

**В. А. ОХОРЗИН,
К. В. САФОНОВ**

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

*РЕКОМЕНДОВАНО
ФГБОУ ВПО «Государственный университет управления»
в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по
специальности «Прикладная математика» и направлению
«Прикладная математика»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2014

ББК 22.18я73

О 92

Охорзин В. А., Сафонов К. В.

О 92 Теория управления: Учебник. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 224 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1592-2

В учебнике рассматриваются модели и методы автоматического и оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями на основе передаточных функций, частотных методов, методов вариационного исчисления, принципа максимума, динамического программирования и метода моментов. Теория сопровождается многочисленными примерами и программами в системе MathCAD. Алгоритмы управления иллюстрированы примерами задач управления орбитами геостационарных спутников.

Предназначен студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная математика», а также всем, кто интересуется применением методов классического и оптимального управления.

ББК 22.18я73

Рецензенты:

Е. Я. РУБИНОВИЧ — доктор технических наук, профессор, зам. директора по научной работе Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН;

Н. Д. ДЕМИДЕНКО — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник СКТБ «Наука» СО РАН.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

*Охраняется Законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2014

© В. А. Охорзин, К. В. Сафонов, 2014

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий учебник можно рассматривать как введение в методы автоматического и оптимального управления техническими и иными системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Авторы ставят цель — дать сведения об основных математических моделях, применяемых для описания управляемых динамических процессов, об алгоритмах их оптимального управления и практических навыках решения таких задач. Программы системы MathCAD, встроенные в виде вставок в текст, позволяют студентам выполнять расчеты с помощью «живых формул» в электронном варианте пособия. Рассматриваемый материал соответствует курсу «Теория управления» для студентов всех форм обучения по направлению «Информатика и вычислительная техника», специальности «Прикладная математика», а также может быть полезен студентам инженерных специальностей и специалистам, интересующимся подобными задачами.

При принятии решений в сложных технических, экономических, социальных системах лицо, принимающее решение (ЛПР), должно учитывать множество разнообразных факторов и уметь оценивать последствия их изменения. Важно, чтобы эти изменения не только приводили к лучшему результату, но и давали максимально полезный эффект. Достижению такого эффекта в технических и экономических системах и посвящен данный раздел.

Целью оптимизации является выбор среди некоторого множества допустимых решений, которые можно было бы в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом *допустимость* каждого решения понимается как возможность его фактического осуществления, а *оптимальность* — как его целесообразность. Следует подчеркнуть, что оптимальное решение показывает предельные возможности системы и служит советом для ЛПР, а решение, которое оно принимает, может быть и другим, с учетом факторов иного рода, например политических, влияющих на принятие решения.

Указанная проблема решается с помощью синтеза многих научных направлений, таких как системный анализ и исследование операций, моделирование экономических и технических систем, численные методы и методы оптимизации функций, теория автоматического регулирования, теория оптимального управления и других направлений.

В инженерной деятельности часто возникает необходимость управлять разнообразными технологическими, организационными, социальными и другими процессами (рис. 1).

В этой схеме состояние объекта управления характеризуется вектором состояния $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ и находится под воздействием управляемых переменных — вектора управления $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ и возмущения (в общем случае вектора) $f(t)$.

Теория управления — наука о принципах и методах управления различными системами, процессами и объектами. Суть теории управления: на основе системного анализа составляется математическая модель объекта управления (ОУ), после чего синтезируется алгоритм управления, реализуемый в управляющем устройстве (УУ) и (или) компенсирующем устройстве (КУ) для получения желаемых характеристик протекания процесса для целей управления.

Методы управления базируются на трех фундаментальных принципах: принцип разомкнутого (программного) управления, принцип компенсации, принцип обратной связи.

Суть *программного (разомкнутого) управления* состоит в нахождении управления $u(t)$ как функции времени. В этом случае работа управляющего устройства не зависит от состояния системы $x(t)$.

Управление по принципу компенсации сводится к измерению возмущающего воздействия $f(t)$ и воздействию на объект управления $u(t)$, по возможности компенсирующего, это возмущение.

Управление по принципу обратной связи является наиболее распространенным и заключается в воздействии управления как функции состояния $u(x)$.

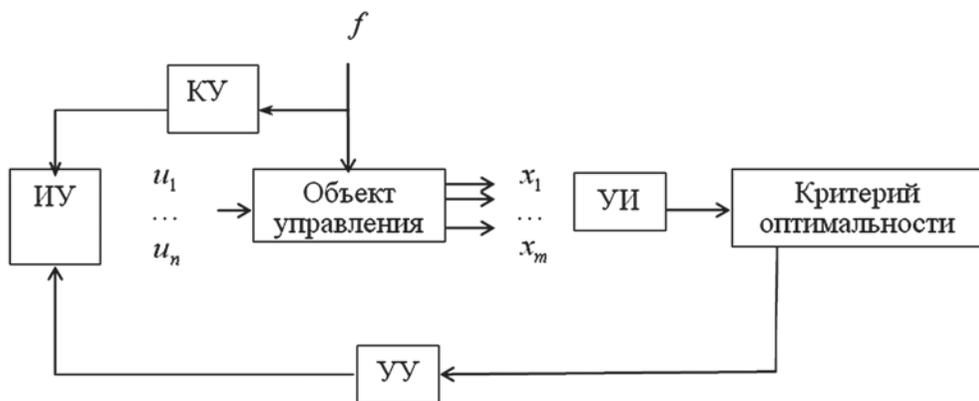


Рис. 1

Схема процесса управления:

ИУ — исполнительное устройство; УИ — устройство измерений; УУ — управляющее устройство; КУ — компенсирующее устройство.

Современные методы решения инженерных задач предполагают численные эксперименты с математической моделью исследуемого процесса. Задача математического моделирования — установление связи между входными и выходными переменными в виде математических соотношений и реализация этих моделей на ЭВМ. Модели, рассматриваемые в учебнике, можно разбить на следующие типы:

- статические;
- динамические.

Статические модели могут быть заданы функцией $F(x, u) = 0$ в неявном виде или функцией $x = f(u)$ в явном виде. Такие модели осуществляют преобразование числа (чисел) — значений входных переменных u в число — значение выходной переменной x .

Линейные статические модели описываются решением системы линейных алгебраических уравнений $Ax = u$ и имеют точное решение $x = A^{-1}u$, $\det A \neq 0$.

Для нелинейных моделей в неявном виде их реализации на ЭВМ требуются, как правило, численные методы решения систем алгебраических уравнений. Но часто априорных знаний оказывается недостаточно для построения модели, поэтому в главе 1 будут рассмотрены методы построения модели по данным эксперимента и на этой основе идентифицированы динамические системы (глава 6).

Динамические модели реализуют преобразование функции в функцию. Обычно рассматриваются функции времени

$$L(x(t), u(t)) = 0 \text{ или } \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)).$$

В этих уравнениях традиционно через $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ обозначают выходные переменные (переменные состояния), через $u_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ — входные переменные. Обычно модель динамической системы задается в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $f(x, u, t)$ — вектор-функция правых частей уравнения.

Система дифференциальных уравнений должна быть дополнена m условиями для единственности решения. Обычно это начальные условия, задаваемые в виде

$$x(0) = x^0. \quad (2)$$

Если время t явно входит в функцию $f(x, u, t)$, то система не автономная; если явно не входит, т. е. $f = f(x, u)$, то это нелинейная автономная система; если функция линейная по переменным x и u , то тогда получаем линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (3)$$

Для непрерывно функционирующих систем управления, какими обычно являются системы автоматического регулирования, можно пренебречь влиянием начальных условий (2) и для бесконечного времени работы линейной системы (3) можно применить операторные методы в виде преобразования Лапласа

и Фурье (глава 2). На этой же основе можно рассматривать и дискретные системы (глава 3). Операторные методы позволяют при таких условиях свести решение дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений.

Системы линейных дифференциальных уравнений имеют точное решение в виде формулы Коши (глава 5), а для реализации нелинейных динамических моделей или линейных систем высокого порядка на ЭВМ потребуются численные методы интегрирования дифференциальных уравнений (глава 5).

Использование динамической модели для оптимизации процессов требует многократного интегрирования дифференциальных уравнений, что связано со значительными затратами машинного времени. Линейные дифференциальные уравнения допускают общее аналитическое решение. Поэтому часто для экономии вычислительных затрат используют линейное приближение уравнений в окрестности рабочего режима. Процедуры линеаризации, решения линейных дифференциальных уравнений и идентификации параметров в динамических моделях нашли свое отражение в главах 5 и 6.

Если известна статическая модель некоторого процесса в виде функции $f(x, u) = 0$ и критерий оптимальности $F(x, f(x, u)) \rightarrow \min_{u \in U}(\max)$, то для оптимального ведения процесса нужно найти неизвестный вектор u , что решается при помощи методов оптимизации функций. В задачах оптимального управления рассматриваются динамические модели, критерием оптимальности в которых является не функция, а функционал, и нужно определить неизвестную функцию $u(t)$, доставляющую минимум интегралу J при условии, что управление $u(t)$ выбирается из множества допустимых управлений U .

$$J = \int_0^T F(x(t)u(t))dt \rightarrow \min_{u(t) \in U} \quad (4)$$

при связи $x(t)$ и $u(t)$ в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Эту задачу с некоторым приближением можно свести к задаче параметрической оптимизации. Для этого введем дискретное время, разбив отрезок $[0, T]$ N точками с шагом Δt :

$$t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots$$

Заменим непрерывную функцию $u(t)$ кусочно-постоянной функцией $u(t_k)$. Тогда интеграл (4) мы приближенно можем заменить суммой

$$\int \approx \sum_{k=0}^{k=N-1} F(x(t_k), u(t_k))\Delta t = J(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (6)$$

Используя необходимые условия минимума $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$ или подходящий чис-

ленный метод поиска минимума функции (6), можно приближенно найти оптимальное управление. Однако такой подход годится лишь для малого числа разбиений N (порядка 10...20). Более точное решение задачи сталкивается с непре-

одолимыми трудностями ввиду «проклятия размерности» в оптимизационных задачах, в которых сложность вычислений растет по меньшей мере как куб размерности задачи (N^3). Применение метода динамического программирования позволяет уменьшить число вычислений функции, однако потребует значительно большего объема памяти компьютера (глава 11).

Но в некоторых случаях такой подход вполне оправдан. Если известна структура управления с точностью до параметров, то проще решить задачу определения этих параметров, чем искать функцию управления. Так, если известно, что управление должно носить релейный характер и число переключений функции управления с одного уровня на другой невелико, то тогда в качестве неизвестных параметров целесообразно рассматривать время переключений и решать задачу минимизации функции по этим параметрам.

Задача параметрической оптимизации возникает и в случае управления с обратной связью при помощи регуляторов с заданным законом регулирования и с точностью до параметров регулятора, связывающего управление $u(t)$ с выходом системы $x(t)$ (глава 4).

Возникает вопрос о том, нельзя ли найти аналогичные необходимые условия оптимальности для непрерывной функции $u(t)$ и на этой основе разработать соответствующие численные методы (глава 9). Ответ на этот вопрос дает теория оптимального управления.

Для постановки задачи оптимального управления необходимо иметь следующие составляющие (глава 7):

- уравнения движения, которые обычно задаются обыкновенными дифференциальными уравнениями и представляют собой математическую модель объекта управления;
- ограничения на управляющие функции, отражающие практическую реализуемость управления;
- критерий оптимальности — числовая оценка качества достижения цели системой управления.

Если первые две составляющие задачи носят объективный характер и, как правило, не могут быть произвольно изменены, то критерий оптимальности находится в распоряжении проектировщика системы управления, который часто пытается удовлетворить противоречивым требованиям к качеству системы управления, и вынужден решать задачу управления с различными критериями оптимальности (главы 10, 12). Теоретические положения и алгоритмы управления применены к задачам управления геостационарными спутниками (главы 5–12).

Для многих сложных и мало изученных процессов невозможно получить математическую модель, исходя только из априорных знаний. В этих условиях недостаток знаний можно компенсировать наблюдениями за функционированием процесса. Данная информация может быть использована как для определения неизвестных параметров системы при известной структуре модели (тогда говорят о модели как о «сером ящике»), так и о попытке построить модель, не обладая даже знаниями о ее структуре («черный ящик»). Необходимые условия проведения эксперимента для этого задаются условиями идентифицируемости.

Как уже отмечалось, статические модели описываются функцией

$$y = f(x), \quad x \in R^n, \quad y \in R^1.$$

Линейные модели описываются линейной функцией. Для линейных моделей справедлив принцип суперпозиции: реакция суммы воздействий есть сумма реакций на каждое воздействие:

$$y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2).$$

Единственная функция, удовлетворяющая этому условию:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

Нелинейные модели определяются нелинейной функцией

$$y = f(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m),$$

где через вектор c обозначены некоторые неизвестные или не точно известные константы. Если модель линейна по этим параметрам, то

$$y = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — система линейно независимых функций.

1.1. ОШИБКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Пусть точное значение выходной переменной y^* , предсказанной по модели $y = f(x)$, равно y . Ошибка моделирования определяется нормой $\|y^* - y\|$, в качестве которой для вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ наиболее часто используют следующие величины:

$$\|a\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad (1.1)$$

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum a_i^2}. \quad (1.2)$$

Относительная ошибка определяется отношением (обычно точное значение y^* неизвестно)

$$\rho = \frac{\|y^* - y\|}{\|y^*\|} \approx \frac{\|y^* - y\|}{\|y\|}. \quad (1.3)$$

Можно выделить три источника ошибок моделирования. Первый источник — погрешность моделирования ρ_1 , связанная с неточностью самой математической модели. Второй — погрешность численного решения ρ_2 уравнений модели, связанных с применением численных методов, например метода сеток для решения дифференциальных уравнений. И, наконец, любая реализация численных методов на ЭВМ связана с третьим источником ошибок — ошибками округления ρ_3 . Общая ошибка моделирования будет удовлетворять неравенству

$$\rho \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \quad (1.4)$$

Если мы находимся в рамках одной математической модели, то влиять на первый источник ошибок нет возможности, поэтому такую ошибку часто считают неустранимой. На остальные два источника ошибок можно повлиять выбором метода решения и разрядностью представления чисел в ЭВМ. Обычно считают выбор приемлемым, если ρ_2 на порядок меньше ρ_1 , а ρ_3 на порядок меньше ρ_2 .

1.2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

При большом числе измерений и наличии помех задача интерполяции становится лишенной практического смысла, так как число параметров в интерполяционной функции равно числу измерений, а присутствие ошибок измерений может привести к разным значениям функции при одном и том же значении аргумента функции. Далее будем предполагать известной математическую модель с точностью до констант c :

$$y = f(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m). \quad (1.5)$$

Пусть имеются данные эксперимента для входных переменных

$$x_k^i, k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N,$$

где n — размерность вектора x ; N — число экспериментов и соответствующие значения входных переменных x^i и выходной переменной y^i в эксперименте i . Подставляя эти числовые данные в уравнение для модели, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^1 = f(x_1^1, \dots, x_n^1, c_1, \dots, c_m), \\ y^2 = f(x_1^2, \dots, x_n^2, c_1, \dots, c_m), \\ \dots\dots\dots, \\ y^N = f(x_1^N, \dots, x_n^N, c_1, \dots, c_m). \end{cases} \quad (1.6)$$

При $m = N$ имеем замкнутую систему уравнений для определения параметров c в задаче интерполяции и модель будет проходить точно через экспериментальные точки. Однако для проверки соответствия модели реальности никакой информации не будет. Если $m < N$, то число условий избыточно и выбор m параметров вектора c удовлетворить всем N условиям (1.5) не может. Функцию невязки (меру уклонения) между экспериментальными данными и предсказанными по модели (1.5) можно представить в виде нормы

$$Q(c) = \|y - f(x, c_1, \dots, c_m)\|.$$

Наиболее часто используют квадратичную норму

$$Q^2(c) = \sum_{i=1}^N (y^i - f(x^i, c_1, \dots, c_m))^2, \quad (1.7)$$

и минимизация этой ошибки приводит к процедуре решения уравнения (1.6) методом наименьших квадратов. В общем случае минимизация Q может быть осуществлена лишь численно. Ниже приведена программа MathCAD, решающая эту задачу (док. 1.1).

Для достаточно широкого класса задач минимизацию функции невязки можно осуществить аналитически. Такой класс составляют функции, линейные по параметрам c :

$$y(x) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x). \quad (1.8)$$

Для такой модели функция невязки имеет следующий вид:

$$Q(c) = \sum_{i=1}^N (y^i - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x^i))^2. \quad (1.9)$$

Необходимые условия минимума этой функции

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

приводят к определению параметров c с помощью решения системы уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^N (y^i - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x^i)) \varphi_j(x^i) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.10)$$

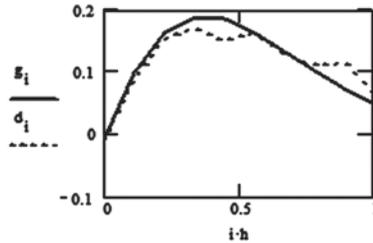
Аппроксимация и интерполяция в задаче с помехами

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 10$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{-(b \cdot x)^{\frac{3}{2}}}$ $h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ $i := 0..n - 1$ $D := 0.02$

$x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$ $d := g + \text{mom}(n, 0, D)$

искажение ошибками измерений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D



исходная и возмущенная кривые

$j := 0..n - 1$ $a_{i,j} := (x_i)^j$ $c := a^{-1} \cdot d$ $f_1(x) := \sum_i c_i \cdot x^i$ интерполяционный полином

$h_1 := \frac{h}{10}$ $i_1 := 0..(n - 1) \cdot 10$ $Q(a, b) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[d_i - \sin(a \cdot x_i) \cdot e^{-(b \cdot x_i)^{\frac{3}{2}}} \right]^2$ функция невязки

$a_1 := 1$ $b_1 := 2$

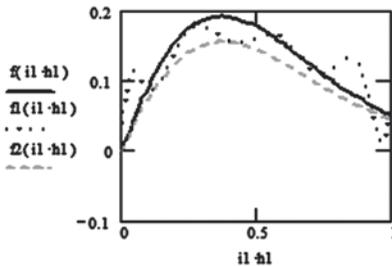
Given

$Q(a_1, b_1) = 0$ $a_1 = a_1$

минимизация невязки

$p := \text{MinErr}(a_1, b_1)$ $a_1 := p_0$ $a_2 := p_1$ $f_2(x) := \sin(a_1 \cdot x) \cdot e^{-(a_2 \cdot x)^{\frac{3}{2}}}$

$p = \begin{bmatrix} 0.798 \\ 1.767 \end{bmatrix}$ новые значения коэффициентов



f- исходная кривая
f1- интерполирующая кривая
f2- аппроксимирующая кривая

Док. 1.1

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x^i) \varphi_j(x^i) = \sum_{i=1}^N y^i \varphi_j(x^i).$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^N y^i \varphi_j(x^i), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.11)$$

$$\varphi_{kj} = \sum_{i=1}^N \varphi_k(x^i) \varphi_j(x^i), \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.12)$$

Тогда можно записать систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^m c_k \varphi_{kj} = \omega_j, \quad j = \overline{1, m},$$

или в векторном виде:

$$\Phi c = \Omega, \quad (1.13)$$

где $\Phi = \{\varphi_{kj}\}$ — информационная матрица размером $m \times m$; $\Omega = \{\omega_j\}$ — вектор правых частей размерности m . Из (1.12) видно, что матрица Φ является *симметрической* ($\Phi^T = \Phi$) и зависит только от значений входных переменных x^i .

Решение системы

$$c = \Phi^{-1} \Omega \quad (1.14)$$

дает искомые значения параметров модели.

Для случая линейной модели, зависящей от n переменных, имеем:

$$y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=0}^n c_j x_j, \quad x_0 = 1, \quad (1.15)$$

$$\varphi_j = x_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\varphi_{00} = \sum_{i=1}^N 1 \cdot 1 = N,$$

$$\varphi_{01} = \sum_{i=1}^N 1 \cdot x_1^i = N \frac{\sum x_1^i}{N} = N \bar{x}_1,$$

где через \bar{x}_1 обозначено среднее значение x_1 по всем экспериментам. Продолжая вычисление элементов матрицы Φ подобным образом, для диагональных элементов матрицы получим формулу

$$\varphi_{jj} = \sum_{i=1}^N x_j^2 = N \frac{\sum x_n^2}{N} = N \overline{x_j^2},$$

а для произвольных элементов —

$$\varphi_{jk} = \sum_{i=1}^N x_j x_k = N \overline{x_j x_k}, \quad (1.16)$$

где через \bar{x} обозначено среднее значение величины x .

Тогда для линейной модели структура матрицы Φ будет следующая:

$$\Phi = N \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{x_1} & \dots & \overline{x_n} \\ \overline{x_1} & \overline{x_1^2} & \dots & \overline{x_1 x_n} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{x_n} & \overline{x_1 x_n} & \dots & \overline{x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Элементы вектора Ω :

$$\omega_0 = \sum_i \overline{1} \cdot y^i = N \overline{y}, \quad \omega_j = \sum_i \overline{x_j^i} \cdot y^i = N \overline{x_j y}$$

и сам вектор

$$\Omega = N \cdot \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{x_1 y} \\ \dots \\ \overline{x_n y} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

В частном случае для модели $y = c_1 + c_2 x$ нужно провести прямую, наименьшим образом уклоняющуюся от точек с координатами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. В этом случае

$$\Phi = N \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{bmatrix}, \quad \Omega = N \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{bmatrix},$$

и нужно решить систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \begin{bmatrix} \overline{x^2} & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

$$c = \frac{1}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \begin{bmatrix} \overline{x^2} & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

В случае аппроксимации исходных данных полиномом

$$y = \sum_{i=0}^m c_i x^i \quad (1.21)$$

имеем следующую структуру матрицы Φ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} N & \sum_i x^i & \dots & \sum_i (x^i)^m \\ \sum_i x^i & \sum_i (x^i)^2 & \dots & \sum_i (x^i)^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i (x^i)^m & \sum_i (x^i)^{m+1} & \dots & \sum_i (x^i)^{2m} \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \sum_i y^i \\ \sum_i x^i y^i \\ \dots \\ \sum_i (x^i)^m y^i \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Программа MathCAD, решающая задачу аппроксимации методом наименьших квадратов, для этого случая приведена ниже (док. 1.2).

Аппроксимация полиномиальной функцией

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 10$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{-(b \cdot x)^{\frac{3}{2}}}$ исходная функция

$h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ $i := 0..n - 1$ $x_i := x_0 + i \cdot h$ $f_i := f(x_i)$

$m := 3$ порядок аппроксимирующего полинома

$p := 0..m$ $q := 0..m$

$\phi_{p,q} := \sum_i (x_i)^p \cdot (x_i)^q$ $b_p := \sum_i (x_i)^p \cdot f(x_i)$ формирование матрицы и вектора системы линейных уравнений

$d := \phi^{-1} \cdot b$ $d^T = [-4.355 \cdot 10^{-4} \quad 1.138 \quad -2.037 \quad 0.952]$ коэффициенты аппроксимирующего полинома

$f_2(x) := \sum_p d_p \cdot x^p$ аппроксимирующий полином

сравнение исходной и аппроксимирующей кривой $f(x_i)$ и $f_2(x_i)$

$h_1 := \frac{h}{10}$ $i_1 := 0..(n - 1) \cdot 10$

ошибка аппроксимации

Рассмотрим простой пример аппроксимации многомерной (двумерной) функции. Пусть в результате экспериментов получена следующая таблица данных, и мы хотим получить модель в виде функции $y(x_1, x_2) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 \sqrt{x_2}$.

Номер эксперимента i	Значения x_1^i	Значения x_2^i	Значения y^i	Значения по модели	Ошибка аппроксимации
1	0	0	0,5	0,391	0,109
2	0	1	1,2	1,318	-0,118
3	1	0	1,6	1,527	0,073
4	1	1	2,4	2,455	-0,055
5	2	1	3,4	3,591	-0,191
6	2	4	4,7	4,518	0,182

В соответствии с (1.9) $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x_1$, $\varphi_3(x) = \sqrt{x_2}$. По формуле (1.12) имеем:

$$\varphi_{11} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_1(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot 1 = 6,$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_2(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot x_1^i = 6,$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{31} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot x_2^i = 5, \quad \varphi_{22} = \sum_{i=1}^6 \varphi_2(x^i) \varphi_2(x^i) = \sum_{i=1}^6 (x_1^i)^2 = 10,$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{32} = \sum_{i=1}^6 \varphi_2(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 x_1^i \sqrt{x_2^i} = 7,$$

$$\varphi_{33} = \sum_{i=1}^6 \varphi_3(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 x_2^i = 7.$$

Теперь матрица Φ имеет следующий вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Вектор правых частей определим из (1.11):

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^6 y^i = 13,8, \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^6 y^i x_1^i = 20,2,$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^6 y^i \sqrt{x_2^i} = 16,4, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 13,8 \\ 20,2 \\ 16,4 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм обработки данных для определения параметров модели приведен в следующем документе (док. 1.3).

Определение модели, линейной по параметрам

вектора наблюдений, $x^{<0>}$ -фиктивный вектор вектор-функция размерность модели

$$x^{<0>} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{<1>} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^{<2>} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 2.4 \\ 3.4 \\ 4.7 \end{bmatrix} \quad \phi(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

$$m := \text{last}[\phi \left[\begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}^{<0>} \right]] \quad N := \text{last}(y) \quad k := 0..m \quad j := 0..m \quad i := 0..N$$

$$a_{i,j} := \langle x^{<j>} \rangle_i \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{преобразование входных векторов в матрицу}$$

$$\phi 1(x) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..m \\ \text{for } j \in 0..N \\ b^{<j>} \leftarrow \phi \left[\begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}^{<j>} \right] \\ b \end{cases} \quad b := \phi 1(a)^T \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{преобразование в} \\ \text{соответствии с} \\ \text{функциями модели} \\ \text{коэффициенты модели} \end{array}$$

$$\hat{\phi}_{k,j} := b^{<k>} \cdot b^{<j>} \quad \hat{\phi} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \Omega_k := y \cdot b^{<k>} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 13.8 \\ 20.2 \\ 16.4 \end{bmatrix} \quad c := \hat{\phi}^{-1} \cdot \Omega \quad c = \begin{bmatrix} 0.391 \\ 1.136 \\ 0.927 \end{bmatrix}$$

$$y_{m_i} := c \cdot \phi \left[\begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}^{<i>} \right] \quad \text{модель} \quad y_{m_i} = \begin{bmatrix} 0.391 \\ 1.318 \\ 1.527 \\ 2.455 \\ 3.591 \\ 4.518 \end{bmatrix} \quad \Delta y := y - y_m \quad \Delta y = \begin{bmatrix} 0.109 \\ -0.118 \\ 0.073 \\ -0.055 \\ -0.191 \\ 0.182 \end{bmatrix} \quad \text{ошибки моделирования}$$

Док. 1.3

В некоторых случаях удастся нелинейную по параметрам модель преобразовать в линейную. Такова, например, производственная функция Кобба — Дугласа:

$$Y(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad (1.23)$$

где Y — объем произведенной продукции; K — капитальные затраты на производство; L — затраты на труд; a_0, a_1, a_2 — параметры функции, подлежащие определению по данным функционирования производства. Эта нелинейная функция

Определение параметров модели Кобба-Дугласа

$$Y(K, L) := a_0 \cdot K^{a_1} \cdot L^{a_2} \quad (\ln(Y(K, L))) \text{ expand} \rightarrow \ln(a_0) + a_1 \cdot \ln(K) + a_2 \cdot \ln(L)$$

вектора наблюдений, $x^{<0>}$ -фиктивный вектор

$$x^{<0>} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{<1>} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x^{<2>} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1.1 \\ 1.5 \\ 1.8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

вектор-функция модели

$$\phi(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ \ln(x_1) \\ \ln(x_2) \end{bmatrix}$$

$m := \text{last} \left[\phi \left[(x^T)^{<0>} \right] \right]$ $N := \text{last}(y)$ $k := 0..m$ $j := 0..m$ $i := 0..N$ -размерность модели

преобразование входных векторов в матрицу

$$a_{i,j} := \langle x^{<j>} \rangle_i \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

преобразование в соответствии с функциями модели

$$b := \phi(a)^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.693 \\ 1 & 0.693 & 0 \\ 1 & 0.693 & 0.693 \\ 1 & 1.099 & 0.693 \\ 1 & 1.099 & 1.099 \\ 1 & 1.386 & 1.099 \end{bmatrix} \quad y := \ln(y)$$

коэффициенты модели

$$\phi_{k,j} := b^{<k>} \cdot b^{<j>} \quad \phi = \begin{bmatrix} 6 & 4.97 & 4.277 \\ 4.97 & 5.297 & 3.972 \\ 4.277 & 3.972 & 3.855 \end{bmatrix} \quad \Omega_k := y \cdot b^{<k>} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0.578 \\ 1.764 \\ 1.274 \end{bmatrix} \quad c := \phi^{-1} \cdot \Omega \quad c = \begin{bmatrix} -1.055 \\ 0.869 \\ 0.606 \end{bmatrix} \quad a := \begin{bmatrix} e^{c_0} \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 0.348 \\ 0.869 \\ 0.606 \end{bmatrix}$$

модель

$$ym_i := c \cdot \phi \left[(x^T)^{<i>} \right] \quad ym = \begin{bmatrix} -0.635 \\ -0.453 \\ -0.033 \\ 0.319 \\ 0.565 \\ 0.815 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -0.693 \\ -0.511 \\ 0.095 \\ 0.405 \\ 0.588 \\ 0.693 \end{bmatrix} \quad \Delta y := y - ym \quad \Delta y = \begin{bmatrix} -0.058 \\ -0.058 \\ 0.128 \\ 0.086 \\ 0.023 \\ -0.122 \end{bmatrix}$$

Док. 1.4

путем преобразования с помощью логарифмирования сводится к линейной по параметрам. После этого к ней можно применить описанную процедуру определения параметров так, как это представлено в следующем документе (док. 1.4).

1.3. АДЕКВАТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим вопрос о соответствии или несоответствии математической модели объективной реальности. Несоответствие может быть вызвано двумя причинами: либо сама функция $f(x)$ не соответствует реальности, либо случайные факторы исказили результаты экспериментов, вследствие чего коэффициенты в модели определены с ошибками, что сказывается на точности моделирования.

Пусть по данным N экспериментов определяется модель с m параметрами. Если $N = m$, то мы имеем задачу интерполяции, в которой модель точно проходит через экспериментальные точки, однако мы не имеем ни одного дополнительного измерения для того, чтобы оценить адекватность модели. Если $N > m$, то данные $N - m$ экспериментов (число степеней свободы) можно использовать для оценки адекватности модели при помощи остаточной дисперсии:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^N (y^i - f(x^i))^2}{N - m}. \quad (1.24)$$

Эта величина может быть признана неудовлетворительной, что приводит к необходимости увеличить число экспериментов (увеличив тем самым величину знаменателя) или уменьшить числитель, взяв другую функцию f и введя, например, поправочный член. Для того чтобы выбрать решение, необходимо оценить, чем вызвана неадекватность модели: неудачной функцией f или ошибками в измерениях. Рассмотрим случай, когда выходная величина y измеряется с ошибками. Пусть ошибки измерений e подчиняются нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $Me = 0$ (систематической ошибки нет) и дисперсией σ_y^2 . Тогда необходимо оценить гипотезу о том, что ошибки моделирования с дисперсией S и измерений σ_y^2 взяты из одной выборки, тогда различия между этими величинами несущественны. Этот вопрос может быть разрешен с помощью отношения Фишера

$$F = \frac{S}{\sigma_y^2}.$$

Если

$$F > F_T(p, n, m),$$

где p — уровень доверительной вероятности; n — число степеней свободы для большей дисперсии S ; m — число степеней свободы (обычно равное бесконечности) для σ_y^2 , то данная гипотеза должна быть отвергнута и ошибку моделирования можно уменьшить за счет изменения функции модели. В противном случае ошибка моделирования с вероятностью P может быть обусловлена ошибками измерений и никакого улучшения моделирования за счет функции f добиться не удастся. Тогда нужно улучшать условия эксперимента. Табличное значение критерия Фишера $F_T(p, n, m)$ можно найти в книгах по статистике.

В MathCAD значение критерия вычисляется с помощью встроенной функции `rF`. Щелкнув дважды по этому документу, вы получите доступ к программе MathCAD, позволяющей аппроксимировать набор данных с помощью полинома и определить степень адекватности по критерию Фишера (док. 1.5).

При $n = 4$ отношение Фишера $F = 4,09$ еще больше его табличного значения $F = 2,67$. В приведенном документе (док. 1.5) соотношение вычисленного значения $F = 2,62$ и табличного $F = 2,74$ позволяет сделать вывод о том, что остаточная дисперсия сравнима с шумом измерений и дальнейшее улучшение модели за счет изменения функции бессмысленно.

Проверка адекватности по критерию Фишера

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 15$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 10$ $b := 2$ $f(x) := 5 \cdot \sin(a \cdot x) \cdot e^{-(bx)^{\frac{3}{2}}}$

$h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$

$i := 0..n - 1$

$x_i := x_0 + i \cdot h$

$D := 0.08$

$g_i := f(x_i)$ $d1_i := g_i \cdot [1 + (\text{mom}(n, 0, D))_i]$

Аппроксимация

$m := 5$

порядок аппроксимирующего полинома

$p := 0..m$ $q := 0..m$

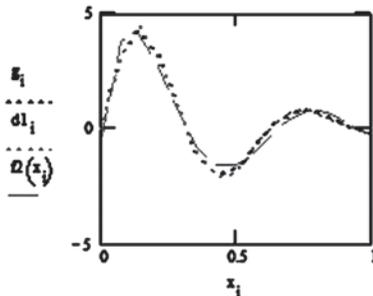
$\phi_{p,q} := \sum_i (x_i)^p \cdot (x_i)^q$

$b_p := \sum_i (x_i)^p \cdot d1_i$

коэффициенты аппроксимирующего полинома

$d := \phi^{-1} \cdot b$ $d^T = [-0.351 \quad 98.727 \quad -658.679 \quad 1.511 \cdot 10^3 \quad -1.444 \cdot 10^3 \quad 493.056]$ $\Omega(x) := \sum_P d_p \cdot x^p$

искажение ошибками измерений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D



исходная g_i , искаженная $d1_i$ и аппроксимирующая $\Omega(x_i)$ функции

остаточная дисперсия

критерий Фишера

$$S := \frac{\sum_i (d1_i - \Omega(x_i))^2}{n - m - 1}$$

$S = 0.21$

$$F := \frac{S}{D}$$

$F = 2.625$

$a := 1$ Given $0.995 = pF(a, n - m, 100)$ $FT := \text{Find}(a)$ $FT = 2.744$

Док. 1.5

Определим вероятностные характеристики ошибок в определении коэффициентов c , возникающих из-за ошибок измерений. Математическое ожидание ошибок с учетом $Me = 0$

$$Mc = M(\Phi^{-1}\Omega(y + e)) = M \left(\Phi^{-1} \begin{pmatrix} \sum_i (y^i + e)\phi_1(x^i) \\ \sum_i (y^i + e)\phi_2(x^i) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_i (y^i + e)\phi_m(x^i) \end{pmatrix} \right) = M(\Phi^{-1}\Omega(y)).$$

Дисперсия ошибок

$$D_c = M(c - Mc)^T(c - Mc) = \\ = M(\Phi^{-1}\Omega(y + e) - \Phi^{-1}\Omega(y))^T(\Phi^{-1}\Omega(y + e) - \Phi^{-1}\Omega(y)) = \Phi^{-2}Me^Te = \Phi^{-2}D_y. \quad (1.25)$$

Если помехи измерений постоянны и не коррелированы, то

$$D_y = \sigma_y^2 E,$$

где E — единичная матрица. Окончательно имеем

$$D_c = \sigma_y^2 \Phi^{-2}. \quad (1.26)$$

Из анализа этой формулы следует, что ошибки в определении коэффициентов c можно уменьшать, либо уменьшая помехи измерений, либо влияя на информационную матрицу Φ .

В задачах аппроксимации число неизвестных параметров меньше числа экспериментов, поэтому проверку адекватности можно осуществить без привлечения дополнительных данных.

Для функций, линейных по параметрам, процедура определения коэффициентов с помощью метода наименьших квадратов сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Ошибки измерений приводят к ошибкам в определении коэффициентов. В рамках ошибок измерений, распределенных по нормальному закону, ошибки в определении коэффициентов тоже распределены по нормальному закону и зависят от значений входных переменных. Это создает основу для такого планирования эксперимента, при котором ошибки будут в некотором смысле минимальными. Ортогональные планы позволяют избежать коррелированности ошибок, а D -оптимальные планы позволяют минимизировать дисперсии ошибок.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Какие ошибки типичны при моделировании систем?
2. Какие системы удовлетворяют принципу суперпозиции?
3. Какие модели являются линейными по параметрам?
4. К решению какой системы сводится аппроксимация методом МНК?
5. С помощью какого критерия проверяется адекватность математической модели?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 1

Задание 1.1. Определить абсолютные и относительные ошибки (максимальные и квадратичные), если задан вектор экспериментальных значений $y = (2, 5, 9, 7, 4)$ и значений, полученных по модели $y^* = (2, 1; 4, 8; 9, 3; 6, 7; 4, 2)$.

Ответ: $|\Delta y|_1 = 0, 3; |\Delta y|_2 = 0, 52; |\Delta y|_1/|y|_1 = 0, 033; |\Delta y|_2/|y|_2 = 0, 039$.

Задание 1.2. Определить аппроксимирующий квадратичный полином, считая, что измерения $y^* = (2, 1; 6, 8; 9, 3; 7, 2; 4, 2)$ сделаны в узлах интерполяции $x = (0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5)$.

Ответ: коэффициенты аппроксимирующего полинома:
 $d^T = (-5, 46 \ 90, 314 - 142, 857)$.

Задание 1.3. Определить необходимость уточнения модели из задания 7.3 при условии, что выходная величина была измерена с нормальным шумом с известными нулевым средним и дисперсией $\sigma_y^2 = 0,1$, уровень доверительной вероятности равен 0,995.

Ответ: такой необходимости нет, так как вычисленное значение критерия Фишера $F = 3,503$ меньше табличного значения $F_T = 4,542$ при числе степеней свободы, равном 3.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Многие динамические системы моделируют непрерывные или дискретные системы, работающие непрерывно в течение длительного времени, намного превышающее время релаксации (время устранения влияния начальных условий). Кроме того, часто такие процессы протекают вблизи некоторых рабочих условий, определяющих нормальное функционирование процесса. Тогда задача управления процессом сводится к поддержанию таких условий, т. е. к задаче регулирования. Это позволяет линеаризовать исходную (нелинейную) модель процесса в точке рабочих условий, принять эти условия за начало отчета и рассмотреть линейные модели с бесконечным временем.

2.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Линейная динамическая система с одним входом $u(t)$ и одним выходом $x(t)$ может быть описана дифференциальным уравнением порядка m , где m — порядок наивысшей производной в уравнении

$$\begin{aligned} a_0 \frac{dx^m}{dt^m} + a_1 \frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_m \frac{dx}{dt} + x = \\ = b_0 \frac{du_1^n}{dt^n} + b_1 \frac{du_1^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + b_n \frac{du_1}{dt} + u_1, \quad n < m. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если входное известие $u_1(t)$ — известная и n раз дифференцируемая функция, то, вычислив соответствующие производные и обозначив

$$u = b_0 \frac{du_1^n}{dt^n} + b_1 \frac{du_1^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + b_n \frac{du_1}{dt} + u_1, \quad n < m,$$

уравнение (2.1) можно свести к нормальному виду, разрешенному относительно первых производных:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (2.2)$$

где квадратная $m \times m$ -матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_m}{a_0} & -\frac{a_{m-1}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} & -1 \end{bmatrix}$, вектор B (мат-

рица в общем случае) размерности $m \times 1$: $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}$, вектор $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix}$,

$$x_1 = x, x_k = \frac{dx_{k-1}}{dt}, k = 2, 3, \dots, m.$$

Решение дифференциального уравнения (2.2) дается формулой Коши (см. главу 5):

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где $x^0 = x(0) = x(t)|_{t=0}$ — вектор начальных условий.

Если система управления функционирует достаточно долго и $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \rightarrow 0$, то при больших t первым слагаемым (свободным движением системы) можно пренебречь и в системах регулирования рассматривают и анализируют второе слагаемое формулы Коши (вынужденное движение системы):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Переход от пространства оригиналов $x(t)$ в пространство изображений по Лапласу $x(p)$ или по Фурье $x(i\omega)$ позволяет рассматривать вместо дифференциальных уравнений (2.1) или интеграла (2.4) алгебраические уравнения.

Преобразование Лапласа

$$x(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (2.5)$$

где $p = \alpha + iw$ — комплексное число, действительная часть которого α обеспечивает сходимость интеграла для неустойчивых систем, позволяет перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим. Если система устойчива, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$, то можно для этой цели применить *преобразование Фурье*

$$x(iw) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-iwt} dt. \quad (2.6)$$

Применяя эти преобразования к производной функции x , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt = px(p), \quad (2.7)$$

а для производной степени n :

$$\int_0^{\infty} \frac{d^n x(t)}{dt^n} e^{-pt} dt = p^n x(p). \quad (2.8)$$

Теперь, используя преобразование Лапласа, одномерное дифференциальное уравнение такого, например, вида

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = \frac{du}{dt} + gu$$

можно свести к алгебраическому уравнению в пространстве изображений по Лапласу:

$$(ap^2 + bp + c)x(p) = (p + g)u(p).$$

Отношение изображения входного и выходного сигналов

$$\frac{x(p)}{u(p)} = \frac{p + g}{ap^2 + bp + c} = W(p)$$

называется передаточной функцией.

В общем случае передаточная функция системы с одним входом и выходом определяется как дробь

$$W(p) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i p^i}{\sum_{i=0}^m a_i p^i}, \quad n \leq m, \quad (2.9)$$

в которой старшая производная входного сигнала n не больше старшей производной выходного сигнала m (условие физической реализуемости), а a_i, b_j — коэффициенты дифференциального уравнения.

Зная передаточную функцию $W(p)$ и изображение входного сигнала $u(p)$, легко получить изображение реакции системы на это воздействие $x(p)$:

$$x(p) = W(p)u(p).$$

Далее, применив обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \int_0^{\infty} x(p)e^{-pt} dp, \quad (2.10)$$

получим временную реакцию системы $x(t)$ в пространстве оригиналов.

Если дифференциальное уравнение задано в нормальной форме, разрешенной относительно первой производной:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^1, \quad (2.11)$$

то вычисление передаточной функции по каналу управления $u(t) \rightarrow x_1(t)$ можно произвести, преобразовав (2.11) по Лапласу

$$\begin{bmatrix} p \\ p^2 \\ \dots \\ p^n \end{bmatrix} x_1(p) = A \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \dots \\ p^{n-1} \end{bmatrix} x_1(p) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(p). \quad (2.12)$$

Вычислив отношение $W(p) = \frac{x_1(p)}{u(p)}$, получим необходимую передаточную

функцию. Приведем пример вычисления передаточной функции системы третьего порядка с матрицами A и B (здесь и далее рубленным шрифтом отражены операторы системы MathCAD):

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Вычислим члены, содержащие $x_1(p)$:

$$\begin{pmatrix} p \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}_2 \cdot x - \left[\begin{bmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{bmatrix}_2 \right] \cdot x \rightarrow p^3 \cdot x - x \cdot (c \cdot p^2 + b \cdot p + a) \text{ simplify } \rightarrow -x \cdot (c \cdot p^2 - p^3 + b \cdot p + a),$$

и содержащие $u(p)$:

$$B_2 \cdot u \rightarrow d \cdot u.$$

Вычислив отношение $\frac{x}{u}$, получим передаточную функцию $W(p)$:

$$W(p) := \frac{-d}{(c \cdot p^2 - p^3 + b \cdot p + a)}.$$

Так как i -я компонента вектора $x_i(t)$ в (2.12) связана с выходной компонентой $x_1(t)$ дифференциальным соотношением $x_i(t) = \frac{d^i}{dt^i} x_1(t)$, передаточные функции по этим каналам определяются умножением полученной передаточной функции $W_i(p) = W(p)p^i$.

Совершенно аналогично операционное исчисление применяется к решению задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0.$$

Решение этой задачи во временной области дается формулой Коши (2.3). Применим преобразование Лапласа для решения во временной области. Обозначим $x(p)$, $u(p)$ изображения для $x(t)$, $u(t)$. Переходя к изображениям по Лапласу, получим

$$(pE - A)x(p) = x^0 + Bu(p).$$

Разрешая это уравнение относительно $x(p)$, получим векторное уравнение:

$$x(p) = (pE - A)^{-1}(x^0 + Bu(p)), \quad (2.13)$$

где $W(p) = (pE - A)^{-1}$ — передаточная матрица системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Пример. В задаче скругления орбиты

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя (2.13), получим передаточную матрицу:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u(p) := \frac{0.001}{p},$$

$$W(p) := (p \cdot A^0 - A)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p^2+4}{p^3+p} & \frac{1}{p^2+1} & \frac{2}{p^3+p} \\ \frac{3}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} & \frac{2}{p^2+1} \\ -\frac{3}{p \cdot \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\right)} & -\frac{1}{\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}} & \frac{p^2-3}{2 \cdot p \cdot \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная матрица решений системы (матрица перехода) e^{At} определится через обратное преобразование Лапласа (сравните с формулой (12.36)):

$$e^{At} := W(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 4-3 \cdot \cos(t) & \sin(t) & 2-2 \cdot \cos(t) \\ 3 \cdot \sin(t) & \cos(t) & 2 \cdot \sin(t) \\ 6 \cdot \cos(t)-6 & -2 \cdot \sin(t) & 4 \cdot \cos(t)-3 \end{pmatrix}.$$

Реакция системы на трансверсальное ускорение $u(t) = 0,001$ в области изображений:

$$x(p) := W(p) \cdot B \cdot u(p) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{0.002}{p \cdot (p^3 + p)} \\ \frac{0.002}{p \cdot (p^2 + 1)} \\ \frac{0.0005 \cdot (p^2 - 3)}{p^2 \cdot \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\right)} \end{array} \right].$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим реакцию системы во временной области:

$$\underline{x}(t) := x(p) \text{invlaplace}, p \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 0.002 \cdot t - 0.002 \cdot \sin(t) \\ 0.002 - 0.001 \cdot e^{1.0i \cdot t} - 0.001 \cdot e^{-1.0i \cdot t} \\ 0.004 \cdot \sin(t) - 0.003 \cdot t \end{array} \right).$$

Любую динамическую систему, описываемую линейными дифференциальными уравнениями, можно представить как комбинацию элементарных динамических звеньев: *усилительного, интегрирующего, дифференциального, апериодического и колебательного*.

1. Усилительное (пропорциональное) звено. В этом случае выходная величина пропорциональна входной с коэффициентом k :

$$x(t) = ku(t), \quad W(p) = k. \quad (2.14)$$

Этот элемент статический — мгновенное изменение $u(t)$ вызывает немедленную реакцию выхода $x(t) = ku(t)$. Часто таким звеном описывают динамический процесс с пренебрежимо малым временем перехода из одного состояния $x(t)$ в другое по сравнению со временами реакции в системе в целом.

Определим переходную функцию усилительного звена, используя символьное преобразование Лапласа в системе MathCAD.

Сделаем замену переменной p в передаточной функции $W(p)$ на символ s , который используется по умолчанию в программах преобразования Лапласа:

$$W(p) := k \quad W(s) := W(p) \text{substitute}, p = s \rightarrow k.$$

В данном случае такого преобразования не требовалось, так как передаточная функция не зависит от p .

Зададим входное воздействие $u(t)$ в виде единичного скачка и применим прямое преобразование Лапласа (переход в пространство изображений):

$$u(t) := 1 \quad \underline{u}(s) := u(t) \text{laplace} \rightarrow \frac{1}{s}.$$

Теперь осталось применить обратное преобразование (переход в пространство оригиналов):

$$W(s) \cdot \underline{u}(s) \text{invlaplace} \rightarrow k.$$

2. Интегрирующее звено. Такое звено описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (2.15)$$

с решением $x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ (начальные условия нулевые) и передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{1}{p}. \quad (2.16)$$

Примером такого звена может служить процесс наполнения бака без стока с единичной площадью водой, где $x(t)$ — уровень воды, а $u(t)$ — количество поступающей в бак воды. Последовательное соединение усилительного и интегрирующего звена даст передаточную функцию $W(p) = \frac{k}{p}$. При постоянном воздействии

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad u(p) = 1$$

реакция такого соединения $x(t)$ (*кривая разгона, переходная функция*) будет представлять собой прямую, выходящую из 0 и имеющую угол наклона $\text{tg}(x(t)) = k$.

3. Аperiodическое звено. Этот элемент динамической системы описывается дифференциальным уравнением:

$$a \frac{dx}{dt} + x = u \quad (2.17)$$

с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{1}{ap+1}, \quad (2.18)$$

где a — постоянная времени, определяющая динамику звена. Кривые разгона аperiodического звена (решение уравнения при $u = 1$) описываются формулой

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{a}}.$$

В системе MathCAD можно получить этот результат при помощи преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} W(p) &:= \frac{1}{a \cdot p + 1} \quad W(s) := W(p) \text{ substitute } p = s \rightarrow \frac{1}{a \cdot s + 1} u(t) : 1, \\ u(s) &:= u(t) \text{ laplace} \rightarrow \frac{1}{s} \quad W(s) \cdot u(s) \text{ invlaplace} \rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{a}t}. \end{aligned}$$

Кривые разгона для двух различных значений a показаны на рисунке 2.1.

Как видно из рисунка, чем больше параметр a , тем медленнее успокаивается кривая разгона. При $a < 0$ решение будет монотонно возрастать.

Примером аperiodических звеньев могут служить нагревательные элементы: вход — напряжение, выход — температура; бак с притоком и оттоком воды: вход — приток, выход — высота жидкости.

3. Колебательное звено. Реакция такого звена на воздействие $u(t)$ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi \frac{dx}{dt} + x = u \quad (2.19)$$

с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.20)$$

Решение дифференциального уравнения и характер кривой разгона определяются корнями характеристического уравнения λ_1, λ_2 :

$$T\lambda^2 + 2\xi T\lambda + 1 = 0.$$

Если корни действительны и различны, т. е. характеристическое уравнение можно представить в виде $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$, то такое звено можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев. Если корни отрицательные, звенья устойчивы, кривая разгона стремится к установившемуся значению, в противном случае решение будет монотонно возрастать.

Определение кривой разгона при помощи преобразования Лапласа имеет вид:

$$\underline{W}(p) := \frac{1}{(p+1) \cdot (p+2)} \quad \underline{W}(s) := W(p) \text{ substitute } p = s \rightarrow \frac{1}{s^2 + 3 \cdot s + 2},$$

$$u(t) := 1 \quad u(s) := u(t) \text{ laplace} \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$W(s) \cdot u(s) \text{ invlaplace} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot e^{-\frac{3t}{2}} \cdot \sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{2} - \frac{e^{-\frac{3t}{2}} \cdot \cosh\left(\frac{t}{2}\right)}{2},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot e^{-\frac{3t}{2}} \cdot \sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{2} - \frac{e^{-\frac{3t}{2}} \cdot \cosh\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \text{ simplify} \rightarrow \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}.$$

В последнем операторе применена операция упрощения выражения, полученного при переходе в пространство оригиналов.

Кривая переходного процесса приведена на рисунке 2.2.

Если корень комплексно сопряженный

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{T} (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) = \alpha \pm iw,$$

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}, \quad w = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T},$$

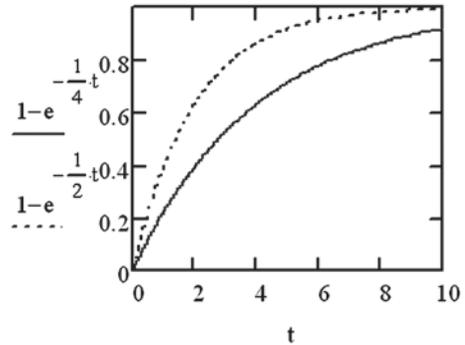


Рис. 2.1

Кривые разгона апериодического звена

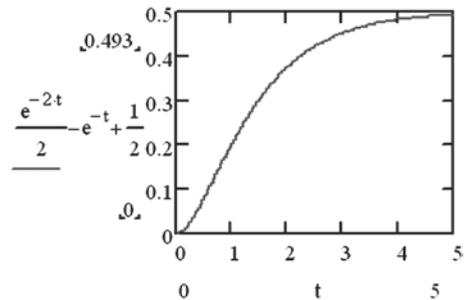


Рис. 2.2

Кривая разгона для двух апериодических звеньев

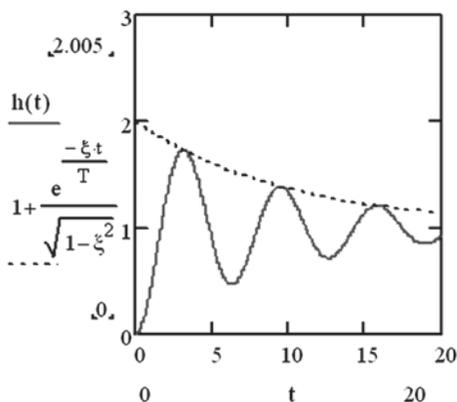


Рис. 2.3

Переходная функция устойчивого колебательного звена, модулированная экспонентой

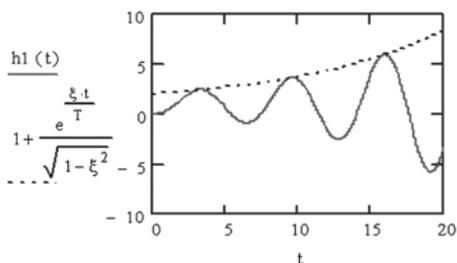


Рис. 2.4

Переходная функция неустойчивого колебательного звена, модулированная экспонентой

то решение будет содержать гармонические колебания с частотой ω , модулируемые экспонентой $e^{\alpha t}$. Если $\alpha < 0$, решение устойчиво и колебания затухают, при $\alpha = 0$ колебания не затухающие, при $\alpha > 0$ — амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

Кривая разгона устойчивого колебательного звена представлена на рисунке 2.3.

$$T := 1/\xi := 1,$$

$$h(t) := 1 - \frac{e^{-\frac{\xi t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right).$$

Переходная функция неустойчивого звена представлена на рисунке 2.4.

$$h1(t) := 1 - \frac{e^{\frac{\xi t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right).$$

Примерами колебательных звеньев могут служить процессы колебания маятника, подвески автомобиля, генерация колебаний в электронных системах.

4. Дифференцирующее звено. Идеальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$x(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{2.21}$$

с передаточной функцией

$$W(p) = p. \tag{2.22}$$

Такое звено физически нереализуемо, так как для ступенчатого воздействия производная не существует в момент скачка $u(t)$ и описывается обобщенной производной в виде δ -функции Дирака с бесконечной амплитудой, но с единичной площадью. Физически реализуемые звенья приближенно аппроксимируют такую функцию.

Линейная динамическая система с постоянными параметрами может быть описана сочетанием в виде структурной схемы этих элементарных звеньев.

2.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗВЕНЬЕВ

О динамических свойствах как элементарных звеньев, так и систем регулирования в целом, часто судят по частотным характеристикам. Преобразование Фурье получается при замене комплексно-сопряженного параметра p

на чисто мнимый параметр $i\omega$. Так, передаточная функция аperiodического звена

$$W(p) = \frac{1}{ap+1}$$

преобразуется в амплитудно-фазочастотную характеристику (АФЧХ)

$$W(i\omega) = \frac{1}{ai\omega + 1}$$

График АФЧХ, построенный в координатах $\text{Re}(W(i\omega))$, $\text{Im}(W(i\omega))$ при изменении $\omega \in [0, \rightarrow \infty)$, называется годографом АФЧХ. Пример такого годографа для аperiodического звена показан на рисунке 2.5.

$$i := \sqrt{-1} \quad a := 2 \quad w := 0, 0.1..50,$$

$$\begin{aligned} \underline{W}(p) &:= \frac{1}{a \cdot p + 1} \quad \underline{W}(w) := W(p) \text{ substitute } p = \\ &= w \cdot i \rightarrow \frac{1}{1 + 2 \cdot w \cdot i} \end{aligned}$$

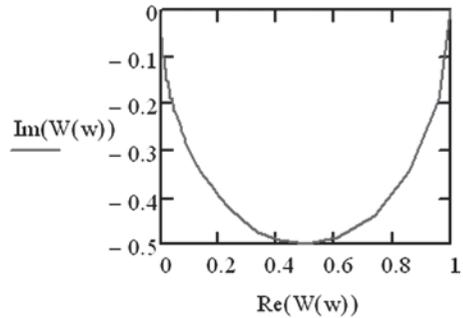


Рис. 2.5
АФЧХ аperiodического звена

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется зависимость амплитуды выходного сигнала A от частоты синусоидального входного сигнала $u(t) = \sin(\omega t)$: $A(\omega) = |W(\omega)|$. В этом примере АЧХ изображена на рисунке 2.6.

Из графика АЧХ видно, что сигнал с нулевой частотой (постоянный) будет проходить не искаженный, с увеличением частоты ω гармонический сигнал будет ослабевать и при $\omega = 10$ амплитуда сигнала уменьшится в 100 раз. Это свойство часто используют для фильтрации высокочастотных помех.

