Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Уральский
энергетический
институт

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Теория функций комплексного переменного

Учебное пособие

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов вуза, обучающихся по техническим направлениям
подготовки и специальностям*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2018

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73
Т33

Авторы: Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова, Л. В. Корчемкина, В. И. Зенков

Рецензенты: кафедра прикладной математики и программирования ЮУрГУ (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, доц. *А. А. Замышляева*); д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. ИММ УрО РАН *Ю. И. Бердышев*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Н. Сесекин*

Т33 **Теория функций комплексного переменного** : учеб. пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова [и др.]. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. — 128 с.
ISBN 978-5-7996-2472-9

В учебном пособии представлены основные понятия и теоремы теории функций комплексного переменного. Пособие включает следующие темы: основные элементарные функции и их свойства; предел, непрерывность, дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного; ряды в комплексной области; теория вычетов; конформные отображения. Рассмотрены решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и задания к расчетной работе.

Предназначается для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям.

Библиогр.: 7 назв. Рис. 2.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73

Учебное издание

Гредасова Надежда Викторовна, **Желонкина** Наталья Игоревна, **Корешникова** Мария Анатольевна, **Корчемкина** Людмила Викторовна, **Зенков** Виктор Иванович

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Подписано в печать 10.08.2018. Формат 70×100 1/16. Цифровая печать.
Усл. печ. л. 10,32. Уч.-изд. л. 5,6. Тираж 50 экз. Заказ 232.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41, e-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13, факс: 8 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ISBN 978-5-7996-2472-9

1. Комплексные числа

1.1. Основные понятия. Формы записи комплексных чисел

Комплексное число — это выражение вида

$$z = z(x, y) = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Мнимой единицей называется $z = \sqrt{-1}$.

Число $x = \operatorname{Re} z$ называется ***действительной частью*** комплексного числа z, а число $y = \operatorname{Im} z$ называется ***мнимой частью*** z.

Если $x = 0$, то $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым числом***.

Если $y = 0$, то $x + 0i = x$ отождествляется с действительным числом.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ ***равны***, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся знаком мнимой части, называются ***комплексно-сопряженными***.

Комплексное число $z = x + iy$ на плоскости Oxy можно изобразить точкой $P(x, y)$. И наоборот, каждую точку $P(x, y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$. Плоскость Oxy будет называется ***комплексной плоскостью***, ось Ox — ***действительной осью***, ось Oy — ***мнимой осью***.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать радиус-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ (рис. 1.1).

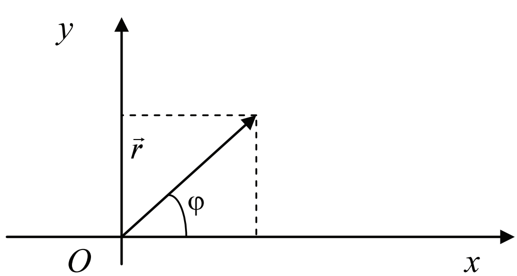

Рис. 1.1

Длина вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ называется ***модулем комплексного числа*** $z = x + iy$ и обозначается $|z|$ или *r*. Модуль комплексного числа определяется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Замечания:

1) $|z - z_0|$ — расстояние от точки z до точки z_0 ;

2) $|z - z_0| = R$ — уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом *R*;

3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ — геометрическое место точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2 .

Пример. Дать геометрическое описание всех точек $|z + i| < 2$ комплексной плоскости, удовлетворяющих следующему соотношению:

$$3 \le |z + 2 - i| < 5 .$$

Решение

Представим данное выражение в виде двух неравенств:

$$\begin{cases} |z - (2 + i)| \ge 3, \\ |z - (2 + i)| < 5. \end{cases}$$

Первое неравенство геометрически представляет собой множество точек комплексной плоскости, лежащих вне окружности с центром в точке $z_0 = -2 + i$ и радиусом $R_1 = 3$, причем точки данной окружности являются решением данного неравенства.

Второе неравенство геометрически представляет собой множество точек комплексной плоскости, лежащих внутри окружности с центром в точке $z_0 = -2 + i$ и радиусом $R_2 = 5$, причем точки данной окружности не являются решением данного неравенства.

В итоге данное по условию соотношение определяет множество точек кольца с центром в точке $(-2;1)$; радиус большей окружности $R_2 = 5$, а меньшей — $R_1 = 3$, причем точки меньшей окружности исключаются.

Угол между радиус-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ и положительным направлением оси *Ox* называется ***аргументом комплексного числа*** $z = x + iy$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \ne 0$ является многозначной величиной и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$ называется ***главным значением аргумента*** и обозначается $\arg z$ (в качестве главного значения аргумента иногда берут величину, заключенную в промежутке $[0; 2\pi)$).

Все значения аргумента определяются формулой

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен.

Главное значение аргумента комплексного числа определяется по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Имеют место соотношения

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x},\ \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Формы записи комплексных чисел

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Алгебраическая форма записи комплексного числа — это выражение вида

$$z = z(x, y) = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Рассмотрим модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ (рис. 1.1). Тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Полученное выражение называется ***тригонометрической формой*** записи комплексного числа.

Так как

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z),$$
$$\sin\varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z),$$

то при переходе от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической достаточно определить главное значение аргумента.

3. Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полученное выражение называется показательной (экспоненциальной) формой записи комплексного числа.

Пример. Представить комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение

Найдем модуль и аргумент комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Тригонометрическая форма будет иметь вид

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Показательная форма будет иметь вид

$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

1.2. Действия над комплексными числами

1. ***Суммой*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Складываются действительные и мнимые части.

Пример. Вычислить $(2+3i)+(-1+i)$.

Решение: $(2+3i)+(-1+i) = 2-1+3i+i = 1+4i$.

2. ***Разностью*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Вычитаются действительные и мнимые части.

3. ***Произведением*** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Умножение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ осуществляется как умножение многочлена на многочлен.

Пример. Вычислить $(3+2i)(-2+5i)$.

Решение:

$$(3+2i)(-2+5i) = 3\cdot(-2) + 3\cdot 5i + 2i\cdot(-2) + 2i\cdot 5i = -6+15i-4i+10i^2 =$$

$$= -6+15i-4i+10i^2 = -16+11i.$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрическое форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то произведение данных чисел будет определяться формулой

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Данное правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Данная формула называется ***формулой Муавра***.

Пример. Вычислить $(-1-i)^{10}$.

Решение. Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z=-1-i$:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Подставим найденные данные в формулу Муавра:

$$(-1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left[\cos\left(10\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(10\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right] =$$

$$= 2^5\left[\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) - i\left(\frac{15\pi}{2}\right)\right] = 32\left(-\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i.$$

4. ***Частным*** от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Деление комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ осуществляется умножением числителя и знаменателя на сопряженное комплексное число к знаменателю.

Пример. Вычислить $\dfrac{3+2i}{-2+i}$.

Решение:

$$\frac{3+2i}{-2+i} = \frac{(3+2i)\cdot(-2-i)}{(-2+i)\cdot(-2-i)} = \frac{-6-3i-4i-2i^2}{(-2)^2-i^2} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - i\,\frac{7}{5}.$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрическое форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то формула деления будет иметь вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

5. ***Корнем n-й степени из комплексного числа*** z называется комплексное число c, удовлетворяющее равенству $c^n = z$.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,1,2,\ldots,n-1$, $\varphi=\arg z$.

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{-32}$.

Решение. Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z=-32=-32+i\cdot 0$:

$$|z|=\sqrt{(-32)^2+0^2}=32,\ \varphi=\pi.$$

Подставим в формулу извлечения корня n-й степени из комплексного числа, получим

$$\sqrt[n]{-32}=\sqrt{32}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, 3, 4, получим

$$k=0,\ z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

$$k=1,\ z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$k=2,\ z_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$k=3,\ z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right),$$

$$k=4,\ z_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

Пример. Решить уравнение $z^2+z+1=0$.

Решение. Найдем дискриминант: $D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$. Вычислим корни квадратного уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}i.$$

В итоге получим

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Представить в тригонометрической и показательной формах:

$$a)\, z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};\; b)\, z_2 = -1 - i\sqrt{3};\; c)\, z_3 = 4i\,.$$

Ответ: $a)\, z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}i};$

$$b)\, z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{-2\pi}{3}i};\quad c)\, z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{\frac{\pi}{2}i}\,.$$

2. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 - 3i,\; z_2 = -4 + 5i$. Вычислить:

$$a)\, z_1 + z_2;\; b)\, z_1 - z_2;\; c)\, z_1 \cdot z_2;\; d)\, \frac{z_1}{z_2}\,.$$

Ответ: $a) - 2 + 2i;\; b) 6 - 8i;\; c) 7 + 22i;\; d) -\frac{23}{41} + i\frac{2}{41}.$

3. Вычислить:

$$a)\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{30};\; b)\left(1 + i\right)^5.$$

Ответ: $a)\, 2^{30},\; b)\; -4 - 4i.$

4. Вычислить:

$$a)\; \sqrt[3]{-8i};\; b)\; \sqrt[3]{-1 + i}\,.$$

Ответ:

$$a) 2i, \pm\sqrt{3} - i;\; b) \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 + i),\, \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),\, \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

5. Решить уравнение

$$z^2 + 4z + 5 = 0\,.$$

Ответ: $2i;\; \pm\sqrt{3} - 2 \pm i.$

2. Функции комплексного переменного

2.1. Множества на комплексной плоскости

Пусть $z = x + iy$ — комплексная переменная, где $i = \sqrt{-1}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

При изменении x и y переменная z «пробегает» некоторое множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между двумя точками определяется формулой

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|,$$

где
$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,$$

поэтому уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0 будет иметь вид

$$|z - z_0| = R,$$

а множество точек, лежащих внутри круга радиуса R с центром в точке z_0, будет задаваться неравенством

$$|z - z_0| < R.$$

Уравнение окружности можно задать параметрическим уравнением

$$z = z_0 + R\mathrm{e}^{i\varphi},\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

δ-окрестностью точки z_0 называется множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta,\ \delta > 0,$$

где z_0 — фиксированная точка.

Множество D называется ***открытым***, если всякая его точка имеет окрестность, принадлежащую множеству D (то есть целиком состоящую из точек данного множества D).

Например, множество $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ является открытым множеством.

Множество D называется ***связным***, если любые две точки из множества D можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в D.

Открытое связное множество называется ***областью***.

Примеры областей:

1) круг $|z - z_0| < R$;
2) кольцо $r < |z - z_0| < R$;
3) вся плоскость $\mathbb{C}$;
4) полуплоскость $\operatorname{Re} z > a,\ a \in \mathbb{R}$.

Множество $|z - z_0| \le R$ не является областью, так как это множество не является открытым: для точек z, для которых $|z - z_0| = R$, не существует окрестности, целиком лежащей в этом круге.

Точка z_1 называется ***граничной точкой множества*** D, если в любой окрестности z_1 найдутся как точки, принадлежащие множеству D, так и точки, ему не принадлежащие.

Множество граничных точек называется ***границей множества*** D.

Множество, состоящее из области D и всех граничных точек области D, называется ***замкнутой областью*** и обозначается $\overline{D}$.

Области на плоскости подразделяются на односвязные и многосвязные.

Область называется ***односвязной***, если ее граница состоит из одной непрерывной кривой без самопересечений (возможно, замкнутой).

Область, которая не является односвязной, называется ***многосвязной***.

В частности, многосвязная область называется ***n-связной***, если ее граница состоит из $n (n > 1)$ непересекающихся непрерывных кривых (некоторые из кривых могут вырождаться в точку).

Рассмотрим еще одну геометрическую интерпретацию комплексного числа.

Пусть S — сфера радиуса 1, касающаяся комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в точке $z = 0$, P — точка сферы, диаметрально противоположная точке O.

Возьмем произвольную точку $z \in \mathbb{C}$ и проведем луч Pz. Этот луч имеет единственную точку пересечения z со сферой S. Таким образом, каждой точке $z \in \mathbb{C}$ поставлена в соответствие точка $z \in \mathbb{C},\ z \ne P$.

Установим взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и точками сферы S, отличными от P.

Это соответствие называется ***стереографической проекцией***.

Точке P не соответствует ни одна точка из $\mathbb{C}$.

Введем в рассмотрение дополнительную (воображаемую) точку, которую назовем ***бесконечно удаленной*** и обозначим $z = \infty$.

Комплексная плоскость $\mathbb{C}$, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется ***расширенной комплексной плоскостью*** и обозначается $\overline{\mathbb{C}}$.

Каждой точке $z \in \overline{\mathbb{C}}$ соответствует единственная точка $z \in \mathbb{C}$, и наоборот.

Сфера S называется ***комплексной сферой, сферой Римана.***

2.2. Понятие функции комплексной переменной

Пусть D — некоторое множество комплексных чисел z.

