ТАЙНЫ МИРОЗДАНИЯ

ЧИСЛО π

ИСТОРИЯ ДЛИНОЮ В 4000 ЛЕТ

Сергей Шумихин
Александра Шумихина

ЭКСМО

ТАЙНЫ МИРОЗДАНИЯ

ЧИСЛО π

ИСТОРИЯ ДЛИНОЮ В 4000 ЛЕТ

Сергей Шумихин

Александра Шумихина

ЭКСМО

Москва
2011

УДК51
ББК 20
Ш 96

Шумихин С.

Ш 96 Число Пи. История длиною в 4000 лет / Сергей Шумихин, Александра Шумихина. – М. : Эксмо, 2011. – 192 с.– (Тайны мироздания).

ISBN 978-5-699-51331-4

Число Пи с незапамятных времен привлекало внимание людей своими свойствами. Много веков оно было камнем преткновения при решении задачи о квадратуре круга. Непросто назвать другую такую задачу, поиски решения которой были бы связаны почти со всеми существующими математическими теориями и дисциплинами. Зато легко предположить, что дальнейшая эволюция математики уж точно не обойдется без этого числа. Издание рассказывает об истории числа Пи, о математических задачах и связанных с ним проблемах мировоззренческих. И, конечно, о людях, которые посвящали свою жизнь его исследованию, – настоящих подвижниках научной мысли и духа. Вы сможете проследить связь числа Пи с другими фундаментальными константами и его роль в развитии техники, математики и других наук, оценить значение числа для философии, культуры и искусства. И хотя изучение числа Пи человеком длится не меньше четырех тысяч лет, оно продолжает открывать перед нами новые грани мира.

УДК 51
ББК 20

ISBN 978-5-699-51331-4

Оглавление

Введение

С момента появления человека на Земле важность чисел для его жизни, а затем и соотношений между ними постоянно возрастала. Численное значение есть и остается определяющим фактором оценки результата в научно-исследовательской практике. В повседневной жизни великое множество чисел окружает современного человека на каждом шагу.

Числа повсюду! Пронумерованы автомашины, дома и квартиры. Площадь жилья, объем потребляемой воды, газа, электроэнергии — все это числа. Как, впрочем, и код персональных денежных карточек и их денежное содержимое. Наконец, возраст человека, его вес и размеры — тоже числа. Числа, числа, числа... обладающие разными свойствами, входящие в числовые множества, относящиеся к различным системам мер и весов.

Среди всего разнообразия чисел особо выделяются знаменитые, и даже таинственные. Число пи, о котором пойдет речь в этой книге, с незапамятных времен привлекало внимание людей своими свойствами. Много веков оно было камнем преткновения при решении задачи о квадратуре круга. Непросто назвать другую такую задачу, поиски решения которой были бы связаны почти со всеми существующими математическими теориями и дисциплинами. Зато легко предположить, что дальнейшая эволюция математики уж точно не обойдется без числа пи.

«Пульсация» между крайностями — процесс, лежащий в основе эволюции человечества. Творческая мысль тоже постоянно пульсирует между различными подходами в познании мира, стремясь к их гармоничному синтезу. Например, в разные времена движение к гуманизации математики, техники и, наоборот, стремление к математизации, «оцифровке» гуманитарных наук не раз уступали друг другу лидерство. Поразительно, но число пи всегда участвовало в этом процессе одновременно с двух сторон! Его изучали математики и механики, физики и астрономы. В то же время о нем размышляли философы и религиозные подвижники, им вдохновлялись художники, зодчие, музыканты, писатели.

Но магическая притягательность числа пи не уменьшается! Сегодня существуют многочисленные клубы почитателей числа пи, сайты, ему посвященные, и сообщества тех, кто его исследует на досуге. Причем приверженцы всего, что имеет отношение к числу пи, давно учредили знаменательный День числа пи и особым образом его празднуют. И хотя соседство числа пи с человеком длится не меньше четырех тысяч лет, оно продолжает открывать перед нами новые грани мира.

История числа пи отражает движение мысли и развитие возможностей человека. Но прежде всего она затрагивает длинную вереницу человеческих судеб, с ним связанных. Судеб подчас необыкновенных и таинственных, блистательных и трагических... Их не счесть! Описание жизни таких людей — благородная задача не на одну серию книг, но это не цель нашего повествования. Мы лишь предоставляем читателю возможность кратко ознакомиться с судьбами выдающихся мыслителей цивилизации, настоящих подвижников науки и культуры, которые обогатили историю числа пи.

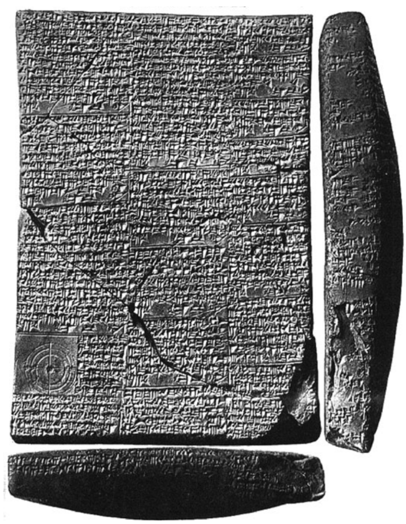
Разумеется, некоторые свойства числа пи и понятия, с ним связанные, выходят за рамки школьной математики, но интересуются этим не только специалисты. Поэтому математические преобразования, которые мы поместили в наше повествование, остаются в пределах школьной программы (и совсем необязательны для повторения их читателем). Все остальные формулы и описания алгоритмов, понятные лишь специалистам по высшей математике, для профессионалов любого другого профиля приведены в качестве тематического иллюстративного материала и для образного восприятия. Надеемся, что образ сложной красоты, связанной с числом пи, по крайней мере, рождает чувство благородного восхищения теми, для которых такая сложность — обычная среда творческого обитания. Их примеры нередко порождают творческое вдохновение, чего мы горячо желаем каждому нашему читателю.

Глава 1
Явление числа пи человечеству

Вавилонское наследие: число пи

Проверенный факт: стоит только услышать о числе пи, как сразу же где-то внутри возникает ощущение непостижимости. Казалось бы: разделите длину окружности на диаметр этой самой окружности, и в результате у вас — неизменное число пи. Всё! Откуда загадочность, таинственность, непостижимость?..

Начнем с того, что постоянство отношения длины любой окружности к ее диаметру было замечено уже давно. Первые подтверждения тому есть на клинописных глиняных табличках, которые относятся к шумеро-вавилонской цивилизации III тысячелетия до нашей эры [1].



Древневавилонский клинописный текст. На изображенном участке представлено 16 сопровождающихся решениями задач по расчету размеров плотин, валов и колодцев. Задача с чертежом касается расчета кругового вала. *Британский музей*

Древневавилонский клинописный текст, содержащий перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами.
Плимптоновская библиотека Колумбийского университета

Правда, древний след числа пи был тогда еще весьма приблизительный: $\frac{25}{8}$. А для практических нужд нередко брали целое значение числа пи, равное 3. Похоже, что упоминание об этом встречается даже в Библии. Например, в Третьей Книге Царств (7:23) есть описание того, как во дворце царя Соломона мастер Хирам сооружал медную купель — «медное море»: «И сделал литое из меди море, — от края его и до края его десять локтей, — совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом». Похоже? Правда, из-за особенностей перевода некоторых слов исследователи в данном вопросе не единодушны.

Но хозяйственная практика человечества стремительно развивалась, вместе с ней совершенствовалась и теория: математические исследования и вычисления. Вавилоняне уже использовали несколько систем счисления, применяли различные системы мер и весов, знали основные метрические соотношения в треугольнике. А бурное развитие строительства и аграрного хозяйства заставило их изобрести достаточно практичные способы вычисления площадей и объемов самых невообразимых фигур и форм. К этому времени уже были составлены обширные таблицы квадратов и кубов чисел, значений квадратных и кубических корней. Таким образом, в наследство египетской цивилизации достался впечатляющий математический потенциал.

И египтяне его талантливо приумножили! Это подтверждают многочисленные древнеегипетские папирусы. Отсюда и стало известно, что при дворе фараона Аменемхета III (2000 лет до нашей эры) в качестве писца состоял египтянин Ахмес, который, судя по всему, неплохо разбирался в математике. Ахмес тщательно собрал и записал почти все сведения из области математики, которые были на то время известны египтянам. Составленный им папирус шириной 30 см получился весьма внушительной длины — 5 м 25 см. Документ, составленный около 1550 года до нашей эры, настолько примечателен, что даже имеет имя собственное — папирус Ринда. Дело в том, что в 1858 году, когда был обнаружен этот папирус, Генри Ринд, один из меценатов того времени, приобрел его во владение. Теперь одна часть данного документа хранится в Нью-Йорке, а другая — в Лондоне.

Фрагмент математического папируса Ахмеса включает условия и решения 84 практических задач, математические расчеты, вычисления площадей и объемов. Это наиболее полный египетский задачник, дошедший до наших дней. *Британский музей*

В одном из разделов папируса отражен уже египетский подход к вычислению значения числа пи. Причем значение числа пи там появляется при постановке «Задачи о квадратуре круга», хорошо известной математикам, по сей день: построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Как стало ясно только через много веков, эта задача не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Именно поэтому выражение «квадратура круга» дошло до нас как синоним неразрешимой проблемы, своеобразного «философского камня». Но математики древности подозревали, что все дело в числе пи, и упорно пытались найти его точное значение. Так, Ахмес в своем папирусе написал, что площадь круга с радиусом r равна площади квадрата со стороной, равной $\frac{8}{9}$ от диаметра окружности: $\left(\frac{8}{9} \times 2r\right)$, то есть $\frac{256}{81} \times r^2 = \pi r^2$.

Отсюда $\pi = 3{,}1604...$ Увы, ошибка уже во втором знаке после запятой. Кроме того, неизвестно, на чем основывалось его утверждение.

Примерно в то же время и с такой же точностью значение числа пи, равное 3,162..., было получено индийским математиком Брахмагуптой [2], о чем записано в священной книге джайнов (приверженцев древнейшей религии Индии — джайнизма). Но и это заключение было дано без обоснования.

В то время как египтяне-практики упорно продолжали пользоваться вавилонским приближением числа пи, равным $\frac{25}{8}$, умами египетских математиков-теоретиков прочно овладела «Задача о квадратуре круга» и стремление получить точное значение этого числа.

Древние греки, которые в I тысячелетии до нашей эры использовали геометрию египтян, получили от них в наследство не только «Задачу о квадратуре круга». В одном ряду с ней обычно вспоминают еще «Задачу о трисекции угла» (о разделении его на три равные части) и «Делосскую задачу» (об удвоении объема куба). Разумеется, сегодня эти задачи столь торжественно уже не именуются. Но в те времена, о которых идет речь, каждая из них представляла собой отдельный научный объект и целую область исследований.

Пифагор: «Всё есть число»

Скорее всего, древние греки узнали об этих трех знаменитых геометрических задачах благодаря Пифагору (576–496 годы до нашей эры). По крайней мере, в программе его знаменитой школы постановка данных задач уже значилась. Заметим, что для Пифагора «постановка» являлась особой частью любой задачи из любой области знания, причем весьма важной частью. Дело в том, что он строго придерживался одного общего принципа. Все начиналось с того, что задаче и всем ее элементам устанавливалось соответствие в священном мироустройстве. Разумеется, с точки зрения тех представлений о законах мироздания, которые господствовали тогда среди пифагорейцев. Сегодня мы бы сказали, что сначала задача рассматривалась с точки зрения космогонии, философии и этики. И только после такого «освящения» (и для достижения уже вполне прагматичных целей) можно было приступать к решению задачи доступными способами и «земными» инструментами. Таким образом, проверялось, не нанесет ли искомый результат какого-либо вреда мирозданию, обществу или человеку. Неплохая «техника безопасности», не правда ли? Подчеркнем, что Пифагор был первым, кто отважился организовать если не массовое, то достаточно широкое обучение такой технике при решении научных задач. Сегодня, когда любая информация, а то и недоброкачественный продукт какого-либо знания доступны практически без ограничений, может быть, именно владения подобной «техникой безопасности» нам порой и недостает?

Судьба распорядилась так, что названием «иррациональное» число пи напрямую обязано Пифагору, а история развития математики и формирование научного мышления оказались неотделимы от его школы. Дело в том, что Пифагор находился в центре такого периода развития науки и культуры, который сегодня называют греческим чудом. И «чудо» здесь прежде всего в том, что это время характеризовалось началом перехода от «священной веры» в знание к его исследованию и обоснованию.

Пифагор

Метод доказательства в те времена чаще всего применялся дедуктивный — от общего к частному, в том числе и для математических выводов. Пифагор был тем мыслителем, который сознательно расширял методы изучения и способы передачи знаний. Иными словами, он вводил новые принципы образования, использовал новые методы обучения и развивал новый тип мышления — научный. Однако подчеркнем, что при этом Пифагор всю свою жизнь сохранял верность прежним «священным традициям», а потому и сам порой становился жертвой собственных принципов или неосознанных спекуляций с мистическими понятиями. О Пифагоре слышал каждый, кто учился в школе, а его учение и жизнь, окутанная множеством тайн и загадок, до сих пор вызывают восхищенный интерес человечества. Начнем, например, с его имени. По одной версии, так назвал сына при рождении отец, а по другой... но все по порядку.

Предание гласит [3], что знатный грек, камнерез Мнесарх, через жрецов обратился к священной прорицательнице Пифии по поводу важной для него поездки на остров Самос и получил ответ, что пребывание его на острове с семьей будет долгим, но удачным. Там его жена Партенида родит ему дитя: мальчик будет отличаться от всех, когда-либо живших, своей красотой и необычайной мудростью. Став зрелым мужем, он принесет человеческому роду величайшую пользу. После рождения сына благодарный Мнесарх дал своей жене новое имя — Пифаида, а новорожденного назвал Пифагором («убеждающим речью» — этимология связывает такое наречение с культом Аполлона Пифийского). С раннего детства Пифагор отличался пытливым умом, глубиной мышления и необычайными способностями к наукам, музыке, прикладным искусствам. Отец поощрял это, обучая сына у самых прославленных мыслителей того времени. После смерти отца Пифагор отправился в город Милет, где находилась знаменитая Милетская школа, основанная Фалесом. Здесь он стал учеником самого Фалеса, Анаксимандра и Ферекида Сиросского. Именно по совету Фалеса 20-летний Пифагор направился в Египет — учиться мудрости у жреца Ониуфиса в Гелиополе. Там Пифагор выучил язык, о чем известно от Антифонта («О первых в добродетели»), затем продолжал изучать астрономию, медицину, математику, а также основательно углублял свое духовно-нравственное развитие. Он упорно постигал эзотерические знания и даже был приобщен к таинствам жрецов, о чем свидетельствует, например, Диоген Лаэртский [14]: «Был он в Египте... в святилищах приобщился к таинствам египетских жрецов». В Египте Пифагор провел 22 года. Затем персидский правитель Камбиз завоевал эти края, а Пифагор вместе с пленниками попал в Вавилон. Здесь он провел еще 12 лет, продолжая углублять свои познания. Неизгладимое впечатление на него произвело учение загадочного пророка тех мест Зороастра. Согласно другим данным, Пифагор за это время посетил еще и Индию [12].

В Грецию он вернулся на пятом десятке своей жизни, о чем тоже есть свидетельство у Диогена Лаэртского [14]: «Вернувшись... нашел он родину под игом тирана Поликрата, потому отплыл на парусах в италийский Кротон, где составил законы италийцам, чем снискал великую славу себе...» И еще одно любопытное свидетельство от Дикеарха, ученика Аристотеля: «Он расположил к себе весь город как человек, много странствовавший, необыкновенный и по своей природе богато одаренный судьбою. Ибо он обладал величавой внешностью и большой красотой, благородством речи, нрава и всего остального...» Сохранились предания о том, что Пифагор был не чужд мистификациям, к которым любил прибегать не только в педагогических целях, был склонен к демонстративности в обыденном поведении. Зато страстям и волнению Пифагор был недоступен. Кроме того, он имел обыкновение говорить, что произошел от семени лучшего в сравнении с человеческим родом [4]. Неудивительно, что Пифагор был решительный сторонник «правления лучших» (такой тип правления греки назвали «аристократия»). Он считал, что таких «лучших» необходимо специально готовить. К слову, за свою долгую историю и с разным уровнем успешности человечество неоднократно пыталось реализовать эту идею. Например, в царской России именно с такой целью был создан Царскосельский лицей, известность которого связана с именем А. С. Пушкина.

Оказавшись в Кротоне, Пифагор основал пифагорейский союз — прообраз будущей гражданской и научно-философской школы. Союз возник как некое братство, духовный орден свободных людей. По преданию [4], сразу после первой прочитанной лекции Пифагор сумел приобрести около 1900 учеников, и они вместе с семьями положили начало общине-поселению, которую назвали «Великая Греция». Управление общиной осуществлял «Совет трехсот». Система управления была подобна государственной, а ее основу составляли законы и правила, предложенные Пифагором и почитаемые как заповеди. Жизнь членов союза подчинялась строгим правилам общежития, обучения и поведения. От своих учеников Пифагор требовал, например, чтобы всякая их персональная мольба-просьба, обращенная к высшим силам, произносилась вслух и не была лишь для себя. Он был убежден, что, молча, ученики себе попустительствуют и не знают, добра ли они даже себе испрашивают, а всякое слово, вслух произнесенное, невольно облекает ответственностью.

Таким образом, стратегической целью пифагорейского союза было нравственное очищение и обновление общества, расширение и возвышение общего уровня мировоззрения. А также передача сокровенных духовных теорий, методов и практик самосовершенствования. В число таких методов входили освоение различных наук и обязательное участие в научных исследованиях. Согласно традиции, ученики Пифагора распределялись на группы акусматиков-эзотериков (*греч.* устное учение) и математиков-экзотериков (*греч.* знание, наука). В школу принимались «свободные граждане», причем понятие свободы трактовалось пифагорейцами в самом глубоком смысле, с учетом осознания второй стороны свободы — ответственности. Имелись и критерии, которые определяли «качество свободы» претендента: ему предстояло выдержать предварительную, порой весьма длительную проверку. Строго обязательными принципами членства в союзе были молчание, секретность и безусловное повиновение. «Тайны» учения распространялись только среди тех, кто был принят в общество пифагорейцев. Ямвлих Халкидский [16] приводит слова одного из них, Лисида: «Пифагор запрещал разглашать блага мудрости среди тех, кто еще не освободил душу от сонного оцепенения». А «сонным оцепенением» Пифагор считал такое состояние человека, когда он воспринимает лишь «преходящие явления» этого мира.

Важно иметь в виду, что научное мышление пифагорейцев развивалось внутри древнего мифологического и религиозно-мистического мировоззрения, и многие понятия того времени были еще нечеткие, расплывчатые, избыточно обобщенные. Как, например, понятие «природа», или по-гречески «фюсис». Кстати, отзвук этого слова можно расслышать в основе таких слов, как «физика» и «физиология». Однако благодаря собственным интуитивным усилиям и сокровенным знаниям, доставшимся им от жрецов, ученые того времени уже осмысливали структуру и естество не только «видимого», но и «невидимого» космоса. Для них он был не менее реален, чем «видимый», и еще в те времена они дали науке о «невидимом» название «атомистика» [15].

Отметим, что школа Пифагора строго, по-своему систематизировала научные области. Основой обучения «свободных людей» пифагорейцы считали четыре предмета. Впоследствии Боэций называл их «квадривиумом» [13]. Обязательными были четыре науки: арифметика (изучение самих чисел и их свойств); геометрия (изучение чисел на плоскости); музыка (изучение числа в звуке); астрономия (число в проявленном космосе). Причем здесь была введена строгая иерархия: арифметика — высшая наука, астрономия — низшая. И доказывали это пифагорейцы тем фактом, что геометрия, музыка и астрономия зависят от арифметики, а она от них не зависит. В то же время рациональные науки и эзотерическое знание тогда были неотделимы, но священным знанием считалось эзотерическое. Школа Пифагора здесь была «как все». Отличия между школами были существенные, но источником всему считалось общее «божественное начало». Если, например, «Школа элеатов» (ее представители Парменид, Зенон из Элеи — отсюда и название) в качестве непреложной реальности полагала «мир сущего», то пифагорейцы считали подлинной реальностью мир чисел: «Всё есть число». Но в том, что все сущее и все числа — проявление единого божественного мирового начала, разногласий тогда не было. В принципе, такое глубинное мироощущение досталось древнегреческим ученым тоже по наследству. И большей частью такого наследия была герменевтика — древнейшее учение, которое оказало глубокое влияние на дальнейшее становление и развитие научного знания всего человечества на много столетий вперед. Именно к глубинам этого учения Пифагор жаждал быть допущенным в Египте. Название «герменевтика» учение получило по имени необыкновенного и легендарного мыслителя Гермеса Трисмегиста («Трижды величайшего») [18]. Кем он был — вопрос открытый, но с большей вероятностью можно сказать, что это был тот, кто передал свое учение жрецам Древнего Египта.

Космос и музыка сфер Пифагора

Главные космогонические положения герменевтики основывались на том, что мир — единое целое, а все его части насквозь и накрепко пронизаны причинно-следственными и внутренними связями друг с другом. Звездные и планетные тела воздействуют как на макрокосмос — на реальный мир в целом, так и на каждого отдельного человека, который является микрокосмосом. Каждый человеческий разум есть частица «источника» — Разума Божественного, следовательно, познавая себя, человек тем самым познает и Бога. Отсюда возникает возможность осознания тонкого воздействия человеческого разума на мир, а затем — и сознательного овладения этим воздействием. Далее, если макрокосмос и микрокосмос подобны по своему строению и все в мире взаимосвязано, то будущие события вполне реально предсказывать, наблюдая, например, за движением звезд на небосклоне. А тогда вполне естественно, что такие знаменитые астрономы поздней античности, как, например, Клавдий Птолемей (живший приблизительно в 127–148 годы), наряду с астрономическими наблюдениями занимались и астрологией. В частности, Птолемей не только автор широко известной «Геоцентрической системы мира», но и составитель первого учебного пособия для изучения астрологии, названного им «Тетрабиблос» (Четырехкнижие). Поэтому неудивительно, что древняя научная школа Пифагора прежде всего была эзотерической, а потом уже рационально научной. Стоит только иметь в виду, что в те времена космогонические знания были сплошь зашифрованы в символах, метафорах и мифологических образах. Кстати, согласно еще одному преданию, имя «Пифагор» окончательно оформилось именно в Египте. А появилось оно в результате объединения двух символических имен собственных: Пифия и Гор (египетский бог солнца).

Итак, вслед за учителем пифагорейцы утверждали, что, поскольку мир — единое целое, едино и познание. Тогда самопознание, познание мира и познание Бога есть один и тот же процесс. Но это познание не столько рациональное, сколько «тайное» (иначе — внутреннее или эзотерическое). В наши дни такое познание часто называется гносеологическим или (по Николаю Гартману) метафизическим наряду с логическим и психологическим познанием. Под этим понимается совокупное внешнее и интуитивное внутреннее знание, которое позволяет человеку гармонично развиваться на всех его индивидуальных и социальных уровнях. Постижение такого знания возможно лишь при помощи духовного развития и выполнения определенных техник по развитию интуиции (расширения сознания). Такие техники в древности назывались ритуалами и мистериями. К слову, сегодняшние эффективные тренинги выполняют именно такую функцию.

Кто знает, может быть, значение методов обучения Пифагора осознано в наше время еще недостаточно. Как не до конца оценен и тот факт, что вся европейская рациональная наука и культурная традиция зарождались именно внутри эзотерических учений. Заметим, что глубинные основы некоторых древнейших учений выдержали испытание временем, наукой и продолжают развитие на новом уровне осознания их человечеством.

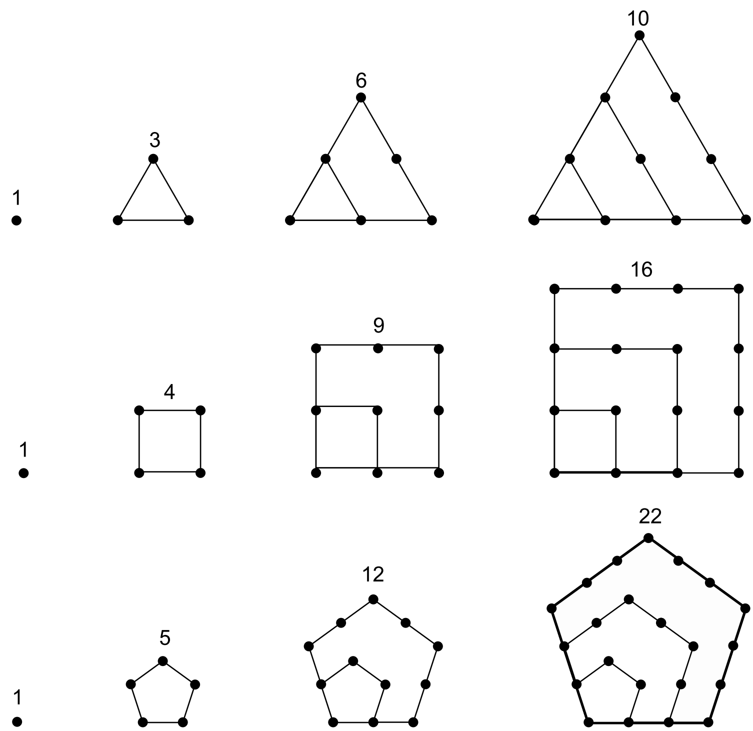
Интересно, что наука философия (*греч.* любовь к мудрости) своим названием обязана, скорее всего, тоже Пифагору. Он называл себя не мудрецом, а тем, «кто любит мудрость» — ищет ее, исследует, постигает. Например, в известном «Священном слове» от имени Пифагора прямо говорится, что священное учение о числах он принял от орфиков — последователей древнегреческого мудреца Орфея (кстати, получившего посвящение в Египте).

К знаниям, в которые Пифагор был посвящен, он подходил с азартом, вдохновенно и творчески, глубоко осознавая, что любое знание живо лишь в развитии. Главный постулат в учении Пифагора — субстанциональность числа, которая управляет как материальной, так и духовной сферой, в том числе нравственной. Иными словами, он считал числа живыми и даже по-своему разумными сущностями Вселенной. Отсюда в его учении появляется много интересных (и довольно убедительных!) интерпретаций их свойств. Пифагор распределял числа уже «по качеству»: на несовершенные, совершенные, сверхсовершенные, дружественные... Любопытно, например, что из всех священных чисел пифагорейцы особо выделяли число 36, поскольку оно представимо в таких двух «священных» видах:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \text{ и } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$

Кроме того, среди чисел пифагорейцы выделяли такие, которые соотносятся с правильными геометрическими фигурами, и называли их фигурными. Отметим, что треугольник был для них «первоисточником» рождения и сотворения различных видов «вещей преходящих» [11].

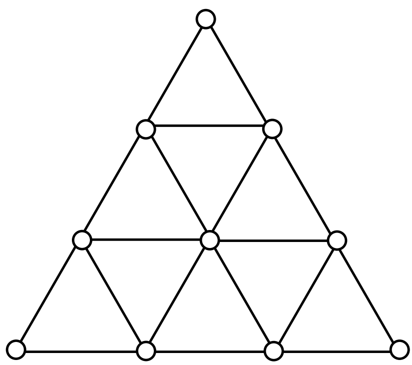
Начиная с треугольника, пифагорейцы выявили много новых соотношений между элементами в фигурах. Самое известное из них — теорема Пифагора. Помимо этого, они исследовали соотношения геометрических фигур и между собой. Достаточно сказать, что созданная пифагорейцами теория пропорций стала настоящим прорывом не только для планиметрии, но и для других наук, включая астрономию, музыку и философию. Причем, судя по современному состоянию наук, потенциал теории пропорций далеко не исчерпан и сегодня. Отметим, что знаменитую золотую пропорцию Пифагор называл «отражением гармонии небесных сфер».



Фигурные числа пифагорейцев

Именно он ввел такое понятие, как геометрическая мерность. Например, точка — это геометрическая одномерность. Тогда линия — это уже геометрическая двухмерность (длина между точками), а плоскость — геометрическая трехмерность (длина, ширина, площадь). И наконец, стереометрические объемные тела — это геометрическая четырехмерность (длина, ширина, высота, объем). Таким образом, число 10 (декада), как сумма всех мерностей 10 = 1 + 2 + 3 + 4, тоже считалось у пифагорейцев особо священным, поскольку «вбирает» в себя мир и представляет собой «четырехликое единство бытия». Кроме того, проделав над этими первыми числами операции сложения и умножения, можно получить все остальные числа.

Пифагор изображал набор «главных чисел» 1, 2, 3, 4 точками (см. рисунок), расположенными в треугольной форме. Это символическое изображение — тетрактис (*греч.* десять точек) — особо почиталось пифагорейцами и вошло в клятву членов их союза: «Клянемся именем Тетрактис, ниспосланным нашим душам...»

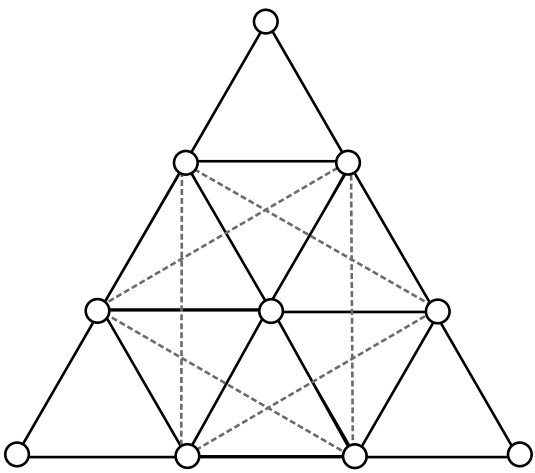


Священный Тетрактис пифагорейцев

Тетрактис наглядно демонстрирует пифагорейскую формулу 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Здесь число 1 (или монада) представляет собой безличный неделимый принцип Бога, число 2 (1 + 1, или диада) — материю, число 3 (1 + 1 + 1, или триада) —

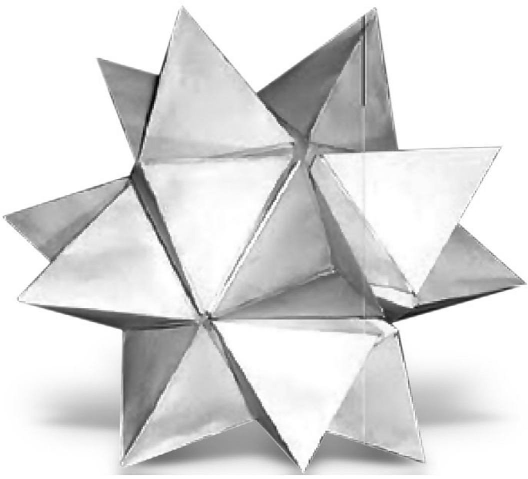
объединение неделимой монады и диады, образующее феноменальный мир, а число 4 — тетраду, означающую уже глубокую идею синтеза и развития. В высшем смысле тетрада олицетворяла собой единство Бога и Вселенной, так как считалась единицей, но уже на качественно новом уровне — в проявленном виде. В обыденной жизни Пифагор тоже указывал бесчисленные проявления тетрады. Например, тело, душа и дух в единстве — это уже четвертый уровень в виде проявленного человека, семья — это проявленное единство отца, матери, их потомства и т. д.

Впрочем, если между точками-узлами Тетрактиса провести прямые так, как это часто делали пифагорейцы, получается вот такой любопытный чертеж.



Тетрактис и икосаэдр

Для того, кто знаком с чертежами объемных фигур по их проекциям, это изображение даст сходство с плоской проекцией правильного сферического многоугольника икосаэдра, вписанного в правильную четырехгранную пирамиду. Некоторые утверждения Платона, похоже, поддерживают данное допущение. В частности, развивая учение Пифагора, Платон учил, что мир построен из неделимых тел-элементов (сегодня мы называем их телами Платона), которые имеют форму правильных сферических многогранников, обладающих идеальной симметрией. Интересно, что современные ученые-физики, учитывая характер поведения и некоторые другие свойства элементарных частиц, иногда склонны допускать, что у кварка, например, существует пространственная форма — икосаэдр, а у фотона — обращенный икосаэдр, преставляющий собой пространственную фигуру, получаемую заменой каждой грани икосаэдра тремя боковыми гранями тетраэдров, обращенных вершинами вверх.



Обращенный икосаэдр

Кроме того, изучая свойство четности, Пифагор отметил, что каждая вещь скрывает в себе две противоположности и символизирует принципиальную полярность (дуализм) Вселенной. А то, что приводит эти противоположности в равновесие, он назвал гармонией. Позже выяснилось, что дуальные пары (четное — нечетное, правое — левое, позитивное — негативное и т. п.) имеют глубокие и интересные проявления в кристаллах, которые затем обнаружились в структуре вирусов и ДНК, в знаменитых опытах

Луи Пастера с поляризацией винной кислоты и в нарушении четности элементарных частиц. Причем в настоящее время открытия подобных проявлений продолжаются.

Сегодня в качестве синонима понятия «Вселенная» мы часто используем слово «космос» (*греч.* порядок, красота), автором которого, кстати, является Пифагор. По его глубокому убеждению, любой основополагающий принцип или закон мироздания можно выразить с помощью языка математики, так как объединяющим свойством для всех вещей в мире является их соответствие числам и численным соотношениям. Символом космического бытия в пифагорейской традиции является шар (звезды, планеты) как пространственная фигура, обладающая наибольшей степенью симметрии и совершенства. Согласно Пифагору, структура Вселенной выстроена из множества небесных сфер, вложенных одна в другую по принципу матрешки. Интересно, что сегодня подобная модель универсума существует и системно развивается в так называемой холономной теории Вселенной [26]. Пифагор утверждал, что все сферы (иначе холоны), включая Землю, вращаются вокруг невидимого огненного центра — «Зевсова острога». И, поскольку каждая сфера определяется собственным числом, а ее вращение в мировом пространстве порождает звук (возмущение пространства), свойственный только ей, то космос — это гармонически звучащий мировой хор, который рождает «музыку сфер». Любопытно, что те, кто был допущен на мистерии пифагорейцев, обучались умению слышать музыку сфер, которая недоступна слуху неподготовленного человека.

Музыка для Пифагора — священная составляющая жизни. А во время своих странствий он был посвящен и в основы музыкальной теории, сложившейся на те времена. Пифагор обратил пристальное внимание на музыкальные звуки с точки зрения принципа «Всё есть число». Из основных понятий теории музыки (гамма, интервал, консонанс, тоника, лад, музыкальный строй) главный для пифагорейцев — музыкальный строй. В нем они видели математическое выражение системы отношений высоты звуков и отражение принципа гармонии.

Пифагорейцы нашли гармонические соотношения музыкальных интервалов — кварты, квинты, октавы, а также их числовые пропорции. Впоследствии на основе пифагорейской концепции устройства Вселенной и «музыки сфер» Платон создал теорию небесного гептахорда (семиструнника), в которой описывал семь подвижных сфер, настроенных друг на друга наподобие музыкальных инструментов. Теория пифагорейцев о небесных сферах получила развитие в трудах великого астронома и математика Иоганна Кеплера.

Отметим, что учение Пифагора придавало особое значение эволюции вообще — закону космоса, единому для всего сущего, включая зарождение физической жизни и метафизическую жизнь бессмертного духа человека. Исследуя системы счисления, пифагорейцы особо выделили семеричную систему, обнаружив ее важность для эволюции человеческого эмбриона. Интересно, что современная эмбриология по сей день пользуется именно этими расчетами [11]. Относительно эволюции человеческой души пифагорейцы утверждали, что после окончания земного воплощения она переходит в другое тело и вновь набирается необходимого опыта. Данный процесс продолжается до тех пор, пока душа человека не сольется с его сознанием на уровне Божественного совершенства. Между прочим, пифагорейцы разрабатывали практические методы достижения такого совершенства, о чем, например, есть свидетельство в «Золотых стихах Пифагора», записанных его учеником Лизием. Там названы три вполне определенных духовных этапа самостоятельной работы для тех, кто стремится к подлинной гармоничной жизни: приготовление, очищение, совершенствование. Разумеется, при условии такого же внимания к физическому состоянию организма.

Надо сказать, что на древнеиталийских землях Пифагор пользовался таким почетом и уважением, что его ученикам доверяли управление целыми городами-государствами. И пифагорейцы, занимая в них управляющие посты, смогли изменить политическое устройство в Сибарисе, Регии, Гимере, Акраганте и других областях. Однако среди коренных жителей, которые лишались таких постов, зрело недовольство. Со временем это привело к тому, что участь Пифагора, как и его общественной школы-университета в Кротоне, оказалась трагична. По одной версии, прежние властители Кротона спровоцировали вооруженное выступление против пифагорейцев. Это и неудивительно: пифагорейский союз насаждал слишком строгие правила жизни для населения и требовал исполнения справедливых законов от власти. В конце концов, Пифагор был вынужден бежать от мятежников в Метапонт и скрываться в ритуальном храме — святилище муз. Там он находился более месяца без средств к существованию и погиб — то ли от тоски, то ли всеми покинутый. По другой версии (хотя и не последней), один из высокопоставленных богачей Кротона по имени Килон претендовал на вступление в пифагорейское братство, но ему было отказано. И, судя по всему, небезосновательно, если сразу после этого Килон объявил себя врагом Пифагора и организовал всех, кого пифагорейцы возмущали так же, как и его самого. Обстановка накалилась до такой степени, что сторонники Килона подожгли дом, где собралось около сорока учеников Пифагора. Относительно того, был ли там он сам, точных сведений не имеется, но, по преданию, спастись из этого дома удалось лишь двум его ученикам: Архиппу и Лисиду. Как бы то ни было, но непосредственное влияние Пифагора и его учеников на политическое жизнеустройство древнеиталийских областей оказалось устранено. Пифагорейский союз дискредитирован. Однако верность учению Пифагора и взаимное братство между его учениками сохранялись еще долгие и долгие времена. Именно верным ученикам Пифагора, которые благодарно хранили его наследие, мы обязаны знаниям о нем. Сам Пифагор не оставил письменного изложения ни своей жизни, ни своего учения. Первое, наиболее полное письменное собрание идей Пифагора сделал близкий ему ученик и последователь Филолай. Отметим, что это изложение затем легло в основу философского учения Платона. А труды, автором которых считается сам Пифагор, — «Священное слово», «О природе», «О воспитании», «О государстве», «О мире», «О душе» — написаны учениками с его слов.