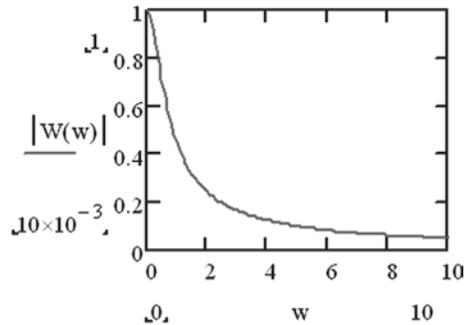


Рис. 2.6
АЧХ аperiodического звена

Фазочастотной характеристикой (ФЧХ) называется зависимость сдвига начала гармонического сигнала на входе системы по сравнению с началом такого сигнала на выходе этой системы: $\Phi(\omega) = \arg(W(i\omega))$. В рассматриваемом примере ФЧХ изображена на рисунке 2.7.

Из графика видно, что чем выше частота, тем больше сдвиг фаз, и при доста-

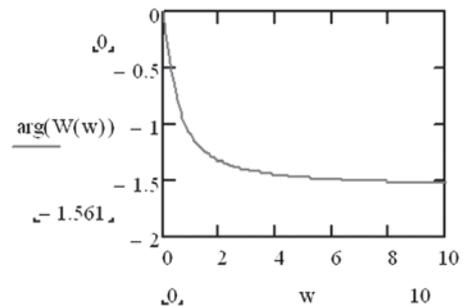


Рис. 2.7
ФЧХ аperiodического звена

точно большой частоте выходной сигнал сдвигается на половину периода (угол на графике в радианах).

Аналогичные характеристики для устойчивого колебательного звена показаны на рисунке 2.8.

$$\xi := 0.1 \quad T := 1 \quad w := 0.01..50,$$

$$W(p) := \frac{1}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1},$$

$$W(w) := W(p) \text{ substitute } p = w \cdot i \rightarrow \frac{1}{1 - \omega^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot i},$$

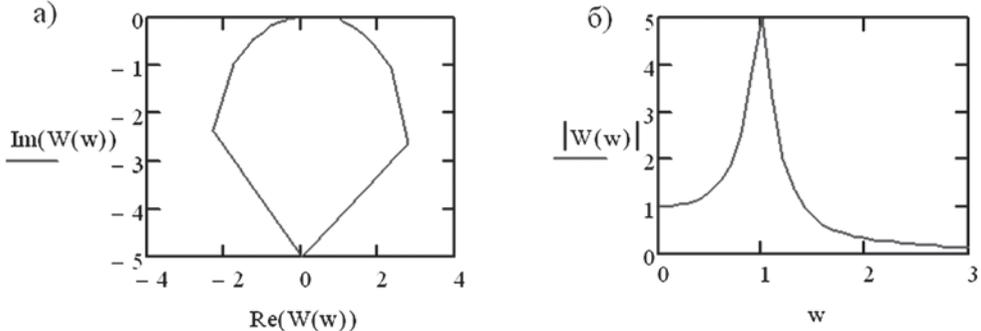


Рис. 2.8

АФЧХ колебательного звена (а); АЧХ колебательного звена (б)

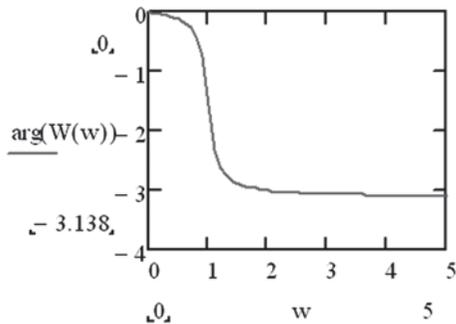


Рис. 2.9

ФЧХ колебательного звена

Анализ графиков показывает, что колебательное звено обладает резонансной частотой: при $\omega = 1$ амплитуда выходного сигнала увеличивается в 5 раз, и лишь при частотах $\omega > 1,5$ выходной сигнал начинает ослабевать. Такое свойства часто используется для настройки, например радиоприемника на определенную частоту.

График ФЧХ колебательного звена показан на рисунке 2.9.

Из графика видно, что максимальная скорость изменения фазы выходного сигнала находится в районе резонансной частоты.

2.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Реальные системы автоматического регулирования имеют сложную структуру, состоящую из многих элементов, включая не только объект регулирования, возможно состоящий из многих элементов, но и исполнительные механизмы, измерительные устройства, регуляторы, корректирующие элементы. Линейная система в общем случае может быть представлена сочетанием элементарных звеньев, соединенных параллельно, последовательно, охваченных

обратными и перекрестными обратными связями.

Последовательное соединение звеньев изображено на рисунке 2.10.

В соответствии с определением передаточных функций имеем

$$x_1(p) = W_1(p)u(p), \quad x_2(p) = W_2(p)x_1(p),$$

исключая $x_1(p)$, получим выражение для передаточной функции:

$$W(p) = \frac{x_2(p)}{u(p)} = W_1(p)W_2(p). \quad (2.23)$$

В общем случае последовательное соединение n элементов с передаточными функциями $W_i(p)$ будет описываться произведением передаточных функций

$$W(p) = \frac{x_n(p)}{u(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.24)$$

Следующий рисунок 2.11 иллюстрирует вычисление общей передаточной функции и частотные характеристики полученного соединения звеньев.

$$W(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W2(p) := \frac{1}{3 \cdot p + 1} \quad W3(p) := \frac{p}{4 \cdot p^2 + p + 1} \quad i := \sqrt{-1},$$

$$\underline{W}(p) := W1(p) \cdot W2(p) \cdot W3(p) \rightarrow \frac{p}{(2 \cdot p + 1) \cdot (3 \cdot p + 1) \cdot (4 \cdot p^2 + p + 1)},$$

$$\underline{W}(w) := \underline{W}(p) \text{ substitute } p = i \cdot w \rightarrow \frac{w \cdot i}{(1 + 2 \cdot w \cdot i) \cdot (1 + 3 \cdot w \cdot i) \cdot (1 - 4 \cdot w^2 + w \cdot i)},$$

$$w := 0,001..1.$$

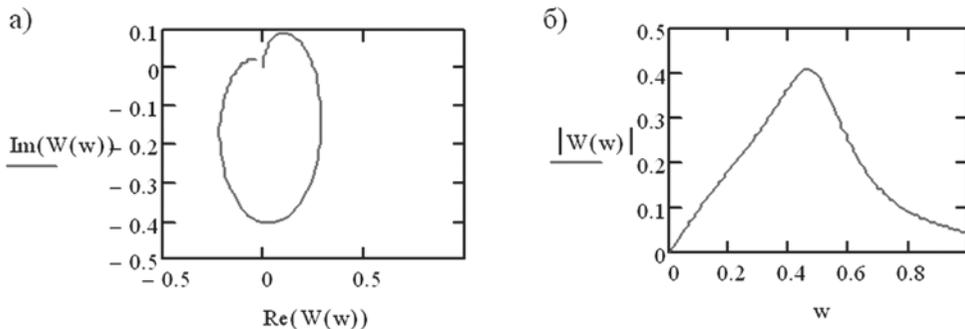


Рис. 2.11

АФЧХ (а) и ФЧХ (б) последовательного соединения звеньев

Параллельное соединение звеньев показано на рисунке 2.12.

Так как на вход каждого звена подается один и тот же сигнал, имеем:

$$x_1(p) = W_1(p)u(p), \quad x_2(p) = W_2(p)u(p), \quad x(p) = x_1(p) + x_2(p),$$

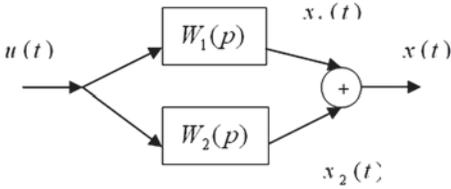


Рис. 2.12
Параллельное соединение звеньев

откуда передаточная функция такого соединения определится следующим образом:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p). \quad (2.25)$$

Для параллельного соединения n звеньев имеем выражение

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.26)$$

Рисунок 2.13 иллюстрирует характеристики соединения трех звеньев.

$$W1(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W2(p) := \frac{1}{3 \cdot p + 1} \quad W3(p) := \frac{p}{4 \cdot p^2 + p + 1} \quad i := \sqrt{-1},$$

$$W(p) := (W1(p) + W2(p)) + W3(p) \rightarrow \frac{p}{4 \cdot p^2 + p + 1} + \frac{1}{2 \cdot p + 1} + \frac{1}{3 \cdot p + 1},$$

$$W(w) := W(p) \text{ substitute } p = i \cdot w \rightarrow \frac{2 \cdot (1 - 9 \cdot w^2 - 13i \cdot w^3 + 4 \cdot w \cdot i)}{24 \cdot w^4 - 26i \cdot w^3 - 15 \cdot w^2 + 1 + 6 \cdot w \cdot i},$$

$$w := 0, 0.01 \dots 2.$$

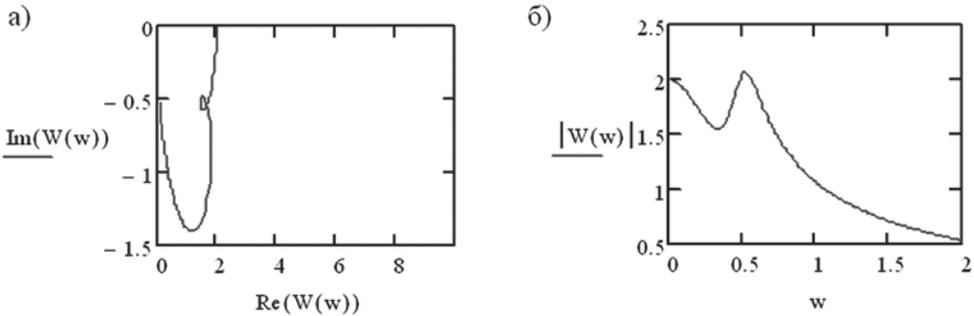


Рис. 2.13
АФЧХ (а), АЧХ (б) последовательного соединения звеньев

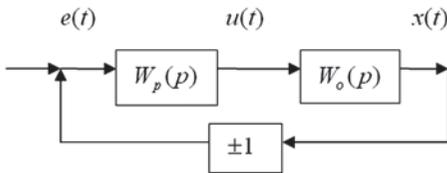


Рис. 2.14
Схема системы с обратной связью

Передаточная функция системы с обратной связью.

Схема системы с обратной связью показана на рисунке 2.14.

Обычно передаточная функция $W_o(p)$ описывает объект регулирования, а передаточная функция $W_p(p)$ — регулятор. Регулирующее воздействие x_2 направляется со знаком «-» для положительной обратной связи и со знаком «+» для отрицательной обратной связи. Уравнения связи в такой системе следующие:

$$W(p) = \frac{x(p)}{e(p)} = \frac{e(p)W_o(p)W_p(p)}{e(p) \pm e(p)W_o(p)W_p(p)} = \frac{W_o(p)W_p(p)}{1 \pm W_o(p)W_p(p)}. \quad (2.27)$$

В качестве регуляторов чаще всего используют стандартные законы регулирования, реализованные в промышленной аппаратуре.

Пропорциональный регулятор (П-регулятор). В качестве такого регулирующего устройства используют усилительное звено с передаточной функцией:

$$W(p) = k, \quad (2.28)$$

где k — коэффициент усиления.

Пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор) имеет передаточную функцию:

$$W(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right), \quad (2.29)$$

где параметр T_I (время изодрома) определяет долю интегральной составляющей в законе управления.

Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД регулятор). Используется наиболее часто и имеет передаточную функцию

$$W(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_I p} + \frac{p}{T_D} \right), \quad (2.30)$$

где параметр T_D определяет долю производной в законе управления.

Рассмотрим передаточную функцию, частотные характеристики и переходную функцию для апериодического звена в качестве объекта управления и усилительного звена в качестве регулятора. Процедура вычисления частотных характеристик замкнутой системы приведена на рисунке 2.15.

$$W_o(p) := \frac{2}{2 \cdot p + 1} \quad Wp(p) := 10 \quad i := \sqrt{-1},$$

$$\underline{W}(p) := \frac{W_o(p) \cdot Wp(p)}{1 + W_o(p) \cdot Wp(p)} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{10}{2 \cdot p + 11},$$

$$\underline{W}(w) := W(p) \text{ substitute } p = i \cdot w \rightarrow \frac{10}{11 + 2 \cdot w \cdot i} \quad w := 0, 0.1 \dots 100.$$

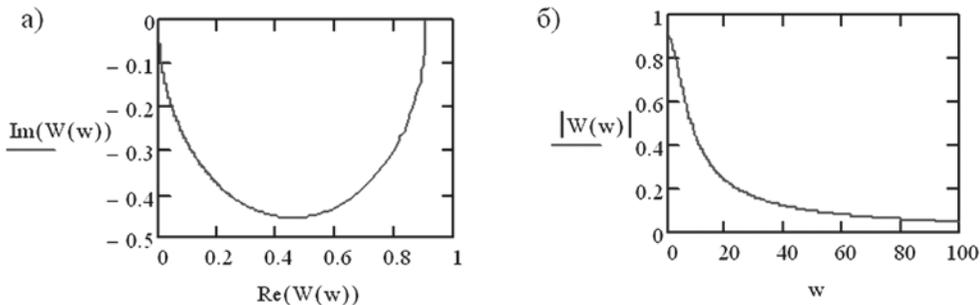


Рис. 2.15
АФЧХ (а) и АЧХ (б) замкнутой системы

Переходный процесс в системе регулирования при переходе системы на заданный уровень $x = 1$ приведен на рисунке 2.16.

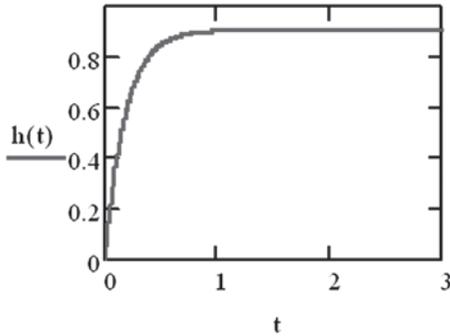


Рис. 2.16

Переходный процесс в замкнутой системе

$$\underline{W}(s) := \frac{W(w)}{s} \text{ substitute,}$$

$$i \cdot w = s \rightarrow \frac{10}{s \cdot (2 \cdot s + 11)},$$

$$h(t) := W(s) \text{ invlaplace} \rightarrow \frac{10}{11} - \frac{11 \cdot e^{-\frac{10 \cdot t}{2}}}{11}.$$

Как видно из рисунка, система регулирования с П-регулятором обладает статической ошибкой — при $t \rightarrow \infty$ решение стремится не к 1, а к $10/11$.

2.4. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Важным вопросом, решающим вопрос о работоспособности системы регулирования, является вопрос об устойчивости динамической системы. Как уже отмечалось, динамическая система устойчива, если все корни характеристического уравнения, полученные из знаменателя передаточной функции, имеют отрицательную действительную часть:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \quad \forall k \in 1, 2, \dots, n, \quad (2.31)$$

где n — порядок знаменателя. Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по виду частотных характеристик, не определяя корней характеристического уравнения.

Критерий устойчивости Михайлова. Динамическая система, описываемая линейным дифференциальным уравнением n -го порядка, устойчива, если при изменении частоты w от 0 до ∞ годограф вектора $W(iw)$ проходит в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов комплексной плоскости $\operatorname{Re}(W(iw)), \operatorname{Im}(W(iw))$. Рисунок 2.17 иллюстрирует критерий Михайлова для устойчивой системы третьего порядка с $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$:

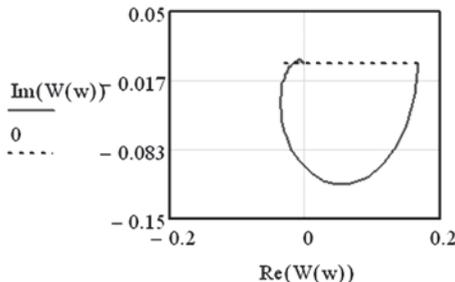


Рис. 2.17

Годограф устойчивой системы

$$\underline{W}(p) := \frac{1}{(p+1) \cdot (p+2) \cdot (p+3)},$$

$$\underline{W}(w) := W(p) \text{ substitute,}$$

$$p = i \cdot w \rightarrow \frac{1}{(1+w \cdot i) \cdot (2+w \cdot i) \cdot (3+w \cdot i)},$$

$$w := 0, 0.1..50.$$

Аналогичный график для неустойчивой системы показан на рисунке 2.18 для

$$\lambda_1 = +1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3:$$

$$\underline{W}(p) := \frac{1}{(p-1) \cdot (p+2) \cdot (p+3)},$$

$$\underline{W}(w) := \underline{W}(p) \text{ substitute,}$$

$$p = i \cdot w \rightarrow \frac{1}{(-1+w \cdot i) \cdot (2+w \cdot i) \cdot (3+w \cdot i)},$$

$$w := 0, 0.1..50.$$

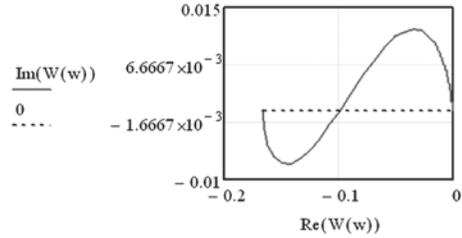


Рис. 2.18

Годограф неустойчивой системы

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по годографу разомкнутой системы. В соответствии с (2.27) передаточная функция замкнутой системы с обратной связью $\underline{W}_{\text{зам}}(p)$ определяется как

$$\underline{W}(p) = \frac{W_o(p)W_p(p)}{1 + W_o(p)W_p(p)},$$

передаточная функция разомкнутой системы:

$$\underline{W}_{\text{раз}}(p) = W_o(p)W_p(p), \quad (2.32)$$

где $W_o(p)$ — передаточная функция объекта управления, $W_p(p)$ — передаточная функция регулятора. Пусть передаточная функция объекта регулирования

$$W_o = \frac{1}{(8p+1)(4p+1)(2p+1)},$$

а регулятор пропорционально-интегральный (ПИ) с параметрами

$$W_p(p) = 2 \left(1 + \frac{1}{2p} \right).$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет

$$\underline{W}(p) = W_o(p)W_p(p) = \frac{1}{(8p+1)(4p+1)(2p+1)} \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{2p} \right).$$

Рисунок 2.19 иллюстрирует построение годографа АФЧХ для этого примера.

$$\underline{W}(p) := 2 \left(1 + \frac{1}{2p} \right) W_o(p) := \frac{1}{(8p+1) \cdot (4p+1)(2p+1)},$$

$$\underline{W}(w) := W_o(p) \cdot W_p(p) \text{ substitute,}$$

$$p = i \cdot w \rightarrow \frac{12 \cdot w + i - 32 \cdot w^2 \cdot i}{1024w^5 + 80 \cdot w^3 + w},$$

$$w := 0, 0.1..50.$$

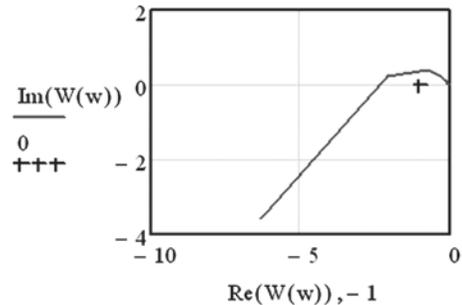


Рис. 2.19

Годограф неустойчивой системы

Так как годограф охватывает точку с координатами $(-1, 0i)$, замкнутая система будет неустойчивой.

Увеличим время изодрома (уменьшим вклад интегральной составляющей регулятора) в 3 раза. Диаграмма Найквиста для этого случая показана на рисунке 2.20.

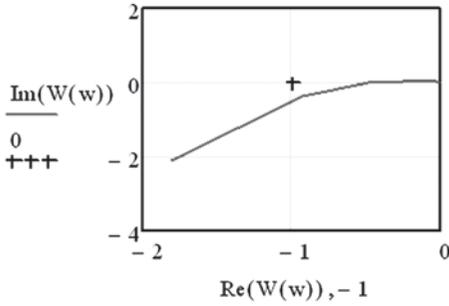


Рис. 2.20
Годограф устойчивой системы

$$Wp(p) := 2 \left(1 + \frac{1}{6 \cdot p} \right)$$

$$Wo(p) := \frac{1}{(8p+1) \cdot (4p+1) \cdot (2p+1)}$$

$$W(w) := Wo(p) \cdot Wp(p) \text{ substitute,}$$

$$p = i \cdot w \rightarrow \frac{6 \cdot w - i}{3 \cdot w \cdot (1 + 2 \cdot w \cdot i) \cdot (1 + 4 \cdot w \cdot i) \cdot (1 + 8 \cdot w \cdot i)}$$

$$w := 0., 0.1..50.$$

Так как годограф не охватывает точку $(-1, 0i)$, замкнутая система с такой настройкой регулятора будет устойчивой.

Теперь можно сформулировать частотный критерий устойчивости Найквиста: линейная динамическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, 0i)$ на комплексной плоскости.

Если линейная динамическая система задана в нормальной форме вида (1.1), то ее устойчивость определяется вычислением собственных чисел матрицы A , решением уравнения $|A - \lambda E| = 0$. В качестве примера определим собственные числа для системы четвертого порядка:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3.234 \\ -0.672 \\ -0.047 + 0.677i \\ -0.047 - 0.677i \end{pmatrix}$$

Так как действительные части всех корней отрицательны, система устойчива. Пример неустойчивой системы:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3.303 \\ -0.5 + 0.866i \\ -0.5 + 0.866i \\ -0.303 \end{pmatrix}$$

В этой системе при достаточно больших t решение будет неограниченно возрастать пропорционально $e^{0.303t}$.

Операторные методы на основе преобразования Лапласа и Фурье являются удобным методом анализа линейных динамических систем, работающих неограниченно долго и не испытывающих влияния не нулевых начальных условий. Сложную линейную систему с достаточно большим временем функционирования (системы автоматического регулирования) можно представить в виде соединения элементарных звеньев с хорошо изученными свойствами. Операторные характеристики такой сложной системы можно получить в результате алгебраических вычислений, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений, описывающих поведение сложной динамической системы. Некоторые результаты, характеризующие поведение динамической системы.

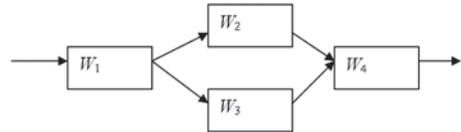
темы, такие как астатичность, устойчивость, зависимость амплитуды и сдвига синусоидального сигнала от его частоты, можно получить непосредственно из передаточных функций или частотных характеристик. Осуществить точное обратное преобразование из пространства изображений по Лапласу или Фурье в пространство оригиналов удастся только в достаточно простых случаях. Тогда необходимо использовать численные алгоритмы преобразований или численно интегрировать систему дифференциальных уравнений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. С помощью какого преобразования дифференциальных уравнений определяются передаточные функции линейных динамических систем?
2. В чем отличие преобразования Лапласа от преобразования Фурье?
3. Каковы основные типы элементарных динамических звеньев?
4. Какому входному воздействию соответствует кривая разгона (переходная функция)?
5. Как определяются передаточные функции при последовательном, параллельном соединении и соединении с обратной связью?
6. Сформулируйте критерии устойчивости динамических систем.

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 2

Задание 2.1. Найти передаточную функцию W соединения звеньев, соединенных по следующей схеме:



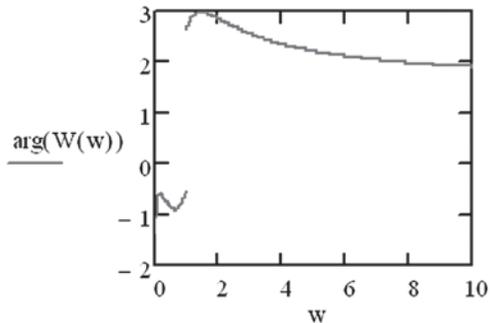
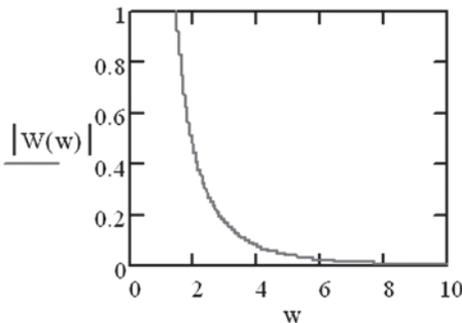
где $W_1 = 2 + \frac{0,1}{p}$; $W_2 = \frac{2}{p+1}$; $W_3 = \frac{1+p}{p^2+1}$;

$$W_1 = \frac{1}{(p+1)(p+2)}.$$

Ответ: $W(p) = \frac{0,1 \cdot (20 \cdot 0 \cdot p + 1 \cdot 0) \cdot (3 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 3)}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \cdot (p^3 + p^2 + p + 1)}.$

Задание 2.2. Вычислить частотные характеристики $|W(w)|$, $\arg(W(w))$ передаточной функции W из задания 2.1, определить, устойчива ли разомкнутая система.

Ответ: Частотные характеристики разомкнутой системы:



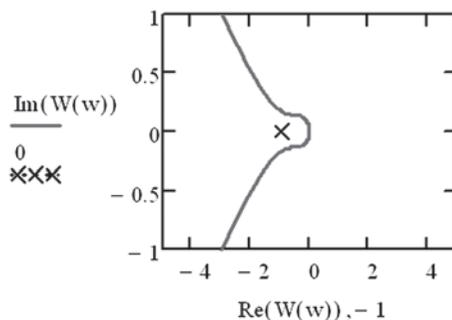
Корни характеристического уравнения

$$\lambda := p \cdot (p+1) \cdot (p+2) \cdot (p^3 + p^2 + p + 1) \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

имеют нулевую действительную часть, поэтому разомкнутая система находится на границе устойчивости.

Задание 2.3. Замкнуть отрицательной обратной связью разомкнутую систему W из задания 2.1, определить, устойчива ли замкнутая система.

Ответ: Годограф частотных характеристик разомкнутой системы охватывает точку $(-1, 0i)$, поэтому замкнутая система неустойчива:



Задание 2.4. Найти передаточную матрицу системы дифференциальных

уравнений в нормальной форме с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ и определить устойчивость системы.

Ответ: Передаточная матрица системы:

$$W(p) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{p-2}{p^3+2 \cdot p^2+5 \cdot p+4} & \frac{p+3}{p^3+2 \cdot p^2+5 \cdot p+4} \\ 0 & \frac{p}{p^2+p+4} & \frac{2}{p^2+p+4} \\ 0 & \frac{1}{\frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} + 2} & \frac{\frac{p}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} + 2} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 + 1.936i \\ -0.5 - 1.936i \end{pmatrix}$$

имеют отрицательные действительные части, следовательно, система устойчива.

Дискретными называются системы, в которых переменные изменяются не непрерывно, а перескакивают с одного уровня на другой. Характерной чертой любой дискретной системы является наличие импульсного преобразователя, преобразующего непрерывный сигнал в последовательность дискретных сигналов — импульсов. Так, при использовании ЭВМ в системе управления измеряемый сигнал должен поступить на ЭВМ в оцифрованном виде, что осуществляется аналого-цифровым преобразователем. Обработка сигналов в ЭВМ осуществляется в дискретные моменты времени. В соответствии с этим квантование непрерывных сигналов может осуществляться:

- по уровню сигнала

$$x_j = jk, j = 0, 1, \dots,$$

где k — шаг квантования сигнала;

- по времени

$$t_i = ih, i = 0, 1, \dots,$$

где h — шаг квантования времени, или по этим параметрам совместно.

Рисунок 3.1 иллюстрирует представление

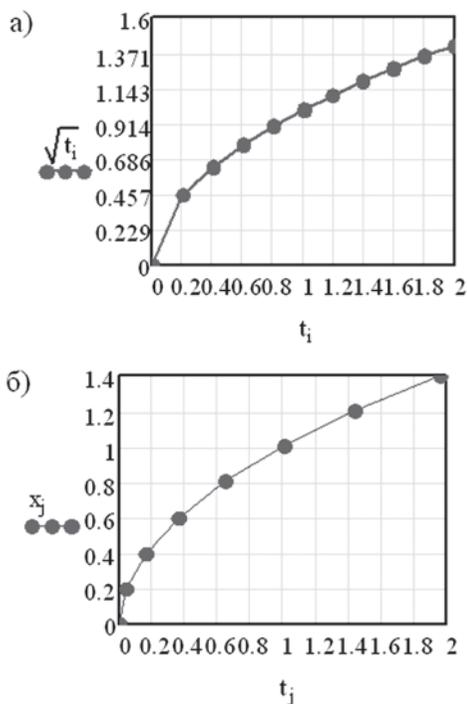


Рис. 3.1
Сигналы, квантованные по времени (а)
и по уровню (б)

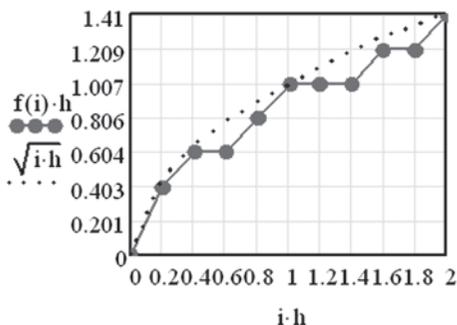


Рис. 3.2

Сигнал, квантованный и по уровню, и по времени

сигнала с квантованием по времени и с квантованием по уровню для непрерывной функции

$$x(t) = \sqrt{t}.$$

На рисунке 3.2 изображен сигнал, квантованный и по времени, и по уровню.

$$f(i) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n \\ a \leftarrow j \text{ if } \sqrt{i \cdot h} \geq j \cdot k. \\ a \end{cases}$$

Квантование по уровню часто осуществляется при преобразовании непрерывного сигнала от измерительных систем для управляющих устройств с помощью цифровых регуляторов. Поскольку шаг квантования ограничен длиной слова в ЭВМ, этой величиной можно пренебречь по сравнению с уровнем сигнала. Другой предельный случай квантования — по уровню с помощью релейных элементов на нескольких уровнях, но это существенно нелинейные системы. Поэтому ограничимся рассмотрением линейных систем с квантованием только по времени, такие системы называются импульсными. Импульсную систему можно представить как последовательное соединение непрерывной системы и импульсного элемента, пропускающего выходной сигнал системы в дискретные моменты времени

$$t_i = ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где h — шаг квантования.

Аналогом такого процесса может служить реализация численным методом интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. В реальных цифровых системах управления шаг квантования определяется временем, необходимым для решения задачи управления на текущем шаге.

В импульсных системах решетчатые функции являются аналогами непрерывных функций, а разностные уравнения — аналогами дифференциальных уравнений.

Решетчатой функцией называется функция, полученная заменой непрерывной функции ее значениями в дискретные моменты времени

$$x_i = x(t_i) = x(ih).$$

Непрерывная функция является огибающей по отношению к решетчатой функции, при конкретном шаге h для данной функции существует единственная решетчатая функция, однако обратного однозначного соответствия нет.

3.1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Разностью первого порядка (первой разностью) называют величину

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \tag{3.1}$$

и она служит аналогом первой производной, приближением производной при шаге $h = 1$.

Разностью второго порядка (второй разностью) называют величину разности между двумя последовательными значениями первых разностей:

$$\Delta^2 = x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}, \quad (3.2)$$

и эта величина служит аналогом второй производной. Аналогично можно определить разности более высокого порядка.

Заменяя в дифференциальном уравнении производные конечными разностями, можно перейти от дифференциального уравнения (2.18) к конечно-разностному уравнению типа

$$a\Delta^2(x_i) + b\Delta(x_i) + cx_i = \Delta(u_i) + gu_i.$$

Для уравнения $a \frac{dx}{dt} + x = bu$ конечно-разностное уравнение запишется в следующем виде:

$$a(x_{i+1} - x_i) + x_i = bu_i, \quad x_{i+1} = x_i - \frac{x_i}{a} + bu_i.$$

На рисунке 3.3 показано сравнение решения конечно-разностного уравнения и точного решения для кривой разгона аperiodического звена.

$$a := 2b := 2 \quad x_0 := 0 \quad u := 1_{61},$$

$$N := 20 \quad i := 0..N,$$

$$x_{i+1} := x_i - \frac{x_i}{a} + \frac{b}{a} \cdot u.$$

Если применить к решению дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ формулу Эйлера численного интегрирования

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, u_i)h,$$

где h — шаг интегрирования, то получим для кривой разгона аperiodического звена формулу

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{a}(-x_i + bu_i)h, \quad (3.3)$$

которая отличается от решения разностного уравнения шагом интегрирования h . Ошибка интегрирования по формуле Эйлера пропорциональна шагу h , поэтому для разностного уравнения приходится выбирать текущее целочисленное время i как $t_i = ih$.

Разности произвольного порядка k определяются при помощи рекуррентных соотношений:

$$\Delta^k(x(i)) = \Delta^{k-1}x(i+1) - \Delta^{k-1}x(i), \quad (3.4)$$

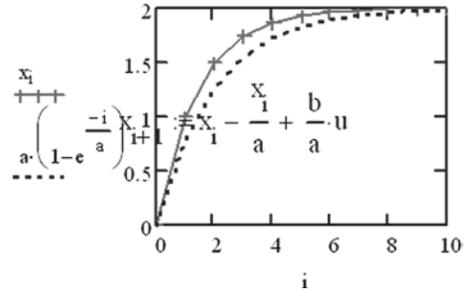


Рис. 3.3

Сравнение решения разностного уравнения x_i и точного решения

или в разрешенном виде относительно значений выходной переменной x в k -моментах времени:

$$\Delta^k x(i) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{k!}{m!(k-m)!} x(i+k-m). \quad (3.5)$$

Иногда используют обратные разности, связанные с прямыми разностями соотношением $\nabla^k x(i) = \Delta^k x(i-k)$. Обратные разности обладают важной особенностью. Если решетчатая функция определена только для положительных значений аргумента, т. е. $x(i) = 0, i < 0$, то, как следует из (3.3), в точке $i = 0$ k -я разность $\nabla^k x(0) = x(0)$.

Составим разностное уравнение для колебательного звена (2.18):

$$T^2(x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}) + 2T\xi(x_{i+1} - x_i) + x_i = u_i,$$

разрешив относительно x_{i+2} , получим рекуррентное уравнение:

$$x_{i+2} = \frac{1}{T^2} u_i - \left(1 - \frac{2\xi}{T} + \frac{1}{T^2}\right) x_i - 2\left(\frac{\xi}{T} - 1\right) x_{i+1}.$$

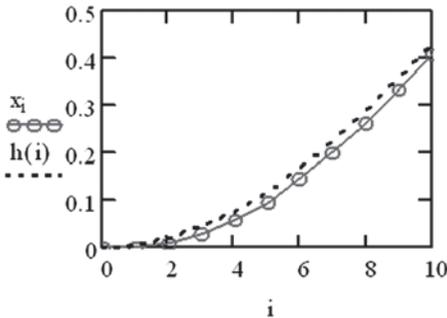


Рис. 3.4

Сравнение непрерывного $h(i)$ и дискретного x_i решений

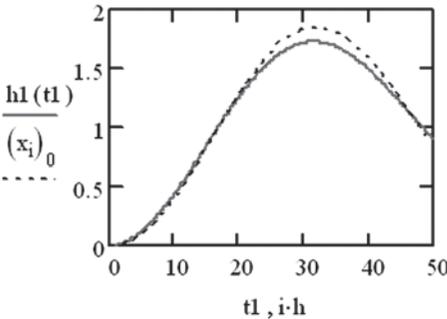


Рис. 3.5

Сравнение непрерывного $h1(t1)$ и дискретного $(x_i)_0$ решений

В этой формуле нужно задать два начальных числа $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$. В силу этого реакция системы на внешнее воздействие будет с запаздыванием на $m - 1$ шагов, где m — порядок дифференциального уравнения (рис. 3.4).

$$T := 10 \quad \xi := .1 \quad x_0 := 0 \quad x_1 := 0 \quad N := 10 \quad i := 0..N,$$

$$x_{i+2} := \frac{1}{T^2} - \left(1 - \frac{2 \cdot \xi}{T} + \frac{1}{T^2}\right) x_i - 2 \cdot \left(\frac{\xi}{T} - 1\right) \cdot x_{i+1},$$

$$h(t) := 1 - \frac{e^{-\xi \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right).$$

Если этим нельзя пренебречь, нужно использовать обратные разности или привести систему к нормальной форме, как показано на рисунке 3.5.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2 \cdot \xi \cdot T}{T^2} \end{pmatrix}$$

$$tk := 50 \quad h := 1 \quad N := \frac{tk}{h} \quad B := \frac{0}{T^2}$$

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i := 0..N \quad x_{i+1} := x_i + (A \cdot x_i + B) \cdot h$$

В этом случае два начальных условия x_0 задаются в начальный момент времени. Следует иметь в виду, что интервал дискретности должен удовлетворять не только точности, но и условиям устойчивости.

3.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Подобно тому, как применение преобразования Лапласа к линейным дифференциальным уравнениям давало возможность получить удобную методику анализа непрерывных систем, для дискретных систем также был разработан ряд специальных преобразований.

Z -преобразованием решетчатой функции $x(ih)$ называется функция комплексного аргумента z , определяемая выражением

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(ih)z^{-i}. \quad (3.6)$$

Функция $x(ih)$ называется *оригиналом*, а функция $X(z)$ — *изображением*, или z -преобразованием функции $x(ih)$.

Дискретные значения функции по ее z -преобразованию определяют следующим контурным интегралом:

$$f(ih) = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi ih} \oint X(z)z^{i-1} dz. \quad (3.7)$$

Приведем примеры прямых и обратных z -преобразований, вычисленных с помощью системы MathCAD (по умолчанию для дискретного времени используется переменная n , а на рисунке 3.6 представлены графики кривой разгона и весовой функции в дискретном времени):

$$1ztrans \rightarrow \frac{z}{z-1} \quad \frac{z}{z-1} invztrans \rightarrow 1,$$

$$nhztrans \rightarrow \frac{nh \cdot z}{z-1} \quad \frac{nh \cdot z}{z-1} invztrans \rightarrow nh,$$

$$e^{-nh}ztrans \rightarrow \frac{z \cdot e^{-nh}}{z-1} \quad \frac{z \cdot e^{-nh}}{z-1} invztrans \rightarrow e^{-nh},$$

$$nh \cdot e^{-nh}ztrans \rightarrow \frac{nh \cdot z \cdot e^{-nh}}{z-1} \quad \frac{nh \cdot z \cdot e^{-nh}}{z-1} invztrans \rightarrow nh \cdot e^{-nh},$$

$$\left(1 - e^{-\frac{nh}{a}}\right)ztrans \rightarrow -\frac{z \cdot \left(e^{-\frac{nh}{a}} - 1\right)}{z-1},$$

$$f1(nh) := -\frac{z \cdot \left(e^{-\frac{nh}{a}} - 1\right)}{z-1} invztrans \rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}nh},$$

$$a := 2 \quad \underline{f}(nh) := \frac{z \cdot e^{-nh}}{z-1} invztrans \rightarrow e^{-nh}.$$

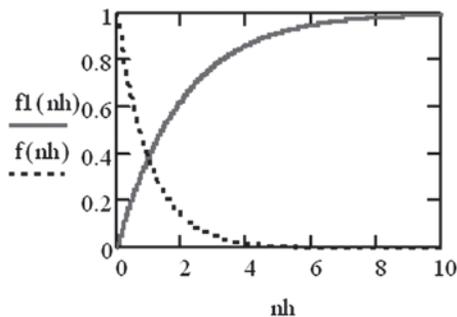


Рис. 3.6
Кривая разгона $f1$ и весовая функция f апериодического звена

Пусть разностное уравнение, связывающее выходную координату $x_i = x(ih)$ импульсной системы с входным воздействием $u_i = u(ih)$ имеет следующий вид:

$$a_0x(i) + a_1x(i-1) + \dots + a_mx(i-m) = b_0u(i) + b_1u(i-1) + \dots + b_ku(i-k) \quad (3.8)$$

при $m \geq k$.

Подвергнув исходное уравнение z -преобразованию, получим уравнение

$$a_0X(z) + z^{-1}a_1X(z) + \dots + z^{-m}a_mX(z) = b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + \dots + b_kz^{-k}U(z), \quad (3.9)$$

которое можно переписать в виде

$$A(z)X(z) = B(z)U(z), \quad (3.10)$$

где $A(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}$, $B(z) = \sum_{i=0}^k b_i z^{-i}$.

Обозначив через $W(z)$ передаточную функцию импульсного звена, получим

$$W(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^k b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}.$$

Для разностного уравнения колебательного звена:

$$b_0 = \frac{1}{T^2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2\left(\frac{\xi}{T} - 1\right), \quad a_2 = 1 - \frac{2\xi}{T} + \frac{1}{T^2}$$

и передаточная функция

$$W(z) = \frac{\frac{1}{T^2}}{1 + 2\left(\frac{\xi}{T} - 1\right)\frac{1}{z} + \left(1 - \frac{2\xi}{T} + \frac{1}{T^2}\right)\frac{1}{z^2}}.$$

Такая передаточная функция характеризует преобразование решетчатой функции $u(ih)$ в дискретные моменты времени $t_i = ih$ на входе дискретного фильтра с дискретной передаточной функцией $W(z)$ в выходную решетчатую функцию $x(ih)$ в области изображений.

3.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Частотные характеристики дискретного фильтра определяются комплексным спектром передаточной функции $W(z)$ (спектром дискретной функции веса) и представляют собой комплексную функцию вещественного переменного ω , определяемую формулой

$$W(e^{i\omega h}) = W(z)|_{z=e^{i\omega h}}. \quad (3.11)$$

Таким образом, для получения комплексного спектра необходимо в изображении решетчатой функции произвести замену $z = e^{i\omega h}$, откуда следует, что фун-

кция $e^{i\omega h}$ является периодической функцией ω с периодом, равным $\frac{2\pi}{h}$. По этой причине комплексный спектр решетчатой функции также является периодической функцией с таким же периодом

$$W(e^{i\omega h}) = W\left(e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{h}\right)h}\right)$$

и, следовательно, может рассматриваться на любом интервале значений ω , длина которого равна $\frac{2\pi}{h}$. Пример вычисления частотных характеристик колебательного звена приведен на рисунке 3.7.

$$N := 10 \quad \xi := 0.1 \quad i := \sqrt{-1},$$

$$W(z) := \frac{1}{T^2 \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{\xi}{T} - 1 \right) \cdot \frac{1}{z} + \left(1 - \frac{2 \cdot \xi}{T^2} + \frac{1}{T^2} \right) \cdot \frac{1}{z^2} \right]}$$

$$W(w) := W(z) \text{ substitute, } z = e^{i \cdot w} \rightarrow \frac{1}{99.0 \cdot e^{-2.0i \cdot w} - 198.0 \cdot e^{-1.0i \cdot w} + 100.0}$$

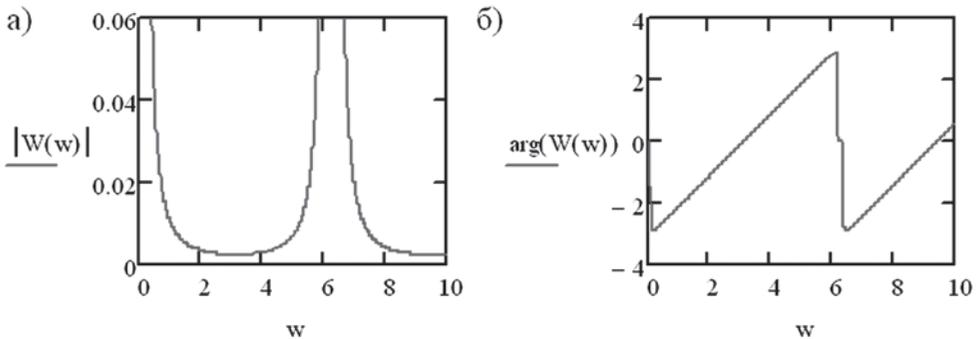


Рис. 3.7
Дискретные АФЧХ (а) и ФЧХ (б) колебательного звена

Рассмотрим последовательное соединение импульсного элемента, реализующего на выходе решетчатую функцию $u(ih)$, которая подается на вход динамического элемента с непрерывным преобразованием функции $u(ih)$ в непрерывную функцию $x(t)$ (рис. 3.8).

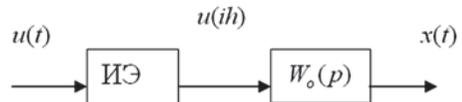


Рис. 3.8
Схема непрерывной системы с импульсным элементом

Решетчатая функция представляет собой сумму дельта-функций $\delta(ih)$ в дискретные моменты времени с шагом h , $\int \delta(ih) dt = u(ih)$, поэтому реакция непрерывного динамического элемента в силу принципа суперпозиции линейных систем будет представлять собой сумму импульсных переходных характеристик (функций веса) в моменты времени ih .

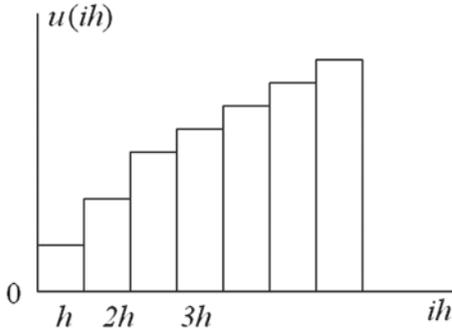


Рис. 3.9
Импульсы длительностью h

В большинстве случаев импульсный элемент формирует прямоугольные или близкие к прямоугольным импульсы длительности h , т. е. импульсная функция формирующего элемента имеет вид, представленный на рисунке 3.9.

Прямоугольный импульс единичной высоты и длительности h можно представить как

$$u(t, h) = \begin{cases} 1(t), & 0 \leq t \leq h; \\ 0, & t > h. \end{cases} \quad (3.12)$$

В этом случае передаточная функция $W_e(p)$ непрерывного элемента, преобразующего δ -функции в прямоугольные импульсы:

$$W_e(p) = \int_0^h 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-hp} + \frac{1}{p} = \frac{1 - e^{-hp}}{p}. \quad (3.13)$$

Тогда расчетное соотношение для дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы можно получить из

$$W(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-hp}}{p} W(p) \right] = W_1(z) + W_2(z), \quad (3.14)$$

где

$$W_1(z) = Z \left[\frac{W(p)}{p} \right], \quad W_2(z) = Z \left[\frac{W(p) e^{-hp}}{p} \right]. \quad (3.15)$$

Передаточную функцию $W_2(z)$ можно выразить через передаточную функцию $W_1(z)$ в соответствии с теоремой сдвига. В результате получим

$$W_2(z) = z^{-1} W_1(z), \quad W(z) = \frac{z-1}{z} W_1(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{W(p)}{p} \right]. \quad (3.16)$$

Пример. Определить дискретную передаточную функцию импульсной системы, у которой импульсный элемент формирует прямоугольные импульсы длительности с периодом дискретности $h = 1$, а непрерывная часть задана передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p},$$

которая соответствует регулированию аperiodического объекта интегральным регулятором.

Дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы находим по выражению (3.16), представляя передаточную функцию $W(p) = \frac{W(p)}{p}$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p^2(Tp+1)} = \frac{k}{p^2} - \frac{kT}{p} + \frac{kT}{p+\frac{1}{T}} = k \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T}{p+\frac{1}{T}} \right).$$

Найдем z -преобразование для каждого из слагаемых в правой части полученного выражения:

$$W(z) = k \left[\frac{hz}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{z - e^{-\frac{h}{T}}} \right].$$

Импульсная переходная характеристика разомкнутой системы определится с помощью обратного z -преобразования:

$$W(n) := k \cdot \left[\frac{h \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{T \cdot z}{z-1} + \frac{T \cdot z}{z - e^{-\frac{h}{T}}} \right] \text{invztrans} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow k \cdot \left[h \cdot n - T + T \cdot \left(e^{-\frac{h}{T}} \right)^n \right].$$

3.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Как и для непрерывных систем, устойчивость импульсных систем является необходимым условием их работоспособности.

Устойчивость системы характеризуется ее свободным движением при отсутствии внешних воздействий, свойствами функции веса. Линейная импульсная система называется устойчивой, если переходная составляющая процесса $x_i = x(ih)$, $i = 0, 1, \dots$, стремится к нулю с течением времени:

Сформулированное условие устойчивости сводится к выполнению равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(ih) = 0. \quad (3.17)$$

Если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(ih) = \text{const},$$

то импульсная система находится на границе устойчивости.

Таким образом, чтобы оценить устойчивость системы, необходимо найти переходную составляющую процесса. Переходная составляющая процесса регулирования определяется решением однородного разностного уравнения замкнутой импульсной системы:

$$a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_m x_{i-m} = 0,$$

где m — порядок системы.

Решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$x_i = \sum_{k=1}^m c_k z_k^i, \quad (3.18)$$

где z_k — корни характеристического уравнения $a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0$, а c_k — постоянные коэффициенты, значения которых зависят от свойств системы.

Из (3.18) следует, что для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома удовлетворяли условию

$$|z_k| < 1 \quad \forall k. \quad (3.19)$$

Если хотя бы один корень $|z_k| = 1$, система будет на границе устойчивости.

Графически область устойчивости импульсной системы на комплексной плоскости z корней характеристического уравнения изображается единичным кругом.

Таким образом, исследование устойчивости сводится к изучению расположения корней характеристического полинома замкнутой импульсной системы относительно единичной окружности.

Критерии устойчивости используются для исследования устойчивости импульсных систем без нахождения корней характеристического уравнения. Для импульсных систем обобщаются все критерии устойчивости, используемые для исследования непрерывных систем.

Аналог критерия Михайлова. Для устойчивости замкнутой линейной импульсной системы m -го порядка необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента функции $W(z)|_{z=e^{i\omega h}}$ при изменении частоты ω от 0 до $\frac{\pi}{h}$ равнялось бы значению $m\pi$, т. е. годограф АФЧХ проходил бы m квадрантов графика.

Аналог критерия Найквиста. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой импульсной системы требуется, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой импульсной системы $W(z)|_{z=e^{i\omega h}}$ не охватывала точку с координатами $(-1, i0)$.

Для разомкнутой системы, рассмотренной в качестве примера в п. 3.3, критерий Найквиста определяет такую систему как неустойчивую (рис. 3.10).

$$k := 1 \quad T := 2 \quad h := 1 \quad i := \sqrt{-1}$$

$$W(z) = k \left[\frac{Hz}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{-\frac{h}{T}} \right] \text{ substitute } z = e^{-i\omega h}$$

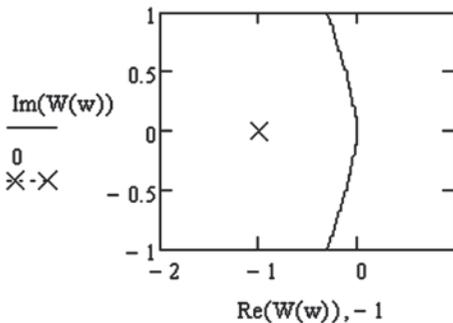


Рис. 3.10

Годограф критерия Найквиста для дискретной системы

Данное преобразование $W(z)$ для функции $W(w)$ не входит в формат документа.

Необходимость в анализе дискретных систем часто возникает при применении вычислительной техники в управляющих системах. Разностные уравнения, моделирующие процессы, протекающие в таких системах, являются конечно-разностными аналогами непрерывных систем. Для линейных дискретных систем, так же как и для непрерывных систем, можно приме-

нить операционные методы для определения передаточных функций, частотных характеристик и на этой основе делать заключения о свойствах дискретных систем. Если для непрерывных систем передаточная функция является изображением реакции непрерывной системы на δ -функцию — импульс бесконечной амплитуды, но единичной площади, то дискретная передаточная функция является z -изображением реакции дискретной системы на единичный импульс в начальный момент времени. В связи с этим преобразование Лапласа и z -преобразование связаны соотношением $W(p) = W(z)|_{z = e^{-sh}}$.

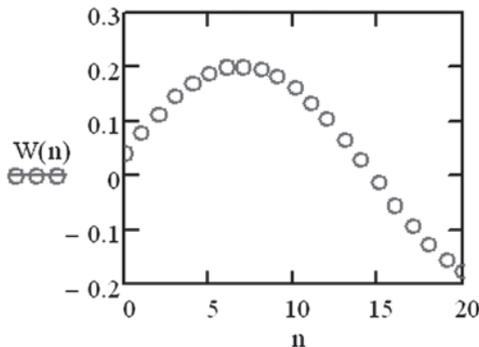
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. Что такое квантование по времени и по уровню для дискретных систем?
2. На чем основана замена дифференциального уравнения конечно-разностным соотношением?
3. Что такое z -преобразование решетчатой функции?
4. Как получить передаточную функцию дискретной системы?
5. Как связаны частотные характеристики с передаточной функцией дискретной системы?

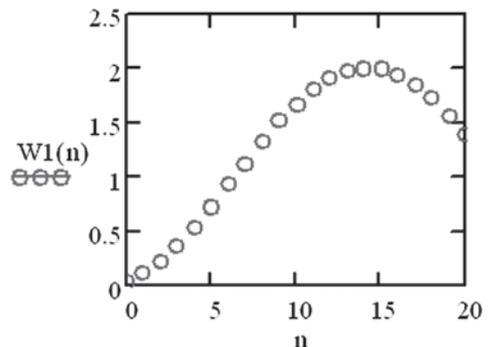
ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 3

Задание 3.1. Определить передаточную функцию $W(z)$ для дифференциального уравнения $25 \frac{d^2x}{dt^2} + 0,2 \frac{dx}{dt} + x = u$ при $h = 1$, функцию веса при реакции на δ -функцию и кривую разгона как реакцию на единичный импульс.

Ответ: Передаточная функция $W(z) = \frac{1}{25 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1.96}{z} + 1 \right)}$,



Весовая функция



Кривая разгона

Задание 3.2. Построить АЧХ и ФЧХ для передаточной функции из примера 3.1.

Ответ:

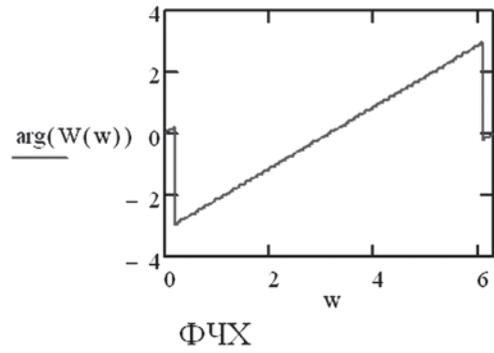
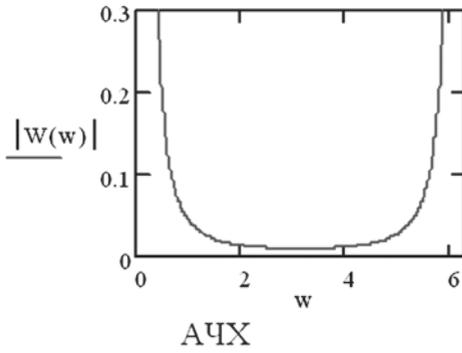
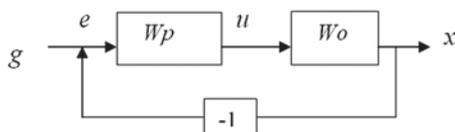


Схема системы управления с использованием регулятора по принципу отрицательной обратной связи показана на рисунке 4.1.

Рис. 4.1
Структурная схема системы регулирования:

g — задание; e — ошибка;
 u — управление; x — состояние (выход); W_p — регулятор;
 W_o — объект управления.



4.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Качество системы управления часто оценивают по временным динамическим характеристикам, полученным при реализации возмущающего воздействия. Рассмотрим наиболее часто используемые показатели качества на примере кривой перехода при изменении задания:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

т. е. при единичной ошибке $e(t)$ для системы 2-го порядка, полученной численным интегрированием (рис. 4.2):

$$\xi := 0.2 \quad T := 1 \quad tk := 3C \quad N := \frac{tk}{h} \quad h := .1,$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & \frac{2 \cdot \xi \cdot T}{T^2} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T^2} \end{pmatrix},$$

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i := 0..N \quad x_{i+1} := x_i + (A \cdot x_i + B) \cdot h \quad \varepsilon := 0.05.$$

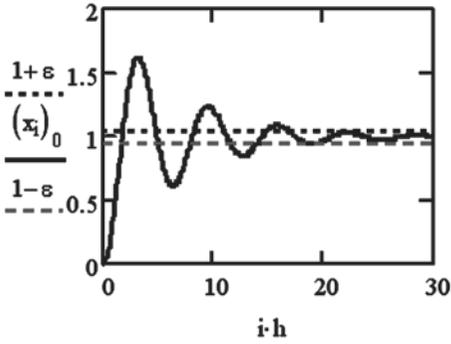


Рис. 4.2
Переходная функция
системы 2-го порядка

Устойчивость системы определяют по собственным числам λ матрицы A :

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.2 + 0.98i \\ -0.2 - 0.98i \end{pmatrix}.$$

Так как действительные части всех собственных чисел отрицательны, система устойчива. О степени устойчивости судят по свойствам собственных чисел.

