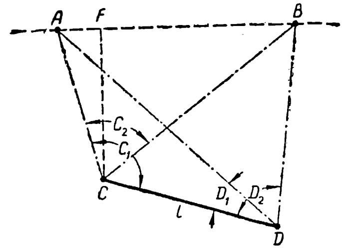


Рис. 80

6) Строим угол $ACX = 180° - A$, получаем искомое направление CX, параллельное прямой AB.

б) Через точку C надо провешить перпендикуляр к недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 80).

Решение. Первые пять шагов те же, что и в предыдущей задаче.

Затем строим $\angle ACF = 90° - A$, получаем искомое направление CF, перпендикулярное прямой AB.

в) Измерить расстояние от точки C до недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 80).

Решение. Повторяем шаги 1, 2, 3, 4, 5 в решении задачи а). Затем из прямоугольного треугольника ACF находим искомое расстояние: $CF = AC \cdot \sin A$.

г) Через данную точку G надо провешить прямую, которая проходит через точку C пересечения двух прямых AD и BF, полагая, что из пункта G не видно точки C (рис. 81).

Решение. 1) Провешиваем через точку G произвольную прямую AB.

2) Измеряем $AB = l$, $\angle DAB = \alpha$ и $\angle FBA = \beta$.

3) Решаем треугольник ABC по стороне $AB = l$ и прилежащим к ней углам A и B, находим AC.

4) Измеряем $AG = p$.

5) Решаем треугольник ACG по двум сторонам AG и AC и углу между ними α, находим угол AGC, определяющий искомое направление из G на C.

Упражнения по всем разделам книги

1. Клин B опирается щекой на клин A с углом α (рис. 82) и может двигаться в вертикальном направлении. На сколько подымется клин B кверху, если клин A подвинуть влево на a *см*?

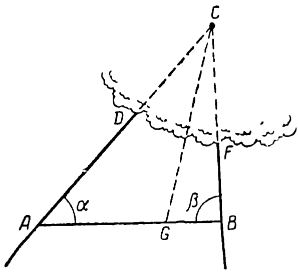


Рис. 81

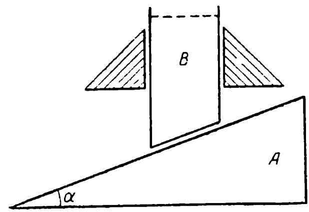


Рис. 82

2. Железнодорожный шлагбаум $AB \approx 8{,}0$ *м* вращается вокруг оси B (рис. 83). Найти формулу, которой выражается закон изменения расстояния конца A шлагбаума от поверхности Земли при его поднятии, если высота опорных столбов BE и CD равна 1,5 *м*. Исследовать полученную формулу.

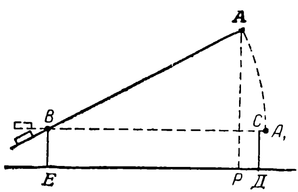


Рис. 83

(Ответ: $AP = 1{,}5 + 8{,}0 \sin\alpha$, где $\alpha = \angle A_1BA$.)

3. Шар скатывается по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha \approx 25°$ за 8 секунд. Найти длину наклонной плоскости и скорость шара в конце спуска.

(Ответ: $l \approx 140$ *м*, $v \approx 34$ *м/сек*.)

4. Шар, скатывающийся по наклонной плоскости длиной в 125 *м*, должен приобрести в конце движения скорость 42 *м/сек*. Каким должен быть угол наклона плоскости?

(Ответ: 46°.)

5. Чтобы попасть со станции A на завод B, надо проехать 3,5 *км* проселочной прямой дорогой до шоссе MN, которое с ней встречается под углом 69°, а затем, проехав далее по шоссе 1,8 *км*, свернуть на проселочную прямую дорогу, встречающую шоссе с другой стороны под углом в 37°

(см. рис. 84), и по ней ехать еще 5,0 *км*. Какая экономия в пути будет после строительства прямой дороги от станции до завода?

(Ответ: 6,4 *км*.)