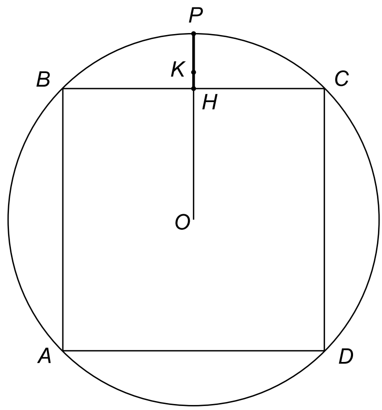
Тем не менее даже конспективный перечень идей и достижений Пифагора головокружительно масштабен, впечатляет небывалой научной продуктивностью и значимостью. Его идеи о мировой гармонии заложили необходимое основание для установления закономерностей нашего мира и обрели немало последователей в науке и искусстве. К их числу принадлежат такие великие ученые, как, например, Николай Коперник и Иоганн Кеплер, знаменитый художник и геометр эпохи Возрождения Альбрехт Дюрер, гениальный Леонардо да Винчи, английский астроном Артур Стэнли Эддингтон (который в 1919 году экспериментально подтвердил теорию относительности Альберта Эйнштейна).

Таким образом, если заходит речь о структуре Вселенной или о пропорциональных соотношениях в природе, о числе пи или о проблеме квадратуры круга, то Пифагор всегда незримо находится рядом.

Квадратура круга и открытие несоизмеримости

Задача о квадратуре круга входила в область проблем, которые находились под пристальным вниманием пифагорейцев. Стремясь разрешить ее, в школе Пифагора вплотную занимались геометрическими построениями и изобретали способы преобразования плоскостных геометрических фигур одна в другую с помощью циркуля и линейки. Конечно, задача о квадратуре круга занимала умы многих исследователей и до Пифагора, и после.

Любопытен, например, ранний (VII–V века до нашей эры) индийский вариант решения этой задачи [6]. В древнеиндийском сочинении «Шальвасутра» («Правило веревки») приводится способ построения круга, равновеликого квадрату. Опишем вокруг заданного квадрата *АВСД* круг. Пусть радиус *ОР* круга перпендикулярен стороне *ВС*. Этот радиус пересечет сторону *ВС* в точке *Н*. Отрезок *НР* делится на три равные части, иными словами, здесь *HK* = 1/3 *HP*. В итоге без доказательства утверждается, что круг радиуса *OK* равновелик квадрату *ABCD*.

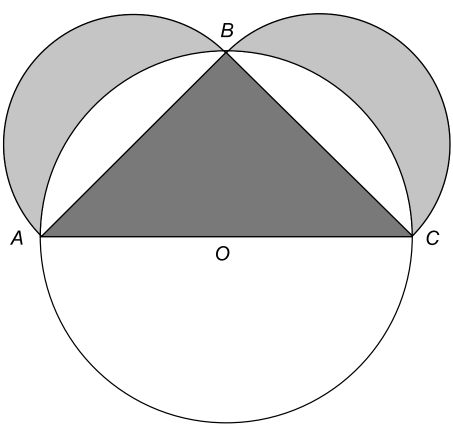


Индийский вариант решения задачи
о квадратуре круга

Однако интерес исследователей к задаче о квадратуре круга был не столько практический, сколько принципиальный: возможно ли получить точное решение, выполняя построения лишь с помощью циркуля и линейки? Причем интерес этот был нешуточный, о чем, например, есть свидетельство у Плутарха («Об изгнании»). Он рассказывает, как однажды известный философ и астроном того времени Анаксагор попал в тюрьму за безбожие (он посмел назвать Божественное солнце «огненным шаром»), но и в тюрьме не оставлял попыток найти геометрические построения для решения этой задачи [17].

Разумеется, квадратурой круга занимался и Гиппократ Хиосский — один из наиболее авторитетных геометров V века до нашей эры. Это он смягчил отчаяние от неудач при попытках построить прямолинейную фигуру, равновеликую криволинейной фигуре. Ему это удалось... точнее, почти удалось.

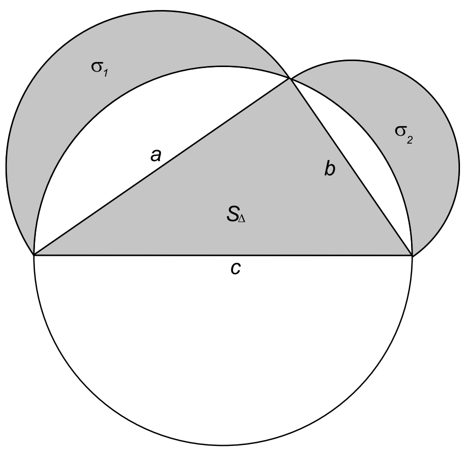
Гиппократ Хиосский построил лунообразные фигуры, которые стали называться гиппократовыми луночками, и нашел квадратуру некоторых фигур, ограниченных дугами двух окружностей [6]. Если в полуокружность вписать равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и на его катетах AB и BC построить две полуокружности, то в результате получаются две простейшие луночки, изученные Гиппократом Хиосским (см. рисунок, приведенный ниже). Пусть их равные площади равны s, а площадь треугольника ABC равна S. Далее, площади полукругов, построенных на катетах, обозначим σ. Поскольку площади кругов относятся как квадраты их диаметров, то площадь построенного на гипотенузе AC полукруга вдвое превышает площадь каждого из полукругов, построенных на катетах AB или BC. Образованную на рисунке фигуру, расположенную выше диаметра AC, с одной стороны, можно рассматривать как треугольник ABC, на катетах которого построены два полукруга. А с другой стороны — как полукруг с насаженными на него двумя луночками. Наконец, из равенства площадей $S + 2s = 2s + 2\sigma$ выводим $S = 2\sigma$. Таким образом, две луночки, ограниченные кривыми линиями, Гиппократу Хиосскому удалось превратить в равновеликий треугольник.



Гиппократовы луночки

А более чем через 10 столетий (это уже X век) иракскому математику Ибн-ал-Гайтаму удалось обобщить теорему Гиппократа Хиосского на произвольный прямоугольный треугольник [6]. Более того, теорему Ибн-ал-Гайтама можно рассматривать как обобщение теоремы Пифагора на случай, когда на сторонах прямоугольного треугольника построены не квадраты, а какие-то другие подобные друг другу фигуры. Повторяя рассуждения Гиппократа для фигуры на приведенном ниже рисунке, получим:

$$S_\Delta + \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} + \sigma_1 + \sigma_2.$$



Обобщение Ибн-ал-Гайтама
для теоремы Гиппократа

А благодаря тому, что $a^2 + b^2 = c^2$, получаем: $S_\Delta = \sigma_1 + \sigma_2$.

Подходы, конечно, интересные, но они не определяли точного значения числа пи и не объясняли его загадочности. А загадка все-таки оставалась, и Пифагору пришлось с ней впрямую столкнуться.

Именно пифагорейцы первыми убедились в том, что, кроме неоднозначного, но вместе с тем упорно постоянного числа (теперь названного числом пи), связанного с длиной окружности и ее диаметром, существуют и другие числа, обладающие загадочным свойством «несоизмеримости». И обнаружение чисел с таким неудобным свойством вызвало даже не волнения, а немалый переполох в знаменитой пифагорейской школе. Причем числа эти получались при вычислениях, в которых применялась теорема... самого Пифагора!

Действительно, если гипотенуза является, например, диагональю квадрата, сторона которого равна 1, то, согласно теореме Пифагора, ее длина будет равна $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$. Но это число через целое или отношение целых невыразимо, поэтому пифагорейцы отнесли факт наличия подобных «подозрительных» чисел к «уму непостижимому» и даже «к руке демона». Между собой назвали их «алогичными» и держали свое открытие в тайне. Но продержалась тайна недолго. По одной версии [4], ученик Пифагора по имени Гиппас Метапонтский проговорился и вскоре погиб при кораблекрушении. Легенда гласит, что сам Пифагор воззвал к богам и привлек кару на голову нарушителя клятвы, что якобы и стало причиной морской бури, погубившей Гиппаса. По другой версии, Гиппас упорно настаивал на правомочности существования иррациональных чисел и даже обосновал это, за что и поплатился своей жизнью. Но есть и третья легенда, согласно которой Гиппас нарушал клятву, за деньги распространяя учение Пифагора, за что и был изгнан. А при кораблекрушении он погиб значительно позже.

На самом деле причина сохранения Пифагором «несоизмеримых» чисел в тайне, похоже, лежала глубже: сначала ему нужно было самому разобраться, где место этих чисел в мироздании и какой вселенский принцип отражает их загадочное свойство. Быть может, мыслитель старался соблюсти тот самый принцип «техники безопасности», которому строго следовал в своей жизни.

Итак, полученное пифагорейцами число $\sqrt{2}$ угрожало трещиной в их модели мира. Для начала они его определили геометрически, как несоизмеримость. Но эта «невозможность выразить длину отрезка числом» ставила под сомнение главный тезис пифагорейцев «Всё есть число»! Даже Аристотель, не разделявший их взгляды, вместе с ними выражал свое изумление по поводу того, что есть вещи, которые «нельзя измерить самою малою мерою» [28].

Положение попытался спасти талантливый пифагореец Теэтет Афинский, автор теории делимости чисел [29]. Он предложил новое понимание числа, сформулированное на языке геометрии, и проблема соизмеримости снималась. Теэтет Афинский даже разработал своего рода классификацию иррациональностей. Однако впоследствии выяснилось, что построение числовой алгебры на основе геометрии все-таки являлось стратегической ошибкой пифагорейцев. Например, выражения $x^2 + x$ или x^4 не находили геометрического истолкования (а через многие и многие столетия, уже в XVI веке, Рене Декарт успешно поступил наоборот и построил геометрию на основе алгебры, создав тем самым аналитическую геометрию).

Как бы то ни было, а в те времена человеческая деятельность требовала от числа пи, как и от других «странных чисел», приемлемого приближения. И древние греки с древними римлянами выкручивались здесь как могли. Например, римский архитектор того времени Витрувий [13] продолжал использовать довольно грубое приближение числа $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ при строительстве своих знаменитых театров. Об этом он оставил свидетельство в подробном описании отличий римского театра в сравнении с греческим. Хотя подчеркнем, что на то время уже существовали более точные значения этого числа и появлялись все новые способы его дальнейшего уточнения.

Это было то самое время, когда математика древних греков совершала гигантский рывок вперед. Описательная математика постепенно трансформировалась в доказательную науку. На смену инструкциям математиков-практиков («делай так») приходили строгие рассуждения и выводы философов-математиков («почему именно так»). Появились обоснования и для более точных вычислений значения числа пи. Так, математик Антифон (V век до нашей эры) предложил вписывать в окружность правильные многоугольники до тех пор, пока их стороны не исчерпают всю длину окружности. А пифагореец Бризон (V век до нашей эры) предложил расширить метод Антифона — добавлять описываемые возле окружности правильные многоугольники. Тогда длина ее будет заключена между периметрами вписанных и описанных многоугольников и будет тем точнее, чем больше будет сторон у многоугольников.

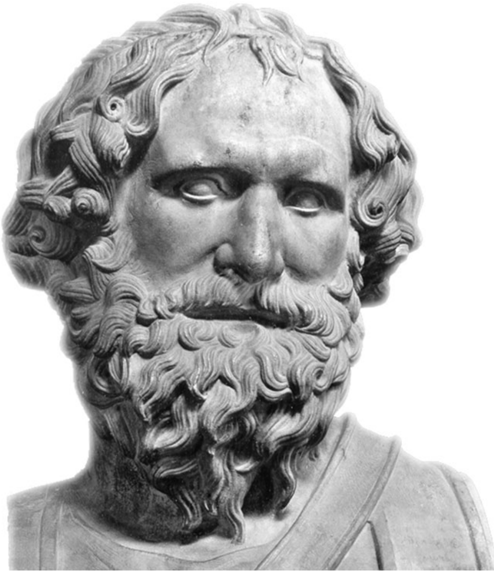
Число Архимеда и триумф его метода

Отметим, что до совершенства этот метод Антифона довел великий Архимед (287–212 годы до нашей эры) и назвал его методом исчерпывания. Конечно, исследователи быстро убедились в том, что этот метод — процесс бесконечный. И это было первым «предчувствием понятия» предела, что подготавливало в будущем настоящий взрыв математической мысли. Но пока, в III веке до нашей эры, Архимед выразил приближение числа пи в виде дроби $\frac{22}{7}$, которое до сих пор называется архимедовым числом.

Кроме того, Архимед сам смог определить даже точность найденного им приближения. Так, в его работе «Измерение круга», дошедшей до наших дней, есть цепочка неравенств Архимеда. Приведем ее в современных обозначениях:

$$3\frac{10}{7} < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14\,688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7},$$

то есть $3{,}140996\ldots < \pi < 3{,}1428265\ldots$



Архимед из Сиракуз

Заметим, что Архимед вычислил три первых знака числа пи, которыми человечество продолжает пользоваться в своей обыденной практике по сей день! А сделать это ему помогли вписанные и описанные возле окружности правильные многоугольники — метод исчерпывания. Кстати, в своих вычислениях гениальный ум Архимеда интуитивно использовал приближение числа $\sqrt{3}$. Фактически он «нащупал» значение функции $\mathrm{ctg}30° = \sqrt{3}$, точнее, соотношение $\mathrm{ctg}30° = \frac{d}{a_6}$, где d — диаметр окружности, a_6— сторона правильного шестиугольника. Мало того, в своей работе Архимед извлекал квадратные корни из больших чисел. Но каким способом он это делал, так и осталось загадкой.

Зато уже упомянутый выше метод исчерпывания впоследствии позволил Архимеду доказать ряд теорем о площадях фигур и объемах тел, ограниченных кривыми линиями или поверхностями. Например, это такие теоремы (которые входят сейчас в школьную программу), как вывод формул для площади поверхности сферы: $S = 4\pi r^2$ и объема шара: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Разумеется, имя Архимеда, как и Пифагора, тоже слышал каждый школьник, причем не только на уроках математики. Архимед славен и как гениальный изобретатель, и как основоположник теоретической механики и гидростатики. Ему принадлежит множество таких изобретений, которые принесли пользу его современникам и продолжают приносить пользу нам, его далеким потомкам. А некоторые математические идеи Архимеда предвосхищали методы дифференциального и интегрального исчисления, оформившиеся много веков спустя.

Начальное, но весьма основательное образование он получил у своего отца, астронома и математика Фидия из Сиракуз. Есть предположение, что Фидий был родственником сиракузского правителя Гиерона, который благоволил и к его сыну [39]. Обучение Архимед продолжил в Александрии Египетской, которая была на то время крупным и самым значимым научно-культурным центром. Здесь Архимед познакомился с известным ученым Эратосфеном, с которым потом всю жизнь вел переписку. Затем Архимед вернулся в родной город Сиракузы, где оставался уже до конца своих дней.

Во время 2-й Пунической войны Архимед руководил инженерной обороной родного города. Об этом есть рассказ у Плутарха в его знаменитых «Сравнительных жизнеописаниях», одно из которых посвящено Марцеллу — тому самому римскому полководцу, который возглавлял нападение римлян на Сиракузы. Архимед изобрел такие военные машины, что горожане в течение двух лет смогли сдерживать осаду Сиракуз римлянами. Плутарх также написал о том, как Архимед сжег римский флот: через систему вогнутых зеркал он направил на корабли захватчиков сфокусированный солнечный свет. Гений Архимеда вызывал у нападавших римлян такое восхищение, что завоеватель Марцелл, одержав, в конце концов, победу, приказом по армии объявил о сохранении жизни его обладателю. Однако при взятии Сиракуз Архимед был все-таки убит, не узнанный солдатом.

В том же произведении у Плутарха есть сведения о том, как однажды Архимед демонстрировал правителю Сиракуз свое очередное изобретение. Он без особых усилий поднимал и двигал... целые корабли! А применял для этого всего лишь рычаги и полиспасты собственного изготовления. В ответ на удивленное одобрение Архимед якобы и произнес свою знаменитую фразу о том, что если бы ему дали точку опоры, то он сдвинул бы Землю. А у Витрувия описана знаменитая история открытия всем известного теперь закона Архимеда. Якобы правитель Сиракуз поручил Архимеду проверить, из чистого ли золота сделана его тиара. Размышляя над этой проблемой, Архимед погрузился в ванну и вдруг понял, что вес воды, вытесненной телом, равен весу самого тела. Решение проблемы было найдено! Архимед с криком «Эврика!» (*греч.* нашел) выскочил из ванны и в чем был промчался по улицам Сиракуз.

Кроме всего перечисленного, Архимеду принадлежит изобретение действующей модели планетария, в которой можно было видеть движение светил и планет по небесному своду. Изготовил он и первый звездный глобус — модель небесной сферы. Как повествует Цицерон, оба инструмента в качестве трофеев попали к завоевателю Марцеллу.

Но, по словам Плутарха, более всего Архимед был одержим математикой. Занимаясь ею, он забывал даже о еде. На сегодня известно 13 математических трудов Архимеда. Например, в его работе «О коноидах и сфероидах» отразились достижения в теории тел вращения. В сочинении «О спиралях» Архимед исследовал свойства кривой, получившей его имя, хотя еще раньше ее изучил Пифагор. В работе «Псаммит» («Исчисление песчинок») Архимед предложил такую систему счисления, которая позволила записывать сверхбольшие числа, поражавшие воображение его современников. В работе «Квадратура параболы» он определил площадь сегмента параболы и геометрически доказал полученный результат. В работе «Измерение круга», которая уже упоминалась, описан метод исчерпывания, с помощью которого Архимед определил значение числа пи. В самом знаменитом труде, «О шаре и цилиндре», кроме упомянутых уже школьных теорем о площади поверхности и объеме сферы есть еще один примечательный вывод. Архимед определил отношение объема шара к объему описанного вокруг него цилиндра: оно оказалось равным 2:3. Этим достижением Архимед гордился особо, причем настолько, что выразил желание, чтобы на его памятнике был изображен цилиндр с вписанной в него сферой. Кстати, спустя полтора века в Сиракузах Цицерону удалось увидеть именно такой, но уже заброшенный памятник [39].

Итак, метод вписывания и описывания возле окружности правильных многоугольников, или метод исчерпывания Архимеда, оказался весьма результативным, причем настолько, что не одно столетие после Архимеда являлся основным способом расчета длины окружности. Например, на заре нашей эры исследованием точности числа пи занимался Клавдий Птолемей [13]. Он старательно применил метод Архимеда и вписал в окружность правильный 720-угольник. Таким образом, приближение числа пи было доведено до значения $\frac{377}{120} \approx 3{,}14167$. Отметим, что начиная с поздней античности и вплоть до XVI века Клавдий Птолемей являлся высоко почитаемым исследователем. Его именем была названа геоцентрическая система мироздания (птолемеева система), представленная им, кстати, с поразительной доскональностью! Но назвать Птолемея гениальным математиком, астрономом или географом будет преувеличением. Его дар заключался в способности собрать воедино результаты исследований предшественников, использовать их для уточнения текущих наблюдений и, наконец, представить все вместе как логическую и завершенную систему, изложенную в ясной и отточенной форме. А это, без всякого преувеличения, титаническая и совершенно необходимая работа, которую Клавдий Птолемей выполнял гениально.

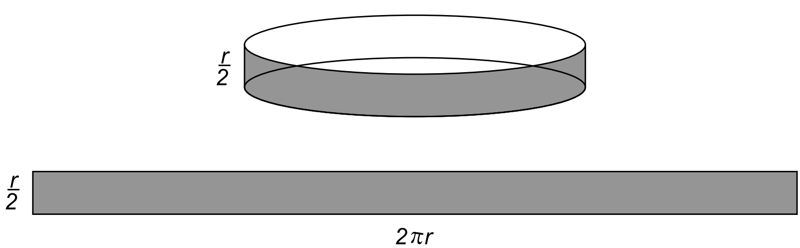
Клавдий Птолемей

Наиболее известные труды Птолемея — это «Альмагест» и «География». В них собраны высшие достижения древней науки в области астрономии и географии соответственно. Разумеется, дар Птолемея к ясному и четкому изложению проявился и в других областях, например в оптике, музыке и даже астрологии (напомним, что Птолемей — автор «Тетрабиблоса», учебника по астрологии). Но «Альмагест» и «География» считались настолько совершенными, что изложенные в них идеи господствовали в науке на протяжении 1400 лет. Заметим, что в «Географию» за это время не было внесено практически ни одной серьезной правки! А все достижения астрономов после Птолемея сводились к незначительным усовершенствованиям «Альмагеста». И продолжалось это до тех пор, пока не созрел научно-критический подход к авторитету «Альмагеста» и «Географии». Надо сказать, что именно с этого времени и началась современная эпоха научных исследований в области астрономии и географии. Однако влияние Птолемея на социальные, политические, культурные и теологические воззрения оказалось более длительным и сохранялось вплоть до революционного для науки XVIII века.

После Клавдия Птолемея очередное приближение значения числа пи в IV веке получил китайский математик Лю Хуэй. Ему удалось вписать в окружность уже 3072-угольник. Он уточнил результат Клавдия Птолемея и нашел приближение $\pi \approx 3{,}14159$. Следует заметить, что именно эта «китайская» точность удерживалась на вершине до XV века! До тех самых пор, пока математик Джамшид ал-Каши из обсерватории Улугбека в Самарканде не вписал в окружность уже правильный... 805 306 368-угольник! Таким образом, для числа пи было получено приближение с точностью до 16-го знака после запятой. Теперь длину окружности и площадь круга можно было вычислять гораздо точнее.

Но нет предела совершенству! Как нет преград для человеческой мысли и воображения. И воображение Леонардо да Винчи, великого представителя эпохи Возрождения, тоже было захвачено задачей о квадратуре круга [3].

Будучи художником и выдающимся изобретателем XV века, Леонардо да Винчи заметил, что боковая поверхность цилиндра радиусом r и высотой $\frac{r}{2}$ равна площади круга его основания.



Развертка боковой поверхности цилиндра

Леонардо да Винчи. Автопортрет

Как видно на рисунке, если боковую поверхность цилиндра разрезать по высоте и развернуть на плоскости, получится прямоугольник со сторонами $\frac{r}{2}$ и $2\pi r$. Отсюда его площадь $S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$, что и требовалось получить. Остается лишь одна неувязка: перед нами все-таки площадь прямоугольника, а не квадрата. И причиной тому оставалась подозрительная неопределенность числа пи. Поэтому поиски точного его значения не прекращались.

В следующем, XVI веке настойчивый голландский математик Адриан ван Роомен решает превзойти достижения ал-Каши по применению метода Архимеда и уточнению значения числа пи [6]. Он несколько лет упорно вписывал и описывал правильные многоугольники возле окружности, а в 1597 году опубликовал, наконец, результат. Ему все-таки удалось определить следующий, семнадцатый знак числа пи после запятой, используя многоугольник с 1 073 741 824 сторонами (что, кстати, равно 2^{30} числу сторон!)

Но еще более настойчивым, чем Роомен, оказался его соотечественник, профессор Лудольф ван Цейлин, преподаватель математики и военных наук в Лейденском университете. Математический азарт вдохновил его потратить 10 лет жизни на вычисление 20 знаков числа пи после запятой. А фантастическое терпение позволило добраться до правильного многоугольника, у которого сторон было уже 32 512 254 720. Настоящий триумф метода Архимеда! Неудивительно, что число пи, уточненное с таким старанием, нередко называли в те времена лудольфовым числом или константой Лудольфа. Любопытно, что свое сочинение «Об окружности» Лудольф закончил словами: «У кого есть охота, пусть идет дальше». Но, похоже, профессор подзадорил этим прежде всего самого себя. По крайней мере, он не бросил поиски по уточнению числа пи и вычислил 35 знаков после запятой. А это уже в буквальном смысле астрономически аптекарская точность. Дело в том, что если представить себе, например, сферу с радиусом $5 \cdot 10^{26}$, а затем вычислять длину ее гигантского экватора с точностью до 35 знаков после запятой, то погрешность составит... лишь миллионную долю миллиметра! Между прочим, по охвату такая сфера сравнима с областью Вселенной, о которой ум современного человека, вооруженный аппаратурой, имеет хоть какое-то представление.

Аналитические методы: на старт, внимание, марш!

Казалось бы, уточнять и прояснять след «хвоста» числа пи дальше уже некуда. Можно лишь совершенствовать метод исчерпывания Архимеда, то есть упрощать способы вписывания и описывания правильных многоугольников возле окружности.

Именно это и сделал голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1695) — математик, физик, астроном, механик и изобретатель.

Христиан Гюйгенс

Гюйгенс обучался в Лейденском университете и в университете города Бреда, где изучал право и математику. Первая научная работа Гюйгенса «Рассуждения о квадратуре гиперболы, эллипса и круга» была опубликована в 1651 году и содержала множество новых теорем и результатов, в том числе получение значения числа пи алгебраическим способом. В 1654 году в сочинении «О найденной величине круга» Гюйгенс доказал множество геометрических теорем о соотношениях длин хорд окружности и стягиваемых ими дуг. Выводы этих теорем позволяли вычислять уточненные значения числа пи уже при меньшем числе сторон описываемых и вписываемых правильных многоугольников. Следующий опубликованный труд Гюйгенса «О расчетах при азартных играх» был одним из первых научных подходов к теории вероятностей. А известность пришла к нему после того, как он объявил о существовании у Сатурна колец и спутника — Титана. Обнаружить их удалось Гюйгенсу при помощи телескопа, который он усовершенствовал сам. Новую известность Гюйгенсу принесло изобретение им маятниковых часов. В 1657 году он получил патент на их конструкцию и написал фундаментальный труд «Качающиеся часы, или О движении маятника», значительная часть в котором посвящена проблемам механики и кинематике ускоренного движения. В 1665 году Гюйгенс по приглашению общественности Франции переехал в Париж и был принят в Парижскую академию наук. А уже с 1666 года он стал ее первым президентом и трудился на этом посту целых 15 лет. В работе, представленной на конкурс в Королевское общество в 1669 году, Гюйгенс исследовал соударение упругих тел и вывел его законы. В 1678 году он представил в Парижскую академию наук работу «Трактат о свете», в которой излагалась волновая теория света. Центральным моментом этой теории являлся известный принцип огибающей волны (принцип Гюйгенса). В 1681 году, не желая переходить в католицизм, Гюйгенс вернулся на родину, в Голландию, где до конца жизни продолжал свои научные исследования.

Разумеется, упрощать дальше способы вписывания и описывания правильных многоугольников возле окружности после Гюйгенса было уже практически невозможно. Поэтому интерес к другим, негеометрическим способам расчета числа пи возрастал многократно. Одним из первых представил иной способ нахождения значения числа пи Франсуа Виет в 1593 году. Вот его формула:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$

Следующий, XVII век стал поистине переломным не только для способов получения значений числа пи, но и для всех математических наук. К этому времени оформились понятия функции, предела. Стремительно развивался математический анализ, оформлялись методы его применения, а объектами внимания этой области математики были бесконечные функциональные ряды и числовые последовательности. Развивались дифференциальное и интегральное исчисления, объединение которых благодаря исследованиям немецкого математика Г. Лейбница произошло позже. Естественно, что интерес ученых к числу пи на новом уровне развития математики возобновился, причем с новым азартом. Для исследования феномена этого числа появились и стали применяться новейшие математические инструменты. Так, в 1673 году Г. Лейбниц открыл числовой ряд, впоследствии названный его именем:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

При увеличении здесь слагаемых точность значения числа пи возрастает. Как видим, налицо принципиальная возможность получения любой его точности!

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) был первым из великих немецких философов, а также не менее великим математиком, выдающимся физиком и языковедом [31]. В течение всей своей жизни, а особенно с конца 1670-х гг., Лейбниц-философ стремился осуществить алгебраизацию всего человеческого знания путем построения универсального «философского исчисления».

В 15 лет он начал изучать юриспруденцию в Лейпцигском университете, но увлечение философией Декарта и работами Галилея заставило его параллельно заняться изучением математики. Интересно, что в 1712 году Лейбниц, как юрист и дипломат, по просьбе Петра I создавал проекты развития образования и государственного управления в России, которые и были приняты Петербургской академией наук за основу. Лейбниц первым ввел в механику понятие кинетической энергии, а в языкознании ему принадлежит историческая теория происхождения языков.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц

Еще в 20-летнем возрасте Лейбниц начал разрабатывать математизацию логики, на два века опередив время: эта его идея стала востребована только в XX веке. Основной заслугой Лейбница в математике является создание дифференциального и интегрального исчисления, причем одновременно с Исааком Ньютоном (свои результаты Лейбниц опубликовал раньше, чем Ньютон). Наряду с Христианом Гюйгенсом и Якобом Бернулли Лейбниц вплотную подошел к созданию вариационного исчисления. Именно он ввел такие привычные сегодня математические термины, как функция, координаты, абсцисса, алгоритм и многие другие. Лейбниц совершил немало открытий и в других областях математики.

Например, ему принадлежат изобретение счетной машины (которая на тот момент превзошла аналогичное устройство Блеза Паскаля) и идея использования бинарной системы счисления, которая использовалась при создании ЭВМ.

Интересно, что в 1670 году, то есть за три года до появления числового ряда Лейбница для вычисления значения числа пи, английский математик Джеймс Грегори открыл другой интересный математический ряд, где $x \leq 1$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

Оказалось, что ряд Лейбница представлял собой частный случай ряда Грегори как раз при $x = 1$. Но Джеймс Грегори не сразу это заметил. Мало того, при значении $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ отсюда получается ряд:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} \ldots\right),$$

который гораздо быстрее, чем ряд Лейбница, позволяет вычислять знаки числа пи после запятой.

В 1699 году, руководствуясь этим методом, математик Абрахам Шарп провел расчеты и получил значение числа пи с точностью до 71 знака, тем самым дав старт новым соревнованиям: кто найдет самый «быстрый» ряд и точнее определит новые знаки числа пи после запятой.

В этих гонках участвовали многие ученые того времени. Джон Мэчин, Леонард Эйлер, Уильям Резерфорд — вот имена лишь первых участников новой математической эстафеты. Отметим, что формула Мэчина $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ до сих пор остается рабочей и достаточно эффективной.

Число пи обретает имя

Кстати, когда в 1706 году Джон Мэчин вычислил 100 знаков числа пи после запятой, в книге Уильяма Джонса «Новое введение в математику» для обозначения этого числа впервые была использована буква греческого алфавита π. Но общепринятым такое обозначение стало не сразу. Это произошло несколько позже, с легкой руки Леонарда Эйлера, который стал пользоваться этим обозначением с 1736 года и тем привил новую «моду» для обозначения числа пи. Так, наконец, число пи получило свое постоянное имя.

Леонард Эйлер

Итак, соревнования продолжаются.

В 1719 году, используя метод Абрахама Шарпа, французский математик и член Парижской академии наук Том Фанте де Ланьи вычислил 127 знаков числа пи после запятой

[33]. Вскоре великий Эйлер проверил вычисления Ланьи для значений числа пи собственным способом и нашел ошибку в 113-м знаке.

Зато слово «великий» рядом с именем Леонарда Эйлера (1707–1783) уж точно не ошибка, хотя «величайший» все-таки будет намного точнее. Имя этого ученого стоит в ряду первых пяти имен выдающихся гениев математики.

Родом он из Базеля, из семьи пастора. В 15 лет Леонард поступил в Базельский университет, окончил два его факультета — философский и теологический. Выполнив тем самым волю отца, Эйлер смог посвятить себя горячо любимой математике. Наставником его был известный ученый Иоганн Бернулли, заметивший и оценивший дар Эйлера. А дар этот незамедлительно стал приносить поразительные плоды.

В 1727 году по приглашению Петра I Эйлер был зачислен адъюнктом на кафедру высшей математики Петербургской академии наук. Затем, став ее академиком, он возглавил кафедру теоретической и экспериментальной физики, а в 1733 году — кафедру высшей математики.

Эйлер буквально ошеломлял окружающих своей трудоспособностью и поражал необыкновенной научной продуктивностью. Одновременно с кропотливыми научными исследованиями Леонард Эйлер вел обширный курс лекций в гимназии при академии наук, был ведущим сотрудником астрономической обсерватории, редактировал крупные академические издания, участвовал в работе Географического департамента и в подготовке изданий Санкт-Петербургских ведомостей. Но и это далеко не все. С 1741 года, не прерывая связи с Россией, Эйлер работал в Берлинской академии наук. В 1766 году он получил приглашение от российской императрицы Екатерины II и вернулся в близкий его сердцу Петербург. Несмотря на большие трудности со зрением, Эйлер был так же деятелен, как и прежде. Благодаря своим ученикам, которые записывали каждое его слово, Эйлер предоставил научному сообществу еще много идей и великое множество научных достижений.

Совокупность всех его трудов представляет собой поистине колоссальное научное наследие. Прежде всего это фундаментальные выводы в области математического анализа и основные уравнения вариационного исчисления. Кроме того, он разрабатывал и углублял теорию функций, дифференциальную геометрию, вычислительную математику, теорию чисел. Эйлер — основоположник математического аппарата в кинематике и динамике твердого тела. Он заложил основы механики сплошных сред и гидродинамики, акустики и небесной механики. Что же касается прикладных областей, то Эйлер внес весомый вклад в кораблестроение, в развитие артиллерии и геометрической оптики.

В современной пятитомной «Математической энциклопедии» содержится 20 математических уравнений, формул, теорем и методов, которые называются именем Эйлера. Карл Гаусс писал, что «изучение всех работ Эйлера навсегда останется лучшей, ничем не заменимой школой в различных областях математики». Студенты всего мира продолжают обучаться по его учебникам и монографиям.

Авторитет Эйлера-ученого был при его жизни и безупречен, и безграничен! Он являлся почетным членом всех крупнейших на то время академий наук и членом основных научных обществ. Объем его сочинений громаден — свыше 800 опубликованных работ. Кроме того, в Санкт-Петербургском архиве Российской академии наук и сегодня хранится не одна тысяча страниц пока еще не опубликованных исследований Эйлера. Заметим, что вскоре все они дополнят близкое к завершению 72-томное издание Полного собрания трудов Эйлера, которое издается в Швейцарии еще с 1911 года.

Именно в Петербурге в 1735 году Леонард Эйлер установил связь между простыми числами и числом пи. Он решил знаменитую Базельскую проблему — выразить в замкнутом виде (найти формулу) сумму ряда $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$, причем выглядела она совершенно неожиданно: $\frac{\pi^2}{6}$.

Да, в формуле, которую получил Эйлер, присутствует наше загадочное число пи — отношение длины окружности к ее диаметру. Но что оно делает в задаче, которая не связана не только с окружностью, но и с геометрией вообще?! Правда, современных математиков это уже не слишком изумляет. Они давно привыкли, что число пи в математике можно встретить где угодно. Впрочем, не только в математике. Но нетрудно представить, насколько сильное впечатление [19, 38] этот результат производил в 1735 году! Итак, результат Эйлера в окончательном виде:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

А в 1794 году австрийский математик Георг Вега определил уже 140 знаков числа пи, однако точных среди них оказалось 136. Вега был известен и как боевой морской офицер, и как профессор математики, который преподавал в артиллерийском училище города Вены. Впоследствии его лекции по математике вошли в знаменитый учебник, замечательный по ясности и системности изложения. Но еще бóльшую известность Вега приобрел в 1783 году, когда опубликовал свои расчеты по логарифмам: по точности его таблицы превзошли все предыдущие и стали первыми справочными таблицами. Сегодня широко применяются справочные «Семизначные таблицы логарифмов», аналогичные тем, которые составлял Вега.