Запас устойчивости по амплитуде определяют как действительную часть собственного числа, наиболее близко расположенного к мнимой оси:

$$|\max |(\operatorname{Re}(\lambda))| = 0.2.$$

Запас устойчивости по фазе определяют как угол между лучом, проходящим через комплексно-сопряженный корень с максимальной мнимой составляющей, и мнимой осью:

$$|\max |(\arg(\lambda))| - \frac{\pi}{2} = 0.201.$$

Время перехода определяют как минимальное время T_m , после которого переходный процесс $|x(t) - 1| \leq \varepsilon \forall t > T_m$:

$$T_m := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N \\ \text{break if } |ht_{N-i} - 1| > \varepsilon \\ (N - i + 1) \cdot h \end{cases} \quad T_m = 19.5.$$

Величина перерегулирования определяется как максимальное верхнее отклонение выхода системы от заданного значения:

$$\max(ht) - 1 = 0.619.$$

Степень колебательности характеризует затухание колебательного процесса и является отношением второго к первому максимальных отклонений выходной величины от заданного значения:

$$h2 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N \\ \text{break if } ht_i - (\max(ht)) = 0 \\ h2 \leftarrow \text{submatrix}(ht, i, N, 0, 0) \end{cases} \quad \frac{(\max(-h2) + 1)}{\max(ht) - 1} = 0.618.$$

Интегральные показатели характеризуют суммарное отклонение выходной величины от заданного значения в принятой метрике (чаще всего используются суммарная ошибка по модулю и суммарная квадратичная ошибка):

$$\sum_{i=0}^N |ht_i| = 297.101 \quad \sum_{i=0}^N (ht_i)^2 = 312.159.$$

Эти показатели часто противоречат друг другу, и добиться одновременно всех наилучших показателей не представляется возможным, поэтому часто приходится решать задачу проектирования системы управления на основе компромисса между ними.

С этой целью наиболее часто прибегают к методу ведущего критерия, при котором оптимизируют главный показатель, а остальные критерии вводят в ограничения — условия, в которых остальные показатели должны быть не хуже, чем заданные требования:

$$ht1 := icfft(hf),$$

$$hf := cfft(ht).$$

Частотные методы позволяют на основе частотных характеристик косвенно судить о динамических свойствах системы. Однако точные обратные преобразования из пространства изображений в пространство оригиналов возможны только в простых случаях для систем не высокого порядка. На основе численных преобразований решить эту задачу можно для широкого круга проблем. Для примера сравним кривые перехода, полученные численным методом и дискретным преобразованием Фурье (рис. 4.3).

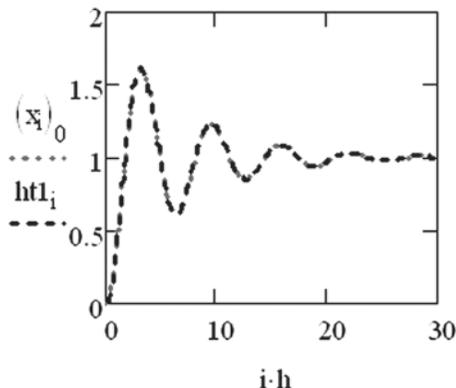


Рис. 4.3

Сравнение численного интегрирования и численного преобразования Фурье

4.2. АНАЛИЗ НАСТРОЕК РЕГУЛЯТОРОВ

Проведем анализ настроек регуляторов на качество систем регулирования с объектом в виде аperiodического звена.

П-регулятор. В качестве такого регулятора используется усилительное звено с единственным параметром, требующим выбора, — коэффициент усиления k . Документ 4.1 иллюстрирует свойства переходных процессов с таким регулятором.

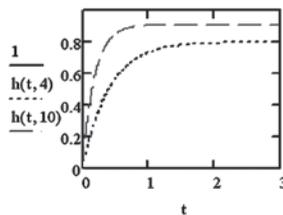
Как видно из графиков, система с П-регулятором обладает статической ошибкой, которая определяется как разница между заданием и пределом передаточной функции замкнутой системы при $p \rightarrow 0$:

$$1 - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k},$$

$$W_o(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W_p(p) := k$$

$$W(p) := \frac{W_o(p) \cdot W_p(p)}{1 + (W_o(p)) \cdot W_p(p)} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{k}{k + 2 \cdot p + 1}$$

$$h(t, k) := \frac{W(p)}{p} \text{ invlaplace, } p \rightarrow -k \cdot \frac{[e^{-\frac{t(k+1)}{2}} - 1]}{k + 1}$$



Док. 4.1

Процесс регулирования с П-регулятором

в данном случае кривая разгона стремится к пределу

$$h(t \rightarrow \infty) = \frac{k}{1+k},$$

а статическая ошибка

$$\Delta_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{k+1}$$

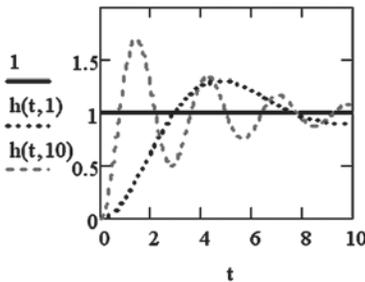
уменьшается с увеличением k .

И-регулятор. В этом случае используется интегрирующее звено с одним параметром настройки — времени изодрома $T = \frac{1}{k}$. Документ 4.2 иллюстрирует свойства замкнутой системы в этом случае.

$$W_o(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W_p(p) := \frac{k}{p}$$

$$W(p) := \frac{W_o(p) \cdot W_p(p)}{1 + (W_o(p)) \cdot W_p(p)} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{k}{2 \cdot p^2 + p + k}$$

$$h(t, k) := \frac{W(p)}{p} \text{invlaplace } p \rightarrow \text{simplify} \rightarrow 1 - \frac{e^{-\frac{t}{4}} \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{1-8 \cdot k}}{4}\right)}{\sqrt{1-8 \cdot k}} - e^{-\frac{t}{4}} \cdot \cosh\left(\frac{t \cdot \sqrt{1-8 \cdot k}}{4}\right)$$



Док. 4.2
Процесс регулирования
с И-регулятором

Анализ решения показывает, что замкнутая система с интегральным регулятором обладает свойством астатизма (отсутствием статической ошибки), с увеличением интегральной составляющей k в обратной связи решение становится с большим перерегулированием и с большей степенью колебательности.

Вычислим интеграл от квадрата ошибки (отклонения выхода системы от заданного значения), график зависимости интеграла от параметра настройки k показан на рисунке 4.4.

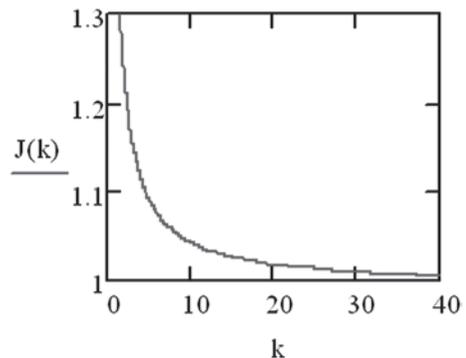


Рис. 4.4
Зависимость интегрального критерия от
настроек И-регулятора

$$J(k) := \int_0^{10} (h(t, k) - 1)^2 dt.$$

Из рисунка 4.4 видно, что интегральная ошибка монотонно уменьшается с увеличением k , однако чем больше k , тем хуже другие показатели качества системы, поэтому проектировщику приходится выбирать компромисс между этими показателями.

ПИ-регулятор. Передаточная функция ПИ-регулятора

$$W(p) = k_1 + \frac{k_2}{p}$$

зависит от двух параметров: k_1 характеризует вклад пропорционального регулирования, а k_2 — вклад интегрального регулирования. Документ 4.3 иллюстрирует свойства регулирования с ПИ-регулятором.

При символьном вычислении переходного процесса результат оказался сложной формулой, не входящей в рамки формата страницы. Интегральная функция ошибки от настроек ПИ-регулятора представляет собой поверхность в пространстве коэффициентов k_1, k_2 (рис. 4.5).

$$j(k_1, k_2) := \int_0^{10} (h(t, k_1, k_2) - 1)^2 dt,$$

$$M_{i,j} := J(i \cdot \Delta, j \cdot \Delta) \quad j := 0..n_2 \quad i := 0..n_1 \quad \Delta := 0.1 \quad n_2 := 50 \quad n_1 := 50.$$

Как видно из рисунка 4.5а, оптимальные настройки ПИ-регулятора соответствуют $k_1 \approx k_2 \approx 30$. На рисунке 4.5б показан переходный процесс с ПИ-регу-

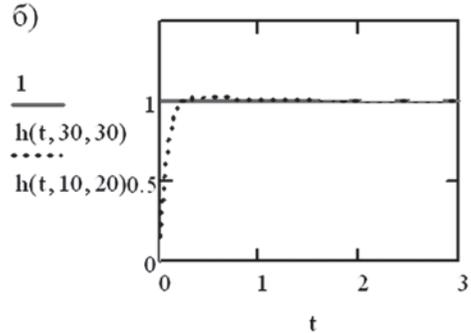
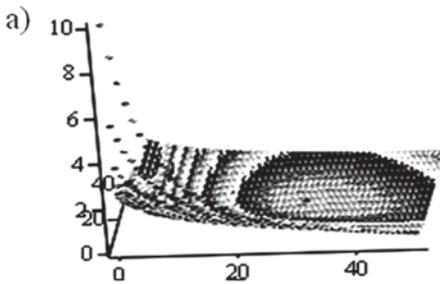


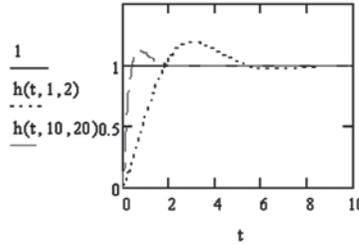
Рис. 4.5
Интегральный критерий (а) и процесс регулирования при оптимальных настройках ($h(t, 30, 30)$) ПИ-регулятора (б)

$$W_o(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W_p(p) := k_1 + \frac{k_2}{p}$$

$$W(p) := \frac{W_o(p) \cdot W_p(p)}{1 + (W_o(p)) \cdot W_p(p)} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{k_2 + k_1 \cdot p}{k_2 + p + 2 \cdot p^2 + k_1 \cdot p}$$

Обратное преобразование Лапласа $\frac{W(p)}{p} \cdot \text{invlaplace} \rightarrow$

для функции $h(t, k_1, k_2)$ не входит в формат документа



Док. 4.3

Процесс регулирования с ПИ-регулятором

лятором с оптимальными настройками и для сравнения с настройками $k_1 = 10$, $k_2 = 20$ при переходе на задание $x = 1$.

Документ 4.4 иллюстрирует влияние производной в закон управления с **ПИД-регулятором** при оптимальных настройках ПИ-регулятора из предыдущего примера. Анализ показывает, что увеличение вклада производной приводит к скачку $x(t)$ при $t = 0$ тем больше, чем больше вклад производной в закон управления. Следует иметь в виду, что увеличение этого вклада уменьшает устойчивость системы при гармонических воздействиях, так как

$$\frac{dx(\sin(\omega t))}{dt} = \omega x' \cos(\omega t),$$

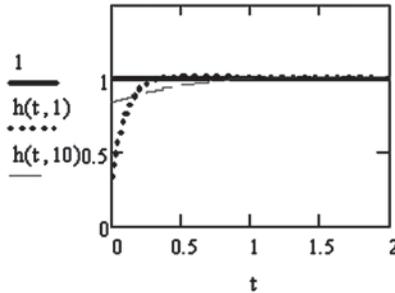
и при возрастании частоты гармонические колебания усиливаются.

$$W_o(p) := \frac{1}{2 \cdot p + 1} \quad W_p(p) := k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 \cdot p \quad k_1 := 3\mathcal{C} \quad k_2 := 3\mathcal{C}$$

$$W(p) := \frac{W_o(p) \cdot W_p(p)}{1 + (W_o(p)) \cdot W_p(p)} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{k_3 \cdot p^2 + k_1 \cdot p + k_2}{k_2 + p + k_3 \cdot p^2 + 2 \cdot p^2 + k_1 \cdot p}$$

Обратное преобразование Лапласа $\frac{W(p)}{p} \text{ invlaplace} \rightarrow$

для функции $h(t, k_3)$ не входит в формат документа



Док. 4.4
Переходные процессы с ПИД-регулятором в зависимости от вклада производной k_3 в закон управления

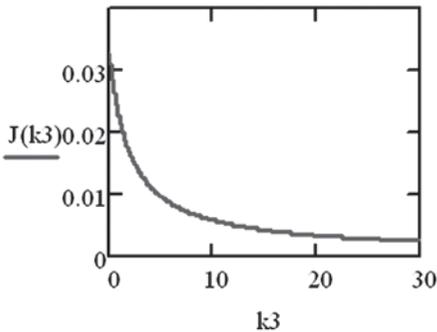


Рис. 4.6

Зависимость качества регулирования от вклада производной k_3 в закон управления

Рисунок 4.6 иллюстрирует зависимость интегрального критерия от вклада производной в закон управления. При отсутствии помех интегральный критерий монотонно уменьшается:

$$j(k_3) := \int_0^{10} (h(t, k_3) - 1)^2 dt.$$

Проведенный анализ использовал известные решения для дифференциальных уравнений, описывающих динамику элементарных звеньев систем автоматического управления. В более сложных

случаях приходится использовать численные методы для анализа настроек регуляторов. Документ 4.5 иллюстрирует анализ настроек П- и ПИ-регулятора для объекта управления, описывающихся нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = k_1 u(t) + k_2 \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

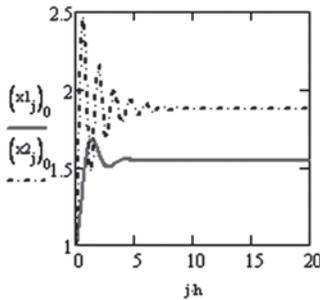
Настройки ПИ-регулятора для нелинейного объекта

a := .5 b := 1 c := .5 d := .04 limx := 2 Параметры объекта и задание для x
tk := 20 N := 500 j := 0..N h := tk/N x0 := $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x0 - начальные условия
k1 - коэффициент усиления
k2 - коэффициент интегрирования

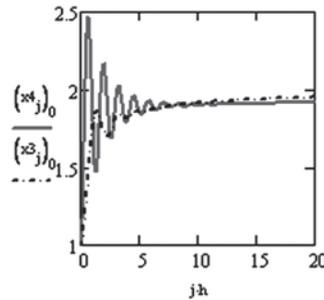
$$F(k1, k2) := \begin{matrix} x_0 \\ \text{for } j \in 0..N \\ x_{j+1} \leftarrow x_j + \left[\frac{1}{a} \left[-k1 \cdot [(x_j)_0 - \text{limx}] - k2 \cdot \sum_{k=0}^j [(x_k)_0 - \text{limx}] - b \cdot (x_j)_1 - c \cdot (x_j)_0 - d \cdot [(x_j)_0]^3 \right] \right] \cdot h \end{matrix}$$

x1 := F(2,0) x2 := F(10,0)

x3 := F(2,.05) x4 := F(10,0.01)



П-регулятор, k1=2 (x1), k1=10 (x2)



ПИ-регулятор, k=2,0,05 (x3), k=10,0,01 (x4)

Док. 4.5

Для реализации численного решения такого дифференциального уравнения применен метод Эйлера (см. главу 5), интегральная составляющая заменена суммой, дифференциальная составляющая заменялась бы конечной разностью. Преимуществом такого подхода является анализ нелинейных систем с ненулевыми начальными условиями и с конечным временем переходных процессов. В данном случае приведен переходный процесс за конечное время $tk = 20$

из состояния $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ в конечное состояние $x(\infty) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Следует иметь в виду

наличие ошибок из-за конечного времени анализа и ошибок интегрирования дифференциального уравнения, пропорционального шагу h в схеме интегрирования по формуле Эйлера.

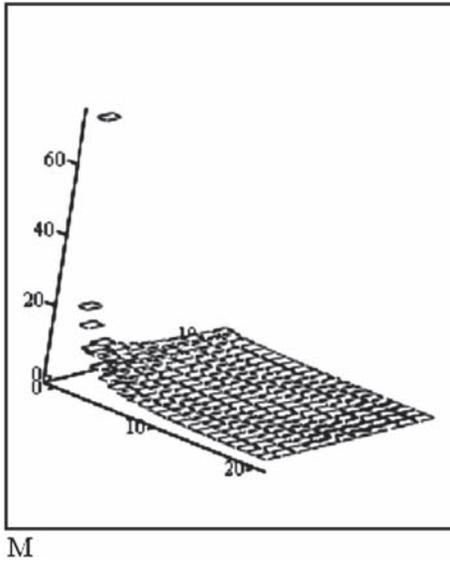


Рис. 4.7
Интегральный критерий качества для
ПИ-регулятора

Анализ переходных процессов документа 4.5 показывает, что П-регулятор обладает статической ошибкой, уменьшающейся с увеличением коэффициента k_1 , но это приводит к увеличению колебательности процесса регулирования. ПИ-регулятор лишен этого недостатка и позволяет добиться лучшего качества переходного процесса.

Анализ влияния настроек ПИ-регулятора на интегральный показатель качества представлен на рисунке 4.7.

$$i := 0..20 \quad k := 0..10,$$

$$k1_i := i \cdot 0.5 \quad k2_k := k \cdot 0.005 \quad x_{i,k} := F(k1_i, k2_k).$$

Из рисунка 4.7 видно, что в значительных пределах изменения настроек ПИ-регулятора интегральный критерий слабо меняется, поэтому другие показатели качества процесса регулирования могут иметь решающее значение.

Показатели качества систем управления часто противоречат друг другу, и добиться одновременно всех наилучших показателей не представляется возможным, поэтому часто приходится решать задачу проектирования системы управления на основе компромисса между ними.

С этой целью наиболее часто прибегают к методу ведущего критерия, при котором оптимизируют главный показатель, а остальные критерии вводят в ограничения — условия, в которых остальные показатели должны быть не хуже, чем заданные требования.

Частотные методы позволяют на основе частотных характеристик косвенно судить о динамических свойствах системы. Однако точные обратные преобразования из пространства изображений в пространство оригиналов возможны только в простых случаях для систем не высокого порядка. На основе численных преобразований решить эту задачу можно для широкого круга проблем.

Численное моделирование динамики процесса управления на основе дифференциальных уравнений позволяет анализировать нелинейные системы с конечным временем управления и произвольными начальными условиями.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

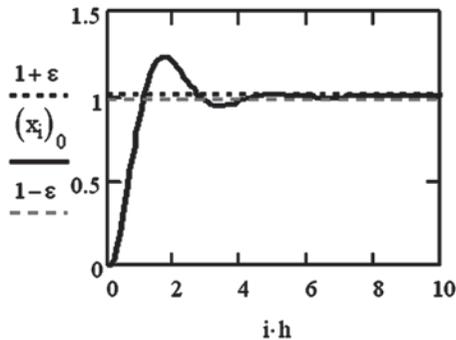
1. Каковы основные характеристики качества систем управления?
2. Перечислите основные типы законов управления в промышленных регуляторах.
3. Что такое статические и астатические системы регулирования?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 4

Задание 4.1. Определить основные показатели качества переходного процесса для динамической системы $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, где матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, u(t) = 1, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: 1. Переходный процесс:



2. Запас устойчивости по модулю:

$$|\max(\operatorname{Re}(\lambda))| = 1,$$

по фазе:

$$|\max(\arg(\lambda))| - \frac{\pi}{2} = 0.524.$$

3. Перерегулирование:

$$\max(ht) - 1 = 0.238.$$

4. Время перехода с точностью

$$\varepsilon = 0,02:$$

$$T_m = 4.1.$$

5. Показатель колебательности:

$$\frac{(\max(-h2) + 1)}{\max(ht) - 1} = 0.236.$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Уравнения движения задают связь между состоянием системы $x(t)$ и управлением $u(t)$. Для динамических систем обычно эта связь задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) типа:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad t \in [0, T]. \quad (5.1)$$

Покомпонентно эту систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \dots, \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_n). \end{cases} \quad (5.2)$$

Система (5.1) должна быть дополнена m условиями для единственности решения. Обычно это начальные условия, задаваемые в виде

$$x(0) = x^0. \quad (5.3)$$

Задача решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.1) с начальными условиями (5.2) называется *задачей Коши*.

Если время t явно входит в функцию $f(x, u, t)$, то такая система называется неавтономной, иначе система с правой частью $f(x, u)$ является нелинейной автономной системой. Явная зависимость правых частей от времени не является обременитель-

ной, так как можно ввести дополнительную переменную $x'_{m+1} = 1$, $x_{m+1}(0) = 0$ и исключить время t . Если функция линейная по x и u , тогда имеют дело с линейной системой:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (5.4)$$

Если матрицы A , B зависят от времени, то

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \quad (5.5)$$

является линейной системой с переменными параметрами.

При моделировании систем часто $u(t)$ — известная функция времени, и тогда, не теряя общности, можно рассматривать задачу Коши в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x^0.$$

Приведем примеры уравнений движения.

Пример 1. Рассмотрим уравнения движения математического маятника.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + mg \sin x = u(t). \quad (5.6)$$

Первый член в этом уравнении характеризует силы инерции маятника (m — масса маятника); второй член характеризует силы сопротивления среды движению маятника (k — коэффициент сопротивления); последнее слагаемое — силы тяжести (g — ускорение свободного падения). В правой части (5.6) присутствует возмущающая сила $u(t)$, которая может быть и управлением, предназначенным для успокоения колебаний маятника. Подобной математической моделью (но с другой функцией $g(x)$ вместо силы тяжести) описываются многие технические и физические процессы, начиная от модели подвески автомобиля и заканчивая процессами в электронных схемах. Для приведения уравнения (5.6) к стандартному виду — системе ОДУ 1-го порядка — произведем замену переменных: x_1 — положение маятника, x_2 — скорость маятника:

$$x_1 = x, \quad x'_1 = x_2.$$

Теперь уравнение (5.6) примет вид

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - g \sin x_1 + \frac{u(t)}{m}, \\ f_1 &= x_2; \quad f_2 = -\frac{k}{m}x_2 - g \sin x_1 + \frac{u(t)}{m}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Полученная система уравнений должна быть дополнена начальными условиями для выделения единственного решения, характеризующими положение маятника, и его скорость в начальный момент времени:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.7) совместно с начальными условиями (5.8) позволяет определить поведение системы для всех $t > 0$. Несмотря на простоту системы (5.7), она не интегрируется в квадратурах. Это обстоятельство является обычным при моделировании динамики сложных систем. Общий метод получения решения нелинейных ОДУ — метод численного интегрирования. Ниже приведена программа, позволяющая получить такое решение (док. 5.1). В этом документе использована встроенная программа MathCAD rkfixed, интегрирующая уравнения методом Рунге — Кутты 4-го порядка точности.

Интегрирование уравнений движения

коэффициенты уравнения число шагов время шаг интегрирования

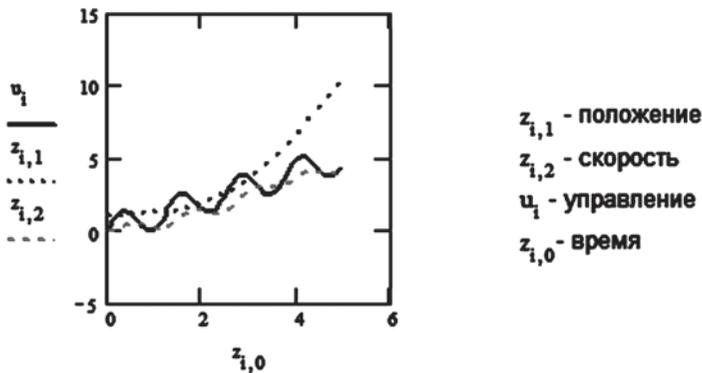
$a := .5$ $b := 1$ $d := .4$ $N := 50$ $tk := 5$ $h := \frac{tk}{N}$

$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ начальное условие $u(t) := (t + \sin(5 \cdot t))$ управление

$f(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot y_1 - d \cdot \sin(y_0)) \end{bmatrix}$ правые части дифференциального уравнения

$z := \text{rkfixed}(y, 0, tk, N, f)$ подпрограмма интегрирования методом Рунге - Кутты

$i := 0..N - 1$ $u_i := u(i \cdot h)$



Док. 5.1

Пример 2. Рассмотрим динамику несвязанной трехсекторной экономики: производство средств производства с производственной функцией (ПФ) $Y_1 = F_1(K_1, L_1)$, производство предметов потребления с производственной функцией $Y_2 = F_2(K_2, L_2)$ и «производство» культурных ценностей с ПФ $Y_3 = F_3(K_3, L_3)$. Здесь Y_i, K_i, L_i — объемы производства, затраты капитала и труда соответственно в каждом секторе. Если через α_i обозначить долю произведенного продукта, идущего на накопление капитала, через β_i — долю выбытия капитала в каждом

из секторов, то для изменения капитала во времени система дифференциальных уравнений будет следующей:

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} = \alpha_1 Y_1(K_1, L_1) - \beta_1 K_1, \\ \frac{dK_2}{dt} = \alpha_2 Y_2(K_2, L_2) - \beta_2 K_2, \\ \frac{dK_3}{dt} = \alpha_3 Y_3(K_3, L_3) - \beta_3 K_3. \end{cases} \quad (5.9)$$

Пусть первоначальный капитал, вложенный в эти секторы $K_i(0) = K_i^0$, а вложения в труд постоянны — $L_i(t) = L_i$. Решение дифференциального уравнения покажет изменение капитала, а следовательно, и производства во времени. Эти изменения иллюстрирует следующий документ MathCAD (док. 5.2). Интегрирование произведено методом Эйлера 1-го порядка точности, использована производственная функция Кобба — Дугласа $Y(K, L) = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$.

В качестве управления могут быть использованы коэффициенты α_i , определяющие инвестиции в развитие производства, целью управления может быть максимизация производства.

Динамика несвязанных секторов экономики

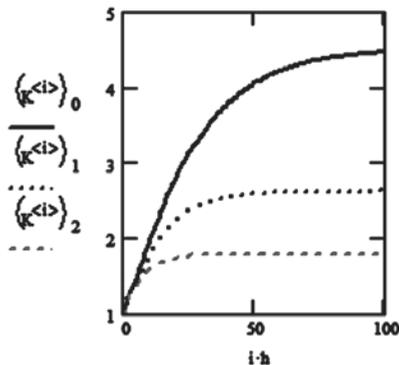
n := 100 i := 0..n

h := 1

$$a0 := \begin{bmatrix} 1.002 \\ .98 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a1 := \begin{bmatrix} 0.5382 \\ .6 \\ .5 \end{bmatrix} \quad a2 := \begin{bmatrix} 0.4518 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \alpha := \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \\ .4 \end{bmatrix} \quad \beta := \begin{bmatrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{bmatrix} \quad K^{<0>} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(K, L) := \overline{(a0 \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2})} \quad A := \text{diag}(\alpha) \quad B := \text{diag}(\beta) \quad A_{1,0} := .0$$

$$K^{<i+1>} := K^{<i>} + h \cdot ((A \cdot Y(K^{<i>}, L) - B \cdot K^{<i>}))$$



$$j := n \quad K^{<j>} = \begin{bmatrix} 4.462 \\ 2.619 \\ 1.778 \end{bmatrix} \quad \text{- величина капитала в конце периода}$$

$$Y(K^{<j>}, L) = \begin{bmatrix} 2.241 \\ 1.746 \\ 1.333 \end{bmatrix} \quad \text{- величина дохода в конце периода по секторам}$$

$$\Sigma Y(K^{<j>}, L) = 5.321 \quad \text{- суммарный доход}$$

Док. 5.2 (начало)

Динамика изменения капитала по секторам

$$\begin{array}{llll}
 I := \text{diag}(\alpha) Y(K^{<j>}, L) & I = \begin{bmatrix} 0.448 \\ 0.524 \\ 0.533 \end{bmatrix} & \Sigma I = 1.505 & \text{-расходы на капитализацию по секторам и в целом} \\
 S := Y(K^{<j>}, L) - I & S = \begin{bmatrix} 1.793 \\ 1.223 \\ 0.8 \end{bmatrix} & \Sigma S = 3.815 & \text{- потребление по секторам и в целом}
 \end{array}$$

Док. 5.2 (окончание)

Пример 3. Уравнения плоского движения космического аппарата (КА) в ньютоновском поле имеют следующий вид:

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{m_1 m_2 r}{|r|^3} + m_1 a, \quad |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.10)$$

В этой системе из трех дифференциальных уравнений 2-го порядка r — радиус-вектор расстояния от притягивающего центра, например Земли, до КА, m_1 — масса КА, m_2 — масса притягивающего центра, a — вектор реактивного ускорения, k — гравитационная постоянная, x, y, z — проекции вектора r на декартовы оси координат.

От уравнения (5.10) в размерных единицах полезно перейти к безразмерным переменным как с точки зрения численного счета, так и для распространения полученных результатов на любой притягивающий центр: Землю, Луну и т. д. Для этого сделаем замену переменных на безразмерные, взяв за единицу времени суточный период вращения Земли $T_c = 86\,164$ с и безразмерное расстояние от центра Земли до геостационарной орбиты $R_c = 42\,164$ км. В этом случае радиусу стационарной орбиты и периоду обращения спутника на ней соответствуют единичные радиус и скорость.

Записывая это уравнение покомпонентно, имеем систему из трех уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x - \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = a_y - \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = a_z - \frac{z}{r^3}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Ее можно упростить и записать

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = a - \frac{r}{|r|^3}.$$

Здесь управление — это реактивное ускорение a . Целью управления может быть вывод КА на заданную орбиту.

Пример 4. Простейшие уравнения движения самолета имеют вид

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma_x - C(y) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = ma_y - mg + C_2 \frac{dx}{dt}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Вывод данных формул и интегрирование уравнений движения читатели должны будут сделать самостоятельно.

5.1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

В отличие от статических моделей процессов, в которых входные воздействия вызывают немедленное изменение выходных переменных и связь между входом и выходом модели описывается функцией, динамические модели осуществляют преобразование входной функции $u(t)$ в выходную функцию $x(t)$. Это функции от независимого аргумента t (в динамических моделях t — это время). Связь между функциями $x(t)$ и $u(t)$ в этом случае задается в виде дифференциального уравнения. Линейные дифференциальные уравнения имеют точное решение в общем случае (см. главу 2), однако довести его до конечного результата часто удается лишь численно. Нелинейные уравнения интегрируются точно лишь в некоторых случаях. В данной главе будут рассмотрены простые численные алгоритмы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в нормальном виде — виде численного интегрирования следующего дифференциального уравнения с заданными начальными условиями:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \in [0, T], \quad (5.13)$$

$$x(0) = x^0. \quad (5.14)$$

Прежде чем искать решение дифференциального уравнения, полезно убедиться в существовании и единственности его решения, которое определяет следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ правой части дифференциального уравнения удовлетворяет условию Липшица: если

$$|x_1 - x_2| < A, \quad \text{то} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < M,$$

где M — константа Липшица; x_1, x_2 — произвольные точки из отрезка $[a, b]$, принадлежащего области определения функции $f(x)$. Тогда данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$, т. е. если функция допускает разрывы первого рода, то решение существует; если 2-го рода, то решение может не существовать.

Теорема о существовании решения задачи Коши основана на доказательстве сходимости следующего итерационного процесса, полученного на основе интегрирования уравнения (5.13):

$$x(t)_{k+1} = x(0) + \int_0^t f(x(\tau)_k, u(\tau)) d\tau, \quad x(0) = x^0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.15)$$

Этот процесс сходится при указанных условиях, и метод интегрирования ОДУ называется методом Пиккара. Приведем документ MathCAD, реализующий этот алгоритм для задачи Коши $\frac{dx}{dt} = -x, x(0) = 1$ с точным решением $x(t) = e^{-t}$ (док. 5.3).

Метод Пиккара

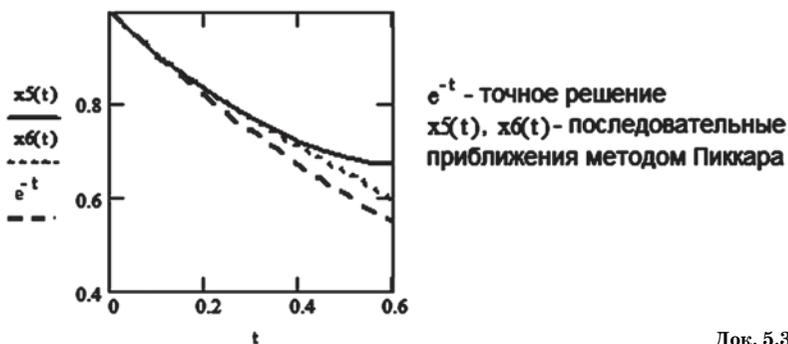
$$x_0 := 1 \quad f(x, t) := -x \quad x'(t) := 0$$

$$x_1(t) := x_0 + \int_0^t f(x_0, \tau) d\tau \rightarrow 1 \quad x_2(t) := x_1 + \int_0^t f(x_1, \tau) d\tau \rightarrow 1 - t$$

$$x_3(t) := x_2 + \int_0^t f(x_2, \tau) d\tau \rightarrow 1 - t + t^2 \quad x_4(t) := x_3 + \int_0^t f(x_3, \tau) d\tau \rightarrow 1 - t + t^2 - t^3$$

$$x_5(t) := x_4 + \int_0^t f(x_4, \tau) d\tau \rightarrow 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$$

$$x_6(t) := x_5 + \int_0^t f(x_5, \tau) d\tau \rightarrow 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 \quad t := 0, 0.05.. .6$$



Док. 5.3

Для приближенного решения ОДУ можно применить формулу Тейлора. Если правая часть дифференциального уравнения $f(x, t)$ — аналитическая функция в точке $f(x_0, 0)$, то, дифференцируя ее, имеем:

$$x' = f(x, t),$$

$$x'' = f_x(x, t) + f_x(x, t)x',$$

$$x''' = f_{tt}(x, t) + 2f_{tx}(x, t)x' + f_x(x, t)x'' + f_{xx}(x, t)(x')^2.$$

Теперь можно получить, кроме начального условия $x(0)$, значения производных $x'(0)$, $x''(0)$, ... Удерживая конечное количество членов ряда, получим приближенную формулу:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}(0)}{i!} t^i \quad (5.16)$$

с остаточным членом $o(t^{n+1})$. Если t больше радиуса сходимости ряда Тейлора, то этот метод неприменим. Чаще поступают следующим образом.

Разбивают интервал интегрирования $[0, T]$ на отрезки $[t_k, t_{k+1}]$. Если значение решения в точке t_k известно (например, $t_k = 0$, $x(0) = x^0$), то применим формулу Тейлора для определения решения в остальных точках отрезка:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}(t_k)}{i!} (t - t_k)^i. \quad (5.17)$$

Ошибка такого приближения

$$\max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x^*(t) - x(t)| \leq o(t_{k+1} - t_k)^{n+1}. \quad (5.18)$$

Обычно разбивают интервал интегрирования с равномерным малым шагом

$$h = T/N,$$

где N — число шагов. Тогда, обозначая на каждом шаге $x_k = x(t_k)$, получим итерационную схему интегрирования ОДУ n -го порядка точности (понижение порядка вызвано накапливанием ошибок (5.18) с числом слагаемых порядка $1/h$):

$$x_{k+1} \approx \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}(t_k)}{i!} h^i. \quad (5.19)$$

Теперь можно попытаться определить решение шаг за шагом, отталкиваясь от начального условия $x(0) = x^0$.

В частном случае при $n = 1$ по формуле (5.19) получаем формулу Эйлера:

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)h. \quad (5.20)$$

Метод Эйлера — метод 1-го порядка, в котором при уменьшении шага в два раза ошибка интегрирования также уменьшается в два раза. Но следует иметь в виду, что это утверждение справедливо для достаточно малых шагов.

К выводу формулы Эйлера можно подойти и из других соображений.

По формуле (5.15) имеем

$$x(t+h) = x(t) + \int_0^h f(x(\tau))d\tau = x(t) + \int_0^h x'(\tau)d\tau. \quad (5.21)$$

Вычисляя этот интеграл методом прямоугольников, имеем

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2),$$

откуда получим схему Эйлера, для чего можно заменить производную в уравнении конечной разностью:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_k, t_k).$$

Разрешая это уравнение относительно x_{k+1} , также получим схему Эйлера.

Итак, метод Эйлера — явный метод, т. е. разрешенный относительно значения функции на следующем шаге $k + 1$. Он имеет локальную ошибку на каждом шаге 2-го порядка и глобальную ошибку на всем интервале интегрирования 1-го порядка. Знание начального условия $x_0 = x(0)$ позволяет вычислить x_1 , далее используя x_1 , вычисляем x_2 , продолжая подобным образом до конца интервала интегрирования, определяем все решение ОДУ в дискретных точках t_k . Ниже приведен документ MathCAD, реализующий этот алгоритм на конкретном примере (док. 5.4).

Метод Эйлера

```

t0 := 0      tk := 1          начало интервала, конец интервала

a := 1      b := 2          f(x, t) := sin(a · x) · e-(b·x)3/2 + 2 · sin(t)      исходная функция

zh0 := 0.0    m := 1000      начальное условие, число шагов

ei(x0, t0, tk, N, f) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x_0 - x_0 \\ h - \frac{(tk - t_0)}{N} \\ \text{for } k \in 0..N - 1 \\ x_{k+1} - x_k + h f(x_k, t_0 + k \cdot h) \end{array} \right.$       схема Эйлера
x

z := ei(zh0, t0, tk, m, f)      h :=  $\frac{tk - t_0}{m}$       k := 0..m - 1

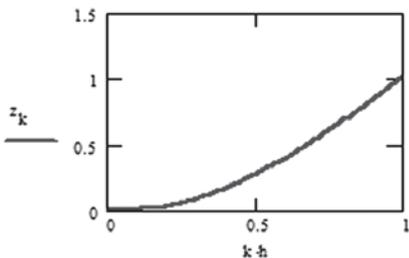
решение задачи ОДУ      zk
на шаге k,
далее интегрируем с
различными шагами

n1 := 7
h1_0 := .2      i := 0..n1      h1_{i+1} :=  $\frac{h1_i}{2}$       n := m ·  $\frac{h}{h1}$ 

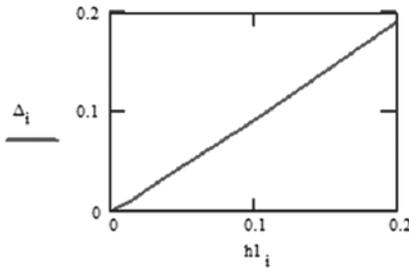
z1<i> := ei(zh0, t0, tk, ni, f)

Δ_i :=  $\left| (z1^{<n1>})_{(n1)} - (z1^{<i>})_{(ni)} \right|$ 

```



Док. 5.4 (начало)



ошибка Δ_i в зависимости от шага $h1_i$, схема Эйлера-первого порядка

Док. 5.4 (окончание)

5.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РАБОЧЕГО РЕЖИМА

Несмотря на то что условия Липшица гарантируют существование и единственность решения дифференциального уравнения, найти его во многих случаях для нелинейных систем можно только численно. В задачах оптимизации с использованием такой модели это обстоятельство вынуждает искать оптимальное решение тоже численными методами, т. е. многократно интегрировать систему уравнений, что вызывает большие вычислительные трудности. Между тем часто можно ограничиться приближенным решением задачи в линейном приближении или использовать такое решение в качестве хорошего начального значения оптимизационной задачи в нелинейном случае. Уравнения движения представляют собой в этом случае систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1n}u_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2n}u_n, \\ \dots \\ \frac{dx_m}{dt} = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m + b_{m1}u_1 + b_{m2}u_2 + \dots + b_{mn}u_n. \end{cases} \quad (5.22)$$

Эту систему ОДУ можно записать в сокращенном виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad (5.23)$$

где A — матрица, состоящая из элементов $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ размером $m \times m$; B — матрица, состоящая из элементов $B = [b_{ik}]$, $k = 1, 2, \dots, n$, эта матрица не обязательно квадратная, ее размерность $m \times n$. Рассмотрим процедуру линеаризации системы в окрестности некоторого рабочего режима.

Пусть задана нелинейная система:

$$x' = f(x, u). \quad (5.24)$$

Обозначим через \bar{x}, \bar{u} рабочий режим процесса, который моделируется уравнением (5.24). Часто в качестве такого режима выбирается стационарная точка, т. е. \bar{x}, \bar{u} удовлетворяют условию

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0. \quad (5.25)$$

Очевидно, что (5.25) представляет собой неявно заданную статическую модель исследуемого процесса, если можно пренебречь динамикой системы. Рассмотрим отклонения от этого номинального режима. Для этого разложим $f(x, u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки \bar{x}, \bar{u} :

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u}). \quad (5.26)$$

Погрешность такого приближения определяется остаточным членом ряда Тейлора и при малых отклонениях от рабочего режима представляет собой величину 2-го порядка малости. Если в качестве рабочего режима выбран режим, удовлетворяющий условию (5.25), то первый член в разложении (5.26) равен нулю. Тогда, вводя новые переменные в отклонениях от рабочего режима

$$\tilde{x} = x - \bar{x}, \quad \tilde{u} = u - \bar{u}, \quad (5.27)$$

получим линеаризованную систему:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \bar{x}. \quad (5.28)$$

Если условие (5.25) не выполняется, то в уравнении (5.28) появляется дополнительный член $f(\bar{x}, \bar{u})$ — постоянно действующее возмущение, что не меняет общей формулы решения задачи интегрирования линейных ОДУ. Вопрос об устойчивости стационарной точки решается на основе собственных чисел матрицы A . Если действительные части всех собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, являющихся решением уравнения $|A - \lambda E| = 0$, отрицательны, то стационарное состояние \bar{x}, \bar{u} является устойчивым.

Применим рассмотренную процедуру к линеаризации уравнений движения космического аппарата (КА).

Уравнения движения КА в ньютоновском поле имеют следующий вид:

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{m_1 m_2 r}{|r|^3} + m_1 a, \quad |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.29)$$

В этой системе из трех дифференциальных уравнений 2-го порядка r — радиус-вектор расстояния от притягивающего центра, например Земли, до КА; m_1 — масса КА; m_2 — масса притягивающего центра; a — вектор реактивного ускорения; k — гравитационная постоянная; x, y, z — проекции вектора r на декартовы оси координат.

От уравнения (5.29) в размерных единицах полезно перейти к безразмерным переменным — как с точки зрения численного счета, так и для распространения полученных результатов на любой притягивающий центр — Землю, Луну и т. д. Для этого сделаем замену переменных на безразмерные, взяв за единицу времени суточный период вращения Земли $T_c = 86\,164$ с и безразмерное расстояние от центра Земли до геостационарной орбиты $R_c = 42\,164$ км. В этом случае радиусу стационарной орбиты и периоду обращения спутника на ней соответствуют единичные радиус и скорость.

Записывая это уравнение покомпонентно, имеем систему из трех уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_x - \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = a_y - \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = a_z - \frac{z}{r^3}. \end{cases} \quad (5.30)$$

Ее можно упростить и записать в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a - \frac{r}{|r|^3}.$$

Интегрирование этой системы уравнений в отсутствие ускорения a иллюстрирует документ MathCAD (док. 5.5).

Интегрирование уравнений движения КА



Геостационарные спутники движутся в плоскости экватора по круговой орбите с периодом обращения T_c , что соответствует расстоянию от центра Земли R_c . Такой рабочий режим в декартовых координатах описывается соотношениями (оси x, y лежат в плоскости отбиты):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad z = 0, \quad (5.31)$$

где за единицу измерения расстояния принято R_c , за единицу измерения времени — T_c . Движение КА по такой геостационарной орбите происходит с такой

же угловой скоростью, что и вращение Земли, и это обеспечивает «зависание» спутника для земного наблюдателя. Однако даже небольшие отклонения КА от круговой орбиты заданного радиуса со временем приведут к уходу спутника от наблюдателя, так как такое стационарное состояние является неустойчивым.

Ограничимся движением КА в экваториальной плоскости орбиты. В этом случае ускорение $a_z = 0$ и используются два первых уравнения 2-го порядка в системе (5.30)

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x - \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = a_y - \frac{y}{r^3}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Рабочий режим (5.31) и уравнения движения (5.32) удобнее представить в полярных координатах r, φ :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

В полярных координатах круговая орбита описывается очень просто:

$$r = 1, \quad r' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \varphi = t, \quad (5.33)$$

а уравнения движения примут вид (вывод формул представлен в документе 5.6 MathCAD).

Уравнения движения КА в полярных координатах

уравнение в декартовых координатах

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = a_x - \frac{x(t)}{r(t)^3}, \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a_y - \frac{y(t)}{r(t)^3}$$

Связь между декартовыми и полярными координатами

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \quad y(t) = r(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

Продифференцируем оба уравнения по t

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \quad \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - r(t) \sin(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \quad \frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} r(t) \sin(\varphi(t)) + r(t) \cos(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dx(t)}{dt} \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} r(t) \cos(\varphi(t)) - 2 \frac{d}{dt} r(t) \sin(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) - r(t) \cos(\varphi(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2 - r(t) \sin(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dy(t)}{dt} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} r(t) \sin(\varphi(t)) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \cos(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) - r(t) \sin(\varphi(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2 + r(t) \cos(\varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

Подстановка в исходные уравнения вторых производных

$$f1(t) := \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right) + \frac{x(t)}{r(t)^3} - ax \quad f2(t) := \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right) + \frac{y(t)}{r(t)^3} - ay$$

Комбинация уравнений

$$-f1(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + f2(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \text{ simplify} \rightarrow 2 \frac{d}{dt} r(t) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) + r(t) \cdot nDiff(\varphi(t), t, 2) + \sin(\varphi(t)) \cdot ax - \cos(\varphi(t)) \cdot ay$$

Док. 5.6 (начало)

Сделав замену $u_2 = \sin(\phi(t)) \cdot ax - \cos \phi(t) \cdot ay$, получим следующее уравнение второго

$$\text{порядка } r \frac{d^2}{dt^2} \phi = u_2 - 2 \frac{d}{dt} r \frac{d}{dt} \phi$$

Сделав замену

$$r(t) = z_0 \quad \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) = z_1 \quad \phi(t) = z_3 \quad \frac{d}{dt} \phi(t) = z_2$$

получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt} z(t) = f(x, u)$$

$$\frac{d}{dt} z(t)_0 = z_1$$

$$\frac{d}{dt} z(t)_2 = z_0 \cdot (z_2)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} + u_0$$

$$\frac{d}{dt} z(t)_3 = - \frac{(u_1 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2)}{z_0}$$

$$\frac{d}{dt} z(t)_4 = z_2$$

Док. 5.6 (окончание)

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, \\ z'_2 = z_1 z_3^2 - \frac{1}{z_1^2} + u_1, \\ z'_3 = - \frac{(u_2 + 2z_2 z_3)}{z_1}, \\ z'_4 = z_3. \end{cases} \quad (5.34)$$

В этих уравнениях индексы переменных увеличены на единицу (в документе MathCAD индексация начиналась с нуля), и $z_1 = r$, $z_2 = r'$, $z_3 = \phi'$, $z_4 = \phi$.

Поместим начало координат в центр масс второго КА, находящегося на круговой орбите единичного радиуса, и примем движение этого КА за рабочую траекторию, относительно которой будем линеаризовать уравнения движения. Тогда, с учетом (5.33):

$$\bar{z}_1 = 1, \quad \bar{z}_2 = 0, \quad \bar{z}_3 = 1, \quad \bar{z}_4 = t, \quad \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0. \quad (5.35)$$

Дифференцируя правые части (5.34) по переменным z , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} &= 1, & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial z_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= z_3^2 + \frac{2}{z_1^3}, & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial z_3} &= 2z_3 z_1, & \frac{\partial f_2}{\partial z_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_1} &= - \frac{(u_1 - 2z_2 z_3)}{z_1^2}, & \frac{\partial f_3}{\partial z_2} &= -2z_3 z_1, & \frac{\partial f_3}{\partial z_3} &= -2z_2 z_1, & \frac{\partial f_3}{\partial z_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_4}{\partial z_1} &= 0, & \frac{\partial f_4}{\partial z_2} &= 0, & \frac{\partial f_4}{\partial z_3} &= 1, & \frac{\partial f_4}{\partial z_4} &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Подставляя в (5.36) значения z и u из (5.35), получим матрицу A :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{z}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Матрицу B образуют производные $\frac{\partial f}{\partial u}$, вычисленные в точке \bar{x}, \bar{u} :

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{z}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Вводя замену переменных

$$x(t) = z(t) - \bar{z}, \quad (5.39)$$

получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

или

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где x — отклонение траектории КА от траектории КА-цели, движущегося по круговой орбите. Начальные условия для уравнения (5.40) есть разница положения двух КА в начальный момент времени:

$$x_1^0 = z_1^0 - 1, \quad x_2^0 = z_2^0, \quad x_3^0 = z_3^0 - 1, \quad x_4^0 = z_4^0, \quad (5.41)$$

а конечное состояние

$$x(T) = 0 \quad (5.42)$$

означает совпадение траекторий обоих КА.

Документ MathCAD, содержащий программу линеаризации уравнений движения в символьном виде, приведен ниже (док. 5.7).

Результаты работы этой программы — символьная реализация процедуры линеаризации, определение стационарной точки, матриц A и B линейного приближения, вычисленных в стационарной точке, и сравнение движения линейной и нелинейной систем, полученного численным интегрированием (см. рис. 5.1).

Линеаризация уравнений движения

Задание системы ОДУ, $x=f(x,u)$ которую необходимо линеаризовать

Если система содержит два вида переменных, то сначала задаем систему от переменных X , а потом от переменных U . Максимальная размерность переменных X и U равна 4.

$$f(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ u_0 + x_0 (x_2)^2 - \frac{1}{(x_0)^2} \\ -2x_1 \frac{x_2}{x_0} + u_1 \end{pmatrix} \quad fu(u) := \begin{pmatrix} x_1 \\ u_0 + x_0 (x_2)^2 - \frac{1}{(x_0)^2} \\ -2x_1 \frac{x_2}{x_0} + u_1 \end{pmatrix}$$

$n := 3$ число переменных x .

$r := 2$ число переменных u .

Вычисленная матрица A в символьном виде.

$$A1(a_0, a_1, a_2, a_3) := f3(f, n, r, a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_2^2 + \frac{2}{a_0^3} & 0 & 2 a_0 a_2 \\ 2 a_1 \frac{a_2}{a_0^2} & -2 \frac{a_2}{a_0} & -2 \frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$$

Вычисление матрицы линейного приближения- матрицы B .

Вычисленная матрица B в символьном виде

$$B1(b_0, b_1, b_2, b_3) := f3(fu, n, r, a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

продолжение на следующей стр.

Подпрограмма символьного
вычисления матрицы
производных

```

a0
a1
a2
a3

f2←f(x1)
for iε 0..n-1
  if n>1
    k←0
    d0,i←d/da0 f2 if k<r
    k←k+1
    d1,i←d/da1 f2 if k<r
    k←k+1
    d2,i←d/da2 f2 if k<r
    k←k+1
    d3,i←d/da3 f2 if k<r
  otherwise
    k←0
    d0←d/da0 f2 if k<r
    k←k+1
    d1←d/da1 f2 if k<r
    k←k+1
    d2←d/da2 f2 if k<r
    k←k+1
    d3←d/da3 f2 if k<r
d
    
```

Док. 5.7 (начало)

необходимо записать систему уравнений, данную по условию, используя переменные без индексов, например вместо переменной x_0 нужно написать $x0$ и так далее. Эту замену нужно сделать из-за специфики Matcad'a.

$$f(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1) := \begin{bmatrix} x_1 \\ u_0 + x_0 \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{(x_0)^2} \\ -2 \cdot x_1 \cdot \frac{x_2}{x_0} + u_1 \end{bmatrix}$$

Здесь пользователю нужно записать по аналогии столько уравнений, сколько их содержится в системе, данной по условию, не забывая расставлять соответствующие индексы. Структура kor состоит из векторов, всех найденных стационарных точек.

Given

$$f(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1)_0 = 0$$

$$f(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1)_1 = 0$$

$$f(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1)_2 = 0$$

$$kor := \text{Find}(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1) \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ \frac{-(x_0^3 \cdot x_2^2 - 1)}{x_0^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

В данном выражении пользователь выбирает стационарную точку из структуры kor . Меняя индекс в угловых скобках, можно выбирать разные столбцы стационарных точек из структуры kor . В данном случае т.к у нас одна стационарная точка, то ставим индекс 0.

$k := kor^{<0>}$ $x_0 := 1$ $x_2 := 1$ $u_0 := 0$ $u_1 := 0$ Задание пользователем стационарной точки.

$$k := k \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ \frac{-(x_0^3 \cdot x_2^2 + 1)}{x_0^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{скопируйте точку} \quad \text{Наша стационарная точка.} \quad k := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


продолжение на следующей стр.

Док. 5.7
(продолжение)

$$k_{kx} := \begin{cases} z \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad z_i \leftarrow k_i \\ z \end{cases}$$

$$k_{ku} := \begin{cases} z \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..r-1 \\ \quad z_i \leftarrow k_{i+n} \\ z \end{cases}$$

Подставляем вектор выбранной стационарной точки в матрицу [A].

$$a_0 := k_0 \quad a_1 := k_1 \quad a_2 := k_2 \quad a_3 := k_3 \quad a_4 := k_4 \quad \text{Вычисленная матрица [A].}$$

$$A := A1(a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Подставляем вектор выбранной стационарной точки в матрицу [B].

$$B := B1(b_0, b_1, b_2, b_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сравним решение исходного ОДУ и линеаризованного, построим графики отклонений нелинейной и линейной систем.

$$x := \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{Заданные начальные условия.}$$

$$u := \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N := 50 число узлов графика

T := 10 период

x1 := x + k_{kx} отклонение

$$f1(t, x) := A \cdot x + B \cdot u \quad \text{Линейная система.}$$

$$f2(t, x) := fx(x_0, x_1, x_2, u_0, u_1) \quad \text{Нелинейная система.}$$

$$z1 := rkfixed(x, 0, T, N, f1)$$

$$z2 := rkfixed(x1, 0, T, N, f2) \quad i := 0..N \quad h := \frac{T}{N} \quad \text{шаг}$$

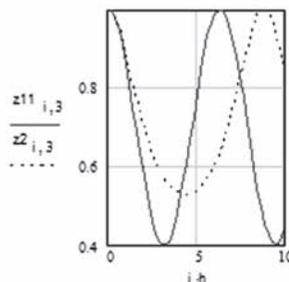
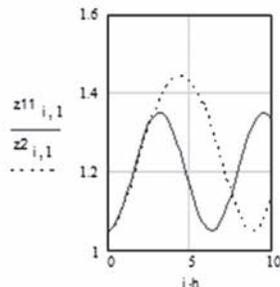
$$z11_{i,0} := z1_{i,0}$$

$$z11_{i,1} := z1_{i,1} + k_{kx_0} \quad \text{первая компонента графика линейной системы.}$$

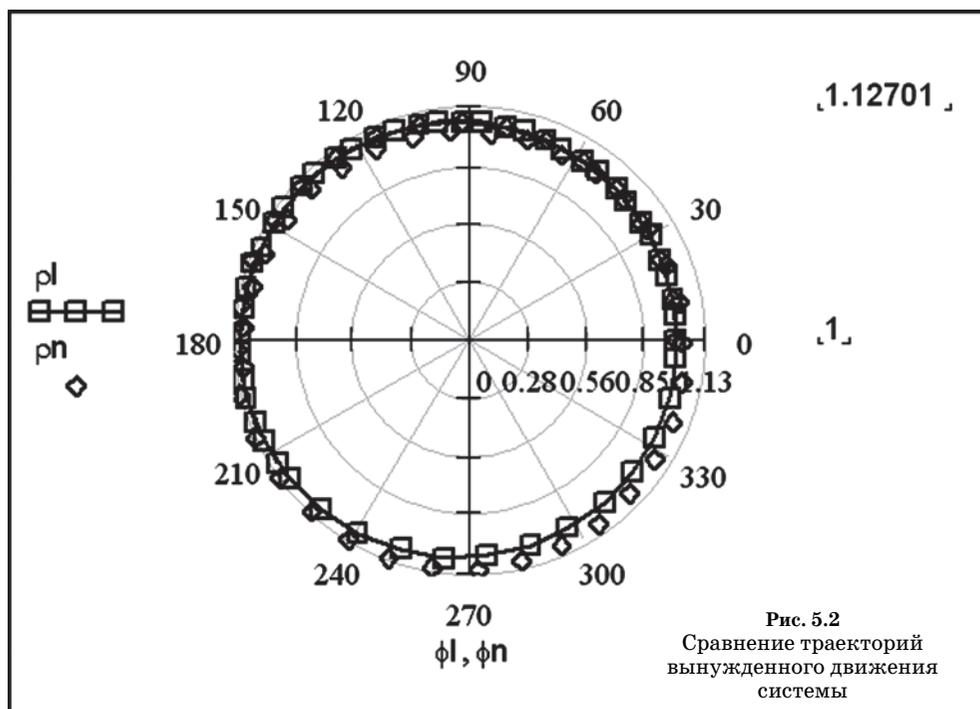
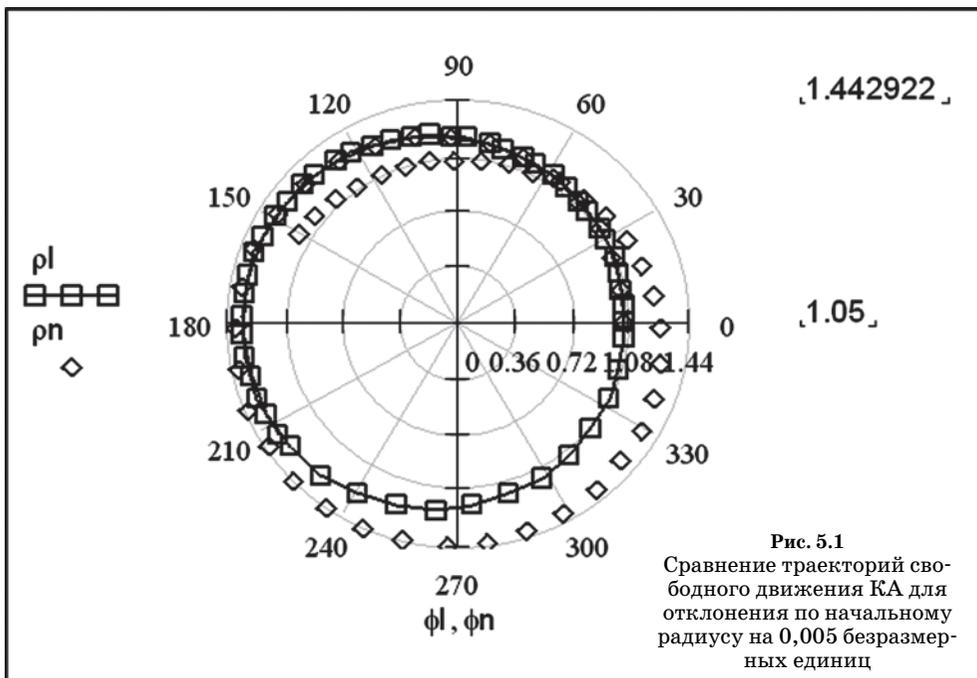
$$z11_{i,2} := z1_{i,2} + k_{kx_1} \quad \text{вторая компонента графика линейной системы.}$$

$$z11_{i,3} := z1_{i,3} + k_{kx_2} \quad \text{третья компонента графика линейной системы.}$$

На всех графиках сплошной линией обозначена линейная система, а пунктиром - нелинейная система.



