Тридцать лет спустя[1])

А. ГЕЙТИНГ

Амстердамский университет. Амстердам, Нидерланды

В сентябре 1930 г. редакция журнала „Erkenntnis“ организовала в Кенигсберге симпозиум, на котором впервые встретились представители логицизма, формализма и интуиционизма. Доклады об этих трех направлениях сделали соответственно Карнап, Нейман и я (1). Участники симпозиума серьезно пытались понять друг друга, но каждый был убежден, что именно его точка зрения единственно правильная, что никакая другая не имеет права называться математикой и что его точка зрения обязательно победит в недалеком будущем.

Точки зрения были ясными и четкими. Карнап формулировал основные положения логицизма следующим образом: математические понятия можно свести к логическим понятиям с помощью явных определений; математические теоремы могут быть получены из логических аксиом с помощью чисто логических выводов. По поводу основ логики он ссылался на Рассела и Уайтхеда. В дискуссии к этому вопросу вернулся Ган; по его мнению, теоремы логики являются тавтологиями; члены логического тождества выражают один и тот же факт разными способами. Нейман защищал более радикальную формалистическую точку зрения, чем точка зрения Гильберта; он назвал математику комбинаторной игрой в символы. Я же выразил убеждение, что математическая интуиция не оставляет нерешенной ни одной из основных проблем современной математики.

Проблемы, которые еще предстояло решить, были скорее практического, чем принципиального характера. В наименьшей степени это относилось к логицизму, где Карнап подчеркивал трудность исключения аксиомы сводимости без обращения к рамсеевскому платонизму. В формалистической математике основной проблемой оставались доказательства непротиворечивости, в интуиционистской математике — дальнейшее развитие той части математики, которая в данный момент выходит на первый план. Каждый из выступавших хотел построить конструктивную математику. Для Карнапа конструктивность состояла в явном определении математических понятий на базе основных понятий логики в противоположность введению математических понятий посредством аксиом.

[1]) H e i t i n g A.. After thirty years, стр. 194 — 197.

Сравним теперь ситуацию 1930 г. с нынешней. Дух мирного сотрудничества одержал победу над духом непримиримой борьбы. Ни одно из направлений теперь не претендует на право предоставлять единственно верную математику. Философское значение исследований по основаниям математики состоит, по крайней мере частично, в разделении формальных, интуитивистских, логических и платонистских элементов в структуре классической математики и в точном определении областей действия и ограничений этих элементов.

Появилась новая форма математики, в которой мы в каждый момент знаем, работаем ли мы на интуиционистской основе или нет, какая часть работы является чисто формалистической и какие платонистские допущения мы делаем. В этой связи я напомню замечание, сделанное в ходе дискуссии Ганом, а именно, что он считает интуиционизм и формализм важными областями исследования внутри математики, а не по основаниям математики. Крейсел в работе 1953 г. [2] делает сходное замечание: „Некоторые математики отдают предпочтение определенным методам своей науки и не любят других“. По-видимому, и Ган и Крейсел считают математику чем-то заранее данным, а исследования по основаниям — особой дисциплиной внутри математики. По моему мнению, это означает переворачивать вопрос с ног на голову.

Ни одна из точек зрения математики не очерчена сейчас так ясно, как это было в 1930 г. О формализме и логицизме я скажу кратко. Формализм наименее уязвим, но для решения математических проблем он нуждается в какой-то форме интуитивистской математики. Что касается логицизма, то в нем имеется много конкурирующих между собой аксиоматических систем логики и теории множеств.

Понятие интуитивной ясности в математике само не является интуитивно ясным. Можно даже построить нисходящую шкалу степеней очевидности. Высшую степень имеют такие утверждения, как 2+2=4. Однако 1002+2=1004 имеет более низкую степень; мы доказываем это утверждение не фактическим подсчетом, а с помощью рассуждения, показывающего, что вообще $(n+2)+2=n+4$. Такие общие утверждения о натуральных числах принадлежат к следующей степени очевидности. Они уже имеют характер импликации: „Если построено натуральное число n, то можно осуществить конструкцию, выражаемую равенством $(n+2)+2=n+4$“. Эта степень может быть формализована в исчислении со свободными переменными. Я не буду пытаться перечислить по порядку другие степени; достаточно упомянуть некоторые понятия, введение которых понижает степень очевидности.

1) Понятие типа ω или следования по порядку в форме, в которой оно входит в определение конструируемых порядковых чисел.

2) Понятие отрицания, по которому задаются гипотетические конструкции, которые потом оказываются невозможными.

3) Теория квантификации. Интерпретация самих кванторов не является проблемой, но проблемой является использование выражений с кванторами в логических формулах.

4) Введение бесконечно продолжающихся последовательностей (последовательности выбора, произвольные функции).

5) Понятие вида (species); недостатки этого понятия обусловлены неопределенностью понятия свойства. Натуральные числа образуют вид; все виды не образуют вида. Не ясно, образуют ли вид все виды натуральных чисел; поэтому я предпочитаю не пользоваться этим понятием.

Нельзя отрицать, что конструктивность сейчас ценится значительно ниже, чем в 1930 г. С другой стороны, благодаря созданию теории рекурсивных функций понятие конструктивности стало более точным. Одна из трудностей, с которыми столкнулся Брауэр при попытке построить конструктивную теорию континуума, состояла в том, что понятие последовательности натуральных чисел, определенной некоторым законом, совершенно не поддавалось обработке. Если бы рекурсивные функции были известны раньше, он, возможно, не ввел бы понятия последовательности выбора, а это, по-моему, было бы печально.

Понятие рекурсивной функции, введенное для уточнения понятия вычислимой функции, многими математиками понимается так, что оно теряет всякую связь с вычислимостью, поскольку встречающийся в определении рекурсивной функции квантор существования эти математики понимают неконструктивно.