Если каждой точке

$$z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$$

из множества D расширенной комплексной z-плоскости по правилу f соответствует комплексное число

$$w = u + iv,\ \ u, v \in \mathbb{R}$$

из множества E расширенной комплексной w-плоскости, то $w = f(z)$ — ***комплексная функция комплексной переменной***.

D — область определения функции комплексного переменного.

E — область значений функции комплексного переменного.

$$w = f(z) = u + vi = f(x + iy)\ ,$$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)\ ,$$

где $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),\ v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Если каждому значению $z \in D$ соответствует единственное значение $w = f(z)$, то функция комплексного переменного $w = f(z)$ называется ***однозначной функцией***. В остальных случаях — ***многозначной функцией***.

2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть задана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел:

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

Комплексное число a называется ***пределом последовательности*** $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N_0$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности будут удовлетворять неравенству

$$|\,z_n - a\,| < \varepsilon$$

при $n \geq N_0$.

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел, называется ***сходящейся последовательностью***.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Теорема. Последовательность $\{z_n = x_n + iy_n\}$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Последовательность $\{z_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для всех z_n выполняется неравенство

$$|\,z_n\,| \leq M.$$

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} t_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} t_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{t_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} t_n},\quad t_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n \neq 0.$

Пусть $w = f(z)$ определена и однозначна в окрестности точки z_0, за исключением, быть может, самой точки z_0.

Число A называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Определение предела функции комплексного переменного с использованием математической символики будет иметь вид

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, сходящейся к точке z_0, соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к одному и тому же комплексному числу A, то число A называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0.

Обозначение:

$$\lim_{n \to \infty} f(z) = A.$$

Теорема

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ имеет предел

$$A = B + iC \ (B, C \in \mathbb{R})$$

тогда и только тогда, когда в точке $(x_0 y_0)$ функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ имеют соответственно пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C.$$

Свойства пределов функций комплексного переменного:

1) $\lim\limits_{z \to z_0}(c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)$;

2) $\lim\limits_{z \to z_0}(f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)$;

3) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)}, \ \lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0.$

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\lim_{z\to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ ***непрерывна в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного, непрерывных в области D, также являются непрерывными функциями в этой области.

Функция $f(z)/g(z)$ непрерывна только в тех точках области D, для которых $g(z) \neq 0$.

Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0 = f(z_0)$, то сложная функция $F(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Пример. Доказать, что функция $f(z) = z^2$ является непрерывной при любом значении z.

Доказательство. Зафиксируем z_0. Рассмотрим разность

$$z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0).$$

Пусть $z \to z_0$. Тогда существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z| < M, |z_0| < M$, следовательно,

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < 2M|z - z_0|.$$

Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}, (\varepsilon > 0)$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta = 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{z\to z_0} z^2 = z_0^2$, то есть функция $f(z) = z^2$ непрерывна в точке z_0. Точка z_0 была выбрана произвольно, поэтому функция $f(z) = z^2$ непрерывна в любой точке.

2.4. Основные элементарные функции комплексного переменного

Показательная функция

Показательная функция определяется следующим соотношением:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Свойства показательной функции:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

2) $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$;

3) $(e^z)^n = e^{nz},\ n \in \mathbb{N}$;

4) $e^z \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^z = 0,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} e^z = \infty$;

6) показательная функция — периодическая функция с мнимым основным периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Если $x = 0,\ y = \varphi$, то получаем классическую формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция — это функция, обратная показательной функции

$$w = \mathrm{Ln}z.$$

Свойства логарифмической функции:

1) логарифмическая функция определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$;

2) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$;

3) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$;

4) $\mathrm{Ln}z^n = n\mathrm{Ln}z$;

5) $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\mathrm{Ln}z$.

Логарифмическая функция — многозначная функция, так как

$$\mathrm{Ln}z = w,\ z = re^{i\varphi},\ w = u + vi,$$

$$\mathrm{Ln}re^{i\varphi} = u + vi,$$

$$e^{u+vi} = re^{i\phi},$$

$$e^u e^{vi} = re^{i\varphi} \Rightarrow e^u = r, e^{vi} = e^{i\varphi},$$

$$u = \ln r,\quad v = \varphi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$w = \mathrm{Ln}z = u + vi = \ln r + (\varphi + 2\pi k)i,\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots$$

Итак,

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z,\ \mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \ldots$$

Главным значением $\mathrm{Ln}z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ -\pi < \arg z \le \pi.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \ldots$$

Пример. Вычислить: 1) $\ln(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Найдем модуль комплексного числа $z = -1$ и $\arg(-1)$:

$$|z| = 1,\ \arg(-1) = \pi.$$

1) $\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i$.

2) $\mathrm{Ln}(-1) = \pi i + 2\pi k i = (2k+1)\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Степенная функция

Степенная функция — это функция вида

$$w = z^n.$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Если $n = \dfrac{1}{q}(q \in \mathbb{N})$, то

$$w=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{q}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{q}\right),\ k\in 0,1,2,...,q-1\,.$$

Если $n=\alpha+i\beta$, то

$$w=z^n=e^{nLnz},\ z\neq 0\,.$$

Если $n=\dfrac{p}{q}\,(p,q\in\mathbb{N})$, то

$$w=\sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z+2k\pi)}{q}+i\sin\frac{p(\arg z+2k\pi)}{q}\right).$$

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональная функция — это функция вида

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n}\,.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен

$$w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n\,.$$

Тригонометрические функции

Из формулы Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ для действительных y получаем

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ \ e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Откуда

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},\quad \cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\,.$$

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$, $\text{tg}z$, $\text{ctg}z$ для любого комплексного числа z определяются по следующим формулам:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\text{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \text{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Данные функции сохраняют свойства тригонометрических функций действительного переменного, например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z \text{ и т. п.}$$

Функции $\sin z, \cos z$ в комплексной области являются неограниченными:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \quad \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i\operatorname{sh} iz, && \operatorname{sh} z = -i\sin iz,\\ &\cos z = \operatorname{ch} iz, && \operatorname{ch} z = \cos iz,\\ &\operatorname{tg} z = -i\operatorname{th} iz, && \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz,\\ &\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} iz, && \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz. \end{aligned}$$

Пример. Вычислить $\cos i$.

Решение:

$$\cos i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \operatorname{ch} 1 \approx 1{,}54.$$

Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции

$$w = \operatorname{Arc}\sin z,\ w = \operatorname{Arc}\cos z,\ w = \operatorname{Arctg} z,\ w = \operatorname{Arcctg} z$$

определяются как функции, обратные соответственно к функциям

$$\sin w,\ \cos w,\ \operatorname{tg} w,\ \operatorname{ctg} w.$$

Обратные тригонометрические функции являются многозначными и находятся через логарифмические функции:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \quad \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\mathrm{Arctg}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z}(z \neq \pm i);$$

$$\mathrm{Arcctg}z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}(z \neq \pm i).$$

Пример. Вычислить $\mathrm{Arcrg}(2i)$.

Решение: $z = 2i$ подставим в указанную выше формулу, получим

$$\mathrm{Arcrg}(2i) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{i-2i}{i+2i}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{i\ln 3}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2.5. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Эйлера — Даламбера (Коши — Римана)

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и в самой точке.

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ – приращение независимой переменной. $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ – приращение функции.

Производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции Δw к приращению аргумента Δz при стремлении последнего к нулю (произвольным способом):

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$

Функция, имеющая производную при данном значении z, называется ***дифференцируемой (моногенной)*** при этом значении z.

Замечание

Точка $z + \Delta z$ может приближаться к z по любому направлению.

Функция комплексного переменного $f(z)$, определенная в области D, называется ***дифференцируемой в точке*** $z = z_0 \in D$, если существует конечное число C, такое, что приращение функции в этой точке $\Delta f(z_0)$, соответствующее $\Delta z \neq 0$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(z_0) = C\Delta z + 0(\Delta z), \tag{2.1}$$

где $0(\Delta z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{0(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

Существование производной $f'(z_0)$ и равенство (2.1) эквивалентны.

Таким образом, $f(z)$ ***дифференцируема в точке*** z_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(z_0)$.

Замечание

Из дифференцируемости функции в точке следует непрерывность функции в этой точке. Обратное утверждение не верно.

Функция комплексного переменного $w = f(z)$, определенная в области *D*, называется ***дифференцируемой в области*** *D*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Правила дифференцирования

Пусть $f_1(z), f_2(z)$ дифференцируемы в точке *z*, тогда имеют место следующие соотношения:

1) $\left(f_1 \pm f_2\right)' = f_1' \pm f_2'$;

2) $\left(f_1 \cdot f_2\right)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$;

3) $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' = \dfrac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^{\,2}}, \quad f_2 \neq 0$;

4) $f(\varphi(z))' = f_\varphi'(\varphi) \cdot \varphi_z'(z)$,

$\varphi(z)$ дифференцируема в точке *z*, $f(w)$ дифференцируема в точке $w = \varphi(z)$;

5) пусть $f'(z)$ дифференцируема в некоторой точке *z* и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $\left(f^{-1}(w)\right)' \neq 0$, тогда

$$f'(z) = \frac{1}{\left(f^{-1}(w)\right)'},$$

$f^{-1}(w)$ — функция, обратная функции $f(z)$.

Теорема

Пусть функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$. Для того, чтобы $f(z)$ была дифференцируемой в точке *z*, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемыми в точке (x,y) и чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Данные равенства называются условиями Даламбера — Эйлера (или Коши — Римана).

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z, тогда предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует и не зависит от пути, по которому $z=x+iy\to 0$.

Пусть $z+\Delta z\to z$ по $l\parallel Ox$, то есть $\Delta z=\Delta x\to 0,\ \Delta y=0$, тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x;y)+iv(x+\Delta x;y))-(u(x,y)+iv(x,y))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x;y)-u(x,y)}{\Delta x}+\frac{i(v(x+\Delta x;y)-v(x,y))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть $z+\Delta z\to z$ по $l\parallel Oy$, то есть $\Delta z=\Delta y\to 0,\ \Delta x=0$, тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\big(u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)\big)-\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i\big(v(x,y-\Delta y)-v(x,y)\big)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i\Delta_y v}{i\Delta y}=$$

$$=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y v}{\Delta y}=-\frac{\partial u}{\partial y}i+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

Сравним:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i,$$

получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Достаточность.

Пусть полученные выше условия выполняются. Докажем, что $f(z)$ дифференцируема.

Так как u и v дифференцируемы в точке (x, y), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2,$$

α_1, α_2 — бесконечно малые более высокого порядка, чем $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\big(u(x+\Delta x; y+\Delta y) + iv(x+\Delta x; y+\Delta y)\big) - \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Заменим

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ на } -\frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial y} \text{ на } \frac{\partial u}{\partial x},$$

получим

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3 =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3,$$

α_3 — бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta z|$.

Итак, предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$$

существует.

При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема доказана.

Однозначная функция называется ***аналитической в данной точке***, если она дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой ее окрестности.

Если функция является аналитической в каждой точке некоторой области *D*, то она называется ***аналитической в области** D*.

Пример. Является ли функция $w = z\overline{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Выделим действительную и мнимую часть функции $w = z\overline{z}$:

$$w = z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) + i \cdot 0\,;$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2,\ v(x,y,) = 0\,.$$

Используем условия Коши — Римана:

$$2x = 0,\ 2y = 0\,.$$

Условия Коши — Римана будут выполняться только в точке (0; 0). Следовательно, функция $w = z\overline{z}$ будет дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Аналитическую функцию называют регулярной, моногенной, голоморфной.

Теорема. Однозначные элементарные функции комплексного переменного регулярны всюду, где они определены.

Для любой аналитической функции имеют место следующие соотношения:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С помощью условий Коши — Римана можно восстановить аналитическую функцию, если известна ее действительная или мнимая часть.

Если функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0, то данную функцию можно восстановить по одной из формул:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{C}_0,$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{C}_0,$$

где $\bar{C}_0$ – сопряженное число для $C_0 = f(z_0)$, а $\bar{z}_0$ — сопряженное число для z_0.

Пример. Задана действительная часть

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$$

дифференцируемой функции $f(z)$. Найти $f(z)$.

Решение

Используем условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найдем $v(x,y)$. Проинтегрируем из первого условия Коши — Римана по y функцию $v(x,y)$:

$$v = \int (2x+1)dy = (2x+1)y + C(x).$$

Определим $C(x)$, используя второе условие:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = 2y,$$

$$C'(x) = 0,$$

$$C(x) = C_1.$$

Подставим в $v(x,y)$ найденное C_1:

$$v(x,y) = (2x+1)y + C_1.$$

Итак,

$$f(z) = f(x+yi) = (x^2 - y^2 + x) + i\big((2x+1)y + C_1\big) =$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 + x + yi + C_1 i = z^2 + z + iC_1.$$

Действительная функция $u = u(x, y)$ называется ***гармонической в области*** D, если она определена в D, имеет всюду в D непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет в каждой точке D уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема. Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Обратное утверждение не верно: не всякая пара гармонических функций дает аналитическую функцию.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши — Римана, называются ***сопряженными***.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

$$a)\lim_{z\to 1-i}\frac{z^2+z}{1-z};\ \ b)\lim_{z\to\frac{\pi i}{4}}\frac{\sin iz}{\mathrm{ch}z+i\mathrm{sh}z}.$$

Ответ: $a)3-i;\ b)\infty$.