А далее новые знаки для числа пи появлялись и уточнялись все быстрее! В 1841 году Уильям Резерфорд вычислил 208 знаков, но точных после проверки оказалось лишь 152. В 1844-м гамбургский вычислитель Иоганн Захариус Дазе, который нашел у Резерфорда ошибку, довел точность числа пи до 205 знаков, но на 200-м ошибся сам. В 1847 году Томас Клаузен из Дерпта нашел 250 знаков; точных среди них уже 248. В 1853-м Уильям Резерфорд достиг точности 440 знаков, но уже до конца того же года достижение Резерфорда превзошел Уильям Шенкс, который вычислил 530 знаков. И 527 из них оказались точными! Шенкс, вдохновленный своим результатом, продолжал работать дальше. Долгие годы он упорно уточнял и упрочивал свой рекорд. Впоследствии ему удалось довести точность своих вычислений до 707 знаков. Именно эта точность триумфально держалась до середины XX века. Интересно, что в 1934 году все 707 цифр, полученных Шенксом, были помещены на потолок «цифирной палаты» в Доме занимательной науки в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) в виде нарядного гипсового фриза. А в 1937 году эти же 707 цифр украсили купол циклической галереи Дворца открытий в Париже. Но через много лет после этого произошла настоящая сенсация. Похоже, что с 1853 по 1934 год правильность десятичных знаков, полученных Шенксом «вручную», просто никем не проверялась. И вот — гримаса судьбы! Как показали результаты расчетов на первых электронно-вычислительных машинах, работа Шенкса оказалась с изъяном. И что особенно горько, ошибся он на 528-м знаке! Как бы то ни было, но появление техники, которая может за несколько секунд (и без ошибки!) сделать то, на что Шенкс потратил существенную часть своей жизни, ничуть не умаляет его достижений, равно как и достижений других математиков, живших до эпохи ЭВМ. Ведь каждый из них по-своему приближал именно эту эпоху.

Компьютер: новое соревнование и новые надежды

Неудивительно, что с появлением ЭВМ желание человечества увидеть новые знаки «хвоста» числа пи вспыхнуло с небывалой силой. Электронно-вычислительная машина как новый инструмент сулила возможность на новом уровне оценить это число не только количественно, но и качественно. А вопросов здесь накопилось немало. Какие из цифр повторяются? По одному или группами? Сколько раз? Есть ли какая-то закономерность в этих повторениях? И что, в конце концов, могут означать все эти бесконечные цифры, цифры, цифры?..

Наконец, о числе пи вычислители заговорили уже только в связи с новыми вычислительными машинами, поскольку в 1946 году оказался запущен в работу широкомасштабный электронный цифровой компьютер. Правда, он был сконструирован по заказу армии США для Лаборатории баллистических исследований и предназначался для расчетов таблиц стрельбы. Но вскоре появился ENIAC — электронный числовой интегратор, который был первой вычислительной машиной, принципиально позволяющей всякий раз «себя перепрограммировать» под решение задач любого диапазона. Именно с помощью ENIAC в 1949 году за 70 часов группой ученых под руководством Джона фон Неймана была получена точность числа пи до 2037-го знака после запятой.

Затем во Франции в 1959 году Франсуа Женюи на машине IBM 704 вычислил 16 167 знаков числа пи за 4,3 часа счета.

IBM 704

А в 1961 году Джон Ренч и Дэниел Шенкс с помощью IBM 7090 превзошли достижение Женюи и получили порядка 100 000 знаков. К слову, Дэниел — всего лишь однофамилец упомянутого выше Уильяма Шенкса. Но какова ирония судьбы!.. Далее, в 1973 году Ж. Гийу и М. Буйе на компьютере CDC 7600 вычислили уже 1 001 250 знаков числа пи.

Конечно, это не «железяки между собой мощностями меряются». Все гораздо интереснее! Особенно для тех, кто посвящает себя вполне определенным направлениям в исследованиях: поиску оптимальных для расчетов математических формул, составлению алгоритмов для работы по этим формулам или созданию на их основе компьютерных программ. Так, помимо электронной техники, соревнуются между собой возможности человеческого разума, причем по всем трем направлениям одновременно!

И никакого преувеличения в этом нет. Достаточно обратить заинтересованное внимание, например, на быстрое преобразование Фурье, которое появилось в 1960 году. Благодаря этому преобразованию человечество получило возможность достаточно быстро выполнять арифметические операции над очень большими числами. Насколько это важно, заметно по впечатляющим формулам для определения значения числа пи.

Например, формула бесконечного числового ряда, полученная в начале XX века индийским математиком Сринивасом Рамануджаном (1887–1920):

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26\,390k)}{(k!)^4\,396^{4k}}.$$

К слову, многие формулы этого математика хорошо известны не только глубиной заложенных в них идей, но и особым математическим изяществом.

Еще один образец — бесконечный числовой ряд братьев Чудновских, который был получен в 1987 году:

$$\frac{426\,880\sqrt{10\,005}}{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k)!(13\,591\,409+545\,140\,134k)}{(3k)!(k!)^3(-640\,320)^{3k}}.$$

За один ход он позволяет определять по 14 знаков числа пи.

В 1989 году Дэвид и Грегори Чудновские из Колумбийского университета в США определили 1 011 196 691 десятичный знак числа пи и попали в Книгу рекордов Гиннесса. Для своих расчетов они использовали суперкомпьютер CRAY 2 и сеть компьютеров IBM 3090. Кстати, формула братьев Чудновских используется при определении знаков числа пи в программах для персональных компьютеров. А для дальнейших исследований и установления новых рекордов требуются уже сверхмощные компьютеры и, разумеется, другие программы.

Заметим, что каждый шаг алгоритма на основе бесконечных числовых рядов определяет одно и то же количество новых знаков (у Чудновских — 14 знаков), но существуют итеративные алгоритмы, которые на каждом последующем шаге увеличивают количество новых знаков в разы от предыдущего. Например, в 1975 году Ричард Брент и Юджин Саламин независимо друг от друга пришли к использованию одного и того же процесса. На каждом его шаге количество новых знаков удваивается; при этом применяются лишь арифметические операции. Алгоритм получил название Брента — Саламина.

Итак, предварительно устанавливаются начальные значения:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4}, \quad p_0 = 1$$

и задаются итерации:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$t_{n+1} = t_n - p_n \left(a_n - a_{n+1}\right)^2, \quad p_{n+1} = 2p_n.$$

Полученные значения a_n и b_n сравниваются. Когда их величины оказываются достаточно близкими, очередное приближение числа пи определяется по формуле:

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}.$$

Всего 25 шагов алгоритма Брента — Саламина определяют уже ни много ни мало, а... 45 миллионов десятичных знаков числа пи!

Еще один итерационный метод нашли Джонатан и Питер Борвейны. Их алгоритм на каждом шаге увеличивает точность числа пи уже в четыре раза! А в основу алгоритма, как сообщили авторы, положены формулы упомянутого выше гениального индийского математика Сриниваса Рамануджана.

Судьба его складывалась непросто. Сринивас происходил из семьи бухгалтера, живущей в небольшом городке на юге Индии. Математику он изучал самостоятельно, поэтому в Кумбаконамский колледж в Мадрасе его не приняли: формально юноша не имел специальной математической подготовки. Тогда Рамануджан решился сообщить о некоторых своих математических результатах трем известным английским математикам. Ответ пришел лишь от одного из них — от Готфри Харольда Харди, который впоследствии пригласил Сриниваса в Кембридж и стал его учителем. Выдающийся математик Харди так писал о прежней жизни своего ученика: «Судьба Рамануджана — худший известный мне пример вреда, который может быть причинен малоэффективной и негибкой системой образования». Отвергнутый на родине самоучка Сринивас Рамануджан привез в Англию огромное количество новых, изящных, глубоких математических выводов и формул.

Заметим, что к числам Рамануджан относился со священным благоговением. Сохранилось предание, что однажды Харди назвал число 1729 скучным. Взволнованный Рамануджан удивился до изумления. Он не мог поверить, что такое наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы кубов двумя различными способами, может показаться скучным.

Добавим, что самых замечательных математических результатов Сринивас Рамануджан добился именно в области теории чисел, но сфера его математических интересов была необычайно широка: исследование квадратуры круга, бесконечных числовых и функциональных рядов, гипергеометрических функций. Сегодня целый ряд специальных сумм и функций носит его имя. Рамануджан был и остается крупнейшим знатоком цепных дробей в мире [6]. Одним из самых замечательных его достижений в этой области является формула, в соответствии с которой сумма простого числового ряда с цепной дробью в точности равна выражению, где присутствует произведение двух самых известных чисел *e* и пи:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{e\cdot\pi}{2}}.$$

Особо подчеркнем, что в этой формуле бесконечный ряд и цепная дробь в отдельности не выражаются через числа *e* и пи, а в сумме дают удивительную комбинацию этих чисел. Впрочем, подробнее об их связи мы поговорим в следующей главе. Очень эффективной, например, оказалась формула для нахождения значения числа пи, полученная Рамануджаном в 1910 году путем разложения арктангенса в ряд Тейлора:

$$\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(1103+26\,390k)\cdot(4k)!}{(4\cdot 99)^{4k}\cdot(k!)^{4}}}.$$

Уже при $k = 100$ достигается огромная точность — 600 верных значащих цифр! И наконец, приведем еще одну элегантную формулу Рамануджана, с которой фактически и началось его сотрудничество с Харди:

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^{3}-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^{3}+\ldots=\frac{2}{\pi}.$$

Разумеется, эти математические достижения, ложась в основу новых алгоритмов для вычислений, помогали ученым продвигаться в исследовании свойств числа пи. Поэтому, начиная с 1980 года, группа сотрудников Токийского университета под руководством Ясумасы Канады и Дайсуке Такахаши уже смогла установить несколько рекордов в области определения знаков числа пи. Например, к октябрю 1995 года было вычислено свыше 6 000 000 000 знаков. В 1999 году они добрались до 206 158 430 000 знаков. В 2002-м было определено уже 1 241 100 000 000 знаков. Этот результат был получен на суперкомпьютере HITACHI SR8000 со скоростью вычислений 2 триллиона операций в секунду и с одним терабайтом оперативной памяти. Причем каждый раз группа использовала разные алгоритмы: Борвейнов, Брента — Саламина. В основу алгоритма 2002 года, например, были положены формулы Мэчина. Работал этот алгоритм значительно медленнее, но зато радикально снижал использование компьютерной памяти.

Следующая формула нахождения значения числа пи была получена Саймоном Плауффом в сотрудничестве с Дэвидом Бейли и Питером Борвейном в 1995 году (известна как формула Бейли — Борвейна — Плауффа):

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

Особое достоинство этой формулы заключается в том, что она позволяет определить любую конкретную цифру знака числа пи без вычисления предыдущих знаков, к тому же она очень удобна для представления расчетов в двоичной системе счисления.

В 1997 году французский исследователь Фабрис Биллар, задействуя возможности применения комплексных чисел, нашел сходящийся ряд, который оказался намного «быстрее» формулы Бейли — Борвейна — Плауффа. Именно ряд Биллара был использован в уникальном эксперименте. Началось с того, что в Интернете было размещено обращение, в котором предлагалось принять участие в глобальном проекте Pi-Hex для вычисления знаков числа пи. Координатором проекта выступил Колин Персивал, студент университета

Саймона Фрезера в Канаде. Из тех, кто откликнулся на обращение, реально приняли участие в работе на персональных компьютерах 2 тысячи человек. В результате этого проекта был вычислен квадриллионный бит числа пи, который оказался нулем.

А в 2006 году Саймон Плауфф снова предложил ряд новых красивых формул. Пусть $q = e^{\pi}$, тогда:

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{q^n - 1} - \frac{4}{q^{2n} - 1} + \frac{1}{q^{4n} - 1} \right),$$

$$\frac{\pi^3}{180} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{4}{q^n - 1} - \frac{5}{q^{2n} - 1} + \frac{1}{q^{4n} - 1} \right).$$

Еще была предложена такая формула:

$$\pi^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \left(\frac{a}{q^n - 1} + \frac{b}{q^{2n} - 1} + \frac{c}{q^{4n} - 1} \right).$$

Здесь k — нечетное число, a, b, c — некоторые рациональные числа.

Далее, в 2009 году ученые из университета Цукуба в Японии рассчитали последовательность из 2 576 980 377 524 десятичных знаков. Это достижение было установлено на мощном суперкомпьютере T2K Tsukuba System. Работа всех его 640 четырехъядерных процессоров обеспечивала суммарную производительность 95 триллионов операций в секунду и заняла 73 часа 36 минут.

Следующее достижение вновь принадлежит Фабрису Биллару. В начале 2010 года он нашел значение числа пи с точностью, превосходящей достижение японских вычислителей, и получил уже 2 699 999 990 000 десятичных знаков. Вычисления длились 103 дня. Для хранения всех цифр Биллару потребовалось 1,1 терабайта дискового пространства. Но, что особо примечательно, все расчеты он проводил на домашнем компьютере с обычной для такой техники производительной мощностью.

Предчувствие исследователей, что путешествие вдоль бесконечного «хвоста» числа пи такое же бесконечное, как и сам «хвост», давно переросло в уверенность. Но именно это предчувствие оказалось более сильной причиной продолжать движение, чем прервать его, даже ввиду очевидной тщетности завершить. Да, продолжать! И шагать вперед по пути, на котором каждый шаг рождает догадки, прозрения и выводы, которые расширяют горизонты мировоззрения человечества. Тем более что с развитием информационных технологий исследование числа пи с огромной скоростью выходит на качественно новый уровень.

Сегодня каждый любознательный владелец персонального компьютера может получить значение числа пи практически с любой желаемой точностью и, что называется, не отходя от стола, на котором стоит его компьютер. При этом он еще имеет неограниченный доступ к любой информации, которая его заинтересует. Но кроме развлекательного или прикладного значения у таких возможностей есть еще одно преимущество — объединение творческих усилий всего человечества в единую интернет-лабораторию. А нерешенных на сегодня задач, в частности связанных со свойствами числа пи, остается еще немало.

Глава 2
О свойствах неисчерпаемого числа пи

Свойства загадочного числа пи являлись предметом многочисленных споров и исследований с древнейших времен. Термин «иррациональные числа», например, зародился в результате жарких дискуссий среди адептов пифагорейской школы. Столкновения были вызваны драматическим открытием несоизмеримых отрезков, жертвой которых и пал пифагореец Гиппас Метапонтский. Примерно двумя веками позже важность этого открытия особо подчеркнул Евклид, с именем которого связано становление геометрической алгебры (иначе — «александрийской математики»). В связи с несоизмеримостью (иррациональностью) чисел Евклид в своих «Началах» уже прямо утверждал, что на основе геометрических построений (при помощи циркуля и линейки) невозможно вычислить диагональ квадрата по его стороне, если она будет равна, например, единице.

Древнегреческое наследие: «Начала» Евклида

Древнегреческий мыслитель и математик Евклид жил около 365–300 года до нашей эры, но имя его сегодня известно каждому, кто учился в школе. Родина Евклида — Афины, его учителем и научным наставником был прославленный Платон. Научной деятельностью Евклид стал заниматься в Александрии, где создал афинскую математическую школу. Евклид оставил немалое научное наследие, актуальность которого сохраняется по сей день. Самое знаменитое произведение Евклида — «Начала» (*греч.* «Элементы»). Этот труд принес ему бессмертную славу и в течение двух тысячелетий оставался базовым учебником геометрии. «Начала» стоят того, чтобы каждый житель Земли мог составить о них собственное представление.

Евклид

Объем этого научного сочинения, являющегося самой перепечатываемой книгой после Библии, поистине впечатляет! «Начала» состоят из 13 книг, в которых воедино собраны основные на то время достижения геометрии и теоретической арифметики, причем как самого Евклида, так и его предшественников.

Фрагмент манускрипта «Начала»

Попробуем «бегло перелистать» этот прославленный труд. Итак, все книги «Начал» предварены списком постулатов и аксиом, а каждая из них в отдельности — определениями понятий в четком порядке их появления в данной книге. В первой книге подробно изложены свойства треугольников и четырехугольников, в том числе знаменитая теорема Пифагора. Вторая книга посвящена так называемой геометрической алгебре, тоже основанной пифагорейцами. В третьей и четвертой книгах изложены геометрия окружности, теория вписанных и описанных возле нее многоугольников, основанная в том числе и Гиппократом Хиосским. В пятой книге представлена общая теория пропорций, выстроенная Евдоксом Книдским, а в шестой приведены пропорциональные соотношения, использованные в теории подобия фигур. Как видим, все перечисленное изучается сегодня в программе средней школы. А вот седьмая, восьмая и девятая книги посвящены пифагорейской теории чисел, которая так и не получила широкого применения. Помимо этого, сюда вошли важные теоремы пифагорейцев о пропорциях и геометрических прогрессиях. Здесь же рассматриваются методы нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (алгоритм Евклида) и построения четных совершенных чисел, а также впервые появляется доказательство бесконечности множества простых чисел. Вероятно, восьмая книга основана на работах философа-пифагорейца Архита Тарентского. А вот десятая книга получилась у Евклида и самой объемной, и самой сложной. В ней представлена новая для того времени классификация иррациональностей, полученная Теэтетом Афинским. Одиннадцатая книга содержит основы стереометрии, а в двенадцатой, основанной на работах Архимеда и Евдокса Книдского, с применением метода исчерпывания доказываются теоремы о соотношениях площадей кругов, объемов пирамид и конусов. И наконец, тринадцатая книга посвящена построению пяти правильных многогранников, основу которому положил Теэтет Афинский [19].

Задача вычисления диагонали квадрата по его стороне, которую упоминал в своих «Началах» Евклид, по сути, аналогична задаче о квадратуре круга и напрямую связана с делосской задачей, основанной на одной из античных легенд. Речь в ней идет о событиях в древних Афинах, когда там разразилась эпидемия чумы. В отчаянии афинские граждане обратились за помощью к знаменитому жрецу-оракулу с острова Делос и получили конкретное указание — вдвое увеличить алтарь в храме Аполлона. Алтарь имел простую форму куба, и горожане из последних сил, с небывалой быстротой соорудили новый алтарь, ребро которого было уже вдвое больше прежнего. Но эпидемия только усилилась! Граждане Афин в гневном недоумении вновь обратились к жрецу за объяснениями и получили заслуженный ответ: «Вы увеличили объем алтаря в восемь раз, тогда как нужно было в два раза».

К слову, множество драматических легенд, связанных с «неподдающимися» числами и несоизмеримыми отрезками, ярко свидетельствует о том, насколько свойства этих чисел волновали дух и воображение человечества. Между прочим, и продолжают волновать, в чем дальше мы сможем удостовериться.

Итак, иррациональные числа были уже названы и даже классифицированы (десятая книга «Начал» Евклида), но до установления точных критериев и математических обоснований их свойств было еще далеко. Однако в скором времени постановка задач, в которых появлялись эти строптивые числа, стала проясняться. В конце концов, оформился ключевой вопрос: если число пи — это отношение длины окружности (m) к ее диаметру (n), то существуют ли такие целые числа, чтобы $\frac{m}{n} = \pi$? Вопрос долго оставался открытым, хотя именно этот критерий представления числа в виде дроби и лег потом в основу определения рациональных чисел.

Иными словами, упорное исследование свойств числа пи явно замедлилось, но неуклонно продолжалось. И вот в XVI веке между рациональными и иррациональными числами было, наконец, узаконено немаловажное отличие. А именно, рациональные числа выражаются конечной десятичной дробью или бесконечной периодической десятичной дробью; иррациональные же числа можно представить лишь в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Время шло, и в XVII веке в помощь исследователям оформился мощный математический инструмент — аналитическая геометрия. Основателем ее был выдающийся французский математик, философ и естествоиспытатель Рене Декарт.

Рене Декарт

Латинизированная форма его имени — Renatus Cartesius. Отсюда и произошло слово «картезианство» — философская система взглядов, разработанная Декартом. Основные идеи нового для того времени течения в философии были намечены Декартом в первой же опубликованной им работе по этой теме. Новизна мыслей чувствовалась уже в ее названии: «Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках». Так, смело и оптимистично, Декарт предлагал свое решение фундаментальной проблемы метафизики — отношения сознания и материи. И с этого момента его подход к данному вопросу становится самой влиятельной доктриной Нового времени.

Основу своего учения Декарт определял четко и убедительно. Прежде всего, он опирался на «неустранимый» дуализм, который определял как одновременное и взаимосвязанное существование двух противоположных и самостоятельных субстанций мироздания — «протяженной» и «мыслящей». Картезианство основано на двух исходных принципах. Первый из них — самодостоверность сознания, известен также по фразе, принадлежащей самому Декарту: «Мыслю, следовательно, существую». О втором принципе дает представление его формулировка — априорность существования врожденных идей. По сути, с этих принципов Декарта началась эпоха новой научной философской мысли, которая теперь так и называется — Новое время. Действительно, время было уже другое, но что касается новизны идей, то она была относительной. Суть в том, что во времена Рене Декарта у ученых пробудился интерес к научно-философскому наследию древних греков, которое со времен римского владычества находилось в незаслуженном забвении. Декарт стал самым ярким продолжателем и подвижником античной мысли. Его целью являлось описание природы при помощи строгих математических законов, к чему и стремились в свое время великие античные мыслители. В своих трудах Рене Декарт возвращал научной мысли античности, впитавшей в себя еще более древние истины, их подлинное значение, но уже с учетом новых достижений науки.

Образование Рене Декарта (1596–1650) началось с обучения в иезуитском колледже городка Ла-Флеш. Затем он изучал право и медицину в Университете Пуатье, где получил степень бакалавра. Однако юридической практикой он никогда не занимался. После окончания учебы Декарт переехал в Париж, затем в Голландию. Там записался добровольцем в армию и в качестве вольнонаемного офицера долго странствовал по всей Европе.

Консервативный дух Франции того времени вынудил Декарта выбрать основным местом своего проживания Голландию, где он мог свободно предаваться размышлениям и углублять свои знания. В 1633 году Декарт подготовил к публикации свою первую научную работу «Трактат о свете». Но в это время узнал, что в Риме Галилея обвинили в ереси и на суде Галилей публично отрекся от своих взглядов. Декарт понимал, что публиковать «Трактат о свете» опасно: идеи, которые он высказывал в этой работе, пересекались с идеями Галилея. Таким образом, первой публикацией Декарта стала другая работа, уже упомянутое «Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках», которая вышла в 1637 году. Но, несмотря на это, избежать гонений Декарту все равно не удалось: его философские идеи были признаны еретическими. Положение спасло заступничество принца Вильгельма Оранского. Однако в 1649 году Декарт принял приглашение королевы Кристины и уехал в Швецию [19].

С не меньшей яркостью острота и новаторство мыслей Декарта проявились и в математике. Достаточно привести всего несколько примеров. Вспомним хотя бы введенный им термин «функция переменной». Теперь сложно даже представить, как иначе могло быть названо это понятие! Или, например, знакомая со школьной скамьи прямоугольная система координат. Она тоже была предложена Рене Декартом, а теперь так и называется — декартова система координат. Кстати, до сих пор в мире используется удобный и рациональный способ записи математических формул, предложенный и детально разработанный все тем же Декартом! Помимо этого, в своей научной работе «Геометрия» он обосновал созданную им аналитическую геометрию, тем самым объединив алгебру и геометрию, что позволяло ученым гораздо эффективнее решать проблемы из обеих областей. Особо заметим, что благодаря Рене Декарту строго оформилось и стало заметно доступнее для понимания и применения самое фундаментальное достижение математики Нового времени — дифференциальное и интегральное исчисление. Открытие этих методов принадлежало Лейбницу и Ньютону, но широкое распространение они получили именно «с легкой математической руки» Декарта. Кроме того, в новом виде данные методы нашли применение в качестве математического обоснования главных положений в другой области науки — классической физике. Неудивительно, что усиленная математическая основа послужила колоссальным толчком для развития всех отраслей физики. Весомый вклад Декарта в развитие данной науки отражен в ряде его работ. В «Диоптрике» Декартом впервые был сформулирован закон преломления светового луча, разработаны теория волновой природы света и теория аберрации (искажения изображения) сферической линзой. В научном труде «Метеоры» Декарт предложил кинетическую теорию теплоты, вывел закон соотношения объема и температуры газа (впоследствии названный законом Шарля). Он создал первую на то время теорию ветров, облаков и осадков, а также детально объяснил явление радуги. Мало того, догадке о существовании рефлекса у живых организмов физиологи тоже обязаны Декарту.

Таким образом, с большой долей уверенности можно предположить, что, по крайней мере, для самого Декарта его собственный философский метод исследований (объединение научного скептицизма с дедуктивным рационализмом) оказался весьма эффективным не только в математике.

Разумеется, на фоне такого развития научной мысли многие прежние методы решения задач стали приобретать наивно устаревший вид. Неудивительно, что метод решения геометрических задач при помощи циркуля и линейки потерял свою актуальность. Стало очевидно, что в итоге старый способ все равно сводится к решению других типов алгебраических задач. Например, к решению конечного ряда уравнений с рациональными коэффициентами в одном случае или конечного ряда уравнений, среди которых появляются уравнения с иррациональными коэффициентами, — в другом. В результате корни таких уравнений были названы алгебраическими числами и отнесены к первому классу иррациональных чисел.

Но строгого доказательства того, например, относится ли число пи к рациональным или к иррациональным числам, к тому времени все еще не было. К слову, за первое утверждение обеими руками держались те, кого с тех пор стали называть квадратуристами. Это были упорные искатели решения задачи о квадратуре круга в ее прежней, геометрической постановке и с прежними (инструментальными) методами решения. Причем жаркие доводы с двух сторон не утихали здесь еще долгое время. И длились вплоть до появления результатов, которые были получены гениальным Леонардом Эйлером.

Эйлер — «крестный отец» второй константы

Особо подчеркнем, что Эйлер, по сути, был первым, кто вывел в свет число пи, обнаруженное еще в глубокой древности. Именно он дал ему столь привычное сегодня название, без преувеличения сравнимое с титулом! Впрочем, затем он сделал то же самое и для числа *e* — такого же вездесущего, как и константа пи. А до этого времени число *e* упорно держалось в тени, хотя уже было известно и даже называлось числом Непера. Правда, ничем особенным оно до этих пор еще не отличилось. Но обо всем по порядку...

Впервые это число возникло в 1618 году в работе «Описание удивительной таблицы логарифмов» шотландского астронома Джона Непера. Но произошло это как-то неявно. Дело в том, что Непер изобрел логарифмы и... не придал никакого значения их основанию! То есть именно тому, относительно чего он производил расчеты и составлял таблицы. Может, это число по какой-то причине его насторожило? А позже так сложилось, что для вычислений удобнее оказалось использовать обратное этому число, которое и было названо числом Непера. Удивительно, но и впоследствии выход в свет числа *e* все время задерживался, как заколдованный! Математики упорно не замечали его и не обращали на него внимания даже после того, как было введено понятие «основание логарифма».

А как, например, можно объяснить, что в 1624 году математик Генри Бриггс получил и обнародовал численное приближение десятичного логарифма числа e, но само это число в работе никак больше не было упомянуто? Далее, в 1661 году Гюйгенс, наконец, установил связь между равнобочной гиперболой и логарифмами. Мало того, ему удалось найти точку (а это и было число e!), для которой площадь фигуры, заключенной между осями координат и графиком гиперболы на промежутке от единицы до этой точки, тоже была равна единице. В дальнейшем это удобное свойство числа-точки e и послужило причиной того, что оно стало использоваться в качестве основания натуральных логарифмов. Но в явном виде число e и здесь еще не проявилось! И даже когда оно впервые проявилось достаточно отчетливо, произошло это в связи не с логарифмами, а со степенями, стремящимися к бесконечности: $n \to \infty$. Поразительно, но число e опять не признали! А произошло это следующим образом: в 1683 году Якоб Бернулли, используя биномиальную теорему, представил предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и даже показал, что численно он находится между числами 2 и 3. Сейчас это считается первым приближением числа e, а формула самого предела признана его основным классическим определением. Заметим, что это был первый случай в истории математики, когда число определялось как предел. И какое число! А о нем у Бернулли — ни слова. Правда, тогда математический мир еще не догадывался, что логарифмическая функция является просто обратной функцией к обычной показательной (экспоненциальной) функции. Кстати, немногим позже первым об этом догадался сам Якоб Бернулли.

Самое интересное, что и это был не последний раз, когда число e оказалось в стороне! Например, в 1668 году математик Никола Меркатор опубликовал работу, в которой представил разложение в математический ряд функции $\log(1 + x)$ и первым применил термин «натуральный» для логарифма по основанию e. Но о том, что означает само число в основании натуральных логарифмов, умолчал и Меркатор.

Итак, число e проявилось уже вполне отчетливо. Более того, оно приобрело вполне узнаваемый вид, но все еще не имело персонального обозначения. Известно, например, что в 1690 году Лейбниц в письме к Гюйгенсу обозначил его буквой b. И хотя это частное обозначение так и не закрепилось, тем не менее число e впервые было выделено из множества «рядовых» чисел. А что касается имени на века для числа e, то бесспорно одно: его автор — Леонард Эйлер. И неудивительно! Эйлер тонко чувствовал мир математики и ввел множество удачных математических обозначений. Кстати, иногда можно услышать, что Эйлер использовал букву e потому, что с нее начинается его имя. Но в среде математиков это предположение невольно вызывает улыбку. Нет никаких подтверждений и тому, что Эйлер выбрал обозначение e, поскольку это первая буква в слове «exponential» (*лат.* показательный), что применимо к математической экспоненте. Известно лишь, что в 1731 году обозначение e впервые появляется в письме Эйлера к Гольдбаху. Это как раз тот период, когда Эйлер уделил числу e самое пристальное внимание. В 1748 году вышла его известная работа «Введение в теорию анализа бесконечностей», в которой Эйлер представил строгое обоснование для множества своих идей, связанных с числом e. И наконец, благодаря этому состоялся блестящий выход в свет второй достославной константы!

Итак, Эйлер показал, что:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Кроме того, он нашел первые 18 десятичных знаков числа e после запятой: $e = 2{,}718281828459045235\ldots$

Такая точность получается при вычислении всего 20 членов, полученных по данной формуле!

Среди результатов, представленных Эйлером в этой знаменитой работе, есть доказательство (на основе формулы Муавра) связи между тремя следующими функциями — двумя тригонометрическими и экспоненциальной:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ и } e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Кроме того, Эйлер нашел разложение числа e в непрерывные дроби и представил в своей работе образцы такого разложения:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}.$$

Вскоре Эйлер получил еще один замечательный результат, связывающий числа e и пи с комплексным числом $i = \sqrt{-1}$. Это было равенство $e^{i\pi} = -1$. Что же касается строгого доказательства свойств числа e, то иррациональность его, например, была доказана лишь много лет спустя, причем одновременно с доказательством иррациональности числа пи. И с этого времени оба числа нередко появлялись уже, что называется, бок о бок. Говорят, что как-то английский математик Бенджамин Пирс написал на доске равенство:

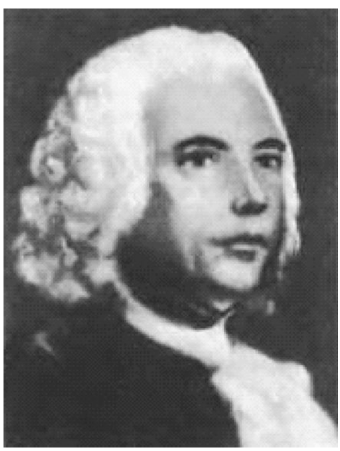
$$i^{-i} = \sqrt{e^{\pi}},$$

а затем сказал: «Джентльмены! Мы не имеем ни малейшего представления, что бы это значило. Но мы можем быть уверены, что это значит что-то чрезвычайно важное» [10].

Поиски определения иррациональности

Но вернемся к числу пи и его свойствам. Итак, исследования свойств этого числа продолжались дальше с новым подъемом. В 1766 году немецкий ученый Иоганн Ламберт впервые обосновал тот факт, что число пи — иррациональное.

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) — выдающийся ученый-мыслитель, астроном, математик, физик, философ. В возрасте 12 лет он вынужден был оставить школу. Однако именно с этих пор он настойчиво и успешно продолжал учиться самостоятельно. Причем настолько успешно, что уже в молодые годы овладел несколькими языками, глубоко изучил физику и продолжал заниматься исследованиями в этой области. И не только в этой, а также в сфере астрономии, физиологии, теологии и истории науки. И на все это ему каким-то чудом хватало времени! Похоже, подобное чудо всегда кроется в сплаве азартного интереса и удивительной самодисциплины. Однако больше всего Ламберта интересовала математика как самый надежный и объективный инструмент познания законов природы. Вслед за древними греками и Декартом Иоганн Ламберт настойчиво стремился отыскать математический фундамент под каждым научным законом, природным явлением и даже под философскими взглядами.



Иоганн Ламберт

Кроме того, долгие десять лет Ламберт совмещал научную деятельность с талантом наставника молодежи. Его первая научная работа была посвящена тепловым измерениям. Затем он увлекся астрономическими наблюдениями в Швейцарии, после чего переехал в Мюнхен, где участвовал в организации Баварского научного общества. В 1765 году Ламберт стал членом Берлинской академии наук. Впоследствии его неоднократно избирали членом других научных обществ и академий [39].

В физике Ламберт по праву считается родоначальником гигрометрии. Тонкая интуиция ученого позволила ему высказать значимые идеи о сущности энергии, которую он уже тогда назвал лучистой теплотой. В картографии Ламбертом заложены основные принципы построения карт и предложен ряд новых картографических проекций. В философских взглядах Иоганн Ламберт отходил от материалистической позиции естествоиспытателя. Он отстаивал широко распространенную в те времена идею разумной целесообразности, которой обладает природа. И это нашло отражение в его работах «Новый органон, или Мысли об исследовании и обозначении истины и об отличии ее от заблуждения и иллюзии», а также «Архитектоника, или Теория простого и первого в философском и математическом познании».

В области астрономии Ламберт тоже оставил глубокий след. Например, широко известны его достижения в исследовании орбит комет и движения таких планет, как Юпитер и Сатурн. Кроме того, им была получена более точная, чем ранее Гюйгенсом, фотометрическая оценка межзвездных расстояний. Ламберт теоретически доказал возможность существования двойных и кратных звезд, указал на возможность существования сверхплотных космических тел, которые при незначительных размерах могут обладать колоссальной силой притяжения. Спустя много лет эти гипотезы были подтверждены исследованиями и наблюдениями — от обнаружения двойных белых карликов до нейтронных звезд-пульсаров и сверхплотных черных дыр. В 1761 году в своих «Космологических письмах» Ламберт дополнил идеи Канта о структуре мироздания. Таким образом, возникла новая космологическая концепция Райта — Канта — Ламберта об иерархической структуре Вселенной.

В математике Ламберт занимался актуальными на то время проблемами алгебры, вплотную исследовал параллельность и теорию перспективы, разрабатывал вопросы сферической тригонометрии. В 1770 году в научной работе «Очерки об употреблении математики и ее приложений» он расширил тригонометрию на четырехгранники и назвал этот раздел тетрагонометрией. Здесь же он предположил возможность расширения данного раздела до полигонометрии, явно предчувствуя появление неевклидовой геометрии. Кроме того, Ламберт предвосхитил много идей из алгебры логики, впоследствии разработанной Джорджем Булем.

Более чем через 20 лет после обоснования Ламбертом иррациональности числа пи другой известный ученый, Адриен Лежандр, привел его доводы к более строгому математическому виду, доказав недостающую лемму. Публикация об этом появилась в 1794 году. Причем оба математика в своих доказательствах основывались на теории непрерывных дробей. Напомним, что непрерывной (или цепной) дробью называется выражение вида:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}},$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — некоторые числовые последовательности. В том случае, если $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел, а все $b_n = 1$, цепная дробь называется канонической.

Многие математики по достоинству ценят теорию непрерывных дробей и нередко применяют ее в ходе вычислений. Причем, чтобы это сделать, достаточно знаний одной арифметики! А сам процесс таких вычислений приносит ощутимое удовольствие, увлекая вычислителя математической красотой, легкостью и эффективностью достижения результата. Специально для тех, кто не прочь убедиться в этом самостоятельно, приведем алгоритм представления числа в виде канонической цепной дроби на примере $\pi = 3{,}14159265...$

Для начала выделим целую часть: $\pi = 3 + 0{,}14159265...$, то есть $a_0 = 3$. Затем округлим дробную часть до четвертого знака $\pi \approx 3 + 0{,}1416$. Далее представим ее в виде дроби с числителем, равным 1, то есть найдем число, обратное числу 0,1416. Это будет число 7,06215. Подставим его в знаменатель: $0{,}1416 = \frac{1}{7{,}06215}$. Снова выделим целую часть, но уже у знаменателя, то есть $a_1 = 7$, и снова найдем число, обратное его дробной части. Это будет число 16,0901. Подставим его в знаменатель: $0{,}06215 = \frac{1}{16{,}0901}$. Далее снова выделим целую часть знаменателя, то есть $a_2 = 16$, и аналогичным образом повторяем процесс дальше.

Если на очередном шаге в знаменателе получится целое число (дробная часть окажется равной 0), то процесс закончен. Если же на каком-либо шаге процесс просто оборвать, то будет получено приближение исходного числа.

Подчеркнем еще раз, что разложение на цепные дроби является одним из самых эффективных способов получения нужного приближения числа. Именно его применили Эйлер для получения приближения числа $\frac{e-1}{2}$ и Сринивас Рамануджан для числа $\sqrt{\frac{e \cdot \pi}{2}}$, где числа e и пи присутствуют оба.

В приведенном нами примере, если оборвать процесс на первом шаге, получается:

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}14285...$$

Это и будет приближение числа пи, найденное еще Архимедом.

Если остановить процесс на втором шаге, получается приближение, которое нашел в незапамятные времена математик Цу Чун-чжи:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=\frac{355}{113}=3{,}141592\ldots$$

Неудивительно, что Лежандр, который в совершенстве владел методом разложения чисел в цепные дроби, использовал именно этот метод, в том числе при строгом доказательстве свойства иррациональности числа пи.