6. В 8 час. из гавани вышел пароход по курсу 10°СВ; через полчаса он изменил направление на 12° восточнее и пройдя еще $^3/_4$ часа, взял свой постоянный курс — 72°СВ.

Из той же гавани в 9 час. вышел катер и, двигаясь по прямолинейному пути, в 10 час. 30 мин. догнал пароход. Определить курс и среднюю скорость катера, если пароход шел с постоянной скоростью 30 *км/час*.

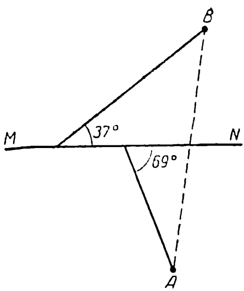


Рис. 84

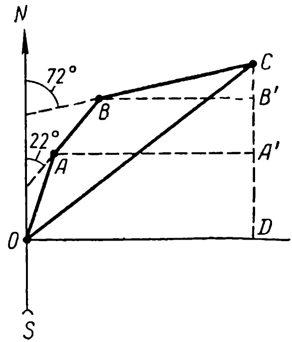


Рис. 85

Указание к решению. Курсом корабля называют угол между меридианом и направлением движения корабля, отсчитываемый по часовой стрелке от меридиана. Курс 10° СВ означает, что корабль идет на северо-восток под углом в 10° к меридиану.

На рисунке 85 дана схема движения корабля и катера. Гавань обозначена буквой O, а направление меридиана указано стрелкой SN.

Ход решения задачи: $\operatorname{tg} x = \frac{OD}{DC}$, где x — курс катера;

$$OD = OA \cdot \sin 10° + AB \cdot \sin 12° + BC \cdot \sin 72°;$$

$$DC = OA \cdot \cos 10° + AB \cdot \cos 12° + BC \cdot \cos 72°.$$

Скорость катера $v = \frac{OC}{t}$, где $t = 1{,}5$; $OC = \frac{CD}{\sin x}$ и т. д.

7. На рисунке 86 изображена часть топографической карты с масштабом 1 *см*=100 *м* и расстояниями между горизонталями в 5 *м*. Найти действительное расстояние (т. е. на местности) в метрах и крутизну склонов в градусах между пунктами: A и B, C и D, E и F, K и L. Каким отрезком изобразится на этой карте участок прямолинейного пути в 170 *м* по скату с уклоном в 23°?

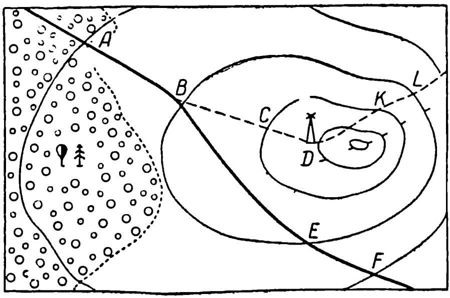


Рис. 86

8. Требуется устроить канатную передачу грузов между пунктами A и B, расположенными по разные стороны реки. Для определения расстояния AB вдоль берега отмерили базис AC длиной в 200 *м* и измерили углы BAC и BCA, которые оказались равными соответственно 74°30′ и 44°15′. Найдите длину AB.

(Ответ: 159 *м*.)

9. Чтобы определить расстояние между двумя пунктами A и B, разделенными краем леса, выбрали вне леса точку C и измерили $AC \approx 340$ *м*, $BC \approx 460$ *м* и угол $ACB \approx 116°$. Найдите длину AB.

(Ответ: 680 *м*.)

10. На тело действуют под углом $\alpha = 52°$ две силы $P_1 \approx 25$ *кг* и $P_2 \approx 48$ *кг*. Определить величину и направление результирующей силы.

(Ответ: 67 *кг*.)

11. Силу $P \approx 840$ *кг* надо разложить на две силы $P_1 \approx 734$ *кг* и $P_2 \approx 550$ *кг*. Под каким углом к силе P должны действовать силы P_1 и P_2?

(Ответ: 109°.)