2. Вычислить:

$$a)\cos(2-3i);\ \ b)\ln(-8);\ \ c)e^{2+5i}.$$

Ответ: $a)\cos 2\cdot\mathrm{ch}3+i\sin 2\cdot\mathrm{sh}3;\ b)\ln 8+i\pi;\ c)e^2(\cos 5+i\sin 5)$.

3. Выделить действительную и мнимую части:

$$a)\sin z;\ \ b)\frac{1}{z-i}.$$

Ответ: $a)u=\cos(x+1)\cdot\mathrm{ch}y,\ v=-\sin(x+1)\cdot\mathrm{sh}y$;

$$b)u=\frac{x}{x^2+(y-1)^2},\ v=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}.$$

4. Восстановить аналитическую функцию, если

$$a)v=x^2+4x-y^2;\ \ b)v=3x+2xy, f(-i)=2.$$

Ответ: $a)\ iz^2+4iz+C;\ b)z^2+3iz$.

3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Свойства и правила вычисления интегралов

Пусть *Г* — произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области *D*.

Пусть в каждой точке кривой *Г* с началом в точке z_0 и концом в точке z_n определена непрерывная функция $w = f(z)$. Разделим дугу *Г* на *n* частей произвольными точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. На каждой «элементарной дуге» выберем произвольную точку c_k.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k, \qquad (3.1)$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ — приращения переменного *z* при переходе от z_{k-1} к z_k.

Пусть $\lambda = \max|\Delta z_k|$.

Если существует предел интегральной суммы (3.1) при стремлении λ к нулю, то этот предел называется ***интегралом*** функции $f(z)$ по дуге кривой *Г*, заключенной между точками z_0 и z_n:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k .$$

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ сводится к двум криволинейным интегралам от действительных функций по формуле

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx - vdy + i\int_{\Gamma} vdx + udy \qquad (3.2)$$

или

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy).$$

Если кривая Γ задана параметрически, т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ называют ***комплексно-параметрическим уравнением кривой Γ*** и

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt \,. \tag{3.3}$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_n, то имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} \,, \tag{3.4}$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

Замечание

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе.

***Основные свойства интеграла функции комплексного переменного*:**

1) $\int\limits_{\cup AB} dz = z_B - z_A$, $\int\limits_\Gamma dz = z - z_0$;

2) $\int\limits_\Gamma (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_\Gamma f_1(z)dz \pm \int\limits_\Gamma f_2(z)dz$;

3) $\int\limits_\Gamma af(z)dz = a\int\limits_\Gamma f(z)dz$, где a — комплексное число;

4) $\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = -\int\limits_{\cup BA} f(z)dz$;

5) если $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, то $\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz$;

6) ***оценка модуля интервала***: если $|f(z)| \le M$ во всех точках кривой Γ, то

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le Ml \,,$$

где l — длина кривой Γ.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} z^3 dz,$$

Γ — дуга параболы с концами в точках $A = 0, B = 1 + i$.

Решение

Выделим действительную и мнимую части в подынтегральной функции:

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3) .$$

Используем формулу (3.2):

$$\int_{\Gamma} z^3 dz = \int_{\Gamma} (x^3 - 3xy^2)dx - (3x^2 y - y^3)dy + i\int_{\Gamma} (3x^2 y - y^3)dx + (x^3 - 3xy^2)dy =$$

$$= \begin{bmatrix} y = t \\ x = t^2 \\ 0 \le t \le 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (t^6 - 3t^2 \cdot t^2)2tdt - (3t^4 t - t^3)dt + i\int_0^1 (3t^4 t - t^3)2tdt + (t^6 - 3t^2 t^2)dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^7 - 9t^5 + t^3)dt + i\int_0^1 (7t^6 - 5t^4)dt = \left(\frac{t^8}{4} - \frac{3t^6}{2} + \frac{t^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 + i \cdot 0 = -1.$$

Пример. Вычислить интеграл

$\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z})dz$, где Γ — дуга окружности $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$.

Решение. Пусть $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$.

Имеем

$$\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z})dz = \int_0^{\pi} ie^{i\varphi}(e^{i2\varphi} + 1)d\varphi = i\int_0^{\pi} (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi} \right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} (z + 5)\cos z dz$$

по произвольной линии, соединяющей точки 0 и $2i$.

Решение

Подынтегральная функция аналитична во всей комплексной плоскости, поэтому можно использовать формулу Ньютона — Лейбница (3.4):

$$\int_{\Gamma}(z+5)\cos z dz = \begin{bmatrix} u = z+5 & dv = \cos z dz \\ du = dz & v = \sin z \end{bmatrix} =$$

$$= (z+5)\sin z\Big|_0^{2i} - \int_0^{2i}\sin z dz = (2i+5)\sin 2i + \cos 2i - \cos 0 =$$

$$= (-2+5i)\operatorname{sh}2 + \operatorname{ch}2 - 1.$$

3.2. Интегральная формула Коши

Теорема Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру *Г*, лежащему в этой области *D*, равен нулю, т. е.

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство

Пусть *Г* — кусочно-гладкий контур и $f'(z)$ непрерывна.

Покажем, что

$$\int_{\Gamma} udx - vdy = 0 \text{ и } \int_{\Gamma} vdx + udy = 0.$$

Обозначим внутренность контура *Г* через *D*. Так как $f'(z)$ непрерывна всюду в области *D*, то функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ в этой области имеют непрерывные частные производные первого порядка. Применим формулу Грина:

$$\int_{\Gamma} udx - vdy = \iint_{D}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$\int_{\Gamma} vdx + udy = \iint_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

По условиям Коши — Римана подынтегральные выражения в каждом из двойных интегралов тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда интеграл от функции $f(z)$, взятый вдоль границы ∂D этой области, равен нулю:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Пусть на комплексной плоскости задано n замкнутых кусочно-гладких контуров $\varGamma_0, \varGamma_1, ..., \varGamma_{n-1}$, таких, что каждый из контуров $\varGamma_1, ..., \varGamma_{n-1}$ лежит во внешности остальных и все они располагаются во внутренности контура $\varGamma_0$. Полная граница $\varGamma$ области D представляет собой контур, который состоит из кривых $\varGamma_0, \varGamma_1, ..., \varGamma_{n-1}$.

Положительным направлением обхода границы многосвязной области будем считать такое направление движения, при котором область D остается слева. Внешний контур $\varGamma_0$ обходится против часовой стрелки, а $\varGamma_1, ..., \varGamma_{n-1}$ — по часовой стрелке.

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда

$$\int_{\varGamma} f(z)dz = 0, \tag{3.5}$$

где $\varGamma$ — полная граница области D, состоящая из контуров $\varGamma_0, \varGamma_1, ..., \varGamma_{n-1}$ и проходящая в положительном направлении.

Замечание

Равенство (3.5) можно записать в виде

$$\int_{\varGamma_0} f(z)dz = \int_{\varGamma_1} f(z)dz + ... + \int_{\varGamma_{n-1}} f(z)dz .$$

Теорема

Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области. L — граница этой области. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z - z_0},$$

которая называется ***интегральной формулой Коши.*** Интегрирование по контуру L производится в направлении против часовой стрелки.

Доказательство

Пусть окружность l с центром в точке z_0 лежит внутри области L (l не пересекает L).

Получим двусвязную область D_1, ограниченную контурами L и l, в которой $\frac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична. Тогда

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_l \frac{f(z)dz}{z-z_0}.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)dz}{z-z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}f(z_0)\oint_l \frac{dz}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

Учтем, что

$$\oint_l \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i,$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}f(z_0)2\pi i + \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

Оценим разность в левой части. Так как аналитичная функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0: |z-z_0| \le r \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon.$$

Применим свойство об оценке модуля:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_l \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz \le \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть последнего неравенства не зависит от ε, то она равна нулю. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = 0.$$

Итак,

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)\,.$$

Теорема доказана.

Замечание

Интегральная формула Коши справедлива для многосвязной области.

Следствия

1. Если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$$

или

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)\,.$$

2. Если существует $f'(z_0)$, то в окрестности точки z_0 $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{z!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

Данный ряд — ряд Тейлора.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1},\ \text{где } L \text{ — окружность } |z+i|=1\,.$$

Решение

Рассмотрим подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i}f(z),\quad f(z) = \frac{1}{z-i}\,.$$

$f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ — функция аналитична и $z_0 = -i$ принадлежит кругу.

Тогда

$$\int_L \frac{f(z)}{z+i}dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(\bar{z}+2i\right)dz$ от точки $z_1=0$ до $z_2=1+i$, где

а) L — отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2;

б) L — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки z_1 и z_2.

Ответ: $a)-1+2i;\ b)-1+\dfrac{7}{3}i$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z}zdz,$ где L — верхняя половина окружности,

$$|z|=2 \text{ от } z_1=2 \text{ до } z_2=-2.$$

Ответ: -16.

3. Вычислить интеграл:

$$a)\int\limits_0^i z\sin z dz;\quad b)\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz.$$

Ответ: $a)-\dfrac{i}{e};\ \ b)8+19i.$

4. Вычислить интеграл:

$$a)\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz;\ b)\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz;\ c)\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2-2z}dz.$$

Ответ: $a)-\pi i;\ b)\pi\cos 2\cdot i;\ c)\pi\left(\cos 2-1\right)\cdot i$.

4. Ряды в комплексной области

4.1. Числовые ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \tag{4.1}$$

где z_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — комплексные числа, называется ***числовым рядом*** (комплексной области).

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 + \ldots, \; x, y \in \mathbb{R}.$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ — n-я ***частичная сумма ряда***.

Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм S_n ряда, то ряд (4.1) называется ***сходящимся***, а S — ***суммой ряда***.

Если предел не существует, то ряд (4.1) называется ***расходящимся.***

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \; .$$

Ряд (4.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S_1 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} y_k = S_2 .$$

$$S = S_1 + iS_2 ,$$

$r_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots$ — остаток ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд (4.1) сходится, то его общий член z_n при n, стремящемся к бесконечности, стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Ряд (4.1) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots$$

При исследовании на сходимость рядов с комплексными членами используют признаки сходимости знакопостоянных рядов из действительного анализа.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3i-1)^n}{6^n}.$$

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}-6^n}{6^{n+1}n(3i-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|3i-1|}{6} = \frac{\sqrt{10}}{6} < 1,$$

значит, ряд сходится.

4.2. Степенные ряды

Функциональный ряд — это ряд вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{4.2}$$

где функции $f_k(z)$ определены на некотором множестве комплексной плоскости.

Ряд (4.2) называется ***сходящимся*** в точке z заданного множества, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n \geq N \Rightarrow |R_n(z)| < \varepsilon,\ R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z).$$

Функциональный ряд (4.2) называется ***равномерно сходящимся*** на некотором множестве D, если выполняются следующие условия:

1) ряд сходится в каждой точке множества D;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от z и такой, что для всех $n \geq N$ и для всех z из D остатки этого ряда удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Пусть на множестве D ряд (4.2) мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом, $|f_n(z)|\le|a_n|$. Тогда ряд (4.2) сходится на D абсолютно и равномерно.

Степенным рядом называют ряд вида

$$c_0+c_1(z-z_0)+\cdots c_n(z-z_0)^n\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{4.3}$$

где z — независимая комплексная переменная, коэффициенты c_n — заданные комплексные числа, z_0 — фиксировано.

Теорема Абеля. Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_1\ne z_0$. Тогда этот ряд:

1) абсолютно сходится в круге

$$|z-z_0|<|z_1-z_0|=R;$$

2) равномерно сходится в круге

$$|z-z_0|\le r<R\,.$$

Свойства степенных рядов

1. Пусть степенной ряд (4.3) расходится точке z_1. Тогда данный ряд расходится в каждой точке, удовлетворяющей неравенству

$$|z-z_0|>|z_1-z_0|.$$

2. Для любого степенного ряда (4.3) найдется такое число R, что в круг $|z-z_0|<R$ ряд (4.3) будет сходиться, а вне этого круга при $|z-z_0|>R$ будет расходиться.

Если $R>0$, то наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z-z_0|<R$.

В точках границы $|z-z_0|=R$ ряд (4.3) может как сходиться, так и расходиться. Область

$$|z-z_0|>R,\quad R>0,$$

называется ***кругом сходимости*** степенного ряда (4.3); число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (4.3).