Адриен Мари Лежандр (1752–1833) был выдающимся французским математиком. После окончания Коллежа Мазарини был принят на службу в качестве преподавателя в Парижской военной школе, а в 1783 году уже стал членом Парижской академии наук. Имя Лежандра в одном списке с величайшими учеными, которые приумножили славу Франции, помещено на стену первого этажа Эйфелевой башни [39]. Как известно, вопрос о квадратуре круга был одним из двигателей развития математики, а доказательство иррациональности числа пи Лежандром — огромный шаг в развитии методов алгебры и анализа бесконечно малых. Неслучайно, например, что в серии «Классики естествознания» в вопросе о квадратуре круга в одном ряду с Архимедом, Гюйгенсом и Ламбертом назван Лежандр [39].

Во времена перемен, когда Францию охватила революция, Лежандр вместе другими учеными, в числе которых были Лагранж и Лаплас, эффективно участвовал в Комиссии по введению метрической системы. В частности, ученым было поручено измерение длины одного градуса между Дюнкерком и Барселоной для установления эталона метра. В 1795 году Лежандр стал профессором Парижской Нормальной школы, в 1799 году принял должность экзаменатора Политехнической школы, а затем стал и ее профессором.

Первой среди работ Лежандра отметим «Опыт теории чисел» (1798), которая выдержала три переиздания еще при его жизни. В ней ученый успешно осуществил систематизацию имеющихся на тот момент знаний и выводов по теории чисел, включив также и те выводы, которые тогда еще не были доказаны. В частности, в этом обширном труде Лежандр попытался доказать предположение, которое ранее высказал Эйлер. Лежандр более четко сформулировал идею Эйлера и назвал ее квадратичным законом взаимности. Именно в этой работе он предложил использовать функцию, которая теперь широко применяется в теории чисел и называется символом Лежандра. Интересно, что впоследствии Гаусс смог доказать почти все нестрогие выводы в этом научном труде, тем самым подтвердив справедливость идей Лежандра и его прозорливость. К слову, именно в этой работе Лежандра содержится полная теория непрерывных дробей, а также применение их для решения диофантовых уравнений, названных так в честь древнегреческого математика Диофанта. Это уравнения, общий вид которых:

$$P(x_1,\dots,x_m)=0,$$

где P — целочисленная функция. В частности, P может быть полиномом с целыми коэффициентами, причем, что важно, все значения x здесь только целые числа.

Заметим, что второе издание «Опыта теории чисел» отличается уже тем, что в нем Лежандр предложил асимптотическую формулу для функции распределения простых чисел (но без строгого доказательства):

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x-1{,}08366}.$$

Не правда ли, обозначение функции $\pi(x)$ сразу привлекает к себе внимание? Разумеется, это лишь обозначение, к самому числу пи оно никакого отношения не имеет. Так уж сложилось, что к тому времени все 24 буквы греческого алфавита были «разобраны» математиками на обозначения. Но почему Лежандр взял и повторил именно эту букву? Случайно? Кто знает... По крайней мере, один вид $\pi(x)$ заставляет нас почувствовать некий намек на тайны, скрытые во множестве простых чисел, коль скоро для них понадобилось вводить такую замысловатую функцию. В конце концов, любые числа до сих пор хранят не меньше неоткрытых истин, чем иррациональные числа, к которым принадлежит число пи.

Любопытно, что в 1830 году уже в последнем издании «Опыта теории чисел» Лежандр снова удивил научный мир. Он предложил доказательство теоремы Ферма для $n = 5$. Эта теорема утверждает, что уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ не имеет положительных целых решений при значении $n > 2$. К слову, доказательство теоремы Ферма для $n = 4$ было дано еще в 1676 году Бернаром де Бесси, а в 1738 году Эйлер доказал ее для $n = 3$.

Не меньшей известности удостоилась работа Лежандра «Начала геометрии» (1794), тоже несколько раз переиздававшаяся еще при его жизни и ставшая превосходным классическим учебником. Впоследствии данная книга неоднократно переводилась, дополнялась и удивительно долго оставалась самым авторитетным учебным пособием, в том числе и в России. Любопытно, что учебник содержал попытки доказательства Лежандром знаменитого пятого постулата Евклида о параллельных прямых (попытки оказались безуспешными, но, безусловно, вдохновляющими!).

Кроме того, к достижениям Лежандра относятся исследования в области сферической тригонометрии. А математический анализ пополнился многочленами Лежандра, преобразованиями Лежандра, исследованием интегралов Эйлера первого и второго рода. Именно Лежандру принадлежат доказательство приводимости эллиптических интегралов к канонической форме, разложение их в ряд, составление таблиц значений для них. В области вариационного исчисления Лежандр первым определил признак существования экстремума функции.

Таким образом, благодаря математическому гению Лежандра было доказано, что число пи — иррациональное, то есть его значение нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n} = \pi$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$. Следовательно, число пи может быть представлено только в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Блестящая эстафета великих имен: определение трансцендентности

С этого момента научная эстафета под названием «Исследование свойств чисел пи и *e*» стала быстро набирать темп. В ней приняла участие уже новая плеяда выдающихся математиков, достойных благодарного внимания и творивших богатую историю чисел пи и *e*.

Принял эстафету Жозеф Лиувилль (1809–1882) — французский математик, член Парижской академии наук и член-корреспондент Петербургской академии наук, куда он был принят в 1840 году.

Жозеф Лиувилль

В 1827 году Лиувилль окончил Парижскую политехническую школу, а с 1838 года он уже являлся ее профессором. Затем он стал еще и профессором Коллеж де Франс: сначала по математике, а позднее — и по механике. Сфера научных интересов Лиувилля была очень широка, о чем свидетельствует его наследие, составившее около 400 опубликованных работ. К основным его достижениям относятся: постановка и доказательство фундаментальной теоремы (теоремы Лиувилля) в механике, теоремы об интегрировании канонических уравнений динамики, создание теории эллиптических функций. Кроме того, Лиувилль исследовал краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений второго порядка (задача Штурма — Лиувилля).

В 1844 году Жозеф Лиувилль сделал сообщение, в котором обосновывал существование иррациональных чисел, обладающих особым свойством. А именно, они не являются решением алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами. Лиувилль предложил назвать это свойство трансцендентностью (*лат.* выход за пределы). В частности, он установил, что число e не может являться корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b, c — рациональные числа. А затем в 1851 году Лиувилль подтвердил свое сообщение о существовании бесконечного множества трансцендентных чисел доказательством и впервые построил примеры таких чисел в виде суммы ряда [19].

Далее, в 1873 году эстафету по исследованию свойств числа пи и e продолжил Шарль Эрмит.

Шарль Эрмит (1822–1901) — известный французский математик. Обучался в Парижской политехнической школе, а затем, защитив диссертацию, стал ее профессором. Кроме того, Шарль Эрмит преподавал математику в Коллеж де Франс, а с 1870 года являлся профессором Высшей нормальной школы (аналог педагогического университета) и профессором Сорбонны. С 1856 года он был избран членом Парижской академии наук, а с 1873-го стал членом Лондонского королевского общества. Научные работы Эрмита посвящены теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций. К его основным достижениям относятся: метод сведения общего алгебраического уравнения пятой степени к виду, разрешимому в эллиптических модулярных функциях; метод построения ортогональных многочленов (многочлены Эрмита); создание теории инвариантов (совместно с Артуром Кэли и Джеймсом Сильверстом). И наконец, в 1873 году Шарль Эрмит получил новое доказательство иррациональности числа пи! Помимо этого, он собрал ряд доводов в подтверждение сообщения Лиувилля, предложив еще одно доказательство трансцендентности числа *e* [19].

Шарль Эрмит

Еще одно доказательство этого свойства, в частности, уже относительно числа пи, в 1882 году получил Фердинанд фон Линдеман (1852–1939) — известный немецкий математик. Линдеман окончил Геттингенский университет в период наибольшего расцвета этого академического учебного заведения. Его педагогом был Альфред Клебш, прославленный математик и талантливый преподаватель. В 1873 году Линдеман защитил диссертацию по философии в университете Эрлангена, а в 1877 году — по математике в Вюрцбургском университете.

После этого он был приглашен читать лекции во Фрайбург. В академических кругах сохранилось предание, что идея доказательства трансцендентности числа пи внезапно озарила Линдемана в день его 30-летия и он посчитал это для себя главным подарком — подарком судьбы.

Кстати, в 1882 году научная работа Линдемана, содержащая доказательство трансцендентности числа пи, была опубликована в Берлине знаменитым Карлом Вейерштрассом, а в Париже эта же работа была издана Шарлем Эрмитом. Таким образом, имя Линдемана обрело мировую известность, а сам он был приглашен читать лекции в знаменитую на то время Альбертину (ныне Кенигсбергский университет). Там он проработал 10 лет, причем последние два — в качестве ректора. С 1893 года Линдеман совмещал исследовательскую и преподавательскую деятельность в Мюнхенском университете. Его научные работы связаны в основном с дифференциальной геометрией, теоретической физикой, теорией линий спектра. О педагогических достижениях Линдемана свидетельствует тот факт, что он являлся руководителем и экспертом множества диссертационных работ, в том числе и Давида Гильберта [19].

Решающий вклад в определение свойства трансцендентности внес другой участник научной эстафеты — немецкий математик Феликс Христиан Клейн (1849–1925), один из сильнейших представителей весьма влиятельной на то время физико-математической Геттингенской научной школы.

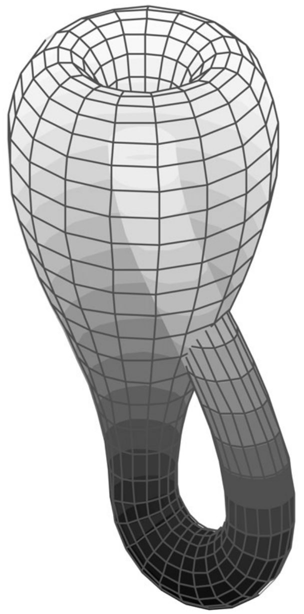
Научную деятельность Клейн начинал под руководством знаменитого немецкого математика Юлиуса Плюккера и в дальнейшем продолжал ее в тесном сотрудничестве с немецким математиком Рудольфом Клебшем и норвежским математиком Софусом Ли. Это был взаимно вдохновляющий и плодотворный «тройственный союз» необычайно талантливых ученых! Отметим, что Клейн являлся членом-корреспондентом Берлинской академии наук, а с 1905 года — иностранным членом Петербургской академии наук. Преподавательская и научная деятельность Клейна проходила в разных учебных заведениях, в частности в Университете Эрлангена, Высшей технической школе Мюнхена, Лейпцигском университете. С 1886 года Клейн занимался научно-педагогической и организаторской деятельностью в Геттингенском университете. О благородстве и высоких стремлениях этого человека говорят его дела. Например, в течение многих лет Клейн прилагал немалые усилия в своем стремлении объединить в Геттингене выдающихся ученых того времени. В созданный Клейном физико-математический центр для совместной научной деятельности были приглашены такие научные светила, как физик-теоретик Макс Борн, физик-ядерщик Роберт Оппенгеймер, создатель квантовой механики Вернер Гейзенберг, выдающиеся кенигсбергские математики Давид Гильберт и Герман Минковский. Еще одна общечеловеческая заслуга Клейна — основанный им журнал «Математические анналы», пользующийся огромным авторитетом у мировой научной общественности, и долгие годы он сам был его самоотверженным главным редактором. Сюда же относится деятельность Клейна по изданию полного собрания сочинений Карла Фридриха Гаусса. Кроме того, Клейн организовал и возглавил Международную комиссию по преподаванию математики, которая сыграла весомую роль в прогрессе образования по данному направлению.

Феликс Христиан Клейн

В научное наследие Клейна вошло великое множество работ. Прежде всего, это «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», или так называемая «Эрлангенская программа» [19]. Она вышла в свет в 1872 году и сразу же встала в один ряд с самыми авторитетными научными трудами. Влияние ее на дальнейшее развитие геометрии невозможно переоценить, настолько оно велико! А причина появления такой программы заключалась в том, что к середине XIX века геометрия разделилась на множество плохо согласованных между собой разделов. Существовали, например, евклидова и сферическая, гиперболическая и проективная, аффинная и риманова, многомерная и комплексная геометрия. И это еще не весь существовавший на то время список! Кроме того, на рубеже веков к ним добавились псевдоевклидова геометрия и топология. Клейн предложил плодотворную идею алгебраической классификации различных областей геометрии. Фактически он определял любую отрасль геометрии областью ее действия (плоскостью, пространством, сферой и т. п.) и группой симметрии (иначе — автоморфизмов), причем новая группа симметрии дает новую геометрию. Эта идея была чрезвычайно высоко оценена всем математическим сообществом — прежде всего потому, что «Эрлангенская программа», помимо всего остального, намечала в данной области отчетливую перспективу для дальнейших исследований!

Кроме того, известны такие труды Клейна, как «Теория эллиптических модулярных функций», «Лекции о римановой теории алгебраических функций и их интегралов». Далее назовем еще две его работы, причем каждая из них состоит из четырех томов и написана в соавторстве. Это «Теория автоморфных функций» в соавторстве с Робертом Фрикке и «Теория волчка» в соавторстве с Арнольдом Зоммерфельдом. По инициативе и с непосредственным участием Клейна была издана давно ожидаемая научным миром «Энциклопедия математических наук» из шести томов. Широкой известностью пользовались его работы «Элементарная математика с точки зрения высшей» [37] и «Лекции о развитии математики в XIX столетии», а также многие другие.

Одним из важнейших достижений Клейна было первое доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Для этого им была построена ее интерпретация в евклидовом пространстве, впоследствии названная «моделью Клейна». Кроме того, им была построена знаменитая бутылка Клейна — весьма впечатляющий пример односторонней поверхности!



Бутылка Клейна

Итак, подчеркнем, что в 1894 году именно Феликсом Клейном было представлено еще одно доказательство трансцендентности чисел пи и *e*. Таким образом, новое свойство в классе иррациональных чисел определилось окончательно: трансцендентными называются числа, которые не могут являться корнями алгебраического многочлена с рациональными коэффициентами. Заметим, что появление и обоснование новых свойств числа пи существенно отразилось на подходе к знаменитой задаче о квадратуре круга.

Пи — нормальное математическое число

Как это ни удивительно, но решения задачи о квадратуре круга все еще не было. Однако уровень развития математики говорил о том, что оно вот-вот будет найдено. С начала XVIII века находились дельцы, которые готовы были рискнуть своим капиталом в надежде если не приумножить их, то хотя бы прославиться. Именно таким образом, например, приобрел известность некто Матюлон — фабрикант из Лиона [8]. В 1728 году он публично предоставил решение задачи о квадратуре круга в академическую комиссию (вполне может быть, и не свое). И даже готов был заплатить тому, кто найдет там ошибку. Правда, академик Парижской академии наук Франсуа Николь быстро доказал, что решение Матюлона ошибочно, а денежные средства, обещанные Матюлоном, были переданы в пользу страждущих в Лионскую больницу. Но поток «решений» знаменитой задачи при помощи циркуля и линейки продолжал нарастать. Ситуация дошла до того, что, в конце концов, волна подобных «решений» захлестнула Парижскую академию настолько, что рассмотрение их было прекращено. Становилось все очевиднее, что в прежней, классической постановке задача о квадратуре круга зашла в тупик, а связано это, скорее всего, именно с природой самого числа пи.

Разумеется, после этого исследование свойств числа пи попало под самое пристальное внимание искренне увлеченных исследователей. А с расширением и углублением достижений в области математического анализа, высшей алгебры, аналитической геометрии и теории чисел ученые все ближе подходили к проблеме, лежащей в основе знаменитой задачи. И наконец, в 1882 году, когда Фердинанд фон Линдеман доказал трансцендентность числа пи, классическая постановка задачи о квадратуре круга утратила свою актуальность. Интересно, что в наши дни любители и знатоки математики, как и прежде, с удовольствием принимаются за ее решение. Правда, для этого они применяют уже не только циркуль и линейку, но и другие математические методы.

Что же касается новых свойств числа пи, то уже в 1909 году французский математик Эмиль Борель обратил внимание на то, что у некоторых чисел в записи их разложения в десятичную дробь любая комбинация цифр после запятой встречается одинаково часто. Мало того, точно такая же одинаковая вероятность появления комбинаций остается в записи этих чисел и в других системах счисления, отличных от десятеричной! Числа, для которых это свойство справедливо, были названы нормальными. Свойство нормальности числа может считаться доказанным, если будут выполнены определенные условия, которые иллюстрирует приведенная ниже таблица. Поясним, что через $N(a, k)$ в ней обозначается количество повторений цифры a в k первых знаках числа после запятой. Но точно так же a может быть не одной цифрой, а группой из n цифр, повторяемость которых необходимо исследовать в записи числа. Тогда $N(a, k)$ будет показывать уже количество повторений этого набора из n цифр. Итак, число является нормальным, если в этих обозначениях будет доказано выполнение следующего математического равенства: $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N(a,k)}{k}=\frac{1}{10^n}$. Для случая, если a является одной цифрой (то есть $n = 1$), равенство подтверждает, что вероятность появления любой цифры в числе одинакова и равна 1/10. Наконец, если воспользоваться результатами исследований группы профессора Ясумасы Канады по вычислению знаков числа пи и их статистическому анализу [7], получим следующую таблицу частоты появления цифр в записи первых 200 000 000 000 десятичных знаков этого числа.

Цифра a	**Количество повторений $N(a, k)$, k = 200 000 000 000**	**Частота $N(a, k) / k$**
0	20 000 030 841	0,1000002
1	19 999 914 711	0,0999996

Продолжение →

Продолжение таблицы

Цифра a	**Количество повторений** N (a, k), k **= 200 000 000 000**	**Частота** N (a, k) / k
2	20 000 013 697	0,1000001
3	20 000 069 393	0,1000003
4	19 999 921 691	0,0999996
5	19 999 917 053	0,0999996
6	19 999 881 515	0,0999994
7	19 999 967 594	0,0999998
8	20 000 291 044	0,1000015
9	19 999 869 180	0,0999993
0	20 000 030 841	0,1000002

Как видно из таблицы, вероятность появления всех цифр в записи числа пи практически одинакова и действительно равна 0,1! Разумеется, это пока еще не является доказательством нормальности числа пи, но укрепляет исследователей в том, что, скорее всего, именно так и есть!

Интересно, что шотландский математик Огастес де Морган проанализировал 707 знаков числа пи, которые были получены Уильямом Шенксом (и в двух странах даже запечатлены в архитектуре!). Оказалось, что вероятность появления всех цифр, кроме 7, действительно одинакова. А цифра 7 в записи Шенкса появлялась с вероятностью 0,076, а не 0,1, как ожидалось. Причина этого стала понятна значительно позже. Как мы помним, ошибка в расчетах Шенкса была обнаружена только после появления первых ЭВМ. Таким образом, достоверно установлено, что связана она была именно с «неверной» цифрой 7!

Итак, принятое на сегодня определение нормальности пока сохраняется без изменений. То есть нормальными называются такие числа, в десятичной записи которых вероятность появления каждой из 10 значащих цифр равна 0,1, и ни одна последовательность цифр в записи не должна преобладать над другой.

Разумеется, новые математические исследования опираются на уровень накопленных достижений, а также, что немаловажно, на современный уровень развития информационных технологий и компьютерной техники. Именно обширные данные, полученные при помощи компьютерных систем (в частности, при получении знаков числа пи), вызвали к жизни ряд новых проектов. Один из таких проектов посвящен тому, чтобы получить ответ на вопрос, является ли число пи нормальным. Директор Центра эмпирической и экспериментальной математики университета Саймона Фрезера доктор Борвейн подтвердил тот факт, что на сегодня этот вопрос остается открытым. Из его слов следует, что пока недостаточно оснований для того, чтобы завершить проверку нормальности любой из классических констант, но есть основания надеяться, что недавно полученная формула, адаптированная для компьютерной программы, позволит решить эту задачу. Помимо этого, доктор Борвейн и его коллега Ричард Крэнделл сообщили, что найденный алгоритм позволяет перевести задачу доказательства нормальности математических констант пи, *e* и подобных им из области теории чисел в другие, уже хорошо изученные области математики, например теорию хаоса или теорию псевдослучайных чисел. А с этими дисциплинами число пи, как и другие константы, связано довольно тесно.

Кроме того, стремительное развитие компьютерных технологий способствует не только новым исследованиям, но и поиску ответов на вопросы, которые были поставлены в прошлом и не решены до сих пор. Например, не так давно был запущен крупномасштабный проект ZetaGrid. Более 4 тысяч компьютеров, специальным образом объединенных в единую систему, работали одновременно. Проект создавался для проверки знаменитой в математическом мире гипотезы выдающегося немецкого математика Бернхарда Римана. Возникла она еще в 1859 году, когда некоторые идеи из теории чисел объединились с идеями из математического анализа и появилась новая область математики — аналитическая теория чисел.

Для исследования феномена распределения простых чисел (например, в бесконечном «хвосте» числа пи или в любом другом исходном числовом множестве) Риман придумал экзотическую дзета-функцию и выдвинул не менее экзотическую гипотезу. Будь она доказана, то облегчила бы «математическую жизнь» аналитикам и вычислителям на долгие времена! Достаточно было бы ссылаться на ее доказательство, и многие выводы о распределении простых чисел или, скажем, алгоритмы для компьютерного решения масштабных целочисленных задач могли быть уже гораздо надежнее и намного убедительнее с научной точки зрения.

К слову, если раньше какую-то упорно неподдающуюся задачу нередко называли очередной квадратурой круга, то сегодня входит в моду другое выражение — «очередная дзета-функция». В конце концов, квадратура круга уже давно стала метафорой «разрешения неразрешимого» и символом обретения труднодостижимого, своеобразным аналогом философского камня алхимиков. Кстати, фасон средневековой квадратной шляпы, которую сегодня надевают на круглые головы почетным докторам наук и выпускникам вузов, есть не что иное, как символ хорошо знакомой нам квадратуры круга! Но первыми, кто приспособил себе ее на голову, были, между прочим, алхимики.

Магистерская шапка

Кто знает, может, со временем в ученой среде войдет в моду новый головной убор, который будет уже символизировать гипотезу Римана?.. И это отнюдь не шутка и даже не преувеличение! Иначе вряд ли эта гипотеза попала бы в число первых семи проблем тысячелетия, к которым ее отнес авторитетный в научном мире Математический институт Клэя. Как известно, за решение научных задач, отнесенных к проблемам тысячелетия, этот институт установил весьма внушительные награды [38].

Дзета-функция Римана и великое объединение

Конечно, для неспециалиста в теории чисел формулировка этой проблемы тысячелетия звучит экзотически: «все нетривиальные нули дзета-функции Римана имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$». Но именно это утверждение остается одной из величайших нерешенных задач современной математики! Разумеется, гипотеза, высоко отмеченная мировым научным сообществом, достойна внимания сама по себе. К тому же она имеет непосредственное отношение к нераскрытым тайнам числа пи. Для того чтобы составить о ней представление, зададимся нехитрым вопросом: сколько наберется простых чисел перед числом 10 (простые числа делятся только на единицу и само на себя)? Их будет четыре: 2; 3; 5; 7. А перед числом 20? Таких чисел будет уже восемь: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19. А сколько простых чисел перед миллионом? А перед миллиардом? Может быть, в глубинах математики все-таки существует некая общая формула, которая избавляла бы здесь от прямого перебора чисел? Так вот, гипотеза Римана — это дверь, за которой находятся ответы на все эти вопросы! Математикам остается ее лишь открыть. И еще один вопрос: как, не погружаясь в глубины высшей математики, представить себе экзотическую дзета-функцию? Отвечаем: легко! Стоит лишь бросить взгляд на формулу Базельской проблемы, которую Эйлер разрешил еще в 1735 году:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

А теперь вместо квадратов чисел мы просто подставим в формулу Базельской проблемы произвольную степень s и запишем формулу в более обобщенном виде как функцию от s:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\ldots$$

Итак, перед нами дзета-функция Римана! Здесь s — любое вещественное число, которое больше 1. Заметим сразу, что формулы, которые последуют ниже, приведены здесь для иллюстрации идеи гипотезы и лишь обрисовывают общую картину. Итак, в других математических обозначениях представленная сумма может быть записана еще короче:

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s}.$$

Мало того, эта же сумма представима и через произведение:

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1},$$

где p — все простые числа. Отсюда получаем, что:

$$\sum_n n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1}.$$

Это соотношение действительно стоит того, чтобы задержать на нем взгляд! Дело в том, что именно оно позволило осуществить великое объединение арифметики и математического анализа. Иными словами, математики нашли способ объединить счет и измерение. Почувствовать это можно на следующем примере: «количество зерен» риса и «килограмм» риса находятся в одной и той же пачке! А теперь вернемся к формулам, чтобы внести последний и основной штрих в нарисованную нами математическую картину. Приведем одно из последних достижений Римана при его жизни — еще одну формулу для выражения дзета-функции:

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\sin\left(\frac{1-s}{2}\pi\right)(s-1)!\zeta(s).$$

Нам же она интересна прежде всего тем, что в ней есть вездесущее число пи. А еще любопытно то, что в формуле присутствует обобщение факториальной функции, до которого не так давно смогли додуматься математики. Но сначала вспомним, что $n!$ — это произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. Однако математики расширили эту функцию на все множество вещественных чисел и стали получать фантастически любопытные результаты. Например, оказалось, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

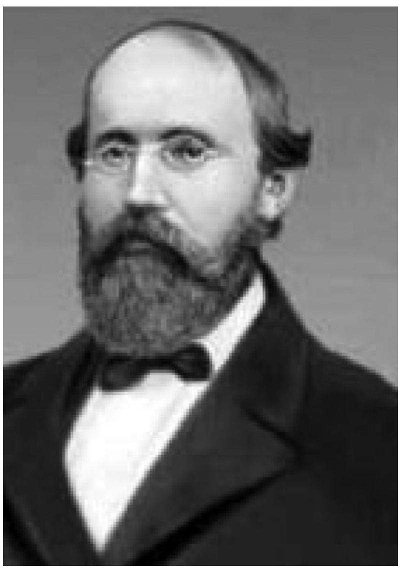
Заметили? Число пи и сюда проникло. Такое уж оно сверхъестественно вездесущее!

Похоже, не только число пи или e, но и все иррациональные числа обладают такой сверхъестественностью. По крайней мере, пока они доставляют математикам намного больше хлопот, чем комплексные числа. Мало того, таинственность иррациональных чисел пугает неизвестностью даже сильнее, чем странный вид комплексного числа $\sqrt{-1}$. Вспомним хотя бы числовую ось вещественных чисел — простую линейку. Каждое число на ней может быть представлено точкой. Комплексные числа на одну такую линейку уже никак не укладываются. Для них понадобилось уже две линейки — две числовые оси. Вещественная часть комплексного числа имеет свою ось, а мнимая часть откладывается на оси, перпендикулярной к ней. Конечно, с вещественными числами намного легче: каждому из них соответствует единственная точка на единственной линейке — числовой оси. Причем иррациональные числа тоже «где-то там». Приблизительно, конечно. Например, число пи чуть-чуть правее, чем 3, и заметно левее, чем 4. А число $\sqrt{2}$ заметно правее, чем 1, но чуть-чуть левее 2. Точно указать эти числа никак не получится! И эта таинственная невозможность все время настораживает. Каким образом иррациональные числа умещаются между рациональными?! Вопрос открыт, и парадокс сохраняется: числовая ось давно привычный объект, но все еще таинственный.

Интересно, что в давние времена из-за этого предпринимались попытки вообще отказаться от иррациональных чисел. Вспомним, например, растерянность Пифагора перед несоизмеримыми числами. Но, что самое поразительное, еще сравнительно недавно такие попытки предпринимались снова! Причем на это решались профессиональные и весьма авторитетные математики: в XIX веке — Леопольд Кронекер, немецкий математик и член-корреспондент Петербургской академии наук, в XX веке — нидерландский математик Лейтзен Брауэр и немецкий математик Герман Вейль [38]. Правда, еще неизвестно, чем чреват для всей математической науки подобный отказ, если уже доказано, что иррациональных чисел (таких, как число пи) оказывается куда больше, чем рациональных. Это утверждение в строгом математическом смысле смог подтвердить в 1874 году немецкий математик Георг Кантор. Получается, множество рациональных чисел бесконечно, как и множество иррациональных чисел, однако бесконечность последних куда больше первых. Каким образом? Примерно таким же, каким в одну и ту же банку помещается бесконечно много рисовых зерен, но при этом их там поместится куда меньше, чем бесконечно много маковых зерен.

Как бы то ни было, но сегодня уже вряд ли у кого-либо из математиков «поднимется рука» на бесконечное множество иррациональных чисел. Напротив, эти числа постоянно находятся под пристальным вниманием исследователей-математиков. Например, лаборатория IBM создала платформо-независимую распределенную вычислительную систему ZetaGrid для любых вычислительно-емких приложений. Первой на ней испытывалась задача по проверке гипотезы Римана, непосредственно связанная с нерешенными вопросами вокруг числа пи.

Итак, автор по сей день неразрешенной проблемы тысячелетия Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1886) — один из величайших немецких математиков. Еще со времен своего обучения в гимназии он увлекался теорией чисел в изложении Лежандра. В Геттингенском университете посещал лекции Карла Гаусса, Морица Штерна, а в Берлинском университете — курс лекций Карла Якоби. Близким другом Римана был математик Рихард Дедекинд. По возвращении из Берлина в Геттинген в 1849 году Риман нашел единомышленников в лице физика Вильгельма Вебера и математика Петера Лежена Дирихле. Вебер пробуждал у Римана интерес к физическим явлениям с точки зрения математики, а Дирихле разделял с ним увлеченность теорией чисел. Это был блестящий синтез человеческих отношений, который оказался для Римана не только удачной случайностью, но и весьма приятным душевно!



Бернхард Риман

В 1851 году Риман представил докторскую диссертацию на тему «Основы общей теории функций комплексного переменного». Одним из экспертов этой работы был Карл Гаусс, который дал ей очень высокую оценку: «Существенная и ценная работа, которая не просто удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, но и намного превосходит их» [38]. А поскольку Гаусс был чрезвычайно сдержан в своих оценках (если не сказать жёсток), можно сделать вывод о том, что работа Римана была по-настоящему уникальна. А так оно и было! В этой работе впервые появились уравнения, известные как условия Коши — Римана. Кроме того, дальнейшее развитие здесь получила теория конформных отображений, причем в связи с топологией. А топология на то время сама только начинала развиваться. Зато сейчас это уже обширный раздел математики, изучающий явления непрерывности в самом общем виде (в частности, такие свойства пространства, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях).

Риманова геометрия и риманова прозорливость

В 1854 году в Геттингенском университете Риман представил вторую диссертационную работу — на право чтения лекций. Она называлась «О представимости функции тригонометрическим рядом». В ней впервые появилось одно из самых фундаментальных понятий для дифференциального и интегрального исчисления — интеграл Римана. Вслед за этим последовала так называемая пробная лекция Римана. И она превзошла даже его новаторскую диссертационную работу! Кстати, тему лекции (одну из трех подготовленных Риманом для комиссии) выбирал сам Карл Гаусс. Называлась лекция «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» и была по своей сути явлением в той же мере философским, в какой и математическим. Идеи, содержавшиеся в этой лекции, оказались настолько передовыми, что до их окончательного принятия в научном мире прошло несколько десятилетий! А до того момента, когда они заняли свое место в физике, прошло 60 лет. Например, математические исследования Римана нашли свое приложение в качестве математического аппарата, на который опирался Альберт Эйнштейн в общей теории относительности.

Итак, в своей пробной лекции Риман убедительно классифицировал все существовавшие виды геометрии, включая и молодую на то время неевклидову геометрию. Затем он предложил совершенно новую идею обобщенного математического пространства как многообразия произвольного числа измерений и доказал возможность существования любого количества новых типов пространств. Далее, он ввел так называемые римановы поверхности, важные при исследовании многозначных функций. Кроме того, поднял вопрос о причинах метрических свойств физического пространства (тем самым предварив выводы общей теории относительности Эйнштейна). И наконец, обобщая результаты Карла Гаусса по внутренней геометрии поверхностей, Риман ввел понятие линейного элемента (дифференциала расстояния между точками, которое определялось внутренней метрикой пространства), чем положил начало понятию финслеровых пространств. Их можно было по праву назвать римановыми, но первое основательное исследование по теории таких пространств было опубликовано в 1918 году Паулем Финслером, швейцарским математиком и астрономом, поэтому данная область геометрии стала называться финслеровой.

То, насколько Риман касался в той лекции сокровенных вопросов самой природы пространства, становится понятным, если просто перечислить научные области, где теперь применима финслерова геометрия, которую он предвосхитил результатами своих достижений. Итак, это касается вопросов из таких традиционных областей, как теория анизотропных сред или лагранжева механика, статистическая физика и термодинамика. Кроме того, это вопросы решения проблем оптимизации и хаотических систем, экология и теория эволюции биологических систем, внутренняя симметрия элементарных частиц и теория пространства-времени. А также теория гравитации и единые калибровочные теории полей. И этот перечень, разумеется, не окончателен.

В 1857 году Риман стал профессором Геттингенского университета. Следующая его исследовательская работа называлась «Теория абелевых функций» (или многозначных функций). Она вновь подтвердила его репутацию остроумного новатора в актуальных вопросах математики, а имя Римана стало известно математикам всей Европы. В этом же году он был принят в Берлинскую академию наук. По традиции новоизбранный член должен был предоставить оригинальную работу по теме своего исследования. И снова его труд оказался настоящим прорывом в математике! На этот раз — в области аналитической теории чисел. Работа называлась «О количестве простых чисел, не превышающих данной величины» и содержала в себе ту самую проблему тысячелетия — знаменитую гипотезу. И все! Начиная с этого момента *математика уже стала другой*. А значит, и подход к числам, к их сути и свойствам тоже кардинально менялся. Появлялась перспектива разобраться и с загадочной бесконечностью таких чисел, как пи и *е*. Кстати, по этому поводу в 2007 году российский ученый-математик Михаил Иванович Беляев в своей статье «Космология мироздания» написал следующее: «Математики уже осознали, что числа бывают не только простые, не только четные и нечетные, не только действительные, рациональные и иррациональные, не только мнимые, но могут иметь еще и иные смыслы, заключенные в сложные высказывания, например, в следующей форме: „Существуют ли гипердействительные числа в квантово-релятивистской вселенной?"».

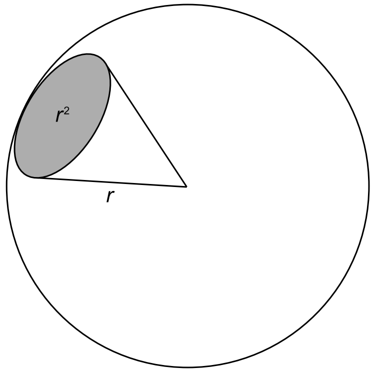
Вполне возможно, что подобные перспективные вопросы встанут перед математиками, как говорится, в полный рост, когда будет доказана гипотеза Римана. Но пока еще она не доказана, но и не опровергнута. И вопрос о наличии свойства нормальности у констант пи и *е* остается открытым.

Глава 3
О связях числа пи с другими фундаментальными константами

Об одной «метрологической» щекотливости

Числа пи и *е* вездесущи. И здесь нет ни малейшего преувеличения! Убеждает в этом «густое и плотное» их присутствие в математических формулах, которыми описываются процессы в самых различных областях науки. А это и есть не что иное, как факт проявления непосредственной связи данных чисел с фундаментальными законами природы. Но пока наука углубляет познание природных законов и совершенствует их модели, в прикладных областях человеку приходится иметь дело с текущими в процессе развития несовершенствами.

Очевидно, что константа пи, как отношение длины окружности к ее диаметру, касается различных видов симметрии мирового пространства, в том числе сферической симметрии. Но единицы измерения угловых величин, которые применяются к окружности и сфере, смущают метрологов своими странностями по сей день. В чем конкретно это проявляется? Для начала вспомним, что радиан (рад) — это единица измерения плоского угла. А стерадиан (ср) — единица измерения телесного угла (телесного, потому что сфера — это геометрическое тело в пространстве, в отличие от окружности на плоскости). Теперь вспомним, что радиан — это угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу. В градусах один радиан приблизительно равен 57° 17’ 4,8’’. Стерадиан — это телесный угол с вершиной в центре сферы радиуса r, который вырезает на ее поверхности площадь, равную r^2.



Телесный угол

Мера телесного угла — отношение площади сферы, вырезаемой конической поверхностью, к квадрату радиуса сферы:

$$\omega = \frac{S}{r^2}.$$

Подчеркнем, что, кроме радиана, у плоского угла есть еще одна известная единица измерения. Это один оборот (об), или полный угол, что в градусах составляет 360°, а в радианах 2π. Оборот — это естественная мера угла, широко применяемая в практической деятельности. Перевести эти «практичные» обороты из градусной меры в радианную никакого труда не составляет. Например, пусть дано a радиан и требуется перевести это в $x°$. Составляем известную элементарную пропорцию: $\frac{360°}{x°} = \frac{2\pi}{a}$, откуда $x° = \frac{360° \cdot a}{2\pi} = \frac{180° \cdot a}{\pi}$. Теперь дано $a°$ и требуется перевести это в x радиан. Из той же пропорции $\frac{360°}{a°} = \frac{2\pi}{x}$ следует, что $x = \frac{2\pi \cdot a°}{360°} = \frac{\pi \cdot a°}{180°}$. Кстати, эта пропорция позволяет не заучивать никаких формул перевода из одной меры в другую!