Док. 5.7
(окончание)



Сравним вынужденное движение КА под воздействием малого трансверсального постоянного ускорения $u = 0,05$, показано на рисунке 5.2.

Результаты расчетов показывают хорошее совпадение линейного приближения с нелинейной моделью в рассмотренном диапазоне отклонений от круговой орбиты.

5.3. ФОРМУЛА КОШИ. СВОБОДНОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЯ

После этапа линеаризации можно получить решение системы линейных ОДУ в явном виде. Пусть имеем систему ОДУ

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x^0. \quad (5.43)$$

Задача решения этой системы, т. е. определение неизвестной функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению движения и начальным условиям (5.43), называется *задачей Коши*. Сначала найдем решение однородного уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (5.44)$$

описывающего свободное движение системы без управления. Оно зависит только от начального состояния. Если начальные условия не нулевые, то решение не тривиально.

Решение ищем в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x(0)$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots \quad (5.45)$$

Вычислим производные, входящие в (5.45):

$$\begin{aligned} x(0) &= x^0, \\ x'(0) &= Ax^0 \text{ — в силу уравнения (5.44),} \\ x''(0) &= A^2x^0, \\ &\dots \\ x^{(n)}(0) &= A^n x^0. \end{aligned}$$

Подставив эти производные в (5.45), получим

$$x(t) = x^0 + \frac{Ax^0}{1!}t + \frac{A^2x^0}{2!}t^2 + \dots$$

Вынесем x^0 за скобки:

$$x(t) = \left(E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots \right) x^0.$$

Выражение в скобках называется *матрицей перехода*, или фундаментальной матрицей решений линейных ОДУ, и обозначается

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots \quad (5.46)$$

Теперь можно записать решение этого дифференциального уравнения в виде

$$x(t) = e^{At}x^0. \quad (5.47)$$

Подставляем его в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} Ax^0 e^{At} &= Ax^0 e^{At}, \\ x(0) &= e^{A0}x^0 = x^0. \end{aligned}$$

Убеждаемся, что (5.47) является решением уравнения и удовлетворяет начальным условиям (5.43).

Теперь будем искать решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (5.48)$$

Пусть функция $x(t) = e^{At}z(t)$ является претендентом на решение уравнения. В этом случае она должна удовлетворять исходному дифференциальному уравнению. Продифференцируем $x(t)$ по t и результат подставим в (5.45):

$$Ae^{At}z + e^{At}\dot{z} = Ae^{At}z + Bu.$$

Теперь можно определить функцию $z(t)$, интегрируя дифференциальное уравнение:

$$\dot{z} = e^{-At}Bu,$$

В результате получим

$$z(t) = c + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Теперь решение можно записать в следующем виде:

$$x(t) = e^{At} \left(c + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \right) = e^{At}c + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Для определения константы интегрирования c подставим в это уравнение $t = 0$:

$$x(0) = c = x^0.$$

В окончательном виде получаем формулу Коши:

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (5.49)$$

Формула Коши дает аналитическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Первое слагаемое описывает *свободное движение* системы, определяемое только начальными условиями. Второе слагаемое зависит только от управления и называется *вынужденным движением* системы.

Системы линейных ОДУ можно решать различными способами:

1) численным интегрированием, при этом возникают большие объемы вычислений (пример численного интегрирования приведен во введении к данному разделу);

2) использованием формулы Коши, для этого нужно знать фундаментальную матрицу решений. Она может быть определена тремя способами:

- использованием разложения в ряд $e^{At} = A + \frac{At}{1!} + \dots$, при росте t возрастает ошибка представления ряда вплоть до потери сходимости (этот случай представлен в документе 5.8);

Определение матрицы переход при помощи ряда Тейлора

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

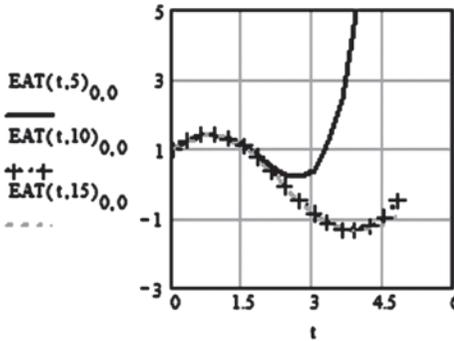
матрица системы

$$EAT(t,n) := A^0 + \sum_{i=1}^n \frac{A^i}{i!} \cdot t^i$$

Отрезок ряда Тейлора

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix} \quad t := 0, 0.3..5$$

собственные числа A



графики элемента матрицы e^{at} при 5, 10 и 15 членах ряда

Док. 5.8

- численным интегрированием уравнения $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, при этом требуется большой объем памяти для хранения табличных функций (этот случай реализован в документе 5.9);
- аналитическим определением матрицы, которое возможно для некоторых простых случаев.

Здесь показаны результаты определения матрицы перехода с помощью разложения в ряд Тейлора с удержанием 5, 10 и 15 членов ряда для одного элемента e_{11}^{AT} .

Определение матрицы перехода численным интегрированием

матрица системы размер матрицы начальное конечное число
 время время шаги
 $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $n := \text{cols}(A) - 1$ $t_0 := 0$ $t_k := 3$ $N := 100$
 $n = 1$
 собственные числа матрицы $h := \frac{t_k - t_0}{N}$

$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$ $i := 0..n$ $j := 0..n$

Определяем матрицу перехода правая часть дифференциального
 начальные условия уравнения

$E_{i,j} := 0$ $E_{i,i} := 1$ $\text{ff}(M) := -A \cdot M$
 подпрограмма вытягивания подпрограмма преобразования
 матрицы в вектор вектора в матрицу

$MtoV(M, n) := \begin{cases} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{for } j \in 0..n \\ \quad \quad b_k \leftarrow M_{i,j} \\ \quad k \leftarrow k + 1 \\ b \end{cases}$ $VtoM(b, n) := \begin{cases} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{for } j \in 0..n \\ \quad \quad M_{i,j} \leftarrow b_k \\ \quad k \leftarrow k + 1 \\ M \end{cases}$

$NU := MtoV(E, n)$

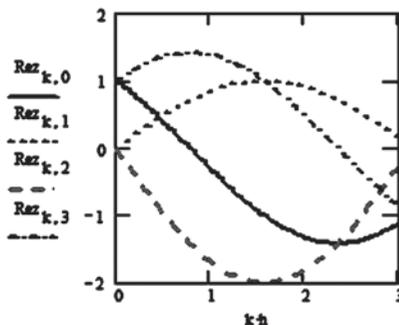
$IF(t, x) := \begin{cases} M \leftarrow VtoM(x, n) \\ M1 \leftarrow \text{ff}(M) \\ x \leftarrow MtoV(M1, n) \end{cases}$

$v1 := \text{rkfixed}(NU, t_0, t_k, N, IF)$

Находим матрицу перехода Rez

$\text{Rez} := \text{submatrix}[v1, 0, N, 1, (n + 1)^2]$ $k := 0..N$

графики элементов
 матрицы перехода



Док. 5.9

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

Функция e^{At} имеет вид

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k, \quad (5.50)$$

где линейнонезависимые функции $\alpha_k(t)$ определяются с помощью интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестера:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{1}{((m_k - \rho - 1))!} \left[\frac{\partial^{m_k - \rho - 1}}{\partial \lambda^{m_k - \rho - 1}} \frac{f(\lambda)}{\Phi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{\rho+1}}. \quad (5.51)$$

В этой формуле $\varphi(\lambda)$ — минимальный аннулирующий полином, определяемый по характеристическому уравнению $A - \lambda E = 0$:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \\ m_1 + m_2 + \dots + m_s = m,$$

где m_k — кратности собственных чисел λ_k .

Обозначим через $D_{n-1}(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров $(n-1)$ -го порядка характеристической матрицы $A - \lambda E$, т. е. наибольший общий делитель элементов присоединенной матрицы $B(\lambda)$, и получим выражение для аннулирующего полинома:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}. \quad (5.52)$$

Функции $\varphi_k(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}. \quad (5.53)$$

Значения функции $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ на спектре матрицы A определяются как:

$$f(\lambda_k) = e^{\lambda_k t} \Big|_{\lambda=\lambda_k}. \quad (5.54)$$

Пусть матрица A имеет, например, следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда характеристическая матрица $A - \lambda E$ будет

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Определитель характеристической матрицы равен

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Присоединенная матрица имеет вид

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}.$$

Общий наибольший делитель присоединенной матрицы $D_2(\lambda) = 1$.
Минимальный полином матрицы A будет следующим:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Значения функции $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ на спектре матрицы A будут

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}|_{\lambda=1} = e^t, \quad f(\lambda) = e^{\lambda t}|_{\lambda=2} = e^{2t}.$$

Интерполяционные условия имеют следующий вид:

$$r(\lambda_1) = e^t, \quad r(\lambda_2) = e^{2t},$$

где $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Для рассматриваемой здесь матрицы A имеем

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - 1)^2}, \quad \psi_2(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - 2)},$$

поэтому интерполяционный полином Лагранжа — Сильвестера согласно (5.51) будет

$$r(\lambda) = \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 2} \right)_{\lambda=1} (\lambda - 2) + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 2} \right)_{\lambda=1} (\lambda - 1)(\lambda - 2) + \left[\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - 1)^2} \right]_{\lambda=2} (\lambda - 1)^2,$$

или

$$r(\lambda) = -e^t(\lambda - 2) + (-te^t - e^t)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + e^{2t}(\lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

Это выражение можно переписать в виде

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2,$$

где $\alpha_0(t) = -2te^t + e^{2t}$; $\alpha_1(t) = 2te^t + e^{2t} - 2e^{2t}$; $\alpha_2(t) = -te^t - e^t + e^{2t}$.

Следовательно, для рассматриваемой здесь матрицы A , учитывая, что $A^0 = E$ (где E — единичная матрица), будем иметь

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2.$$

Вернемся к нашему примеру. Так как

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

то матрица e^{At} будет иметь следующий вид:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм и программа для символьного вычисления матрицы перехода приведены в следующем документе MathCAD (док. 5.10).

Как следует из формул (5.50), (5.51), в решение задачи Коши входят экспоненциальные функции, содержащие в показателе степени собственные числа λ_k матрицы A уравнений движения, а в качестве сомножителей могут входить полиномы степени

$$n_k - 1,$$

где n_k — кратность соответствующего корня характеристического уравнения. Однако если действительные части собственных чисел отрицательны ($\text{Re}(\lambda_k) < 0$) то при отсутствии возмущений свободное движение системы (5.40) стремится к нулю даже при любых ненулевых начальных условиях. Это означает, что система линейных уравнений устойчива «в большом». Если же система линейных ОДУ получена линеаризацией нелинейной системы в стационарной точке, то исходная нелинейная система устойчива «в малом», т. е. что при малых возмущениях стационарного режима система ОДУ будет возвращаться к нему с течением времени, однако гарантировать устойчивость при всех возмущениях невозможно.

Определим устойчивость движения КА на стационарной орбите с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

из уравнений движения (5.40)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В матрице A имеется одно комплексно-сопряженное число $\pm i$ и двукратный нулевой корень. Следовательно, в решении будет присутствовать линейная составляющая по времени t и гармонические колебания с единичной частотой. Отсюда вытекает, что стационарная орбита является неустойчивой и при малых отклонениях от стационарной орбиты возможен уход из зоны видимости.

* * *

Математическим аппаратом для моделирования динамических систем являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши состоит в нахождении функции $x(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравне-

Определение матрицы перехода в символьном виде

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E := A^0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda \cdot E - A) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

λ_i - корни хар-го полинома

вектор корней

Given $|\lambda \cdot E - A| = 0 \quad d := \text{Find}(\lambda) \rightarrow (1 \ 1 \ 2) \quad d := d \rightarrow (1 \ 1 \ 2)$

```

rootm (rv) := | vlen ← length (rv)
               k ← 0
               M0,0 ← rv0
               M0,1 ← 0
               for i ∈ 0..(vlen - 1)
                 (M0,1 ← M0,1 + 1) if (M0,0 = rvi)
               k ← 0
               for i ∈ 1..(vlen - 1)
                 repeats ← 0
                 for j ∈ k..0
                   (repeats ← repeats + 1) if (rvi = Mj,0)
                 if (repeats = 0)
                   k ← k + 1
                   Mk,0 ← rvi
                   Mk,1 ← 0
                   for j ∈ 0..(vlen - 1)
                     (Mk,1 ← Mk,1 + 1) if (Mk,0 = rvj)
               M

```

кратность каждого корня

$r := \text{rootm}(d^T)$

$r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

характеристический полином:

$$\Delta(\lambda) := \left[\begin{array}{c} \text{length}(d^T) - 1 \\ i = 0 \end{array} \prod [\lambda - (d^T)_i] \right] \quad \Delta(\lambda) \rightarrow (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2)$$

присоединенная матрица:

$$B(\lambda) := (\lambda \cdot E - A | E) \cdot (\lambda \cdot E - A)^{-1} \quad B(\lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

найдите наибольший общий делитель элементов
присоединенной матрицы $B(\lambda)$ и присвойте его функции
 $\text{MCD}(\lambda)$



$$\text{MCD}(\lambda) := 1$$

продолжение на следующей стр.

Док. 5.10 (начало)

минимальный аннулирующий полином МАП :

$$\psi(\lambda) := \frac{\Delta(\lambda)}{\text{MCD}(\lambda)} \text{ simplify } \rightarrow (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2) \quad \psi(\lambda) \rightarrow (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2)$$

Given $\psi(\lambda) = 0$ $d := \text{Find}(\lambda)$ $d \rightarrow (1 \ 1 \ 2)$

корни МАП и их кратности: скопируйте матрицу слева и присвойте ее переменной map

$$\text{rootm}(d^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{map} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

число корней МАП после проверки на кратность $s := \text{rows}(\text{map})$ $s \rightarrow 2$

корни МАП : Λ_k их кратности : n1 $c(r, s, k) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..s-1 \\ c_i \leftarrow r_{i,k} \\ c \end{cases}$

$$\Lambda := c(\text{map}, s, 0) \quad \Lambda \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad n1 := c(\text{map}, s, 1) \quad n1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_k(\lambda, k) := \left[\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \Lambda_k)^{n1_k}} \right] \quad f(\lambda, t) := e^{(\lambda \cdot t)}$$

интерполяционная формула Лагранжа - Сильвестра

$$r(\lambda) := \sum_{k=1}^s \left[\sum_{\rho=0}^{n'_k-1} \left[\frac{1}{(n'_k - \rho - 1)!} \left[\left[\frac{d^{(n'_k - \rho - 1)}}{d \lambda^{(n'_k - \rho - 1)}} \left(\frac{f(\lambda, t)}{\psi_k(\lambda, k)} \right) \right]_{\lambda = \Lambda_k} \right] \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \Lambda_k)^{(\rho + 1)}} \right] \right] \blacksquare$$

продолжение на следующей стр.

Док. 5.10 (продолжение)

$$d_f\psi(\lambda, t, k, \rho) := \begin{cases} \frac{f(\lambda, t)}{\psi_k(\lambda, k)} & \text{if } (n1_k - \rho - 1) = 0 \\ \frac{d^{(n1_k - \rho - 1)}}{d\lambda} \left(\frac{f(\lambda, t)}{\psi_k(\lambda, k)} \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d\lambda(\lambda, t) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..s-1 \\ \text{for } \rho \in 0..(n1_k - 1) \\ \text{Mdl}_{k,\rho} \leftarrow d_f\psi(\lambda, t, k, \rho) \\ \text{Mdl} \end{cases} \quad d\lambda(\lambda, t) \rightarrow \begin{bmatrix} t \cdot \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)} - \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)^2} & \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)} \\ \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

производные в полиноме Лагранжа $\frac{d^{(n'_k - \rho - 1)}}{d\lambda} \left(\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right)$

$$d\lambda(\lambda, t) \rightarrow \begin{bmatrix} t \cdot \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)} - \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)^2} & \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 2)} \\ \frac{\exp(\lambda \cdot t)}{(\lambda - 1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mdl}\lambda(\lambda, t) := d\lambda(\lambda, t)$$

в производную подставляем $\lambda = \Lambda_k$

$$d\lambda_A k(\lambda, t, \Lambda_tmp) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..s-1 \\ \text{for } \rho \in 0..(n1_k - 1) \\ d\lambda_A k,\rho \leftarrow \text{Mdl}\lambda(\Lambda_tmp_k, t)_{k,\rho} \\ d\lambda_A \end{cases}$$

$$aa := d\lambda_A k(\lambda, t, \Lambda_tmp) \rightarrow \begin{bmatrix} t \cdot \frac{\exp(\Lambda_tmp_0 \cdot t)}{(\Lambda_tmp_0 - 2)} - \frac{\exp(\Lambda_tmp_0 \cdot t)}{(\Lambda_tmp_0 - 2)^2} & \frac{\exp(\Lambda_tmp_0 \cdot t)}{(\Lambda_tmp_0 - 2)} \\ \frac{\exp(\Lambda_tmp_1 \cdot t)}{(\Lambda_tmp_1 - 1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_tmp := \Lambda \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Док. 5.10 (продолжение)

$$\text{Mdi}_{-}\Lambda_k(t) := \text{aa} \rightarrow \begin{bmatrix} t \frac{\exp(\Lambda_{\text{tmp}_0} \cdot t)}{(\Lambda_{\text{tmp}_0} - 2)} - \frac{\exp(\Lambda_{\text{tmp}_0} \cdot t)}{(\Lambda_{\text{tmp}_0} - 2)^2} & \frac{\exp(\Lambda_{\text{tmp}_0} \cdot t)}{(\Lambda_{\text{tmp}_0} - 2)} \\ \frac{\exp(\Lambda_{\text{tmp}_1} \cdot t)}{(\Lambda_{\text{tmp}_1} - 1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mdi}_{-}\Lambda_k(t) \rightarrow \begin{bmatrix} -t \cdot \exp(t) - \exp(t) & -\exp(t) \\ \exp(2t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(\lambda, t, \text{mdi}) := \left[r - \sum_{k=0}^{s-1} \left[\sum_{\rho=0}^{n_k-1} \left[\frac{1}{(n_k - \rho - 1)!} \cdot [\text{mdi}_{(k,\rho)}] \cdot \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \Lambda_k)^{(\rho+1)}} \right] \right] \right]_r$$

$$\text{rLS} := r(\lambda, t, \text{Mdi}_{-}\Lambda_k(t)) \quad \text{rLS} \rightarrow (-t \cdot \exp(t) - \exp(t)) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) - \exp(t) \cdot (\lambda - 2) + \exp(2t) \cdot (\lambda - 1)^2$$

$$n^{\circ} - \text{степень МАП} : \quad n^{\circ} := \sum_{k=0}^{s-1} n_k \rightarrow 3$$

$$r(\lambda) = a_0(t) \lambda^0 + a_1(t) \lambda^1 + a_2(t) \lambda^2 + \dots$$

$a_i(t)$ для $r(\lambda)$:

$$a(t) := \text{rLS coeffs}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} -2t \cdot \exp(t) + \exp(t)^2 \\ 3t \cdot \exp(t) + 2 \cdot \exp(t) - 2 \cdot \exp(t)^2 \\ -t \cdot \exp(t) - \exp(t) + \exp(t)^2 \end{bmatrix}$$

матрица перехода e^{At}

$$e^{At} := \left[\sum_{k=0}^{n^{\circ}-1} (a(t)_k \cdot A^k) \right]^{\blacksquare}$$

$$eA(t, a_t, A) := \begin{cases} sz - (\text{rows}(A) - 1) & eA(t) := eA(t, a, A) \\ \text{for } i \in 0..sz \\ \quad \text{for } j \in 0..sz \\ \quad \left| \begin{array}{l} ea_{t_{i,j}} - 0 \\ \text{for } k \in 0..(n^{\circ} - 1) \\ \quad ea_{t_{i,j}} + ea_{t_{i,j}} + a_{t_k} \cdot (A^k)_{i,j} \end{array} \right. \\ ea_t \end{cases}$$

$$eA(t) \rightarrow \begin{bmatrix} \exp(t) & t \cdot \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t)^2 \end{bmatrix}$$

Док. 5.10 (окончание)

нию и начальным условиям. В общем случае задача Коши может быть решена численно, однако для системы линейных ОДУ известно общее решение, определяемое по формуле Коши.

Если правые части ОДУ $f(x, u)$ дифференцируемы по x и u и есть основания считать, что моделируемый процесс незначительно отклоняется от рабочего режима \bar{x}, \bar{u} , то можно с точностью до малых 2-го порядка представить модель в виде линейной системы в отклонениях от рабочего режима. В этом случае правая часть ОДУ представляет собой отрезок ряда Тейлора:

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u}).$$

Формула Коши отражает принцип суперпозиции для линейных систем и состоит из суммы свободного (под влиянием начальных условий) и вынужденного (под влиянием внешних сил) движений системы.

Центральным моментом в формуле Коши является определение матрицы перехода e^{At} . Для систем невысокого порядка ее можно найти аналитически, для более сложных случаев приходится определять фундаментальную матрицу численно. Тем не менее это часто более приемлемо, чем численно интегрировать систему, так как однократное определение матрицы перехода позволяет определить решение при любых начальных условиях и внешних воздействиях.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Что такое задача Коши для ОДУ?
2. В чем суть метода Пикара для интегрирования ОДУ?
3. Как связана ошибка интегрирования с шагом интегрирования в методе Эйлера?
4. Что такое стационарная точка для динамических систем?
5. Что представляет собой каждое слагаемое в формуле Коши для линейных систем?
6. Перечислите основные методы определения матрицы перехода для линейных динамических систем.

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 5

Задание 5.1. Составить уравнения движения материальной точки массой m на плоскости, на которую действуют следующие силы: вдоль горизонтальной оси x — сила сопротивления среды (воздуха) пропорционально квадрату скорости $C_1(y)(v_x)^2$; составляющая тяги ma_x ; вдоль вертикальной оси y — сила тяжести mg , подъемная сила крыла $C_2 v_x$ и составляющая тяги ma_y .

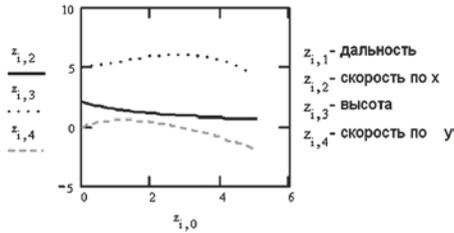
Ответ:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma_x - C(y) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = ma_y - mg + C_2 \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

Задание 5.2. Найти решение уравнений из задания 5.1 на интервале $t \in [0, 5]$ при $m = 2, g = 2, C_2 = 3$ зависимости плотности воздуха от высоты $C(y) = 1 - e^{-y/10}$, отсутствия управляющих ускорений $a = 0$ с начальными условиями:

$$x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

Ответ:



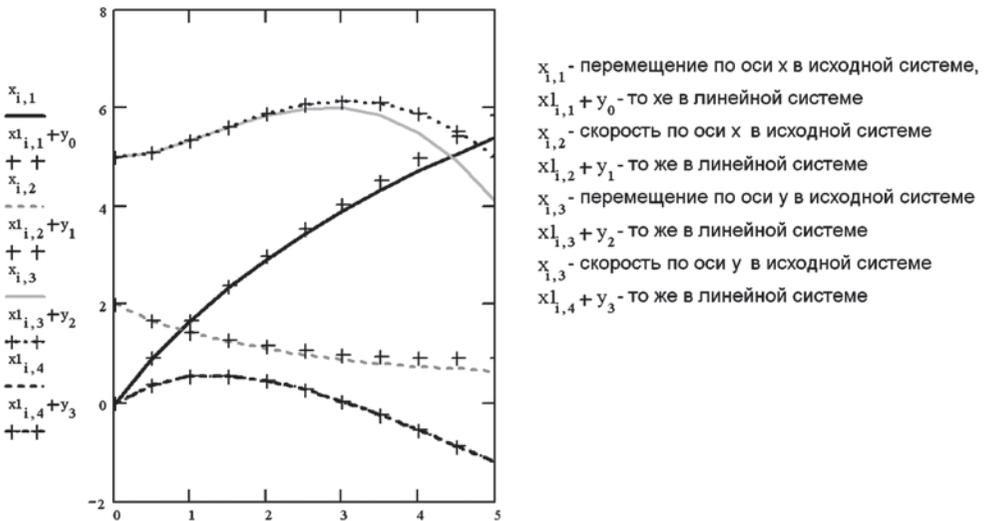
Задание 5.3. Линеаризовать уравнения движения из заданий 5.1, 5.2 в точке $\bar{x} = x(0), \bar{u} = 0$.

Ответ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,787 & -0,121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ u_1 - 0,787 \\ 0 \\ u_2 + 1 \end{bmatrix}, x' = Ax + Bu + v.$$

Задание 5.4. Сравнить решения линейной и нелинейной систем при нулевом управлении и тех же начальных условиях.

Ответ:



Задание 5.5. Найти матрицу перехода e^{At} при

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

6.1. УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Рассмотрим линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in R^m. \quad (6.1)$$

Пусть состояние системы $x(k\tau)$ измерено в моменты времени

$$t = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

где τ — фиксированная величина — временной шаг. Так как в соответствии с формулой Коши для свободного движения:

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= e^{A\tau} x(0), \\ x(2\tau) &= e^{A\tau} x(\tau), \\ &\dots \\ x(m\tau) &= e^{A\tau} x((m-1)\tau) \end{aligned} \right\}, \quad (6.2)$$

то имеет место следующее соотношение:

$$[x(\tau)x(2\tau)\dots x(m\tau)] = e^{A\tau}[x(0)x(\tau)\dots x((m-1)\tau)].$$

Обозначим через $L(\tau)$ и $K(\tau)$ следующие матрицы размером $m \times m$:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= [x(\tau)x(2\tau)\dots x(m\tau)], \\ K(\tau) &= [x(0)x(\tau)\dots x((m-1)\tau)] \end{aligned} \quad (6.3)$$

и представим (6.2) в виде

$$L(\tau) = e^{A\tau} K(\tau). \quad (6.4)$$

Если $K(\tau)$ — не особая матрица, то, умножая (6.4) слева на обратную матрицу $K^{-1}(\tau)$, получим решение уравнения (6.4):

$$e^{A\tau} = L(\tau)K(\tau), \quad (6.5)$$

т. е. матрица e^{At} может быть найдена по $m + 1$ измерению вектора x . Это свойство системы называют *идентифицируемостью*. Для этого необходимо условие

$$\det K(\tau) \neq 0, \quad (6.6)$$

что эквивалентно условию линейной независимости векторов $x(k\tau)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Программа MathCAD, определяющая матрицу перехода по данным измерений вектора x , приведена ниже (док. 6.1).

Идентификация элементов матрицы перехода

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad f(t, x) := A \cdot x \quad x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad n := 3 \quad N := 40 \quad h := 0.2$$

A -матрица системы, $f(t, x)$ -правая часть, x -начальное условие, n - порядок системы, N - число измерений, h - шаг по времени.

$$i := 1..N \quad T_i := .1 + i \cdot h \quad t_i := \frac{T_i}{n} \quad z_i := \text{rkfixed}(x, 0, T_i, n, f)$$

rkfixed - процедура численного интегрирования, z_i - результат интегрирования

$$L_i := \text{submatrix}(z_i, 1, n, 1, n) \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1.326 & 2.21 & 3.664 \\ 1.71 & 2.443 & 4.475 \\ 2.16 & 2.7 & 5.466 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 1.326 & 2.21 & 3.664 \\ 0.2 & 1.71 & 2.443 & 4.475 \\ 0.3 & 2.16 & 2.7 & 5.466 \end{bmatrix}$$

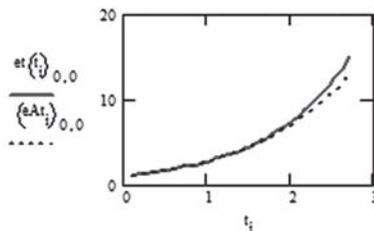
$$K_i := \text{submatrix}(z_i, 0, n - 1, 1, n) \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1.326 & 2.21 & 3.664 \\ 1.71 & 2.443 & 4.475 \end{bmatrix}$$

submatrix -процедура выделения подматрицы размером $n \times n$, L_1, K_1 - матрицы на первом шаге для определения матрицы перехода в момент времени h

$$eAt_i := L_i^T \cdot (K_i^T)^{-1} \quad eAt_1 = \begin{bmatrix} 1.1051708333 & 0.1105166667 & 4.5727310827 \cdot 10^{-15} \\ 3.7400638142 \cdot 10^{-15} & 1.1051708333 & 0 \\ -3.1183389204 \cdot 10^{-14} & -2.0448920335 \cdot 10^{-14} & 1.2214 \end{bmatrix}$$

$$et(t) := \begin{bmatrix} e^t & t \cdot e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad et(t_1) = \begin{bmatrix} 1.1051709181 & 0.1105170918 & 0 \\ 0 & 1.1051709181 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2214027582 \end{bmatrix}$$

eAt_1 -определенное численно, $et(t_1)$ -точное значение матрицы перехода в момент времени h



Док. 6.1

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

С помощью решения системы (6.5) мы можем определить динамические характеристики системы при отсутствии внешних воздействий под влиянием ненулевых начальных условий.

Рассмотрим один из каналов динамической системы управления: u_i — входная переменная x_j . Пусть из эксперимента известны эти две функции, которые обозначим $u(t)$ и $x(t)$ соответственно. В задачу идентификации входит восстановление дифференциального или интегрального оператора связи между этими переменными. Эту задачу можно решить различными способами.

Сначала рассмотрим линейную систему. Для нее связь между входными и выходными переменными определяется формулой Коши

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

являющейся решением системы линейных дифференциальных уравнений $x' = Ax + Bu$ с матрицами A и B . В нашей ситуации известны все компоненты вектора $u_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, кроме компоненты u_j , которая считается известной функцией времени. Известна также и реакция системы на это воздействие $x(t)$. Вопрос о возможности определения параметров системы решается на основе критерия идентифицируемости (6.4). Запишем реакцию i -компоненты вектора x (Ψ_{ik} — соответствующая компонента матрицы e^{At}):

$$x_i(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^m \Psi_{ik}(t-\tau) B_{kj} u_j(\tau) d\tau.$$

Обозначая через

$$K(t-\tau) = \sum_{k=1}^m \Psi_{ik}(t-\tau) B_{kj},$$

получим следующий интеграл свертки (индексы опущены):

$$x(t) = \int_0^t K(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t K(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (6.8)$$

Это интегральное уравнение относительно неизвестной функции $K(\tau)$. Для численного решения этого уравнения введем дискретное время

$$\tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = \frac{t}{h},$$

где $[0, t]$ — интервал наблюдения; h — шаг. Тогда интеграл в (6.8) приближенно заменится суммой

$$x(t) = \sum_{i=0}^N K_i u_{N-i}, \quad (6.9)$$

где индексы у функций обозначают их значения в соответствующие моменты времени. Теперь у нас есть одно линейное уравнение с $N + 1$ неизвестными значениями функции K_i . Однако из эксперимента мы имеем $N + 1$ значений функции x , что позволяет получить систему из $N + 1$ уравнений:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= K_0 u_0, \\ x(t_1) &= \sum_{i=0}^1 K_i u_{N-i}, \\ &\dots\dots \\ x(t_N) &= \sum_{i=0}^N K_i u_{N-i}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Решив эту систему, определим значения функции K в дискретные моменты времени. Ниже представлена программа MathCAD, решающая эту задачу (док. 6.2).

Документ MathCAD (док. 6.3) показывает сравнение реакции системы на другое входное воздействие, полученной в результате численного интегрирования и использования интеграла свертки.

Следует отметить, что рассмотренная задача относится к числу плохо обусловленных задач, для которых неизбежны даже небольшие ошибки в начальных данных приводят к значительным ошибкам в решении зада-

Определение импульсной переходной функции

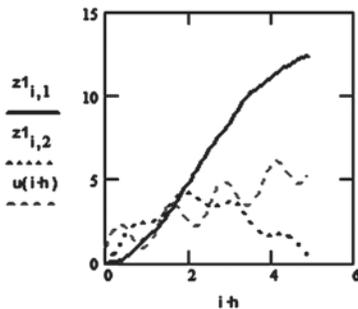
$a := 0.5$ $b := .1$ $c := .5$ $N := 50$ $tk := 5$ $h := \frac{tk}{N}$

$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u(t) := t + 1 + \sin(5 \cdot t)$

$$f1(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot y_1 - c \cdot y_0) \end{bmatrix}$$

f1 - правые части линейного дифуравнения подпрограмма интегрирования ОДУ

$i := 0.. N - 1$ $z1 := rkfixed(y, 0, tk, N, f1)$ $rkfixed(y, 0, tk, N, f1)$



реакция объекта на
возмущение u ,
 $z1_{i,1}$ - перемещение,
 $z1_{i,2}$ - скорость

Док. 6.2 (начало)

правые части линейного уравнения
для двух выходов системы

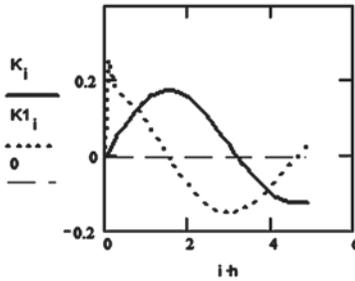
подпрограмма
вычисления матрицы
линейного уравнения

$$x := (z1)^{<1>} \quad y1 := (z1)^{<2>}$$

решение линейных уравнений

$$K := A(u, N)^{-1} \cdot x \quad K1 := A(u, N)^{-1} \cdot y1$$

$$A(u, n) := \begin{cases} A_{n,n} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{for } j \in 0..i \\ \quad \quad \text{for } k \in 0..j \\ \quad \quad \quad A_{k,j} \leftarrow A_{i,j} + u((j-k) \cdot h) \end{cases} A^T$$



графики искоемых функций
 K_i - для перемещения,
 $K1_i$ - для скорости

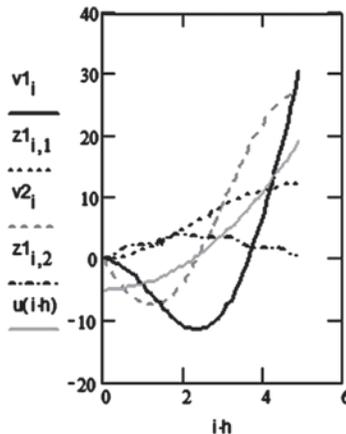
Док. 6.2 (окончание)

Проверка решения по интегралу свертки при другом управлении $u(t)$

$$u(t) := t^2 - 5 \quad z1 := \text{rkfixed}(y, 0, tk, N, f1)$$

$$v1 := \sum_{k=0}^i K_{i-k} \cdot u(k \cdot h) \quad v2 := \sum_{k=0}^i K1_{i-k} \cdot u(k \cdot h)$$

$$f1(t, y) := \begin{cases} y_1 \\ \frac{1}{a} (u(t) - b y_1 - c) \end{cases}$$



графики реакции системы
 $v1, v2$ - положение и
скорость по интегралу
свертки,
 $z1_{i,1}, z1_{i,2}$ - положение и
скорость по интегрированию
уравнений движения

проверка по численному интегрированию
дифуравнений и интегралу свертки

Док. 6.3

чи. Для корректного решения необходимо регуляризовать задачу, решая, например, избыточную систему уравнений с меньшим числом неизвестных значений функции K по сравнению с числом измерений входных и выходных сигналов.

6.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для линейных систем с бесконечным временем часто применяют операторные методы — преобразования Лапласа и Фурье. Применяя преобразование Лапласа

$$x(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt, \quad p = \sigma + i\omega, \quad (6.11)$$

комплексного переменного p , интегральное уравнение свертки при нулевых начальных условиях сводят к алгебраическому в области изображений:

$$x(p) = K(p)u(p). \quad (6.12)$$

Тогда решением будет функция

$$K(p) = \frac{x(p)}{u(p)}. \quad (6.13)$$

Применив обратное преобразование Лапласа и перейдя во временную область получают искомое решение. Если система устойчива, то можно применить преобразование Фурье при $\sigma = 0$. По Фурье-изображению входного и выходного сигналов получают изображение

$$K(i\omega) = \frac{x(i\omega)}{u(i\omega)}, \quad (6.14)$$

которое в терминах теории регулирования называют *амплитудно-фазочастотной характеристикой* (см. главу 2). Модуль этой функции $A(\omega)$ называется *амплитудной характеристикой* и показывает, насколько изменится амплитуда выходного сигнала при входном синусоидальном воздействии с частотой ω и единичной амплитудой. Аргумент $\varphi(\omega)$ функции $K(i\omega)$ называется *фазовой характеристикой* и определяет сдвиг по фазе выходного сигнала по сравнению с входным сигналом. Перейдя во временную область, получим $K(t)$ как функцию времени. Программа, определяющая динамические характеристики с помощью преобразования Фурье, представлена ниже (док. 6.4).

Для проверки соответствия полученных характеристик сравним результаты моделирования с другим входным воздействием (док. 6.5).

Следует отметить, что преобразование Фурье справедливо для систем с бесконечным временем, поэтому если наблюдать систему на отрезке времени, сравнимом со временем ее релаксации, можно получить значительные ошибки.

Идентификация в частотной области

$a := 0.5$ $b := .1$ $c := 2$ $N := 500$ $tk := 50$ $h := \frac{tk}{N}$

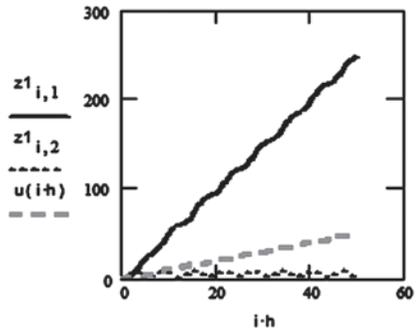
$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u(t) := t + \sin(t)$

$$f1(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot y_1 - c \cdot y_0) \end{bmatrix}$$

f1 - правые части линейного дифуравнения

$z1 := rkfixed(y, 0, tk, N, f1)$

i := 0.. N - 1 программа интегрирования ОДУ



реакция объекта на
 возмущение u
 $z1_{i,1}$ - положение,
 $z1_{i,2}$ - скорость

$u_i := u(i \cdot h)$ $uf := cfft(u)$ $y1_i := z1_{i,1}$ $yf := cfft(y1)$ $cfft(u)$ – прямое

амплитудо-фаза-частотная характеристика

$icfft(uf)$ – обратное
 преобразование
 Фурье

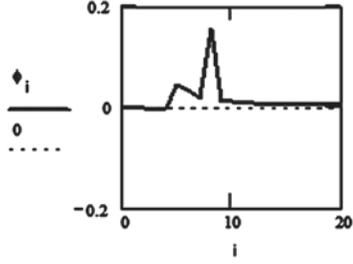
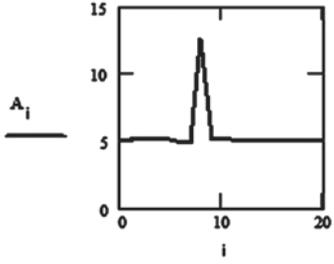
$$K_i := \frac{yf_i}{uf_i}$$

амплитудная характеристика

частотная характеристика

$$A_i := |K_i|$$

$$\phi_i := \arg(K_i)$$



Док. 6.4

Проверка с другим воздействием

$$u(t) := t \cdot \sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$v_1 := u(i \cdot h) \quad xf := \text{cff}(v)$$

$$xf_1 := K_1 \cdot xf$$

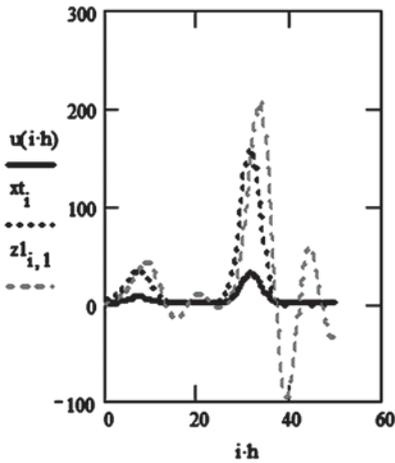
$$xt := \text{icff}(xf)$$

$$fk(t, y) := \begin{cases} y_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot y_1 - c \cdot y_0) \end{cases}$$

$$z1 := \text{rkfixe}(fy, 0, tk, N, f1)$$

реакция объекта на возмущение u

численное
интегрирование



xt_i - положение по
идентифицированной
системе
 $z1_{i,1}$ - положение по
исходной системе

проверка по численному интегрированию
дифуравнений и интегралу свертки

Док. 6.5

6.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Рассмотренные выше подходы реализуют концепцию «черного ящика», при которой ничего не известно о структуре исследуемой системы. В случае «серого ящика» известна структура объекта, например дифференциальное уравнение, но не известны конкретные значения параметров c_1, c_2, \dots, c_m . В этом случае задачу определения параметров можно свести к задаче параметрической оптимизации — минимизации ошибки моделирования. В качестве примера рассмотрим задачу определения параметров математического маятника, динамика которого описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$a \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = u(t). \quad (6.15)$$

Пусть из эксперимента известны функции воздействия на систему $u^1(t)$ и реакции на это воздействие $x^1(t)$ на интервале времени $[0, T]$. Ошибку моделирования можно определить как функцию параметров a, b, c :

$$Q(a, b, c) = \int_0^T (x^1(t) - x(a, b, c, u^1(t)))^2 dt \rightarrow \min_{a, b, c} \quad (6.16)$$

где $x(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения (6.15).

Важно отметить, что такой подход можно использовать при рассмотрении нелинейных систем, систем с конечным временем и с ненулевыми начальными условиями. Обычно для реализации численных методов приходится вводить

дискретное время $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = \frac{T}{\Delta t}$. Тогда дифференциальный опе-

ратор можно заменить конечными разностями, интегральный — конечными суммами и минимизировать полученную сумму по параметрам. Ниже приведен документ MathCAD (док. 6.6), решающий данную задачу. В нем показаны результаты идентификации нелинейного маятника, выходной сигнал которого замерен с нормальным шумом, сглажен процедурой скользящего среднего и использован для определения параметров.

В следующем документе (док. 6.7) показаны результаты сравнения полученной модели с данными эксперимента.

Определение параметров системы

a := .5 b := 1 c := .5 d := .04 N := 50 tk := 5

y := $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ u(t) := 1 + (t + sin(t)) h := $\frac{tk}{N}$

f(t, y) := $\begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a} [u(t) - b \cdot y_1 - c \cdot y_0 - d \cdot (y_0)^3] \end{bmatrix}$

z := rkfixed(y, 0, tk, N, f)

i := 0..N - 1

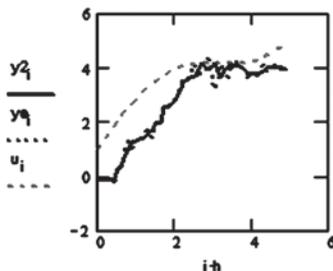
y1_i := z_{i,1} u_i := u(i·h)

m := 0 σ := .3 e := norm(N, m, σ) ye := y1 + e

y2 := medsmooth(ye, 5)

norm(N, m, σ) программа генерации нормальной случайной величины

medsmooth(ye, 5) - процедура сглаживания



ye — возмущенный шумом e выход
y2 — сглаженный сигнал

Док. 6.6 (начало)

```

fmin(a, b, c, d) :=
  x2_0 ← 0
  x1_0 ← 0
  for k ∈ 0..N-1
    x1_{k+1} ← x1_k + x2_k · h
    x2_{k+1} ←  $\frac{1}{a} \cdot [u_k - b \cdot x2_k - c \cdot x1_k - d \cdot (x1_k)^3] \cdot h + x2_k$ 
  s ←  $\sum_{k=0}^{N-1} (x1_k - y2_k)^2$ 

```

Подпрограмма
 вычисления
 ошибки
 идентификации

fmin(a, b, c, d) – функция определения ошибки идентификации

Given

блок минимизации
 ошибки

fmin(a, b, c, d) = a = a b = b c = c

$\begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \\ d1 \end{bmatrix} := \text{MinErr}(a, b, c, d)$

a1 = 0.331 b1 = 1.084 процедура минимизации
 c1 = 0.536 d1 = 0.035

fmin(a, b, c, d) = 1.955 уменьшение ошибки

w(t) = 1 + t + sin(t) fmin(a1, b1, c1, d1) = 1.257 с новыми параметрами

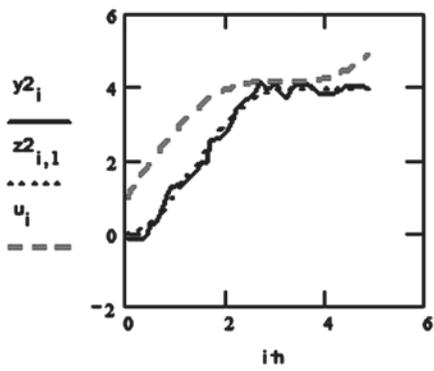
Док. 6.6 (окончание)

Сравнение с экспериментом

$f_i(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a1} \cdot [w(t) - b1 \cdot y_1 - c1 \cdot y_0 - d1 \cdot (y_0)^3] \end{bmatrix}$

Подпрограмма вычисления правых частей ОДУ с новыми параметрами

z2 := rkfixed(y, 0, tk, N, fi) интегрирование ОДУ



Сравнение модели с экспериментом

Док. 6.7

Если данные не зашумлены и функция Q линейна по параметрам, то эту задачу часто удается решить до конца. Рассмотрим этот подход в задаче определения параметров математического маятника. Заменим производные конечными разностями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\Delta t^2}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Из исходного дифференциального уравнения получим уравнение в конечных разностях

$$a \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\Delta t^2} + b \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta t} + cx_k = u_k, \quad (6.18)$$

где индексами обозначены значения функций в соответствующие моменты времени. Разрешив это уравнение относительно x_{k+1} , получим

$$x_{k+1} = c_1 x_k + c_2 x_{k-1} + c_3 u_k, \quad (6.19)$$

где $c_1 = c_1(a, b, c)$, $c_2 = c_2(a, b, c)$, $c_3 = c_3(a, b, c)$. Это уравнение можно рассматривать как линейную статическую модель $y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$ с функциями $\varphi_1 = z_1$, $\varphi_2 = z_2$, $\varphi_3 = z_3$ в формуле (1.15). Представим исходные данные в виде таблицы:

i	z_1^i	z_2^i	z_3^i	y^i
1	x^1	x^0	u^1	x^2
2	x^2	x^1	u^2	x^3
3	x^3	x^2	u^3	x^4
...
N	x^N	x^{N-1}	u^{N-1}	x^{N-2}

Тогда проблема определения параметров модели s сведется к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) & (z_1, z_3) \\ (z_1, z_2) & (z_2, z_2) & (z_2, z_3) \\ (z_1, z_3) & (z_2, z_3) & (z_3, z_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_1, y) \\ (z_2, y) \\ (z_3, y) \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

после чего можно перейти к исходным параметрам. Ниже приведена программа MathCAD, решающая эту задачу с помощью символьных и численных операторов (док. 6.8).

Результат программы при отсутствии помех — точное определение параметров, однако данный алгоритм очень чувствителен к помехам и временному шагу. Убедиться в этом вы можете после проведения конкретных расчетов по программе для измерений с шумом.

* * *

Центральный вопрос, рассматриваемый в данной главе, — как по измерениям функций времени (входных и выходных сигналов) восстановить динамический оператор, описывающий динамическую модель исследуемого процесса.

Исходные данные в задаче определения параметров

$$a \cdot \frac{x_{k+1} - 2 \cdot x_k + x_{k-1}}{h^2} + b \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{2 \cdot h} + c \cdot x_k = u_k \text{ solve, } x_{k+1}$$

скопированы из решения уравнения коэффициенты

связи между коэффициентами уравнения коэффициентами МНК

Given

$$d_0 = \frac{2 \cdot \frac{a}{h^2} - c}{\frac{a}{h^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h}}$$

$$d_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h} - \frac{a}{h^2}}{\frac{a}{h^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h}}$$

$$d_2 = \frac{1}{\left(\frac{a}{h^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h}\right)}$$

$$\text{Find}(a, b, c) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1 \cdot h^2 \cdot (d_1 - 1)}{2 \cdot d_2} \\ h \cdot \frac{(d_1 + 1)}{d_2} \\ -\frac{(d_0 + d_1 - 1)}{d_2} \end{bmatrix}$$

$$a := .5 \quad b := 1$$

$$c := .5 \quad N := 50 \quad tk := 10$$

$$h := \frac{tk}{N}$$

$$y := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u(t) := 1 + (t + \sin(t))$$

$$f1(t, w) := \begin{bmatrix} w_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot w_1 - c \cdot w_0) \end{bmatrix}$$

f и $f1$ - правые части исходного и линеаризованного дифуравнения

$$z1 := \text{rkfixed}(y, 0, tk, N, f1) \quad i := 0..N$$

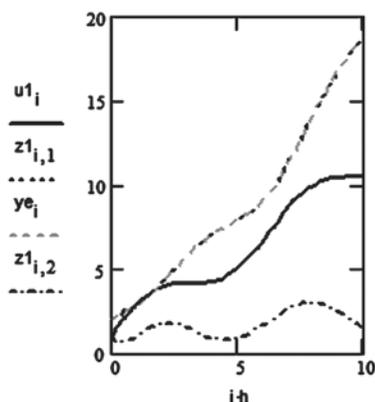
$\text{rkfixed}(y, 0, tk, N, f1)$ - под

программа интегрирования ОДУ

$$u1_i := u(i \cdot h) \quad y3_i := z1_{i,1}$$

$$m := 0 \quad \sigma := 10^5 \quad e := \text{mom}(N + 1, m, \sigma) \quad ye_i := y3_i \cdot (1 + e_i)$$

$$y2 := \text{medsmooth}(ye, 5)$$



Реакция объекта $z1$ на возмущение u без шума, $\sigma := 10^5$

Док. 6.8 (начало)

Определение параметров

$$k := 2.. N \quad y1_{k-2} := y2_k$$

заполнение массивов
исходных данных

$$k := 1.. N - 1 \quad x1_{k-1} := y2_k$$

$$k := 0.. N - 2 \quad x2_k := y2_k \quad x3_k := u1_{k+1}$$

$$\Phi := \begin{bmatrix} x1 \cdot x1 & x1 \cdot x2 & x1 \cdot x3 \\ x1 \cdot x2 & x2 \cdot x2 & x2 \cdot x3 \\ x1 \cdot x3 & x2 \cdot x3 & x3 \cdot x3 \end{bmatrix} \quad \Omega := \begin{bmatrix} x1 \cdot y1 \\ x2 \cdot y1 \\ x3 \cdot y1 \end{bmatrix}$$

формирование системы
линейных уравнений

$$d := \Phi^{-1} \cdot \Omega \quad d = \begin{bmatrix} 1.632 \\ -0.666 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

решение системы

$$p := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \frac{(d_1 - 1)}{d_2} \\ h \cdot \frac{(d_1 + 1)}{d_2} \\ -\frac{(d_0 + d_1 - 1)}{d_2} \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.005 \\ 0.499 \end{bmatrix}$$

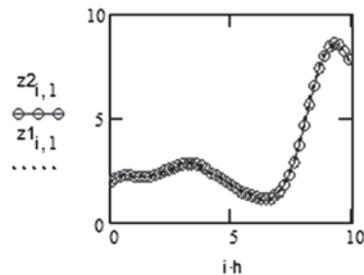
определенные
значения коэффициентов

проверка для другого воздействия

$$un(t) := t^{\sin(t)} \quad f1(t, w) := \begin{bmatrix} w_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (un(t) - b \cdot w_1 - c \cdot w_0) \end{bmatrix} \quad f2(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{p_0} \cdot (un(t) - p_1 \cdot y_1 - p_2 \cdot y_0) \end{bmatrix}$$

$$z2 := rkfixed(y, 0, tk, N, f2)$$

$$z1 := rkfixed(y, 0, tk, N, f1)$$



реакция объекта на
возмущение $un(t)$
 $z2_{i,1}$ - исходная
 $z1_{i,1}$ - с коэффициентами p

Док. 6.8 (окончание)

В отсутствие информации о структуре модели приходится иметь дело с ситуацией «черного ящика». Для линейных систем в этом случае приходится отыскивать ядро интегрального преобразования — импульсную переходную функцию во временной области или частотные характеристики в пространстве преобразований Фурье или Лапласа. Работа во временной области имеет определенные преимущества перед работой в области преобразований: можно рассматривать системы с конечным временем наблюдений и с ненулевыми начальными условиями. При работе же в частотной области интервал наблюдений должен быть достаточно большим, чтобы можно было пренебречь остаточным членом в интегральном преобразовании, вызванном конечностью времени наблюдения и влиянием ненулевых начальных условий. Для нелинейных систем часто используют гипотезу о последовательном соединении линейной динамической системы и нелинейного статического звена. В этом случае используются методы определения статической нелинейности по исследованию стационарных режимов и восстановлению статической зависимости $f(x, u) = 0$ методами, рассмотренными в главе 1.

Более благоприятна ситуация в случае известной структуры модели. Тогда имеют дело с «серым ящиком», и для построения модели нужно решить задачу определения неизвестных параметров. Конечно, и в предыдущем случае в качестве таких параметров можно рассматривать постоянные значения ядра интегрального преобразования на достаточно малых временных интервалах. Однако в данном случае для достаточно точного решения задачи этих интервалов, а значит, и параметров, будет очень много. Известная же структура предполагает существенно меньшее количество неизвестных параметров. Общий подход к решению задач параметрической идентификации — это их сведение к задаче нелинейного программирования, т. е. вычисление по решению дифференциального уравнения функции ошибки моделирования и ее минимизация по идентифицируемым параметрам.

Следует иметь в виду, что часто такие задачи являются плохо обусловленными. Иными словами, незначительные ошибки в исходных данных (например, ошибки измерений) могут привести к значительным ошибкам в определении модели. В этих условиях необходимо применять процедуры регуляризации решения, заключающиеся в наложении дополнительных условий на решение, например на ограничение его нормы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Каковы условия идентифицируемости линейных динамических систем?
2. На основе какой формулы проводится идентификация линейных динамических систем?
3. Какие преобразования используются для идентификации динамических систем в частотной области?
4. Что такое параметрическая идентификация?
5. Как можно свести параметрическую идентификацию динамической системы к задаче аппроксимации статической системы?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 6

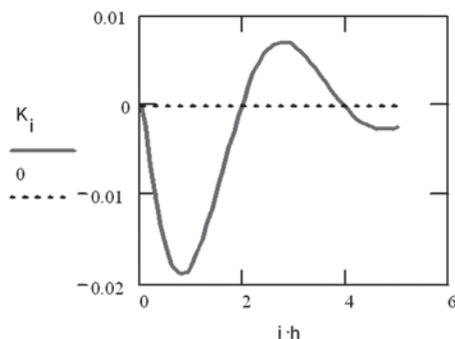
Задание 6.1. Найти решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x^2 + 4x = -u$$

при $u(t) = 2, 0 \leq t \leq 5$, начальное состояние — устойчивая стационарная точка при $f(x, u) = 0$.

Определить импульсную переходную функцию линейного приближения по решению $x(t)$ при таком управлении.