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad c_n \neq 0, \quad \forall n$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Пример. Найти круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3} \right)^n (z-i)^n.$$

Решение. Найдем радиус сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3} \right)^n \cdot \frac{3^{n+1}}{(\sqrt{3}+i)^{n+1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = R.$$

Итак, $|z-i| < \frac{3}{2}$.

4.3. Ряд Тейлора

Теорема. Всякая аналитическая в круге $|z-z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ***ряд Тейлора***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где l — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга.

Приведем разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций:

1) $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \ (R=1)$;

2) $\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \ (R=1)$;

3) $(1+z)^{\alpha} = 1+\alpha z+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots+$

$+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}z^n+\ldots \ (R=1)$;

4) $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n} \ (R=1)$;

5) $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!} \ (R=\infty)$;

6) $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R=\infty)$;

7) $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \ (R=\infty)$.

Пример. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ в окрестности точки $z_0=0$:

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}.$$

Решение. Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{3}{4}\frac{1}{z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-z/3}.$$

Используем разложения для функций $\dfrac{1}{1-z}$ и $\dfrac{1}{1+z}$, представленные выше, получим:

$$f(z)=\frac{1}{4}(1-z+z^2-z^3+\ldots)-\frac{1}{4}(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{3}z+\frac{2}{9}z^2-\frac{7}{27}z^3+\ldots$$

Нули аналитической функции

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D.

Если $c_0 = f(z_0) = 0$, то точка z_0 $(z_0 \in D)$ называется ***нулем функции*** $f(z)$.

Если $c_0 = 0 = c_1 = c_2 = \ldots c_{m-1}$, а $c_m \neq 0$, то точка z_0 $(z_0 \in D)$ называется ***нулем кратности m*** (нулем m-го порядка).

Нуль m-го порядка характеризуется соотношениями

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

В окрестности нуля m-го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m q(z),\ q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n,$$

$q(z)$ — аналитична в окрестности точки z_0, $q(z_0) \neq 0$.

Пример. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z},\ (z \neq 0),\ f(0) = 0.$$

Решение. Используем разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$. Получим

$$f(z) = \frac{z^8}{\left(z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)\right)} = \frac{z^8}{\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)} = z^5 q(z),$$

где

$$q(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots\right)}.$$

Так как $q(0) = 6 \neq 0$, то точка $z_0 = 0$ является нулем пятого порядка.

4.4. Ряд Лорана

Теорема. Всякая аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ $(0 \leq r < R < \infty)$ функция $f(z)$ может быть разложена в этом кольце в ***ряд Лорана***

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (4.4)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\ (n=0,\pm 1,\pm 2,...),$$

где Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

Ряд $f_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется ***главной частью ряда Лорана***. Данный ряд сходится внутри круга $|z-z_0|<R$ к аналитической функции $f_1(z)$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ называется ***правильной частью ряда Лорана***. Данный ряд сходится к аналитической функции $f_2(z)$ вне круга $|z-z_0|>r$.

Внутри кольца $r<|z-z_0|<R$ ряд (4.4) сходится к аналитической функции

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z).$$

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Решение

Область сходимости первого ряда — внешность круга $|z|>1$, а область сходимости второго ряда — внутренность круга $|z|<2$. Итак, данный ряд сходится в кольце $1<|z|<2$.

Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными точками***.

Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ не является аналитичной, называются ***особыми точками***.

Если $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z-z_0|<R$, то ее разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора.

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв $z_0=0$.

Решение

Данная функция имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Следовательно, существуют три кольца, в каждом из которых функция $f(z)$ является аналитической: 1) круг $|z| < 1$; 2) кольцо $1 < |z| < 2$; 3) внешность круга $|z| > 2$.

Разложим функцию $f(z)$ на элементарные дроби:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

1) $|z| < 1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}.$$

Используем формулу для суммы членов геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \cdots, \quad |z| < 2, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \quad |z| < 1. \tag{4.6}$$

Тогда $f(z)$ примет вид

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \cdots - (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 - \ldots, \quad |z| < 1.$$

2) $1 < |z| < 2$. Ряд (4.5) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ сходится в этом кольце.

Ряд (4.6) для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится при $|z| > 1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}},$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots \tag{4.7}$$

Полученный ряд сходится при $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1,$ то есть при $|z| > 1.$

В итоге получим

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots$$

3) $|z| > 2.$ Ряд (4.5) для функции $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}$ расходится при $|z| > 2$. Ряд (4.7) для функции $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$ сходится при $|z| > 2$. Представим функцию $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} + \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right).$$

В итоге получим

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right).$$

4.5. Классификация особых точек

Особая точка z_0 называется ***изолированной особой точкой***, если в некоторой ее окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Пусть z_0 — изолированная особая точка, тогда существует такое $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитичной, а значит, будет разлагаться в ряд Лорана.

Изолированная особая точка z_0 называется ***устранимой***, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой точкой тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит главной части.

Изолированная особая точка z_0 называется ***полюсом***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит в главной части конечное (положительное) число отличных от нуля членов:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Наибольший из показателей степеней у разностей $z - z_0$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

Если z_0 — полюс m-го порядка функции $f(z)$, то z_0 — нуль m-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $m = 1$ полюс называют ***простым***.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Изолированная особая точка z_0 называется ***существенно особой точкой***, если функция $f(z)$ в точке z_0 не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой точкой тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Решение. Особая точка $z_0 = 0$. Так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

то $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ содержит только правильную часть:

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\cdots-1\right)=\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots.$$

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}.$$

Решение. Особая точка $z_0=0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos z}{z^7}=\infty,$$

то $z_0=0$ является полюсом.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ будет иметь вид

$$\frac{1-\cos z}{z^7}=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10}-\cdots$$

Главная часть лорановского разложения содержит конечное число членов — три. Так как наибольший из показателей степени у z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен пяти, то точка $z_0=0$ будет полюсом пятого порядка.

Пример. Установить характер особой точки функции

$$f(z)=e^{1/z^2}.$$

Решение. Особая точка $z_0=0$. На действительной оси $z=x$ при $x\to\infty$ $f(x)=e^{1/x^2}\to\infty$. На мнимой оси $z=iy$ при $y\to\infty$ $f(x)=e^{-1/y^2}\to 0$. Следовательно, предел данной функции в точке $z_0=0$ не существует ни конечный, ни бесконечный, поэтому $z_0=0$ является существенно особой точкой.

Разложение данной функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ будет иметь вид

$$e^{1/z^2}=1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\cdots,\ |z|>0.$$

Главная часть лорановского разложения содержит бесконечно много членов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-i};\ b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(e-i)^n};\ c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{3^n}.$$

Ответ: a) расходится; b) сходится; c) сходится.

2. Исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n};\ b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n2^n\cdot\ln n};\ c)\sum_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n.$$

Ответ: a) сходится абсолютно в области $|z+2|\le\sqrt{3}$; b) сходится абсолютно в области $|z|<2$; c) расходится во всех точках, кроме $z_0=i$.

3. Разложить функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$:

$$a)\,f(z)=\frac{z+1}{z^2+2z-3},z_0=0;\ b)\,f(z)=\ln(2+3z),z_0=1.$$

Ответ: $a)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6\cdot 3^n}\right)z^n;\ b)\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n5^n}(z-1)^n.$

4. Разложить функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z :

$$a)\,f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}},z=0;\ b)\,f(z)=\frac{z+1}{z+2},3<|z-1|<\infty.$$

Ответ: $a)\,z^2+z+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n\cdot(n+2)!};\ b)1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+1}}.$

5. Найти все особые точки функции и определить их тип:

$$a)\,f(z)=\frac{z+1}{(z-2)^2(z+4)^3};\ b)\,f(z)=\frac{\cos z}{\pi z-2z^2}.$$

Ответ: $a)\,z_1=2$ — полюс второго порядка, $z_2=-4$ — полюс третьего порядка; $b)\,z_1=0$ — простой полюс, $z_2=\frac{\pi}{2}$ — устранимая особая точка.

5. Вычеты функций

5.1. Понятие вычета. Основная теорема о вычетах

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, обозначаемое символом $res\,f(z_0)$ и определяемое равенством

$$res\,f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz\ , \qquad (5.1)$$

где γ — окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса, такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек функции $f(z)$.

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$res f(z_0)=c_{-1}\,.$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Если точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$, то

$$res\,f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Если точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$, то

$$res\,f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)\right].$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\,,$$

причем $\varphi(z_0)\neq 0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0$, то есть z_0 является простым полюсом функции $f(z)$, то

$$res f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для нахождения $res f(z_0)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Это и будет вычет.

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}.$$

Решение. Особые точки: $z=0,\ z=\frac{\pi}{4}.$

Найдем вычет в точке $z=0$. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $z=0$ является устранимой особой точкой и

$$res f(0)=0.$$

Найдем вычет в точке $z=\frac{\pi}{4}$. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to \pi/4} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\infty.$$

Следовательно, $z=\frac{\pi}{4}$ является полюсом (полюс первого порядка) и

$$res f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to \pi/4} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to \pi/4}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\lim_{z\to \pi/4}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Решение. Особые точки: $z = \pm i$. Это полюсы второго порядка. Найдем вычет в точке $z = i$:

$$res\, f(i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^3} =$$

$$= -\lim_{z \to i} \frac{2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Найдем вычет в точке $z = -i$:

$$res\, f(-i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-i)^3} =$$

$$= -\lim_{z \to -i} \frac{2}{(z-i)^3} = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{i}{4}.$$

Пример. Найти вычеты функции

$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

Решение. Особая точка: $z = 0$. Разложим функцию в ряд Лорана:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

$$z^2 e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \ldots$$

Так как главная часть лорановского разложения содержит бесконечное число членов, то $z = 0$ является существенно особой точкой. Вычет будет равен коэффициенту c_{-1}:

$$res\, f(0) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда для любой замкнутой области $\overline{G}$, находящейся в D и содержащей внутри точки $z_1, \ldots, z_n$, имеет место равенство

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Доказательство. Построим окружности $\gamma_k : |z - z_0| = r,\ k = 1, \ldots, n,$ такого малого радиуса r, что ограниченные ими круги $U_k - |z - z_0| \le r$ содержатся в области G и не пересекаются друг с другом. Обозначим через G^* область, которая получается из области G путем удаления кругов $U_1,\ldots,U_n$. Функция $f(z)$ является аналитичной в области G^* и непрерывной в ее замыкании $\overline{G^*}$.

По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz .$$

Используем определение вычета: $res\, f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$. Получим

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k) .$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|<5} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz .$$

Решение. Подынтегральная функция аналитична в области $|z|<5$ за исключением точек $z=0,\ z=-1$. Найдем вычеты в данных точках.

Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1 .$$

Вычет в точке $z=0$ равен 0: $resf(0)=0$.

Точка $z=-1$ является полюсом первого порядка. Вычет в данной точке будет равен

$$resf(-1) = \lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z - 1}{z(z+1)}(z+1) \right) = 1 - e^{-1} .$$

По теореме Коши о вычетах получим

$$\int_{|z|<5} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(resf(0) + resf(-1)) = 2\pi i(1 - e^{-1}) .$$

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Функция $f(z)$ является ***аналитической в бесконечно удаленной точке*** $z=\infty$, если функция $\varphi(c)=f\left(\frac{1}{c}\right)$ аналитична в точке $c=0$.

Например, функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ является аналитической в точке $z=\infty$, так как функция $\varphi(c)=f\left(\frac{1}{c}\right)=\sin c$ аналитична в точке $c=0$.

Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ имеет в бесконечности неизолированную особенность: полюсы $z_k=k\pi$ этой функции накапливаются в бесконечности, если $k\to\infty$.

Точка $z=\infty$ является ***устранимой особой точкой*, *полюсом или существенно особой точкой*** функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Утверждения:

1) если $z=\infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z;

2) если $z=\infty$ — полюс, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки содержит конечное число положительных степеней z;

3) если $z=\infty$ — существенно особая точка, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки содержит бесконечное число положительных степеней z.

Лорановское разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называется разложением $f(z)$ в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z=0$ (кроме, быть может, самой точки $z=\infty$).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z=\infty$ (кроме, быть может, самой точки).

Вычетом функции $f(z)$ ***в бесконечности*** называется величина

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)dz,$$

где γ^- — достаточно большая окружность $|z| = r,$ проходимая по часовой стрелке (так, что окрестность точки $z = \infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = z_0$).

Из данного определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$res\, f(\infty) = -c_{-1}.$$

Пример. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z+1}{z}$ в точке $z = \infty$.

Решение

Преобразуем $f(z) = \frac{z+1}{z}$:

$$f(z) = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z}.$$

Полученное выражение можно рассматривать как лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$.

Так как

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 1,$$

то точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой и $f(\infty) = 1$.