Теперь обратим внимание, что нет никакой информации о том, в каких единицах здесь измерялись длины дуг и радиусов. И нигде это не проявилось. Да и не нужно! Радиан и стерадиан остаются неизменными, в чем бы ни мерили для них радиусы и дуги — в метрах, саженях, футах или даже в царских египетских локтях.

А в чем тогда причина смущения метрологов? Конечно, в несоизмеримости радиана, который не может быть выражен целочисленно. Возьмем, к примеру, «практичные» углы, без построения которых не обходится изготовление и простейшей табуретки: $30° = \frac{\pi}{6}, 45° = \frac{\pi}{5}, 60° = \frac{\pi}{3}, 90° = \frac{\pi}{2}$. Обратили внимание? Привычные и практичные углы магически — легко и незаметно — превратились в иррациональные числа! Интересно, а какой тогда объект может стать для системы СИ эталоном единицы измерения несоизмеримого радиана?.. Так и остаются метрологи в подвешенном состоянии: радиан отнесен ими к надсистемным (или дополнительным) единицам измерения, у которых нет метрического эталона [32].

Как видим, нерешенные проблемы, связанные с несоизмеримыми константами пи и *e*, остаются. Тем не менее, глубоко пронизывая структуру математики, эти числа дают ученым возможность точнее увидеть многие природные процессы и механизмы, в описании которых участвуют обе константы. Сегодня даже трудно себе представить, как мог выглядеть без них классический математический анализ. Но в описаниях процессов, кроме чисел пи и *e*, присутствуют и другие константы, привлекающие внимание ученых. Несомненно, что в изучении таких констант и связей этих чисел с пи и *e* содержатся новые тайны и новые открытия. Например, множество загадок скрывает в себе и константа фи, или число Фидия.

Пропорции Парфенона

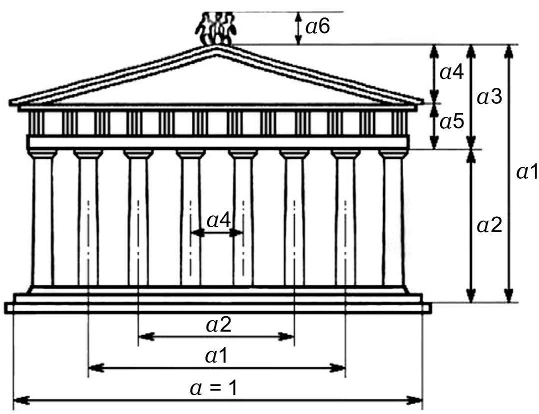
Число Фидия известно с древнейших времен, так же как и число пи. Свое современное название оно получило через много веков после того, как впервые начало использоваться в практической деятельности, например у древних египтян (XVIII–XVII века до нашей эры), и даже позже того времени, в котором жил древнегреческий скульптор и архитектор Фидий (490–430 годы до нашей эры). А ведь именно в его честь было закреплено в математике известное сегодня название знаменитого золотого сечения. Итак, золотое сечение или золотая пропорция — это, как принято говорить кратко, деление величины в крайнем и среднем отношении. Или иначе: это деление отрезка на две части, при котором меньшая его часть так относится к большей части, как большая часть относится ко всему отрезку. Предпочтение такой пропорциональности отдано интуитивно, поскольку человеком такие пропорции воспринимаются как наиболее правильные, красивые, гармоничные. И в этом нетрудно убедиться! Например, такие скульптурные шедевры Фидия, как статуя Афины Парфенос (Афина *(греч.)* — дева; 438 год до нашей эры) или статуя Зевса, до наших дней не сохранились, но рассказы и легенды о них остаются. Статуя Зевса в Олимпии считалась одним из семи чудес света и подробно описана у Павсания, древнегреческого писателя и путешественника. А величественная Афина Парфенос сохранилась в копиях.

Известно, что под началом Фидия часто работала большая группа скульпторов. Порой это не позволяет строго указывать его авторство. Но почерк резца Фидия, художественное совершенство и математически выверенная пропорциональность этих творений говорят сами за себя. Отметим, что Фидий 10 лет участвовал в сооружении Парфенона — главного храма афинского Акрополя, посвященного Афине Парфенос [30]. После завершения строительства он продолжал заниматься отделкой храма. Частично сохранившийся до наших дней Парфенон и фрагменты его архитектурного убранства продолжают удивлять своим совершенством.

Статуя Зевса

Афина Парфенос

Упомянув Парфенон, нельзя не сказать о тайнах уникальности его восприятия. Дело в том, что впечатление безупречной красоты храма возникает не только благодаря ощущениям, которые вызывает гармония пропорций, но и благодаря тому, что архитекторы храма учли особенности зрительного восприятия человека. Это чудесным образом оживило строго прямоугольный архитектурный облик Парфенона и усилило впечатление от его удивительной красоты. Отметим лишь некоторые способы достижения уникальности такого восприятия, которые использовали зодчие. Например, поверхность пола храма не является абсолютно плоской: в центре здания она слегка выпуклая, а диаметр угловых колонн больше других и они сдвинуты ближе к соседним колоннам. Кроме того, все колонны слегка наклонены к центру здания, а визуально они остаются строго вертикальными. Расстояние между колоннами разное, а восприятие отмечает строгую ритмику. Однако математические несовершенства, задуманные для усиления впечатления, не задевают главных пропорций Парфенона, которые имеют строгие математические соотношения, основанные на числах золотой пропорции. Если за единицу принять ширину торцевого фасада храма, то основные пропорции его фасада, приведенные на рисунке ниже, образуют прогрессию 1, $a1$, $a2$; $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, причем знаменатель этой прогрессии 0,618, а это и есть приближенное значение одного из чисел золотой пропорции — φ.



Пропорции Парфенона

Пифагорейцы (VI–V века до нашей эры) уже знали о числе фи и тоже занимались исследованием знаменитой золотой пропорции. Пифагор, например, называл ее «отражением гармонии небесных сфер» [11]. Встречается она также в «Началах» Евклида (IV век до нашей эры) и у Платона (427–347 годы до нашей эры). Например, диалог Платона «Тимей» посвящен математическим и эстетическим воззрениям школы Пифагора, в частности вопросам золотого сечения. А в эпоху Возрождения этим вопросом занимался монах-математик из Венеции Лука Пачоли (1445–1517), автор книги «Божественная пропорция» [30].

Лука Пачоли (см. вклейку)

Лука Пачоли упорно настаивал на божественности золотой пропорции. В ней он видел отражение божественного триединства, заложенного в христианской традиции. При делении отрезка в золотой пропорции Лука Пачоли определял меньший отрезок как олицетворение Бога Сына, больший — как Бога Отца, а весь отрезок — как Бога Духа Святого. По мнению современников и историков, Лука Пачоли являлся известнейшим математиком Италии того времени. По некоторым сведениям, он учился живописи у известного итальянского художника эпохи Возрождения Пьеро делла Франческа (1420–1492), автора книги «О перспективе в живописи» [30].

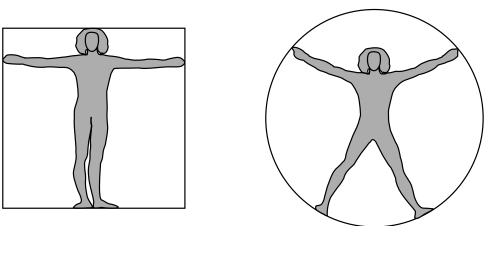
Пьеро делла Франческа.
Портрет герцога Федериго Монтефельтро
и герцогини Баттисты Сфорца.
Галерея Уффици, Флоренция (см. вклейку)

Если принять во внимание, что Пьеро делла Франческа признан «отцом» начертательной геометрии, то становится понятно, почему монах-математик выбрал его в качестве своего наставника.

Кроме того, Лука Пачоли известен и тем, что являлся одним из основоположников теории бухгалтерского учета и другом Леонардо да Винчи. Кстати, широко распространилось предание, что золотым сечением эту пропорцию назвал Леонардо да Винчи, однако достоверных подтверждений этому нет. Как нет, например, и подписей Леонардо да Винчи под замечательными иллюстрациями для книги его друга Луки Пачоли (правда, есть косвенные упоминания об этом от автора самой книги). Зато достоверно известно, что благодаря другой древней книге появился на свет самый известный рисунок Леонардо да Винчи. Рисунок называется «Витрувианский человек» (около 1490 года), а упомянутая древняя книга — «Десять томов по архитектуре», она составлена в самом начале нашей эры Марком Витрувием Поллионом [30].

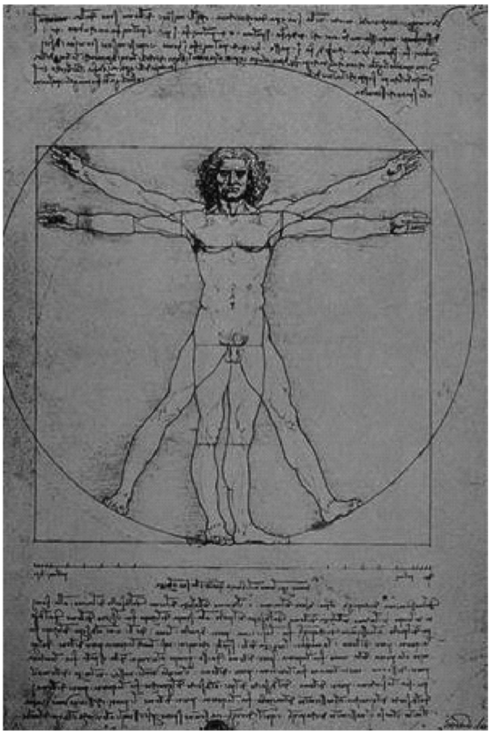
Эпоха возрождения наследия древних греков

Свой десятитомный трактат, который чудесным образом сохранился до наших дней, военный инженер римской армии и архитектор Марк Витрувий Поллион посвятил императору Августу во второй половине I века. Трактат содержит основные правила строительства, среди которых особо выделен принцип соразмерности. Суть его заключается в том, что архитектурные формы строений и все детали в них должны быть соразмерны пропорциям человеческого тела. Кроме того, в трактате приведены подробные пропорции мужской фигуры (среди них есть и золотые). По мнению Витрувия [40], совершенство человеческого тела подтверждается именно тем, что при определенном положении рук и ног оно может быть вписано в такие безукоризненные геометрические формы, как квадрат и окружность. Однако трактат Витрувия не содержит ни одной поясняющей иллюстрации. Предполагается, что они могли быть собраны отдельно, но не сохранились. Разумеется, различные исследователи трактата Витрувия предлагали свои варианты иллюстраций и чертежей, в том числе размещали человеческую фигуру внутри квадрата и внутри окружности.



Размещение человеческой фигуры
внутри квадрата и внутри окружности

И только у Леонардо да Винчи два положения виртуозно совмещены! На его рисунке изображена мужская фигура в двух положениях, совмещенных наложением одного на другое, помещенная как в круг, так и в квадрат. Текст, окружающий рисунок, содержит пропорции Витрувия, которые уже стали каноническими. Кроме того, можно убедиться в том, что комбинации рук и ног фигуры на рисунке составляют не два, а четыре различных положения.



Леонардо да Винчи. Витрувианский человек

В наше время «Витрувианский человек» Леонардо да Винчи уже давно перестал быть геометрическим описанием человеческого тела. Он стал символом гармоничной встроенности человека в мироздание, гимном их взаимосвязи и тождественности. А личность Леонардо да Винчи (1452–1519) — это символ эпохи Возрождения и образец непостижимости гения.

Огромная часть его творческого наследия была оставлена в отрывочных заметках, в которых говорится «обо всем на свете», в многочисленных дневниках, в беглых набросках и в скупых к ним подписях. Мало того, писал он их левой рукой, крайне неразборчиво да еще «справа налево», что представляет собой самый известный в истории образец зеркального письма. В своих инженерных поисках гений Леонардо да Винчи предвосхитил немало идей из самых различных областей науки и техники, которые не были осуществлены вплоть до XX века. Сам Леонардо да Винчи говорил: «Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды» [30].

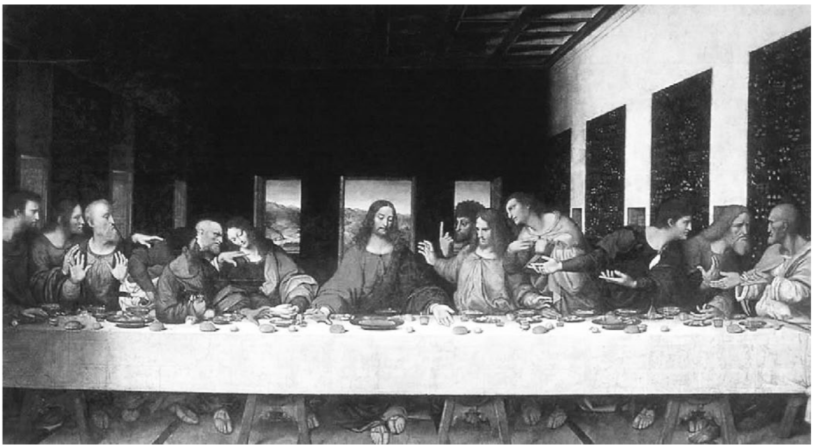
Именно из этих трудов и стало известно о том, что Леонардо да Винчи всесторонне исследовал золотую пропорцию: он занимался построением различных сечений в додекаэдре — стереометрическом теле, 12 граней которого представляют собой правильные пятиугольники. На сторонах фигур сечений Леонардо да Винчи каждый раз отмечал точки, которые делили их в золотой пропорции.

Результаты этих исследований мастер применял в своих художественных произведениях. Есть они, в частности, и на самой знаменитой фреске Леонардо да Винчи «Тайная вечеря», которая была создана в 1495–1498 годах в доминиканском монастыре в Милане. Отметим, что Леонардо писал «Тайную вечерю» на сухой стене, что послужило причиной крайней недолговечности этого произведения. К счастью, сохранились три ранние копии фрески, предположительно авторства помощника Леонардо. С 1978 по 1999 год был осуществлен масштабный проект реставрации фрески, но в целях сохранности доступ к шедевру ограничен.

На фреске во множестве мест присутствует золотое сечение. И прежде всего там, где Иисус, апостол Иоанн (справа от него), а за ним Иуда (резко повернут в противоположную от зрителя сторону из-за нависшего над ним апостола Петра) почти соединили свои руки на столе. Эта точка делит в золотой пропорции все полотно в целом. А далее золотое сечение повторяется в каждой из четырех групп, на которые

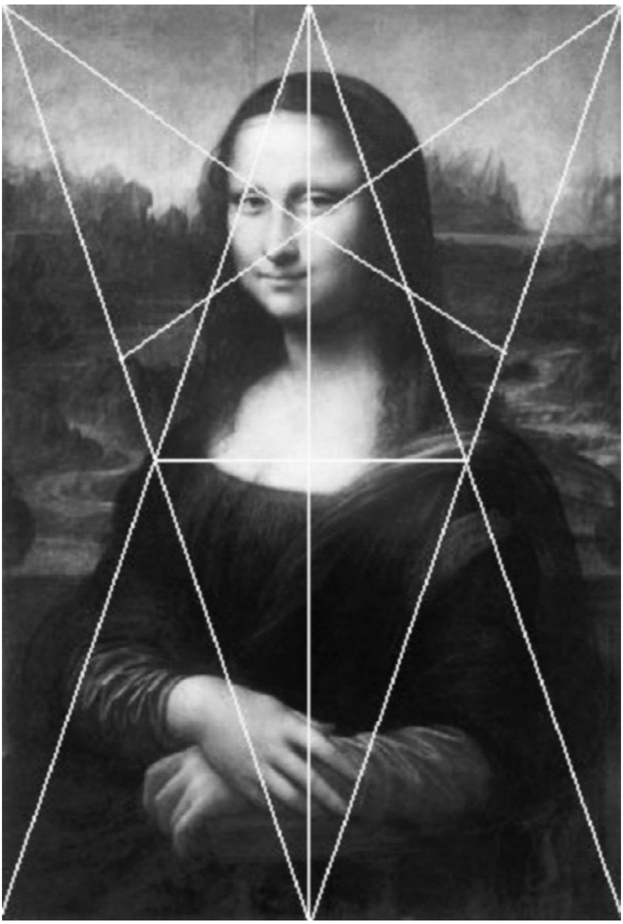
Леонардо да Винчи композиционно разделил апостолов (по три в каждой группе).

Но, кроме золотого сечения, Леонардо да Винчи виртуозно использовал множество других законов: перспективы, симметрии, светопередачи, композиции, ритмичности форм и оттенков цвета. Описание и научный анализ этой картины, как и художественного творчества Леонардо да Винчи в целом, — это отдельная вселенная и великое множество увлекательных книг! Но данная тема лежит вне нашего повествования.



Тайная вечеря (неизвестный автор XVII века).
Копия фрески Леонардо да Винчи (см. вклейку)

Единственное, что хочется добавить, касается другой знаменитой картины Леонардо да Винчи — «Мона Лиза». Если на пару секунд остановить свой взгляд на области ее глаз, а затем сразу перевести его на область губ, Джоконда вам лукаво усмехнется. Попробуйте проверить! Для данного опыта вполне подойдет качественная репродукция. Секрет здесь — в неуловимом противоречии между пристальным взглядом и полуулыбкой, скрытой в слегка поджатых губах. Дело в том, что искушенный в знании анатомии Леонардо да Винчи совместил с пристальным взглядом состояние лицевых мышц вокруг глаз человека во время улыбки, а вокруг рта — состояние мимических мышц, противоположное улыбке. В реальности такое сочетание на лице человека неуловимо, а мастер запечатлел его на века. Впрочем, и этот портрет является не менее ярким примером того, как Леонардо да Винчи соблюдал золотые пропорции в своем творчестве.



Мона Лиза.
Золотые треугольники
в композиционном построении
картины Леонардо да Винчи (см. вклейку)

В то же самое время золотое сечение тщательно изучал немецкий живописец, рисовальщик, гравер, теоретик искусства и основоположник немецкого Возрождения Альбрехт Дюрер (1471–1528).

Альбрехт Дюрер (см. вклейку)

Судя по одному из писем Дюрера, он посещал Италию и даже встречался с Лукой Пачоли [30]. Альбрехт Дюрер подробно разрабатывал теорию пропорций человеческого тела, где важное место отводил золотому сечению. Его выводы нашли отражение в теоретических трудах «Руководство к измерению циркулем и линейкой» (1525) и «Четыре книги о пропорциях человека» (1528). Богатое художественное наследие Дюрера отличается изумительной точностью графического языка, тончайшей разработкой световоздушных потоков, глубиной цвета, ясностью линий и сложнейшим философским замыслом содержания каждой работы. Примечательна, например, картина Дюрера «Праздник четок» (1506). Эта одна из самых больших алтарных картин была заказана немецкими торговцами, жившими в Венеции, для местного костела Сан-Бартоломео. Работа выполнена Дюрером в лучших итальянских традициях. Сложность ее многофигурной композиции, глубина символики и насыщенная колористика уравновешены выверенными пропорциями и строгой симметрией, которая проявлена здесь до настойчивой манифестации. Именно гармония пропорций облегчает восприятие картины и усиливает ее праздничную торжественность.

Альбрехт Дюрер. Праздник четок.
Национальная галерея, Прага (см. вклейку)

Леонардо да Винчи творил в эпоху, когда глубокий интерес к наследию античной науки, культуры и философии начинал возрождаться на новом уровне развития естествознания. Неудивительно, например, что пифагорейская идея **гармонии священно оцифрованного мироздания**, так же как платоновский идеализм **познания блага как высшего объекта**, вновь овладевали умами и получали стремительное распространение. Естественно, золотое сечение сразу же становится эстетическим каноном эпохи Возрождения. Это время отмечено примерами поразительного синтеза научных и прикладных задач в тесной связи с искусством. Особенно яркое выражение данный синтез нашел в творчестве и достижениях Леонардо да Винчи — художника, мыслителя и инженера.

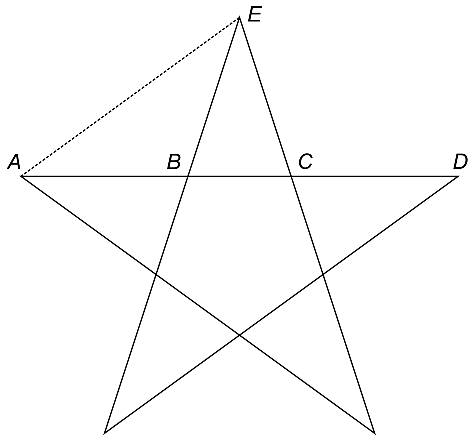
В этот период отмечался небывалый взлет идей в области науки и архитектуры, астрономии и философии, живописи и музыки. Например, известному французскому философу, физику и математику того времени Марену Мерсенну (1588–1648) принадлежит идея математизации музыки на основе порядка, пропорциональности и гармонических связей. Он успешно осуществил ее, разработав 12-звуковую равномерную темперацию, теорию о консонансе и диссонансе, а также о музыкальных ладах. Современниками Мерсенна были великий Галилео Галилей, с которым он состоял в переписке; Иоганн Кеплер (1571–1630), немецкий математик, астроном и философ; а также не менее известные Христиан Гюйгенс, Блез Паскаль, Эванджелиста Торричелли и Пьер Ферма. Иоганну Кеплеру принадлежат известные слова «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень». Он первым обратил внимание на важное значение золотой пропорции в ботанике, наблюдая за ростом растений и их строением.

Золотое сечение и золотая пропорция

Итак, золотое сечение повсеместно проявляется вокруг и внутри человека, не спрашивая на то его позволения и невзирая на то, осознает его человек или нет. Достаточно лишь внимательно осмотреться, чтобы ощутить проникновенную глубину золотой пропорции — и она явится не только в творениях рук человеческих.

Как бы то ни было, но знаменитая золотая пропорция стоит того, чтобы уделить ей больше внимания.

Итак, рассмотрим пропорцию [34] на примере одной из священных для пифагорейцев геометрических фигур — звездчатого пятиугольника.



Золотое сечение в звездчатом пятиугольнике

Легко убедиться в удивительном «постоянстве отношений» отрезков, из которых состоит эта привычная глазу фигура:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{EC}.$$

Геометрия звездчатого пятиугольника (как и пятигранника) оказалась под пристальным вниманием математиков не случайно. Именно в таких фигурах золотая пропорция присутствует буквально на каждом шагу, что обусловлено симметрией данных фигур. В рассматриваемом звездчатом пятиугольнике приведенное равенство может быть продолжено для других его частей. А числовое значение самого отношения может быть получено следующим образом. Для начала обозначим величины отрезков: $AD = a$, $AC = b$, $CD = a - b$. Тогда пропорция примет вид: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, отсюда получаем $a^2 - ab - b^2 = 0$.

Если обе части уравнения разделить на b^2, получается выражение:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Далее вводится обозначение $\frac{a}{b} = \Phi$, и перед нами — самое простое приведенное квадратное уравнение относительно Ф:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения находятся по стандартным формулам для определения корней приведенного квадратного уравнения. Они имеют следующий вид:

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ и } \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку пропорция — величина положительная, нас интересует одно значение $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Кстати, величину золотой пропорции можно вычислить еще проще, без решения квадратного уравнения. Достаточно помнить, что по определению золотого сечения точка, которая делит отрезок в золотой пропорции, — это среднее арифметическое значение двух чисел: $\sqrt{5}$ и 1. Таким образом,

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$$

При этом заметим, что обратное этому число будет представлять собой число

$$\varphi = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618...$$

Заметим, что оба эти числа по-своему «золотые». Причем, подчеркивая причастность данных чисел к гармонии, число Ф иногда называют *мажорным числом* золотой пропорции, а число $\varphi = \frac{1}{\Phi}$, соответственно, минорным. Заметим, что оба

числа — Ф = 1,618034 и $\varphi = \frac{1}{\Phi}$ = 1,618034... — иррациональные. Кроме того, значения этих взаимообратных чисел отличаются между собой ровно на единицу! И это, кстати, единственное число, которое на 1 отличается от обратного к нему числа. Но данная особенность вытекает из самого уравнения:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Действительно, достаточно переписать уравнение в виде:

$$\Phi^2 - \Phi = 1.$$

затем разделить полученное равенство на величину Ф — и можно убедиться в том, что числа отличаются друг от друга ровно на единицу:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

Мало того, исходное квадратное уравнение относительно Ф можно представить и в таком виде:

$$\Phi^2 = 1 + \Phi,$$

откуда:

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi}.$$

Далее, если в правой части последнего равенства Ф заменить выражением $\sqrt{1+\Phi}$, получим:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}.$$

Аналогичным образом такую замену можно проводить до бесконечности. В результате получается «бесконечно» красивая формула:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}.$$

Выражение числа золотой пропорции через единицу исследовал американский ученый Натан Альтшиллер-Курт из Оклахомского университета. В 1917 году в своей статье он высказал мысль о том, что если фи получается как производное число от единицы (от начала натурального ряда чисел и начала любого счисления), то это свидетельствует о предельной простоте и фундаментальности данного числа. И это, между прочим, далеко не единственное выражение числа фи через единицу. Можно получить подобную формулу для числа Ф, если в правой части равенства $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$ вместо буквы Ф постоянно подставлять $1+\frac{1}{\Phi}$:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Тоже красиво! И слегка напоминает матрешку.

А теперь обратим внимание на удивительную инвариантность числа фи:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618..., \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618...,$$

$$\Phi^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = 2{,}618...$$

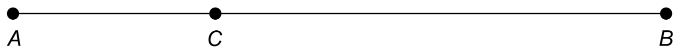
$$\Phi(\Phi-1) = 1, \quad \Phi - 1/\Phi = 1, \quad 1/\Phi^2 + 1/\Phi = 1.$$

Первые три равенства впечатляют своей очевидной иррациональностью. Но это и не удивительно! Золотая пропорция отражает иррациональность, присущую пропорциям самой природы. Именно поэтому в 1957 году американский ученый Джордж Бергман построил систему счисления, в основание которой положил золотую пропорцию — иррациональное число фи. Например, любое натуральное число в этой системе можно представить в виде суммы степеней числа фи:

$$\begin{aligned} &1 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} \\ &2 = \Phi + \Phi^{-2} \\ &3 = \Phi^{2} + \Phi^{-2} \\ &4 = \Phi^{2} + \Phi^{0} + \Phi^{-2} \\ &5 = \Phi^{3} + \Phi^{-1} + \Phi^{-4} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Заметим, что сам Джордж Бергман, не найдя применения своему математическому нововведению, посчитал его бесполезным. А позже оказалось, что система счисления с основанием фи может быть применима, например, для повышения помехоустойчивости вычислительной техники [41].

Подчеркнем, что в геометрической интерпретации золотая пропорция чаще называется золотым сечением и представляет собой деление отрезка «в крайнем и среднем отношении» (слова, приписываемые Пифагору). То есть, как мы уже упоминали, это деление отрезка на две неравные части таким образом, чтобы меньшая его часть так относилась к большей части, как большая часть относится ко всему отрезку. Например, на приведенном ниже рисунке точка C делит отрезок AB именно в таком отношении, то есть: $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC}$.



Деление отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение)

Далее, если отношение $\frac{AB}{CB}$ обозначить через x и учесть, что $AB = AC + CB$, получаем такое выражение:

$$x=\frac{AB}{CB}=\frac{AC+CB}{CB}=1+\frac{AC}{CB}=1+\frac{1}{x}.$$

Отсюда следует, что x является решением уравнения, которое ранее было нам известно как уравнение золотой пропорции:

$$x^2 = x + 1.$$

Положительное решение данного уравнения и есть численное значение отношения $\frac{AB}{CB}$, которое равно числу

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618\ldots.$$

Поэтому деление отрезка в крайнем и среднем отношении получило название «золотое сечение».

В «Началах» Евклида содержится следующий способ геометрического построения золотого сечения с использованием циркуля и линейки. Построим прямоугольный треугольник ABC со сторонами $AB = 1$ и $AC = \frac{1}{2}$. Тогда в соответствии с теоремой Пифагора гипотенуза $CB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Проведя дугу $\overset{\frown}{AD}$ окружности с центром в точке C радиуса CA до пересечения с гипотенузой CB в точке D, мы получим отрезок:

$$BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\Phi}\ .$$

Теперь проведем дугу DE радиуса BD с центром в точке B до ее пересечения с катетом AB в точке E. Тогда

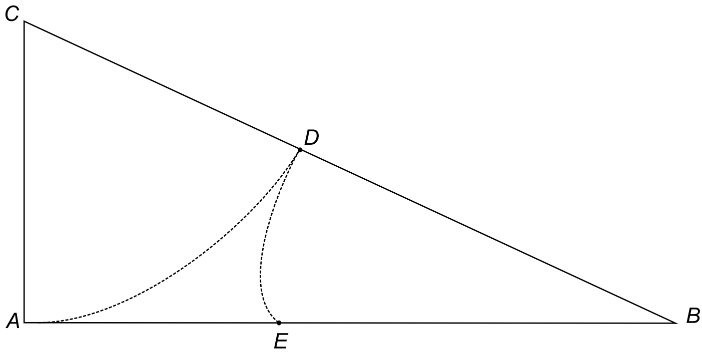
$$\frac{AB}{EB} = \frac{1}{1/\Phi} = \Phi,$$

$$\frac{EB}{AE} = \frac{1/\Phi}{1 - 1/\Phi} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi.$$

Здесь использовалось уже известное нам равенство

$$\Phi \cdot (\Phi - 1) = 1\ .$$

Таким образом, отрезок AB разделен точкой E на золотое сечение, поскольку $\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \Phi$.

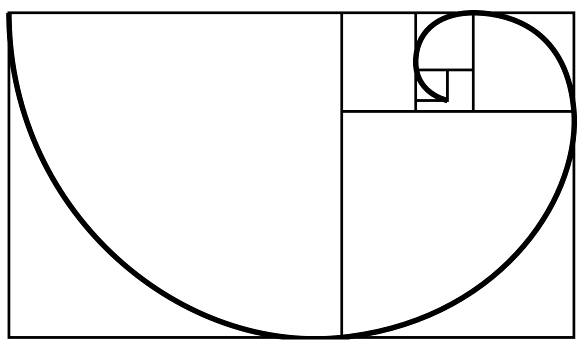


Геометрическое построение золотого сечения

Заметим, что известный с древних времен прямоугольный треугольник с отношением катетов 1:2 привел к открытию теоремы квадратов (как Евклид называл теорему Пифагора), определению золотой пропорции и, наконец, к открытию несоизмеримых отрезков. Эти достижения пифагорейцев Евклид назвал великими открытиями в математике.

Золотые объекты геометрии

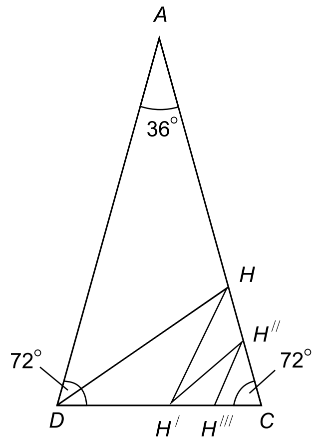
Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называют золотым прямоугольником. Эта фигура обладает множеством интересных свойств. Если, например, от золотого прямоугольника отрезать квадрат, получится снова золотой прямоугольник. Если этот процесс продолжить, мы придем к так называемым вращающимся квадратам, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов. Если соединить их противоположные вершины плавной кривой, то получится кривая, называемая золотой спиралью.



Золотой прямоугольник и золотая спираль

Эту кривую можно заметить в природе. Например, раковина улитки закручена по золотой спирали.

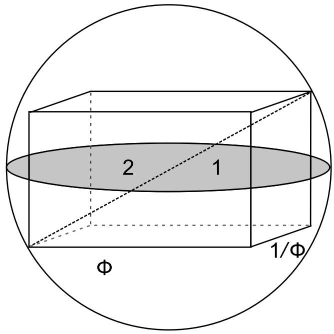
Разумеется, существует и золотой треугольник. Это равнобедренный треугольник, у которого отношение боковой стороны к основанию образует золотое сечение. Каждый золотой треугольник имеет острый угол $\angle A = 36°$ при вершине и два острых угла $\angle D = \angle C = 72°$ при основании.



Золотой треугольник

Исследуя золотой треугольник, пифагорейцы были восхищены, когда обнаружили, что биссектриса DH делит сторону AC в точке H золотым сечением. При этом возникает новый золотой $\triangle DHC$. Если теперь провести биссектрису угла H и продолжить этот процесс до бесконечности, то мы получим бесконечную последовательность золотых треугольников. Как и в случае с золотым прямоугольником, бесконечное возникновение одной и той же геометрической фигуры (золотого треугольника) после проведения очередной биссектрисы вызывает чувство удивительной гармонии.

Существует и так называемый золотой кубоид — прямоугольный параллелепипед с ребрами Φ, $\varphi = \dfrac{1}{\Phi}$ и 1 соответственно. Площадь его полной поверхности будет равна 4Φ, а диагональ — 2. Отсюда следует, что описанная вокруг золотого кубоида сфера будет иметь радиус 1 и площадь поверхности 4π. Тогда отношение площадей поверхности сферы и золотого кубоида будет равно $\frac{\pi}{\Phi}$, то есть в данном случае числа пи и фи оказались связанными между собой.



Золотой кубоид

Родственные связи чисел пи, фи и *е*

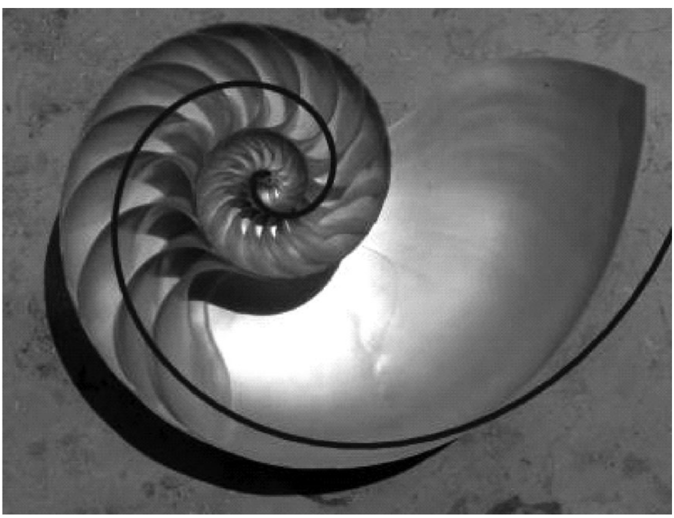
Математики с давних времен пытались установить связь между числами пи и фи. Но формулы, в которых бы это отражалось, появлялись нечасто, что легко объяснить разными свойствами данных иррациональных чисел. Как мы убедились, иррациональное число Ф относится к классу алгебраических чисел (является корнем многочлена с рациональными коэффициентами $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$), а иррациональное число пи относится уже к трансцендентным числам (и не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами). Долгое время это и являлось главным препятствием в поисках. Но был, например, найден треугольник, углы которого равны 90°, 54° и 36°. Отношение большего катета к гипотенузе в этом прямоугольном треугольнике равно половине золотой пропорции $\frac{\Phi}{2}$. Отсюда:

$$\Phi = 2 \cdot \cos 36^\circ = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{5}.$$

Это и есть одна из первых формул, связывающих константы фи и пи, которая говорит о фундаментальном родстве золотой пропорции с числом пи. В частности, любой угол, кратный этому, будет связывать числа пи и фи через различные тригонометрические функции.

Заметим, что о связи чисел пи и фи было известно еще в Древнем Египте. Об этом свидетельствуют даже великие пирамиды! Интересно, что у пирамиды Хеопса отношение высоты пирамиды h к ее основанию l составило: $\frac{2h}{l} \approx \Phi$ и $\frac{2l}{h} \approx \pi$, причем с достаточно высокой точностью.

А связь трех фундаментальных констант пи, фи и e отражает, например, формула золотой спирали. Разумеется, названием она обязана золотому числу фи: $f(x) = \sqrt{\Phi} \cdot e^{x \cdot \frac{2 \cdot \ln \sqrt{\Phi}}{\pi}}$. Зримым воплощением этого математического «золота» является раковина моллюска наутилуса.



Золотая спираль раковины моллюска наутилуса

Особенно интересна связь этих трех констант в формуле, которую получил выдающийся индийский математик Сринивас Рамануджан:

$$e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\Phi\sqrt{5}}-\Phi\right)=\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\ldots}}}}.$$

Формула поражает своей гармоничностью. Впрочем, математиков уже давно не удивляет, что иррациональные фундаментальные константы часто объединены формулой, отражающей их неожиданную зависимость друг от друга. Приведем пример таких выражений:

$$\pi^e = e^\pi;$$

$$\pi \cdot e^2 = e^\pi;$$

$$\frac{\pi^2+e^2}{\pi^3-e^3}=\frac{\pi}{2};$$

$$\sqrt{\sqrt{\pi^\pi}+\sqrt{e^e}}=\pi.$$

Подобные формулы позволяют упрощать математические преобразования. Но большинство из них ждет исследователя, который смог бы найти процессы или явления природы, которые они отражают.