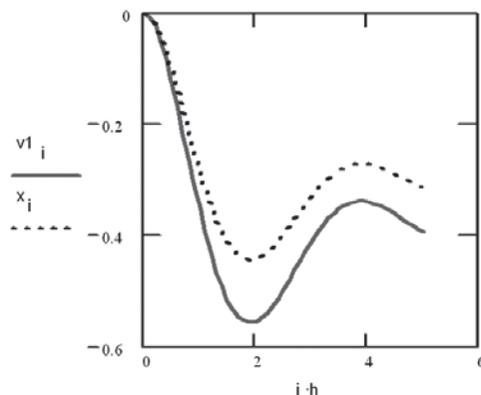
Ответ:



Задание 6.2. Сравнить решение нелинейной системы (см. задание 6.1) при $u(t) = 2, 5, 0 \leq t \leq 5$ с реакцией линейной системы, вычисленной по интегралу свертки с определенной выше импульсной переходной функцией.

Ответ:

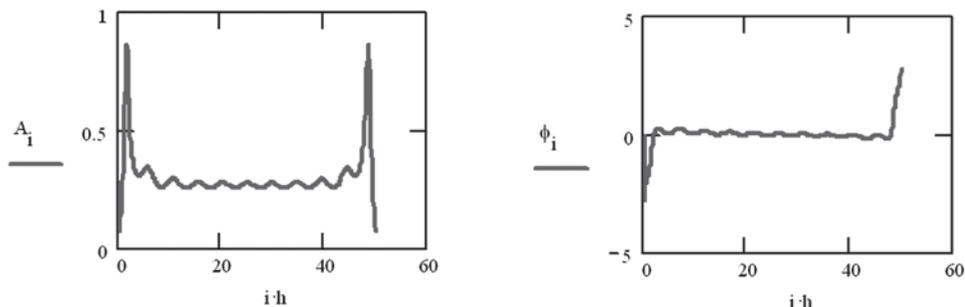
проверка по численному интегрированию
дифуравнений и интегралу свертки



Задание 6.3. По решению дифференциального уравнения $x(t)$ на интервале $0 \leq t \leq 50$ (см. задание 6.2) определить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики при управлении $u(t) = 0,5t, 0 \leq t \leq 1, u(t) = 0,5, t > 1$ (преобразование Фурье ступенчатой функции не существует), начальное состояние — устойчивая стационарная точка.

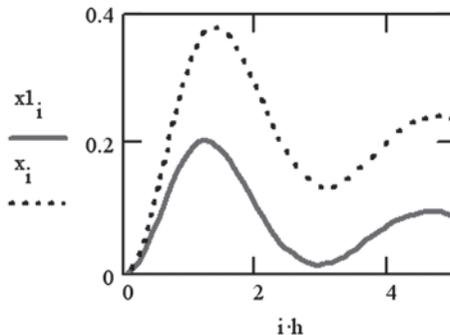
Ответ:

амплитудная характеристика $A_i := |Kf_i|$ фазовая характеристика $\phi_i := \arg(Kf_i)$



Задание 6.4. По найденным в задании 6.3 частотным характеристикам определить реакцию при $u(t) = 0,5t, 0 \leq t \leq 1, u(t) = 0,5, 1 < t \leq 5$, решение сравнить с реакцией нелинейной системы.

Ответ:



Задание 6.5. Решить задачу параметрической оптимизации определения

коэффициентов a, b, c уравнения $a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = -u$ по результатам реше-

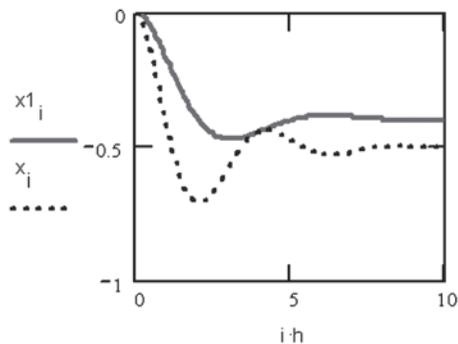
ния $x(t)$ уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x^2 + 4x = -u$ при $u(t) = 2, 0 \leq t \leq 10$, начальные

условия соответствуют устойчивой стационарной точке.

Ответ: $a = 2,151; b = -2,36; c = -6,257$.

Задание 6.6. Сравнить решение линейной и нелинейной систем по результатам задания 6.5 при $u(t) = 2, 5, 0 \leq t \leq 10$.

Ответ:



При принятии решений в сложных технических, экономических, социальных системах лицо, принимающее решение (ЛПР), должно учитывать множество разнообразных факторов и уметь оценивать последствия их изменения. Важно, чтобы эти изменения не только приводили к лучшему результату, но и давали максимально полезный эффект. Достижению такого эффекта в технических и экономических системах и посвящен данный раздел.

Целью оптимизации является выбор среди некоторого множества допустимых решений, которые можно было бы в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом *допустимость* каждого решения понимается как возможность его фактического осуществления, а *оптимальность* — как его целесообразность. Следует подчеркнуть, что оптимальное решение показывает предельные возможности системы и служит советом для ЛПР, а решение, которое оно принимает, может быть и другим, с учетом факторов иного рода, например политических, влияющих на принятие решения.

Указанная проблема решается с помощью синтеза многих научных направлений, таких как системный анализ и исследование операций, моделирование экономических и технических систем, численные методы и методы оптимизации функций, теории оптимального управления и других направлений.

В инженерной деятельности часто возникает необходимость управлять разнообразными технологическими, организационными социальными и другими процессами (рис. 7.1).

В этой схеме состояние объекта управления характеризуется вектором состояния $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ и находится под воздействием управляемых переменных — вектора управления $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$.

Если известна статическая модель некоторого процесса в виде функции $F(x_1, \dots, x_m) \rightarrow \min(\max)_{x \in X}$, то для оптимального

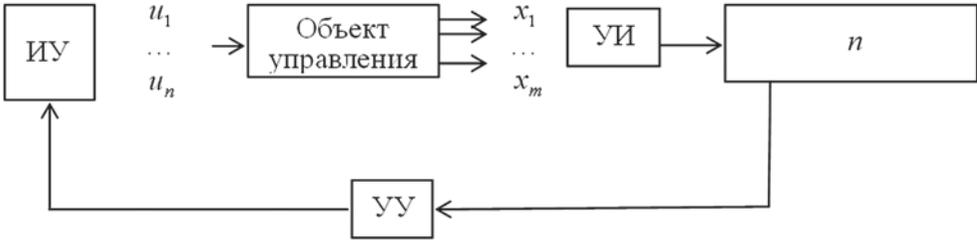


Рис. 7.1
 Схема процесса управления:

ИУ — исполнительное устройство; УИ — устройство измерений; УУ — управляющее устройство.

ведения процесса нужно найти неизвестное число или вектор x , что решается при помощи методов оптимизации функций.

В задачах оптимального управления рассматриваются динамические модели, критерием оптимальности в которых является не функция, а функционал, и нужно определить неизвестную функцию $u(t)$, доставляющую минимум интегралу J при условии, что управление $u(t)$ выбирается из множества допустимых управлений U :

$$J = \int_0^T F(u(t))dt \rightarrow \min_{u(t) \in U} \quad (7.1)$$

Эту задачу с некоторым приближением можно свести к задаче параметрической оптимизации. Для этого введем дискретное время, разбив отрезок $[0, T]$ N точками с шагом Δt :

$$t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots$$

Заменим непрерывную функцию $u(t)$ кусочно-постоянной функцией $u(t_k)$. Тогда интеграл (7.1) мы приближенно можем заменить суммой

$$\int \approx \sum_{k=0}^{k=N-1} F(u(t_k))\Delta t = J(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (7.2)$$

Используя необходимые условия минимума $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$ или подходящий чис-

ленный метод поиска минимума функции (7.2), можно приближенно найти оптимальное управление. Однако такой подход годится лишь для малого числа разбиений N (порядка $10 \dots 20$). Более точное решение задачи сталкивается с непреодолимыми трудностями ввиду «проклятия размерности» в оптимизационных задачах, в которых сложность вычислений растет по меньшей мере как куб размерности задачи (N^3). Применение метода динамического программирования позволяет уменьшить число вычислений функции, однако потребует значительно большего объема памяти компьютера.

Но в некоторых случаях такой подход вполне оправдан. Если известна структура управления с точностью до параметров, то проще решить задачу определения этих параметров, чем искать функцию управления. Так, если известно, что управление должно носить релейный характер и число переключений

функции управления с одного уровня на другой невелико, то тогда в качестве неизвестных параметров целесообразно рассматривать время переключений и решать задачу минимизации функции по этим параметрам.

Возникает вопрос о том, нельзя ли найти аналогичные необходимые условия оптимальности для непрерывной функции $u(t)$ и на этой основе разработать соответствующие численные методы. Ответ на этот вопрос дает теория оптимального управления.

Для постановки задачи оптимального управления необходимо иметь следующие составляющие:

- уравнения движения, которые обычно задаются обыкновенными дифференциальными уравнениями и представляют собой математическую модель объекта управления;
- ограничения на управляющие функции, отражающие практическую реализуемость управления;
- критерий оптимальности — числовая оценка качества достижения цели системой управления.

Если первые две составляющие задачи носят объективный характер и, как правило, не могут быть произвольно изменены, то критерий оптимальности находится в распоряжении проектировщика системы управления, который часто пытается удовлетворить противоречивым требованиям к качеству системы управления, и вынужден решать задачу управления с различными критериями оптимальности.

7.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения задают связь между состоянием системы x и управлением u . Обычно эта связь задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) типа:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad t \in [0, T]. \quad (7.3)$$

Некоторые примеры уравнений движения приведены в главе 5. Еще раз приведем конкретные уравнения движения для космического аппарата.

Пример. Уравнения плоского движения космического аппарата (КА) в ньютоновском поле имеют следующий вид:

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{m_1 m_2 r}{|r|^3} + m_1 a, \quad |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.4)$$

В этой системе из трех дифференциальных уравнений 2-го порядка r — радиус-вектор расстояния от притягивающего центра, например Земли, до КА, m_1 — масса КА, m_2 — масса притягивающего центра, a — вектор реактивного ускорения, k — гравитационная постоянная, x, y, z — проекции вектора r на декартовы оси координат.

От уравнения (7.4) в размерных единицах полезно перейти к безразмерным переменным как с точки зрения численного счета, так и для распространения полученных результатов на любой притягивающий центр: Землю, Луну и т. д. Для этого сделаем замену переменных на безразмерные, взяв за единицу време-

ни суточный период вращения Земли $T_c = 86\,164$ с и безразмерное расстояние от центра Земли до геостационарной орбиты $R_c = 42\,164$ км. В этом случае радиусу стационарной орбиты и периоду обращения спутника на ней соответствуют единичные радиус и скорость.

Записывая это уравнение покомпонентно, имеем систему из трех уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_x - \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = a_y - \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = a_z - \frac{z}{r^3}. \end{cases} \quad (7.5)$$

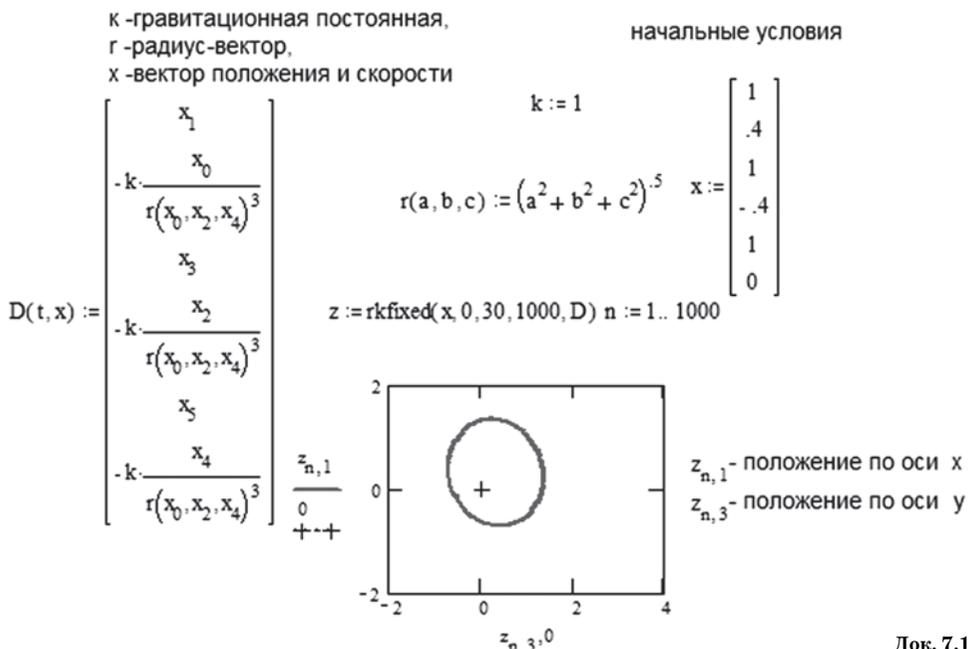
Ее можно упростить и записать

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a - \frac{r}{|r|^3}.$$

Интегрирование этой системы уравнений в отсутствие ускорения a иллюстрирует следующий документ MathCAD (док. 7.1).

Здесь управление — это реактивное ускорение a . Целью управления может быть вывод КА на заданную орбиту.

Интегрирование уравнений движения КА



Док. 7.1

7.2. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В задачах оптимального управления в качестве показателя эффективности процесса управления используется критерий оптимальности — преобразование входных $u(T)$ и (или) выходных $x(t)$ переменных в некоторое число I , например точность достижения цели управления, время достижения цели, производительность агрегата.

Критерий оптимальности и задачи, связанные с ним, определяются следующим образом:

- минимизация интегрального критерия — задача Лагранжа:

$$I = \int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}; \quad (7.6)$$

- минимизация функции в конечный момент времени — задача Майера:

$$I = \Phi(x(T), u(T), T) \rightarrow \min_{u \in U}; \quad (7.7)$$

- минимизация смешанного функционала — задача Больца:

$$I = \Phi(x(T), u(T), T) + \int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (7.8)$$

Все три задачи могут быть сведены к задаче Майера путем введения дополнительной переменной $x'_0 = F(x, u, t)$ с начальным условием $x_0(0) = 0$. В этом случае критерий оптимальности примет вид

$$I = \Phi(x(T), u(T), T) + x_0(T). \quad (7.9)$$

В конкретных задачах часто используются частные критерии, например интегралы, связанные с задачей Лагранжа:

$$I(t) = \int_0^T dt = T, \quad (7.10)$$

$$I(u) = \int_0^T |u(t)| dt, \quad (7.11)$$

$$I(u) = \int_0^T u^2(t) dt, \quad (7.12)$$

$$I(x) = \int_0^T |x(t) - x^*(t)| dt. \quad (7.13)$$

В критерии (7.10) минимизируется время процесса управления, в (7.11) — расход, в (7.12) — энергия, затрачиваемая на процесс управления, критерий (7.13) характеризует отклонение траектории от желаемой $x^*(t)$. Несмотря на то что в эти критерии явно входит только одна переменная, все они связаны между собой уравнениями движения (7.3).

Критерий, связанный с задачей Майера, может характеризовать требования к отклонению от цели в конечный момент времени:

$$[x(T) - x^*]^2 \rightarrow \min, \quad (7.14)$$

или к максимизации траектории, например высоты самолета:

$$x(T) \rightarrow \max. \quad (7.15)$$

В задаче Больца присутствуют требования как к конечному состоянию, так и к состоянию на всем интервале времени, например

$$x^T(T)Fx(T) + \int_0^T (x^T(t)Qx(t) + u(t)^T Ru(t))dt. \quad (7.16)$$

В последнем критерии первый член характеризует отклонение траектории от начала координат в конечный момент времени, первое слагаемое под интегралом — суммарное отклонение траектории; второе — затраты на управление. Симметрические матрицы F , Q , R формируют соответствующие квадратичные формы, и их выбор определяется условиями компромисса между этими частными показателями процесса управления. Такой критерий часто применяется в задачах стабилизации некоторого рабочего режима.

7.3. ОГРАНИЧЕНИЯ

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы выбрать управление $u(t)$ с наилучшим значением критерия оптимальности $I \rightarrow \min_u$. Однако только этого условия часто оказывается недостаточно, поэтому необходимо учитывать условия, гарантирующие осуществимость управления, т. е. должна решаться задача условной минимизации:

$$I \rightarrow \min_{u \in U}$$

где U — множество допустимых управлений.

Ограничения на управление обычно связаны с тем, что управляющие воздействия не могут превышать по абсолютной величине некоторых предельных значений: рули у самолета не могут повернуться больше предельного угла, двигатель ракеты не может развить тягу больше предельной и т. д. Такие ограничения можно сформулировать как

$$|u(t)| \leq u_{\max}. \quad (7.17)$$

Могут возникать и ограничения на скорость изменения управления. Например, положение руля самолета не может измениться мгновенно. Такое ограничение можно записать в виде

$$\max_t \left| \frac{du}{dt} \right| \leq \varepsilon, \quad (7.18)$$

где ε — предельная скорость.

Ограничения могут иметь и интегральный вид. Так, ограничения на расход топлива можно записать в виде

$$\int_0^T |u(t)| dt. \quad (7.19)$$

Сравнивая (7.19) и (7.11), мы видим, что критерии и ограничения могут иметь один и тот же вид, но только в разных задачах. Ограничения могут быть наложены не только на управления. Часто в реальных задачах присутствуют ограничения и на переменные состояния системы. Стандартным является условие, характеризующее начальное состояние системы:

$$x(t)|_{t=0} = x_0. \quad (7.20)$$

Это условие часто присутствует в задачах управления — задачах с закрепленным левым концом траектории. Часто также бывает закреплен и правый конец траектории, например если необходимо попасть в цель. Тогда

$$x(t)|_{t=T} = x_k. \quad (7.21)$$

Если заданы оба условия (7.20) и (7.21), то это задача с закрепленными концами (терминальная); если какое-либо одно, то это задача со свободными концами. Ограничения могут быть заданы не только в точках, но и на множестве функций $x(t) \in X(t)$. Эти ограничения могут быть в виде дифференциальных и интегральных операторов, например

$$\max_t \left| \frac{dx}{dt} \right| \leq \varepsilon, \quad \int_0^T |x(t)| dt \leq \beta.$$

Данные ограничения имеют следующую трактовку: первое — скорость прогрева материала не может без разрушения превышать предельного значения, второе — суммарное отклонение траектории ограничено.

Как уже отмечалось, в разных постановках задачи критерии и ограничения могут меняться местами.

7.4. ПРИМЕР ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Приведем пример постановки задачи управления космическим аппаратом. Пусть оси x , y расположены в плоскости орбиты, проекция ускорения a на ось z отсутствует. Тогда движение космического аппарата происходит только в плоскости орбиты, его положение в каждый момент времени характеризуется точкой с координатами x и y . Если вектор a — это вектор реактивной тяги с проекциями a_x , a_y , то из (7.2) для плоского случая имеем:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_x + \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = a_y + \frac{y}{r^3}, \end{cases} \quad (7.22)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние между притягивающим центром и космическим аппаратом.

В начальный момент времени космический аппарат находится в точке $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и имеет скорость $x'(0) = x'_0$, $y'(0) = y'_0$. Пусть на круговой орбите единичного радиуса находится другой космический аппарат,двигающийся с постоянной единичной угловой скоростью. Этот КА имеет траекторию движения:

$$|r(t)| = 1, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t, \quad (7.23)$$

где φ_0 — угловое положение КА-цели в начальный момент времени.

Встреча двух КА должна пройти за время T . Конечные условия — это точка на окружности единичного радиуса $x(T)^2 + y(T)^2 = 1$ с угловым положением

$$\varphi(T) = \lambda + T,$$

где T — конечный момент времени; λ — начальный угол для КА-цели относительно первого КА.

Для решения задачи управления удобнее перейти к полярным координатам с помощью замены, так, как это выполнено в главе 5:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, \\ z'_2 = z_1 z_3^2 - \frac{1}{z_1^2} + u_1, \\ z'_3 = (u_2 - 2z_2 z_3) \frac{1}{z_1}, \\ z'_4 = z_3. \end{cases} \quad (7.24)$$

Новые координаты имеют смысл

$$z_1 = r, \quad z_2 = r', \quad z_4 = \varphi, \quad z_3 = \varphi',$$

где r — радиус-вектор; r' — радиальная составляющая скорости; φ — угол; φ' — угловая составляющая скорости.

Положение космического аппарата в начальный момент времени характеризуется числами:

$$z_1^0 = r_0, \quad z_2^0 = r'_0, \quad z_3^0 = \varphi_0, \quad z_4^0 = \varphi'_0,$$

связанными с начальными условиями x, y формулами замены координат. В конечный момент времени T должны выполняться условия:

$$z_1^k = 1, \quad z_2^k = 0, \quad z_3^k = 1, \quad z_4^k = \lambda + T.$$

Сформулируем критерий оптимальности. В задаче быстродействия этот критерий имеет вид

$$\int_0^T dt = T \rightarrow \min_{u \in U} \quad (7.25)$$

где u — вектор, компонентами которого являются радиальное u_1 и трансверсальное u_2 ускорения реактивных двигателей.

Развиваемое двигателем ускорение u не может быть больше установленной величины. Тогда множество U ограничений на управление будет описываться неравенством

$$|\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}| \leq u_{\max}. \quad (7.26)$$

Теперь можно сформулировать одну из задач оптимального управления. Необходимо найти вектор-функцию $u(t)$, удовлетворяющую неравенству (7.26), переводящую систему (7.24) из начальной точки z^0 в конечную точку z^k и минимизирующую критерий (7.25), в нашем случае за минимальное время.

В другой постановке можно решать задачу минимизации расхода топлива

$$I = \int_0^T |\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}| dt$$

за фиксированное время с учетом ограничения (7.26). Часто приходится решать задачу оптимального управления на основе компромисса между этими критериями.

* * *

При решении задач оптимального управления — вычислении критерия оптимальности и ограничений — наибольшие трудности возникают в связи с интегрированием уравнений движения. Нелинейные системы ОДУ требуют, как правило, численных методов решения. При единичных получениях решений ОДУ численными методами существенных трудностей не возникает при применении средств вычислительной техники. Однако получающиеся зависимости, связанные с решением ОДУ, имеют алгоритмический характер и не могут быть использованы в аналитических методах. В этих условиях имеет смысл упростить математическую модель, линеаризовав ее в окрестности некоторого рабочего режима. Если отклонения от этого режима незначительны, то линеаризованная модель не будет существенно отличаться от нелинейной модели. Это обстоятельство часто позволяет применять аналитические методы решения задачи и использовать, если нужно, полученное решение в качестве начального приближения с целью уточнения решения по нелинейной модели.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7

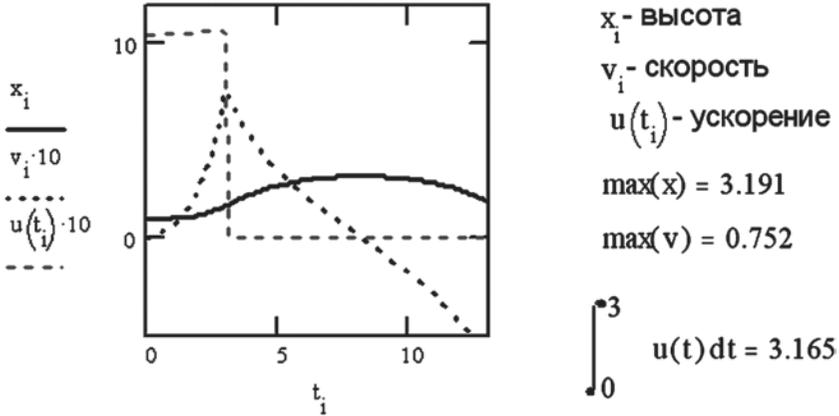
1. Перечислите основные составляющие задачи оптимального управления.
2. В чем отличие задач Лагранжа, Майера и Больца?
3. В чем отличия между задачами с фиксированными концами и задачи со свободными концами?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 7

Задание 7.1. Ракета стартует вертикально вверх с начальными условиями $x(0) = x_1(0) = 1$, $v(0) = x_2(0) = 0$. Составить одномерное уравнение движения в ньютоновском поле в безразмерном виде. Найти решения этого уравнения

при действии ускорения $u(t) = 1,04 + 0,01t$ на интервале $t \in [0, 3]$ и дальнейшем пассивном движении. Определить максимальную высоту x^{\max} , на которую поднимется ракета, максимальную скорость v^{\max} и расход топлива $J = \int_0^3 |u(t)| dt$.

Ответ:



Задание 7.2. Составить уравнения движения материальной точки массой m на плоскости, на которую действуют следующие силы: вдоль горизонтальной оси x — сила сопротивления среды (воздуха) пропорционально квадрату скорости $C_1(y)(v_x)^2$; составляющая тяги ma_x ; вдоль вертикальной оси y — сила тяжести mg , подъемная сила крыла C_2v_x и составляющая тяги ma_y .

Ответ:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = ma_x - C(y) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = ma_y - mg + C_2 \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

Задание 7.3. Линеаризовать уравнения движения из задания 7.2 в точке $\bar{x} = x(0), \bar{u} = 0$.

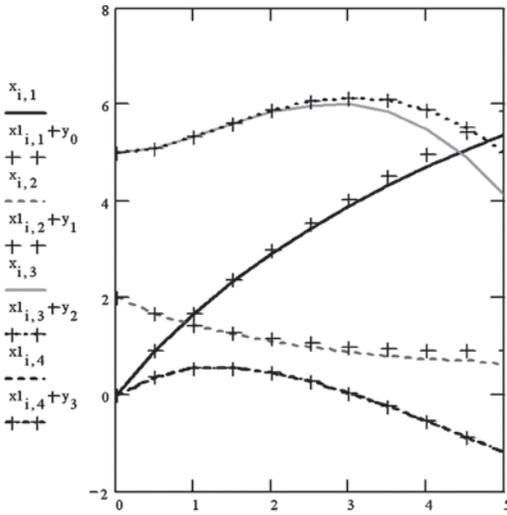
Ответ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,787 & -0,121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ u_1 - 0,787 \\ 0 \\ u_2 + 1 \end{bmatrix}, x' = Ax + Bu + v.$$

Задание 7.4. Сравнить решения линейной и нелинейной систем при нулевом управлении и тех же начальных условиях.

Ответ:



- $x_{i,1}$ - перемещение по оси x в исходной системе,
- $x_{i,1} + y_0$ - то же в линейной системе
- $x_{i,2}$ - скорость по оси x в исходной системе
- $x_{i,2} + y_1$ - то же в линейной системе
- $x_{i,3}$ - перемещение по оси y в исходной системе
- $x_{i,3} + y_2$ - то же в линейной системе
- $x_{i,4}$ - скорость по оси y в исходной системе
- $x_{i,4} + y_3$ - то же в линейной системе

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе будут рассмотрены свойства линейных управляемых систем, связанные со структурой матриц A , B , характеризующих свойства объекта управления, и матрицы C , характеризующей систему управления. Эти свойства позволяют оценить объект управления и систему измерений на предварительном этапе их проектирования.

8.1. ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

При проектировании системы управления, прежде чем решать задачу управления, важно быть уверенным в возможности управлять динамической системой. Для линейных систем этот вопрос решается на основе *критерия управляемости*.

Рассмотрим систему линейных ОДУ

$$x' = Ax + Bu, \quad (8.1)$$

где $x \in R^m$ и $u \in R^n$, $t \in [0, T]$, с начальными условиями

$$x(0) = x^0 \neq 0. \quad (8.2)$$

Выясним, можно ли за конечное время T перейти из начального состояния (8.2) в начало координат $x(T) = x^h = 0$. При положительном ответе на этот вопрос система (8.1) является вполне управляемой системой, или, иначе, обладает свойством управляемости.

Для ответа на поставленный вопрос запишем решение задачи (8.1), (8.2) с помощью формулы Коши (5.42):

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (8.3)$$

Умножим обе части этого выражения на матрицу e^{-At} :

$$e^{At}x(t) = x^0 + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Для конечного момента времени T с учетом нулевого конечного состояния в случае управляемости за это время имеем:

$$\int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = -x^0. \quad (8.4)$$

Если существует функция $u(t)$, удовлетворяющая этому условию, то система (8.1) *вполне управляема*: она может за конечное время перейти в начало координат.

Учитывая формулы (5.43), для матрицы перехода выражение (8.4) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{m'-1} \alpha_k(-\tau)A^kBu(\tau)d\tau = -x^0, \quad (8.5)$$

где m' — степень минимального полинома матрицы A ; α_k — коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа — Сильвестера.

Если элементы матриц A и B не зависят от времени, то

$$\sum_{k=0}^{m'-1} A^k B \int_0^T \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = -x^0 \quad (8.6)$$

или

$$\begin{aligned} & B \int_0^T \alpha_{01}(-\tau)u(\tau)d\tau + AB \int_0^T \alpha_1(-\tau)u(\tau)d\tau + \dots + \\ & + A^{m'-1}B \int_0^T \alpha_{n'-1}(-\tau)u(\tau)d\tau = -x^0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Каждое из слагаемых в (8.7) является вектором размера $n \times 1$. Представим левую часть этого равенства в виде составной матрицы и перепишем (8.7) в виде

$$[BABA^2B \dots A^{m'-1}B] \times \begin{bmatrix} \int_0^T u(-\tau)\alpha_0(\tau)d\tau \\ 0 \\ \int_0^T u(-\tau)\alpha_1(\tau)d\tau \\ \dots \\ \int_0^T u(-\tau)\alpha_{m'-1}(\tau)d\tau \end{bmatrix} = -x^0. \quad (8.8)$$

Так как каждая матрица вида $A^k B$, $k = 0, 1, \dots$ имеет размер $m \times n$, то составная матрица

$$W = [BABA^2B \dots A^{m'-1}B] \quad (8.9)$$

имеет размер $m \times (n \times m')$.

Каждый элемент в векторе

$$U = \begin{bmatrix} \int_0^T u(-\tau) \alpha_0(\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_0^T u(-\tau) \alpha_1(\tau) d\tau \\ 0 \\ \dots \\ \int_0^T u(-\tau) \alpha_{m'-1}(\tau) d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

представляет собой n -мерный вектор, так как $u \in R^n$. Таким образом размерность вектора U есть $q = n \times m'$. Тогда уравнение (8.8) примет вид

$$WU = x^0$$

или в скалярной форме:

$$\begin{cases} W_{11}U_1 + W_{12}U_2 + \dots + W_{1q}U_q = -x_1(0), \\ \dots\dots\dots \\ W_{m1}U_1 + W_{m2}U_2 + \dots + W_{mq}U_q = -x_m(0). \end{cases} \quad (8.11)$$

Система (8.11) есть система линейных алгебраических уравнений. Следовательно, выполнение условий управляемости сводится к существованию решения этой системы. Для этого, как известно из курса линейной алгебры, необходимо и достаточно, чтобы ранг q матрицы W был равен m . Если $q = m$, то существует единственное решение системы U . В реальных системах $q = n \times m' > m$, тогда матрица W прямоугольная и решение системы (управление) является не единственным, поэтому на него могут быть наложены дополнительные требования, например минимизации критерия оптимальности.

Сформулируем *теорему об управляемости*. Система вполне управляема, если пара матриц системы A и B таковы, что ранг составной матрицы

$$W = [BABA^2B \dots A^{m'-1}B]$$

равен порядку системы m .

Пример. Рассмотрим линеаризованные уравнения движения космического аппарата (8.18), в которых опущено последнее уравнение для углового положения КА. Эта координата z_4 не входит ни в одно уравнение системы ((7.33), переменная z_4) и может быть получена интегрированием переменной z_3 . Таким образом, в этом случае рассматривается задача перевода на круговую орбиту с произвольным угловым положением КА.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Степень минимального аннулирующего полинома равна размерности системы, т. е. $m' = m = 3$. В случае управления только радиальным ускорением ($u_2 = 0$) имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, A^2B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Составная матрица

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Delta(W) = 0$, ранг $W < 3$, следовательно, система с данным управлением неуправляема, и перейти на круговую орбиту заданного радиуса невозможно.

Рассмотрим вместо радиального ускорения трансверсальное. В этом случае управление входит не во вторую, а в третью строку уравнения и $u_1 = 0$. Тогда

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, A^2B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \Delta(W) = -4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то ранг $W = 3$. Следовательно, система является управляемой.

При комбинации трансверсального и радиального управления вектор B имеет следующий вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При работе в системе MathCAD можно войти в представленную ниже программу определения управляемости пары матриц A и B (док. 8.1).

Проверка линейной системы на управляемость

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{матрицы дифференциального уравнения}$$

Док. 8.1 (начало)

$$n := \text{cols}(A) - 1$$

$$n = 2$$

$$i := 0..n$$

$$j := 0..n$$

проверка системы на управляемость

$$W(n) := \begin{cases} M \leftarrow B \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad M \leftarrow \text{augment}(M, A^i \cdot B) \\ M \end{cases}$$

$$W(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

составная матрица

$$\text{rank}(W(n)) = 3$$

ранг составной матрицы для управляемой системы

должен быть равен

$$n + 1 = 3$$

Док. 8.1 (окончание)

8.2. УСЛОВИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассмотрим систему линейных ОДУ, дополненную алгебраическим линейным векторным уравнением, определяющим систему измерений:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (8.12)$$

$$y = Cx + Du. \quad (8.13)$$

Система уравнений (8.13) представляет собой такую систему измерений, что для целей управления известен в общем случае не вектор состояния x , а вектор наблюдения y (его называют также вектором выхода системы), связанный линейным преобразованием с вектором x через матрицу наблюдений C :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & \dots & c_{pm} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix},$$

где m — размерность вектора состояний; p — число датчиков (каналов измерений); c_{ij} — коэффициенты усиления датчиков от i -го канала состояния x_i до j -го канала наблюдения y_j .

Если $C = E$, то имеется m каналов измерений и контролируется вектор состояния.

Пусть по данным измерений известен вектор выхода $y(t)$ на отрезке времени $0 \leq t \leq T$. Предполагается также, что управление $u(t)$ на этом отрезке известно. Согласно формуле Коши (8.27):

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

поэтому в соответствии с (8.13):

$$y(t) = Ce^{At}x^0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (8.14)$$

Так как функция $u(t)$ известна, то второе и третье слагаемые в (8.14) могут быть вычислены и вычтены из наблюдений. При выполнении этого условия можно считать, что получено измерение только свободного движения системы при $u(t) = 0$:

$$y(t) = Ce^{At}x^0. \quad (8.15)$$

В уравнении (8.15) неизвестным является вектор начального состояния системы x^0 . Если по известным значениям функции $y(t)$ и известным матрицам A и C можно определить начальное состояние системы, то такая система называется *вполне наблюдаемой*. Очевидно, что наблюдаемость системы зависит от этих матриц. Для нахождения условий наблюдаемости представим матрицу C в виде множества вектор-строк:

$$C_j = [c_{j1}, \dots, c_{jm}], \quad j = \overline{1 \dots p},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_p \end{bmatrix}.$$

Тогда компоненту вектора измерений $y_j(t)$ можно представить в виде

$$y_j(t) = C_j e^{At}x^0. \quad (8.16)$$

Учитывая, что

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m'-1} \alpha_k(t)A^k,$$

из (8.16) получим

$$y_j(t) = C_j \sum_{k=0}^{m'-1} \alpha_k(t)A^k x^0. \quad (8.17)$$

Умножая левую и правую части (8.17) на $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, получим

$$\alpha_i(t)y_j(t) = C_j \sum_{k=0}^{m'-1} \alpha_i(t)\alpha_k(t)A^k x, \quad i = \overline{0, m'-1}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Таких уравнений будет $m \times p$. Теперь проинтегрируем по времени:

$$\int_0^T \alpha_i(t)y_j(t)dt = \int_0^T \sum_{k=0}^{m'-1} \alpha_i(t)\alpha_k(t)dt C_j A^k x^0.$$

Обозначим

$$w_{ij} = \int_0^T \alpha_i(t)y_j(t)dt, \quad \alpha_{ij} = \int_0^T \alpha_i(t)\alpha_j(t)dt$$

и получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{00}C_j x^0 + \alpha_{01}C_j A x^0 + \dots + \alpha_{0,m'-1}C_j A^{m'-1} x^0 = w_{0j}, \\ \alpha_{10}C_j x^0 + \alpha_{11}C_j A x^0 + \dots + \alpha_{1,m'-1}C_j A^{m'-1} x^0 = w_{1j}, \\ \dots, \\ \alpha_{m'-1,0}C_j x^0 + \alpha_{m'-1,1}C_j A x^0 + \dots + \alpha_{m'-1,m'-1}C_j A^{m'-1} x^0 = w_{m'-1,j}. \end{cases} \quad (8.18)$$

Определитель из коэффициентов при членах $C_j x^0, C_j A x^0, \dots, C_j A^{m'-1} x^0$ в уравнениях (8.18) отличен от нуля, так как это определитель Грамма, составленный из линейно независимых функций $\alpha_k(t)$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0,m'-1} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,m'-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m'-1,0} & \alpha_{m'-1,1} & \dots & \alpha_{m'-1,m'-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, система (8.18) имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} C_j x^0 &= a_{j0}, \\ C_j A x^0 &= a_{j1}, \\ \dots \\ C_j A^{m'-1} x^0 &= a_{j,m'-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Так как $j = 1, 2, \dots, p$, то имеем $m' \times p$ условий (8.19). Перепишем (8.19) в виде скалярного произведения векторов (при операции транспонирования произведения матриц сомножители меняются местами):

$$\begin{aligned} \langle C_j^T, x^0 \rangle &= a_{j0}, \\ \langle A^T C_j^T, x^0 \rangle &= a_{j1}, \\ &\dots \\ \langle (A^T)^{m'-1} C_j^T, x^0 \rangle &= a_{j,m'-1}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Столбцы матриц $C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{m'-1} C^T$ (число таких столбцов равно $m' \times p$) входят в качестве векторов в левые части (8.20). Эти векторы образуют составную матрицу S :

$$S = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{m'-1} C^T]. \quad (8.21)$$

Предположим, что среди столбцов матрицы S имеется m линейно независимых столбцов с номерами i_1, i_2, \dots, i_m , т. е. ранг матрицы S равен m . Тогда будем иметь следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} S_{i_1,1} x_1(0) + S_{i_1,2} x_2(0) + \dots + S_{i_1,m} x_m(0) &= a_{i_1}, \\ S_{i_2,1} x_1(0) + S_{i_2,2} x_2(0) + \dots + S_{i_2,m} x_m(0) &= a_{i_2}, \\ \dots\dots\dots \\ S_{i_m,1} x_1(0) + S_{i_m,2} x_2(0) + \dots + S_{i_m,m} x_m(0) &= a_{i_m}. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Определитель этой системы отличен от нуля в силу линейной независимости векторов S_i , следовательно, система (8.22) имеет единственное решение, позволяющее единственным образом определить вектор начальных условий $x(0)$.

Итак, мы можем сформулировать *теорему о наблюдаемости*.

Если матрица

$$S = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{m'-1} C^T]$$

имеет ранг, равный m , то система вполне наблюдаема.

Пример. Движение спутника без углового положения описывается системой с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть измеряется только дальность до КА, т. е. система измерений описывается матрицей $C = [1 \ 0 \ 0]$, и вектор выхода системы имеет вид

$$y = Cx = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1.$$

Можно ли восстановить начальное состояние, наблюдая только за дальностью? Для ответа на этот вопрос проверим условия наблюдаемости:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(S) = 2 \neq 0, \quad \text{rank} S = 3.$$

Следовательно, система наблюдаема, и по наблюдению за дальностью мы можем определить начальное состояние, а по формуле Коши — траекторию полета КА.

Можно воспользоваться программой определения наблюдаемости по следующему документу MathCAD, в котором произведена проверка наблюдаемости для измерения только радиальной скорости (док. 8.2).

Проверка линейной системы на наблюдаемость

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := (0 \ 1 \ 0)$$

$$n := \text{cols}(A) - 1$$

$$n = 2$$

$$i := 0..n$$

$$j := 0..n$$

Проверяем систему на наблюдаемость

$$W(n) := \begin{cases} M \leftarrow C^T \\ \text{for } i \in 1..n \\ M \leftarrow \text{augment} \left[M, (A^T)^i \cdot C^T \right] \\ M \end{cases}$$

$$W(n) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W(n)) = 2$$

ранг составной матрицы для наблюдаемой системы

должен быть равен

$$n + 1 = 3$$

Док. 8.2

Так как ранг составной матрицы меньше порядка системы, то система ненаблюдаема.

8.3. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Для линейных систем движения и измерений, описываемых уравнениями (8.12), (8.13):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \\ y &= Cx + Du, \quad y \in R^p, \end{aligned} \tag{8.23}$$

справедлив принцип двойственности, связывающий наблюдаемость и управляемость в прямой (8.23) и сопряженной линейных системах.

Рассмотрим также сопряженную систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^T z + C^T w, \quad z \in R^m, \quad w \in R^p, \\ g &= B^T z + D^T w, \quad g \in R^n. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Условие управляемости прямой системы состоит в том, что ранг составной матрицы

$$W = [BABA^2B \dots A^{m'-1}B]$$

должен быть равен m , условия управляемости — ранг составной матрицы

$$S = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{m'-1} C^T]$$

также должен быть равен m .

Условие управляемости для сопряженной системы определяется рангом матрицы

$$W = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{m'-1} C^T],$$

а наблюдаемости рангом матрицы

$$S = [BABA^2B \dots A^{m'-1}B].$$

Таким образом, прямая системы (8.23) управляема, если сопряженная система (8.24) наблюдаема, и наоборот, прямая система наблюдаема, если сопряженная система управляема.

* * *

Линейное приближение исходной нелинейной системы ОДУ позволяет судить о качественном и количественном поведении системы вблизи номинального режима. На основе формулы Коши для линейных ОДУ можно сделать вывод об управляемости и наблюдаемости системы. Эти показатели определяются структурой матриц A, B, C управляемой системы. Если матрица A определяется природой управляемого процесса и не может быть изменена проектировщиком системы, то матрицы B, C определяют расположение управляющих органов и контролируемых приборов соответственно и находятся в распоряжении проектировщика. Используя критерии управляемости и наблюдаемости, проектировщик системы может установить, не решая задачу моделирования и управления, существует ли решение задачи управления с рассматриваемой структурой системы контроля и управления.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 8

1. От каких матриц линейной системы зависит ее управляемость?
2. От каких матриц линейной системы зависит ее наблюдаемость?
3. Сформулируйте теорему двойственности для линейных систем.

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 8

Задание 8.1. Проверить систему линейных уравнений из ответа задания 5.3 с матрицами A, B на управляемость:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,787 & -0,121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: составная матрица W :

$$W(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -0.787 & 0 & 0.619 & -0.121 \\ 1 & 0 & -0.787 & 0 & 0.619 & -1.121 & -0.669 & 0.095 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 & -1.181 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 0 & -1.181 & 0 & 0.929 & -0.181 \end{bmatrix},$$

ранг матрицы $\text{rank}(W(n)) = 4$, система управляема.

Задание 8.2. Проверить систему линейных уравнений из задания 8.1 с матрицей B , соответствующей только горизонтальной тяге на управляемость.

Ответ:

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} W(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.787 & 0.619 \\ 1 & -0.787 & 0.619 & -0.669 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1.181 \\ 0 & 1.5 & -1.181 & 0.929 \end{bmatrix} \text{rank}(W(n)) = 3.$$

Система неуправляема.

Задание 8.3. Проверить систему линейных уравнений из задания 5.3 с матрицей B , соответствующую только вертикальной тяге, на управляемость.

Ответ:

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.121 \\ 0 & 0 & -0.121 & 0.095 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0.181 \end{bmatrix} \text{rank}(W(n)) = 4.$$

Система управляема.

Задание 8.4. Проверить систему измерений на наблюдаемость для уравнения с матрицей A из задания 5.3, если измеряются только высота и горизонтальное положение самолета.

Ответ:

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} W(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.787 & 1.5 & 0.619 & -1.181 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.121 & 0 & 0.095 & -0.181 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.121 & 0 \end{bmatrix} \text{rank}(W(n)) = 4.$$

Система наблюдаема.

Задание 8.5. Проверить систему измерений на наблюдаемость для уравнения с матрицей A из задания 5.3, если измеряются только вертикальная и горизонтальная скорости самолета.

Ответ:

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} W(n) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.787 & 1.5 & -0.619 & -1.181 & -0.669 & 0.929 \\ 0 & 0 & -0.121 & 0 & -0.095 & -0.181 & -0.075 & 0.143 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.121 & 0 & 0.095 & -0.181 \end{bmatrix} \text{rank}(W(n)) = 3.$$

Система ненаблюдаема.

В задачах оптимального управления необходимо минимизировать функционал $I = I(x(t), u(t))$ — преобразование функций управления и состояния в число — критерий оптимальности. Рассмотрим связь и отличия задач минимизации функций и функционалов.

Пусть задана функция $f(x, y, z)$. Если приращения аргументов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ достаточно малы, то, раскладывая в ряд Тейлора и учитывая линейные члены, получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z.$$

Необходимые условия локального минимума или максимума заключаются в нулевом приращении функции

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z = 0,$$

т. е. требуется, чтобы выполнялись равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (9.1)$$

или в векторной форме $\text{grad } f = 0$.

Достаточные условия определяются матрицей вторых производных функции, вычисленной в точке, удовлетворяющей условию (9.1): локальный минимум или максимум функции достигается, если матрица вторых производных определена соответственно положительно или отрицательно. Для решения задач оптимального управления необходимо получить аналогичные условия минимума функционала, которые будут состоять не в решении систем алгебраических уравнений, а в решении систем дифференциальных уравнений.

9.1. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Перейдем к рассмотрению функционалов. Если функция задает преобразование числа или чисел (значений аргументов функции) в число (значение функции), то функционал задает преобразование функции или функций в число. Рассмотрим функционал, зависящий от некоторой функции $x(t)$ и ее производной:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}) dt \rightarrow \min_{x(t)}. \quad (9.2)$$

Выясним, как определить приращение для функционала. Прежде всего заметим, что аргументом функционала служат функции, поэтому сначала нужно определить приращение функции. Это можно сделать следующим образом.

Пусть наша кривая проходит через заданные точки $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. Выберем из класса непрерывных функций функцию $\varepsilon(t)$ такую, что $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2) = 0$. Тогда $x^*(t) = x(t) + \alpha\varepsilon(t)$ — приращение функции при приращении α , $\varepsilon(t)$ — вариация функции, удовлетворяющая граничным условиям (рис. 9.1).

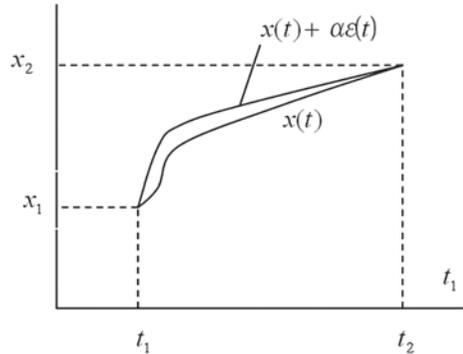


Рис. 9.1
Вариация функции $x(t)$

Рассмотрим приращение критерия эффективности в зависимости от параметра α :

$$\Delta I(\alpha) = I(x + \alpha\varepsilon(t), \dot{x} + \alpha\dot{\varepsilon}(t)) - I(x, \dot{x}). \quad (9.3)$$

Как и в предыдущем случае, разлагая в ряд Тейлора, получим

$$\Delta I(\alpha) = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \frac{\alpha}{1!} + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \quad (9.4)$$

Первое слагаемое в этом ряду

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha \quad (9.5)$$

называется первой вариацией функционала. Второе слагаемое — вторая вариация функционала:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} \frac{\alpha^2}{2!}. \quad (9.6)$$

В точке минимума (максимума) должно выполняться необходимое условие

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0. \quad (9.7)$$

Достаточные условия связаны со второй вариацией:

- в точке максимума

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} < 0; \quad (9.8)$$

- в точке минимума

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} > 0. \quad (9.9)$$

Если $\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} = 0$, то необходим анализ вариаций функционала более высоких

порядков.

9.2. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Нам предстоит выяснить, при каких условиях первая вариация функционала (9.7) равна нулю. Л. Эйлером получено дифференциальное уравнение, при решении которого выполняются условия (9.7) и, следовательно, необходимые условия оптимальности. В отличие от условий оптимальности в задаче минимизации функций (9.1), для решения уравнений Эйлера приходится решать не систему алгебраических уравнений, а систему дифференциальных уравнений.

Рассмотрим приращение функционала в зависимости от параметра α :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x + \alpha \varepsilon(t), \dot{x} + \alpha \dot{\varepsilon}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \varepsilon(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\varepsilon}(t) \right] dt = 0. \quad (9.10)$$

Проинтегрируем второе слагаемое с учетом формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \left[\int U dV = UV - \int V dU \right], \quad U = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad dV = \dot{\varepsilon}(t) dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\varepsilon}(t) dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \varepsilon(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \varepsilon(t) dt. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Так как вариация функции $\varepsilon(t)$ в крайних точках равна нулю, то

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \varepsilon(t) dt = 0. \quad (9.12)$$

Чтобы это равенство выполнялось при произвольной функции $\varepsilon(t)$, должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (9.13)$$

которое называют *уравнением Эйлера*. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Обобщим уравнение Эйлера в случае, если функционал зависит от векторной функции $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) dt. \quad (9.14)$$

Проводя аналогичные преобразования по каждой компоненте векторной функции $x(t)$, получаем систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_m} = 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

В векторном виде сохраняется форма уравнения (9.13):

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt.$$

Обобщенное уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{x}}} = 0, \quad (9.16)$$

$$\text{где } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_m} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем будем использовать одну форму записи как для скалярного, так и для векторного случая:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (9.17)$$

Данная система является системой ОДУ 2-го порядка размерности m . В нормальной форме это система ОДУ 1-го порядка размерности $2m$. Для того чтобы получить единственное решение системы (9.16), ее нужно дополнить $2m$ условиями. Для каждой функции задают два значения в точках на левом и правом концах траектории. Это позволяет найти решение уравнения Эйлера в принципе, хотя практически этот процесс часто связан со значительными трудностями.

9.3. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

В задачах оптимального управления критерий оптимальности нужно минимизировать не по траекториям $x(t)$, а по управлениям $u(t)$, связь между которыми задана дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x, u)$.

Рассмотрим многомерный случай, когда функционал J зависит не только от траектории движения $x(t)$, но и от управления $u(t)$:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, u) dt. \quad (9.18)$$

Функционалы в задачах оптимального управления, как правило, зависят от нескольких функций

$$I = I(x, u),$$

где $x \in R^m$, $u \in R^n$ — вектор-функции, определяющие управление u и траекторию x . Две эти функции, однако, не являются независимыми. Траектория $x(t)$ является следствием управления $u(t)$. Связь между ними задается уравнениями движения системы, поэтому x и u не могут варьироваться независимо и уравнение Эйлера не может применяться непосредственно. Иногда удается исключить зависимые функции, и тогда можно применить уравнение Эйлера, в остальных случаях имеем задачу на условный экстремум.

Классическим примером такой задачи является задача о геодезических линиях, где необходимо найти минимум функционала — длины кривой L :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y^2 + z^2} dx, \quad (9.19)$$

причем кривая должна принадлежать поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \quad (9.20)$$

Другой классической задачей является изопериметрическая задача, где требуется найти замкнутую линию заданной длины l , ограничивающей наибольшую площадь S . Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ограниченная кривой площадь равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt, \quad (9.21)$$

а длина кривой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt. \quad (9.22)$$

В задаче о геодезических линиях дополнительное условие выражается конечным уравнением, а в изопериметрической задаче эта связь определяется интегралом.

В задачах оптимального управления рассматриваются задачи на условный экстремум функционалов вида

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1(t), \dots, x_m(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_m(t)) dt. \quad (9.23)$$

Связь между $x(t)$ и $u(t)$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (9.24)$$

или в скалярной форме:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n), \\ \dots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n). \end{cases} \quad (9.24a)$$

Задачи на условный экстремум, записанные в виде равенства, решаются с помощью метода множителей Лагранжа $\lambda_i(t)$, где множители Лагранжа являются неизвестными функциями, подлежащими определению. Расширенная функция F^* имеет вид

$$F^*(x, u, \lambda) = F(x, u) + \lambda_1(t)(f_1(x, u) - \dot{x}_1) + \dots + \lambda_m(t)(f_m(x, u) - \dot{x}_m). \quad (9.25)$$

В точке минимума F и F^* совпадут при условии, что $x(u)$ является решением дифференциального уравнения. Таким образом, получим задачу без ограничений. Тогда

$$I^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(F(x, u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)(\dot{x} - f(x, u)) \right) dt, \quad (9.26)$$

где m имеет значение размерности вектора $f(x, u)$.

Уравнения Эйлера будут зависеть не только от состояния x , но и от управления u , потому в уравнении появляются члены, связанные с производными по u :

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{u}} = 0. \end{cases} \quad (9.27)$$

Для нахождения оптимального управления нужно решить эту систему уравнений Эйлера, используя начальное и конечное положения траектории в качестве начальных условий. Следует отметить, что если производные управления по времени \dot{u} не входят в функционал, то последняя система уравнений является алгебраической, так как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Пример. Необходимо минимизировать энергию

$$I = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (9.28)$$

затрачиваемую на перевод из начальной точки x^0 в конечную точку x^k :

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_1(T) = x_1^k, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_2(T) = x_2^k, \quad (9.29)$$

системы с уравнениями движения

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u \end{cases} \quad (9.30)$$

на интервале $t \in [0, T]$.

Физическим аналогом этой задачи может служить задача посадки лунного модуля на поверхность Луны. Уравнения одномерного движения материальной точки вдоль оси x можно получить по одному из уравнений (7.31):

$$m_1 x'' = m_1 a_x - \frac{km_1 m_2}{x^2}.$$

Считая изменения переменной x незначительными по сравнению с радиусом Луны R_L , можно считать ускорение свободного падения $g = \frac{km_2}{R_L}$ постоянным. Уравнения движения в этом случае примут вид

$$x'' = a_x - g.$$

Обозначая $u = a_x - g$, получим уравнения (9.30). Записав расширенный критерий для этой задачи

$$I^* = \int_0^T [u^2 + \lambda_1(t)(\dot{x}_2 - u) + \lambda_2(t)(\dot{x}_1 - x_2)] dt,$$

перейдем к безусловной оптимизации. Производные в уравнении Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial u} &= 2u - \lambda_1(t), \\ \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_1} &= \lambda_2; \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{u}} = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial \dot{u}} = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial x_2} &= -\lambda_2; \quad \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_2} = \lambda_1; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_1} = \frac{d\lambda_2}{dt}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_2} = \frac{d\lambda_1}{dt}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (9.27) и проведя необходимые вычисления, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} -\frac{d\lambda_2}{dt} &= 0 \Rightarrow \lambda_2(t) = \text{const} = c_1, \\ -\lambda_2(t) - \frac{d\lambda_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= c_1 \Rightarrow \lambda_1(t) = c_1 t + c_2, \\ 2u - \lambda_1(t) &= 0, \quad 2u = c_1 t - c_2, \\ u(t) &= \frac{c_1}{2} t - \frac{c_2}{2} = a_1 t + a_2. \end{aligned}$$

В данном случае оптимальное управление является линейной функцией времени и определено с точностью до двух констант. Их можно найти, используя известные условия на правом конце траектории. Для этого подставим выражение для управления в уравнения движения системы (9.30):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_1 t + a_2. \end{cases} \quad (9.31)$$

Проинтегрируем сначала второе уравнение из (9.31), а затем первое:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a_1}{6} t^3 + \frac{a_2}{2} t^2 + c_1 t + c_2, \\ x_2(t) &= \frac{a_1}{2} t^2 + a_2 t + c_1. \end{aligned}$$

Используя начальные условия для определения констант интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_2^0, \quad c_2 = x_1^0, \\ x_1(t) &= \frac{a_1}{6} t^3 + \frac{a_2}{2} t^2 + x_2^0 t + x_1^0, \\ x_2(t) &= \frac{a_1}{2} t^2 + a_2 t + x_2^0. \end{aligned} \quad (9.32)$$

В конечный момент времени имеем:

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \frac{a_1}{6} T^3 + \frac{a_2}{2} T^2 + x_2^0 T + x_1^0, \\ x_2(T) &= \frac{a_1}{2} T^2 + a_2 T + x_2^0. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Система уравнений (9.31) дает возможность определить неизвестные постоянные a_1 и a_2 . Ниже приведен документ MathCAD, решающий эту задачу (док. 9.1).

Решение краевой задачи как системы нелинейных уравнений

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c1} \\ \mathbf{c2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} := 5 \quad \mathbf{xk} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

матрицы уравнения начальные условия время конечные условия

Given

$$\mathbf{c1} \cdot \frac{\mathbf{T}^3}{6} + \mathbf{c2} \cdot \frac{\mathbf{T}^2}{2} + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{T} + \mathbf{x}_0 = \mathbf{xk}_0$$

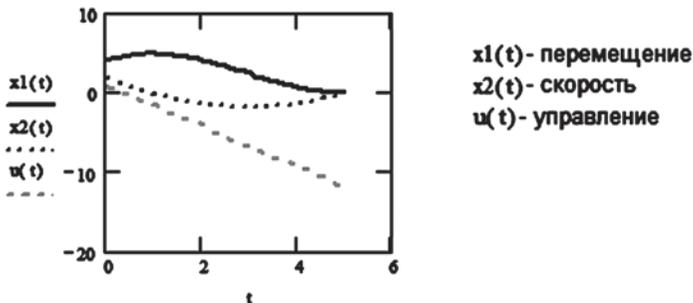
$$\mathbf{c1} \cdot \frac{\mathbf{T}^2}{2} + \mathbf{c2} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{x}_1 = \mathbf{xk}_1$$

Док. 9.1 (начало)

$$a := \text{Find}(c1, c2) \quad a = \begin{bmatrix} 0.864 \\ -2.56 \end{bmatrix} \quad u(t) := a_0 + a_1 t$$

$$x1(t) := a_0 \frac{t^3}{6} + a_1 \frac{t^2}{2} + x_1 t + x_0 \quad x2(t) := a_0 \frac{t^2}{2} + a_1 t + x_1$$

$$x1(T) = 3.553 \cdot 10^{-15} \quad x2(T) = 0 \quad t := 0, 0.1.. T$$



Док. 9.1 (окончание)

9.4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА. ГАМИЛЬТОНИАН И СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В современной литературе по оптимальному управлению используется другая форма уравнений Эйлера.