Коэффициент c_{-1} равен единице, поэтому

$$res\, f(\infty) = -1.$$

Теорема. Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

То есть если $a_1, a_2, ..., a_n$ — конечные особые точки функции $f(z)$, то

$$res\, f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k) = 0$$

или

$$res\, f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k).$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4+1}.$$

Решение

Корни уравнения $z^4 = -1$ находятся внутри окружности $|z| = 2$ и являются полюсами (конечными) подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{dz}{z^4+1}$.

Разложим $f(z)$ в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{13}} - \ldots$$

Имеем

$$res\, f(\infty) = -c_{-1} = 0$$

и, следовательно,

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} res\, f(a_k) = -2\pi i\, res\, f(\infty) = 0.$$

5.2. Вычисление вычетов. Применение вычетов к вычислению интегралов

Интегралы от рациональных функций

Пусть функция $f(x)$ — рациональная функция, то есть

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно.

Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси $(Q_m(x) \neq 0)$ и $m \geq n+2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sigma,$$

где σ — сумма вычетов функции

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости (существенно особых точек у рациональной функции нет).

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$ является четной функцией, поэтому

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\frac{z^2dz}{(z^2+4)^2}$, которая на действительной оси, то есть при $z=x$, совпадает с $f(x)$.

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну изолированную особую точку $z=2i$ (полюс второго порядка). Вычислим вычет $f(z)$ в точке $z=2i$:

$$res\, f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[f(z)(z-2i)^2\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+2i)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{4iz}{(z+2i)^3}=\frac{1}{8i}.$$

Данный по условию интеграл будет равен

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{8i}=\frac{\pi}{8}.$$

Интегралы вида $I=\int\limits_0^\infty R(x)\cos ax\, dx,\ \int\limits_0^\infty R(x)\sin ax\, dx$

Рассмотрим интегралы $I=\int\limits_0^\infty R(x)\cos ax\, dx,\ \int\limits_0^\infty R(x)\sin ax\, dx,$

где $R(x)$ — правильная рациональная дробь, $a>0$ — любое вещественное число.

При вычислении таких интегралов можно использовать лемму Жордана.

Лемма Жордана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0,$ за исключением конечного числа изолированных особых точек, и при $|z| \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z.$ Тогда при $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\text{з}_R} f(z) e^{i\lambda x} dz = 0,$$

где γ_R — верхняя полуокружность $|z| = R,$ $\mathrm{Im}\, z > 0$ (рис. 5.1).

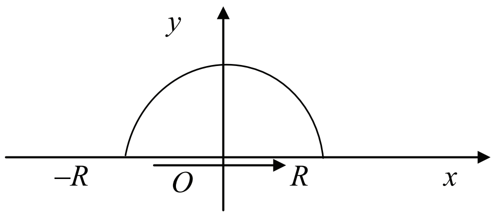

Рис. 5.1

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x \sin ax}{(x^2 + k^2)} dx, \quad a > 0, \quad k > 0.$

Решение

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}.$ Заметим, что если $z = x,$ то $\mathrm{Im}\,\varphi(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \dfrac{x \sin ax}{x^2 + k^2}.$

Рассмотрим контур $\gamma_R : |z| = R,$ $\mathrm{Im}\, z > 0.$ При достаточно большом R на контуре γ_R функция $g(z) = \dfrac{z}{z^2 + k^2}$ удовлетворяет условию

$$|q(z)| < \frac{R}{R^2 - k^2} \to 0 \text{ при } R \to \infty,$$

так как $\left|z^2 + k^2\right| \geq \left|z^2\right| + k^2.$

Следовательно, по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} = \int\limits_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0.$$

По основной теореме о вычетах для любого $R > k$ получаем, что

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx + \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = 2i\pi\sigma,$$

где

$$\sigma = \underset{z=ik}{res}\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right] = \lim_{z\to ik}\frac{ze^{iaz}(z-ik)}{z^2+k^2} = \frac{e^{-ak}}{2}.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2}dx = i\pi e^{-iak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \pi e^{-ak}.$$

Так как подынтегральная функция четная, то окончательно получим

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+k^2)}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

Интеграл вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$

Рассмотрим интеграл $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$,

где $R(u,v)$ — рациональная функция аргументов u и v, ограниченная внутри промежутка интегрирования.

Пусть $e^{ix} = z$, тогда

$$dx = \frac{dz}{iz},\ \cos x = \frac{z^2+1}{2z},\ \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

В данном случае $|z| = 1, 0 \le x \le 2\pi.$

Таким образом, исходный интеграл переходит в интеграл от функции комплексного переменного по замкнутому контуру:

$$I=\int_{\gamma}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}=\int_{\gamma}F(z)dz,$$

где γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. По основной теореме о вычетах, полученный интеграл равен $2\pi i\sigma$, где σ — сумма вычетов подынтегральной функции $F(z)$ в полюсах, расположенных внутри окружности γ.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(b\cos x+a)^2}$, $a>b>0.$

Решение

Используем подстановку $e^{ix}=z$. После преобразований получим, что

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(b\cos x+a)^2}=\frac{4}{i}\int_{\gamma}\frac{zdz}{(bz^2+2az+b)^2}=\frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{n}resF(z_k).$$

Внутри единичного круга при условии, что $a>b>0$, находится только один полюс (второго порядка)

$$z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Вычет функции

$$F(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$$

относительно полюса z_1 будет равен

$$res\,F(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z^2-z_2)^2}\right]=\frac{a}{4(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

Итак, данный по условию интеграл будет равен

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(b\cos x+a)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вычеты функции $f(z)$ особых точках:

$$a)\, f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-z^2};\ b)\, f(z)=\frac{1}{z^2+1};\ c)\, f(z)=\frac{\mathrm{tg} z}{4z^2-\pi z}.$$

Ответ: $a)$ $res\, f(0)=0,\, res\, f(1)=\sin 1$;

$b)$ $res\, f(i)=-\frac{i}{2},\, res\, f(-i)=\frac{i}{2}$;

$c)$ $res\, f(0)=0,\, res\, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\pi},\ res\, f\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\frac{-2}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$.

2. Вычислить интегралы:

$$a)\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^2-z}dz;\ b)\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2+1}dz;\ c)\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)^3(z+2)}.$$

Ответ: $a)$ $2\pi i(e-1)$; $b)$ $\pi \mathrm{ch} 1$; $c)$ 0.

3. Вычислить интегралы:

$$a)\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3\cos x};\ b)\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^4};\ c)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

Ответ: $a)$ $\frac{\pi}{2}$; $b)$ $\frac{5\pi}{4^6}$; $c)$ $\frac{\pi}{30}$.

6. Конформные отображения

6.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w = f(z)$ является аналитичной в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Функция $w = f(z)$ отображает точку z_0 плоскости z в точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w.

Точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по непрерывной кривой *l*. Тогда соответствующая точка $w = w_0 + \Delta w$ в плоскости w будет перемещаться к точке w_0 по некоторой кривой *L*, которая является отображением кривой *l* в плоскости w.

По определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

$\Delta z = | z - z_0 |$ — расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$;

$\Delta w = | w - w_0 |$ — расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$.

$|f'(z_0)|$ — предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и $w_0 + \Delta w$ к бесконечно малому расстоянию между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$.

Предел не зависит от выбора кривой *l*, проходящей через точку z_0. Следовательно, предел в точке z_0 постоянен, то есть одинаков во всех направлениях.

Геометрический смысл модуля производной: величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Если $|f'(z_0)| > 1$, то $|f'(z_0)|$ называется ***коэффициентом растяжения***.

Если $|f'(z_0)| < 1$, то $|f'(z_0)|$ называется ***коэффициентом сжатия***.

Рассмотрим аргумент производной в точке z_0:

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где α_1 и α_2 — углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и w.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0).$$

Геометрический смысл аргумента производной: $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который надо повернуть касательную к кривой l в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0. Другими словами, $\arg f'(z_0)$ — это угол между отображенным и первоначальным направлениями касательных к кривым l и L в точках z_0 и w_0 соответственно.

Пример. Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $f(z) = \frac{1}{2} z^2$ в точке $z_0 = 4 - 2i$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{1}{2} z^2$ аналитична в точке $z_0 = 4 - 2i$. Так как $f'(z) = z$, то

$$|f'(z_0)| = |z_0| = |4 - 2i| = 2\sqrt{5} > 1.$$

Коэффициент растяжения функции $f(z) = \frac{1}{2} z^2$ в точке $z_0 = 4 - 2i$ равен $2\sqrt{5}$ (плоскость растягивается).

6.2. Понятие конформного отображения

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется ***конформным*** (то есть отображением, сохраняющим форму), если в точке z_0 оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений.

Конформное отображение обладает свойством консерватизма углов и подобия в малом.

Свойство консерватизма углов и подобия в малом:

1) если при отображении $w = f(z)$ кривые l_1 и l_2 переходят соответственно в кривые L_1 и L_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым l_1 и l_2 в точке z_0 будет равен углу Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым L_1 и L_2 в точке w_0, то есть $\varphi = \Phi$;

2) если в плоскости комплексного переменного z возьмем бесконечно малый круг с центром в точке z_0, то в плоскости w ему будет соответствовать бесконечно малый круг с центром в точке w_0.

Конформное отображение называется ***конформным отображением первого рода***, если при отображении $w = f(z)$ углы между соответствующими направлениями равны не только по величине, но и по направлению отсчета.

Конформное отображение называется ***конформным отображением второго рода***, если при отображении $w = f(z)$ углы сохраняются только по абсолютной величине и изменяется направление их отсчета на противоположное.

Например, отображение $w = z$ — отображение первого рода; отображение $w = \bar{z}$ — отображение второго рода.

Далее будем рассматривать конформные отображения первого рода.

Отображение $w = f(z)$ называется ***конформным в области D***, если оно конформно в каждой точке этой области.

Функция $w = f(z)$ называется ***однолистной*** в области *D*, если она в различных точках области *D* принимает различные значения.

Критерий конформности. Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным в области *D*, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $w = f(z)$ была однолистной и аналитической, причем $f'(z) \neq 0$ для всех z из *D*.

6.3. Общие теоремы теории конформных отображений

Теорема Римана. Существует аналитическая функция $w = f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную плоскую область *D* на другую *G*, если только ни одна из этих областей не совпадает со всей плоскостью с одной выключенной точкой или всей расширенной плоскостью.

Существует бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих отображение области *D* на область *G*. Единственность отображающей функции $w = f(z)$ будет обеспечена, если выполняется одно из условий:

1) заданная точка z_0 области *D* перешла в заданную точку w_0 области *G*, а линия, выходящая из точки z_0, повернулась на данный угол φ ($w_0 = f(z_0)$, $\arg f'(z_0) = \varphi$);

2) точка z_0 области *D* и точка z_1 границы *l* перешли соответственно в точку w_0 области *G* и в точку w_1 границы *L* ($w_0 = f(z_0), w_1 = f(z_1)$);

3) три граничные точки z_1, z_2, z_3 области *D* перешли в три граничные точки w_1, w_2, w_3 области *G* ($w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$), при этом если при движении по границе *l* от z_1 к z_3 через z_2 область *D* остается слева (справа), то при движении по границе *L* от w_1 к w_3 через w_2 область *G* также должна оставаться слева (справа).

В случаях 2) и 3) предполагается, что функция $w = f(z)$ непрерывна в замкнутой области *D*.

Принцип взаимно однозначного соответствия границ. Пусть область *D* ограничена гладким или кусочно-гладким контуром *l*. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в *D* и на *l*, отображает контур *l* на некоторый контур *L*, ограничивающий область *G*, причем когда точка z обходит контур *l* так, что область *D* остается слева, соответствующая точка w обходит контур *L* так, что область *G* также остается слева. Тогда область *D* с помощью функции $w = f(z)$ отобразится взаимно однозначно и конформно на область *G*.

Принцип симметрии. Пусть область *D*, содержащая в составе своей границы некоторый прямолинейный отрезок *l* (конечный или бесконечной длины), отображается функцией $w = f(z)$ на область *G* так, что *l* переходит в прямолинейный отрезок *L*, входящий в границу области. Обозначим соответственно через γ и *Г* прямые, на которых лежат отрезки *l* и *L*. Принцип симметрии заключается в следующем: если функция $w = f(z)$ аналитична в области *D*, а также во всех внутренних точках граничного отрезка *l*, то эта функция аналитична также в области D^*, симметричной с *D* относительно прямой γ, и обладает тем свойством, что любые две точки z_1 и z_2 (из которых одна находится в области *D*), симметричные относительно γ, отображаются в точки w_1 и w_2, симметричные относительно прямой *Г*.

Пример. В области *D*, ограниченной контуром $l: x^2+y^2-2x=0$, задана функция $w=3z+i$. В какую область перейдет *D* при отображении, осуществляемом этой функцией?