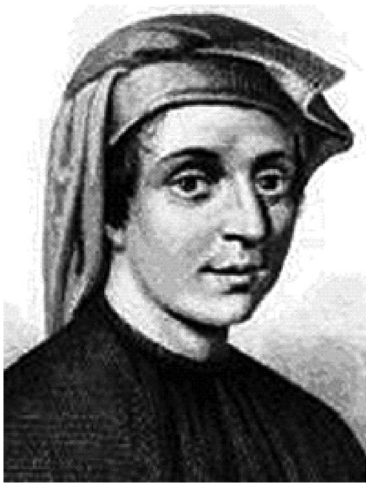
Заметим, что математикам нередко приходят в голову парадоксальные идеи. Вроде той, в которой Джордж Бергман выразил натуральные числа через иррациональное число фи. Тогда логично будет сделать то же самое через фундаментальную константу пи. И математики это сделали! Правда, по-математически лукаво. Итак, натуральные числа от 1 до 20 в «экзотическом» виде:

$$
\begin{array}{ll}
1=\left[\sqrt{\pi}\right] & 11=\left[\left(\pi^{2}\right)+\sqrt{\pi}\right] \\
2=\left[\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\right] & 12=[\pi\cdot\pi]+[\pi] \\
3=[\pi] & 13=[\pi\cdot\pi+\pi] \\
4=\left[\pi+\sqrt{\pi}\right] & 14=\left[[\pi]\cdot\left(\pi+\sqrt{\pi}\right)\right] \\
5=\left[\pi\sqrt{\pi}\right] & 15=[\pi]\cdot\left[\pi\sqrt{\pi}\right] \\
6=[\pi+\pi] & 16=\left[[\pi]\cdot\pi\sqrt{\pi}\right] \\
7=\left[\pi^{\sqrt{\pi}}\right] & 17=\left[\pi\cdot\pi\cdot\sqrt{\pi}\right] \\
8=\left[\pi\cdot\pi-\sqrt{\pi}\right] & 18=[\pi\cdot\pi]+[\pi\cdot\pi] \\
9=[\pi\cdot\pi] & 19=\left[\pi\left(\pi+\pi\right)\right] \\
10=[\pi\cdot\pi]+\left[\sqrt{\pi}\right] & 20=\left[\pi\sqrt{\pi}\right]\cdot\left[\pi+\sqrt{\pi}\right]
\end{array}
$$

А лукавство в том, что функция антье, которая здесь используется, в результате начисто убирает иррациональность. Поясним, что функция антье $[a]$ определяет ближайшее целое число к данному a, но расположенное на числовой оси слева от него, например: $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$. Разумеется, существует бесконечное множество подобных способов представления целого числа через пи. Но по математическим канонам интерес представляют прежде всего такие выражения, в которых применяется наименьшее количество повторений пи и математических операций. Поэтому приведенные способы восхищают и завораживают своей сдержанной затейливостью. Кстати, взяты они из работ Мартина Гарднера [23] — преданного любителя математики и ее известного популяризатора.

Числа Фибоначчи

Числами Фибоначчи называются элементы числовой последовательности, в которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. А ряд чисел, который получается в результате этой математической процедуры, и есть известная с глубокой древности числовая последовательность Фибоначчи, которая тесно связана с числами фи и пи. Любопытно, что количество ступенек в мексиканских пирамидах распределено по ярусам именно в соответствии с этой последовательностью.



Леонардо Пизанский (Фибоначчи)

Но сначала обратим внимание на одно любопытное совпадение. Дело в том, что буква Ф для обозначения золотой пропорции была узаконена лишь в XX веке по предложению Марка Барра. Нельзя не отметить: выбор оказался удачным! На равных с Фидием оказался увековечен и Фибоначчи, последовательность которого самым тесным образом связана с золотой пропорцией, то есть с числом фи. А что касается термина «золотая пропорция», то его использовали и ранее, но официально он был введен в 1835 году в публикациях немецкого математика Мартина Ома (младшего брата физика Георга Ома).

В начале XIII века итальянский купец, путешественник и выдающийся математик из Пизы Леонардо Фибоначчи (1170–1250) в своей «Книге абака» впервые описал для европейцев арабские цифры, включая ноль. Помимо этого, в ней содержалась вся совокупность знаний того времени по арифметике и алгебре. Данный труд долгое время являлся единственной книгой в Европе, где объяснялось использование десятеричной системы счисления. В «Книге абака» Фибоначчи привел пример построения числовой последовательности, известной теперь как задача о размножении кроликов, а последовательность эта известна как числовой ряд (последовательность) Фибоначчи: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89...

Обозначим его в общем виде: $F = F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...$.

В этом ряду каждое последующее число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Последовательности, в которых каждый член является функцией предыдущих (и/или последующих), называют рекуррентными (возвратными) последовательностями. Задача о размножении кроликов считается первым вкладом Фибоначчи в развитие комбинаторики. Эта задача предвосхитила собой метод рекуррентных соотношений, который считается одним из мощных методов решения комбинаторных задач. Рекуррентная формула, полученная Фибоначчи при решении этой задачи, считается первой в истории математики рекуррентной формулой.

Отметим, что отношение двух смежных чисел ряда Фибоначчи всегда стремится к золотой пропорции — к числу фи, и тем точнее, чем больше порядковый номер у членов ряда Фибоначчи. Первым это в XVII веке обнаружил Иоганн Кеплер, а через сто лет математически строго доказал английский ученый Роберт Симпсон. Затем астроном Джованни Доменико Кассини нашел формулу, которая связывает три соседних числа ряда Фибоначчи:

$$F_n^{\,2} - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = \left(-1\right)^{n+1}.$$

В 1728 году Даниил Бернулли, служивший в то время в Петербургской академии наук, вывел формулу, по которой определялся произвольный *n*-член ряда Фибоначчи. Но тогда на нее почти не обратили внимания. Прошло еще более ста лет, и в 1843 году такая же формула была получена французским математиком Жаком Бине, и теперь она носит его имя:

$$F_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Участие констант пи, фи и *е* в законах мирообразования

Числа Фибоначчи отражают целочисленность в организации природы — рождение предметности. А золотая пропорция, как уже было отмечено, показывает иррациональность в пропорциях природы, или отношения предметностей. Совокупность обеих закономерностей (золотой пропорции и чисел Фибоначчи) отражает диалектическое единство двух начал — двух противоположностей: непрерывного и дискретного, статичного и динамичного, активного и инертного и т. д. Продолжая изучение математических феноменов, связанных с числом фи, ученые активно исследуют механизм работы принципа золотой пропорции в природе и развивают теорию чисел Фибоначчи.

Так, в 1970 году с использованием этих чисел Юрий Владимирович Матиясевич — советский и российский ученый, доктор физико-математических наук, академик РАН — решил 10-ю проблему Гильберта, одну из 23 знаменитых математических проблем, поставленных великим немецким математиком Давидом Гильбертом на рубеже веков, в 1900 году.

С использованием чисел Фибоначчи и применением золотой пропорции возникли и совершенствуются новые методы из области теории поиска, теории игр и решения ряда задач в теории программирования. В США создана Математическая ассоциация Фибоначчи, которая с 1963 года выпускает свой журнал. Одним из современных достижений в области математики является открытие обобщенных чисел Фибоначчи и обобщенных золотых пропорций.

Юрий Владимирович Матиясевич

Числа Фибоначчи, как и принцип золотого сечения, пронизывают живую и неживую природу, культуру и искусство, микро- и макромир. Таким образом, константы фи, пи и *e* участвуют в законах мирообразования. Тому есть весомые научные подтверждения.

Для примера заглянем в сложные молекулярно-генетические глубины! Но сначала вспомним, что фундаментальную основу биологической жизни составляет ДНК — дезоксирибонуклеиновая кислота. Это органическая молекула, находящаяся в ядре любых клеток и являющаяся носителем генетического кода, который определяет все характеристики и функции организма. Сделанное в начале 60-х годов XX века сообщение о том, что в расшифрованном ДНК человека число пи отвечает за структуру самой ДНК, произвело настоящую сенсацию. Этот результат был получен во время работы по программе «Геном человека». Примечательны слова, которые сказал тогда один из руководителей этой программы доктор Чарльз Кантор: «Такое впечатление, что мы подошли к разгадке некой фундаментальной задачки, которую нам подкинуло мироздание. Число пи — повсюду, оно контролирует все известные нам процессы, оставаясь при этом неизменным! Кто же контролирует само число пи?» [24]. Затем, в 1990 году Жан-Клод Перес, научный сотрудник фирмы IBM, изучая природный механизм генетического кодирования, сделал неожиданное открытие. Перес искал математический закон, управляющий самоорганизацией азотистых оснований внутри ДНК. Оказалось, что в ДНК последовательные множества нуклеотидов самоорганизуются в группы (или резонансы), которые разбивают ДНК на участки в соответствии с последовательностью Фибоначчи. Эти выводы используются в работе над созданием биокомпьютера, основанного на молекулах ДНК, а способ кодирования генетической информации лег в основу кодировки информации в биокомпьютере и был назван кодом Фибоначчи.

А теперь приведем пример из глубин квантовой физики. В 2007 году российские ученые Лев Борисович Хорошавин и Виктор Борисович Щербатский опубликовали научную статью «Гармоничные кварки в электронах и протонах» [22]. В ней дано описание кварков, свойства которых были получены в результате расчетов на основании золотой пропорции $\Phi \approx 1{,}618 = 0{,}618 : 0{,}382$. Кроме того, для новых кварков, входящих в состав электрона и протона, учеными были рассчитаны заряды и спин. Новые частицы получили название «гармоничные кварки». В своих исследованиях ученые исходили из того, что основные атомарные физические константы кратны золотой пропорции: масса протона, удельный заряд электрона, ядерный магнетон, атомная единица массы и другие. Кроме того, данные, полученные учеными, объясняют образование мультиэлектронов в теории сверхпроводимости.

После примеров из глубин микромира переместимся на высоты макромира! В 1977 году российский ученый, астроном и математик Кирилл Павлович Бутусов обнаружил явление резонанса так называемых волн биений [20], что позволило ему скорректировать существовавшие расчеты периодов обращений планет (а в вычислениях параметров небесных сфер без числа пи не обойтись!). Измененный закон планетных периодов дал возможность увидеть, что периоды и частоты обращения планет образуют геометрическую прогрессию со знаменателем Φ^2 (квадрат числа золотой пропорции). Оказалось, что значениям периодов и частот в афелиях орбит соответствуют числа ряда Фибоначчи, а значениям периодов и частот в перигелиях орбит — числа ряда Люка. Заметим, что этот ряд представляет собой последовательность чисел 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; 47..., которая задается с помощью рекуррентной формулы $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ — такой же, как и для ряда Фибоначчи, но при начальных условиях $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$. Кроме того, получив новые орбиты планет и их спутников, К. П. Бутусов сообщил о возможном существовании неоткрытых спутников Урана (1985), что вскоре и было подтверждено. Но это еще не все! Оказалось, что найденные Бутусовым частоты обращения периодов планет имеют спектр гравитационных и акустических возмущений, интервалы которого представляют собой структурно организованный консонансный аккорд (в противоположность диссонансным многозвучиям). Любопытно, что без константы *e* тоже не обошлось: расположения перигелиев и афелиев планет отчетливо распределились по логарифмической спирали [21]. А теперь вспомним пифагорейцев, которые представляли Вселенную как множество вращающихся небесных сфер, вложенных одна в другую и своим вращением порождающих музыку сфер. Так, спустя более двух с половиной тысяч лет математик и астроном К. П. Бутусов в тиши современной Пулковской обсерватории нашел подтверждение идеям Пифагора.

Итак, процессы, свойственные всем системам, в том числе и в живой природе, протекают в зависимостях, которые определяются мировыми константами. И главные среди них — иррациональные числа пи, фи и *e*.

Еще Галилео Галилей говорил, что «книга природы написана на языке математики». Да, но она не формулирует математические зависимости в готовом виде! Их обнаруживают люди. А вдохновляет на это в том числе универсальность фундаментальных констант пи, фи, *e и связь их друг с другом.* Первым достижением в этом направлении, как уже упоминалось, была формула Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1,$$

которая наглядно связала числа пи и *e*.

Связь чисел пи и *e* наблюдается и в формуле нормального распределения случайных величин, известной как формула Гаусса:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

И наконец, еще одна формула, связывающая все три иррациональные константы пи, фи и *e*:

$$\pi = e \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{\Phi \cdot \sqrt{3}}}.$$

Что могут отражать такие тройные зависимости? В самом общем случае — то, что каждая система (процесс) есть результат взаимодействия двух других систем (процессов). В частности, всем природным системам, в том числе биологическим, свойственны процессы саморазвития и самоорганизации. Иметь к ним отношение может, например, третий процесс — процесс оптимизации как одного, так и другого. Достаточно вспомнить, что в математике существует дисциплина, которая так и называется — методы оптимизации. Можно не сомневаться, что в математической теории методов оптимизации недостатка в этих константах не будет!

Однако появляются и новые формулы взаимосвязи математических констант.

Например, киевским ученым Николаем Васильевичем Косиновым обнаружена неожиданная связь чисел пи и фи с числом альфа (α) или постоянной тонкой структурой:

$$\alpha^{20} = \sqrt[13]{\pi\Phi^{14}} \cdot 10^{-43}.$$

Данная формула позволила уточнить значение постоянной тонкой структуры α. Кроме того, автор утверждает, что полученные им результаты подтверждают геометрический статус α, а связь чисел пи и альфа с числом фи подтверждает их причастность к закону гармонии в природе. Впервые альфа была введена немецким физиком-теоретиком Арнольдом Зоммерфельдом в 1916 году, еще до создания квантовой механики. Постоянная тонкой структуры альфа — это безразмерная величина, равная примерно $\frac{1}{137}$ и характеризующая силу электромагнитного взаимодействия (постоянная Зоммерфельда). Отметим, что уточнение Н. В. Косиновым значения величины альфа, полученное теоретическим путем, способно расширить границы квантовой электродинамики, что может привести к корректировке некоторых фундаментальных моделей этой науки. Однако не стоит забывать, что пока в опытах напрямую измеряется лишь магнитный момент электрона, а затем альфа вычисляется на основании формул квантовой электродинамики. Таким образом, в настоящее время ученые-физики заняты поисками экспериментальных методов более точного измерения этой постоянной.

Как бы то ни было, а взаимосвязи фундаментальных констант с числом фи порождают в ученой среде множество вопросов, теорий и предположений, и все меньше остается сомнений в том, что мир стремится к гармонии. Важно, чтобы человечество не стало ему в этом препятствием. Впрочем, Готфрид Лейбниц еще в 1695 году страстно провозглашал: «Миром правит Предустановленная гармония!» А может, предупреждал?.. В любом случае стоит задуматься.

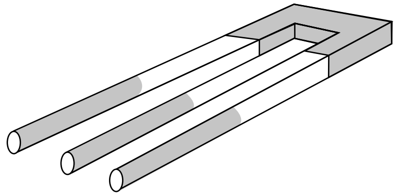
Роль фундаментальных констант в развитии науки и принцип триединства

Сегодня к размышлению нас приглашают идеи синергетики (нелинейная динамика на принципах самоорганизации систем) и выводы математической теории гармонии. В настоящее время эти научные направления весьма интенсивно развиваются. Их представителями в научном мире являются российский математик Рэм Георгиевич Баранцев, физик-теоретик Анатолий Сергеевич Харитонов и многие другие их единомышленники. Ученые обратили внимание на то, что в целом структурная взаимосвязь членов ряда Фибоначчи отражает процесс системообразования в природе. В частности, каждая природная система возникает с учетом существования двух предшествующих ей систем. И согласно тому, как отношения членов последовательности Фибоначчи стремятся к фундаментальному числу фи, процесс системообразования в природе эволюционирует к гармонии. Таким образом, во главу угла ставятся вопросы о методах соблюдения этого закона человечеством и о последствиях его нарушения. Иными словами, фундаментальность числа фи указывает на фундаментальность гармонии. Еще великий Иоганн Гете говорил о том, что между двумя противоположными мнениями находится не истина, а проблема. Истина же — то третье, что над ними, но не против них. Многие представители современной науки обращают внимание на необходимость развития и внедрения принципа триединства. Учитывая это обстоятельство, уделим принципу триединства немного внимания.

Начнем с того, что в основе научного описания любого процесса (системы, явления) лежит его модель равновесия в природе, на которой всесторонне изучаются отклонения в равновесии процесса. Разумеется, построение модели равновесия зависит от научного подхода исследователя. Существует два основных принципа научного подхода: принцип дихотомии и принцип триединства. Оба принципа обладают определенными достоинствами, и каждый из них на данный момент по-своему недостаточен. По сути, речь идет о давно назревшем синтезе их достоинств.

Если в двух словах, то дихотомия — это раздвоенность. Разделение дуальности. Иначе — разведение противоположностей «по разным углам», например для удобства их анализа: электрон — позитрон, статика — динамика, гармония — хаос и т. д. Дихотомическая модель равновесия: сила действия равна силе противодействия, а суммарная действующая сила равна нулю. Это модель. А в реальности вряд ли здесь «полный ноль», как, впрочем, и полное равновесие. Например, в физике элементарных частиц известно уникальное явление, когда две симметрично противоположные частицы — электрон и позитрон вопреки ожидаемой аннигиляции образуют новую частицу — позитроний.

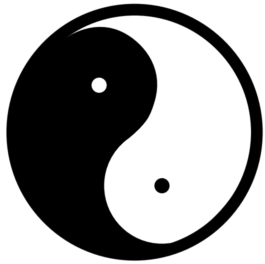
Далее о триединстве. Разумеется, «в двух словах» не получится. Попробуем в трех: триединство — это бытие дуальности. Иначе — смысл взаимодействия противоположностей. Модель равновесия триединства: синтез противоположностей в устойчивую (непротиворечивую) систему. Другими словами, новая система вступает во взаимодействие с противоположной ей системой, и синтезируется последующая система с новыми качествами. Таким образом, синтез сопрягает противоположные части между собой, не вступая в конфликт ни с ними, ни с целым. Об этом же говорится в архаическом манускрипте «Книги Дзиан», упомянутом в книге Елены Петровны Блаватской «Тайная доктрина»: «Когда Единый становится Двумя, Троичный проявляется и Трое Едины» [9]. В итоге дуальность и триединство неотделимы. А для наглядности предлагаем образный вариант синтеза дуальности в триединство. Улыбнулись?



Оптическая иллюзия «Синтез дуальности в триединство»

Итак, логика троичности — это уже дополнение логики дуальности и ее развитие. Но в логике важно не столько избавление от противоречия, сколько отсутствие противоречия принципам гармонии мира. Кстати, его величество случай, как нарушение линейной логики, в природе тоже присутствует! Внутри природы нет полного и окончательного детерминизма (линейно-логической обусловленности). Случай — это *свобода воли* самой природы и, в конце концов, инструмент ее собственного развития. Поэтому ученые говорят, что есть смысл не гоняться за формулировками ответов на законы природы, а уточнять постановку вопросов к ним.

Но, как бы то, ни было, а применение принципа триединства противоречит принципам гармонии гораздо реже, чем принцип дихотомии («гармония есть согласие противоположностей», как утверждал Пифагор). К тому же в природе триединство встречается на каждом шагу. Например: внутриатомная триада «электрон — позитрон → позитроний», физическая триада «электричество — магнетизм → поле» (электромагнитное поле было открыто Джеймсом Максвеллом в 1864 году) или древневосточная триада взаимодействия крайних противоположностей «инь — ян → монада». Древневосточная триада символизирует синтез двух единых и неделимых первоначал инь и ян, структурирующих мир из Хаоса. Их взаимодействие в единстве и борьбе порождает совершенную монаду материи (тайцзи) — первооснову, метафизическую сущность смысла и потенциала проявления порядка из Хаоса.



Тайцзи

Особо отметим триаду «тезис — антитезис → синтез», или гегелевский принцип в философии, являющийся наиболее выразительным воплощением триединства. В основу биологической жизни тоже заложена триада «гамета (+) — гамета (–) → зигота». Важно, и подчеркнем это особо, что для триад правила счета не срабатывают. Говорить о сумме двух слагаемых здесь бессмысленно! Когда есть гаметы, то еще нет зиготы, когда есть зигота, то уже нет гамет (свойство неслиянности триады). Триада — это не конструкция из двух частей, а динамический принцип бытия противоположностей (свойство неразделенности триады). Целое — это не третье, а система, не зависящая от породивших ее противоположностей, вобравшая в себя их взаимодействие (свойство единосущности целого с противоположностями). Заметим, что именно такими свойствами наделена в христианской традиции Святая Троица: неслиянность, нераздельность и единосущность Бога Отца, Бога Сына, Бога Духа Святого.

Итак, принцип триединства, основанный на логике троичности, охватывает уровни организации материи и является основным принципом устройства природы [13]. А теперь сравним принцип триединства (в общем виде: тезис — антитезис → синтез) с принципом образования последовательности Фибоначчи. Напоминаем: каждый последующий член данного ряда образуется из двух предыдущих, причем с увеличением порядкового номера отношение двух смежных членов этого ряда стремится к золотой пропорции, то есть к числу Ф = 1,6180033..., с которым связана любая теория гармонии. Таким образом, как и провозгласил Лейбниц, «миром правит Предустановленная гармония».

Число фи, так же как и число пи, вычислено уже с точностью до 5 триллионов знаков после запятой. И все же это еще не конец. А может быть, только начало? И не просто начало новых научных направлений, но, может быть, новой научной парадигмы вообще? Такое в истории математики уже бывало! Образно говоря, до XVI века числа пи и фи в математическом моделировании использовались на равных. С появлением тех возможностей, которые давала открытая в это время константа *e*, число фи скромно «потеснилось». Центр его влияния переместился в различные виды искусства и в область натурализма. А математический мир в это время вдохновенно строил и перестраивал модели природных процессов на основе новых инструментов: дифференциального и интегрального исчисления и ньютоновской теории гравитации.

Пожалуй, можно уверенно утверждать, что со второй половины XX века положение начало меняться. Современное представление об эволюции мироздания все больше придает определяющее и целеполагающее значение гармонии. Однако приходится признавать, что угроза существованию человечества в составе гармоничного мироздания остается. И таится она в том, что человечеству недостает сознательности следовать законам мировой гармонии. Достанет ли времени?..

А мир прекраснее, чем человек к нему относится!

Всемирная гармония, золотая пропорция и ее производные проявляются в мире каждое мгновение времени и повсюду, празднуя жизнь, воспевая природу и красоту ее проявлений. Она светится в чертах лица матери, склонившейся над ребенком, шелестит совершенными по форме листьями на деревьях, удивляет затейливым узором чешуек на шишке или расположением лепестков на цветке. Ее можно разглядеть в пропорциях зданий и в размерах школьной тетрадки, на живописных полотнах мастеров и в строении тельца юркой ящерки, в бабушкином вязании или в сплетениях паутины. Она есть в отпечатках собственного пальца и в божьей коровке, присевшей на этот палец, в бесконечных кругах, побежавших от брошенного в воду камешка, или в спиральных завихрениях дальней галактики, мелькнувшей на экране телевизора. Она завораживает в формах арфы и саксофона, фортепьяно и скрипки, утешает и радует звуками музыки. И, в конце концов, вдохновляет изучать эту гармонию, творить по ее законам и создавать новые инструменты, отражающие ее проявление.

Числа пи, фи, интеграл Френеля и скрипичные тайны

На помощь творцам здесь приходят законы природы и математики. Без вездесущих констант здесь, разумеется, тоже не обходится!

Как известно, великие мастера струнно-смычковых инструментов, такие как Амати, Гварнери, Страдивари, а также их многочисленные ученики достигли непревзойденного совершенства в синтезе эстетики своих изделий и их звучания [36]. Парадокс заключается в том, что следующие за ними мастера, модернизируя старые скрипки и создавая новые, долгое время почти не обращали внимания на внутреннюю логику прежнего способа построения инструмента. Дело, как правило, ограничивалось скрупулезным поверхностным копированием и слепым повторением сохранившихся авторских обмеров. А тайны итальянских скрипок не открывались!

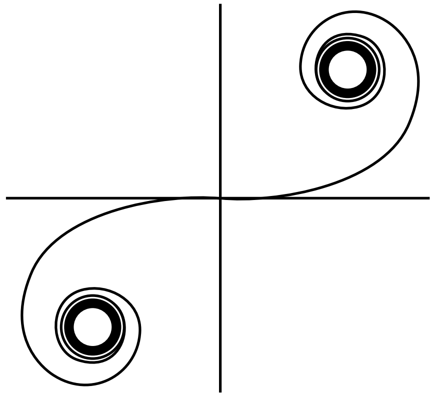
Такое положение вещей рано или поздно должно было измениться. И вот, наконец, современные исследования феномена старинных инструментов позволяют говорить о том, что мастера итальянского Возрождения в тонкостях внутренней логики своих конструкций использовали закономерности и принципы, связанные с константами пи и фи! Причем сами числа пи и фи оказались здесь «тайно» связаны с... дюймом.

Начнем с того, что исследователи обратили внимание на «поголовную» странность всех скрипичных мастеров того времени [25]. Несмотря на то что в XVI–XVII веках уже давно и повсеместно применялась десятеричная система счисления, старинные мастера упорно проводили свои расчеты в дюймах. Но в те времена дюйм был величиной, мягко говоря, расплывчатой. А какими могут быть меры «трех ячменных зерен из середины колоска, выложенных в длину» или «длина фаланги большого пальца»?! Причем до «официального» дюйма (1959 год), зафиксированного в сантиметрах, пройдет еще три столетия. Поиски исследователей привели к догадке, что приемлемое приближение для «скрипичного» дюйма следует искать в пропорциональности отрезков. Тем более что на то время золотая пропорция, числа фи и пи уже давно были известны. А то, что частоты музыкального звукоряда, построенные по принципу золотой пропорции, звучат гармоничнее, заметили еще пифагорейцы. Из анализа данных, основанных на подобных сопоставлениях, и была получена величина «скрипичного» дюйма: $\frac{\pi \cdot \Phi}{2} = 2{,}5416$ см. Исследователи были поражены! И даже не тем, что такое тонкое, если не сказать тончайшее, числовое приближение применялось в те времена на практике, а тем, на что открыло им глаза применение этой величины. Как оказалось, размеры скрипки есть не что иное, как геометрическая прогрессия числа пи!

Таким образом, точность дюйма, с которой работали великие мастера, определена — 2,5416 см. Причем она даже оказалась точнее, чем величина 2,54 см, принятая в системе мер! Далее нужно было выбрать математическую кривую, точно соответствующую геометрии скрипичного конструирования. После кропотливых поисков и глубокого анализа была найдена спираль Корню, или клотоида, которая отвечает требованиям построения скрипки [25]. Напомним, что клотоида — кривая, у которой кривизна есть функция длины дуги, которая изменяется линейно. Параметрическое уравнение этой кривой выражается через интегралы Френеля и имеет вид:

$$x = aC(t) = a\int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}\pi s^2\right)ds,$$

$$y = aS(t) = a\int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi s^2\right)ds.$$



Спираль Корню

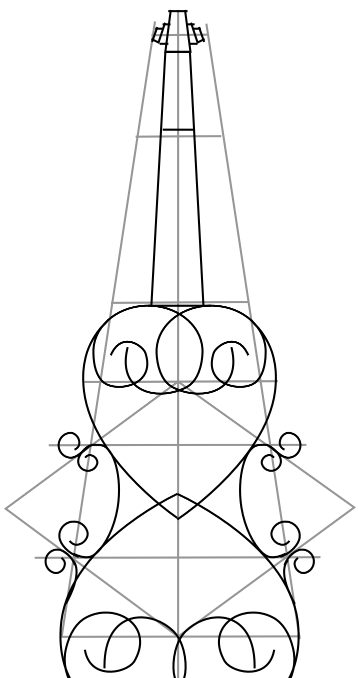


Схема анализа геометрии скрипки

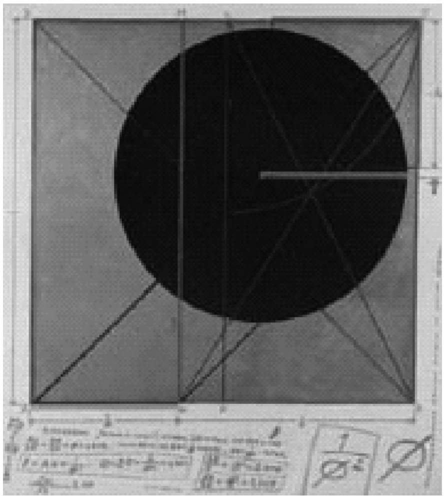
Отметим, что клотоиды давно используются в инженерном конструировании, в частности в таком тонком, как оптика.

И, конечно, с развитием компьютерной техники исследователи сегодня получили небывалые возможности для разработки и анализа различных вариантов создаваемых ими конструкций, в числе которых и музыкальные инструменты.

Числа — вдохновенные музы художников

Загадочность знаменитых констант и связей между ними продолжает пленять умы не только конструкторов и математиков. Числа пи, фи, *е*, например, стали настоящими музами для художника Александра Федоровича Панкина, члена Союза архитекторов России и Международной федерации художников. Кроме того, он получил титул Александр π от итальянского журнала LUXURY MAGAZINE: Style of life. Однажды, присмотревшись к картине Казимира Малевича «Восемь красных прямоугольников», А. Ф. Панкин заметил, что элементы композиции группируются по закону первых чисел ряда Фибоначчи. С этого все и началось. Как признается сам художник, в тот момент он ощутил глубочайший интерес к числам, их свойствам, отношениям и связям [42]. С тех пор А. Ф. Панкин посвятил содержание своего творчества именно этому, причем в его произведениях присутствуют в первую очередь художественные образы... иррациональных, трансцендентных чисел! Но обязательно в их взаимодействии. Творчество А. Ф. Панкина — в буквальном смысле художественный гимн бессмертному принципу Пифагора «Всё есть число»!

Например, на выставке А. Ф. Панкина «Число как искусство» центральное место заняла инсталляция «Геометрия взаимодействия чисел пи и *е*». Интересно, что абстрактная экспозиция была специально задумана к воплощению в городском пространстве под открытым небом. По сути, это произведение художника, как, впрочем, и все его творчество, отражает стремление «проявить» математические объекты в пространстве и в равной мере привнести художественные образы в математику.



Одна из работ А. Ф. Панкина, представленных на выставке «Число как искусство» (см. вклейку)

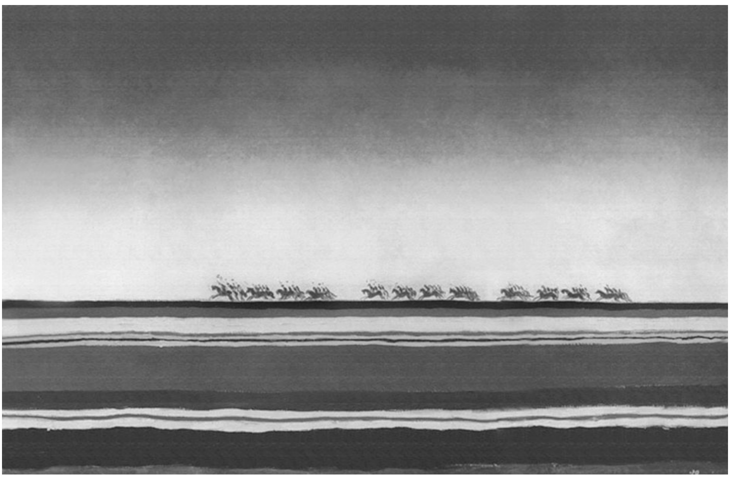
Особо примечательно, что благодаря творчеству А. Ф. Панкина был обнаружен новый математический объект. А началось с того, что художник-исследователь изобразил ряд чисел Фибоначчи в «образе» треугольников на плоскости. И был удивлен тому, что получилось в результате строгого подчинения «художественного образа» закону распределения чисел ряда. Числа, как им и положено, очень быстро росли, а «образ» треугольников с каждым шагом стремительно приближался к образу стрелы — две стороны треугольника «уходили в бесконечность» при неизменной третьей стороне. Эта картина привлекла пристальное внимание профессора Александра Александровича Зенкина, который математически организовал увиденное и определил его как совершенно новый математический объект — ядро ряда Фибоначчи. Таким образом, система треугольников художника А. Ф. Панкина оказалась новым словом в математике. К слову, на одном из научных семинаров по математике было предложено назвать этот объект «треугольники Панкина».

Разумеется, А. Ф. Панкин пристально анализировал творчество К. Малевича с точки зрения математических проявлений. Тем более что идея творчества Малевича, которую художник назвал супрематизмом (метод выражения структуры мироздания в геометрических формах), сама к этому призывала. В частности, на основании собственных математических расчетов А. Ф. Панкин доказывает, что «Черный квадрат» Малевича построен с использованием золотого сечения. Кроме того, в своих исследованиях он обращает особое внимание зрителей на то, что площади, которые занимают на картине черный и белый цвета, равны. И это равновесие создает сложную оптическую игру: черный квадрат то выступает на первый план, то, напротив, как будто оседает вглубь белого фона. Заметим, что Казимир Малевич был верным апологетом идеи равенства праосновы цвета и формы, в которой уже все есть. В его знаменитом «Черном квадрате» эта идея выражена напрямую — эмоционально сильной художественной манифестацией. И теперь она триумфально живет в пространстве и времени!

Отметим, что использование золотой пропорции особенно отчетливо проявляется в картине Казимира Малевича «Скачет красная конница», которая хранится в Государственном Русском музее Санкт-Петербурга.

Здесь сразу же бросается в глаза подчеркнутое разделение изображения на три части: небо, земля и конница, зажатая между ними и скачущая прямо по линии горизонта узкой прерывистой линией. Возникает стойкое ощущение, что, какой бы ни была конечная цель самой гонки, конница уже навечно застряла между небом и землей. Цель теряется в бесконечности, а ее смысл растворяется в долгой скачке (что, к слову, легко ассоциируется с поисками десятичных знаков бесконечной константы пи).

Заметим, линия горизонта на картине делит полотно в точном отношении золотого сечения: ширина изображенного неба относится к ширине всего полотна как ширина изображенной земли к ширине нарисованного неба. И это отношение равно 0,618 (что, кстати, легко проверить). Впрочем, прием, конечно, весьма распространенный. Если уж на какой-нибудь картине изображена линия горизонта (небо — поле, небо — море, небо — земля), то соотношение двух частей и размеров картины, как правило, приближается к золотой пропорции. Но у Малевича здесь соотношение определено максимально точно, то есть сознательно и целенаправленно. И графическая резкость изображения смягчается гармоничной уравновешенностью его частей.



Казимир Малевич. Скачет красная конница (см. вклейку)

Легко увидеть, что конница как целое, в свою очередь, тоже вполне сознательно и определенным образом структурирована. Перед нами три группы по четыре всадника. Однако если присмотреться, то каждый всадник в группе тоже «расчетверяется»! А поскольку зрительное восприятие этого факта слегка запаздывает, то возникает ощущение, что конница увеличивается прямо на бегу! Заметим, что по поводу символизма чисел 3 и 4 здесь можно дать полную волю фантазии! Дело в том, что в те времена было широко распространено использование чисел в символическом смысле. Тройка и четверка — символы конкретной склонности человека в его взаимоотношениях с реальностью. Например, тройка — это символ сохранения традиций и верности классике, а четверка, наоборот, кардинально новое или кардинально отброшенное старое. Если учесть тот исторический период в России, к которому относится картина Малевича «Скачет красная конница», тогда символизм и тройки, и четверки в ней более чем оправдан. На одном полюсе — разрушение существующих парадигм теми, кто жаждал нового мира, на другом — упорные попытки сопротивления этому всех, кто стремился сохранить прежние ценности и ориентиры. Кстати, использование Малевичем насыщенных контрастных цветов, вытянутых в длинные линии-струны, подчеркивает накал борьбы противоположностей. И, разумеется, ощущение тревоги усиливает оранжевый цвет, соседствующий рядом с огненно-красным.

Число пи в литературоведении и древнерусской архитектуре

Творческая мысль не знает пределов! Мировые константы вдохновляют даже писателей. Например, неожиданное открытие сделал петербургский поэт, писатель и исследователь памятников древней старины Андрей Чернов [43]. Долгое время он занимался изучением «Слова о полку Игореве» и заметил, что построение текста легендарного древнерусского памятника подчиняется... математическим законам! А поводом к этому послужил интерес исследователя к идеям Пифагора. В частности, его заинтересовала теория о роли чисел в структуре мироздания, влияние их на человека и его творения. Далее уже собственные исследования позволили Чернову сделать вывод о том, что в основе «Слова о полку Игореве», состоящего из девяти частей-песен, лежит круговая композиция. Возникло предположение: если в композиционном построении поэма — «круг», то должен быть и «диаметр» композиции. А с длиной круга диаметр должен находиться в отношении, равном числу пи. Уже первые расчеты подтверждали эту закономерность, да еще как! Если число стихов во всех трех частях «Слова о полку Игореве» (804 стиха — «длина окружности») разделить на число стихов в первой и последней части (256 стихов — «диаметр»), получается 3,14, то есть число пи с точностью до третьего знака!

Результат Чернова приводит к естественному вопросу: как древний автор «Слова о полку Игореве», ничего не зная о числе пи, привнес в этот текст организующее математическое начало? Чернов предполагает, что автор сделал это интуитивно, подчиняясь образам и пропорциям, которые в изобилии присутствуют, например, в древних архитектурных памятниках. В те времена храмы являли собой художественный идеал, в котором воплощались сокровенные символы и знания. Именно это могло оказывать влияние на организацию поэтического замысла автора «Слова о полку Игореве» при его воплощении.