12. В горном деле встречаются задачи следующего типа: с одной и той же стены шахты на одинаковой высоте пробиты два штрека, входы которых отделены друг от друга на

4 *м* (рис. 87). Первый штрек имеет длину 350 *м* и направлен перпендикулярно стене. Длина второго штрека равна 280 *м*, и он направлен под углом 125° к стене шахты. Концы этих

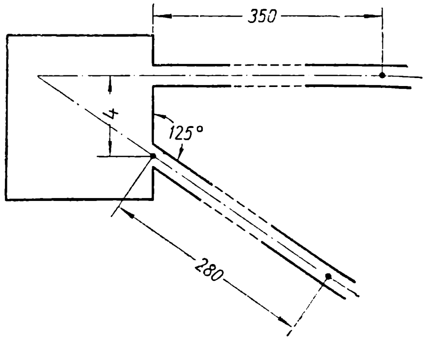


Рис. 87

штреков должны быть соединены третьим штреком. Требуется определить длину этого связывающего штрека.

(Ответ: 205 *м*.)

13. Для определения расстояния между Луной и Землей астроном Лаланд наблюдал в 1752 г. Луну одновременно из двух пунктов, расположенных почти на одном меридиане, из Берлина, лежащего на 52°31′ с. ш., и Кейптауна, лежащего на 33°56′ ю. ш. При этом было установлено, что в Берлине угол между направлением в зенит и направлением на определенную точку Луны равен 32°3′, а такой же угол в Кейптауне равен 55°40′. Найдите искомое расстояние, используя эти данные и величину радиуса земного шара $R \approx 6370$ *км*.

14. Если на горизонтальной поверхности Земли предполагают рассадить деревья на расстоянии $a = 4{,}5$ *м* (рис. 88), то на каком расстоянии одну от другой следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма, имеющему наклон к горизонту $\alpha \approx 21°$?

(Ответ: 4,8 *м*.)

15. Чтобы выпилить из цилиндрического (без конусности) бревна прямоугольную балку наибольшего сопротивления, производят разметку следующим образом: с помощью центроискателя проводят на торце бревна диаметр AC (рис. 89), делят его на три равные части, из точек деления E и F проводят перпендикуляры EB и FD к диаметру

AC и точки пересечения перпендикуляров с окружностью соединяют прямыми линиями AB, BC, CD и DA. В теории сопротивления материалов доказывается, что такая балка, поставленная на ребро AB, отличается наибольшим сопротивлением.

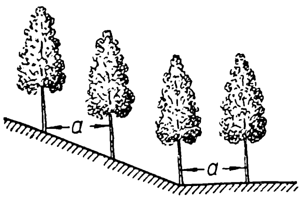


Рис. 88

Определите размеры поперечного сечения $ABCD$ балки наибольшего сопротивления, которую можно выпилить из цилиндрического бревна с диаметром $D \approx 250$ *мм*. Вычислите углы, которые образуют стороны сечения с диагональю AC.

16. Чтобы определить площадь участка земли, имеющего форму пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$, выбрали на участке некоторую точку M, измерили расстояния от точки M до вершин участка и углы, образованные направлениями из точки M на вершины участка.

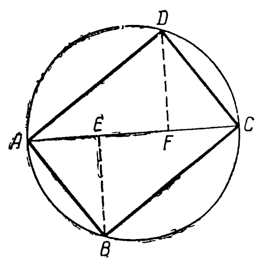


Рис. 89

Результаты измерения оказались следующими:

$A_1M \approx 340$ *м*, $A_2M \approx 420$ *м*, $A_3M \approx$ ≈ 280 *м*, $A_4M \approx 310$ *м*,

$A_5M \approx 290$ *м*, $\angle A_1MA_2 \approx 60°$,

$\angle A_2MA_3 \approx 47°$, $\angle A_3MA_4 \approx 123°$, $\angle A_4MA_5 \approx 59°$ и $\angle A_5MA_1 \approx 71°$.

Найти площадь этого участка.

Указание. При определении площадей треугольников, на которые разлагается данный многоугольник, можно воспользоваться формулами, выведенными в § 17, упражнение 4.

(Ответ: 22,6 *га*.)

