П. С. АЛЕКСАНДРОВ, Б. А. ПАСЫНКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАЗМЕРНОСТИ

Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.6
А 46
УДК 513.33

Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. Александров П. С., Пасынков Б. А.

Книга вводит читателя в область топологии, известную под названием «теория размерности». Эта область посвящена нахождению и изучению достаточно простых и имеющих наглядный смысл закономерностей, связывающих весьма общие математические объекты — топологические пространства — с основными геометрическими образами — линиями, поверхностями, многообразиями трех и больше измерений.

Авторы не стремятся к изложению многочисленных, доказанных в последнее время теорем, относящихся к теории размерности; напротив, они выделяют из них те, которые являются достаточно общими, чтобы требовать применения теоретико-множественных методов, и достаточно содержательными, чтобы представлять общематематический интерес.

Книга начинается с изложения основных свойств топологических пространств, поэтому она может служить и введением в общую топологию; она вполне доступна студентам-математикам, начиная примерно со второго курса. Книга может быть полезна всем математикам, интересующимся общими вопросами топологии.

А $\frac{0223-1784}{042(02)-73}$ 40-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Глава вторая

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Глава третья

РАЗМЕРНОСТЬ ПОЛИЭДРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Глава четвертая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. I

Глава пятая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. II

Глава шестая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. III

Глава седьмая

НАСЛЕДСТВЕННО НОРМАЛЬНЫЕ И СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Глава восьмая

НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О МНОЖЕСТВАХ, ЛЕЖАЩИХ В R^m

Глава девятая

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОВЫШАЮЩИЕ И ПОНИЖАЮЩИЕ РАЗМЕРНОСТЬ

Глава десятая

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Топология (Analysis Situs) есть по определению ветвь геометрии, которая изучает свойства множеств, инвариантные относительно всякого гомеоморфного, т. е. взаимно однозначного и взаимно непрерывного, отображения. Из этого определения следует, что такие фундаментальные понятия других ветвей геометрии, как прямая, плоскость и т. д., не имеют значения для топологии: они не обладают инвариантностью в указанном смысле. Поэтому их нужно заменить другими понятиями, такими, как линия, поверхность и т. д.: таким образом, речь идет в первую очередь о том, чтобы определить, что под этим понимается. Более точно, речь идет о том, чтобы определить, например, класс множеств, который был бы топологически инвариантен, содержал всякое множество, которое мы обычно называем «линией», и не содержал никакого множества, которому мы не могли бы дать этого названия».

Этими словами открывается «Мемуар о канторовых многообразиях» П. С. Урысона [1], в котором он подробно изложил созданную им теорию размерности, имевшую своей основной задачей ответить во всей широте на поставленный выше вопрос. Итак:

Какие «фигуры», т. е. какие «точечные множества» (лежащие в эвклидовых или гильбертовом пространствах), следует называть линиями, поверхностями, ..., n-мерными телами?

Или в более общей постановке: когда и каким топологическим пространствам естественно приписать данное целое число $n \geqslant 0$ в качестве их числа измерений, или «размерности»?

Однако вопрос, поставленный с такой широтой, мог и не иметь удовлетворительного, математически точного ответа: нельзя было исключить гипотезу, что только простейшие геометрические фигуры (полиэдры) допускают естественную классификацию по «числу их измерений», о чем в свою очередь стало возможным говорить лишь после того, как Брауэр в 1911 г. доказал [1] теорему об инвариантности числа измерений, утверждающую, что два гомеоморфных между собою полиэдра имеют одно и то же число измерений.

Но скептицизм, с первого взгляда законный, оказался необоснованным: теорию размерности построить удалось. А это, в частности, фактически означало, что по крайней мере для всех метризуемых пространств со счетной базой (т. е. для всех множеств, лежащих в эвклидовых или гильбертовом пространствах) определена их размерность, и притом способом, бесспорность которого не вызвала сомнений ни у кого из математиков.