Рассмотрим уравнение Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0. \quad (9.34)$$

Введем новую (сопряженную) переменную:

$$p = F_{\dot{x}} \quad (9.35)$$

и связанную с ней функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H = -F + \dot{x} F_{\dot{x}} = -F + \dot{x} p. \quad (9.36)$$

Дифференцируя гамильтониан по p , получим

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}. \quad (9.37)$$

Производные гамильтониана по времени t и состоянию системы x равны:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (9.39)$$

так как во второе слагаемое t и x явно не входят.

Гамильтониан не зависит от \dot{x} , так как

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -F_x + p = -F_x + F_x \equiv 0.$$

Следовательно, $H = H(x, p, t)$. Преобразуя (9.34) в соответствии с (9.38), (9.39) и с учетом (9.37) получим систему уравнений Гамильтона — Якоби или уравнение Эйлера в канонической форме:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \quad (9.40)$$

Покажем, что минимизировать функционал — то же, что минимизировать гамильтониан. Действительно,

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dx}{dx} \frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Приведение уравнений Эйлера к каноническому виду для функционалов, зависящих от многих функций, достигается аналогичным образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m, t) dt, \\ H &= -F + \sum_{i=1}^m \dot{x}_i p_i, \\ p_i &= F_{\dot{x}_i}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Преобразуя систему уравнений Эйлера (9.41), получим систему канонического вида, содержащую $2m$ уравнений, где m — размерность вектора x :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (9.42)$$

$$p_i = F_{\dot{x}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Перейдем к задаче условной минимизации. В этом случае нужно минимизировать критерий оптимальности

$$I = \int_0^T F(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt = \int_0^T f_0(x, u) dt \quad (9.43)$$

при наличии ограничений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \dot{x}_0 &= f_0(x, u), \\ x_0(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Дополнительная переменная x_0 представляет величину критерия в зависимости от текущего времени t :

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(x, u) dt. \quad (9.45)$$

В начальный момент времени система находится в состоянии

$$x_i(0) = x_i^0, \quad (9.46)$$

а в конечный момент — в состоянии

$$x_i(T) = x_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.47)$$

Найдем уравнение Эйлера в форме Гамильтона — Якоби. Для этого сформируем расширенный функционал:

$$I^* = \int_0^T (F(x, u) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t)(\dot{x}_k - f_k(x, u))) dt. \quad (9.48)$$

Обозначим подинтегральное выражение через F^* . Для того чтобы критерий был оптимальным, должно выполняться уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} F_{x_i}^* - \frac{dF_{x_i}^*}{dt} = 0, \\ F_{u_j}^* - \frac{dF_{u_j}^*}{dt} = 0. \end{cases} \quad (9.49)$$

Перейдем к уравнению в форме Гамильтона — Якоби. Производные в уравнении Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{x_i}^* &= \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^m \lambda_k(t)^* \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \\ F_{\dot{x}}^* &= \lambda_i(t), \\ F_{u_j}^* &= \frac{\partial f_0}{\partial u_j} - \sum_{k=1}^n \lambda_k(t)^* \frac{\partial f_k}{\partial u_j}, \\ F_{\dot{u}_j}^* &= 0. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Подставим (9.50) в уравнение (9.49):

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial x_k}, \quad (9.51)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial u_j} - \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial u_k} = 0. \quad (9.52)$$

Чтобы избавиться от первого слагаемого в уравнении (9.52), введем еще один множитель Лагранжа:

$$\lambda_0 = -1. \quad (9.53)$$

Тогда уравнение (9.52) примет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial u_k} = 0, \quad (9.54)$$

$$p_i = F_{\dot{x}_i}^* = \lambda_i.$$

Отсюда легко сделать следующий вывод: сопряженные переменные p_i — это множители Лагранжа в задаче с ограничениями:

$$p_i = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$H = \sum_{i=0}^m p_i f_i(x, u) = (p, f),$$

где через (p, f) обозначено скалярное произведение двух векторов.

Рассмотрим условие (9.52). Оно аналогично условию

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (9.55)$$

Итак, уравнения Гамильтона — Якоби имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ H &= (p, f), \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=0}^m p_k \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Эти $2m$ дифференциальных уравнения содержат $2m + n$ неизвестных функций $x(t)$, $p(t)$, $u(t)$. Для замыкания уравнений имеется условие стационарности гамильтониана, содержащие недостающие n алгебраических уравнений $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему дифференциальных уравнений порядка $2m$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=0}^m p_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \end{cases} \quad (9.57)$$

для выделения единственного решения которой необходимо иметь $2m$ условий. Если задан левый конец $x(0) = x^0$ и правый конец $x(T) = x^k$, то, рассматривая задачу с закрепленными концами, получаем необходимые $2m$ условий, что позволяет получить единственное решение. Если условия заданы частично, то их дополняют условиями трансверсальности.

Пример. Найти оптимальное управление в задаче:

$$I = \int_0^T u^2 dt,$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u. \end{cases}$$

$$x_0(0) = 0, x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0.$$

Правые части уравнений $f_0(x, u) = u^2$, $f_1(x, u) = x_1 + x_2$, $f_2(x, u) = u$. Гамильтониан примет вид

$$H = (p, f) = p_0 f_0 + p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_0 u^2 + p_1(x_1 + x_2) + p_2 u.$$

Уравнения для сопряженных переменных следующие:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, \end{cases}$$

$$p_0 = -1.$$

Получаем систему из четырех уравнений, которую дополняем условием стационарности гамильтониана $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, откуда следует

$$-2u + p_2 = \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Решив это уравнение, находим оптимальное управление $u^0(t)$:

$$u^0(t) = \frac{p_2(t)}{2}. \quad (9.58)$$

Запишем эту систему, исключив из уравнений движения управление из (9.58):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{p_2(t)}{2}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} = -p_1. \end{cases} \quad (9.59)$$

Из третьего уравнения системы имеем

$$p_1(t) = c_2 e^{-t},$$

из четвертого уравнения:

$$p_2(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Теперь структура управления определена с точностью до параметров a_1, a_2 :

$$u^0(t) = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} e^{-t} = a_1 + a_2 e^{-t}.$$

Подставим это управление в уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_1 + a_2 e^{-t}. \end{cases}$$

После интегрирования уравнений на интервале $[0, T]$ получим систему из двух алгебраических уравнений относительно двух параметров a_1, a_2 :

$$\begin{cases} x_1(x_1^0, x_2^0, a_1, a_2, t)|_{t=T} = x_1(T), \\ x_2(x_1^0, x_2^0, a_1, a_2, t)|_{t=T} = x_2(T). \end{cases}$$

Ниже приведен документ MathCAD, где данная задача решена как двухточечная краевая задача с помощью встроенной подпрограммы `sbval` (док. 9.2).

Решение краевой задачи с помощью подпрограммы `sbval`

матрица краевой задачи начальное и конечное время начальные и конечные условия

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(t, x) := A \cdot x$$

$$v := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$f_1(t_1, v) := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(t_2, x) := \begin{bmatrix} x_0 - xk_0 \\ x_1 - xk_1 \end{bmatrix} \quad \text{-функция для вычисления конечных условий}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := \text{sbval}(v, t_1, t_2, f, f_1, f_2) \quad \text{-определение условий для сопряженных переменных}$$

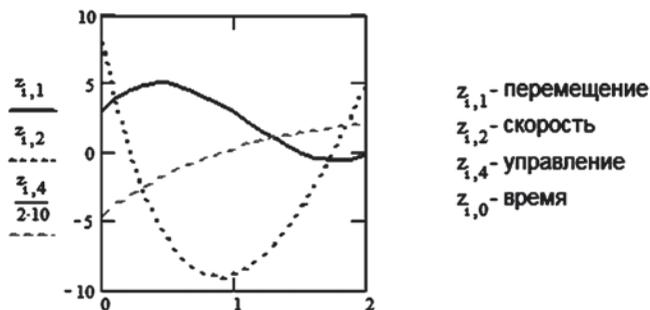
$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -154.27 \\ -90.574 \end{bmatrix}$$

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 2 \quad x_0 := 3 \quad x_1 := 8$$

$$xk_0 := 0 \quad xk_1 := 5$$

$$i := 0..20 \quad z := \text{rkfixed}(x, t_1, t_2, 20, f)$$

Док. 9.2 (начало)



Док. 9.2 (окончание)

9.5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

Выше мы рассматривали такие процессы управления (терминальные задачи, или задачи перевода), в которых граничные точки фиксированы, все траектории проходят через эти точки и $2m$ координат данных точек задают необходимые условия для решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из уравнения Эйлера. Однако существует обширный класс задач, в которых неизвестны или часть этих координат, или все координаты, и они должны выбираться вместе с управлением из условия минимизации функционала. В некоторых случаях выбор этих точек стеснен дополнительными условиями: граничные точки должны принадлежать некоторой кривой, поверхности или не выходить за пределы некоторой области. Такие задачи принадлежат к классу вариационных задач с подвижными границами. В качестве примера можно привести задачу оптимального управления ракетой класса воздух — воздух, где, помимо определения оптимального управления ракетой, может выбираться оптимальный момент ее старта и оптимальный момент встречи ракеты с целью.

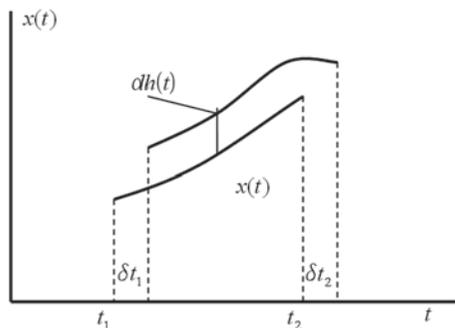


Рис. 9.2
Приращение функции $x(t)$

Для решения задач такого рода необходимо получить выражение для полной вариации функционала, вызванной не только вариацией траектории, но и вариацией концов траектории. Вычислим приращение функционала ΔJ при условии, что функция $x(t)$ получает приращение $\alpha h(t)$, левая граничная точка — приращение δt_1 , а правая граничная точка — приращение δt_2 (рис. 9.2).

Рассмотрим влияние на функционал вариации функции и вариации концов траектории:

$$\Delta I = \int_{t_1 + \sigma' t_1}^{t_2 + \sigma' t_2} F(x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}) dt. \tag{9.60}$$

Обозначим

$$\bar{F} = F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}). \tag{9.61}$$

Разбивая интервал интегрирования на участки, из (9.60) с учетом (9.61) получим

$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} (\bar{F} - F) dt + \int_{t_2}^{t_2 + \delta' t_2} \bar{F} dt - \int_{t_1}^{t_1 + \delta' t_1} \bar{F} dt. \quad (9.62)$$

Так как приращения малы, то, разлагая \bar{F} в ряд Тейлора в окрестностях точки $\alpha = 0$, ограничимся линейным приближением:

$$\bar{F} \approx F + \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h}. \quad (9.63)$$

На малом интервале интегрирования:

$$\int_{t_2}^{t_2 + \delta' t_2} \bar{F} dt = F_{t=t_2} \delta' t_2, \quad \int_{t_1}^{t_1 + \delta' t_1} \bar{F} dt = F_{t=t_1} \delta' t_1.$$

С учетом этого

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h - F_{\dot{x}} \dot{h} \right) dt + F_{t=t_2} \delta' t_2 - F_{t=t_1} \delta' t_1. \quad (9.64)$$

Интегрируя второе подынтегральное слагаемое по частям, получим

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} \right) h dt + F_{\dot{x}} h \Big|_{t_1}^{t_2} - F_{t=t_2} \delta' t_2 - F_{t=t_1} \delta' t_1. \quad (9.65)$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем

$$h(t_1) = \delta' x_1 - \dot{x} \delta' t_1, \quad h(t_2) = \delta' x_2 - \dot{x} \delta' t_2.$$

Окончательно формула для полной вариации функционала будет следующей:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} \right) h dt + F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_2} \delta' x(t_2) - F_{\dot{x}} \Big|_{t=t_1} \delta' x(t_1) + \\ & + (F - \dot{x} F_{\dot{x}})_{t=t_2} \delta t_2 - (F - \dot{x} F_{\dot{x}})_{t=t_1} \delta t_1. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Итак, в формуле полной вариации, кроме интегрального члена, появились конечные члены, отражающие влияние варьированных концов траектории.

9.6. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Пусть для допустимых кривых функционала граничные условия не заданы, и, следовательно, их координаты t_1 , $x(t_1)$, t_2 , $x(t_2)$ могут выбираться любыми. В терминальной задаче координаты этих точек использовались для определения постоянных интегрирования уравнения Эйлера. В задаче со свободными концами недостающие условия должны вытекать из формулы полной вариации функционала (9.66). Свободные граничные точки выбираются таким образом,

чтобы функционал достигал минимума. Если некоторая кривая доставляет экстремум функционалу среди всех допустимых кривых, то она является лучшей и в более узком классе кривых, имеющих с ней одинаковые граничные точки. Отсюда следует, что эта кривая должна быть *экстремалью*, т. е. решением уравнения Эйлера. Поэтому в выражении (9.66) интегральный член должен быть равен 0. Если выбор граничных точек не стеснен никакими условиями, то вариации их координат независимы и из равенства нулю вариации функционала (9.66) вытекают следующие условия:

- для определения оптимальной точки на правом конце траектории:

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_2} = 0; (F - \dot{x}F_{\dot{x}})|_{t=t_2} = 0; \quad (9.67)$$

- на левом конце траектории:

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_1} = 0; (F - \dot{x}F_{\dot{x}})|_{t=t_1} = 0. \quad (9.68)$$

Это и есть условия трансверсальности в случае, если нет условий на концы траектории. Если граничные точки должны лежать на некоторых кривых

$$x(t_1) = \varphi_1(t_1), \quad (9.69)$$

$$x(t_2) = \varphi_2(t_2), \quad (9.70)$$

то вариации δx и δt оказываются связанными между собой. В линейном приближении можно считать, что

$$\delta'x(t_2) = \varphi_2'\delta't_2, \quad \delta'x(t_1) = \varphi_1'\delta't_1. \quad (9.71)$$

Так как на δt_1 и δt_2 ограничений нет, то из (9.66) получаем

$$\begin{cases} [F - F_{\dot{x}}(\dot{x} - \dot{\varphi}_1)]_{t=t_1} = 0, \\ [F - F_{\dot{x}}(\dot{x} - \dot{\varphi}_2)]_{t=t_2} = 0. \end{cases} \quad (9.72)$$

Условия (9.72) — это условия трансверсальности. Они устанавливают связь между угловыми коэффициентами функций φ и \dot{x} в граничных точках. Вместе с уравнениями кривых (9.69) и (9.70) они определяют постоянные интегрирования в уравнении Эйлера.

Если один из концов фиксирован, то для определения постоянных интегрирования используются заданные граничные условия в этой точке и условия трансверсальности в другой.

Пример 1. Пусть задано уравнение движения

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = x^0.$$

Требуется перевести выходную координату $x(t)$ за время T из точки x^0 в точку на кривой $x(T) = 2T + \frac{t^2}{2}|_{t=T}$ с минимальным значением критерия

$$I = \int_0^T (x^2 + u^2) dt, \quad I^* = \int_0^T (x^2 + u^2 + p(\dot{x} - ax - bu)) dt.$$

Гамильтониан

$$H = -(x^2 + u^2) + (ax + bu)p.$$

Система уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu, \\ \dot{p} &= 2x - ap.\end{aligned}$$

Оптимальное управление удовлетворяет условию (9.55):

$$-2u + bp = 0,$$

откуда

$$u^* = \frac{b}{2}p.$$

Исключив u из уравнений Эйлера, получим систему с двумя неизвестными функциями x и p :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + \frac{b^2}{2}p, \\ \dot{p} &= 2x - ap.\end{aligned}$$

Для этой системы задано только одно условие — начальная точка. Недостающее условие определим из условий трансверсальности. Поскольку время процесса управления фиксировано, неизвестным остается одно значение — значение $p(T)$, которое можно определить из условия совпадения траектории $x(t)$ и кривой $\varphi(t)$ в конечный момент времени:

$$x(T) = \varphi(T).$$

Ниже приведен документ MathCAD, решающий эту задачу с помощью подпрограммы решения двухточечной краевой задачи (док. 9.3).

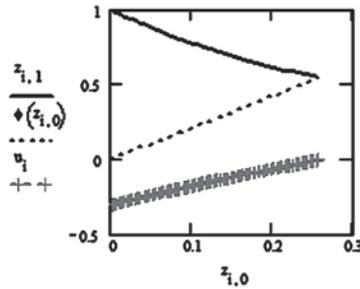
Решение задачи управления с условиями трансверсальности

$a := -2$	$b := 2$	$x_0 := 1$	$t1 := 0$	$t2 := 0.256$	$N := 100$	задание параметров
$A := \begin{bmatrix} a & \frac{b^2}{2} \\ 2 & -a \end{bmatrix}$		$f(t, x) := A \cdot x$	$\phi(t) := 2 \cdot t + \frac{t^2}{2}$			функции для вычисления правых частей и конечное условие
	$v_0 := 1$					начальное значение для неизвестного начального условия сопряженной переменной
	$fl(t1, v) := \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$					вектор начальных условий краевой задачи
	$\Omega(t2, x) := x_0 - \phi(t2)$					условие в конце процесса управления
	$c := sbval(v, t1, t2, f, fl, \Omega)$					определение начальных условий для задачи Коши
$c = (-0.3066791)$		$x1 := \begin{bmatrix} x_0 \\ c_{0,0} \end{bmatrix}$	$x1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.307 \end{bmatrix}$	вектор начальных условий		Док. 9.3 (начало)

$z := \text{rkfixed}(x1, 0, t2, N, f)$

решение задачи Коши

$$i := 0..N \quad u_i := \frac{z_{i,2} - b}{2}$$



оптимальные
управление и
траектории

$$h := \frac{t2}{N}$$

$$I := \sum_i \left[(u_i)^2 + (z_{i,1})^2 \right] \cdot h$$

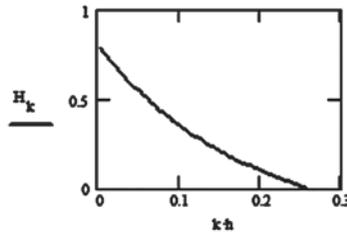
$I = 0.154$

величина критерия

$$H_k := \left[\sum_{i=0}^k - \left[(u_i)^2 + (z_{i,1})^2 \right] \cdot h + \left(a \cdot z_{k,1} + b \cdot \frac{b \cdot z_{k,2}}{2} \right) \right] \cdot \frac{b \cdot z_{k,2}}{2}$$

вычисление
гамильтониана

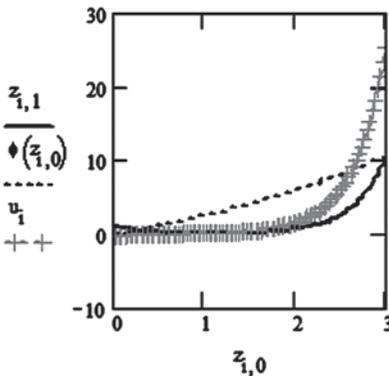
$$H_N = 4.786 \cdot 10^{-3}$$



оптимальное время перевода
определяется из условия
равенства гамильтониана
нулю

Док. 9.3 (окончание)

Покажем результаты работы программы для случая $a = -2$, $b = 2$, $x(0) = 1$, $T = 3$ (док. 9.4). При этом получено значение критерия $I = 144,9$.



$z_{i,1}$ - переменная x
 $\phi(z_{i,0})$ - сопряженная переменная
 u_i - управление
 $z_{i,0}$ - время

$$I := \sum_i \left[(u_i)^2 + (z_{i,1})^2 \right] \cdot h$$

$I = 144.913$

величина критерия

Док. 9.4

Изменяя время перевода T , будем получать различные значения критериев I (рис. 9.3).

Выясним, можно ли определить время перевода с минимальным значением критерия без проведения подобного анализа. Для этого время перевода нужно считать не фиксированным и воспользоваться еще одним условием трансверсальности для определения данного параметра. В соответствии с (9.72) имеем

$$[F - F_x(\dot{x} - \dot{\phi}_2)]_{t=t_2} = 0.$$

Подставляя уравнения движения и уравнение кривой, имеем

$$H(T) = -F(T) + p(T)(ax(T) + bu(T)) = 0.$$

Последнее уравнение дает недостающее условие на правом конце. Оптимальный процесс показан в основном документе (см. док. 9.3).

В более общем случае конечное состояние системы задается на некотором множестве M_1 (плоскости, линии и т. п.), а не в виде фиксированной точки пространства состояний (ради простоты рассмотрим этот случай, но все рассуждения справедливы и для начального состояния). Пусть $S_1, S_2, \dots, S_k, k \leq m$ — гладкие гиперповерхности, заданные уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0. \end{cases} \quad (9.73)$$

Множество всех точек, удовлетворяющих всем уравнениям (9.73), называется $(m - k)$ гладким многообразием, если в каждой точке x векторы

$$\text{grad } \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

линейно независимы. Через $L_i, i = 1, 2, \dots, k$ обозначим касательную гиперплоскость к гиперповерхности $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ в точке x . Пересечение гиперплоскостей $L_i, i = 1, 2, \dots, k$ представляет собой $(m - k)$ -мерную касательную гиперплоскость многообразия M_1 в точке x .

Теперь мы имеем задачу оптимального управления, в которой требуется перейти из известного начального состояния в некоторую точку $x^k \in M_1$ с минимальным значением критерия оптимальности.

Если многообразие вырождается в точку, то мы имеем задачу с фиксированными концами, иначе — задачу с подвижным правым концом. Заметим, что если положение точки $x^k \in M_1$ известно, то это будет задача с фиксированными концами и для нее должно выполняться уравнение Эйлера. Таким образом, уравнение Эйлера остается в силе и для задачи с подвижными концами. Однако

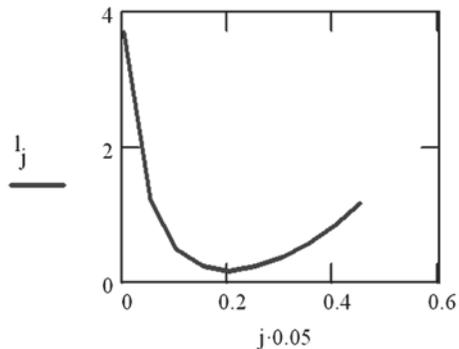


Рис. 9.3
Зависимость критерия I
от времени перевода T

нужно еще $r = m - k$ соотношений дополнительно к k уравнениям (9.70). Этими соотношениями и являются условия трансверсальности.

Пусть $x^k \in M_1$ — некоторая точка, а T_1 — касательная плоскость многообразия M_1 в этой точке. Размерность плоскости T_1 есть r . Пусть также $x(t), u(t), t_1 \leq t \leq t_2$ — решение задачи с закрепленными концами, а $p(t)$ — соответствующий вектор сопряженных переменных.

Условия трансверсальности на правом конце траектории состоят в том, что вектор $p(t)|_{t=T}$ ортогонален плоскости T_1 . Аналогичным образом определяют условия трансверсальности на левом конце. Для этого достаточно рассмотреть множество M_0 размерности q и касательную плоскость T_0 размерности $m - q$.

В задаче со свободным правым концом вектор сопряженных переменных $p(T)$ должен быть ортогонален всему пространству x . Единственный вектор, удовлетворяющий этому условию, — $p(T) = 0$. Так, в примере 1 в случае свободного правого конца:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= p_1(t)|_{t=T} = 0, \\ \lambda_2(t) &= p_2(t)|_{t=T} = 0.\end{aligned}$$

Пример 2. Простейшие уравнения движения самолета в плоскости дальность x — высота y имеют вид:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = ma_x - C(y) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = ma_y - mg + C_2 \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

В нормальной форме (разрешенной относительно первых производных) эта система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_x - \frac{C(x_4)}{m} x_2^2, \\ \dot{x}_3 = a_y - g + \frac{C_2}{m} x_1, \\ \dot{x}_4 = x_3, \end{cases}$$

где x_1 — положение самолета по оси x ; x_2 — горизонтальная скорость самолета; x_3 — вертикальная скорость; x_4 — высота самолета; a_x, a_y — горизонтальная и вертикальная составляющие управляющего ускорения a ; $C(x_4)$ — коэффициент аэродинамического сопротивления, зависящий от высоты; C_2 — коэффициент подъемной силы крыла самолета.

Решение двухточечной краевой задачи приведено для уравнений движения самолета без первого уравнения — перемещения вдоль оси x , так как переменная x_1 не входит ни в одно уравнение и может быть вычислена интегрированием переменной x_2 . Коэффициент $C(y) = 2$, $m = 1$, значения остальных параметров находятся из нижеприведенного документа MathCAD (док. 9.5).

Решение задачи управления с помощью программы sbval

параметры уравнения начальное и конечное время число шагов

$c1 := 2$ $c2 := 1$ $g := 1$ $t1 := 0$ $t2 := 1$ $i := 0..50$

правые части уравнения

начальные условия

конечные условия

$$f(t, x) := \begin{bmatrix} -\frac{x_3}{2} - c1 \cdot (x_0)^2 \\ x_2 \\ -\frac{x_5}{2} + c2 \cdot x_0 - g \\ 2 \cdot c1 \cdot x_3 \cdot x_0 + x_5 \cdot c2 \\ 0 \\ -x_4 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad fl(t1, v) := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

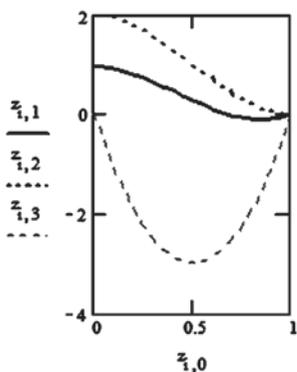
$$f2(t2, x) := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

поиск начальных условий для сопряженных переменных

$a := sbval(v, t1, t2, f, fl, f2)$

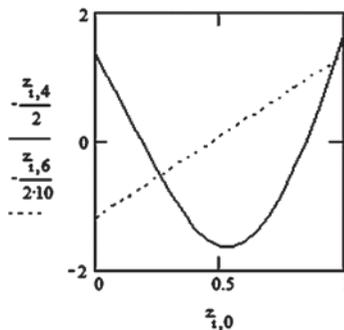
$$a = \begin{bmatrix} -2.649 \\ 50.622 \\ 24.006 \end{bmatrix} \quad x_3 := a_0 \quad x_4 := a_1 \quad x_5 := a_2$$

$z := rkfixed(x, t1, t2, 20, f)$ - интегрирование с найденными начальными условиями



переменные состояния

$z_{i,1}$ - скорость по оси x
 $z_{i,2}$ - высота
 $z_{i,3}$ - скорость по оси y
 $z_{i,4}$ - управление u_1
 $z_{i,5}$ - управление u_2
 $z_{i,6}$ - время



переменные управления

Док. 9.5

9.7. СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА В СИСТЕМЕ MATHCAD

Приведем реализацию алгоритма на примере нелинейной нестационарной системы 2-го порядка. Правые части дифференциальных уравнений, временной интервал, начальное и конечное состояние имеют следующую запись в системе MathCAD (для записи операторов MathCAD используется прямой шрифт):

$$f(t,x) := \begin{bmatrix} 1+x_1 \\ 5 \\ t \cdot x_0^2 + u \end{bmatrix} \quad tn := 0 \quad tk := 1 \quad xn := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad xk := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (9.74)$$

Подынтегральная функция в критерии оптимальности:

$$F(x,u) := (2 \cdot x_0)^2 + x_1^2 + u^2. \quad (9.75)$$

Эти операторы являются исходными данными в задаче оптимального управления. Следующий оператор символично вычисляет гамильтониан, результат символических вычислений здесь и далее справа от стрелки:

$$H(x,u,p) := -F(x,u) + \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \cdot f(t,x) \rightarrow (u + t \cdot x_0^2) \cdot p_1 + (x_1 + 1) \cdot p_0 - (2 \cdot x_0)^2 - u^2 - x_1^2.$$

Следующие три оператора определяют структуру оптимального управления, исходя из условия стационарности гамильтониана:

$$dHu := \frac{d}{du} H(x,u,p) \quad uopt := dHusolve, u \rightarrow \frac{p_1}{2} \quad uopt \rightarrow \frac{p_1}{2}.$$

В программах MathCAD невозможно выполнить символическое дифференцирование по индексной переменной x_k , поэтому для вычисления частных производных

$\frac{\partial H}{\partial x_k}$ приходится в записи гамильтониана сделать подстановку с помощью оператора substitute вместо индексных переменных x_0, x_1 простых переменных $x0, x1$ (по умолчанию нумерация в MathCAD начинается с нуля):

$$H := H(x, u, p) \text{ substitute, } x_0 = x0, x_1 = x1 \rightarrow u \cdot p_1 + x1 \cdot p_0 - (2 \cdot x0)^2 - u^2 - x1^2 + t \cdot x0^2 \cdot p_1 + p_0.$$

Далее вычислим частные производные $\frac{\partial H}{\partial x_k}$ по простым переменным и используем обратную подстановку:

$$dHx0 := \frac{d}{dx0} H \quad dHx0 := dHx0 \text{ substitute, } x0 = x_0, x1 = x_1 \rightarrow \frac{5 \cdot t \cdot p_1 \cdot x_0^2}{2},$$

$$dHx1 := \frac{d}{dx1} H \quad dHx1 := dHx1 \text{ substitute, } x0 = x_0, x1 = x_1 \rightarrow p_0 - 2 \cdot x_1.$$

Теперь есть возможность вычислить правые части краевой задачи:

$$Fp(x) := \begin{bmatrix} f(t,x)_0 \\ f(t,x)_1 \\ -dHx0 \\ -dHx1 \end{bmatrix} \quad Fp(x) := Fp(x) \text{ substitute, } u = uopt \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ t \cdot x_0^2 + \frac{p_1}{2} \\ 5 \cdot t \cdot p_1 \cdot x_0^2 \\ 2 \cdot x_1 - p_0 \end{bmatrix}.$$

Для численного решения краевой задачи выразим правые части только через вектор x :

$$Fp(t,x) := Fp(x) \text{ substitute, } p_0 = x_2, p_1 = x_3 \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ t \cdot x_0^2 + \frac{x_3}{2} \\ 5 \cdot t \cdot x_3 \cdot x_0^2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Теперь все готово для численного решения краевой задачи методом пристрелки. Для этого используется подпрограмма `sbval`, которая определяет недостающие начальные условия (a) для двух последних уравнений в $Fp(t, x)$, начиная с начального приближения (v), после чего задача сведется к задаче Коши вместо двухточечной краевой задачи:

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x := \text{stak}(xn,v) \quad f1(tn,v) := \text{stak}(xn,v) \quad f2(tk,x) := \begin{bmatrix} x_0 - xk_0 \\ x_1 - xk_1 \end{bmatrix},$$

$$a := \text{sbval}(v,tn,tk,Fp,f1,f2) = \begin{bmatrix} -27.631 \\ -9.994 \end{bmatrix}.$$

Интегрируем численно задачу Коши с известными начальными условиями y на левом конце

$$y := \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad z := \text{rkfixed}(y,tn,tk,50,Fp) \quad i := 0..50.$$

и получаем оптимальный процесс, представленный на рисунке 9.4

Имея соответствующую программу, пользователю необходимо для конкретной задачи с системой 2-го порядка набрать только условия задачи: правые части дифференциальных уравнений, интервал времени, начальные и конечные условия, а также критерий оптимальности (операторы (9.74), (9.75)). Далее вычисления, как символьные, так и численные, пройдут автоматически. Например, для задачи с начальными данными:

$$f(t,x) := \begin{bmatrix} \ln(x_1) + \cos(x_0) \\ t \cdot \sin(x_0) + u \end{bmatrix} \quad tn := 0 \quad tk := 1 \quad xn := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad xk := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad (9.76)$$

$$F(x,u) := u^2. \quad (9.77)$$

Правые части системы получились следующими:

$$Fp(t,x) := Fp(x) \text{ substitute, } p_0 = x_2, p_1 = x_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(x_0) + \ln(x_1) \\ t \cdot \sin(x_0) + \frac{x_3}{2} \\ \sin(x_0) \cdot x_2 - t \cdot \cos(x_0) \cdot x_3 \\ -\frac{x_2}{x_1} \end{bmatrix},$$

а оптимальный процесс представлен на рисунке 9.5.

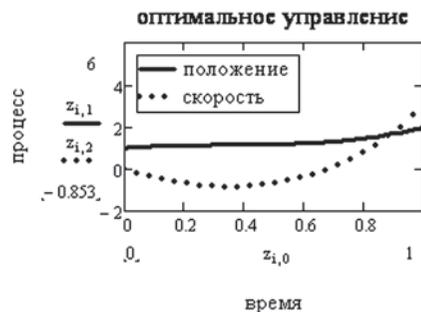


Рис. 9.4
Процесс в динамической системе с оптимальным управлением



Рис. 9.5

Процесс в динамической системе (9.76), (9.77) с оптимальным управлением

Система более высокого порядка потребует больших размерностей векторов и введения дополнительных операторов для вычисления производных.

Следует иметь в виду, что далеко не каждая задача может быть решена предложенным способом. Первая трудность может быть связана с тем, что программа символьного решения solve может не найти точного решения, особенно тогда, когда его нет. В этом случае придется искать решение уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^0(x, p) \quad (9.78)$$

численно. Вторая особенность заключается в трудности решения краевой задачи методом пристрелки программой sbval. В этой программе происходит минимизация ошибки между требуемым и текущим положением системы в конечный момент времени за счет подбора начальных условий для сопряженных переменных p . Решение такой задачи часто зависит от выбора начальных значений v . Наконец, для нелинейных систем, в отличие от линейных, область решения не всегда принадлежит всему пространству R^n . Так в системе (9.77) присутствует натуральный логарифм $\ln(x)$, что исключает значения $x \leq 0$.

Применим полученные результаты для оптимизации развития отрасли, описываемой производственной функцией Кобба — Дугласа:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad (9.79)$$

где Y — объем произведенной отраслью продукции в денежном выражении, K — затраты на капитальные вложения, L — затраты на труд, a_0, a_1, a_2 — коэффициенты, характеризующие функционирование конкретной отрасли.

Накопление капитала $K(t)$ от времени t описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK}{dt} = \alpha Y(K, L) - \beta K, \quad K(0) = K^0, \quad (9.80)$$

где α — доля дохода отрасли, направляемая на развитие, β — коэффициент амортизации, K^0 — начальное значение капитала.

Рассмотрим задачу увеличения капитала за время T до величины $K(T) = K^h$ за счет оптимальных вложений в труд $L(t)$ с минимальными суммарными затратами

$$\int_0^T L(t) dt \rightarrow \min, \quad L(t) > 0. \quad (9.81)$$

Программа для решения этой задачи имеет следующий вид.

Функции правых частей уравнения (9.80) и подынтегральная функция (9.81):

$$f(t,K) := \alpha \cdot a_0 \cdot K^{a_1} \cdot L^{a_2} - \beta \cdot K \quad \tilde{F}(K,L) := L.$$

Гамильтониан:

$$H(K,L,p) := -F(K,L) + p \cdot f(t,K) \rightarrow -L - p \cdot (K \cdot \beta - K^{a_1} \cdot L^{a_2} \cdot a_0 \cdot \alpha).$$

Значения констант:

$$a_0 := 2 \quad a_1 := .5 \quad a_2 := 0.75.$$

Производная гамильтониана по управлению:

$$dHL := \frac{d}{dL} H(K,L,p) \rightarrow \frac{1.5 \cdot K^{0.5} \cdot \alpha \cdot p}{L^{0.25}} - 1.$$

Оптимальное управление как функция прямых и сопряженных переменных:

$$Lop := dHL \text{ solve, } L \rightarrow 5.0625 \cdot K^{2.0} \alpha^{4.0} p^{4.0}.$$

Производная гамильтониана по переменной K:

$$dHK := \frac{d}{dK} H(K,L,p) \rightarrow -p \cdot \left(\beta - \frac{1.0 \cdot L^{0.75} \cdot \alpha}{K^{0.5}} \right).$$

Исключение управления из краевой задачи:

$$Fp(x) := \begin{pmatrix} f(t,K) \\ -dHK \end{pmatrix} \text{ substitute } L = Lop \rightarrow \begin{bmatrix} 5.02625^{a_2} \cdot K^{a_1} \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot (K^2 \cdot \alpha^4 \cdot p^4)^{a_2} - K \cdot \beta \\ p \cdot \left[\frac{\sqrt{K} \cdot \beta - 3.375 \cdot \alpha \cdot (K^2 \cdot \alpha^4 \cdot p^4)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{K}} \right] \end{bmatrix}.$$

Значения коэффициентов инвестиций и амортизации:

$$\alpha := 0.3 \quad \beta := 0.05.$$

Формирование правых частей краевой задачи:

$$Fp(x) := \begin{pmatrix} f(t,K) \\ -dHK \end{pmatrix} \text{ substitute } L = Lop \Rightarrow \begin{bmatrix} 5.0625^{a_2} \cdot K^{a_1} \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot (K^2 \cdot \alpha^4 \cdot p^4)^{a_2} - K \cdot \beta \\ p \cdot \left[\frac{\sqrt{K} \cdot \beta - 3.375 \cdot \alpha \cdot (K^2 \cdot \alpha^4 \cdot p^4)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{K}} \right] \end{bmatrix}.$$

Определение начального условия a для сопряженной переменной в задаче увеличения капитала от $K^0 = 1$ до $K^h = 3$ за время $T = 10$:

$$x_0 := 1 \quad xk_0 := 3 \quad f1(tn, \nu) := \begin{pmatrix} x_0 \\ \nu_0 \end{pmatrix} \quad f2(tk, x) := x_0 - xk_0 \quad \nu_0 := x_0 \quad tn := 0 \quad tk := 10.$$

$$a := sbval(x, tn, tk, Fp, f1, f2) \quad a_2 = 1.376 \quad x_1 = a_0.$$

Интегрирование краевой задачи и расчет оптимального управления:

$$y := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad z := rkfixed(y, tn, tk, 50, Fp) \quad j := 0..50$$

$$Lop_j := 5.026 \cdot (z_j, 1)^{2.0} \cdot \alpha^{4.0} \cdot (z_j, 2)^{4.0}.$$

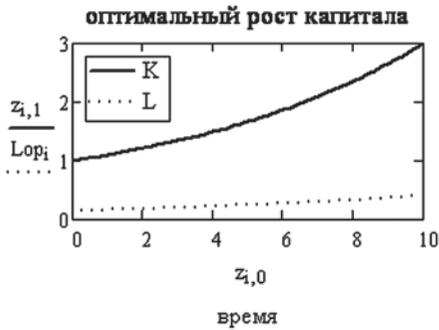


Рис. 9.6

Оптимальный рост капитала K и затрат на труд L

является аналогом равенства нулю градиента функции в задаче минимизации функций. Условия минимума функционала сводятся к условию стационарности гамильтониана по управлению, его градиент должен быть равен нулю. Однако в этом случае, в отличие от задачи минимизации функций, необходимо решить краевую двухточечную задачу удвоенной размерности по сравнению с уравнениями движения. Дифференциальные уравнения этой задачи содержат m уравнений движения и m уравнений для сопряженных переменных. Кроме этих неизвестных функций, в уравнения двухточечной краевой задачи входят и функции управления. Условия стационарности гамильтониана позволяют выразить управление через прямые и сопряженные переменные и тем самым полностью определить задачу.

Для единственного решения краевой задачи требуется $2m$ констант интегрирования. В задаче с фиксированными концами ими являются начальные и конечные условия на траекторию движения системы. Если концы траектории фиксированы не полностью, недостающие константы интегрирования определяются из условий трансверсальности. Для частично свободного правого конца траектории условия трансверсальности сводятся к ортогональности вектора сопряженных переменных в конечный момент времени к многообразию, задающему положение конца траектории. Если правый конец траектории полностью свободен, то условия трансверсальности сводятся к равенству нулю вектора сопряженных переменных в конечный момент времени.

Классическое вариационное исчисление не выполняется, если функция u является ограниченной по существу, т. е. ограничение активно, и если x и u не являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 9

1. Каковы необходимые и достаточные условия минимума интеграла?
2. Какой метод применяется для сведения задачи оптимального управления динамической системой к формуле Эйлера минимума интеграла?
3. Что такое гамильтониан и сопряженные переменные?
4. Что дает использование условия стационарности гамильтониана?
5. Что такое двухточечная краевая задача?
6. Для чего нужны условия трансверсальности?

Оптимальный процесс накопления капитала (рис. 9.6).

Современные вычислительные среды позволяют автоматизировать решение многих задач, требующих как численных, так и аналитических вычислений. Среда MathCAD является одной из наиболее приспособленных сред для решения таких задач.

* * *

Вариационное исчисление из условия равенства нулю первой вариации функционала определяет необходимые условия его минимума или максимума. Уравнение Эйлера

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 9

Задание 9.1. Составить уравнения Эйлера для критерия оптимальности

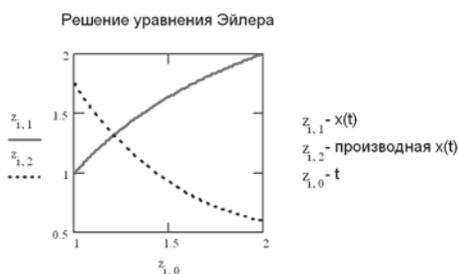
$$\int_1^2 (x(t) - 1)^2 + \cos(x'(t)) dt.$$

Ответ: $x''(t)\sin(x'(t)) + 2(x(t) - 1) = 0$, или, делая замену, $x_1 = x$, $x_2 = x'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \frac{1 - 2x_1}{\sin(x_1)}. \end{cases}$$

Задание 9.2. Решить уравнение Эйлера из задания 9.1, используя программу MathCAD решения двухточечной краевой задачи sbval, при условиях $x(t)|_{t=1} = 1$, $x(t)|_{t=2} = 2$.

Ответ:



Задание 9.3. Записать гамильтониан и условия его стационарности в задаче накопления капитала от начального значения $K(0) = K^0$ до конечного значения $K(T) = K^1$ за фиксированное время T . Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} K(t) = \alpha Y(K, L) - \beta K,$$

где $Y(K, L)$ — производственная функция, имеющая вид

$$Y(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$$

и управление L должно минимизировать затраты на труд:

$$J = \int_0^T L^2(t) dt.$$

Ответ: гамильтониан

$$H(K, L, p) = p(\alpha a_0 K^{a_1} L^{a_2} - \beta K) - L^2;$$

производная гамильтониана по L :

$$p\alpha a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1} - 2L.$$

Из равенства нулю производной имеем

$$L^0 = \left(\frac{2}{p\alpha a_0 a_2 K^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2-2}}.$$

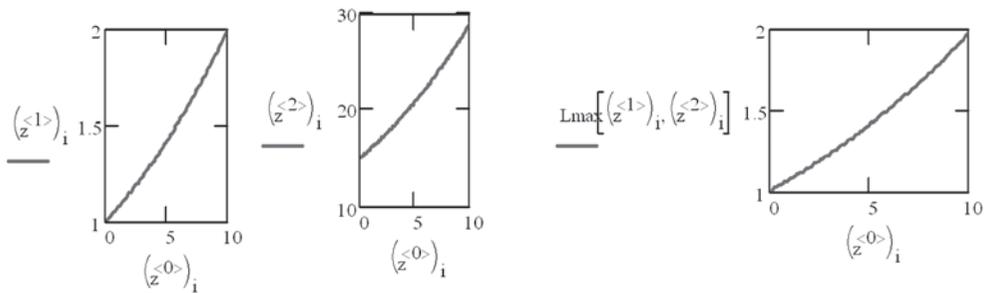
Задание 9.4. Решить краевую двухточечную задачу, определяющую оптимальные вложения в труд и увеличивающую капитал от $K(0) = 1$ до $K(2) = 3$, при значении констант производственной функции $a_0 = 0,9$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,5$, доле инвестиций $\alpha = 0,3$ и коэффициенте амортизации $\beta = 0,2$.

Ответ:

Рост капитала

Сопряженная переменная

Оптимальные трудозатраты



Принцип максимума Понтрягина дает возможность решать задачи оптимального управления с учетом ограничений на функции управления, при этом ограничения рассматриваются как возможность технической реализации управления.

10.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Приведем без доказательства теорему Понтрягина о необходимых условиях оптимальности в задаче с ограничениями.

Рассмотрим управляемую систему с ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad u \in U, \quad (10.1)$$

с начальными и конечными условиями:

$$x(t_0 = 0) = x^0, \quad x(t = T) = x^k \quad (10.2)$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (10.3)$$

Введем дополнительную переменную x_0 , подчиняющуюся дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u), \quad x_0^0 = 0. \quad (10.4)$$

Эта переменная представляет собой значение критерия в текущий момент времени:

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(x, u) dt. \quad (10.5)$$

Теперь будем рассматривать расширенную систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u), \\ \frac{dx_1}{dt} = f_1(x, u), \\ \dots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(x, u) \end{cases} \quad (10.6)$$

с начальными условиями $x_i(0) = x_i^0, i = 0, 1, \dots, m$.

Введем гамильтониан H и вектор сопряженных переменных p :

$$\begin{aligned} H(x, u, p) = (p, f) &= \sum_{k=0}^m p_k f_k, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

или в скалярной форме

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{k=0}^m \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x_k} p_k, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Так как все функции правых частей $f_k(x, u)$ не зависят от переменной x_0 , то уравнение для p_0 является тривиальным. Обычно принимают $p_0(t) = \text{const} = -1$.

Приведем формулировку *принципа Понтрягина*:

Пусть $u(t), 0 \leq t \leq T$ такое допустимое управление, т. е. управление, удовлетворяющее ограничению $u \in U$, что соответствующая ему траектория $x(t)$, выходящая из точки $x(0)$, проходит в момент времени T через точку $x(T)$.

Для оптимальности управления $u(t)$ траектории $x(t)$ необходимо существование такой непрерывной ненулевой вектор-функции $p_0(t) \dots p_m(t)$, чтобы соблюдались следующие условия:

1) для любого $t \in [0, T]$ гамильтониан достигает максимума, т. е.

$$\max_{u \in U} H(p, x, u) = H^*(p^*, x^*, u^*);$$

2) в конечный момент времени $t = T$ должно выполняться соотношение

$$H^*(T) = 0.$$

Для доказательства принципа максимума используется игольчатая вариация траектории $x(t)$: вариация функции $\varepsilon(t)$ совпадает с $x(t)$ во всех точках t , кроме некоторого участка длиной δ , в пределе стягивающегося в точку.

10.2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ. КРАЕВАЯ ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА

Терминальная задача управления характеризуется известными начальными и конечными положениями управляемой системы.

Используя принцип максимума, получаем для нее краевую двухточечную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (10.8)$$

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^k.$$

Условие стационарности гамильтониана в вариационном исчислении заменяется условием его максимума, и решение задачи оптимального управления сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u); \quad x(0) = x^0; \quad x(T) = x^k, \\ I &= \int_0^T F(x, t) dt = \int_0^T f_0(x, t) dt, \\ \dot{x} &= f(x, u), \\ \dot{p} &= -f_x(x, u)p, \\ H &= (p, f), \\ p_0 &= -1, \\ u^*(p, x) &= \max_{u \in U} H(x, p, u). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Для терминальной задачи с фиксированными концами все необходимые условия для краевой задачи содержатся в условиях (10.2), и поэтому 2-й пункт в теореме Понтрягина не нужен. Это условие теоремы

$$H(p(T), x(T), u(T)) = 0$$

дает возможность определить и оптимальное время T в задаче с нефиксированным временем.

10.3. РАЗЛИЧНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ В ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

Различные постановки задач требуют привлечения условий трансверсальности. Рассмотрим некоторые модификации постановки задач оптимального управления.

В задаче с фиксированным временем и свободным правым концом согласно условиям трансверсальности (9.72) для сопряженных переменных в конце процесса управления имеем

$$p(T) = 0. \quad (10.10)$$

Если время не фиксированно, то к условию (10.10) добавляется 2-е условие принципа максимума:

$$H(x(t), p(t), u(t))|_{t=T} = 0. \quad (10.11)$$

Пример. Одномерное движение ракеты вдоль оси x в линейном приближении описывается следующим ОДУ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg + p,$$

где m — масса ракеты; g — ускорение свободного падения; p — тяга двигателя. Рассматривая в качестве управления ускорение, развиваемое двигателем

$u = \frac{p}{m}$, уравнение движения представим в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u - g.$$

Пусть развиваемое ускорение ограничено: $|u| \leq u_{\max}$. Переходя к стандартной записи, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u - g, \end{aligned}$$

где x_1 — положение ракеты; x_2 — ее скорость.

Пусть необходимо найти управление, позволяющее за данное время T подняться на наибольшую высоту. Начальное положение равно нулю, начальная скорость тоже равна нулю:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Это задача с фиксированным временем и свободным правым концом. Критерий оптимальности взят с обратным знаком, чтобы получить задачу на минимум:

$$J = \int_0^T -\dot{x}_1 dt = -x_1(T) \rightarrow \min.$$

Гамильтониан

$$H = -(-x_2) + p_1 x_2 + p_2(u - g).$$

Сопряженная система:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -1 - p_1. \end{aligned}$$

Двухточечная краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - g, \\ \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = -1 - p_1 \end{cases} \quad (10.12)$$

с граничными условиями:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0. \quad (10.13)$$

В системе уравнений (10.12) пять неизвестных функций, а самих уравнений четыре. Управление $u(t)$ из системы нужно исключить, используя максимизацию гамильтониана:

$$H^* = \max_{u| \leq u_{\max}} [x_2 + p_1 x_2 + p_2(u - g)] = (x_2 + p_1 x_2 - p_2 g) + \max_{u| \leq u_{\max}} p_2 u.$$

Последнее слагаемое линейно по u , поэтому оптимальное управление в этом случае релейного типа:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & p_2 > 0, \\ -u_{\max}, & p_2 < 0, \end{cases}$$

здесь u_{\max} включает двигатель в одну сторону; $-u_{\max}$ включает двигатель в другую сторону.

Интегрируем (10.12), и для сопряженных переменных имеем:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= c_1 = \text{const}, \\ p_2(t) &= (-1 - c_1)t + c_2, \\ p_1(T) &= 0 \rightarrow c_1 = 0, \\ p_2(T) &= (-1 - 0)T + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -T, \\ p_2(t) &= T - t. \end{aligned}$$

Так как $0 \leq t \leq T$, то $p_2(t) > 0$ и оптимальное управление, как и следовало ожидать, является постоянным и соответствует включению двигателя на максимальную тягу:

$$u^*(t) = u_{\max}.$$

Подставляя это управление в уравнения движения и, интегрируя, получим оптимальную траекторию:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_{\max} - g, \\ x_2 &= (u_{\max} - g)t \Big|_0^T = (u_{\max} - g)T, \\ x_1 &= \int_0^t (u_{\max} - g)dt = \frac{t^2}{2} (u_{\max} - g) \Big|_0^T \\ x_1(T) &= \frac{T^2}{2} (u_{\max} - g). \end{aligned}$$

В задаче с фиксированным правым концом и свободным временем время неизвестно, и для его определения будет добавляться условие равенства гамильтониана нулю в конце процесса управления:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^k, \\
I &= \int_0^T F(x, t) dt = \int_0^T f_0(x, t) dt, \\
\dot{x} &= f(x, u), \\
\dot{p} &= -f_x(x, u) p, \\
H &= (p, f), \\
p_0 &= -1, \\
u^*(p, x) &= \max_{u \in U} H(x, p, u), \\
H(T) &= 0.
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Продолжим рассмотрение примера с ракетой. Пусть нужно перейти от нулевых начальных условий на новую высоту $x_1(T) = h$, $x_2(T) = 0$ за минимальное время. Тогда имеем следующую задачу:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^T dt = T \rightarrow \min, \\
H &= -1 + p_1 x_2 + p_2 (u - g), \\
\dot{p}_1 &= 0, \\
\dot{p}_2 &= -p_1, \\
u^*(t) &= u_{\max} \operatorname{sign} p_2(t), \\
\operatorname{sign}(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{10.15}$$

В отличие от предыдущего примера, конечные условия для сопряженных переменных неизвестны. Их роль выполняют конечные условия (10.14) на траекторию. Считая неопределенными постоянные интегрирования для сопряженных переменных, имеем:

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= c_1, \\
p_2(t) &= -c_1 t + c_2, \\
u^*(t) &= u_{\max} \operatorname{sign}(-c_1 t + c_2).
\end{aligned} \tag{10.16}$$

По последнему уравнению в (10.16) видно, что оптимальное управление может менять знак только один раз, так как $p_2(t)$ — линейная функция времени. Поскольку приращение высоты положительно ($h > 0$), то в начальный момент времени ускорение положительно, следовательно, $c_2 > 0$.

Из уравнений движения имеем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_{\max} \operatorname{sign}(-c_1 t + c_2) - g.$$

Обозначим через τ момент переключения управления, т. е. корень уравнения $p_2(t) = 0$. Тогда на отрезке $0 \leq t \leq \tau$ $u^* = u_{\max}$:

$$x_2(t) = (u_{\max} - g)t, \quad x_2(\tau) = (u_{\max} - g)\tau,$$

$$x_1(t) = (u_{\max} - g)\frac{t^2}{2}, \quad x_1(\tau) = (u_{\max} - g)\frac{\tau^2}{2}.$$

На отрезке $\tau \leq t \leq T$ $u = -u_{\max}$, продолжив интегрирование, получим:

$$x_2(t) = (-u_{\max} - g)(t - \tau) + (u_{\max} - g)\tau,$$

$$x_1(t) = (-u_{\max} - g)\frac{(t - \tau)^2}{2} + (u_{\max} - g)\tau(t - \tau) + (u_{\max} - g)\frac{\tau^2}{2}.$$

Для конечного момента времени имеем систему из двух уравнений для определения двух неизвестных τ и T :

$$0 = (-u_{\max} - g)(T - \tau) + (u_{\max} - g)\tau,$$

$$h = (-u_{\max} - g)\frac{(T - \tau)^2}{2} + (u_{\max} - g)(T - \tau)\tau + (u_{\max} - g)\frac{\tau^2}{2}.$$

Условия трансверсальности оказались излишними, так как было использовано физическое условие для данных начальных условий $u^*(0) > 0$.

Ниже приведена программа системы MathCAD для решения данной задачи (док. 10.1).

Решение задачи быстрого действия

высота подъема начальные времена максимальное ускорение

$h := 100$ $g := 1$ $T := 5$ $\tau := 2$ $um := 5$

Given

$$(-um - g) \cdot (T - \tau) + (um - g) \cdot \tau = 0$$

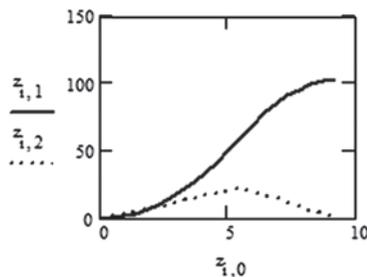
$$(-um - g) \cdot \frac{(T - \tau)^2}{2} + (um - g) \cdot (T - \tau) \cdot \tau + (um - g) \cdot \frac{\tau^2}{2} - h = 0$$

решение системы уравнений
для определения $\tau = c_0$ и $T = c_1$

$$c := \text{Find}(T, \tau) \quad c = \begin{bmatrix} 9.129 \\ 5.477 \end{bmatrix} \quad u(t, \tau) := \begin{cases} um & \text{if } t \leq \tau \\ -um & \text{if } t > \tau \end{cases}$$

$$f(t, x) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t, c_1) - g \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z := \text{rkfixed}(x, 0, c_0, 20, f)$$

$i := 0..20$



$z_{i,1}$ - высота
 $z_{i,2}$ - скорость
 $z_{i,0}$ - время

Док. 10.1

В задаче с фиксированным временем и подвижным правым концом уравнения движения и конечное многообразие имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= f(x, u), \quad x(0) = x^0, \\ \varphi_k(x(T)) &= 0, \quad k = 1, \dots, p \leq n. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Если $p = m$, то мы имеем задачу с фиксированным правым концом. Если $p = 0$, то уравнение (10.17) соответствует задаче с фиксированным временем и свободным правым концом. Если $0 < p < m$, то на конец траектории налагаются некоторые условия, но их недостаточно, чтобы решить двухточечную задачу. Условия трансверсальности в этом случае имеют следующий геометрический смысл: вектор $p(T)$ должен быть ортогонален касательной плоскости к многообразию функций, заданных условиями (10.17) на правом конце траектории.