Решение. Пусть $z=x+iy,\ w=u+iv$. Тогда $w=3z+i=3x+i(3y+1)$.

$$u=3x,\ v=3y+1.$$

Выразим *x* и *y* через *u* и *v*:

$$x=\frac{u}{3},\ y=\frac{(v-1)}{3}.$$

Контур *l* отображается в контур *L*:

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2+\left(\frac{v-1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{u}{3}=0 \text{ или } (u-3)^2+(v-1)^2=9.$$

Получили окружность радиуса 3 с центром в точке $M(3;1)$.

Положительное направление обхода контура *l* соответствует положительному направлению обхода контура *L*. Проверим: зададим контуры параметрическими уравнениями:

$$l:\ \ x=1+\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$L:\ u=3+3\cos\varphi,\ v=3\sin\varphi+1,\ 0\le\varphi<2\pi.$$

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ область *D* отобразится в область *G* — внутренность области, ограниченной окружностью *L*.

Можно проверить по-другому: возьмем любую точку $z\in D$ и найдем ее образ при отображении $w=3z+i$. Например, $z=1$ переходит в точку $w=3+i$, которая находится внутри контура *L*.

Конформные отображения, осуществляемые функцией $w=az+b$

Линейная функция $w=az+b$, где $a(a\neq 0)$ и b — постоянные комплексные числа, осуществляет конформное отображение всей плоскости z на всю плоскость w, так как при любом z имеем $w'=a\neq 0$.

Рассмотрим частные случаи:

1) $w=z+b$ осуществляет преобразование параллельного переноса;

2) $w=e^{i\alpha}z$, где α — действительное число, осуществляет преобразование поворота вокруг начала координат на угол α;

3) $w = rz$, подобия с центром подобия в начале координат, r — коэффициент подобия.

Общий случай линейного отображения

$$w = az + b,\ a = re^{i\alpha}$$

осуществляется путем последовательного применения следующих действий:

1) поворот на угол α вокруг начала координат;

2) преобразование подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным r;

3) параллельный перенос с помощью вектора, соответствующего комплексному числу b.

Замечание

Линейное преобразование оставляет неподвижными точки $z_1 = \infty,\ z_2 = \dfrac{b}{1-a}$. При $a = 1$ получаем $z_2 = \infty$, то есть в этом случае обе неподвижные точки совпадают.

Пример. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $1+i$, 0, 2 в плоскости w.

Решение

Первый способ. Треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;0),\ B(0;1),\ C(0;0)$ переходит в подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ с помощью следующих действий:

1) поворот вокруг начала координат на угол $\dfrac{5}{4}\pi$, что соответствует преобразованию $w_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi}z$;

2) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом $r = \sqrt{2}$ $\left(\dfrac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2}\right)$: $w_2 = \sqrt{2}w_1$;

3) параллельный перенос, смещающий точку $C(0;0)$ в точку $C_1(1;1)$: $w = w_2 + 1 + i$.

Учтем, что $e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В итоге окончательно получим

$$w = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 1 + i = (1-z)(1+i).$$

Второй способ. Функцию будем искать в виде $w = az + b$. Найдем коэффициенты a и b. По условию задачи точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ должны перейти соответственно в точки $w_1 = 1 + i$ и $w_2 = 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 1 + i = b, \\ 0 = a + b. \end{cases}$$

Из системы имеем $a = -1 - i,\ b = 1 + i$. Окончательно получаем

$$w = (1 + i)(1 - z) .$$

Конформные отображения, осуществляемые функцией $w = \dfrac{1}{z}$

Точки M и M' называются ***симметричными*** относительно окружности *Г*, если выполнены следующие условия:

1) точки находятся на одном луче, выходящем из центра окружности;
2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности: $OM \cdot OM' = R^2$.

Точки окружности *Г* симметричны сами по себе относительно этой окружности.

Для центра *O* окружности *Г* симметричной точкой относительно *Г* является бесконечно удаленная точка.

Если центр окружности *Г* находится в начале координат и одна из симметричных относительно *Г* точек изображает комплексное число z, то другая соответствует комплексному числу $\dfrac{R^2}{\bar{z}}$.

Преобразование $w = \dfrac{1}{z}$ состоит из двух симметричных отражений: относительно единичной окружности и относительно действительной оси и называется ***инверсией***.

Преобразование $w = \dfrac{1}{z}$ является конформным во всей расширенной плоскости, причем точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$, а точке $z = \infty$ соответствует точка $w = 0$.

Считают, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке одной из плоскостей (z или w) равен углу между образами этих линий в начале координат другой плоскости.

Окружности, а также прямые при отображении $w = \frac{1}{z}$ переходят в окружности или прямые. Неподвижные точки: $z_1 = +1,\ z_2 = -1$.

Пример. Найти образ окружности $|z| = 3$ при отображении $w = \frac{25}{z}$.

Решение. Первый способ. Пусть $z = x + iy,\ w = u + iv$. Соотношение перепишется в виде

$$u + iv = \frac{25}{x + iy} = \frac{25x}{x^2 + y^2} - i\frac{25y}{x^2 + y^2}.$$

$$u = \frac{25x}{x^2 + y^2},\quad v = -\frac{25y}{x^2 + y^2}.$$

Уравнение окружности $|z| = 3$ в декартовых координатах запишется в виде $x^2 + y^2 = 9$.

В итоге получим

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2,$$

то есть окружность радиуса $R = \frac{25}{3}$ с центром в начале координат в плоскости w.

Второй способ. Запишем z и w в показательной форме:

$$z = \rho e^{i\varphi},\ w = re^{i\theta}.$$

При отображении $w = \frac{25}{z}$ имеем $re^{i\theta} = \frac{25}{\rho e^{i\varphi}}$, откуда $r = \frac{25}{\rho},\ \theta = -\varphi$, где $\rho = 3$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Значит, $w = \frac{25}{3}e^{-i\varphi}$ есть окружность радиуса $r = \frac{25}{3}$ с центром в начале координат, проходимая по часовой стрелке, когда исходная окружность проходится против часовой стрелки.

Третий способ. Из равенства $w = \frac{25}{z}$ имеем $z = \frac{25}{w}$. Подставим данное выражение для z в уравнение окружности $|z| = 3$ и используем свойство модуля. Получим

$$\left|\frac{25}{w}\right| = 3\text{, или } \frac{25}{|w|} = 3,$$

откуда $|w| = \frac{25}{z}$.

Итак, образом окружности $|z| = 3$ при отображении $w = \frac{25}{z}$ будет окружность $|w| = \frac{25}{z}$.

Конформные отображения, осуществляемые дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$

Дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — комплексные постоянные и $ad - bc \neq 0$, взаимно однозначно и конформно отображает расширенную плоскость z на расширенную плоскость w. Данное преобразование называется ***дробно-линейным***.

Каждое дробно-линейное преобразование может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразований вида $w = \frac{1}{z}$.

Свойства дробно-линейного преобразования

1. *Круговое свойство*. Дробно-линейное преобразование окружность отображает в окружность (прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса).

2. *Свойство симметрии*. Две точки z_1 и z_2, симметричные относительно окружности *C*, отображаются в точки w_1 и w_2, симметричные относительно окружности *Г*, на которую отображается окружность *C*.

Следствие. Если при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ прямая или окружность *C* переходит в окружность *Г* и одна из двух точек, симметричных относительно *C*, переходит в центр окружности *Г*, то другая точка необходимо переходит в бесконечно удаленную точку.

3. Существует единственная дробно-линейная функция, которая три заданные точки z_1, z_2, z_3 плоскости z переводит в три заданные точки w_1, w_2, w_3 плоскости w. Она имеет вид

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Замечание. Если одна из точек z_1, z_2, z_3 или w_1, w_2, w_3 является бесконечно удаленной, то надо заменить единицами все разности, содержащие эту точку.

Пример. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$ в точки $w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1.$

Решение. Составим соотношение

$$\frac{w+1}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1-(-1)}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1}.$$

Тогда $w = i\dfrac{i-z}{i+z}.$

6.4. Конформные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями

Степенная функция $w = z^n$

Рассмотрим степенную функцию $w = z^n$, $n \geq 2$ — целое положительное число.

Отображение, осуществляемое степенной функцией, является конформным во всей плоскости, за исключением точки $z = 0$. Если $z \neq 0$, то $w' = nz^{n-1}$; если $z = 0$, то $w' = 0$.

Угол $0 < \varphi < \dfrac{2\pi}{n}$ данной степенной функцией отображается взаимно однозначно на всю плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\varphi = 0$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$ — нижний край разреза. Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые плоскость z разбивают лучи $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$ (k — целое число), причем при отображении угла $\dfrac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

на плоскость с разрезом лучу $\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ соответствует верхний, а лучу $\varphi < \frac{2k\pi}{n}$ — нижний край разреза.

Пример. Отобразить сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ перешла в центр $w_1 = 0$, а точка $z_2 = 0$ — в точку $w_2 = 1$.

Решение. Сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ сначала отобразим с помощью функции $t = z^4$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$. Точка $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ перейдет в точку $t_1 = z_1^4 = i$, а $z_2 = 0$ перейдет в точку $t_2 = 0$.

Далее отобразим полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $t_1 = i$ перешла в центр круга. Используя формулу $w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, получим

$$w = e^{i\varphi}\frac{t - i}{t + i}.$$

Точка $t_2 = 0$ перейдет в точку $w_2 = 1$ при $e^{i\varphi} = -1$.

В итоге получим

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i}.$$

Радикал $w = \sqrt[n]{z}$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к степенной функции $z = w^n$, является n-значной, то есть каждому $z = \rho e^{i\varphi}\ (z \neq 0,\ z \neq \infty)$ отвечает n значений w по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Каждая из функций w_k есть ветвь многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$. Точка $z = 0$ является точкой ветвления данной функции.

На расширенной z-плоскости с любым разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$, в частности с разрезом вдоль положительной части действительной оси, можно выделить n однозначных ветвей w_k. Данные ветви однолистно отображают расширенную плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси на секторы:

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} < \arg w < \frac{2k\pi}{n} \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Показательная функция $w = e^z$

Отображение, осуществляемое степенной функцией $w = e^z$, конформно во всей плоскости, так как $w' = e^z \neq 0$ в любой конечной точке плоскости z.

Если z разбить на полосы $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то каждая из этих полос отобразится функцией $w = e^z$ взаимно однозначно на всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси. При этом считаем, что нижней границе $y = 2k\pi$ полосы соответствует верхний край разреза, а верхней границе $y = 2(k+1)\pi$ — нижний край разреза. При этом точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $z_k = x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ переходят в одну и ту же точку плоскости w.

Логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln} z$

Логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln} z$ определяется как функция, обратная показательной. Для определенности будем рассматривать главное значение логарифма z

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \ -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Данная функция аналитична во всех конечных точках $z \neq 0$ и $w' = \dfrac{1}{z} \neq 0$. Следовательно, отображение с помощью функции $w = \ln z$ конформно во всех таких точках.

Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \mathrm{Ln} z$, причем $\mathrm{Ln} 0 = \infty$ и $\mathrm{Ln} \infty = \infty$.

Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведет вновь к первоначальной ветви функции $\mathrm{Ln} z$. Такие точки ветвления называются ***логарифмическими***.

Тригонометрические функции $w = \sin z,\ w = \cos z$

Для любого комплексного числа имеют место формулы

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Пример. Во что отображается полуполоса $0 < x < \pi,\ y > 0$ с помощью функции $w = \cos z$?

Решение. Представим функцию $w = \cos z$ следующим образом:

$$w = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Если точка z пробегает участок границы от $y = \infty$ до $y = 0$ (при $x = 0$), то соответствующая точка в плоскости w пробегает участок от $u = +\infty$ до $u = 1$ (при $v = 0$). Если точка z пробегает участок от $u = 1$ до $u = -1$ (при $v = 0$), то w опишет участок от $u = +\infty$ до $u = 1$ (при $v = 0$). Если точка z пробегает участок границы от $y = 0$ до $y = +\infty$ (при $x = \pi$), то $w = -\operatorname{ch} y$ пробегает участок от $u = -1$ до $u = -\infty$ (при $v = 0$).

Таким образом, если точка z обходит границу полуполосы $0 < x < \pi,\ y > 0$ так, что полуполоса остается слева, то точка w пробегает справа налево всю действительную ось, и поэтому из принципа взаимно однозначного соответствия границ следует, что функция $w = \cos z$ отображает рассматриваемую полуслоскость на нижнюю полуплоскость w.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти коэффициент растяжения и угол поворота для отображения $\omega = z^2 - z$ в точке $z_0 = 1 - i$.

Ответ: $k = \sqrt{5}, \varphi = -\text{arctg}2$.

2. Найти линейное отображение $w = az + b$, оставляющее точку $z_0 = -i$ неподвижной и переводящее точку $z_1 = 1 - 2i$ в точку $w_1 = 2 - 3i$.

Ответ: $w = 2z + i$.