Подобные исследования Андрей Чернов решил провести и с другими литературными произведениями. Начал он с поэмы Александра Сергеевича Пушкина «Медный всадник», которая тоже имеет круговую композицию. Применив разработанную им методику, в результате вычислений Чернов получил число 3,16. Такой результат его не порадовал, но и не охладил. Дело в том, что в поэме Пушкина Чернов обратил внимание на один странно не зарифмованный стих. А до нужной точности здесь как раз не хватало одной строки. Самое интересное, что она обнаружилась! Как было впоследствии установлено из архивов, строка есть и в черновике, и в беловой рукописи поэта. Но при подготовке какого-то очередного академического издания «строчку писарь потерял» — и издание было выпущено без нее. Когда Пушкин это заметил, было уже поздно, издание давно разошлось. Поэт не стал исправлять оплошность издателей, а «Медный всадник» начал кочевать от издания к изданию с интригующей поэтической заминкой. Посмотрим на отрывок поэмы:

Погода пуще свирепела,
Нева вздувалась и ревела,
Котлом клокоча и клубясь,
И вдруг, как зверь остервенясь,
На город кинулась. Пред нею
Все побежало, все вокруг
Вдруг опустело — воды вдруг...

Как видим, отсутствует рифма к словам «Пред нею». Именно в этом месте пропущены слова, из-за которых потерялась целая строка. Вот они:

...со всею силою своею
Пошла на приступ.

Эти слова следуют за словом «кинулась». А за ними идут слова «Пред нею», которые в первоисточнике звучат как «Перед нею». Первоначально эти строки выглядели так:

На город кинулась со всею силою своею
Пошла на приступ. Перед нею
Все побежало...

Таким образом, математическая гипотеза Андрея Чернова все-таки подтвердилась! Кроме того, подтвердилась она и в других поэмах Пушкина, а также в сонетной форме пушкинских стихотворений. Успешно проверял ее Андрей Чернов и на фугах Баха. После этого автор гипотезы сделал вывод, что такая закономерность заложена в художественные формы самой природой, а чуткий художник их воспринимает и применяет, причем порой совершенно неосознанно.

Но и это еще не все. Далее Андрей Чернов проверил свою гипотезу в архитектуре. Случай свел его с петербургскими архитекторами-реставраторами, которые восстанавливали храмы, сохранившиеся в Старой Ладоге. Оказалось, что в пропорциях Георгиевской церкви, например, кроме золотого сечения древние мастера использовали и «членение по числу пи», аналогичное тому, что было обнаружено в «Слове о полку Игореве». Затем это подтвердилось и на примере Успенского собора монастырского комплекса на окраине Старой Ладоги. Как добивались этого древнерусские зодчие, если при строительстве в те времена использовали грубые меры длины — сажени? На вопрос Чернова архитектор Иосиф Шефтелевич Шевелев заметил, что древние строители «мыслили парной мерой» (то есть пропорцией), а не линейной мерой. Тогда Андрей Чернов обратил внимание на русские сажени. Исследователь высказал мысль, что отношение размаха рук человека (маховая сажень) к его росту (ростовая сажень) равно:

$$\frac{2\Phi}{\pi} = 1,03...,$$

где Ф — число золотой пропорции. Этим и объясняется появление числа пи в системе древнерусских саженей. Интересно, что пропорции ангела, изображенного на плане церкви Успения в Старой Ладоге, оказались поразительно близки к этому числу! Применив полученные расчеты, Чернов определил и другие зависимости. В частности, рост человека с поднятой вверх рукой (большая сажень) относится к росту (ростовая сажень) как $\frac{\Phi^2}{\pi^2}+1$. Кроме того, было обнаружено, что внутренний размер храма этой церкви (до алтарного выступа) в π раз больше диаметра подкупольного барабана. Для Андрея Чернова это было уже настолько убедительно, что по аналогии с золотым сечением он стал называть пропорцию, в основе которой лежит число пи, серебряным сечением.

Исследователь делает вывод: архитектура древнерусских храмов свидетельствует о том, что их создатели учитывали основные пропорции человеческого тела, умели сопрягать гармонию «прямого и плоского» с гармонией «круглого и объемного», то есть с неплохой точностью использовали числа фи и пи.

Об одной попытке расшифровать символы пи, фи и *e*

Связь между математикой и искусством удивительна, но не случайна. Гармония — закон природы, по которому выстроено мироздание!

Человек не в силах сконструировать законы природы; он может лишь изучать их и описывать различными способами. Например, символически. Многие символы дошли к нам из глубин веков не случайно. Должна быть объективная причина их сохранения в течение такого длительного времени, а заключаться она может в том, что в символах зашифрованы фундаментальные принципы мироустройства.

Расшифровка таких символов — это еще одна интересная область исследований, полная удивительных выводов и догадок. Существуют разные методы постижения смысла загадочных символов. Один из них — гематрия — метод раскрытия тайного смысла слова. Суть его заключается в том, что каждой букве ставится в соответствие определенное число, например побуквенно нумеруется алфавит. А затем складываются числовые значения букв, которыми записывается слово, и вычисляется их сумма. Это число и будет ключом к разгадке. Данное правило применимо как к словам, так и к целым фразам. Кроме того, если слова имеют одинаковое числовое значение, принято считать, что между ними существует тесная связь, причем несмотря на то, что в значениях слов могут быть существенные различия.

Например, слово «водород» и слово «вселенная» имеют в гематрии одинаковое значение — 111. Сразу отметим интригующее совпадение: водород — единственный атом, в состав которого входят 1 электрон, 1 протон и 1 нейтрон. Но это еще не все, поскольку водород является самым распространенным элементом во Вселенной. На его долю приходится около 92 процентов всех атомов (8 процентов составляют атомы гелия, а доля всех остальных вместе взятых элементов — менее 0,1 процента). Водород — основная составная часть звезд и межзвездного газа. Так что это? Два подряд красивых совпадения или все-таки информация к размышлению? Как бы то ни было, впечатление оставляет!

Самое удивительное здесь то, что алфавиты разных языков каким-то невероятным образом оказались так организованы (свыше или самим человеком — вопрос остается открытым), что в гематрии для универсальных понятий просматривается тождественность значимости. Иными словами, нет преимущественного языка — все самодостаточны и равнозначны даже независимо от времени. Мало того, естественная эволюция языков, в ходе которой меняется количество букв в алфавите, как будто и не касается законов гематрии!

Отметим, что результаты исследований, полученные в гематрии, используются для поиска взаимосвязи образов с архетипами, в частности для постижения тайного смысла библейских текстов. Как правило, результаты здесь получаются интригующие, нестандартные, а то и курьезные. Такая информация является отличным поводом к размышлению. Например, Геннадий Евгеньевич Сметанин, философ и исследователь библейских текстов, написанных на русском языке, предположил, что зависимость мировых констант пи, фи и *е* в виде $\pi^{\varphi \cdot e}$ может являться формулой мироздания.

А началось с того, что исследователь работал над «странностями» числовых констант пи, фи и *е* с точки зрения гематрии. Затем, исследуя теорию великого Пифагора о числах, Г. Е. Сметанин обратил внимание на имя древней мифической прорицательницы того времени. Звали ее Пифия, но в некоторых случаях это имя писали как Пифиея. Кроме того, философ отметил, что два слога в имени жрицы совпадают с названием мировых констант пи и фи, причем во втором варианте ее имени возникает еще и третья константа — *е*. Затем Г. Е. Сметанин выяснил, что «прорицательница» и «предсказательница» — это не одно и то же. В древности Пифию называли именно прорицательницей. А «прорицать» в те времена означало «разъяснять, растолковывать». По смыслу это не вполне тождественно глаголу «предсказывать». Тогда Г. Е. Сметанин задумался над буквой «я» в конце имени прорицательницы и был удивлен, заметив, что эта буква и слово «код» в гематрии совпадают. Заменив в имени «Пифиея» букву «я» на слово «код», Г. Е. Сметанин получил конструкцию «ПиФиЕкод» и предположил, что «числа пи, фи и *е* являются кодом мироздания». Поскольку средства гематрии позволяют подвергнуть проверке и такую конструкцию из слов, это и было сделано. Как утверждает Г. Е. Сметанин, результат был получен утвердительный.

Но тогда возникают естественные вопросы: чем интересна формула $\pi^{\varphi \cdot e}$? Почему в ее основании лежит именно число пи? Почему показатель степени — произведение? В поисках ответов на данные вопросы Г. Е. Сметанин подставил в эту формулу значения констант с учетом их трех первых знаков (то есть были взяты числа 3,14; 1,61; 2,71) и вычислил результат. Получилось число 147, которое в эзотерике называется мировой константой. Уже интересное совпадение! Далее Г. Е. Сметанин продолжал подставлять в сконструированную им формулу $\pi^{\varphi \cdot e}$ значения констант, шаг за шагом увеличивая их точность на один знак. Следующим за числом 147 было получено число 153, которое в эзотерике называется «большие рыбы» (Евангелие от Иоанна, 21:11). В дальнейшем, сколько бы ни увеличивалась точность чисел пи, фи и *е*, целая часть результата 153 не менялась, а лишь продолжал удлиняться «хвост» этого числа.

Как бы то ни было, исследователь Г. Е. Сметанин предполагает, что полученные им результаты еще раз указывают на то, что природа разумно сотворена посредством констант пи, фи и *е* [44]. В том смысле, что они являются самыми первыми и самыми фундаментальными из всех фундаментальных чисел.

Число пи и пространственная метрика

Заметим, что физический смысл какой-либо постоянной величины заключается в том, что она вычисляется из контрольных параметров процесса, происходящего в объективной реальности. Например, средняя величина ускорения свободного падения определена как $g = 9{,}8$, так как она зависит от географической широты (Земля — не идеальный шар) и от неоднородности залегания пород в недрах. На Марсе или на Луне, как известно, у нее уже другое значение. Обратимся теперь к нашей константе пи. И дело не в том, что $\pi^2 \approx 9{,}869604... \approx g$, хотя это само по себе интересно. Важно, что без нее не обойдутся ни круг, ни сфера, поскольку число пи выражает отношение длины окружности к ее диаметру. И если вещество находится в форме шара, то действующие на него силы, как известно, находятся между собой в равновесии. Именно поэтому форма капель воды, звезд и планет близка к шарообразной. Можно сказать, что число пи, как механизм запуска «шарообразования», определяет в нашем мире его геометрические свойства, или метрику. Иными словами, число пи входит в метрический тензор данного нам физического пространства. Таким образом, все человечество — жители мерности 3,14...!

Впрочем, с точки зрения математики эта метрика вполне законна. В общем случае пространство может иметь любое число измерений (иррациональное или даже комплексное), то есть обладать размерностью, отличной от трех. Прямые линии являются, например, объектами одномерного евклидова пространства, плоскости — двухмерного, а объемные тела — трехмерного евклидова пространства. А дальше?.. Поиск ответа на этот вопрос и привел к возникновению понятия «многомерное пространство». Таким образом, понятие многомерности связано с процессом обобщения самого предмета геометрии.

Число пи, как известно, обнаружилось в седой древности при первых попытках вычислить площадь круга на плоскости. А с плоскости оно уже легко «просочилось» в трехмерное пространство сфер. Вспомним формулу объема шара:

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Но если перейти к пространству размерности n, то это означает, что элементами такого пространства будут точки, имеющие n координат $x(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Тогда объем шара, описываемого неравенством $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \le r^2$, в таком пространстве будет вычисляться по формуле:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

В состав этой формулы входит $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, которая задана следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Как видим, сюда уже «просочилась» константа e. Отметим, что гамма-функция Эйлера — сложный математический объект, который имеет очень большое значение в высшей математике. Наряду с функциями такого же, как она, уровня ее изучают на специальном курсе, который так и называется — «специальные функции». Для полноты картины, не углубляясь в теорию, приведем некоторые свойства специальных функций на примере гамма-функции:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Конечно, число пи не замедлило появиться и здесь!

А теперь, опираясь на общую формулу вычисления n — мерного объема, после сложных вычислений (которые мы здесь опустим) можно увидеть формулы для вычисления объема четырехмерного, пятимерного и шестимерного шара:

$$V_4 = \frac{1}{2}\pi^2 r^4,$$

$$V_5 = \frac{8}{15}\pi^2 r^5,$$

$$V_6 = \frac{1}{6}\pi^3 r^6.$$

Добавим лишь, что число пи, царящее в евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского или теории римановых пространств «хозяйничает» еще основательнее, о чем подготовленному читателю, разумеется, хорошо известно.

Не стоит думать, что многомерные пространства не касаются нашей реальности. Ученые с большой долей уверенности предполагают, что пространства различной мерности «упакованы» одно в другое, как матрешки. Кроме того, есть предположение, что такие понятия, как «человеческое сознание» и «мерность пространства», взаимозависимы.

Например, такая любопытная информация (берем без комментариев, источник — http://arbuz.uz/u_piclub.html). Речь идет о том, что зарождение органической жизни и ее существование возможны, начиная с трехмерного пространства (или с мерности грубого приближения числа $\pi \approx 3$). Уровень возникновения сознания на Земле определен в диапазоне мерности 3 + 0,1 (то есть число пи уточняется до значения 3,1). На современном этапе жизни нашей планеты наличие мерности Земли установилось в пределах 3,00017. Это говорит о том, что человечество находится только на пути обретения сознания. Впрочем, как предполагают авторы данного утверждения, проявление сознательного бытия не ограничивается диапазоном от 3 до 3,1. Это является только стартом, отправной точкой для непрерывного расширения сознания и образования новых уровней существования органической жизни во Вселенной. Иными словами, каждому уровню мерности соответствует свой диапазон сознания. Отсюда следует, что мерность пространства изменяется, растет. В мире Абсолюта (Бога) мерность пространства и сознания составляет диапазон от 4 до 4,5. Мерность сознания самого Абсолюта составляет около 5,5 единицы, но и она тоже эволюционирует вместе с мерностью всей Вселенной.

Глава 4
О новых гранях числа пи и нерешенных проблемах

Число пи настраивает музыку сфер

Безусловно, фундаментальная константа пи и понятие Абсолюта тесно связаны. Впрочем, с ним, с Абсолютом, связано все и вся! Но не все связано столь фундаментально, как число пи. Достаточно сказать, что расчеты электронных орбиталей в атоме или гравитационного поля Земли, а также расчеты магнитного поля планет или интенсивности реликтового излучения без математической теории сферических функций (сферических гармоник) сегодня не обходятся. А сферические функции вообще невозможно представить без числа пи.

Строго говоря, сферические гармоники являются частью семейства ортогональных решений уравнений Лапласа, записанных в сферических координатах. Этот сложный инструмент высшей математики используется при изучении физических явлений в пространственных областях, которые ограничены сферическими поверхностями.

Не вдаваясь в теорию сферических гармоник, обратим внимание на следующую формулу:

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\theta).$$

Присутствующие здесь функции $\Theta_{lm}(\theta)$ имеют вид:

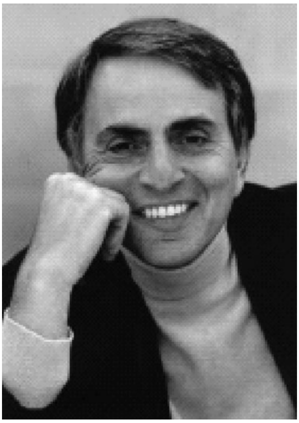
$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta),$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — это присоединенные многочлены Лежандра [45].

Подчеркивая большое значение сферических гармоник, сошлемся на информацию из статьи «Хорошо ли настроена Вселенная?» (журнал «В мире науки», 2005, ноябрь, № 1) Гленна Старкмана и Доминика Шварца — ученых-математиков и с 2003 года сотрудников Европейского центра ядерных исследований. Речь в ней идет о некоторых обнаруженных ими физических явлениях, которые оказались необъяснимыми в рамках стандартной, общепринятой на сегодняшний день космологической модели Вселенной. Статья начинается неожиданно — с музыкального образа: «Вообразите фантастически большой оркестр, играющий уже 14 миллиардов лет. Сначала вам кажется, что музыка звучит гармонично. Но прислушайтесь: что-то в ней не так...» Дело в том, что ученым удалось «расслышать» в музыке космоса подозрительные ноты. Диссонировала «сольная партия» микроволнового фонового, или реликтового, излучения. Нестройные ноты были выявлены при помощи сферических гармоник. Оказывается, «мелодию» нарушали неизвестные ранее значения температурных параметров реликтового излучения. Подчеркнем, что информация об излучениях из далеких областей Вселенной проецируется на единую небесную сферу, поэтому сферические гармоники, о которых мы здесь говорим, сработали безукоризненно! И неудивительно: они описывают любые колебательные процессы в сфере. Теперь ученым придется совершенствовать безукоризненность самой модели Вселенной. Полученные данные не столько грозят ей отменой, сколько заставляют специалистов расширять взгляды на космологические процессы.

Обратим внимание: константа пи определяет гармонические колебания, обусловливает геометрически строгие и симметричные формы окружности, круга, шара, сферы. А сама, между прочим, обладает хаотичным, бесконечным и непредсказуемым «хвостом» десятичных знаков. Любопытно, не правда ли? Если будет окончательно доказано, что цифры в «хвосте» числа пи подчиняются теории хаоса, то это подтвердит факт того, что константа пи — математически нормальное число. Этой проблемой и занимаются американские математики Дэвид Бейли и Ричард Крэнделл. Они пытаются найти смысл в хаотичном ряду цифр числа пи после запятой. Пока, например, ими установлено, что группа цифр 59345 и группа цифр 78952 в десятичном разложении числа пи повторяются регулярно. Ученые надеются разрешить проблему, используя теорию хаоса и псевдослучайных чисел. «Мы не доказали нормальность числа пи, но нашли путь к этому», — оптимистично заявил Дэвид Бейли (цитата из сообщений архива агентства Der Spiegel).

Вполне естественно, что парадоксальные и таинственные свойства числа пи часто используются в сюжетах научно-фантастических произведений. Например, в романе Карла Сагана (1934–1996) «Контакт» главная его героиня, в конце концов, разгадывает послание человечеству от внеземного разума, зашифрованное в знаках числа пи. Однако Бейли и Крэнделл близки к доказательству того, что в знаках числа пи зашифровано не одно конкретное сообщение от кого-то, а вся прошлая, настоящая и будущая информация обо всем на свете целиком и полностью! Отдавая должное Карлу Сагану, заметим, что он был выдающимся американским астрономом, астрофизиком, естествоиспытателем и неутомимым популяризатором науки.



Карл Саган

В 1997 году режиссер Роберт Земекис поставил по роману «Контакт» одноименный художественный фильм, который завоевал множество кинематографических наград и с успехом обошел экраны мира. Кстати, в этом же году еще один режиссер, Даррен Аронофски, создал художественный фильм с коротким названием «Пи». И число пи на этот раз по сценарию фильма служило однозначным «паролем разума» при контакте с внеземной цивилизацией.

Число пи и псевдослучайные числа. Игла Бюффона и пи-бильярд

А пока свойство нормальности числа пи (то есть равновероятная случайность появления цифр в его записи) находится в процессе доказательства, само число пи уже вполне может служить генератором псевдослучайных чисел. Чтобы представить себе такие «вроде бы случайные» числа, составим для начала какую-нибудь числовую таблицу. Скажем, пусть это будет возраст посетителей кинотеатра, который мы запишем в порядке покупки ими билетов на один сеанс. Затем берем ряд натуральных чисел и в этом ряду отмечаем числа из нашей таблицы. Получится что-то вроде модели падающих капель дождя, которые случайно попадают то на одно, то на другое число натурального ряда. Разумеется, речь идет об относительной случайности: мы всегда знаем, какое число из нашей таблицы стоит в очереди, чтобы «отметиться». Именно поэтому такие «ненастоящие случайные» числа и были названы псевдослучайными. Но, как оказалось, они прекрасно моделируют хаос, а потому могут использоваться в проведении вычислительных экспериментов. В настоящее время подобные алгоритмы широко применяются в компьютерных программах и реализованы в программном обеспечении всех современных компьютеров.

Итак, как говорилось в предыдущих главах, для вычисления значения числа пи разработано великое множество различных методов. Часть из них пришла из глубины веков, часть появилась сравнительно недавно. Напомним: все началось с геометрических методов, например с вписывания и описывания правильных многоугольников около окружности. Затем возникли теоретико-числовые методы, такие как теория цепных дробей. Далее были разработаны аналитические методы с использованием теории рядов, интегралов, бесконечных произведений. И наконец, в настоящее время широко применяются компьютерные методы, которых накопилось уже великое множество: алгоритмы Брента — Саламина, Дж. и П. Борвейнов, Ф. Биллара и многие другие.

Обобщая, отметим, что для любых расчетов, как правило, используется одна из двух моделей: имитационная либо численная. В первом случае моделируется поведение всех компонентов системы, во втором — уже не всех компонентов и параметров, а только наиболее существенных. К имитационному моделированию относится, в частности, метод Монте-Карло. При расчетах по этому методу воспроизводится и исследуется вероятностное поведение всех компонентов исследуемой системы. Он применяется при изучении сложных систем, поведение которых вызывает затруднения при описании их математическими зависимостями. В таком случае поведение системы имитируется экспериментально. Это означает, что проводится большое количество случайных испытаний для каждого параметра системы. Затем анализируется отклик каждого параметра системы на данное возмущение, после чего просчитывается вероятностное состояние системы для каждого случая и выстраивается модель ее поведения. Отметим, что в основе метода Монте-Карло лежит задача Бюффона, которая опирается на математическую теорию вероятности. Начало данному методу положил в XVIII веке известный французский естествоиспытатель граф Жорж-Луи Леклерк де Бюффон. В 1777 году он опубликовал работу, которая привлекла к себе немалое внимание.

Бюффон предложил оценивать значение числа пи экспериментальным путем. А именно: на плоскость, которая разлинована параллельными прямыми, произвольно бросают иглу, длина которой не превышает расстояния между соседними прямыми. Таким образом, при каждом броске игла либо не пересекает линии, либо пересекает только одну. С учетом вероятности того, что игла пересечет какую-нибудь прямую, была определена следующая закономерность: при увеличении числа бросков иглы до бесконечности отношение количества ее пересечений с линией к общему количеству бросков стремится к значению $\frac{\pi}{2}$.

Этот факт лег в основу многочисленных экспериментов и привлек множество добровольцев. Публикация Бюффона дала старт новому соревнованию: кому хватит терпения, многократно бросая иголку, определить значение пи точнее других? В дальнейшем метод Монте-Карло оказался удобен для решения задач, в которых используются генерации случайных последовательностей. И хотя метод был известен давно, до появления вычислительной техники он не получил широкого распространения из-за громадных объемов вычислений. Задача Бюффона до сих пор пользуется популярностью у исследователей-экспериментаторов. В настоящее время она стала уважительно называться теоремой и была расширена до обобщения: в принципе, бросать можно не только иголку, а все что угодно. Подойдет любой предмет! Главное, чтобы наибольшее расстояние между двумя точками замкнутой выпуклой фигуры этого предмета не превышало расстояния между параллельными прямыми. Например, для предмета в виде правильного треугольника вероятностное отношение, аналогичное тому, что было получено с иглой, будет уже стремиться к выражению $\frac{3}{\pi}$. Если же предметом выберем квадрат, тогда отношение устремится к выражению $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Для вычисления числа пи подойдет любое выражение, полученное таким опытным путем!

Между прочим, с помощью такого на первый взгляд «игривого» метода Монте-Карло рассчитываются очень серьезные задачи, связанные, например, с ядерными реакторами. Кроме того, его достоинства давно оценили и широко используют исследователи в геофизике, экономике, биологии, экологии и во многих других областях. Словом, он удобен в таких процессах, где пока затруднительно применять аналитические методы решения задач.

Приведем еще один оригинальный имитационный метод получения значения числа пи при помощи опытов с бильярдными (в просторечии биллиардными) шарами. Предложил его российский математик Григорий Александрович Гальперин. Подробно ознакомиться с методом можно в его работе «Бильярдная динамическая система». Как рассказывает сам автор пи-бильярда, эта идея появилась у него во время подготовки научного доклада в одном из американских университетов. «Когда я представил метод аудитории, — рассказывает Г. А. Гальперин, — никто мне поначалу не поверил, но затем последовало доказательство, простота которого сразу убедила всех сомневающихся». Позже автор выделил этот метод определения значения числа пи в отдельную тему и сделал несколько докладов в других университетах. Реакция всегда была одна и та же: сначала полное недоверие, затем полное признание ввиду абсолютной очевидности метода. Заключается метод в следующем. Меньший шар находится между блышим шаром и стенкой, а бóльший шар движется к стенке. При столкновении двух шаров число их соударений позволяет вычислить пи со сколь угодно большой заданной точностью. Запускаем процесс (можно и на компьютере) и считаем количество ударов шаров. «Этот метод детерминированный, — подтверждает Г. А. Гальперин. — Все, что нужно сделать, — это запустить бильярдную систему и подсчитать в ней число ударов». Причем пи-бильярд дает возможность определить число пи с произвольной точностью, то есть узнать любую его наперед заданную цифру.

Число пи, теория хаоса и фракталы

Как видим, с момента обнаружения числа пи и до сего дня с ним связаны удивительные факты, идеи, теории и догадки. Поразительно, но со временем непостижимая таинственность числа пи нисколько не уменьшается! Меняется лишь восприятие его загадочности. Было время, когда ученым казалось, что нахождение наиболее точного значения числа пи раскроет все тайны. Но вот константа пи определена уже с головокружительно избыточной точностью в два квадриллиона знаков (!), а секрет так и не разгадан. К слову, этот рекордный результат был получен в сентябре 2010 года Николасом Чже из технологической компании Yahoo!. Если бы эта работа велась на одном компьютере, она потребовала бы 500 с лишним лет. Но Чже использовал технологию так называемых облачных вычислений Hadoop: было задействовано «облако» из тысячи компьютеров одновременно. И даже при этом на калькуляцию ушло 23 дня. Интересно, что в августе того же 2010 года японский исследователь Сигэру Кондо вместе с американским студентом Александром Йи определили 5 триллионов знаков, но их рекорд продержался не больше месяца и был перекрыт Николасом Чже. Естественно, что в настоящее время цели исследований, связанных с числом пи, смещаются в сторону поиска смыслового значения его фундаментальности и смысла в хаосе бесконечных десятичных знаков. Таким образом, применение теории хаоса в этих исследованиях вполне закономерно.

Строго говоря, выражение «теория хаоса» — это популярное и упрощенное название раздела математики, изучающего сложное поведение нелинейных динамических систем, таких как атмосфера, турбулентные потоки, биологические популяции. Кроме того, любые финансово-экономические, государственно-политические и социально-культурные общественные структуры тоже представляют собой нелинейные динамические системы. Математическая теория хаоса дает основание надеяться, что естествознание и гуманитарные науки будут связаны, наконец, в единое целое без противопоставления их друг другу. Особо заметим здесь, что теория хаоса не сосредоточивается на беспорядке, как может показаться на первый взгляд. Напротив! Она направлена на исследование встроенного в хаос порядка, который по законам природы проявляется в поведении наполняющих его систем. А инструментами познания в теории хаоса являются такие математические объекты, как фракталы и аттракторы. Фрактал (*лат.* дробленый) — сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия. Аттрактор (*англ.* притягивать, привлекать) — траектория, к которой стремится развитие фрактальной структуры. В некоторых нелинейных динамических системах аттрактор является фракталом. Подчеркнем, что фракталы определяются не геометрическим описанием или уравнением, а набором математических процедур — алгоритмом, по которому разворачивается его геометрическая форма, скажем на компьютере. С помощью фракталов форма конкретного облака может быть описана так же четко, как с помощью проективной геометрии архитектор описывает здание, которое он возводит. Заметим, что с точки зрения математики «фрактал» не является математическим термином, поскольку у него нет строгого математического определения.

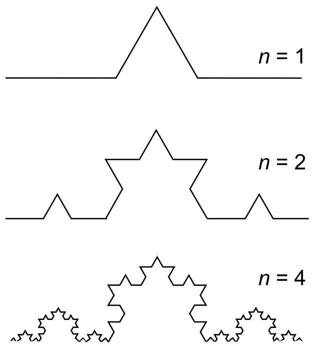
Фракталы — объекты, на которых мы невольно задерживаем взгляд. Казалось бы — однообразие бесконечного самоподобия... Но нет! Такая очевидная *само*бесконечность зачаровывает таинственной легкостью возникновения и магической красотой.

Если до сих пор казалось, что фракталы — это нечто далекое от реальности, то один только лист папоротника — известный фрактал Барнсли — мгновенно меняет впечатление. Удивительное сходство с живым растением! И это не фотография, не рисунок, а самый настоящий объект фрактальной геометрии.

В конце концов, фракталы не оставляют равнодушным никого! Они радуют глаз особой эстетикой, вызывают интеллектуальное наслаждение и вдохновляют разум. В 1983 году группой математиков из немецкого города Бремена под руководством Хайнса-Отто Пайтгена и Питера Рихтера была организована выставка фрактальных изображений, которая привела в восторг всю общественность мира. После выставки Х.-О. Пайтген и П. Рихтер издали книгу «Красота фракталов» [46], которая вызывает огромный интерес к миру фракталов.

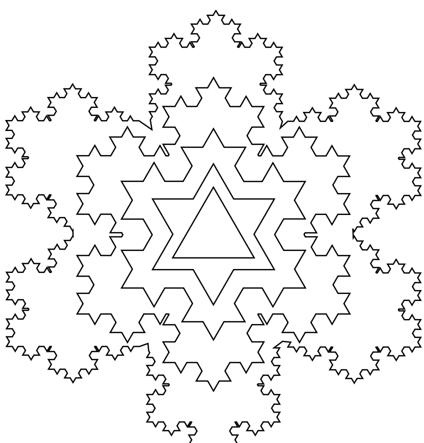
Фрактал Барнсли (см. вклейку)

В 1904 году шведский математик Хельге фон Кох описала ломаную линию, а затем и геометрический объект — «снежинку», которые были получены ею применением процедур метода самоподобия. Ломаная линия получалась у нее путем многократного повторения следующей процедуры. На первом шаге ($n = 1$) единичный отрезок делился на три равные части, затем средний отрезок отбрасывался, а вместо него вставлялись уже два таких же отрезка, но соединенные уголком.



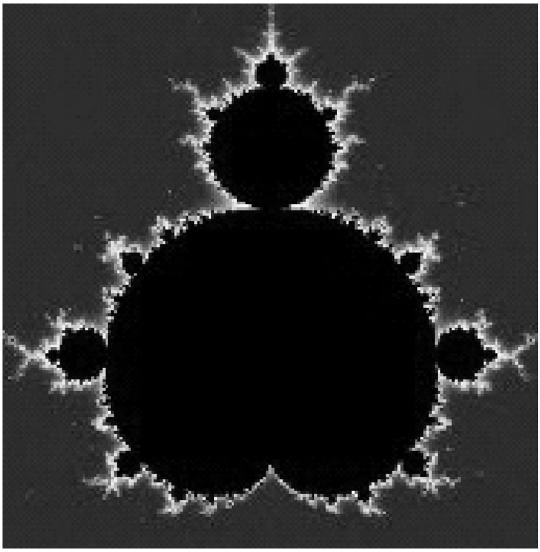
Ломаная линия Хельге фон Кох

На втором шаге ($n = 2$) процедура повторялась для каждого из четырех полученных отрезков и так далее для любого количества шагов. А применение описанной процедуры ко всем сторонам правильного треугольника приводит к получению знаменитой снежинки, которая есть не что иное, как замкнутая ломаная линия Хельге фон Кох.

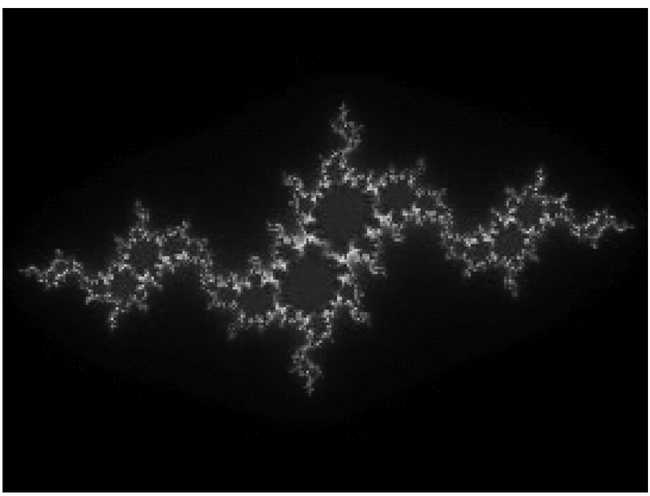


Снежинки Хельге фон Кох

Также в числе первых приобрели известность образы фрактальных множеств Мандельброта и Жюлиа.



Фрактальное множество Мандельброта (см. вклейку)



Фрактальное множество Жюлиа (см. вклейку)

Привлекательность этих фрактальных множеств была отмечена сразу. Она поистине поражала воображение! Но невидимая суть фракталов намного больше восхищает разум. Она отражает особенности сложных, нелинейных динамических систем, когда малейшее искажение начальных условий вызывает в системе цепную реакцию и потерю устойчивости по типу «эффекта бабочки» (имеется в виду, что взмах ее крыла в одном полушарии рождает торнадо в другом). Разумеется, поведение нелинейных систем непредсказуемо. Однако существуют необъяснимые законы, на основании которых непредсказуемое кризисное состояние систем наступает с упорной периодичностью! При взгляде на фракталы именно такая глубинная упорядоченность дает необъяснимое ощущение зримой истинности законов природы. Осталось только постичь эти законы!..

Термин «фрактал» был введен в 1975 году. Его автором стал математик Бенуа Мандельброт (1924–2010), признанный создателем фрактальной геометрии.

Бенуа Мандельброт

Дядя Бенуа, Шолем Мандельбройт — французский математик, член Парижской академии наук, один из участников проекта «Николя Бурбаки». Похоже, он достаточно рано заметил математическое дарование своего племянника и, скорее всего, поддерживал его. Дело в том, что, увлекшись математикой, юный Бенуа Мандельброт практически игнорировал обучение в школе. Его математические способности отличались прежде всего потрясающим пространственным мышлением и острейшей геометрической интуицией. Это произвело столь ошеломительное впечатление на членов приемной комиссии Сорбонны, что Мандельброт стал ее студентом, несмотря на вопиюще низкий уровень общей подготовки. После окончания Сорбонны он переехал в США, где поступил в Калифорнийский технологический институт. По возвращении во Францию Мандельброт защитил докторскую степень в Парижском университете.

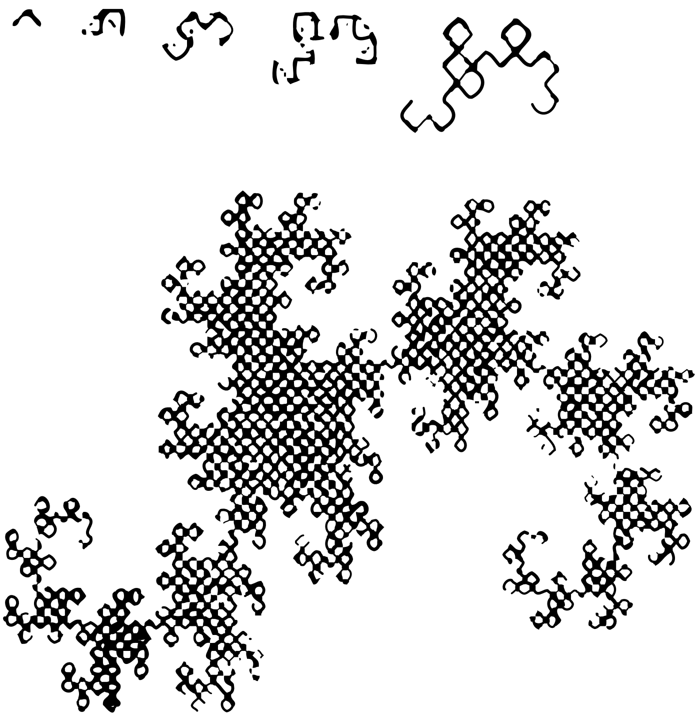
В 1958 году он окончательно переехал в США, где приступил к работе в Исследовательском центре IBM имени Томаса Д. Уотсона. Сфера исследований Мандельброта выходила далеко за пределы задач, поставленных перед ним в научном центре. Его нестандартный ум, с легкостью переключаясь с одной темы на другую, находил применение своим идеям в самых разных областях: лингвистике и теории игр, экономике и географии, аэронавтике и астрономии, физиологии и биологии, химии и физике. Особенно заметными на то время оказались результаты исследований Мандельброта в экономике. Он смог обнаружить симметрию в длительных и кратковременных колебаниях цены, в частности на хлопок. Это открытие оказалось настолько неожиданным, что предвещало переворот в экономической науке того времени. После этого Мандельброт занялся глубокой разработкой полученного им метода, который впоследствии получил название рекурсивного или фрактального.