Гамильтониан имеет вид

$$H = -f_0 + p^T f.$$

Условие трансверсальности

$$p_i(T) = \sum_{j=1}^k v_j \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|_{t=T}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10.18)$$

В задаче с нефиксированным временем и подвижным правым концом дополнительно к предыдущему случаю добавляется условие для определения времени процесса:

$$H(x(t), p(t), u(t)) \Big|_{t=T} = 0. \quad (10.19)$$

В задаче с нефиксированным временем и перемещающимся многообразием на правом конце функции $\varphi_k(x(t), t)$ явно зависят от времени с условием на правом конце $\varphi_k(x(T), T) = 0$. Требование на конечное значение функции Гамильтона — Якоби с учетом (10.18) примет вид

$$H(x(T), p(T), u(T)) = -v^T \frac{\partial \varphi(x(T), T)}{\partial T}. \quad (10.20)$$

В задаче Больца дополнительно к интегральному члену в критерии оптимальности прибавляется неинтегральный член

$$J = \int_0^T (f_0(x, u, t) + \varphi_0(x(T), T)) dt.$$

Используем те же уравнения движения, но с ограничениями:

$$\begin{aligned} x' &= f(u, x, t), \quad x(0) = x_0, \\ \varphi_k(x(T), T) &= 0, \quad k = \overline{1, p} \leq n, \\ H &= -f_0(x, u, t) + p^T f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= f(x, u, t), \\
 x' &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\
 p' &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\
 p_i(T) &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big|_{t=T},
 \end{aligned}$$

$$H(x, p, u) \Big|_{t=T} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \Big|_{t=T} - \sum_{j=1}^p v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0.$$

* * *

Принцип максимума позволяет решать задачи оптимального управления с ограничениями на функции управления. В этом случае условия стационарности гамильтониана (равенство нулю его градиента — задача безусловной оптимизации) заменяются на условия максимума гамильтониана — задачу условной оптимизации функции Гамильтона, которая в общем случае является задачей нелинейного программирования.

Как и прежде, решение этой задачи позволяет исключить из уравнений краевой двухточечной задачи функции управления и тем самым замкнуть систему уравнений. Для решения краевой задачи константы интегрирования определяются из условий на концах траектории и условий трансверсальности.

Вариационные методы позволяют определить управление в виде программы, т. е. функции времени $u(t)$. Неизбежные отклонения от этой программы в процессе ее реализации вынуждают либо решать задачу управления заново, либо вводить в систему управления корректирующее звено, возвращающее систему в расчетное состояние. Метод динамического программирования позволяет решить задачу управления в форме синтеза, т. е. определять управление $u(x)$ как функцию состояния системы. В этом случае отклонения от расчетного режима не требуют какой-либо коррекции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 10

1. Чем заменяется условие стационарности гамильтониана при наличии ограничений на управление?
2. Какого значения должен достигать гамильтониан в конце процесса управления?
3. В каком случае оптимальное управление имеет релейный характер?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 10

Задание 10.1. Найти условия максимума гамильтониана в задаче о росте капитала (см. задание 9.3) при ограничениях на трудозатраты $L \leq L_{\max}$.

Ответ:

$$L^0 = \begin{cases} \left(\frac{2}{\rho \alpha a_0 a_2 K^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2-2}}, & \text{если } \left(\frac{2}{\rho \alpha a_0 a_2 K^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2-2}} \leq L_{\max}, \\ L_{\max} & \text{иначе.} \end{cases}$$

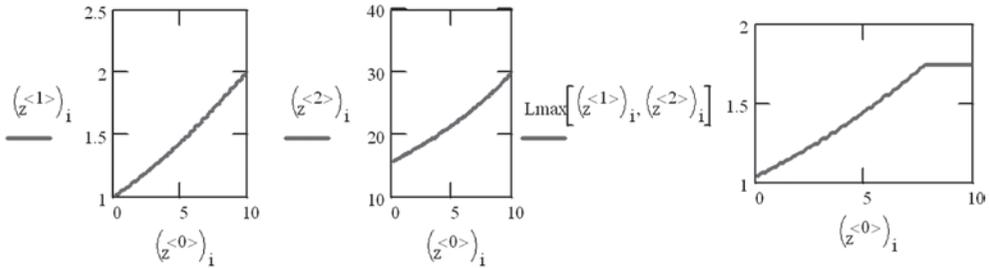
Задание 10.2. Решить задачу оптимального управления при условиях задания 9.4 и величине $L_{\max} = 1,75$.

Ответ:

Рост капитала

Сопряженная переменная

Оптимальные трудозатраты



Задание 10.3. Записать уравнения двухточечной краевой задачи принципа максимума для уравнений движения:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = m a_x - C(y) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = m a_y - m g + C_2 \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

Записать условия максимума гамильтониана при ограничениях на величину управляющего ускорения $|a| \leq a_{\max}$ и критерия оптимальности

$$J = \int_0^T (y(t) - h)^2 dt.$$

Ответ: уравнения принципа максимума:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = u_1 - \frac{C(x_3)x_2^2}{m}, \\ x'_3 = x_4, \\ x'_4 = u_2 - g + \frac{C_2 x_2}{m}, \\ p'_1 = 0, \\ p'_2 = -p_1 + \frac{2}{m} p_2 C(x_3) x_2 - p_4 \frac{C_2}{m}, \\ p'_3 = -2(x_3 - h) + \frac{dC(x_3)}{dx_3} \frac{x_2}{m}, \\ p'_4 = -p_3. \end{cases}$$

Гамильтониан

$$H = -(x_3 - h)^2 + p_1 x_2 + p_2 \left(u_1 - \frac{C(x_3)x_2^2}{m} \right) + p_3 x_4 + p_4 \left(u_2 - g + \frac{C_2 x_2}{m} \right).$$

Максимум гамильтониана достигается при достижении максимума линейной функции

$$g(u) = p_2 u_1 + p_4 u_2$$

при условии $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq a_{\max}$.

Задание 10.4. Решить задачу оптимального управления:

• двухсекторной экономикой с уравнениями движения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} K_1(t) = \alpha_{11} Y_1(K_1, L_1) + \alpha_{12} Y_2(K_2, L_2) - \beta_1 K_1, \\ \frac{d}{dt} K_2(t) = \alpha_{21} Y_1(K_1, L_1) + \alpha_{22} Y_2(K_2, L_2) - \beta_2 K_2; \end{cases}$$

• производственными функциями:

$$Y_1(K_1, L_1) = a_{01} K^{a_{11}} L^{a_{12}},$$

$$Y_2(K_2, L_2) = a_{02} K^{a_{21}} L^{a_{22}};$$

• критерием оптимальности

$$J = \int_0^3 (L_1(t)^2 + L_2(t)^2) dt.$$

Задачу решить при значениях коэффициентов:

$$a_{01} = 1,002, \quad a_{02} = 0,98, \quad a_{11} = 0,5382, \quad a_{12} = 0,6, \quad a_{21} = 0,4518, \quad a_{22} = 0,4,$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,2 \end{bmatrix},$$

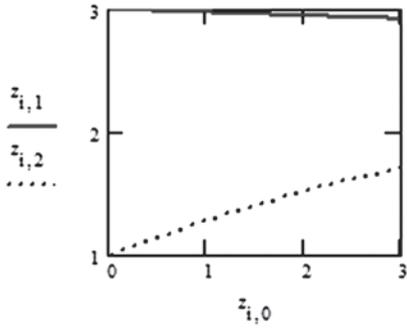
начальном значении капитала

$$K_1(0) = 3, \quad K_2(0) = 1$$

и выполнении соотношения в конечный момент времени

$$K_1(3) = K_2^2(3).$$

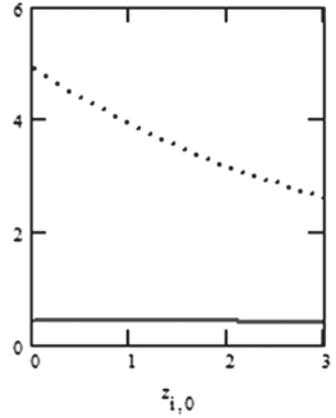
Ответ:



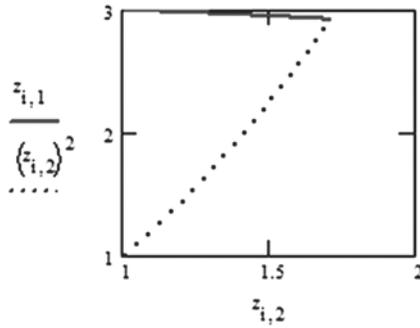
накопление капитала

$$L_{\max} \left[\begin{matrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \end{matrix} ; \begin{matrix} z_{i,3} \\ z_{i,4} \end{matrix} \right]_0$$

$$L_{\max} \left[\begin{matrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \end{matrix} ; \begin{matrix} z_{i,3} \\ z_{i,4} \end{matrix} \right]_1$$



оптимальные трудозатраты



многообразие и движение капитала в фазовой плоскости на заданное многообразие

Вариационные методы и принцип максимума позволяют найти оптимальное управление как функцию времени в зависимости от начального состояния системы. Реализовать это управление можно в виде программы управления. Однако погрешности в модели системы, ошибки в начальных данных и неточности управления приводят к отклонению действительной траектории от программной. Решать последовательно задачи оптимального управления при отклонениях от расчетных режимов в реальном времени не представляется возможным. Поэтому используют систему автоматического регулирования, устраняющую эти отклонения. Однако если удастся решить задачу методом динамического программирования (ДП), то решение будет получено для множества начальных данных, иными словами — задача синтеза оптимальной системы будет решена. Кроме того, в методе ДП естественным образом удается учесть ограничения как на фазовые, так и на управляющие переменные.

11.1. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим применение метода динамического программирования (ДП) к задаче оптимизации функций. Идея метода, предложенного Р. Беллманом, состоит в замене задачи минимизации функции многих переменных последовательностью задач минимизации функции одной переменной, что существенно сокращает необходимое для минимизации число арифметических операций.

Задача ДП формулируется следующим образом: необходимо найти минимум (максимум) функции

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}, x_i) \quad (11.1)$$

при ограничениях

$$x_i \in X_i, i = \overline{0, n}. \quad (11.2)$$

Эта задача имеет следующую геометрическую интерпретацию. Введем семейство прямых, каждая из которых соответствует переменной x_i (рис. 11.1).

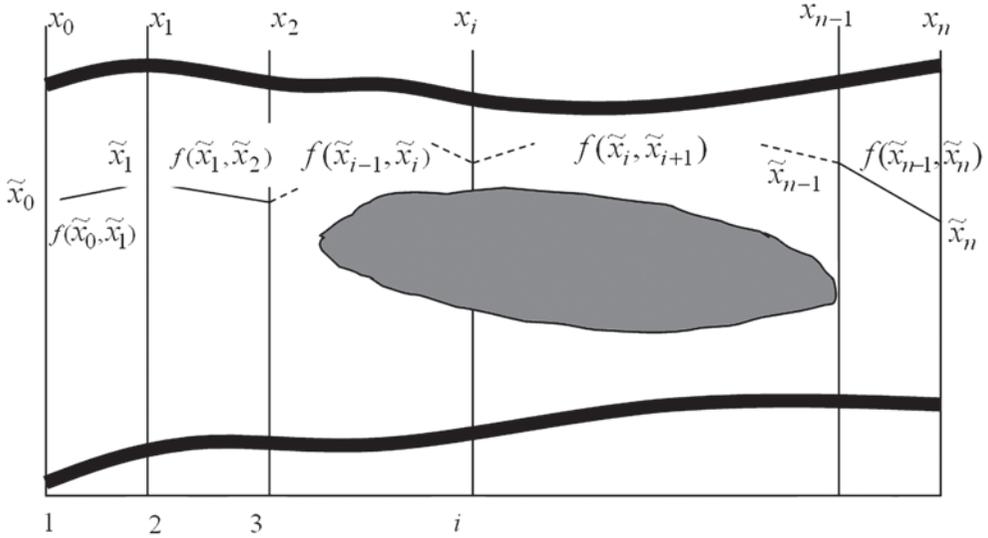


Рис. 11.1

Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования

Теперь задача минимизации аддитивной функции свелась к поиску ломаной кратчайшей длины, соединяющей прямые x_0 и x_1 . Каждая дуга этой ломаной, соединяющей некоторые точки \tilde{x}_i, \tilde{x}_j , представляет собой одно из слагаемых $f(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ в сумме (11.1). Идея метода динамического программирования и более общего метода последовательного анализа вариантов состоит в возможности минимизировать не всю сумму (11.1) по всем переменным, а только пару слагаемых из нее по одной переменной. Цена за эту возможность — необходимость ее решения $n + 1$ раз.

Другая интерпретация метода динамического программирования состоит в возможности находить оптимальные решения в задачах минимизации функци-

оналов вида $\int_0^T f(u(t))dt$, возникающих в теории оптимального управления. Имен-

но для некоторых таких задач Р. Беллманом и был разработан метод динамического программирования. В дискретном варианте интервал интегрирования разбивается на N шагов с достаточно малым интервалом $h = T/N$ и дискретным временем $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N - 1$. Величина интеграла может быть представлена по формуле трапеций в виде

$$\int_0^T f(u(t))dt \approx h/2 \sum_{i=0}^{N-1} (f(u(t_{i+1})) + f(u(t_i))) = \sum_{i=0}^{N-1} F(u_i, u_{i+1}),$$

что представляет собой аддитивную функцию от переменных u_i , $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий минимизировать не всю функцию (6.1) по всем переменным, а только ее часть по одной переменной.

На первом шаге найдем кратчайшее расстояние от прямой x_0 до произвольной точки x_1 на прямой x_1 :

$$l_1^0(x_1) = \min_{x_0 \in X_0} f_1(x_0, x_1). \quad (11.3)$$

На втором шаге найдем кратчайшее расстояние от прямой x_0 до произвольной точки x_2 на прямой x_2 :

$$\begin{aligned} l_2^0(x_2) &= \min_{x_0 \in X_0, x_1 \in X_1} (f_1(x_0, x_1) + f_2(x_1, x_2)) = \\ &= \min_{x_1 \in X_1} (f_2(x_1, x_2) + \min_{x_0 \in X_0} f_1(x_0, x_1)) = \min_{x_1 \in X_1} (f_2(x_1, x_2) + l_1^0(x_1)). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Разделение операции минимизации на две операции по одной переменной является возможным ввиду независимости f_2 от x_0 . В этом случае f_2 можно вынести за знак операции минимизации по переменной x_0 .

Для произвольного шага $k + 1$ получим аналогичным образом

$$l_k^0(x_{k+1}) = \min_{x_k \in X_k} (f_k(x_k, x_{k+1}) + l_k^0(x_k)). \quad (11.5)$$

Эта рекуррентная формула вместе с начальным условием (11.3) позволяет определить на последнем шаге расчетов в прямом направлении кратчайшее расстояние $l_n^0(x_n)$ от начальной прямой до произвольной точки на конечной прямой.

Далее расчет ведется в обратном направлении. Сначала определим конкретную точку на прямой x_n по условию

$$l^0 = \min_{x_n \in X_n} (l_{n+1}^0(x_n)). \quad (11.6)$$

Оптимальное значение x_n^0 представляет собой конечную точку оптимальной траектории. Далее используем предпоследнюю функцию

$$l_n^0(x_{n-1}^0) = \min_{x_{n-1}} (f_n(x_{n-1}, x_n^0) + l_{n-1}^0(x_{n-1}))$$

и определяем значение x_{n-1}^0 по этому условию. Продолжая определение подобным образом, восстановим всю оптимальную траекторию, закончив ее определением точки x_0^0 . В некоторых случаях фиксированы начальная и (или) конечная точки, что соответствует вырождению множеств допустимых стратегий для этих переменных в точку.

В качестве примера рассмотрим задачу об оптимальном распределении ресурса. Пусть имеется n инвестиционных проектов и сумма средств для инвестиций ξ_0 . Прибыль от каждого проекта задана функцией $f_i(x_i)$, $i = 1, n$, x_i — вложения в каждый проект. Должна быть максимизирована суммарная прибыль от всех проектов

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (11.7)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n x_i = \xi_0. \quad (11.8)$$

Разобьем решение задачи на n шагов. На первом шаге выделим деньги первому предприятию, на втором — второму и т. д. Обозначим через ξ_k остаток ресурса после k -го распределения, так что

$$\xi_k = \xi_{k-1} - x_k, \quad \xi_n = 0. \quad (11.9)$$

Теперь геометрическая интерпретация задачи состоит в нахождении ломаной наибольшей длины, соединяющей точку ξ_0 на начальной прямой и точку ξ_n на конечной прямой.

Введем функцию

$$F_k(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=k}^n f_i(x_i), \quad (11.10)$$

которая представляет собой прибыль от $n - k - 1$ последних проектов. Оптимальное значение этой функции F_k^0 , соответствующее максимальной прибыли, называется функцией Беллмана, так что x^0 — оптимальные вложения. Для последнего шага имеем

$$F_n^0(\xi_{n-1}) = \max_{0 \leq x_n \leq \xi_n} f_n(x_n). \quad (11.11)$$

Величина ξ_{n-1} — остаток ресурса после предпоследнего распределения — нам неизвестна, поэтому прибыль зависит от этой величины. Для двух последних проектов на шаге $k - 1$ имеем

$$\begin{aligned} F_{n-1}^0(\xi_{n-2}) &= \max_{x_n, x_{n-1}} (f_{n-1}(x_{n-1}) + f_n(x_n)) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-2}} (f_{n-1}(x_{n-1}) + \\ &+ \max_{0 \leq x_n \leq \xi_{n-1}} f_n(x_n)) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-2}} (f_{n-1}(x_{n-1}) + F_n^0(\xi_{n-1})). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Для произвольного шага k аналогичным образом получим следующее уравнение Беллмана:

$$F_k^0(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi_{k-1}} (f_k(x_k) + F_{k+1}^0(\xi_k)), \quad (11.13)$$

которое вместе с начальным условием (11.11) позволяет рекуррентно определить все функции Беллмана. Для функции $F_1^0(\xi_0)$ величина ξ_0 известна, что позволяет определить максимальную прибыль и наилучшие вложения в первый проект x_1^0 . Далее, двигаясь в обратном направлении, определим оптимальные вложения во все проекты.

Преимущество применения метода динамического программирования для аддитивных функций (11.1) определяется тем, что вместо задачи минимизации

функции многих переменных, что требует числа вычислений пропорционально кубу размерности задачи, решается n задач минимизации более простой функции одной переменной. Число вычислений в такой задаче растет линейно с ростом n . А недостаток состоит в том, что для решения задачи необходимо помнить все n функций Беллмана.

Рассмотрим простой численный пример задачи распределения. Имеется сумма средств $\xi_0 = 100$ для инвестиций в три проекта порциями по 20 единиц. Потенциальная прибыль от вложений в каждый проект дана в следующей таблице:

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$
20	5	4	6
40	8	10	9
60	12	15	14
80	17	18	18
100	20	21	17

Расчеты сведем в основную таблицу:

$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$	
x_1^0	F_1^0	x_2^0	F_2^0	x_3^0	F_3^0
0	6	0	6	20	6
20	11	20, 40	10	40	9
0	16	40	16	60	14
0, 20	21	60	21	80	18
20	26	40, 60, 80	24	80	18

Примечание. В этой и следующей таблицах максимальные значения прибыли от одного, двух или трех проектов выделены курсивом.

Последние два столбца таблицы получены из (11.11) максимизацией функции $f_3(x_3)$.

Расчеты функции Беллмана для следующих шагов сведены во вспомогательную таблицу:

ξ_{k-1}	x_k	ξ_k	$k = 2$			$k = 1$		
			$f_2(x_2)$	$F_3^0(\xi_2)$	$F_2(\xi_1)$	$f_1(x_1)$	$F_2^0(\xi_1)$	$F_1(\xi_1)$
20	0	20	0	6	6	0	6	6
	20	0	4	0	4	5	0	5
40	0	40	0	9	9	0	10	10
	20	20	4	6	10	5	6	11
	40	0	10	0	10	8	0	12
60	0	60	0	14	14	0	16	16
	20	40	4	9	13	5	10	15
	40	20	10	6	16	8	6	14
	60	0	15	0	15	12	0	12
80	0	80	0	18	18	0	21	21
	20	60	4	14	18	5	16	21
	40	40	10	9	19	8	10	18
	60	20	15	6	21	12	6	18
	80	0	18	0	18	17	0	17

ξ_{k-1}	x_k	ξ_k	$k=2$			$k=1$		
			$f_2(x_2)$	$F_3^0(\xi_2)$	$F_2(\xi_1)$	$f_1(x_1)$	$F_2^0(\xi_1)$	$F_1(\xi_1)$
100	0	100	0	18	18	0	24	24
	20	80	4	18	22	5	21	26
	40	60	10	14	24	8	16	24
	60	40	15	9	24	12	10	22
	80	20	18	6	24	17	6	23
	100	0	21	0	0	21	20	0

В графе x_k $k = 1, 2$ найдем максимизирующие прибыль значения аргументов и эти данные занесем в основную таблицу для соответствующего шага. Теперь можно определить оптимальные вложения.

Наибольшая прибыль от вложения 100 единиц от трех проектов составляет 26 единиц при вложениях $x_1^0 = 20$. Остаток средств после первого шага $\xi_1 = \xi_0 - x_1 = 80$, наилучшая прибыль от двух последних проектов составляет (см. основную таблицу) 21 единицу при вложениях $x_2^0 = 60$. Остаток средств для последнего проекта $\xi_2 = 20, x_3^0 = 20$.

Данный пример подтверждает, что метод динамического программирования позволяет находить глобальный минимум и решать задачу оптимизации для всех рассматриваемых начальных значений состояния объекта в рассматриваемом интервале. Иными словами, решается задача синтеза в терминах задач управления. Программа, в которой реализован пример решения задачи распределения ресурса, приведена в следующем документе MathCAD (док. 11.1).

Задача об оптимальном распределении ресурсов методом динамического программирования

Исходные данные: n - число инвестиционных проектов;

N - количество вариантов вложений в проект;

f - вектор-функция прибыли при соответствующем вложении;

цель - максимизировать суммарную прибыль.

$$f := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 12 \\ 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad n := 3 \quad \text{fi}(a, b) := \begin{cases} n - \text{last}(a) & \text{- подпрограмма} \\ \text{for } i \in 0..n & \text{поиска номера} \\ c - i \text{ if } a_i = b & \text{элемента из } a \\ c & \text{при условии} \\ & a = b \end{cases}$$

$$N := \text{last}(f^{<0>}) \quad \text{TAB}_{N, 2n-1} := 0$$

$$K(i, j, f, \text{TAB}) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..i & \text{- подпрограмма решения уравнения} \\ s_k - f_k + \text{TAB}_{i-k, j, 2-1} & \text{Беллмана} \\ g \leftarrow \max(s) \\ um \leftarrow \text{fi}(s, g) \\ k_0 \leftarrow um \\ k_1 \leftarrow g \\ k \end{cases}$$

Док. 11.1 (начало)

$$\begin{aligned}
i &:= 0..2 \cdot (n-1) & j &:= 0..N \\
TAB_{j,2\langle n-1 \rangle+1} &:= K(j, n-1, f^{\langle n-1 \rangle}, TAB)_1 & & \text{- первый шаг - начальное условие,} \\
TAB_{j,2\langle n-1 \rangle} &:= K(j, n-1, f^{\langle n-1 \rangle}, TAB)_0 & & \text{заполнение двух последних} \\
TAB_{j,2\langle n-2 \rangle+1} &:= K(j, n, f^{\langle n-2 \rangle}, TAB)_1 & & \text{колонок таблицы} \\
TAB_{j,2\langle n-2 \rangle} &:= K(j, n, f^{\langle n-2 \rangle}, TAB)_0 & & \\
TAB_{j,2\langle n-3 \rangle+1} &:= K(j, n-1, f^{\langle n-3 \rangle}, TAB)_1 & & \text{- второй шаг - заполнение двух} \\
TAB_{j,2\langle n-3 \rangle} &:= K(j, n-1, f^{\langle n-3 \rangle}, TAB)_0 & & \text{предпоследних колонок таблицы} \\
& & & \text{и т.д.} \\
\text{opt}(N, n) &:= \begin{cases} \xi_0 - N \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ \quad \begin{cases} x_k \leftarrow TAB_{\xi_k, 2k} \\ \xi_{k+1} \leftarrow \xi_k - x_k \end{cases} \end{cases} & \text{opt}(5, 3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
& & & \\
F_{\max} &:= TAB_{N,1} & F_{\max} &= 17 & \text{- максимальная прибыль}
\end{aligned}$$

$$TAB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 10 & 2 & 10 & 3 & 9 \\ 0 & 15 & 2 & 15 & 4 & 12 \\ 3 & 17 & 3 & 16 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- подпрограмма обратного хода в методе Беллмана - определение оптимальных вложений в каждый проект

Док. 11.1 (окончание)

Таким образом, динамическое программирование является эффективным способом решения задач оптимального управления. В непрерывном случае оно используется сравнительно редко ввиду трудности решения уравнения Беллмана в частных производных, осложненных операцией максимизации. В применении к дискретным многошаговым процессам уравнение Беллмана позволяет вместо оптимизации функции по всем переменным оптимизировать по шагам функцию одной переменной. Это требует меньшего количества операций по сравнению с прямой оптимизацией функции, но большей памяти ЭВМ для хранения промежуточных результатов — функций Беллмана.

В случае минимизации функционалов динамическое программирование основано на принципе Беллмана, который утверждает, что если мы имеем начальную точку x_0 и конечную точку x_k и если траектория оптимальна, т. е. выполнено условие

$$I(x^0(t), u^0(t)) = \max_{x, u} \int_0^T F(x, u) dt, \tag{11.14}$$

то любой участок траектории от t' до конечной точки T тоже является оптимальным:

$$I_0(x^0(t), u^0(t)) = \max_{x, u} \int_{t'}^T F(x, u) dt. \tag{11.15}$$

Это означает, что неважно, каким способом система пришла в состояние t' , ее дальнейшее поведение полностью определяется этим состоянием. Такие динамические процессы называются *марковскими*.

11.2. ДИСКРЕТНЫЙ ПРИНЦИП БЕЛЛМАНА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим дискретный вариант принципа Беллмана (скалярный случай). Как было показано выше, если мы имеем аддитивную функцию

$\sum_{i=0}^n f_i(x_i, x_{i+1}) \rightarrow \min_x$, зависящую от n переменных, то сможем свести ее к n задачам оптимизации от одной переменной.

Применим этот алгоритм для скалярной динамической системы с уравнением движения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \quad (11.16)$$

Заменяя производную конечной разностью, перейдем к дискретной системе

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_k, u_k), \quad t = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (11.17)$$

где N — число разбиений интервала времени от 0 до T с шагом h , $N = \frac{T}{h}$.

Тогда уравнение состояния имеет следующий вид:

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, u_k), \quad x_0 = x(0). \quad (11.18)$$

Если величина этого интервала достаточно мала, то критерий оптимальности можно вычислить как сумму площадей прямоугольников:

$$I = \int_0^T f(x, u) dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k, u_k). \quad (11.19)$$

В соответствии с принципом оптимальности расчет ведут от конца траектории. На последнем интервале от $N - 1$ до N точки на оси t величина критерия

$$I = \int_{(N-1)h}^{Nh} f_0(x, u) dt \approx hf_0(x_{N-1}, u_{N-1})$$

должна быть минимальной:

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} hf_0(x_{N-1}, u_{N-1}). \quad (11.20)$$

Рассматривая два последних интервала, получим

$$\min_{u_{N-1}, u_{N-2}} h[f_0(x_{N-2}, u_{N-2}) + f_0(x_{N-1}, u_{N-1})] = \min_{u_{N-2} \in U} h[f_0(x_{N-2}, u_{N-2}) + \min_{u_{N-1} \in U} f_0(x_{N-1}, u_{N-1})].$$

Последнее слагаемое в этой формуле уже известно из (11.20):

$$S_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2} \in U} [hf_0(x_{N-2}, u_{N-2}) + S_{N-1}(x_{N-1})].$$

Продолжая по индукции, можно записать общее уравнение Беллмана для этого случая:

$$S_{N-k}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-k} \in U} [hf_0(x_{N-k}, u_{N-k}) + S_{n+k+1}(x_{N-k+1})], \quad (11.21)$$

которое должно вычисляться итерационно с начальным условием (11.20).

Ниже приведен документ MathCAD с решением уравнения Беллмана для уравнения 1-го порядка с нефиксированным положением концов траектории (док. 11.2).

Решение задачи динамического программирования

c := 3 правая часть уравнения начальное и конечное время пределы состояния системы

$$f(x, u) := -(c \cdot x) + u \quad t_0 := 0 \quad t_1 := 1 \quad x_{\min} := 0 \quad x_{\max} := 1$$

nt := 40 nx := 40 - число шагов по времени o по состоянию системы

шаг по времени шаг по состоянию критерий оптимальности

$$j := 0..1 \quad i := 0..nx \quad hx := \frac{x_{\max} - x_{\min}}{nx} \quad ht := \frac{t_1 - t_0}{nt} \quad \text{tonne}_i := t_0 + i \cdot ht \quad F(x, u) := \left[(x - 0.9)^2 + \frac{(u)^2}{10} \right] \cdot ht$$

k := 0..nx

$$x_{i,j} := x_{\min} + i \cdot hx$$

$$f(x, a, b, hr) := \frac{a + (c \cdot ht - 1) \cdot b}{hr}$$

$u_{i,k}$ - управления для перехода x_i и x_j в

$$u_{i,k} := fu(x_{i,0}, x_{k,1}, ht) \quad sec_{i,k} := F(x_{i,0}, u_{i,k})$$

$$ls0(sec, n) := \begin{cases} r - sec^T \\ \text{for } k \in 0..n \\ liter_k \leftarrow \min(r^{<k>}) \\ liter \end{cases} \quad liter := ls0(sec, nx)$$

$$lsk(sec, liter, n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \text{for } j \in 0..n \\ s1_{i,j} \leftarrow sec_{i,j} + liter_j \\ r - s1^T \\ \text{for } k \in 0..n \\ liter_k \leftarrow \min(r^{<k>}) \\ liter \end{cases}$$

$$fi(a, b) := \begin{cases} n - last(a) \\ \text{for } i \in 0..n \\ c - i \text{ if } a_i = b \\ c \end{cases}$$

$$ls0(sec, liter, nt, nx) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..nt - 1 \\ ls^{<i>} \leftarrow liter \\ \text{for } i \in 0..nt - 2 \\ a - ls^{<i>} \\ ls^{<i+1>} \leftarrow lsk(sec, a, nx) \\ ls \end{cases}$$

$$lk0 := ls0(sec, liter, nt, nx) \quad a := lk0^{<nt-1>}$$

наилучшее значение критерия

$$b := \min(a) \quad b = 0.113$$

Док. 11.2 (начало)

Определение оптимального управления и траектории

$$n_0 := \text{fi}(a, b)$$

$$\text{fl}(\text{sec}, \text{liter}, n, \text{nt}, \text{nx}) := \left. \begin{array}{l} d_{\text{nx}} \leftarrow 0 \\ v_{\text{nt}-2} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0.. \text{nt} - 2 \\ \quad c_{\text{nx}} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 0.. \text{nx} \\ \quad \quad c_i \leftarrow \text{sec}_{n,i} + \langle \text{liter}^{\langle \text{nt}-2 \rangle} \rangle_i \\ \quad a \leftarrow \min(c) \\ \quad v_j \leftarrow \text{fi}(c, a) \\ \quad \text{nt} \leftarrow \text{nt} - 1 \\ \quad n \leftarrow v_j \end{array} \right| v$$

$$c_i := (\text{sec})_{n_0,i} + \langle \text{lk0}^{\langle \text{nt}-2 \rangle} \rangle_i$$

$$d := \min(c) \quad n_1 := \text{fi}(c, d) \quad n_1 = 11$$

$$j1 := 1.. \text{nt} - 1 \quad n_{j1} := \text{fl}(\text{sec}, \text{lk0}, n_0, \text{nt}, \text{nx})_{j1-1}$$

$$e := (\text{sec}^{\Gamma})^{\langle n_{\text{nt}-1} \rangle} \quad g := \min(e) \quad n_{\text{nt}} := \text{fi}(e, g)$$

$$j3 := 0.. \text{nt} - 1 \quad s1_{j3} := (\text{sec})_{\langle n_{j3} \rangle, n_{j3+1}} \quad \sum_{j3} s1_{j3} = 0.113$$

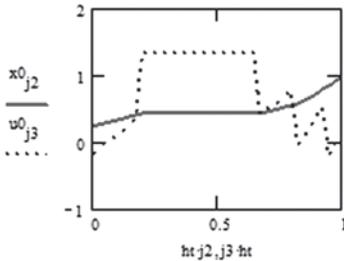
$$j2 := \text{nt}, \text{nt} - 1.. 0 \quad u0_{j2} := (u)_{\langle n_{j2} \rangle, n_{j2+1}}$$

критерий эффективности

$$b = 0.113$$

$x0_{j2}$ - оптимальная траектория

$u0_{j2}$ - оптимальное управление



оптимальный процесс

Док. 11.2 (окончание)

11.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ

Обобщим данный подход для непрерывного случая:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x(0) = x^0, \quad u \in U. \quad (11.22)$$

Критерий эффективности

$$I = \int_0^T F(x, u, t) dt. \quad (11.23)$$

Рассмотрим случай, когда критерий эффективности зависит от времени t . Возьмем некоторую траекторию $x(t)$ (рис. 11.2).

Наилучшее значение критерия

$$I^0 = S(x^0, t_0) = \min_{u \in U} \int_{t_0}^T F(x, u, t) dt.$$

Так как система не автономна, то величина интеграла зависит от начального момента времени. Интеграл вычислен на всей траектории — это функция Беллмана. В момент времени t

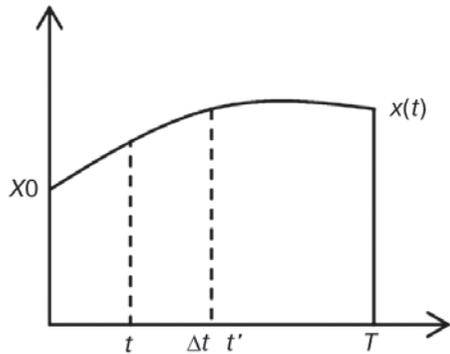


Рис. 11.2
Траектория движения динамической системы

$$I_t = \int_t^T F(x, u, \tau) d\tau$$

(это часть интеграла от момента времени t до T).

Обозначим минимальное значение этого интеграла

$$\min_{u \in U} J_t = S(x(t), t) = S(x, t).$$

Для момента времени t' имеем:

$$I_{t'} = \int_{t'}^T F(x, u, \tau) d\tau,$$

$$\min_{u \in U} J_{t'} = S(x', t') = S(x(t + \Delta t), t + \Delta t),$$

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \min_{u(\tau) \in U} \left[\int_t^{t'} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t'}^T F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] = \\ &= \min_{\substack{u(\tau) \in U \\ \tau \in [t, t']}} \left[\int_t^{t'} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \min_{\substack{u(v) \in U \\ t' \leq v \leq T}} \int_{t'}^T F(x(v), u(v), v) dv \right]. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Первое слагаемое в квадратной скобке зависит от управления $u(\tau) \in U$ на отрезке $t \leq \tau \leq t'$. Второе слагаемое получено в результате минимизации $I_{t'}$ на отрезке $t \leq \tau \leq T$. Выбирая разные функции $u(t)$ на отрезке $t \leq \tau \leq t'$, получим исходящий из точки $x(t)$ пучок траекторий, на каждой из которых система займет в момент времени t' некоторое положение $x(t')$. Выбирая управление $u(v)$ так, чтобы обеспечить минимум $I_{t'}$, мы определяем дальнейшее развитие этих траекторий. Поэтому в последнем выражении по $u(\tau)$ минимизируется все выражение, а не только его первое слагаемое.

Обозначая

$$S(x', t') = \min_{\substack{u(v) \in U \\ t' \leq v \leq T}} \int_{t'}^T F(x(v), u(v), v) dv,$$

представим (11.24) в виде

$$S(x, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in U \\ \tau \in [t, t']}} \left[\int_t^{t'} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x', t') \right]. \quad (11.25)$$

Заметим, что

$$x' = x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + o_1(\Delta t) = x(t) + f(x(t), u(t)) \Delta t + o_1(\Delta t).$$

Учитывая это и предполагая непрерывность всех частных производных функции $S(x, t)$ по всем своим аргументам, будем иметь

$$\begin{aligned} S(x', t') &= S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t + o_1(\Delta t), t + \Delta t) = \\ &= S(x, t) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) \Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_2(\Delta t). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Обозначая через $\langle \text{grad} S, f \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t)$ скалярное произведение двух векторов, из (11.25) с учетом (11.26) получим

$$S(x, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in U \\ \tau \in [t, t']}} \left[\int_t^{t'} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x', t') + \langle \text{grad} S, f \rangle + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o_2(\Delta t) \right]. \quad (11.27)$$

Согласно приведенным выше рассуждениям, функция $S(x, t)$ уже минимизирована по $u(t)$ и, следовательно, не зависит от него. Поэтому все члены, зависящие от этой функции, можно вынести за знак минимизации и представить в следующем виде:

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(\tau) \in U \\ \tau \in [t, t']}} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t'} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \langle \text{grad} S, f \rangle + \frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} \right].$$

Переходя в этом уравнении к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение Беллмана для непрерывных неавтономных систем с фиксированным временем и свободным правым концом траектории:

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u(\tau) \in U} [F(x(\tau), u(\tau), \tau) + \langle \text{grad} S, f \rangle]. \quad (11.28)$$

Уравнение Беллмана (11.28) — это уравнение в частных производных 1-го порядка, оно должно быть дополнено граничным условием: в конечный момент времени функция Беллмана

$$S(x(T), T) = 0. \quad (11.29)$$

В случае автономной системы правая часть дифференциального уравнения и подынтегральная функция от времени явно не зависят. Кроме того, будем рассматривать задачу перевода системы в конечное состояние $x(T) = x_k$ за неизвестное время T :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x_k, \quad u \in U. \quad (11.30)$$

Критерий эффективности

$$I = \int_0^T F(x, u) dt. \quad (11.31)$$

В этом случае функция Беллмана $S(x(t))$ явно не зависит от времени t и уравнение (11.28) записывается в виде

$$\min_{u \in U} [F(x(\tau), u(\tau)) + \langle \text{grad } S, f \rangle] = 0, \quad (11.32)$$

а граничное условие (11.29) — в виде

$$S(x_1(T), x_2(T), \dots, x_m(T)) = 0. \quad (11.33)$$

Уравнение (11.32) является уравнением Беллмана в задаче с закрепленным правым концом и фиксированным временем.

Частный случай такой задачи — задача о быстродействии. В ней требуется найти управление $u(t) \in U$, переводящее систему (11.30) из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное состояние $x(T) = x_k$ за минимально возможное время T . Это время является функцией начального состояния системы $T = T(x_1(0), x_2(0), \dots, x_m(0))$, а подынтегральная функция в рассмотренной выше задаче — $F(x, u) = 1$. Так как уравнение Беллмана будет решаться в обратном времени, то задача будет иметь решение для произвольных начальных состояний $x(t)$ и уравнение (11.24) запишется в виде

$$\min_{u \in U} [\langle \text{grad } T, f \rangle] = -1 \quad (11.34)$$

для неизвестной функции $T(x)$ с граничным условием

$$T(x_k) = 0. \quad (11.35)$$

Пример. Рассмотрим задачу быстродействия для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 x_1 + x_2, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \quad x_2(0) = x_2^0 \quad (11.36)$$

с ограничениями на управление:

$$-1 \leq u_1(t) \leq 1, \quad -1 \leq u_2(t) \leq 1. \quad (11.37)$$

Систему (11.36) нужно перевести из известного начального состояния в начало координат за минимальное время.

Уравнение Беллмана для этого случая имеет вид

$$\min_{\substack{-1 \leq u_1 \leq 1 \\ -1 \leq u_2 \leq 1}} \left[\frac{\partial T}{\partial x_1} f_1(x, u) + \frac{\partial T}{\partial x_2} f_2(x, u) \right] = \min_{\substack{-1 \leq u_1 \leq 1 \\ -1 \leq u_2 \leq 1}} \left[\frac{\partial T}{\partial x_1} (u_1 x_1 + x_2) + \frac{\partial T}{\partial x_2} u_2 \right] = -1. \quad (11.38)$$

Выполняя в этом уравнении операцию минимизации, получим

$$u_1 = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial T}{\partial x_1} x_1\right), u_2 = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right). \quad (11.39)$$

Подставив (11.39) в уравнение Беллмана, окончательно имеем следующее уравнение

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x_1}\right| |x_1| + \left|\frac{\partial T}{\partial x_2}\right| - \frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 = 1 \quad (11.40)$$

с начальным условием

$$T(0, 0) = 0. \quad (11.41)$$

* * *

Метод динамического программирования в принципе позволяет найти задачу оптимального управления в форме синтеза, так как управление ищется в зависимости от состояния системы. Используя свойство независимости прошлого от настоящего для динамических систем, процедуру минимизации функционала мы свели к минимизации по управлению дифференциального уравнения в частных производных. Получающееся уравнение представляет собой задачу Коши, так как все условия заданы в начальный момент времени. Это уравнение, как правило, можно решить только численно, что приводит к дискретному варианту динамического программирования. В этом случае управление на каждом шаге является кусочно-постоянным и задача минимизации функционала заменяется задачей минимизации функции многих переменных. Структура этой функции позволяет заменить задачу минимизации функции многих переменных на многошаговую оптимизацию функции одной переменной, что позволяет существенно сократить объем вычислений. Однако для решения задачи до самого конца вычислений приходится хранить все функции Беллмана, получающиеся на каждом шаге, и только после вычисления этих функций можно найти решение задачи.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 11

1. Какой тип должна иметь минимизируемая функция, чтобы к ней можно было применить метод динамического программирования?
2. В чем преимущества и недостатки метода динамического программирования для минимизации функций?
3. Как связаны функция Беллмана и текущее значение критерия?
4. К какому типу дифференциальных уравнений относится уравнение Беллмана?
5. Каковы начальные условия для уравнения Беллмана?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 11

Задание 11.1. Самолет должен совершить набор высоты и скорости от точки *A* до точки *B* на этой схеме. На каждом шаге самолет может набирать либо высоту, либо скорость. Затраты топлива в зависимости от состояния

самолета для каждого шага даны цифрами на схеме — для набора скорости по горизонтали и для набора высоты по вертикали. Определить минимальные затраты топлива для осуществления этого перехода.



Ответ: минимальный расход топлива составляет 120 единиц.

Задание 11.2. Какова наибольшая прибыль от вложения 100 единиц в три проекта, прибыли в зависимости от вложений в эти проекты представлены в следующей таблице:

Вложения	20	40	60	80	100
Проект 1	3	7	9	11	12
Проект 2	2	8	9	10	13
Проект 3	3	8	9	12	11

Ответ: наибольшая прибыль = 19.

Свойство линейности управляемых систем позволяет достичь существенных успехов в аналитическом решении задачи управления. Линейная динамическая система с квадратичным критерием качества и без ограничений на управление позволяет решить задачу в виде синтеза — регулятора с линейной обратной связью. Другие критерии и ограничения на управления лишают задачу управления линейности даже при линейной динамической системе. Если ограничения и управление зависят только от функций управления, то метод моментов позволяет избежать трудностей решения краевой двухточечной задачи.

12.1. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ СОСТОЯНИЯ

Значительный класс задач оптимального управления занимают задачи о стабилизации некоторого состояния системы. В случае линейной системы и квадратичного критерия оптимальности такую вариационную задачу удастся решить в форме синтеза, т. е. нахождения оптимального управления $u(x)$ в зависимости от состояния системы.

Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad (12.1)$$

где x — m -мерный вектор фазовых координат системы — вектор состояния системы; $u(t)$ — n -мерный вектор управления; $A(t)$ — $m \times m$ -матрица; $B(t)$ — $m \times n$ -матрица. Требуется выбрать вектор управления $u(t)$ так, чтобы минимизировать функционал

$$I_1 = \frac{1}{2} x(T)^T F x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt, \quad (12.2)$$

где T — некоторый фиксированный момент времени. Целью управления является удержание вектора $x(t)$ вблизи нуля,

иными словами, задача состоит в регулировании состояния системы. Матрицы F , $Q(t)$ являются неотрицательно-определенными $m \times m$ -матрицами, а матрица $R(t)$ — положительно-определенной $n \times n$ -матрицей.

Необходимые условия оптимальности можно получить из принципа максимума. Согласно (10.7) гамильтониан имеет вид

$$H(x, p, u) = p_0(t) \left(\frac{1}{2} x(t)^T Q x(t) + \frac{1}{2} u(t)^T R(t) u(t) \right) + p(t)^T A(t) x(t) + p(t)^T B(t) u(t), \quad (12.3)$$

где $p(t)$ — вектор сопряженных переменных, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad p_0(t) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (12.4)$$

Значение сопряженной переменной $p_0(t) = 1$ принято положительным, что означает необходимость минимизации гамильтониана, так как подинтегральная функция входит в гамильтониан с обратным знаком.

В соответствии с (12.3) система (12.4) будет иметь вид

$$\dot{p}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t). \quad (12.5)$$

Оптимальное управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (12.2), будет удовлетворять векторному уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T p(t) = 0. \quad (12.6)$$

Из этого уравнения следует, что оптимальное управление

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t). \quad (12.7)$$

Вторая производная гамильтониана

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R(t)$$

является положительно-определенной матрицей, и управление доставляет критерию минимум. Подставляя (12.7) в уравнение (12.1), получим

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p = A(t)x - S(t)p, \quad (12.8)$$

где

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t). \quad (12.9)$$

Уравнения (12.5) и (12.7) образуют систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x - S(t)p, \\ \dot{p}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t). \end{cases} \quad (12.10)$$

Векторное дифференциальное уравнение (12.10) определяет оптимальную систему, решение которой должно удовлетворять m известным начальным условиям:

$$x(t)|_{t=t_0} = x(t_0). \quad (12.11)$$

Недостающие m условий, определяющие единственное решение (12.11), находятся из условий трансверсальности

$$p(T) = Fx(T). \quad (12.12)$$

Будем искать $p(t)$ в виде

$$p(t) = K(t)x(t), \quad (12.13)$$

где $K(t)$ — $m \times m$ -матрица, подлежащая определению. Тогда (12.8) примет вид следующий вид:

$$\dot{x} = (A(t) - S(t)K(t))x. \quad (12.14)$$

Из (12.13) следует, что

$$p(T) = K(T)x(T). \quad (12.15)$$

Сравнивая (12.15) и (12.12), получим

$$K(T) = F(T). \quad (12.16)$$

Подставляя (12.13) в уравнения (12.10), получим

$$\dot{K}(t)x(t) + K(t)A(t)x(t) - K(t)S(t)K(t)x(t) = -Q(t)x(t) - A^T K(t)x(t), \quad (12.17)$$

или, учитывая (12.9),

$$(\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)S(t)K(t) + Q(t) - A^T K(t))x(t) = 0.$$

Это уравнение должно выполняться при любом $x(t)$, следовательно, матрица K должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T K(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t). \quad (12.18)$$

Уравнение (12.18) является нелинейным матричным дифференциальным уравнением Риккати, вместе с условием (12.16) оно определяет матрицу $K(t)$. Легко видеть, что матрица $K(t)$ симметрическая. Действительно, транспонируя (12.18), получим такое же уравнение для \dot{K}^T , а на основании симметричности матрицы F — такое же начальное условие. В силу единственности решения дифференциального уравнения

$$K^T(t) = K(t). \quad (12.19)$$

Решив это дифференциальное уравнение, полностью определим оптимальное управление. Тогда уравнение замкнутой системы будет следующим:

$$\dot{x} = (A(t) - BR^{-1}K(t)B^T)x. \quad (12.20)$$

Можно доказать, что минимальное значение критерия оптимальности при этом будет

$$I_1^0(x, T) = \frac{1}{2} \langle x(T), x(T) \rangle. \quad (12.21)$$

Таким образом, применение принципа максимума в линейной системе позволяет аналитически решить двухточечную краевую задачу и найти оптимальное управление в виде обратной связи по состоянию системы $x(t)$ с минимальным значением квадратичного критерия качества. Однако часто встречаются системы, у которых измеряется не вектор состояния $x(t)$, а вектор выхода $y(t)$.

12.2. ЗАДАЧА О РЕГУЛЯТОРЕ ВЫХОДА

В некоторых случаях система измерений не позволяет контролировать вектор состояния $x(t)$, выдавая на выходе вектор $y(t) = Cx(t)$, где матрица C характеризует систему измерений. Если для такой системы выполняются условия наблюдаемости, то можно решить задачу о стабилизации выхода $y(t)$ в форме синтеза.

Рассмотрим нестационарную линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \\ y = C(t)x, \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} y(T)^T F y(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [y(t)^T Q(t) y(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt, \quad (12.22)$$

где T — некоторый фиксированный момент времени; $C(t)$ — матрица системы измерений размера $p \times m$. Целью управления является удержание вектора $y(t)$ вблизи нуля, т. е. задача состоит в регулировании выхода системы. Матрицы $F(t)$, $Q(t)$ являются неотрицательно-определенными $m \times m$ -матрицами, а матрица $R(t)$ — положительно-определенной $n \times n$ -матрицей. Поскольку

$$y(t)^T Q(t) y(t) = x(t)^T C(t)^T Q(t) C(t) x(t),$$

$$y(T)^T F y(T) = x(T)^T C(T)^T F C(T) x(T),$$

то функционал (12.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{2} x(T)^T C^T(t) F C(T) x(T) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x(t)^T C^T(t) Q(t) C(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Заметим, что поскольку система (12.21) вполне наблюдаема, а F и $Q(t)$ — неотрицательно-определенные матрицы, то симметрические матрицы $C^T(t)FC(t)$ и $C^T(t)Q(t)C(t)$ также будут неотрицательно-определенными. Действительно, в силу того, что $Q(t)$ — неотрицательно-определенная матрица, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} y(t)^T Q(t) y(t) &\geq 0, \\ x(t)^T C(t)^T Q(t) C(t) x(t) &\geq 0, \\ y(t) &= C(t) x(t). \end{aligned} \quad (12.24)$$

Если система вполне наблюдаема, то по вектор-функции $y(t)$ на $[0, T]$ можно единственным образом вычислить начальный вектор $x(t_0)$ системы (12.1), а каждый вектор $x(t_0)$ определяет единственную траекторию $x(t)$ системы (12.21). Следовательно, уравнения (12.21) вполне наблюдаемой системы взаимно однозначно отображают пространство Y на пространство X . Поэтому из условия (12.24) следует, что

$$\langle y(t), Q(t)C(t)x(t) \rangle \geq 0.$$

Таким образом, матрица $C^T(t)Q(t)C(t)$ и, аналогично, матрица $C^T(t)FC(t)$ являются неотрицательно-определенными матрицами.

Имея в виду те же соображения, что и при выводе оптимального управления в задаче о регуляторе состояния, получим выражение для оптимального управления

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t). \quad (12.25)$$

Дифференциальное управление, описывающее закон движения оптимальной системы будет следующим:

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x. \quad (12.26)$$

Минимальное значение функционала будет

$$I_2^*(x, T) = \frac{1}{2} \langle x(T), C^T F C x(T) \rangle A. \quad (12.27)$$

Входящая в выражения (12.25) и (12.27) и дифференциальное уравнение (12.26) положительно-определенная, симметрическая матрица $K(t)$ есть решение уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -KA(t) - A^T(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B^T(t)K - C^T(t)Q(t)C(t), \\ t &\in [t_0, T], \end{aligned} \quad (12.28)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$K(T) = C^T(T)FC(T).$$

Программа синтеза оптимального регулятора с квадратичным критерием качества представлена в следующем документе MathCAD (док. 12.1).

Синтез регулятора состояния
 матрицы A и B уравнений движения в отклонениях от круговой орбиты

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \quad \text{- начальное состояние}$$

начальное и конечное время число шагов шаг

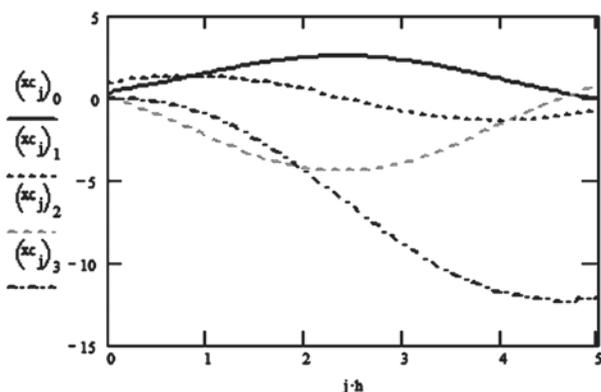
$$t_0 := 0 \quad t_k := 5 \quad N := 100 \quad h := \frac{(t_k - t_0)}{N}$$

проверка системы на управляемость - ранг W равен порядку системы

$$W := \text{augment} (\text{augment} (\text{augment} (B, A \cdot B), A^2 \cdot B), A^3 \cdot B) \quad \text{rank}(W) = 4$$

свободное движение системы

$$j := 0..N \quad x_{j_0} := x \quad x_{j_{+1}} := x_j + A \cdot x_j \cdot h \quad \text{-интегрирование методом Эйлера}$$



матрицы квадратичного критерия оптимальности - выбираются проектировщиком

$$F := \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 2 & 0. \\ 0. & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda F := \text{eigenvals} (F) \quad \lambda Q := \text{eigenvals} (Q) \quad \lambda R := \text{eigenvals} (R)$$

F и Q должны быть неотрицательно определены, R- положительно определена. Это проверяется знаком действительной части собственных чисел соответствующей матрицы (они должны быть неотрицательны для F и Q и положительны для R).

$$\lambda F = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda Q = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 30 \\ 500 \end{bmatrix} \quad \lambda R = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{-собственные числа}$$

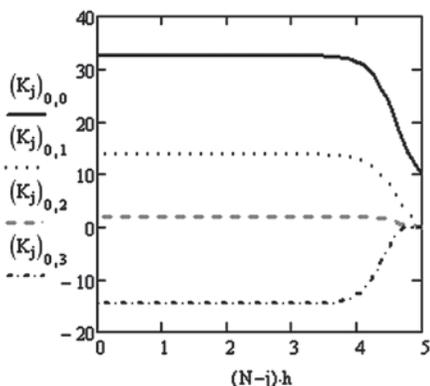
продолжение на следующей стр.

Док. 12.1 (начало)

$K_0 := F$ - начальное условие уравнения Рикати

решение матричного уравнения Рикати методом Эйлера

$$K_{j+1} := [K_j \cdot A + (A)^T \cdot K_j - K_j \cdot (B \cdot R^{-1} \cdot B^T) \cdot K_j + Q] \cdot h + K_j$$



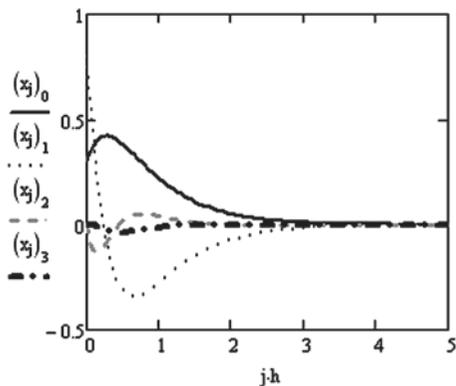
решение уравнения замкнутой системы методом Эйлера

$$x_{j+1} := x_j + (A - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot K_{N-j}) \cdot x_j \cdot h_j := R^{-1} \cdot (B)^T \cdot K_{100-j} \cdot x_j$$

оптимальные процессы в замкнутой системе

движение системы

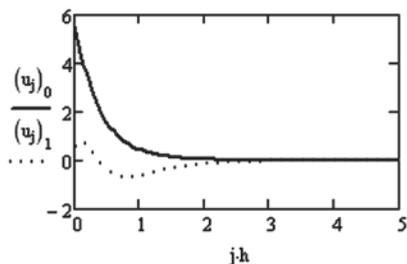
управление.



переменные в отклонениях от круговой орбиты:

$(x_j)_0$ - по радиусу, $(x_j)_1$ - по радиальной скорости

$(x_j)_2$ - по угловой скорости, $(x_j)_3$ - по углу



$(u_j)_0$ - трансверсальное ускорение

$(u_j)_1$ - радиальное ускорение

Док. 12.1 (окончание)

В данной программе решена задача регулятора состояния для случая отклонения от стационарной орбиты на следующие величины:

$$x_1(0) = 0,3 \cdot 42164 \text{ км}, \quad x_2(0) = 0,9 \cdot 42164 \text{ км/сут},$$

$$x_3(0) = 0 \text{ рад/сут}, \quad x_4(0) = 0 \text{ рад}.$$

Сравним процессы управления для линейной и нелинейной систем, описывающих движение космического аппарата в ньютоновском поле тяготения (рис. 12.1).