3. Найти образ множества $0 < \text{Re}\, z < 1$ при отображении $w = \dfrac{1}{z}$.

Ответ: $\left| w - \dfrac{1}{2} \right| > \dfrac{1}{2}, u > 0$.

4. Найти функцию, отображающую круг единичного радиуса на нижнюю полуплоскость так, что точки 1, i, $-i$ переходят соответственно в $1, 0, -1$.

Ответ: $\omega = \dfrac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z + 3i + 1}$.

5. Найти функцию, отображающую плоскость z, разрезанную по отрезку, соединяющему точки $1 + i$ и $2 + 2i$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{z - 1 - i}{2 + 2i - z}}$.

6. На что отображает функция $w = \ln z$ полукольцо $\{r \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le \pi\}$ в плоскости z?

Ответ: на прямоугольник $\{\ln r \le u \le \ln R, 0 \le v \le \pi\}$.

7. Решение типового варианта расчетной работы

Задача № 1

Показать на комплексной плоскости область, заданную следующими неравенствами: $1 < |z+i| < 2,\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Решение

Множество $1 < |z+i| < 2$ есть кольцо, ограниченное окружностями радиусов $R_1 = 1,\ R = 2$ с центром в точке $-i$, при этом точки окружностей не принадежат множеству.

Множество $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ — это угол между лучами $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

Итак, область, заданная по условию, представляет собой часть кольца, ограниченную двумя лучами $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$ и окружностями радиусов $R_1 = 1,\ R = 2$ с центром в точке $-i$.

Задача № 2

Задано комплексное число $z = \left(\frac{i^7 + 3}{1 + i^{17}}\right)^2$.

1. Определить действительную и мнимую части комплексного числа.
2. Представить данное число в тригонометрической и показательной формах.

Решение

1. Так как

$$i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i,$$

$$i^{17}=i^{16}\cdot i=(i^2)^8\cdot i=(-1)^8\cdot i=i,$$

то

$$\frac{i^7+3}{1+i^{17}}=\frac{-i+3}{1+i}=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{3-3i-i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{2-4i}{2}=1-\frac{1}{2}i.$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} z=1,\ \operatorname{Im} z=-\frac{1}{2}.$$

2. Найдем модуль и аргумент полученного комплексного числа:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \ |z|=\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{-1/2}{1}=\operatorname{arctg}(-0{,}5).$$

Итак,

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \ z=\frac{\sqrt{5}}{2}\big(\cos(\operatorname{arct}(-0{,}5))+i\sin(\operatorname{arct}(-0{,}5))\big)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\big(\cos(-\operatorname{arct}(0{,}5))+i\sin(-\operatorname{arct}(0{,}5))\big);$$

$$z=|z|e^{i\varphi},\ \ z=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i(\operatorname{arct}(-0{,}5))}=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i(-\operatorname{arct}(0{,}5))}.$$

Ответ: 1) $\operatorname{Re} z=1,\ \operatorname{Im} z=-\dfrac{1}{2}$;

2) $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\big(\cos(-\operatorname{arct}(0{,}5))+i\sin(-\operatorname{arct}(0{,}5))\big)$; $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{i(-\operatorname{arct}(0{,}5))}$.

Задача № 3

Вычислить:

$$\sqrt[3]{-4+4i\sqrt{3}}\ .$$

Решение

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z=-4+4i\sqrt{3}$:

$$|z|=\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})}=8;\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{-4}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{-4+4i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}\right).$$

При $k=0,1,2$ получаем

$$k=0,\quad z_0=22\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Ответ: $\sqrt[3]{-4+4i\sqrt{3}}$; $z_0=22\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$; $z_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$; $z_2=2\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

Задача № 4

По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$w=z^2-2z.$$

Решение

Выделим действительную и мнимую части функции:

$$w=z^2-2z=(x+iy)^2-2(x+iy)=x^2-2x-y^2+i(2xy-y),$$

$$u(x,y)=x^2-2x-y^2,\ \ v(x,y)=(2xy-y).$$

Проверим условия Даламбера — Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2,\ \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\ .$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Условия Даламбера — Эйлера выполнены, поэтому функция является аналитичной на всей комплексной плоскости.

Вычислим производную по формуле $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$w'(z) = 2x - 2 + 2yi = 2z - 2\ .$$

Ответ: $w'(z) = 2z - 2$.

Задача № 5

Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$2e^x \sin y + 3x - 2y\ .$$

Решение

Используем условия Даламбера — Эйлера (Коши — Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \sin y + 3 = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \cos y - 2 = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Найдем $v(x, y)$. Проинтегрируем по y функцию $v(x, y)$ из первого условия Даламбера — Эйлера:

$$v = \int (2e^x \sin y + 3)dy = (-2e^x \cos y + 3y) + C(x)\ .$$

Определим $C(x)$, используя второе условие:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^x \cos y + C'(x) = -2e^x \cos y + 2\ ,$$

$$C'(x) = 2\ ,$$

$$C(x) = 2x + C_1 .$$

Подставим в $v(x, y)$ найденное $C(x)$:

$$v(x, y) = -2e^x \cos y + 3y + 2x + C_1 .$$

Итак,

$$f(z) = f(x+iy) = (2e^x \sin y + 3x - 2y) + i(-2e^x \cos y + 3y + 2x + C_1) =$$

$$= -2ie^z + (2i+3)z + iC_1 .$$

Ответ: $f(z) = -2ie^z + (2i+3)z + iC_1$.

Задача № 6

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right).$$

Решение

Общий член ряда есть комплексное число, действительная часть которого $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ и мнимая часть $y_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Ряды сходятся по признаку Лейбница, поэтому данный по условию ряд также сходится.

Составим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{2n-1} \right)^2 + \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} .$$

Исследуем сходимость ряда по признаку сравнения:

$$\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{\sqrt{8n^2}}{4n^2} = \frac{1}{n\sqrt{2}} ,$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$ расходится, значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1}$ также расходится.

Поэтому данный по условию ряд сходится, но не абсолютно.

Ответ: ряд сходится, но не абсолютно.

Задача № 7

Найти круг сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n .$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(\sqrt{n}-i)}{\sqrt{n-1}-i}z\right|=2|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{n}-i)(\sqrt{n-1}+i)}{(\sqrt{n-1}-i)(\sqrt{n-1}+i)}\right|=$$

$$=2|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\sqrt{n(n-1)}+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})i)}{n}\right|=2|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=2|z|.$$

По признаку Даламбера данный по условию ряд сходится при

$$|z|<\frac{1}{2} .$$

Геометрически данный ряд сходится внутри круга $|z|=\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$ и расходится вне этого круга, то есть искомый радиус сходимости $R=\frac{1}{2}$.

На границе круга сходимости ряд расходится, так как во всех точках этой границы общий член ряда не стремится к нулю.

Ответ: круг сходимости: $|z|<\frac{1}{2}$.

Задача № 8

Функцию $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

Решение

Используем разложение в ряд Тейлора функции e^z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Заменим в разложении z на $\frac{1}{z}$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

Тогда

$$z \cdot e^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \ldots$$

Данное разложение имеет место при любом $z \neq 0$.

Ответ: $z \cdot e^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \ldots$

Задача № 9

Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Решение

Особой точкой является точка $z = 0$. В данной точке функция не определена. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности данной точки:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Тогда

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots$$

Так как в разложении отсутствует главная часть, то точка $z = 0$ является устранимой особой точкой.

Данный результат следует и из определения устранимой особой точки:

$$\lim_{z\to 0} = \frac{\sin z}{z} = 1 .$$

Ответ: $z = 0$ является устранимой особой точкой.

Задача № 10

Вычислить интеграл

$$\int_{AB} (1+i-2\bar{z})dz,\ AB: y = x^2, z_A = 0, z_B = 1+i .$$

Решение

Выделим действительную и мнимую части у подынтегральной функции:

$$1+i-2\bar{z} = 1+i-2(x-iy) = 1-2x+i(1+2y) ,$$

$$u(x,y) = 1-2x,\ v(x,y) = 1+2y .$$

Вычислим интеграл, используя формулу (3.2):

$$\int_{AB} (1+i-2\bar{z})dz = \int_{AB} (1-2x)dx-(1+2y)dy + i\int_{AB} (1+2y)dx+(1+2x)dy .$$

Так как $y = x^2, dy = 2xdx\ (0 < x < 1)$, то

$$\int_{AB} (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \left[(1-2x-(1+2x^2) \right] dx + i\int_0^1 \left[1+2x^2+(1-2x)2x \right] dx = -2+\frac{4}{3}i .$$

Ответ: $-2+\frac{4}{3}i$.

Задача № 11

Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint_L \frac{\ln(z+3)}{z^2} ,$$

где (L) – окружность $|z| = 1$.

Решение

В круге $|z|=1$ содержится одна особая точка $z_0=0$ — полюс второго порядка. Найдем вычет в точке $z_0=0$:

$$\underset{0}{res}\, f(z)=\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{\ln(z+3)}{z^2}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\ln(z+3)\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}.$$

Вычислим интеграл:

$$\oint_L \frac{\ln(z+3)}{z^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi i.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi i$.

Задача № 12

Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

где (L) — окружность $|z-1-i|=\sqrt{2}$.

Решение

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{(z-1)^2(z-i)(z+i)}.$$

Особые точки функции: $z_1=1$ — полюс второго порядка, $z_2=i$ — простой полюс, $z_3=-i$ — простой полюс. Внутри контура L находятся точки $z_1=1$, $z_2=i$. Найдем вычеты в точках z_1, z_2:

$$\underset{1}{res}=\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'=\lim_{z\to 1}\left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$\underset{i}{res}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{(i-1)^2 2i}=\frac{1}{4}.$$

Вычислим интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i(\underset{1}{res}\, f(z)+\underset{i}{res}\, f(z))=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi i}{2}$.

Задача № 13

Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}.$$

Решение

Используя подстановку $e^{ix} = z$, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2} = \frac{4}{i}\oint_L \frac{zdz}{(4z^2+10z+4)^2} = \frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{n} resF(z_k),$$

где $L: |z| = 0,\ 0 \le x \le 2\pi;\ F(z) = \dfrac{z}{(4z^2+10z+4)^2} = \dfrac{z}{16\left(z+\dfrac{1}{2}\right)(z+2)}$.

Внутри единичного круга находится только один полюс (двукратный):

$$z_1 = \frac{-5+\sqrt{5^2-4^2}}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Найдем вычет функции $F(z)$ относительно этого полюса:

$$\underset{z_1}{res}\, F(z) = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{z(z-z_1)^2}{4(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)' = \frac{5}{108}.$$

Итак,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2} = 8\pi\cdot\frac{5}{108} = \frac{5\pi}{27}.$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{27}$.

Задача № 14

Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

Решение

Функция $\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением полюса $z = 3i$. Найдем вычет относительно данного полюса:

$$\underset{3i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{(z-3i)^2}{(z^2+9)^2}\right)' = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)' = -\frac{i}{108}.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{108}\right) = \frac{\pi}{54}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{54}$.

8. Расчетная работа по курсу «Функции комплексного переменного»

Вариант 1

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z+i|<2$, $0<\operatorname{Re} z\le 1$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{1}{1-i}.$$

3. Решить уравнение

$$z^6+2z^3+2=0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^2-iz.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$3e^x\sin y.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln n}{n^2}+\frac{(-1)^n i}{n}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+3i)^{n+1}}.$$

8. Функцию $z^2\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \frac{\bar{z}}{z}dz$; L — граница области: $\{1<|z|<2, \operatorname{Re} z>0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz,$$

где (L) — окружность $|z|=2$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z^3+z)(z^2+4)},$$

где (L) — окружность $z=i+\frac{3}{2}e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

Вариант 2

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-i| \le 1$, $0 < \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

3. Решить уравнение

$$z^4 + 16 = 0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$x^3 - 3xy^2.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2}{2^n} + \frac{i\ln n}{n^2}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i+2)^n}{(4+3i)^{n-1}}.$$

8. Функцию $z\cos\pi\dfrac{z}{z+2i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -2i$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz)$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\cos z}{z^3} dz ,$$

где (L) – окружность $|z| = 1$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z dz}{(z-1)(z-3)(z+2)} ,$$

где (L) – окружность $z = 4 + 4e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\sqrt{2}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} dx$.

Вариант 3

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-i|\le 2$, $0<\operatorname{Im} z<2$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

3. Решить уравнение

$$z^6-64=0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^2.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$x^2-y^2+2x.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{tg}\frac{1}{n}+\frac{i}{(2n+1)^2}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^n\cdot 5^n}{(4-3i)^n}.$$

8. Функцию $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L |z|\bar{z}dz$; L: $\{|z|=4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{e^z}{z-\pi i} dz,$$

где (L) – окружность $|z|=4$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{zdz}{(z-1)^2(z-i)},$$

где (L) — окружность $z=2+2e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2} dx$.