17. Две точки A и B, расстояние между которыми равно 15,0 *см*, удалены от плоского зеркала соответственно на 5,0 *см* и 7,0 *см*. Определить угол падения луча, идущего от A и отброшенного зеркалом в направлении к B.

(Ответ: 51°.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучив новый вычислительный прием решения треугольников и фигур, сводимых к ним, основанный на теории тригонометрических функций острого угла, можно ли сказать, что вы знаете тригонометрию. Нет, нельзя. Вами изучена лишь начальная стадия этого предмета, в которой он находился примерно до XVI века.

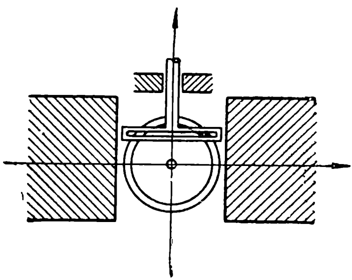


Рис. 90

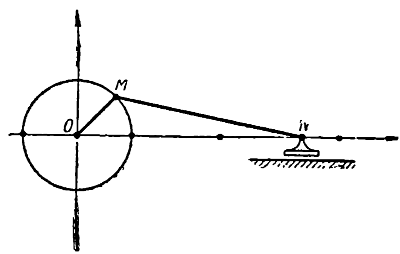


Рис. 91

Современные инженеры и техники, создающие различные машины и механизмы, в которых происходит преобразование круговых движений в прямолинейные и обратно (на рисунках 90 и 91 изображены модели простейших механизмов, превращающих круговые движения в прямолинейные), должны знать теорию тригонометрических функций любых углов и дуг меньших и больших 90°, 180° и 360°, положительных и отрицательных. Такая теория тригонометрических функций была развита в трудах Петербургского академика Леонарда Эйлера (1707—1783) и изложена в доступной форме для учащихся профессором М. Е. Головиным (1756—1790), племянником знаменитого академика Михаила Васильевича Ломоносова.

В настоящее время вы можете продолжить изучение теории тригонометрических функций по любой из книг, рекомендованных учителем. Эта теория вооружит вас еще более эффективными вычислительными приемами решения самых различных задач по геометрии и алгебре, физике и механике, геодезии и астрономии, технике и навигации. В частности, для многих задач, решенных в этой книге, вы найдете более краткие и наиболее удобные решения.

Таблица трехзначных приближенных значений синусов и косинусов углов с шагом в один градус

A	sinA	B	A	sinA	B	A	sinA	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	cosB	B	A	cosB	B	A	cosB	B

Таблица трехзначных приближенных значений тангенсов углов с шагом в один градус

A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
12	4 сверху	$AB \approx A_1 B_1 \cdot k \approx$ $\approx 4,25 \times 10\,000 \approx$	$AB \approx A_1 B_1 k \approx$ $\approx 4,25 \times 20\,000 \approx$
»	5 сверху	$AC \approx A_1 C_1 \cdot k \approx$ $\approx 3,85 \times 10\,000 \approx$	$AC \approx A_1 C_1 \cdot k \approx$ $\approx 3,85 \times 20\,000 \approx$
57	18 снизу	на расстоянии $\frac{3}{2}$	на расстоянии $\frac{2}{3}$
81	2 снизу	если $C \geqslant 90^\circ$	если $C \leqslant 90^\circ$
89	3 снизу	$ОД = OA \cdot \text{Sin } 10^\circ +$ $+ AB \cdot \text{Sin } 12^\circ + \ldots$	$ОД = OA \cdot \text{Sin } 10^\circ +$ $+ \text{AB} \cdot \text{Sin } 22^\circ + \ldots$
»	2 снизу	$ДC = OA \cdot \text{Cos } 10^\circ +$ $+ AB \cdot \text{Cos } 12^\circ + \ldots$	$ДC = OA \cdot \text{Cos } 10^\circ +$ $+ AB \cdot \text{Cos } 22^\circ + \ldots$
»	1 снизу	$OC = \frac{СД}{\text{Sin} x} \cdots$	$OC = \frac{СД}{\text{Cos} x} \cdots$

Зак. № 30 Тригонометрия острого угла.

Цена 1 р. 15 к.