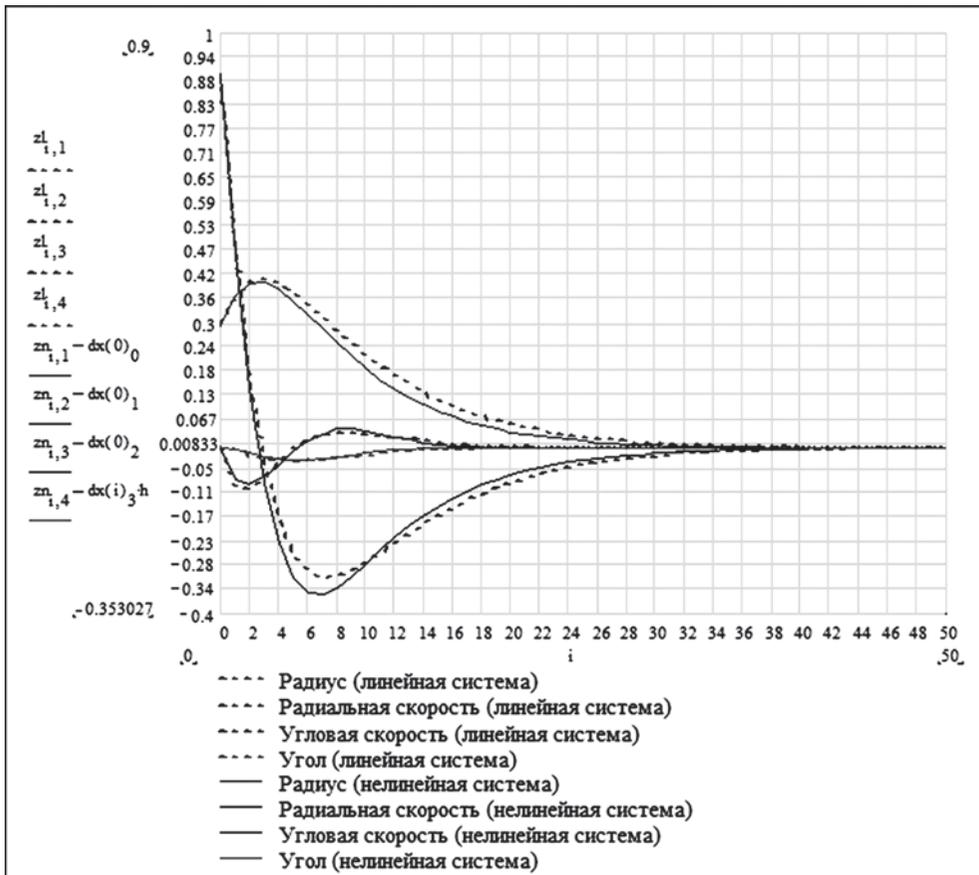
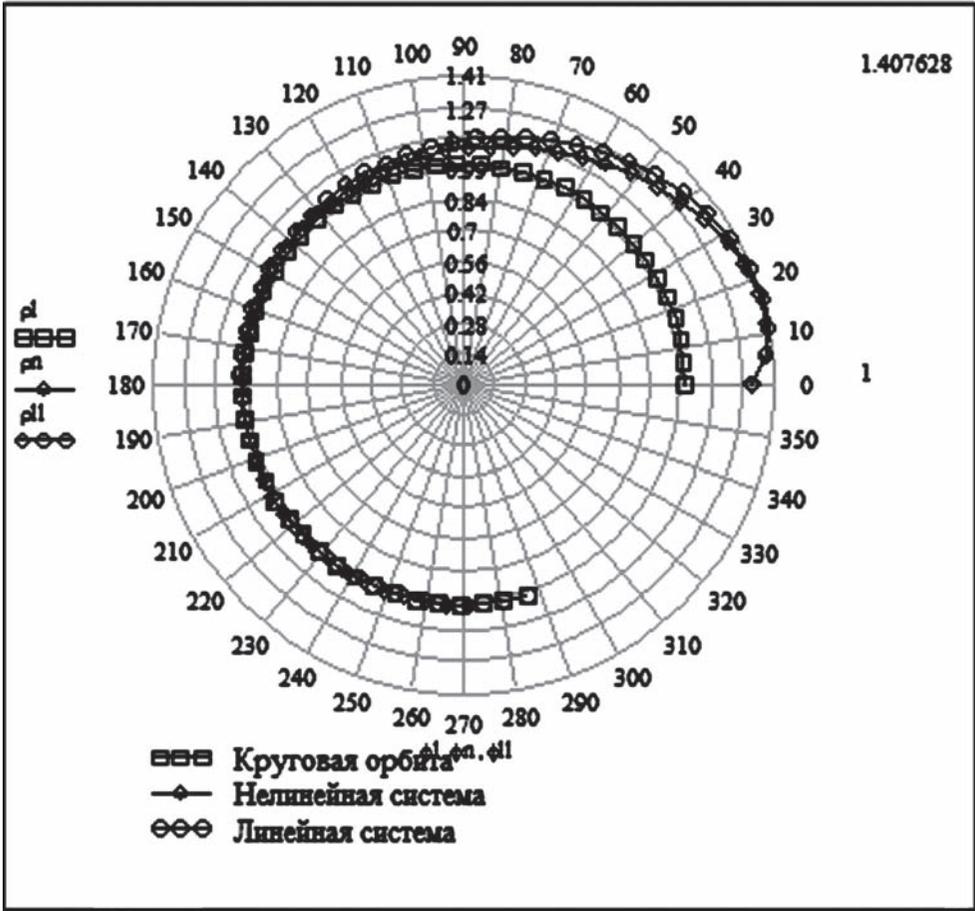


Рис. 12.1
Сравнение управления в линейной и нелинейной системах

Переход КА с околокруговой орбиты в заданную точку на стационарной орбите показан в полярной системе координат в следующем документе MathCAD (док. 12.2).

12.3. МЕТОД МОМЕНТОВ В УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Если критерий оптимальности не квадратичный, то решить задачу управления в форме синтеза не удастся, как правило, даже для линейной системы. Однако если критерий зависит только от управления, то в случае линейной системы можно избежать трудностей решения краевой задачи принципа максимума с помощью метода моментов.



Док. 12.2

Рассмотрим следующую задачу терминального управления динамической системой, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^k, \quad (12.29)$$

$$x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad u \in U, \quad t \in [0, T].$$

Линейность правой части уравнения (12.29) по управлению u определяет многие оптимальные процессы с релейным характером изменения управления. Это свойственно, например, для управления космическими аппаратами с реактивными ускорениями в качестве управления.

Линеаризация уравнений (12.29) дает следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^k, \quad (12.30)$$

$$x \in R^m, \quad u \in R^n, \quad u \in U, \quad t \in [0, T].$$

Мы будем рассматривать решение следующих задач управления: управление с минимальной интенсивностью, управление с ограниченной интенсивностью, управление с предельным быстродействием, а также использовать эти критерии в различных комбинациях.

Такой выбор критериев эффективности обусловлен тем, что при использовании для решения задачи метода моментов Н. Н. Красовского, критерий эффективности должен являться функцией управления. Это накладывает определенные ограничения на круг решаемых задач.

Метод моментов Н. Н. Красовского является одним из эффективных методов решения терминальной задачи оптимального управления линейной динамической системой. Его преимущества связаны с тем, что решение задачи сводится к минимизации выпуклой функции, размерность которой равна размерности уравнений движения, в результате чего не возникает необходимость решать краевую задачу, как в принципе максимума, или иметь задачу большей размерности, как в методах параметрической оптимизации. Для решения задачи управления с помощью метода, по существу, требуется лишь знание собственных функций управляемой системы.

Если использовать в проблеме моментов не собственные функции системы, а, например, степенные функции $g_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, \dots$, то управление $u(t)$ будет представлять собой сумму степенного ряда

$$u(t) = \sum_k a_k t^k.$$

Одной из наиболее важных задач теории степенных рядов является нахождение условий на коэффициенты сходящегося в окрестности нуля степенного ряда

$$a(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k,$$

которые обеспечивали бы принадлежность его суммы заданному классу, например рациональных или алгебраических функций.

Пусть управляемая система описывается (12.30), заданы $0 \leq t \leq T$, x^0 , x^k , выбрана интенсивность $\chi[u]$ и определена норма $\rho^*[u]$ функции $u(t)$. Необходимо найти оптимальное управление $u^0(t)$, переводящее систему из x^0 в x^k с минимальной интенсивностью $\chi[u]$.

Решение уравнений движения задается формулой Коши:

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Состояние системы в момент времени T :

$$x(T) = e^{AT} x^0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Умножим это равенство слева на матрицу e^{-AT} :

$$e^{-AT} x(T) - x^0 = \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \quad (12.31)$$

Обозначим через α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ компоненты вектора $e^{-AT}x(T) - x^0$, если конечное состояние нулевое, то $\alpha = x^0$. Покомпонентно для одномерного управления $n = 1$ уравнение (12.31) можно записать следующим образом:

$$\int_0^T \begin{bmatrix} e^{-A\tau} & \dots & e^{-A\tau} \\ \dots & & \dots \\ e^{-A\tau} & \dots & e^{-A\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix},$$

или, умножая матрицу на вектор,

$$\int_0^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_i e^{-A\tau} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n b_i e^{-A\tau} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Обозначая $g_k(t) = \sum_{i=1}^n b_i e^{-A\tau}$, получим

$$\int_0^T \begin{bmatrix} g_1(\tau) \\ \dots \\ g_m(\tau) \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Теперь для решения двухточечной задачи — перевода системы из заданного начального состояния в требуемое конечное — функция $u(t)$ должна удовлетворять m условиям (12.31), т. е. обладать моментами α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ относительно системы функций $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$, которые определяются компонентами вектора $e^{-At}B$. Обладать конечным числом моментов α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ могут много функций $u(t)$. Задача будет иметь единственное решение, если среди таких функций выбрать функцию с минимальной интенсивностью $\chi[u]$.

Задача имеет решение, если существует число

$$\rho^0[h^0(\tau)] > 0,$$

где $h^0(\tau)$ — минимальная функция.

Тогда интенсивность управления

$$\chi[u^0] = 1/\rho^0$$

и принцип максимума формулируется следующим образом:

$$\int_0^T [h^0(\tau)]^T u^0(\tau) d\tau = \max_u \int_0^T [h^0(\tau)]^T u(\tau) d\tau,$$

где $h^0(\tau)$ — решение задачи на условный экстремум:

$$\min_{\xi} \rho[h] = \min_{\xi} \rho \left[\sum_{i=1}^m \xi_i g^i(\tau) \right] = \rho \left[\sum_{i=1}^m \xi_i^0 g^i(\tau) \right] = \rho[h^0] = \rho^0, \quad (12.32)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^m \xi_i x_i^0 = -1. \quad (12.33)$$

В этом случае оптимальное управление имеет следующий вид:

$$u(t) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \text{sign}(h^0(t)), \quad (12.34)$$

$$h^0(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 \cdot g_i(t). \quad (12.35)$$

Здесь вектор-функции $g_i(t)$ являются собственными функциями динамической системы и представляют собой столбцы матрицы

$$G(t) = e^{-At} B.$$

Установлены следующие соответствия между интенсивностями $\chi[u]$ и нормой $\rho[h]$:

- ограничен модуль ускорения:

$$\chi_1[u] = \sup_{0 \leq \tau \leq T} |u(\tau)|, \quad \rho_1[h] = \int_0^T |h(\tau)| d\tau;$$

- ограничен модуль ускорения и время работы двигателей величиной

$$\frac{1}{\lambda} = T_a :$$

$$\chi_2[u] = \max \left\{ \sup_{0 \leq \tau \leq T} |u(\tau)|, \lambda \int_0^T |u(\tau)| d\tau \right\},$$

$$\rho_2[h] = \max_{\Delta} \int_{\Delta} |h(\tau)| d\tau,$$

где Δ — система отрезков на оси $[0, T]$ суммарной длиной Δ .

Пример. Рассмотрим задачу перевода космического аппарата с околокруговой орбиты в заданную точку на геостационарной орбите с малой трансверсальной тягой двигателей КА.

Математическая модель движения КА приведена во втором разделе. При малых отклонениях от круговой орбиты уравнения движения могут быть линеаризованы с достаточной точностью. В линейной модели матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Фундаментальная матрица решений

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 4 - 3\cos t & \sin t & 2(1 - \cos t) & 0 \\ 3\sin t & \cos t & 2\sin t & 0 \\ 6(\cos t - 1) & -2\sin t & 4\cos t - 3 & 0 \\ 6(\sin t - t) & 2(\cos t - 1) & 4\sin t - 3t & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.36)$$

Функции $g_i(t)$ являются элементами следующей матрицы:

$$e^{-At}B = \begin{bmatrix} 2(1 - \cos \tau) \\ 2\sin \tau \\ 4\cos \tau - 3 \\ 4\sin \tau - 3\tau \end{bmatrix}.$$

Пусть известно начальное и конечное состояния системы:

$$x^k = 0, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (12.31) будет выглядеть следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T 2(1 - \cos \tau)u(\tau)d\tau &= 1, \\ \int_0^T 2\sin \tau u(\tau)d\tau &= 1, \\ \int_0^T (4\cos \tau - 3)u(\tau)d\tau &= 2, \\ \int_0^T (4\sin \tau - 3\tau)u(\tau)d\tau &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Неизвестная функция $u(t)$ должна определяться из этой системы уравнений. Из всех функций, удовлетворяющих моментным равенствам, нужно найти такую функцию $u(t)$, норма которой была бы минимальна.

Для определения оптимального управления нужно найти

$$\min_{\xi} \int_0^T |\xi_1 2(1 - \cos t) + \xi_2 2\sin t + \xi_3 (4\cos t - 3) + \xi_4 (4\sin t - 3t)| dt = \xi^0(\xi^0)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x_i^0 = -1.$$

Если $\rho^0 > 0$, то оптимальное управление $u(t)$ определяется по выражению

$$u^0(t) = \frac{1}{\rho^0} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \xi_i^0 g_i(t) = \frac{1}{\rho^0} \operatorname{sign}(h^0(t)),$$

где $h(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin(t + a_4)$, тогда оптимальное управление является переключательной функцией с амплитудой $\frac{1}{\rho^0}$ и знак управления определяется знаком функции $h^0(t)$.

Сформулированную задачу условной минимизации можно свести к задаче условной минимизации, исключив при помощи равенства $\sum_{i=1}^n \xi_i x_i^0 = -1$ одну из переменных ξ . Если, например, $x_j^0 \neq 0$, тогда мы можем выразить из этого условия переменную ξ_j :

$$\xi_j = \frac{-1 - \sum_{i \neq j, i=1}^n \xi_i x_i^0}{x_j^0}.$$

Подставив полученное выражение в формулу для $\rho(\xi)$, получим задачу на безусловную минимизацию функции трех переменных. Так, если $x_4^0 \neq 0$, то

$$\xi_4 = \frac{-1 - \xi_1 x_1^0 - \xi_2 x_2^0 - \xi_3 x_3^0}{x_4^0} \text{ и минимизируемая функция имеет следующий вид:}$$

$$\min_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \int_0^T \left| \xi_1 2(1 - \cos t) - \xi_2 2 \sin t + \xi_3 (4 \cos t - 3) - \frac{-1 - \xi_1 x_1^0 - \xi_2 x_2^0 - \xi_3 x_3^0}{x_4} (4 \sin t - 3t) \right| dt.$$

Программа вычисления оптимального управления в линейной терминальной задаче методом моментов представлена в документе (док. 12.3).

Метод моментов

начальные условия время перевода число шагов шаг

$$x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0. \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T := 5 \quad N := 500 \quad h := \frac{T}{N}$$

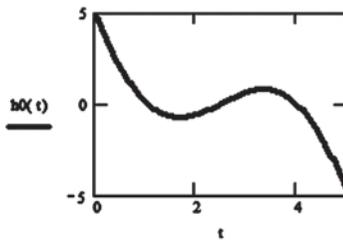
минимальная функция

$$h(\xi, t) := \left[\xi_0 \cdot 2 \cdot (1 - \cos(t)) + \xi_1 \cdot (2 \cdot \sin(t)) + \xi_2 \cdot (4 \cdot \cos(t) - 3) \right] + \left(1 + \frac{\xi_0 \cdot x_0 + \xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2}{x_3} \right) \cdot (4 \cdot \sin(t) - 3 \cdot t)$$

$$\rho(\xi) := \int_0^T |h(\xi, t)| dt \quad d := \operatorname{Minimize}(\rho, \xi) \quad d = \begin{bmatrix} 11.01155599 \\ -3.77615618 \\ 4.84157367 \end{bmatrix} \quad um := \frac{1}{\rho(d)} \quad \text{минимальная интенсивность} \quad um = 0.17351$$

Док. 12.3 (начало)

$h(t) := h(d, t)$ график минимальной функции

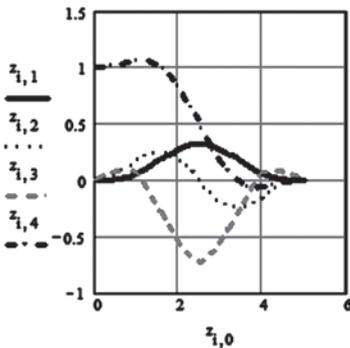


функция управления

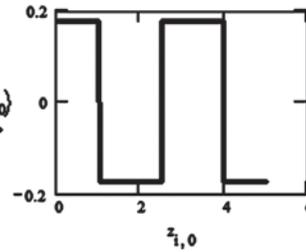
$$u(t) := \begin{cases} um & \text{if } h(t) > 0 \\ -um & \text{otherwise} \end{cases}$$

интегрирование уравнений движения

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{x}(t, x) := A \cdot x + B \cdot u(t) \quad z := \text{rfixed}(x, 0, T, N, f) \quad i := 0..N$$



оптимальный перевод:
 $z_{i,1}$ - отклонение по радиусу, $z_{i,2}$ - отклонение по радиальной скорости, $z_{i,3}$ - по угловой скорости, $z_{i,4}$ - по угловому положению



оптимальное трансверсальное ускорение

Док. 12.3 (окончание)

Линейность объекта управления позволяет существенно упростить процесс проектирования системы. Линейные системы с квадратичным критерием качества позволяют решить задачу оптимального управления в виде синтеза — регулятора с обратной связью в виде корректирующего звена с переменными коэффициентами, зависящими от времени. Уравнение Риккати для определения закона обратной связи может быть рассчитано заранее и введено в цифровой регулятор. Для систем с бесконечным временем коэффициенты обратной связи вообще оказываются постоянными и определяются из алгебраического уравнения Риккати.

Для систем с фиксированными концами траектории (задачи перевода) приходится решать краевую двухточечную задачу. Если критерии оптимальности и ограничения на управление заданы в виде некоторых функционалов от управления, избежать трудностей решения краевой задачи можно с помощью метода моментов. В этом случае задача сводится к минимизации выпуклой функции от небольшого количества аргументов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 12

1. Зачем требуется положительная или неотрицательная определенность матриц в квадратичном критерии?
2. В прямом или обратном времени следует интегрировать уравнение Риккати?
3. Во что преобразуется уравнение Риккати для систем с бесконечным временем?
4. Каковы требования к критерию оптимальности в методе моментов?

ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 12

Задание 12.1. Составить и решить численно уравнение Риккати для регулятора состояния уравнений

$$Ax + Bu,$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,787 & -0,121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, с начальными условиями отклоне-

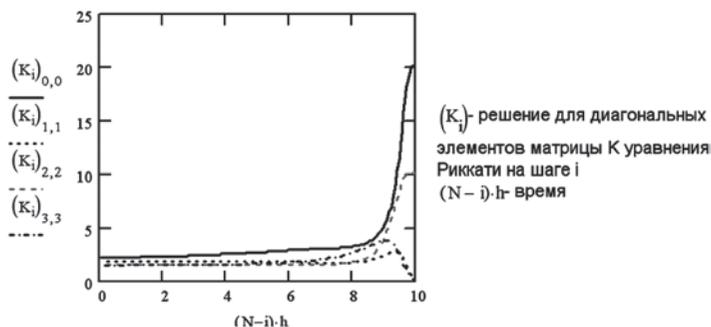
ния от стационарного состояния $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и критерием оптимальности

$$J = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R x(t)) dt, \quad t \in [0, 10]$$

с матрицами:

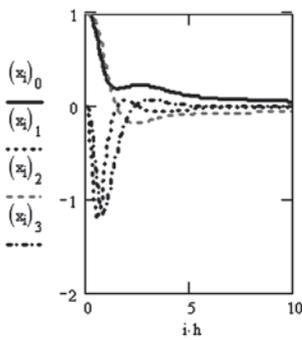
$$F = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

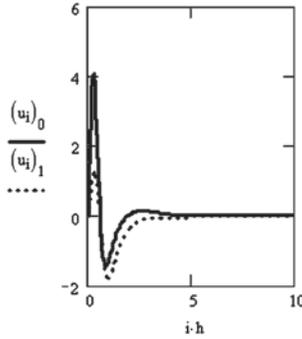


Задание 12.2. Найти оптимальное управление и переходные процессы в системе (задание 12.1).

Ответ:



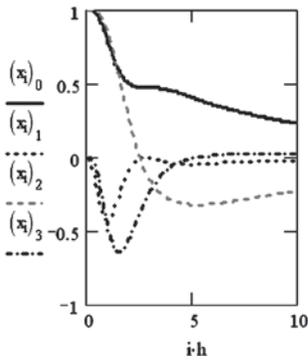
x_i - компонента вектора состояния в замкнутой системе на шаге i



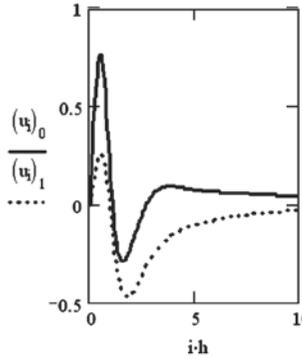
u_i - компонента вектора управления в замкнутой системе на шаге i

Задание 12.3. При прочих равных условиях этой задачи уменьшить в 10 раз условия, накладываемые на конец траектории. Получить оптимальное управление и переходные процессы в системе.

Ответ:



x_i - компонента вектора состояния в замкнутой системе на шаге i



u_i - компонента вектора управления в замкнутой системе на шаге i

Задание 12.4. Найти решение алгебраического уравнения Риккати (см. задание 12.1) для системы с бесконечным временем.

Ответ:

$$K(\infty) = \begin{bmatrix} -0,072 & -0,591 & -0,396 & -0,172 \\ -1,596 & -0,237 & -1,742 & 0,528 \\ -0,419 & -0,745 & -0,336 & -0,013 \\ -0,652 & 0,063 & -0,478 & 0,975 \end{bmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вданном учебнике мы рассмотрели основные подходы к решению задач оптимального управления динамическими системами.

1. Сведение к задаче параметрической оптимизации. В этом подходе неизвестное оптимальное управление представляется в виде функции от некоторых параметров, чаще всего в виде набора кусочно-постоянных управлений u_i в моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, отстоящие друг от друга с шагом h . Тогда рассматривают дискретную систему с состояниями x_i , зависящими через конечно-разностное уравнение движения от управлений u_i . Критерий оптимальности будет представлять собой функцию, минимум которой необходимо найти, т. е. решить задачу нелинейного программирования

$$\min_{u_1, \dots, u_n \in U} \sum_{i=1}^n F(u_i, x_i, t_i)h.$$

Несомненным преимуществом такого подхода является принципиальная возможность рассматривать в его рамках очень широкий класс задач, а очевидным недостатком — высокая размерность задачи при необходимости находить достаточно точное решение, которое может быть получено лишь с малым шагом дискретизации.

Однако если известна структура управления, например кусочно-постоянная, или краевая задача решается методом пристрелки, то с помощью методов нелинейного программирования часто удается определить время переключения управления или минимизировать ошибку в краевых условиях до приемлемо малой величины.

В рамках параметрической оптимизации также решаются задачи автоматического регулирования. Такие системы работают неограниченно долго и влиянием ненулевых начальных

условий можно пренебречь и рассматривать процессы управления с бесконечным временем. Операторные методы позволяют свести задачу интегрирования дифференциальных уравнений к алгебраическим преобразованиям операторов. Преобразование Фурье позволяет произвести частотный анализ и косвенно судить о свойствах динамической системы по частотным характеристикам. Однако окончательное суждение о качестве системы регулирования можно составить по временным характеристикам.

Часто для систем регулирования используются устройства с заданным законом управления, и остается лишь определить наилучшие параметры таких регуляторов, что и составляет задачу параметрической оптимизации.

2. Вариационное исчисление. Здесь необходимо решать двухточечную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), x(0) = x^0, \\ \dot{p} &= -f_x(x, u), p(T) = p^k, \\ \frac{\partial H(x, u, p)}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

Решение такой задачи является серьезной вычислительной проблемой, осложненной неустойчивостью прямой или сопряженной системы в одном временном направлении. Однако иногда из анализа гамильтониана можно определить управление с точностью до параметров, что позволяет использовать первый подход. Кроме того, без привлечения дополнительных условий этим методом не удается решать задачи с ограничениями на управление и переменные состояния.

3. Принцип максимума. В данном случае условие стационарности гамильтониана заменяется его максимизацией в каждый момент времени. Если сравнивать его с методом параметрической оптимизации, где нужно было искать минимум по управлениям во все моменты времени с большой размерностью задачи, то здесь решается задача оптимизации по одной переменной (в случае скалярного управления):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), x(0) = x^0, \\ \dot{p} &= -f_x(x, u), p(T) = p^k, \\ u^0 &= \arg \max_{u \in U} H(x, u, p). \end{aligned}$$

Все проблемы, связанные с решением краевой задачи, в полной мере присущи и этому подходу.

4. Динамическое программирование. Общим недостатком, присущим всем трем перечисленным выше методам, является определение управления в виде программы управления — функции времени $u(t)$, а не в виде функции состояния $u(t)$. В первом случае неизбежные отклонения от расчетного режима требуют корректировки программы. Невозможность решать задачу в режиме реального времени приводит к необходимости строить квазиоптимальные системы, добавляя корректирующие устройства при отклонении от расчетного режима, хотя они не требуются во втором случае, так как оптимальное управление известно

при всех состояниях x , а не только при расчетных состояниях. Построить такое управление позволяет в принципе решение уравнения Беллмана:

$$\min_{u \in U} [F(x(\tau), u(\tau)) + \langle \text{grad} S, f \rangle] = 0$$

с граничным условием $S(x_1(T), x_2(T), \dots, x_m(T)) = 0$.

В этом случае приходится решать не краевую задачу, а задачу Коши, что, естественно, проще, однако решать ее нужно для уравнения в частных производных под знаком минимизации, что усложняет задачу. Дискретный вариант динамического программирования близок к первому подходу, однако он использует специфику интегральных критериев — их аддитивность. Это позволяет минимизировать функцию одной переменной — управления в текущий момент времени, что объединяет его с принципом максимума. Сравнение гамильтониана и функций Беллмана показывает, что градиент функции Беллмана суть вектор сопряженных переменных.

5. Метод моментов. Главное преимущество метода моментов заключается в отсутствии необходимости решения краевой задачи, которая заменена задачей минимизации функции

$$\min_{\xi} \rho[h] = \min_{\xi} \rho \left[\sum_{i=1}^m \xi_i g^i(\tau) \right] = \rho \left[\sum_{i=1}^m \xi_i^0 g^i(\tau) \right] = \rho[h^0] = \rho^0$$

при условии

$$\sum_{i=0}^m \xi_i x_i^0 = -1.$$

Важно отметить, что эта функция является выпуклой (это гарантирует единственность решения) и имеет сравнительно небольшую размерность, равную размерности управляемой системы. Однако существенным ограничением этого метода является его пригодность только для линейных систем с критерием оптимальности, зависящим от управления.

Вопрос о том, какой метод применить для решения задачи оптимального управления, зависит как от свойств объекта управления (его математической модели), от критерия оптимальности и ограничений, так и от предпочтений исследователя.

* * *

В учебнике мы рассмотрели основные вопросы, возникающие при решении инженерных задач, возникающих при проектировании систем управления. Построение математической модели, расчеты с ее использованием и оптимизация исследуемых процессов требуют применения компьютерной техники. Следует по возможности использовать аналитические методы, часто даже в ущерб точности математической модели и вычислений, однако сложные задачи невозможно решить без компьютера. Современные информационные технологии позволяют решать даже сложные задачи инженеру, далекому от тонкостей программирования. Однако без знания вычислительных алгоритмов, их свойств легко можно получить неверный результат из-за плохой сходимости или ошибок вычислений.

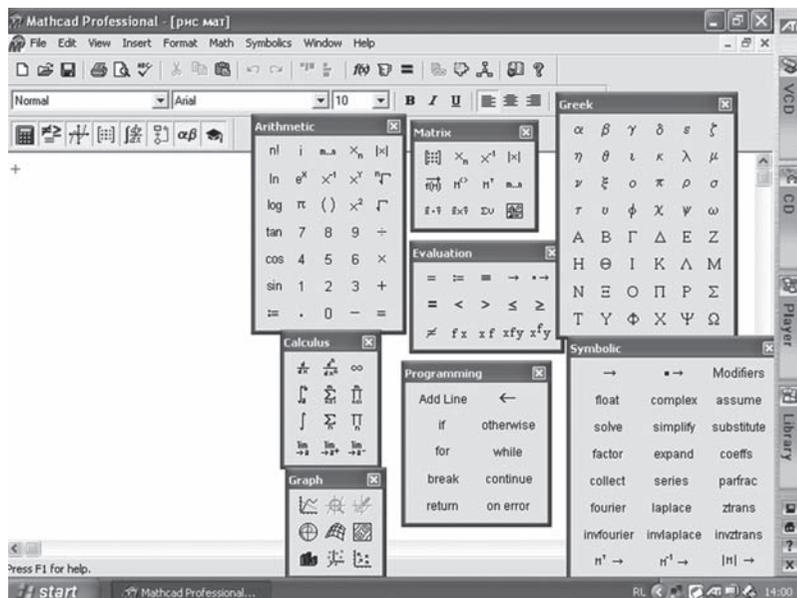
Вычислительная система MathCAD является одной из наиболее распространенных вычислительных сред. Простота программирования, возможность символьных и аналитических вычислений, большой набор встроенных функций, легкость графики и анимации делают систему MathCAD незаменимой как для первоначального ознакомления с вычислительными средами, так и для профессиональной деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВЫ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Язык программирования в системе MathCAD приближен к математическому языку. Работа с системой интуитивно понятна и для простых задач напоминает работу с калькулятором, имеющим очень большое количество операций. Операторы MathCAD выполняются немедленно после окончания написания сверху вниз по документу и слева направо, если они написаны в одной строке. Документ MathCAD имеет следующий вид.

Выпадающие меню «File», «Edit», «View», «Insert», «Format», «Window», «Help» стандартны для оконного интерфейса, в меню «Math» можно менять режимы вычислений, меню



«Symbolics» содержит операторы для символьных вычислений. Справа на экране расположены палитры операторов математических вычислений. В первом ряду сверху вниз расположены арифметические операторы, интегралы и суммы, операторы построения графиков. Во втором ряду — матричные операторы, логические операторы и операторы программирования. В последнем ряду — операторы символьных вычислений и греческий алфавит. Подведя курсор к соответствующей кнопке и нажав на нее, можно ввести данный оператор в бланк программы на место, помеченное крестиком.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

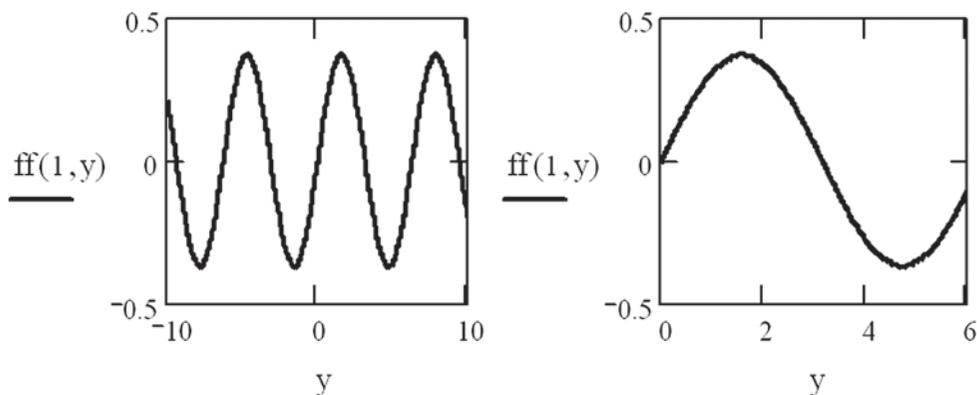
Простейшие операторы присвоения (`<переменная>:=<арифметическое выражение>`) и вывода (`<переменная>=<содержимое переменной>`) вместе со знаками арифметических операций и элементарными функциями находятся в палитре арифметических вычислений. Пример их использования (здесь и далее документ MathCAD выделен рамкой):

$$a := 2.1 \cdot \sqrt[3]{\sin(1)} \quad a = 1.983$$

MathCAD имеет очень богатый набор стандартных функций, доступ к которым достигается нажатием кнопки $f(x)$, однако часто требуется написать свою функцию, например такую $ff(x,y) := e^{-x} \cdot \sin(y)$ $ff(1,2) 0.335$. Слева от оператора (`:=`) должно стоять уникальное имя функции со списком формальных параметров, разделенных запятой, справа — арифметический оператор, связывающий эти параметры. Никакие вычисления по этой программе не будут производиться, пока не произойдет обращение к ней с фактическими параметрами.

Для построения графика функции нужно нажать кнопку декартовых функций в палитре графики. В шаблоне графика слева нужно вставить имя функции, внизу — аргумент функции.

Пределы аргументов и значений функции можно изменить прямо на графике (правый график).



Переменная (как и функция) может содержать не только одно значение. Оператор цикла имеет вид: <переменная>,...<нижнее значение переменной>,<следующее значение>..<верхнее значение>.

$y := 0,0.2.. 1$	$y =$	$i := 0.. 5$	$i =$	$j := 0.. 5$	$j =$
	0		0		0
	0.2		1		1
	0.4		2		2
	0.6		3		3
	0.8		4		4
	1		5		5

Если шаг изменения переменной равен единице, следующее значение можно не указывать. Обратите внимание, что это не две точки, а отдельный оператор в палитре арифметических вычислений. С помощью целочисленных переменных (в данном случае i, j) можно формировать векторы и матрицы:

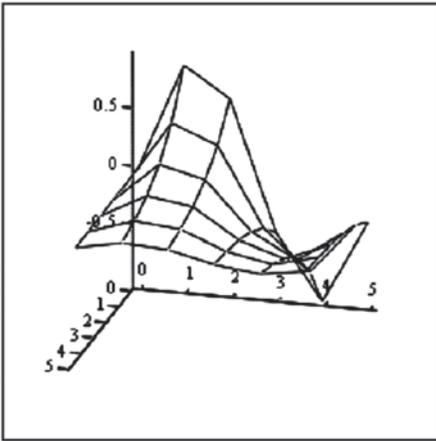
$A_{i,j} := ff(i \cdot 0.5, j \cdot 1.2)$	$b_i := i^2$
$A =$	$b =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0.932 & 0.675 & -0.443 & -0.996 & -0.279 \\ 0 & 0.565 & 0.41 & -0.268 & -0.604 & -0.169 \\ 0 & 0.343 & 0.248 & -0.163 & -0.366 & -0.103 \\ 0 & 0.208 & 0.151 & -0.099 & -0.222 & -0.062 \\ 0 & 0.126 & 0.091 & -0.06 & -0.135 & -0.038 \\ 0 & 0.077 & 0.055 & -0.036 & -0.082 & -0.023 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$

Операции с векторами и матрицами можно производить как с обычными переменными (учитывая их размерности):

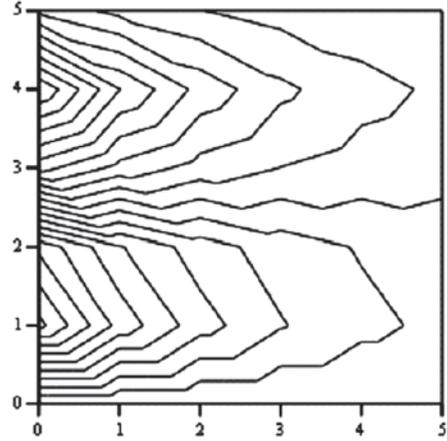
$A^T =$	$A \cdot b =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.932 & 0.565 & 0.343 & 0.208 & 0.126 & 0.077 \\ 0.675 & 0.41 & 0.248 & 0.151 & 0.091 & 0.055 \\ -0.443 & -0.268 & -0.163 & -0.099 & -0.06 & -0.036 \\ -0.996 & -0.604 & -0.366 & -0.222 & -0.135 & -0.082 \\ -0.279 & -0.169 & -0.103 & -0.062 & -0.038 & -0.023 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -23.273 \\ -14.116 \\ -8.562 \\ -5.193 \\ -3.15 \\ -1.91 \end{pmatrix}$
$ A =0 \quad b = 31.289$	

Первый оператор — транспонирование матрицы, второй — умножение матрицы на вектор, третий — вычисление определителя матрицы, последний — длина вектора.

Элементы матрицы представляют собой значения некоторой функции двух переменных (ff в данном случае). Построить график такой функции можно, нажав кнопку трехмерных графиков и введя в шаблон в нижнем левом углу имя матрицы:



A



A

Поместив курсор в поле левого графика и удерживая левую кнопку мыши, можно перемещением курсора изменить точку зрения на эту поверхность. Правый график представляет собой изолинии, т. е. линии равного уровня функции. Получить его можно, щелкнув дважды по исходному графику, что обеспечивает вызов редактора графики рисунков. В данном случае выбрана опция «Contour plot».

Палитра интегрирования и сумм позволяет вычислять определенные интегралы, суммы, произведения, пределы. Пример таких вычислений не требует особых пояснений.

$$\int_0^1 \tan(\sqrt[3]{\cos(x) \cdot \sin(x)}) dx = 0.0834 \quad x := 2 \frac{d}{dx} ff(x, 1) = -0.114,$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385 \quad \prod_{i=5}^{10} \sqrt{i} = 388.844.$$

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Система MathCAD позволяет проводить и символьные вычисления. Оператор присвоения имеет тот же вид, а оператор вывода — стрелка вправо (\rightarrow). Примеры символьных вычислений приведены ниже. Неопределенный интеграл вычисляется с помощью кнопки \int в палитре интегрирования и суммирования:

Интегрирование
$\int dx \int \sin(x) dx \rightarrow -\cos(x)$

В первый шаблон следует ввести подынтегральную функцию, во второй шаблон — переменную интегрирования, затем нажать \rightarrow . Константа интегрирования в результате не присутствует. Вычисление определенного интеграла аналогично:

$$\int_x^a e^{-x} \cdot \sin(x) dx \rightarrow \left(\frac{-1}{25} \cos(a) - \frac{1}{2} \cdot \sin(a) \right) \cdot e^{-a} + \frac{1}{2}$$

Кнопка обратной операции интегрированию — дифференцирования — находится в той же палитре.

<p>Дифференцирование</p> $F(a) := \left(\frac{-1}{2} \cdot \cos(a) - \frac{1}{2} \cdot \sin(a) \right) \cdot e^{-a} + \frac{1}{2}$ $\frac{d}{da} F(a) \rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(a) - \frac{1}{2} \cdot \cos(a) \right) \cdot e^{-a} - \left(\frac{-1}{2} \cdot \cos(a) - \frac{1}{2} \cdot \sin(a) \right) \cdot e^{-a}$
--

Результат отличается от записи подынтегральной функции, но его можно упростить с помощью оператора `■simplify →`, в шаблон которого следует ввести выражение для упрощения:

<p>Упрощение</p> $\frac{d}{da} F(a) \text{ simplify} \rightarrow e^{-a} \cdot \sin(a)$
--

Для разложения в ряд Тейлора используют оператор `■series, ■→`, в левый шаблон вставляют функцию, в правый — точку разложения:

$$\left(\frac{-1}{2} \cdot \cos(a) - \frac{1}{2} \cdot \sin(a) \right) \cdot \exp(-a) + \frac{1}{2} \text{ series, } a = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{3} \cdot a^3 + \frac{1}{12} \cdot a^4 .$$

Если уравнение имеет точное решение, можно попытаться найти его с помощью оператора `■solve, ■→`:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{-1}{2} \cdot \cos(a) - \frac{1}{2} \cdot \sin(a) \right) \cdot \exp(-a) + \frac{1}{2} \right] \text{ solve, } a \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot \pi$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Большинство уравнений может быть решено лишь численно. Для численного решения алгебраических уравнений и в задачах оптимизации функций используется блок решения, начинающийся словом «Given» — дано. До этого ключевого слова должно быть определено начальное значение корня или оптимума функции, которое будет уточнено с требуемой точностью в блоке решения. Для формирования ограничений на аргументы функции можно использовать логические операторы. Для решения уравнений используются функции:

$$\text{Find}(x, y \dots) \text{ и } \text{Minerr}(x, y \dots),$$

где $x, y \dots$ — аргументы функций, составляющих систему уравнений. Первая программа пытается найти значения аргументов с нулевой невязкой левых и правых частей уравнений, вторая — с минимальной квадратичной невязкой.

Функция	Начальное значение	Слово	Уравнение	Решение	Аргумент	Функция
$f(x) := x^2 \cdot \sin(x)e^{-2}$	$y := 1$	Given	$f(y) = 0.1$	$y := \text{Find}(y)$	$y = 0.572$	$f(y) = 0.1$
Given	$f(y) = 1$	$y := \text{Minerr}(y)$	$y = 1.727$	$f(y) = 0.524$		

В первом случае уравнение решено точно, $f(0,572) = 0,1$, во втором случае найдено значение аргумента, при котором значение функции минимально отклонено от 1, т. е. фактически максимальное значение. Однако для задач оптимизации имеются функции $\text{Minimize}(f, x, y, \dots)$ и $\text{Maximize}(f, x, y, \dots)$, решающие задачи минимума и максимума соответственно, где f — оптимизируемая функция, остальные параметры — аргументы этой функции.

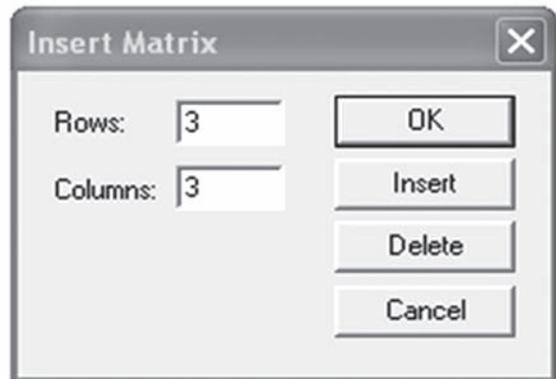
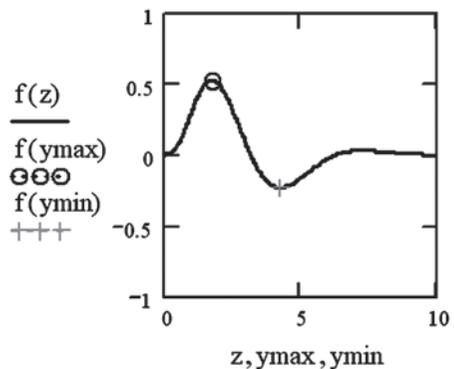
Ограничение на аргумент

$y := 1$ Given $f(y) > 0$ $y_{\max} := \text{Maximize}(f, y)$ $y_{\max} = 1.727$
 $y := 4$ Given $f(y) > 0$ $y_{\min} := \text{Minimize}(f, y)$ $y_{\min} = 4.227$

Отообразим результаты вычислений на графике нескольких функций. Для этого нужно охватить синим уголком имя первой функции $f(z)$, ввести символ $<, >$ (запятая) и в следующий ниже шаблон ввести имя следующей функции $f(y_{\max})$.

Для решения систем уравнений целесообразно представлять функции и их аргументы в виде векторов. Так, для решения систем линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$ исходные данные можно представить в виде векторов и матриц. Пример решения такой системы:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.083 \\ 0.083 \end{bmatrix}$$



Для создания вектора или матрицы нужно нажать кнопку матрицы в левом окне, затем в появившемся правом окне выбрать число строк и столбцов и нажать «ОК».

Такую же структуру исходных данных можно применить и для решения систем нелинейных уравнений. Пусть нужно найти корни следующей системы:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ e^{-x_2} + x_1 = 0. \end{cases}$$

Программа для решения такой задачи может иметь следующий вид.

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + (x_1)^2 - 1 \\ e^{x_1} + x_0 \end{bmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Given } F(x) = 0 \quad x := \text{Find}(x)$$

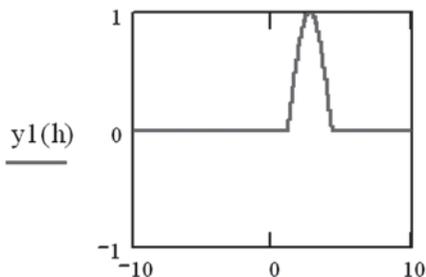
$$x = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.917 \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 7.292 \times 10^{-7} \\ 1.238 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рассмотренные ранее программируемые пользователем функции позволяют реализовать алгоритм вычисления функции лишь одним оператором. В более сложных случаях необходимо использовать операторы программирования из палитры программирования. Составление программы начинается с нажатия кнопки «Add line» — «Добавить линию», после чего в шаблоны можно вставлять операторы программирования. Реализуем поэтапно программу вычисления функции Хевисайда — единичный скачок в точке a :

$$y1(x) := \begin{cases} a \leftarrow 0 & \text{if } x < 1 \\ a \leftarrow \sin(x-1) & \text{if } x \geq 1 \\ a \leftarrow 0 & \text{if } x > \pi + 1 \end{cases} \quad \text{fl}(x,a) := \begin{cases} \blacksquare & \text{if } \blacksquare \\ \blacksquare & \end{cases}$$

$$\text{fl}(x,a) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



В этом примере вначале набрано имя функции с двумя формальными параметрами, оператор присвоения и нажата кнопка «Add line». На втором этапе в первый шаблон вставлен оператор «if» — «если». На следующем этапе в шаб-

лоны оператора «if» вставлено значение единичной функции при $x \geq a$. Затем была нажата кнопка «otherwise» — «иначе», и в шаблон этого оператора вставлено нулевое значение функции. Обращение к функции с фактическими параметрами дает требуемые значения функции.

В более сложных программах необходимо выполнять операции присвоения. Оператор присвоения имеет вид стрелки, направленной влево: \leftarrow . Рассмотрим пример использования оператора цикла «for» — «для».

$f2(m,n) :=$	$s \leftarrow 0$	$f2(m,n) :=$	$s \leftarrow 0$	$f2(m,n) :=$	$s \leftarrow 0$
	$for \blacksquare \in \blacksquare$	$for i \in m..n$	$for i \in m..n$	$for i \in m..n$	$f2(3,10) = 380$
	\blacksquare	\blacksquare	\blacksquare	$s \leftarrow s + i^2$	
				s	

На первом этапе обнуляем переменную суммирования s и вводим во вторую строку программы оператор «for», получая в результате и третью строку — шаблон для тела цикла. Далее вставляем в шаблоны для оператора цикла имя циклической переменной и пределы ее изменения. На следующем этапе вставляем оператор тела цикла, осуществляющий суммирование квадратов целых чисел i , добавляя еще одну строку нажатием «Add line», в последнюю строку программы вводим имя переменной s как результат выполнения программы — суммы квадратов всех целых чисел от m до n .

Оператор «while» — «пока» используется для прерывания цикла при выполнении некоторых условий. Следующая программа иллюстрирует метод простой итерации для решения уравнения $f(x) = 0$ по итерационной формуле

$$x_{x+1} = x_k + \tau f(x_k), x_0 = x^0,$$

где τ — итерационный параметр, x^0 — начальное значение корня уравнения. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие нахождения корня с заданной точностью по функции $f(x) \leq \varepsilon$.

$f3(x,f,\varepsilon,\tau) :=$	$a \leftarrow x$	$g(x) := e^{-x} \cdot \sin(x) - 0.2$
	$while f(a) > \varepsilon$	$f3(1,g,0.0001,0.1) = 1.60825$
	$a \leftarrow a + \tau \cdot f(a)$	
	a	$g(1.60825) = 9.73 \times 10^{-5}$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обыкновенные дифференциальные уравнения вида $dx/dt = f(x, t)$ с начальным условием $x(0) = x^0$ в общем виде могут быть проинтегрированы лишь численно. Для решения этой задачи можно применить как функции MathCAD, так и методы численного интегрирования, реализованные в своей программе. Один из наиболее простых методов — метод Эйлера, реализующий итерационную формулу:

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)h, x_0 = x^0,$$

где $t_k = kh, k = 0, 1, \dots; h$ — шаг интегрирования; $x_k = x(t_k)$. Например, дифференциальное уравнение $d^2x/dt^2 + dx/dt + x^2 = \sqrt{t}, x(0) = 1, d/dtx(0) = 2$ сначала нужно преобразовать к нормальному виду — системе уравнений 1-го порядка, разрешенной относительно первых производных. Это можно сделать, введя новые переменные $x_1 = x, x_2 = dx_1/dt$. В новых переменных это уравнение будет следующим:

$$d/dt \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sqrt{t} - x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

с начальным условием

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Приведем программу, реализующую схему Эйлера для такого уравнения на интервале $(0, 1]$ с шагом $h = 0, 1$.

$$f(x,t) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \sqrt{t} - (x_0)^2 - x_1 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad tk := ih \quad ih := 0.1$$

$$N := \frac{tk - t0}{h} \quad k := 0..N \quad x^{(k+1)} := x^{(k)} + f(x^{(k)}, k \cdot h) \cdot h$$

$x =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	1.2	1.37	1.512	1.625	1.71	1.766	1.794	1.796	1.774
1		2	1.7	1.418	1.133	0.846	0.56	0.283	0.02	-0.22	-0.431

Схема Эйлера имеет невысокий (1-й) порядок точности, ошибки в решении уравнения пропорциональны шагу интегрирования h . Интегрирование этого уравнения можно осуществить и с помощью программы MathCAD методом Рунге — Кутта, имеющей 4-й порядок точности (ошибки пропорциональны h^4), но и требующий вычислений правой части уравнения в 4 раза больше.

$$f(t,x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \sqrt{t} - (x_0)^2 - x_1 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad tk := 1 \quad h := 0.1$$

$$N := \frac{tk - t0}{h} \quad k := 0..N \quad x := \text{rkfixed}(x, t0, tk, N, f)$$

$x^T =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1		1	1.186	1.343	1.473	1.574	1.649	1.697	1.721	1.722	1.704
2		2	1.714	1.435	1.156	0.881	0.613	0.358	0.122	-0.09	-0.274

Сравнивая полученное разными методами решение, можно сделать вывод о том, что численные методы обладают погрешностью метода, и для их корректного использования необходимо знание свойств конкретного метода и анализ возможных ошибок его использования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агафонов, С. А. Дифференциальные уравнения : учебник для втузов / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т. В. Муратова ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 2-е изд. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Физматлит, 1987.
3. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. — М. : Наука, 1969.
4. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Профессия, 2003.
5. Бугаян, И. Р. Макроэкономика. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2000.
6. Васильков, Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. — М. : Финансы и статистика, 1999.
7. Волков, Е. А. Численные методы. — М. : Наука, 1982.
8. Демидович, Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М. : Наука, 1967.
9. Дьяконов, В. П. MATHCAD 8 PRO в математике, физике и Internet / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. — М. : Нолидж, 1999.
10. Замков, О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных [и др.]. — М. : ДИС, 1998.
11. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968.
12. Кротов, В. Ф. Основы теории оптимального управления / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагаша, С. И. Сергеев. — М. : Высш. шк., 1990.
13. Кузин, Л. Т. Основы кибернетики : учеб. пособие для вузов : в 2 т. Т. 2. Основы кибернетических моделей. — М. : Энергия, 1979.
14. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике. — М. : Финансы и статистика, 2003.
15. Лернер, А. Я. Оптимальное управление / А. Я. Лернер, Е. А. Розерман. — М. : Энергия, 1980.
16. Макаров, В. Л. Математическая теория экономической динамики и равновесия / В. Л. Макаров, А. М. Рубинов. — М. : Наука, 1973.
17. Моисеев, Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванчиков, Е. М. Столярова. — М. : Наука, 1978.
18. Михайлов, В. С. Теория управления / В. С. Михайлов. — Киев : Выща школа, 1988.
19. Мудров, А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. — Томск : МП «РАСКО», 1991.
20. Охорзин, В. А. Компьютерное моделирование в системе MathCAD. — Красноярск : СибГАУ, 2003.
21. Охорзин, В. А. Оптимальное управление в системе MathCAD. — М. : Финансы и статистика, 2006.

22. *Охорзин, В. А.* Оптимизация экономических систем на основе алгоритмов и программ в системе MathCAD. — М. : Финансы и статистика, 2004.
23. *Охорзин, В. А.* Прикладная математика в системе MathCAD. — СПб. : Лань, 2009.
24. *Понтрягин, Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе [и др.]. — М. : Физматгиз, 1961.
25. *Ройтенберг, Я. Н.* Автоматическое управление : учеб. пособие. — М. : Наука, 1978.
26. *Рубинов, А. М.* Оптимальное управление в агрегированных моделях экономики / А. М. Рубинов, К. Ю. Борисов, В. Н. Десницкая [и др.]. — Л. : Наука, 1991.
27. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989.
28. *Сафонов, К. В.* Критерий алгебраичности суммы степенного ряда (обобщение критерия Кронекера) и его применение / К. В. Сафонов // Докл. Академии наук. — 2009. — Т. 34, № 1. — С. 19–21.
29. *Сейдж, Э. П.* Идентификация систем управления / Э. П. Сейдж, Д. Л. Мелса. — М. : Наука, 1974.
30. *Советов, Б. Я.* Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — М. : Наука, 1983.
31. *Шуп, Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. — М. : Мир, 1982.
32. *MathCAD 6.0 PLUS.* Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде WINDOWS 95 : пер. с англ. — М. : ИИД «Филинь», 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
<i>Глава 1. Статические системы</i>	8
1.1. Ошибки моделирования	9
1.2. Аппроксимация функций	9
1.3. Адекватность математической модели	17
<i>Глава 2. Линейные системы с бесконечным временем</i>	22
2.1. Передаточные функции элементарных звеньев	22
2.2. Частотные характеристики элементарных звеньев	30
2.3. Передаточные функции сложных линейных систем	32
2.4. Частотные критерии устойчивости динамических систем	36
<i>Глава 3. Дискретные линейные системы</i>	41
3.1. Конечно-разностные уравнения	42
3.2. Передаточные функции и частотные характеристики дискретных систем ..	45
3.3. Частотные характеристики дискретных систем	46
3.4. Устойчивость импульсных систем	49
<i>Глава 4. Качество систем управления и настройки регуляторов</i>	53
4.1. Основные характеристики качества систем управления	53
4.2. Анализ настроек регуляторов	55
<i>Глава 5. Динамические модели. Уравнения движения систем с конечным временем</i> .	62
5.1. Численное решение задачи Коши	67
5.2. Линеаризация в окрестности рабочего режима	71
5.3. Формула Коши. Свободное и вынужденное движения	81
5.4. Определение матрицы перехода	85
<i>Глава 6. Идентификация динамических систем</i>	95
6.1. Условия идентифицируемости	95
6.2. Определение параметров линейной системы во временной области	97
6.3. Идентификация в пространстве преобразований	100
6.4. Параметрическая идентификация	102
<i>Глава 7. Постановка задачи управления</i>	111
7.1. Уравнения движения	113
7.2. Критерии оптимальности	115
7.3. Ограничения	116
7.4. Пример постановки задачи	117

<i>Глава 8. Управляемость и наблюдаемость линейных обыкновенных дифференциальных уравнений</i>	122
8.1. Терминальная задача управления с линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Вполне управляемая система	122
8.2. Условия наблюдаемости	126
8.3. Принцип двойственности в линейных системах	130
<i>Глава 9. Классическое вариационное исчисление</i>	134
9.1. Вариация функционала	135
9.2. Уравнение Эйлера	136
9.3. Вариационные задачи на условный экстремум	137
9.4. Каноническая форма уравнений Эйлера. Гамильтониан и сопряженные переменные	142
9.5. Формула полной вариации функционала	148
9.6. Условия трансверсальности	149
9.7. Символьно-численная реализация алгоритма в системе MathCAD	155
<i>Глава 10. Принцип максимума</i>	163
10.1. Формулировка принципа максимума Понтрягина	163
10.2. Принцип максимума в терминальной задаче. Краевая двухточечная задача	164
10.3. Различные постановки задач в принципе максимума	165
<i>Глава 11. Динамическое программирование</i>	175
11.1. Динамическое программирование в задаче оптимизации функций.	175
11.2. Дискретный принцип Беллмана для динамических систем	182
11.3. Динамическое программирование в непрерывном случае	184
<i>Глава 12. Оптимальные линейные управляемые системы</i>	190
12.1. Задача о регуляторе состояния	190
12.2. Задача о регуляторе выхода	193
12.3. Метод моментов в управлении линейными системами	197
Заключение	207
Приложение	211
Основы работы в системе MathCAD	211
Арифметические вычисления	212
Символьные вычисления	214
Решение уравнений и систем	215
Программирование	217
Интегрирование дифференциальных уравнений	218
Библиографический список	220

*Владимир Афанасьевич ОХОРЗИН,
Константин Владимирович САФОНОВ*

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

У ч е б н и к

Ответственный редактор *А. Д. Пузовик*
Технический редактор *Е. С. Жукович*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*
Верстка *Л. Е. Голод*
Выпускающие *Е. П. Королькова, Н. В. Черезова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967; www.lanpl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>

«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 25.02.14.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100^{1/16}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 18,20. Тираж 1000 экз.

Заказ № _____ .

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография»,
филиал «Чеховский Печатный Двор»
в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета.
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: (495) 988-63-76, факс: 8 (496) 726-54-10.