Разумеется, каждое конечное множество примитивно-рекурсивно. Но является ли рекурсивным каждое подмножество конечного множества? Кто может вычислить гёделевский номер характеристической функции множества показателей, не удовлетворяющих теореме Ферма и меньших чем 10^{10}, или множества

$$P_n=\{x|x < n\&(Ey)T_1, (x, x, y)\}.$$

где n — заданное натуральное число? Ответ зависит от того, какая принята логика. Если понимать рекурсивность неконструктивно, то P_n будет противоречащим примером для тезиса, обратного тезису Чёрча. Авторы многих последних статей и книг (см., например, [3]) отказались от хорошего обычая проводить различие между теми результатами теории рекурсивных функций, которые получены с помощью интуиционистской логики, и теми, для доказательства которых необходима классическая логика. Я сожалею об этом, поскольку это затемняет связь данной теории с понятием эффектной вычислимости.

Теория рекурсивных функций сделала более точным понятие вычислимой функции, но не понятие вычислимого числа. Утверждается, однако, что P_n рекурсивно для любого n. Очевидно, гёделевский номер P_n есть функция от n, скажем $\varphi(n)$; естественно спросить, рекурсивна ли эта функция. С конструктивной точки зрения функция вполне определена только тогда, когда она вычислима. Аналогично в теории рекурсивных функций естественно считать, что функция вполне определена только тогда, когда она рекурсивна. Тогда утверждение, что $P_n(x)$ рекурсивно для каждого n, означает, что $\varphi(n)$ рекурсивно.

Аналогичная трудность возникает по отношению к определению рекурсивного вещественного числа. Имеется несколько определений, и многими доказана их эквивалентность, хотя Брауэр [4] с конструктивной точки зрения доказал в 1920 г., что они не эквивалентны.

Рассмотрим два из этих определений.

1. Вещественное число a последовательно-рекурсивно (п-рекурсивно), если оно является пределом рекурсивной рекурсивно сходящейся последовательности рациональных чисел; точнее, если оно задано последовательностью $\{a_n\}$, где $a_n = f(n)/2n$ и $(\forall p)(\mid a_{m+p}$ —
— $a_m \mid < 2^{-n})$ при $m = g(n)$, f и g рекурсивны.

2. Вещественное число a десятично-рекурсивно (д-рекурсивно), если оно задано десятичным разложением, в котором n-й десятичный знак есть рекурсивная функция $h(n)$ от n.

Мостовский (5) доказал, что соответствующие определения для рекурсивных последовательностей вещественных чисел не эквивалентны. Аналогами для определений 1 и 2 являются:

1а. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ п-рекурсивна, если имеются рекурсивные функции $f(k, n)$, $g(k, n)$, такие, что a_k задано последовательностью $\{f(k, n)\ 2^{-n}\}$, а $(\forall p)(\mid a_{k,m+p}$ —
— $a_{km} \mid < 2^{-n})$ при $m = g(n)$. (Определение Мостовского отлично от этого, но рассуждение применимо и к его определению.)

2а. Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}$ д-рекурсивна, если n-й десятичный знак десятичного разложения a_k задан рекурсивной функцией $h(n, k)$.

Я возражаю против утверждения. что определения 1а и 2а — не аналоги для определений 1 и 2. Из условия, что функция $h(n, k)$ рекурсивна по обеим переменным, следует, что ее гёделевский номер как функция от n есть рекурсивная функция от k. Это — условие вычислимости, не постулировавшееся в определении 2. Итак, определение 2а является аналогом для определения 2 только в случае, если последнее понимается конструктивно; но тогда определение 2 не эквивалентно определению 1.

Выразим то же самое иначе. Эквивалентность определений 1 и 2 означает, в частности, что по данным f и g можно найти h. Естественное понимание этого утверждения состоит в том, что h рекурсивна относительно f и g; противоречащий пример Мостовского показывает, что это не так.

Марков [6] занимает промежуточную позицию. Он отвергает платонистские допущения, но считает, что алгоритм π применим к слову *P*, если невозможно, чтобы процесс применения π к *P* был бесконечен. Это приводит к дополнению интуиционистской логики правилом

$$(\forall x)\,(A \vee \neg A)\ \&\ \neg\,(\forall x)\,\neg\,A \rightarrow (\exists x)\,A.$$

Интересно было бы знать, какие из результатов его школы не зависят от этого допущения.

Как я уже говорил, конструктивность сейчас котируется ниже, чем 30 лет назад. Но эффективность является первоначальным понятием, так как доказательство только тогда есть доказательство, когда оно эффективно.

Сказанное мной здесь является, кроме всего прочего, моим ответом на тезис Чёрча. Если определить понятие вычислимой функции через рекурсивную функцию, то для понимания определения последнего понятия потребуется понятие вычислимости.

Поэтому определение рекурсивности через вычислимость содержит порочный круг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carnap R.. Die logizislische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis,* 2 (1931), 91—105; Heyting A., Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Ibid.,* 106—115; von Neumann J., Die Formalistische Grundlegung der Mathematik, *Ibid.,* 116—121.
2. Kreisel G., A variant to Hilbert's theory of the foundations of arithmetic. *British J. Phil, of Science,* 4 (1953), 107-129.
3. Devis M., Computability and Unsolvability, New York — Toronto — London, 1958.
4. Brouwer L. E. J., Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam,* 23 (1920), 955—965.
5. Mostowski A., On computable sequences, *Fundamenta Math.,* 44 (1956), 37—51.
6. Марков А. А., О непрерывности конструктивных функций. *Успехи матем. наук,* IX, 3 (61) (1954), 226-230.