Вариант 4

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z+i|>1$, $-\frac{\pi}{4}<\arg z<0$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\frac{i^5+2}{1+i^{19}}\right)^2.$$

3. Решить уравнение

$$z^6-2z^3+2=0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^3.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$\frac{x}{x^2+y^2}.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^3}{3^n}+\frac{(-1)^n i\ln(n+1)}{n+1}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i-2)^{2n}}{(1+2i)^n\left(\sqrt{10}\right)^n}.$$

8. Функцию $\sin\frac{z+i}{z-i}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=i$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\cos 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L (\operatorname{ch} z + z)dz$; L: $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \le 0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{e^z}{(z - \pi i)^2} dz ,$$

где (L) — окружность $|z| = 4$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{(z+2)}{(z-1)(z+1)(z+4)} dz ,$$

где (L) — окружность $z = 2 + 2e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - \sqrt{21}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx$.

Вариант 5

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-1-i|<1$, $|\arg z| \le \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[6]{i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 - 2z + 2.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$\frac{x}{x^2+y^2} - 2y.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arcsin\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i-2)^{2n}}{(1+2i)^n\left(\sqrt{10}\right)^n}.$$

8. Функцию $\sin\frac{z}{z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\frac{\operatorname{sh}2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$; L: $\{|z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\cos z}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} dz ,$$

где (L) — окружность $|z| = 2$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{(z + 2 + i)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^n (2 - 3i)^n} dz ,$$

где (L) — окружность $z = 2 + 2e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2 \left(x^2 + 4\right)}$.

Вариант 6

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z| < 2$, $-\frac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{2}{1-3i}.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[4]{1+i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^3 + z.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$x^3 - 3xy^2 + 4xy.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n i}{\ln n}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n\left(\sqrt{3}\right)^n}{n!}.$$

8. Функцию $ze^{\frac{1}{z-2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $\dfrac{\operatorname{ch}2z - 1}{\operatorname{sh}z - z + z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой $\int\limits_{AB}\left(3z^2+2z\right)dz$; AB: $\left\{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\right\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\sin z}{\left(z^3+4z\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz,$$

где (L) — окружность $|z|=1$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^4(z+2)},$$

где (L) — окружность $z=e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$.

Вариант 7

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z| \le 1$, $\arg(z+i) > \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[3]{2-2i}\ .$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 - (2+i)z + 1.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{i}{n\ln n}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z)^n\left(\sqrt{2}\right)^n}{(1+2i)^{2n}}.$$

8. Функцию $e^{\frac{z}{z-3}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz$; L: $\{|z| = R, \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\mathrm{tg} z}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} dz,$$

где (L) — окружность $|z| = 1$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z+1)(z-2)(z-4)},$$

где (L) — окружность $z = 1 + 2e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t - 2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Вариант 8

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $1<|z-1|\le 2$, $\operatorname{Im} z \ge 0, \operatorname{Re} z < 1$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{1-i}{1+i}.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=\sin z.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$2xy+3x.$$

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2n+1}-\frac{i}{n^2}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i+1)^n}{\sqrt{5^n}\,(1-3i)^n}.$$

8. Функцию $\sin\dfrac{2z}{z-4}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $ze^{\frac{4}{z^3}}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC}\left(z^2+1\right)dz$; ABC — ломаная $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+9},$$

где (L) — окружность $|z+2i|=3$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z+1)^2(z-i)},$$

где (L) – окружность $z=4e^{it}-e^{-it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{\left(x^2-10x+29\right)^2}dx$.

Вариант 9

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $1 \le |z-i| < 2$, $\operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \le 0$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3.$$

3. Вычислить

$$\sqrt{1-i}\,.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 + 9\,.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1},$$

если $f(1)=0$.

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+i\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(2n-1)(3+4i)^n}\,.$$

8. Функцию $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{AB} e^{|z|^3}\operatorname{Im} z dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 1+i, z_B = 0$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)},$$

где (L) — окружность $|z-1| = \frac{3}{4}$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{5z+12}{(z-1)^2(z^2+16)}dz,$$

где (L) — эллипс $4x^2 + 9y^2 = 36$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.

Вариант 10

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z|<2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $\arg z < \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^2.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[3]{i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 + 3z + 4.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4,$$

если $f(0)=0$.

6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2-4n+5} + i\frac{n}{1000n+1}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3-4i)^n \frac{z^n}{n}.$$

8. Функцию $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L (\sin iz + z)dz$; L: $\{|z| = 1, \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{\left(z^2+9\right)^2},$$

где (L) — окружность $|z+2i| = 4$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{\left(z^2-1\right)(z-3)^2},$$

где (L) — астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t - 6}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}$.

Вариант 11

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z|>1$, $-1<\operatorname{Im} z\le 1$, $0<\operatorname{Re} z\le 2$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(\frac{3+3i}{2-2i}\right)^2.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[6]{-8}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^3+2z.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x>0.$$

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}-i\frac{1}{n(n+3)}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}z^n}{2n+1}.$$

8. Функцию $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=a$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1 + 2i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z^2}{z - 2i} dz ,$$

где (L) — окружность $|z| = 4$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{5z + 6}{(z + 1)(z^2 - 9)} dz ,$$

где (L)— эллипс $2x^2 + y^2 = 4$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3} + \cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{\left(x^2 + 9\right)^2} dx.$

Вариант 12

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-1|>1$, $-1<\operatorname{Im} z\le 0$, $0\le \operatorname{Re} z<3$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$(2-3i)^2.$$

3. Вычислить

$$\sqrt{3+4i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^3-z+7.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$\frac{x}{x^2+y^2}+2x+3y,$$

если $f(1)=5i$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n-1)!}-\frac{i}{n(n+1)}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n}.$$

8. Функцию $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\pi$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\sin 6z-6z}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{AB}(2z+1)dz$; AB: $\left\{y=x^3, z_A=0, z_B=1+i\right\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2},$$

где (L) — окружность $|z+1|=\frac{3}{2}$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-2)^2(z^2+10)},$$

где (L) — окружность $z=3e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(2+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^5}$.

Вариант 13

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z+i|<1$, $-\frac{3\pi}{4}\le \arg z \le -\frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i).$$

3. Решить уравнение

$$z^8-4z^4+8=0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$e^x\sin y+2xy+5y,$$

если $f(0)=10$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n+5^n}{10^n}+\frac{i}{(n+2)!}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(2+1)^n}.$$

8. Функцию $z\sin\pi\frac{z+2}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $z\sin\frac{3}{z^3}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz;$ AB: $\{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. BC — отрезок, $z_B = 1, z_C = 0$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+9},$$

где (L) — окружность $|z-2i|=2$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z+5}{z^2-1}dz,$$

где (L) — окружность $|z-1|=1$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+10\right)^2}$.

Вариант 14

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-i|\leq 1$, $-\frac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$(5+7i)(7+5i).$$

3. Вычислить

$$\sqrt[8]{1}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=\cos z.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$\frac{y}{x^2+y^2}+y,$$

если $f(1)=15$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n(n+1)}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{3^n\sqrt{n}}.$$

8. Функцию $z\cos\pi\frac{z+3}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \left(\cos iz + 3z^2\right)dz$; L: $\left\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\sin z}{z+i}dz\ ,$$

где (L) — окружность $|z+i| = 4$.

13. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+1}\,,$$

где (L)— окружность $|z| = 2$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

15. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{\left(x^2+8x+17\right)^2}dx$.

Вариант 15

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z > -1$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2-2i}.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[3]{-2+2i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^3 + 10.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + e^x \sin y + 3.$$

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{i}{n!} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-3i)^n}.$$

8. Функцию $z^2 \sin\dfrac{z+3}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $\dfrac{\operatorname{sh}4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L |z|dz$; L: $\left\{|z| = \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4}\right\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{\left(z^2+9\right)^2},$$

где (L) — окружность $|z+2i| = 4$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\cos z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz,$$

где (L)— окружность $|z| = 2$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{\left(x^2+4\right)^2}dx$.

Вариант 16

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $z\bar{z} \le 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3.$$

3. Решить уравнение

$$z^8 + 4z^4 + 8 = 0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^3 - 2z.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$\frac{x}{x^2 + y^2},$$

если $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+2)} - \frac{2^n i}{n!}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n z^n}{n^2}.$$

8. Функцию $z\sin\dfrac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $\dfrac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC} (z^9 + 1) dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{e^{2z}}{z - \frac{\pi}{2} i} dz ,$$

где (L) — окружность $|z| = 2$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z^4}{z^2 + 9} dz ,$$

где (L) — эллипс $4x^2 + 25y^2 = 100$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$.

Вариант 17

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $1 < z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$(-1+i)^5 .$$

3. Вычислить

$$\sqrt[3]{1-i} .$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^3 + 3z + z .$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$\frac{y}{x^2+y^2} ,$$

если $f(1) = 7$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^n} + i\frac{3^n}{n!}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)^2} .$$

8. Функцию $z\cos\dfrac{z}{z-3}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=R}\bar{z}dz$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_{L}\frac{e^{z}}{z^{4}+8z^{2}-9}dz,$$

где (L) — окружность $|z|=2$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_{L}\frac{z+3}{(z-3)(z^{2}+1)}dz,$$

где (L) — окружность $z=5e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{10}+3\cos t\right)^{2}}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^{2}+3\right)^{2}\left(x^{2}+15\right)^{2}}$.

Вариант 18

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-1|<1$, $\arg z \le \frac{\pi}{4}$, $\arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}}.$$

3. Решить уравнение

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 - iz.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$2e^x \sin y.$$

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n n!} + \frac{i}{3^n}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

8. Функцию $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC} \left(\sin z + z^5\right) dz$; ABC — ломаная, $z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z^2 dz}{z - 2i},$$

где (L) — окружность $|z| = 3$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-4)},$$

где (L) — окружность $z = 1 + 2e^{it}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx$.

Вариант 19

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-i|<1$, $\arg z \geq \frac{\pi}{4}, \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4}$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$e^{3+i}.$$

3. Решить уравнение

$$z^6 + 2z^3 + 2 = 0.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W = z^2 - 2z + 1.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна

$$x^3 - 3xy^2 + 4xy,$$

если $f(2) = 12$.

6. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5^n} + i\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}}\right].$$

7. Найти радиус круга сходимости и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}(z-3+4i)^n.$$

8. Функцию $z\cos\frac{z}{z-5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 5$.

9. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $z\cos\frac{2}{z^3}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC} \dot{z}\,\mathrm{Im}\, z^2 dz$; AB — отрезок прямой, $z_A = 0, z_B = 1 + i$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\sin z}{z\left(z - \frac{\pi}{6}\right)} dz,$$

где (L) — окружность $|z| = 1$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{z+5}{z\left(z^2+1\right)\left(z^2-9\right)} dz,$$

где (L) — астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 - 10x + 29\right)^2}$.

Вариант 20

1. Показать на комплексной плоскости множества, заданные следующими неравенствами: $|z-2-i|\geq 1,\ 0<\operatorname{Im} z\leq 3$, $1\leq \operatorname{Re} z<3$.

2. Определить действительную и мнимую части комплексного числа

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

3. Вычислить

$$\sqrt[4]{1+i}.$$

4. По условиям Даламбера — Эйлера доказать аналитичность функции и найти ее производную:

$$W=z^2-(2+i)z+1.$$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна

$$x^3-3xy^2+4xy,$$

если $f(2)=12$.

6. Установить сходимость ряда и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+i\frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)!}\right].$$

7. Найти и построить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(3-2i)^n}.$$

8. Функцию $ze^{\frac{z}{z-4}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$.

9. Определить тип особой точки $z=0$ для функции $\dfrac{\cos\frac{z^4}{2}}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

10. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \left(z^3+\sin z\right)dz$; L: $\left\{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\right\}$.

11. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^3},$$

где (L) — окружность $|z-1|=1{,}5$.

12. Вычислить, используя основную теорему о вычетах,

$$\oint\limits_L \frac{\cos z dz}{z+\pi},$$

где (L) — эллипс $4x^2+25y^2=100$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\cos t\right)^2}$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+11\right)^2}dx$.

Библиографический список

1. Краснов М. Л. Высшая математика : учебник. Т. 4 / М. Л. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко [и др.]. Москва : Едиториал УРСС, 2005.

2. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко. Изд. 3-е, испр. Москва : Едиториал УРСС, 2003.

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Москва : Высшая школа, 1999.

4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. Москва : Рольф, 2000.

5. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч. 3 / под ред. А. В. Ефимова, А. Ф. Каракулина, В. В. Лесина [и др.]. Москва : Издательство физико-математической литературы, 2007.

6. Гусак А. А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова Е. А., Г. М. Гусак. Минск : ТетраСистемс, 2002.

7. Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие / В. Ф. Чудесенко. Изд. 2-е, перераб. Москва : Высш. шк., 1999.

Оглавление

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2015

9 785799 624729