Пи-теорема и фрактальные образы фундаментальных констант

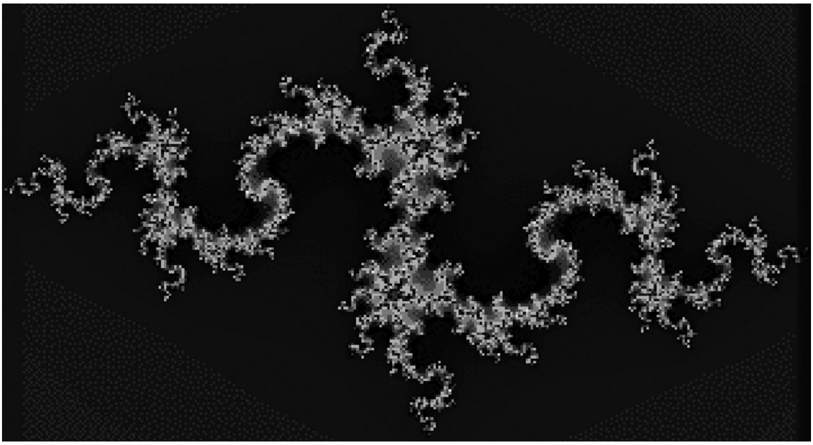
История развития теории фракталов тесно связана с именами таких известных математиков, как Георг Кантор, Джузеппе Пеано, Карл Вейерштрасс, Феликс Хаусдорф, Вацлав Серпинский, и, естественно, с числом пи. Вейерштрасс, например, ввел в обращение понятие «непрерывная недифференцируемая функция», Хаусдорф открыл понятие «дробная размерность», а Жюлиа и Фату обосновали метод рациональных отображений в комплексной плоскости. Однако нарождающуюся теорию и ее «патологические структуры» (фракталы, как их стали называть позднее), придуманные математиками XIX века, долгое время никто не воспринимал всерьез. Отношение к ним радикально поменялось благодаря Бенуа Мандельброту, когда в 1977 году была опубликована его «Фрактальная геометрия природы». И все! Понятие фрактала буквально ворвалось в сознание человечества. Фрактальная геометрия заняла почетное место в ряду прикладных наук там, где использование классической геометрии для моделирования сложных динамических систем было невозможным. Между прочим, фрактальная геометрия Мандельброта удовлетворяет всем пунктам научного определения геометрии, которое сформулировано в «Эрлангенской программе» Ф. Клейна. Фрактальная геометрия математически строго описывает всевозможные природные формы, а также их поведение и состояния. Сам Мандельброт охарактеризовал созданную им теорию фрактальной геометрии как «морфологию бесформенного».

Объекты фрактальной геометрии обладают некоторыми любопытными свойствами. Остановимся на одном из них. Начнем с того, что размеры (длины, площади и объемы) одних фракталов равны нулю, а других — обращаются в бесконечность. Поэтому Бенуа Мандельброт сосредоточился не на размерах таких геометрических объектов, а на скорости обращения их размеров в ноль или в бесконечность. К слову, эта характеристика совпадала с понятием размерности, введенным еще в XIX веке Феликсом Хаусдорфом. Причем такая размерность не противоречила обычной, топологической размерности. Например, для объектов евклидовой геометрии она совпадала с размерностью для точки (размерность 0) и для линий (размерность 1), для плоских фигур (размерность 2) и для объемных тел (размерность 3). Для объектов фрактальной геометрии размерность принимает дробные значения согласно понятию размерности по Хаусдорфу. Это, собственно, и послужило причиной того, что, называя объекты «своей» геометрии, Мандельброт воспользовался латинским словом *fractus* (дробный). Кстати, объект фрактальной (дробной) размерности можно, что называется, «подержать в руках». Для этого достаточно взять в руки двухмерную плоскость, например лист бумаги, и смять его в комок. В результате плоский бумажный лист обретает длину, ширину, высоту и становится объемным трехмерным евклидовым объектом. Но заметим, что он преобразовался из двухмерного листа, то есть получился «сам из себя» (его можно снова расправить). У комка бумаги в разных точках будет разная ширина, длина и высота, то есть размер комка получился неоднородным. Это как раз тот случай, когда размерность — «ни то ни се»: уже не два, но еще и не три. Для нашего комка размерность по Хаусдорфу как раз и будет равна не трем, а приблизительно 2,5. Как видим, фрактальная геометрия сочетает статичность геометрических форм (в данном случае плоского листа бумаги) с динамикой их развития (с теми формами, в какие потенциально можно превратить лист бумаги, например, занимаясь оригами). Из соображений о такой потенциальности, кстати, и появилась новая область естествознания — фрактальная физика. А сами фракталы все чаще становятся подходящими моделями для описания процессов в неупорядоченных (нелинейных) динамических средах. Таким образом, с помощью фракталов хаос перестает быть банальным беспорядком и проявляет свою глубинно организованную структурность. И математическая теория хаоса становится все более активной областью научных исследований, которая, как мы уже показали, внедряется не только в физику и информатику. Кстати, интересно, что в области анализа размерностей сформулирована и доказана пи-теорема. Упрощенно говоря, она позволяет вычислять множество безразмерных величин по другим заданным физическим величинам, даже если неизвестны зависимости, которые связывают их между собой. Безразмерные величины здесь — это величины, независимые от единиц измерения, как само число пи. Отсюда и название теоремы. Таким образом, метод анализа размерностей применяется при решении задач, связанных с поиском физических закономерностей, а также в обработке теоретических выводов и в представлении экспериментальных результатов [47].

Первыми среди объектов дробной размерности были открыты и изучены детерминированные фракталы. Каждый фрагмент такого фрактала в точности повторяет всю конструкцию в целом. К ним относятся канторовская пыль, снежинки и ломаные Хельге фон Кох, ковер и губка Серпинского, кривые дракона, кривые Пеано и Гильберта и многие другие.

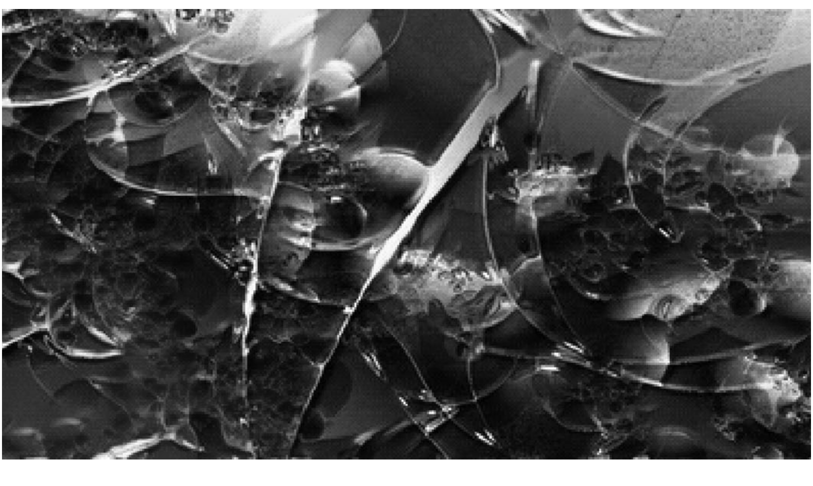


Пять поколений кривой дракона

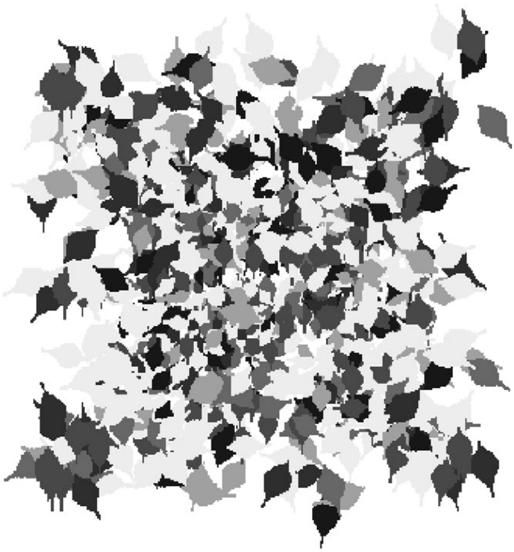


Кривая дракона во всей красе (см. вклейку)

Стохастическими (или случайными) называются фракталы, которыми можно выразить, например, береговые линии, поры в хлебе, дырки в сыре, частицы в порошках. Здесь самоподобие заключается в сохранении нормальности случайного распределения характеристик объекта на разных масштабах, что и отражают собой такие фракталы на рисунках.



Пример стохастического фрактала (см. вклейку)



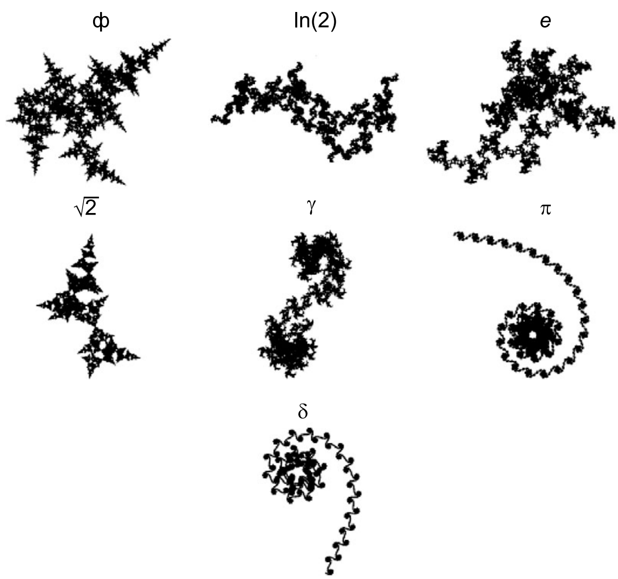
Стохастический фрактал «опавшие листья» (см. вклейку)

В 1981 году вышла книга Джона Хатчинсона «Фракталы и самоподобие», и в математике появилась теория системы итерируемых функций. С помощью данной теории создаются фрактальные функции — основы процедур для алгоритмов. А в 1985 году Майкл Барнсли, ведущий исследователь фирмы Georgia Tech, опубликовал работу, в которой предложил практический инструмент для теории Хатчинсона. Барнсли построил систему итерируемых функций (сокращенно IFS), доказав, что с ее помощью можно получить любое изображение итерируемой функции. В 1990 году он получил патент на технологию IFS, а в 1991 году запатентовал и усовершенствованную версию системы — PIFS. Хотя Барнсли доказал возможность сжатия (компрессии) изображений в сотни раз и даже опубликовал несколько изображений со сжатием 10 000 : 1, этот процесс не был автоматизирован и всю работу приходилось вручную делать студентам университета, где преподавал Барнсли. Наконец, в 1992 году один из его студентов, Арнод Жакуин, представил первый практический метод автоматизированной компрессии изображений. Алгоритм Жакуина лег в основу коммерческого компрессора/декомпрессора компании Iterated Systems Incorporated и успешно используется по сей день.

Как уже было отмечено, фракталы описываются алгоритмически — при помощи математических процедур, в состав которых входят рекуррентные формулы определяющих функций. Например, цикличность в мире фракталов выражается зависимостью, которая связывает две фундаментальные математические константы — пи и *e*. Она имеет такой вид:

$$e^{i2\pi l} = 1,$$

где l — целочисленное количество циклов. А фракталы Курликю, например, славятся простыми алгоритмами и поразительно изящной графикой. Конечно, для нас особо примечательны те из них, которые создают фрактальный образ чисел пи, фи и *e*.



Фракталы Курликю для чисел фи, пи, *e* и других констант

Любопытны также фрактальные образы функции натурального логарифма и функции корня квадратного от числа 2, то есть $\ln(2)$ и $\sqrt{2}$. Кроме того, на рисунке присутствуют также фрактальный образ математической постоянной Эйлера — Маскерони γ и фрактальный образ постоянной Фейгенбаума δ. Константа γ определяется как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа. А константа δ характеризует бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу.

В построении каждого из этих фракталов используются цифры десятичной записи соответствующего числа. Например, для получения выразительности изображения потребовалось взять около миллиона знаков из десятичной записи числа пи.

Пи-точки Фейнмана и пи-периоды Фридмана. Пи-разум и неразрешенные пи-задачи

Похоже, число пи порождает задачи точно так же, как генерирует элементы собственного фрактального изображения! И среди таких задач существует немало неразрешенных. Как уже упоминалось, не поставлена точка в вопросе о нормальности этого числа. До сих пор неизвестно, все ли цифры от 0 до 9 встречаются в десятичной записи числа пи бесконечное количество раз. Отметим, что вопрос о закономерности повторения определенных групп цифр (и не только в числе пи) — один из самых трудных в математике. Пока можно сделать вывод о том, что цифры десятичного представления числа пи достаточно случайны. Но вместе с тем можно смело утверждать, что в десятичных знаках числа пи встретится шесть девяток подряд. И это действительно так! А позиция, где они встретятся впервые, называется точкой Фейнмана. Следующая комбинация из шести девяток подряд встречается в знаках числа пи на позиции с номером 193 034. А на позиции с номером 222 299 можно найти шесть восьмерок. Кстати, ноль повторяется шесть раз на позиции с номером 1 699 927. Таким образом, точкой Фейнмана стали называть каждое первое возникновение последовательности четырех или пяти одинаковых цифр. Например, точка Фейнмана для цифры 7 — это позиция с номером 1589, где семерка в десятичном представлении числа пи впервые повторяется четыре раза подряд.

Можно не сомневаться, что в десятичном разложении числа пи присутствует любая, которая только возможна, последовательность цифр. Поэтому надеяться на то, что в нем зашифровано какое-то конкретное послание человечеству, больше не приходится. Кстати, учитывая фундаментально «кровную» связь числа пи с бытием Вселенной, не исключено, что значение числа пи с эволюцией самой Вселенной тоже может меняться. Например, еще в 1923 году ленинградский физик Александр Александрович Фридман исследовал уравнения пространственно-временной динамики Вселенной исходя из общей теории относительности Эйнштейна. Согласно модели, полученной А. А. Фридманом, число пи участвует в колебаниях вспышек и угасаний жизни самой Вселенной. В частности, Вселенная пульсирует, последовательно сжимаясь и расширяясь, в моменты времени $a\pi$, $2\,a\pi$, $3\,a\pi$... Временной коэффициент a здесь составляет период $a = 13 \cdot 10^9$ лет [6], что в 1929 году смог определить выдающийся американский астроном Эдвин Пауэлл Хаббл.

Надо сказать, что мирообразующее, вселенское значение числа пи интуитивно всегда ощущалось человечеством. Например, в «Тайной доктрине» Е. П. Блаватской [9] приведена четвертая станца из древней «Книги Дзиан», в которой говорится: «Из Лучезарности Света — Луча Вечной Тьмы — устремились в пространстве Энергии, вновь пробужденные; Единый из Яйца, Шесть и Пять. Затем Три, Один, Четыре, Один, Пять — Дважды Семь, Сумма Всего».

Эдвин Пауэлл Хаббл

Заметили? Здесь прямо назван ряд чисел: 3,1415 — первые пять цифр десятичного разложения числа пи! Причем эти цифры в станце еще и особым образом подчеркнуты: «Дважды Семь, Сумма Всего». Проверяем: «дважды семь» $2 \cdot 7 = 14$, а «сумма всего» (сумма цифр) действительно $14 = 3 + 1 + 4 + 1 + 5$. Читая станцу дальше, становится понятно, что числу пи в таком виде (3,1415) придавалось глубокое, сакральное значение, правда, не сразу понятно, что стоит за этими символами-образами: «И эти суть Естества, Пламена, Начала, Строители, Числа, Арупа, Рупа и Сила или же Божественный Человек — Сумма Всего. И от Божественного Человека произошли Формы, Искры, Священные Животные и Вестники Сокровенных Отцов, заключенных в Пресвятой Четверице». Обратим внимание, что Арупа на санскрите означает бесформенность, бестелесность, Рупа — форма, тело. Здесь, похоже, аналогия с фракталами сама напрашивается: бестелесные алгоритмы (арупа) и развертывание по ним конкретных форм (рупа). К слову, такие же пять цифр для значения числа пи отмечены профессором Григорием Давыдовичем Глейзером в древнейших текстах Библии, исследованием которых он занимается [6].

Впрочем, о священной четверице мы уже упоминали в связи с Пифагором и его учением. Напомним, что тетрада (четверица) у пифагорейцев священна так же, как триада (троица), а в клятве пифагорейцев говорится о Тетрактисе. Пифагорейцы представляли его в виде четырех групп из единиц: 1 + (1 + 1) + (1 + 1 +1) + (1 + 1 + 1 + 1) = 10 — и рассматривали эту последовательность как этапы проявления (развертывания) силы. Если упрощенно, то идея Тетрактиса состоит в том, что нейтральная единица генерирует разность потенциалов — диаду, которая проявляется вовне триадой, эволюционирующей в тетраду. А все это вместе порождает декаду — единицу на качественно новом уровне: первое двузначное число. У пифагорейцев Тетрактис считался инструментом реализационной власти Божественной природы, что отражено в их клятве: «...Клянусь именем Тетрактис, ниспосланным нашим душам. В нем источник и корни вечно цветущей Природы...»

Безусловно, фундаментальная константа пи таит в себе еще много загадок. Например, как мы говорили, нерешенным остается вопрос о том, является ли это число математически нормальным, какие из цифр от 0 до 9 встречаются в его десятичном представлении бесконечно много раз, а также являются ли числа пи и e алгебраически независимыми. Упрощенно это означает, что пока неизвестно, верно ли, что для любого многочлена $P_n(x)$ с рациональными коэффициентами значения его аргументов $x = \pi$ и $x = e$ не будут его корнями, то есть $P_n(\pi) \neq 0$ и $P_n(e) \neq 0$. Дело в том, что из алгебраической независимости чисел вытекает свойство их трансцендентности, то есть если несколько чисел алгебраически независимы, то каждое из них трансцендентно. Пока доказательство алгебраической независимости чисел сопряжено с трудностями, но аналитические методы, которыми располагает теория чисел, продолжают разрабатываться.

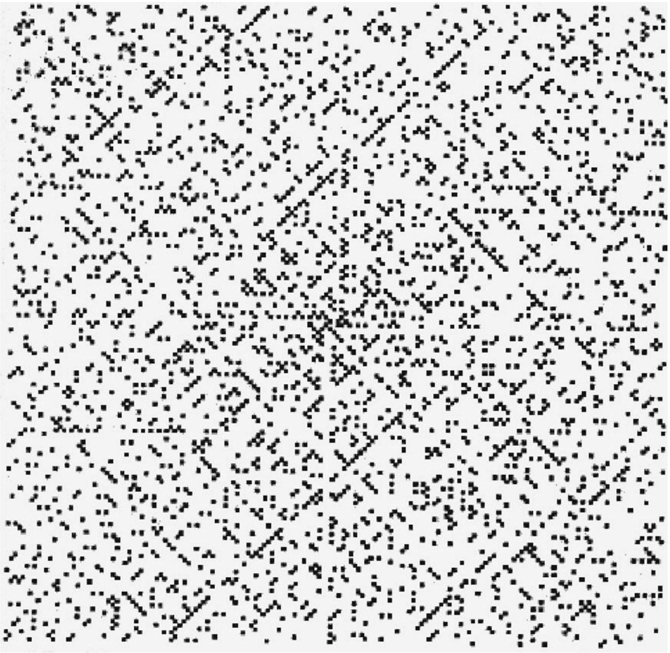
Кроме того, пока нет ответа на вопрос, к каким числам — рациональным или иррациональным, алгебраическим или трансцендентным — относятся числа, которые выражены следующими зависимостями:

$$\pi + e,\ \pi - e,\ \pi \cdot e,\ \pi/e,\ \pi^e,\ \pi^{\sqrt{2}},\ \ln\pi,\ \pi^\pi,\ e^{\pi^2}.$$

Разумеется, числа являются фундаментом математики и техники, а также опорой естествознания. В конце концов, от корректно выявленной принадлежности числа к определенному типу числового множества зависит истинность научного и практического результата. Натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа — классические числовые множества. В истории математики смысл знаменитого выражения «Бог создал натуральные числа, все остальное — создание человека», принадлежащего немецкому математику XIX–XX веков Леопольду Кронекеру, подтверждается тем, что расширение понятия числа происходило благодаря развитию логических усилий человеческого разума. А усилий требовалось немало! И не только для расширения понятия числа, но и для того, чтобы доказать истинность очередного расширения. Так было, например, с введением нуля, с обоснованием отрицательных и иррациональных чисел и, наконец, с осмыслением мнимых величин. Иными словами, соответствие между действительными числами и числовой прямой, так же как между комплексными числами и декартовой системой координат, не всегда было очевидным. Для множества комплексных чисел, которое стало расширением класса действительных чисел, перспектива войти в более широкий числовой класс тоже существует. Вполне возможно, что появление нового класса чисел может пролить свет и на природу числа пи. Например, безграничное человеческое воображение допускает даже догадки о разумной природе чисел, в чем, кстати, не сомневались в свое время пифагорейцы. Мы уже приводили слова доктора Чарльза Кантора, руководителя проекта по расшифровке генома человека, ставшие почти крылатыми: «Число пи — повсюду, оно контролирует все известные нам процессы, оставаясь при этом неизменным! Кто же контролирует само число пи?» В принципе, если будет доказано, что последовательность десятичных знаков числа пи подчиняется теории хаоса, то в определенном смысле можно говорить и о разумной природе числа пи точно в той же мере, в какой уже известно о разумности структуры самого хаоса.

Любопытно, что в 1965 году американский математик С. Улам изобрел «спиральную» таблицу чисел натурального ряда (скатерть Улама), на которой отмечены клетки, соответствующие простым числам. Произошло это совершенно случайно. Однажды, находясь на скучном заседании, Станислав Улам расчертил лист бумаги вертикальными и горизонтальными линиями для шахматных этюдов. Затем он отвлекся, а когда решил вернуться к этюдам, то понял, что в данных условиях стоит заняться более механическим делом, и принялся особым образом нумеровать клетки. В центр он поместил единицу, а затем стал двигаться по спирали, помещая в клетки натуральные числа и отмечая при этом простые. Улама удивило, что простые числа четко выстраиваются на плоскости вдоль диагональных прямых линий. Позже данный эксперимент был проведен на ЭВМ и загадочное расположение простых чисел подтвердилось. Получился рисунок для чисел от 1 до 65 000, который и был назван скатертью Улама.

Отметим, что участкам прямых линий на скатерти Улама соответствуют квадратные трехчлены, порождающие простые числа. Например, один из них — это трехчлен вида $x^2 + x + 17$. Есть еще один — трехчлен Эйлера: $x^2 + x + 41$, известный тем, что первые его 40 значений являются простыми числами. Более того, из 2398 первых значений, принимаемых этим трехчленом, ровно половина — тоже простые числа! Строгого математического объяснения данного факта пока нет. Закон распределения простых чисел, что называется, лежит перед глазами на скатерти Улама, но упорно не поддается формулировке! Точно так же, как и закон распределения цифр в десятичном представлении числа пи. Он давно и явно «напрашивается», но найти его пока никому не удалось. Однако для надежды на его существование есть все основания. Во-первых, число пи вычисляется по строго организованным математическим правилам. А во-вторых, при любом способе вычисления, на любом компьютере и в любое время одна и та же цифра в записи данного числа стоит строго на своем месте. Это убеждает нас в существовании закона для распределения десятичных знаков числа пи и означает, что новые выводы о смысле цифр в десятичных знаках данного числа еще впереди!



Скатерть Улама

История загадочного числа пи продолжается, но наше повествование о нем подходит к концу. Тем, кого это число заинтересовало и кто любит посвящать свой досуг занятиям математикой, рекомендуем, например, книгу [21], в которой содержится большое количество математических задач и геометрических построений, касающихся данного числа. Кроме того, неисчерпаемые возможности свиданий с числом пи дает компьютер. В Интернете можно найти любую необходимую информацию, а при желании — стать членом виртуальных пи-клубов и найти друзей.

Нам же остается лишь поблагодарить число пи за то, что оно, как преданный друг, всегда рядом!

Список использованных источников

1. Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика III–I тысячелетия до нашей эры. М.: ИВЛ, 1961.
2. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977.
3. Коваль С. От развлечения к знаниям. Математическая смесь / Пер. с польского. Wydawnictwa naukiwo-techiczne. Warszawa, 1975.
4. Таранов П. С. Анатомия мудрости:120 философов. Симферополь: Таврия, 1997.
5. Жуков А. В. О числе π. М.: МЦНМО, 2002.
6. Жуков А. В. Вездесущее число π. М.: Едиториал УРСС, 2004.
7. Pi news. Сайт центра информационных технологий университета Токио. http://www.lupi.ch/PiSites/Pi-Rekord.html.
8. Кымпан Ф. История числа π. М.: Наука, 1971.
9. Блаватская Е. П. Тайная доктрина. М.: КМП «Сирин», 1993.
10. Connor J. J., Robertson E. F. The number *e*. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html.
11. Кессиди Ф. Х. От мифа к логосу. М.: Мысль, 1972.
12. Волошин В. А. Пифагор. М.: Просвещение, 1993.
13. Всемирная энциклопедия: Философия. М.: АСТ; Минск: Харвест, Современный литератор, 2001.
14. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: Мысль, 1979.
15. Антисери Д., Реале Дж. Западная философия от истоков до наших дней. Античность. СПб.: ТОО ТК «Петрополис», 1994.
16. Ямвлих Халкидский. Жизнь Пифагора / Пер. Ю. А. Полуэктова. СПб., 1997.
17. Рожанский И. Д. Анаксагор. М.: Мысль, 1983.
18. Зелинский Ф. Ф. Из жизни идей. Т. 3. Соперники христианства. СПб., 1907.

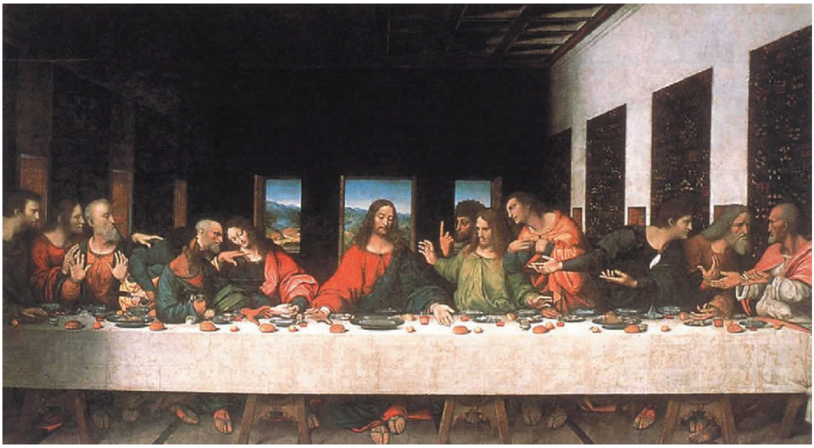
19. Рыбников К. А. История математики. М.: Изд-во МГУ, 1963.
20. Бутусов К. П. Золотое сечение в Солнечной системе // Проблемы исследования Вселенной. Ленинград: Наука, 1978. Вып. 7.
21. Бутусов К. П. Новая инварианта, единая для электромагнитных и гравитационных систем // ЖРФМ, 1995. № 1–6.
22. Хорошавин Л. Б., Щербатский В. Б. Гармоничные кварки в электронах и протонах // Объединенный научный журнал, 2008. № 10. С. 51–53.
23. Гарднер М. Крестики-нолики / Пер. с англ. И. Е. Зено. М.: Мир, 1988.
24. Самин Д. К. Сто великих научных открытий. М.: ВЕЧЕ, 2003.
25. Муратов С. В. Геометрия скрипки. The Art of the Violin Design. Bloomington, Indiana: 1stBook, 2002. http://zhurnal.lib.ru/m/muratow_s_w/publish.shtml.
26. Кен Уилбер. Краткая история всего / Пер. С. В. Зубкова. М.: АСТ, Астрель, 2006.
27. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Питер, 2006.
28. Аристотель. Метафизика / Пер. П. Д. Первова и В. В. Розанова. Вып. 1. М., 2006. Кн. 1–5.
29. Петров Ю. П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника и информатика. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
30. Гнедич П. П. История искусств. Живопись. Скульптура. Архитектура. М.: Эксмо, 2002.
31. Стретерн П. Лейбниц за 90 минут / Пер. П. Зиновьева. М.: Астрель, АСТ, 2005.
32. Брянский Л. Н. Странные единицы СИ // Контрольно-измерительные приборы и системы, 2010. № 4.
33. Болл У., Кокстер Г. Математические эссе и развлечения / Пер. Н. И. Плужниковой и др. М.: Мир, 1986.
34. Савин А. П. Число Фидия — золотое сечение // Калейдоскоп «Кванта», 1997. № 6.
35. Юшкевич А. П. История математики. Т. 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972.

36. Переверзев Н. К. Проблемы музыкального интонирования. М., 1966.
37. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987.
38. Дербишир Дж. Простая одержимость. Берхард Риман и великая нерешенная проблема в математике. М.: Астрель, 2010.
39. Рудио Ф. О квадратуре круга / Пер. под ред. С. Н. Берштейна. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1936.
40. Витрувий. Десять книг об архитектуре. Репринтное издание 1936 года. Архитектура-С, 2006.
41. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984.
42. Панкин А. Fibonacci: занимательная математика в галерее «Крокин». http://www.homepage.ru/events/205640-aleksandr-pankin-fibonacci-zanimatelnaya-matematika-v-galeree-krokin.
43. Андрей Чернов. Хроники изнаночного времени. СПб., 2006. http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_2.htm.
44. Геннадий Евгеньевич Сметанин. Проза.ру. http://www.proza.ru/ 2009/10/16/1189.
45. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1983.
46. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М., 1993.
47. Тирский Г. А. Анализ размерностей // Соросовский образовательный журнал, 2001. № 6.
48. Пифагор. Золотой канон. Фигуры эзотерики. М.: Эксмо, 2003.

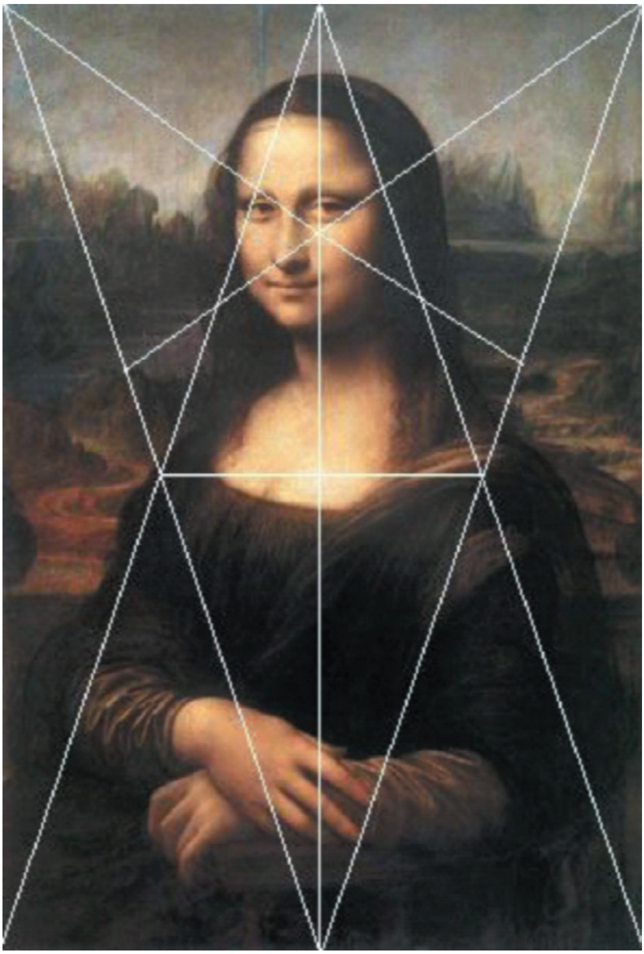
Лука Пачоли

Лука Пачоли

Пьеро делла Франческа.
Портрет герцога Федериго Монтефельтро
и герцогини Баттисты Сфорца.
Галерея Уффици, Флоренция



Тайная вечеря (неизвестный автор XVII века).
Копия фрески Леонардо да Винчи



Мона Лиза.
Золотые треугольники в композиционном построении
картины Леонардо да Винчи

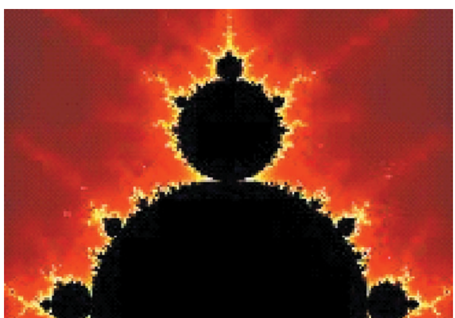
Альбрехт Дюрер

Альбрехт Дюрер. Праздник четок.
Национальная галерея, Прага

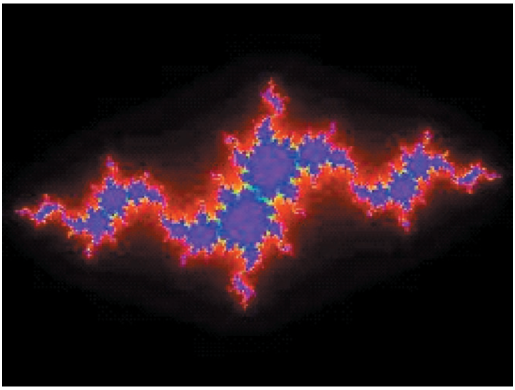
Одна из работ А. Ф. Панкина, представленных
на выставке «Число как искусство»

Казимир Малевич.
Скачет красная конница

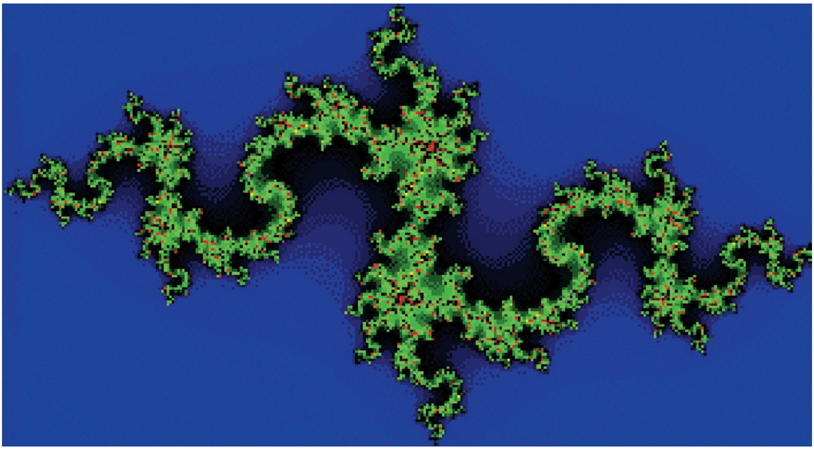
Фрактал Барнсли



Фрактальное множество Мандельброта

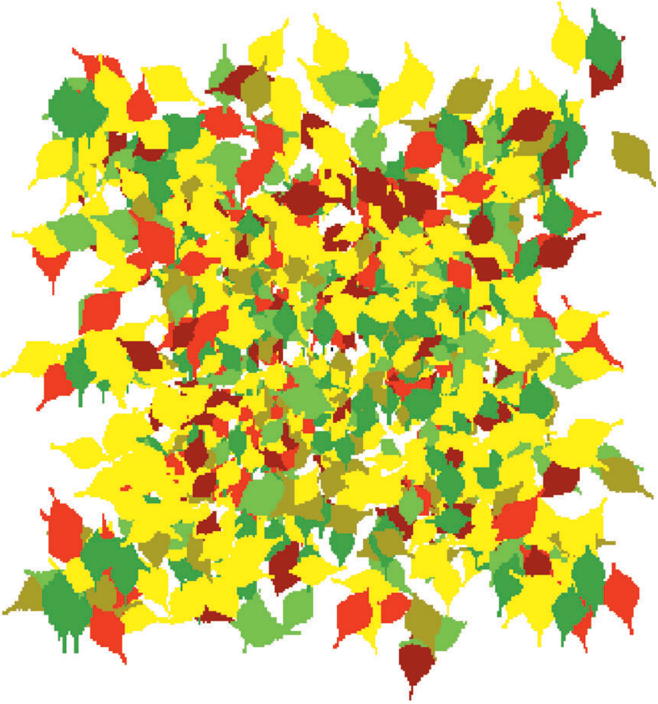


Фрактальное множество Жюлиа



Кривая дракона во всей красе

Пример стохастического фрактала



Стохастический фрактал «опавшие листья»

Научно-популярное издание

ТАЙНЫ МИРОЗДАНИЯ

Шумихин Сергей Александрович
Шумихина Александра Яковлевна

ЧИСЛО ПИ
История длиною в 4000 лет

Ответственный редактор *В. Обручев*
Художественный редактор *А. Дурасов*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 09.09.2011. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-51331-4

9 785699 513314 >

Число π с незапамятных времен привлекало людей своими свойствами. Много веков оно было камнем преткновения при решении задачи о квадратуре круга. Непросто назвать другую такую задачу, поиски решения которой были бы связаны почти со всеми существующими математическими теориями и дисциплинами. Зато легко предположить, что дальнейшая эволюция математики уж точно не обойдется без этого числа.

Издание рассказывает об истории числа π, о математических задачах и связанных с ним проблемах мировоззрений. И, конечно, о людях, которые посвящали свою жизнь исследованию этого числа — настоящих подвижниках научной мысли и духа. Вы сможете проследить связь числа π с другими фундаментальными константами и его роль в развитии техники, математики и других наук, оценить значение числа для философии, культуры и искусства.

И хотя изучение числа π человеком длится не меньше четырех тысяч лет, оно продолжает открывать перед нами новые грани мира.

ISBN 978-5-699-51331-4
9 785699 513314 >

эксмо