Но это отнюдь не конец, это только начало развития теории размерности. Дело в том, что уже на первых шагах построения этой теории оказалось, что к понятию размерности можно подходить с очень различных сторон и получать таким образом свойства топологических пространств («топологические инварианты»), которые — по крайней мере в классе метризуемых пространств со счетной базой — эквивалентны между собою (т. е. имеют одно и то же значение для каждого такого пространства) и которые в классе элементарных геометрических фигур — скажем, в классе полиэдров — характеризуют различные аспекты присущего нам наглядного представления о «числе измерений» геометрической фигуры.

Первый из этих подходов — это «индуктивный подход», ведущий от самых первых, еще очень неопределенных, высказываний Пуанкаре к точным определениям большой и малой индуктивных размерностей $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ Брауэра, Урысона и Менгера. Второй подход принадлежит Лебегу: размерность $\dim X$ фигуры X определяется наименьшей кратностью, которую необходимо должны иметь делающиеся сколь угодно мелкими покрытия («замощения») данной фигуры: кусок плоскости, например квадрат, имеет размерность 2, потому что его можно покрыть («замостить») сколь угодно мелкими «кирпичами» с кратностью *) три (рис. 1) и нельзя достаточно мелко замостить с кратностью два.

Эта теорема в ее общем виде **) — подлинная жемчужина геометрической мысли и геометрической фантазии; бессмертной заслугой Лебега является уже самая ее формулировка.

В то же время эта теорема — одна из многих теорем, характеризующих размерность n-мерного куба или вообще n-мерного полиэдра, и каждая из них приводит к некоторому способу оп-

*) Кратностью данной (конечной) системы множеств называется наибольшее такое m, что существует точка, принадлежащая m множествам данной системы.

**) Речь идет о следующей общей теореме: n-мерный куб Q^n при любом $\varepsilon > 0$ может быть покрыт конечным числом своих замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$ таким образом, что кратность этого покрытия будет $n+1$, в то же время при достаточно малом ε не существует покрытия куба Q^n, которое имело бы кратность $< n+1$ и состояло бы из замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$.

ределения размерности полиэдра (фактически даже гораздо более общих пространств). Одна из больших задач общей теории размерности состоит в сравнительном исследовании получаемых таким образом «размерностных инвариантов», т. е. топологических инвариантов, в элементарных случаях совпадающих с числом измерений фигуры, а для более общих пространств ведущих, так сказать, самостоятельное существование, подчиненное, впрочем, тем или иным, часто интересным, а порою и неожиданным, соотношениям.

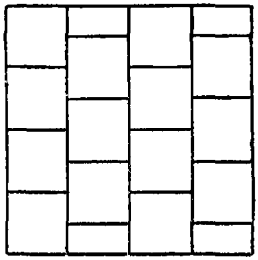

Рис. 1.

Так, например, если в метризуемых пространствах со счетной базой мы имеем тождество Урысона $\dim X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X$, то для любых метризуемых пространств можно утверждать лишь равенство Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$, причем (как показал впервые П. Рой) может быть $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$. Для бикомпактов и даже сильно паракомпактных пространств всегда $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ (и, конечно, $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$), но может быть и $\dim X < \operatorname{ind} X$ (Лунц и Локуциевский) и $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$ (Филиппов). В то же время тождество $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ имеет место для всех пространств, являющихся пространствами (и даже фактор-пространствами) локально бикомпактных топологических групп (Пасынков). Оно справедливо и в других случаях, допускающих довольно наглядное описание (см., например, гл. 5, § 7).

Исследование основных размерностных инвариантов $\dim X$, $\operatorname{Ind} X$, $\operatorname{ind} X$ за последние десятилетия продвинуто достаточно далеко для того, чтобы можно было считать $\dim X$ главным среди этих инвариантов: именно этот инвариант сохраняет большинство основных свойств размерности, имеющих место в случае пространств со счетной базой. Поэтому мы будем, если не оговорено противное, под размерностью понимать именно $\dim X$. Это позволит нам в гл. 4, 5 построить вполне содержательную и интересную теорию размерности бикомпактных и даже просто нормальных пространств, имеющую, как нам кажется и как мы надеемся убедить читателя, выраженный геометрический характер. Этот геометрический характер определяется в этих общих и абстрактных предположениях возможностью сведéния (редукции) — посредством непрерывных отображений тех или иных достаточно наглядных типов — явлений, происходящих в самых общих пространствах, к аналогичным, но гораздо более наглядным явлениям, происходящим уже в полиэдрах. Таким образом, мы доказываем, в частности, так называемые теоремы об ω- и об ε-отображениях (на нерв данного покрытия) и теорему о существенных отображениях n-мерного нормального пространства на n-мерный шар. Эти теоремы и примыкающие к ним занимают большое место в нашем изложении.

В этой книге мы вообще стараемся выделить теоремы, имеющие, как нам кажется, принципиальный познавательный интерес. Таковы в классическом случае пространств со счетной базой, например, уже неоднократно упоминавшаяся формула Урысона $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ и теорема Нёбелинга — Понтрягина (гл. 4, § 4), из которой следует, что класс конечномерных регулярных пространств со счетной базой топологически тождествен с классом множеств, лежащих в эвклидовых пространствах R^n (при всевозможных n).

В качестве принципиально важных теорем, касающихся более общих пространств, упомянем хотя бы следующие:

1) Теорема Скляренко. *Всякое нормальное пространство веса τ и размерности n имеет бикомпактное расширение того же веса τ и той же размерности n.*

2) Теорема Мардешича. *Всякий бикомпакт размерности n является пределом обратного спектра, состоящего из компактов той же размерности n.*

Эта теорема Мардешича может рассматриваться как обобщение теоремы Фрейденталя, утверждающей, что всякий n-мерный компакт есть предел обратного спектра из n-мерных полиэдров. Однако обобщение на случай бикомпактов потребовало замены полиэдров компактами, и это существенно: можно построить n-мерный бикомпакт, не являющийся пределом обратного спектра, составленного из полиэдров размерности n (Мардешич, Пасынков, гл. 5, § 5).

3) *Для любого целого $n \geqslant 0$ и любого бесконечного кардинального числа τ можно построить бикомпакт Π^n_τ веса τ и размерности n, содержащий топологический образ всякого нормального пространства веса τ и размерности n,* — это обобщение известной теоремы Гуревича о пространствах счетного веса. Оно получено Зарелуа и Пасынковым (см. гл. 5, § 4).

4) *Всякий бикомпакт положительной размерности является образом некоторого одномерного бикомпакта при некотором открытом нульмерном отображении* (Пасынков).

Эти примеры, число которых можно было бы умножить, могут помочь представить себе те направления, в которых лежат основные теоремы общей теории размерности, как мы их понимаем. Этим теоремам и ряду других посвящены главы 4—6, в значительной степени и глава 9. Мы считаем необходимым уже сейчас обратить внимание читателя на то, что эта книга не является справочной книгой по теории размерности, тем более мы были далеки от мысли излагать подряд теоремы, которые в теории размерности доказывались и доказываются. Напротив, мы стараемся делать — по нашему лучшему разумению — определенный выбор среди этих теорем, выбор, идущий в тех направлениях, которые открывают, как нам кажется, наиболее глубокие и вместе с тем наиболее простые и наглядные закономерности, позволяющие говорить о геометрических свойствах даже таких общих образований, какими являются нормальные пространства и во всяком случае бикомпакты, с одной стороны, и метризуемые пространства — с другой. Оптимизм нашего математического мировоззрения как раз и заключается в уверенности, что такие закономерности действительно существуют.

Все определения и все классические элементарные теоремы теории размерности изложены в главах 2 и 3. К ним в известной степени примыкает глава 8.

Глава 7 по сравнению с главами 4—6 посвящена более специальному классу пространств, а именно наследственно и совершенно нормальным; в этой главе дается второе доказательство замечательной формулы Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метризуемых пространств X (первое доказательство этой формулы дано в главе 6).

Глава девятая посвящена поведению размерностных инвариантов при непрерывных отображениях соответствующих пространств.

В главе десятой исследуются некоторые основные вопросы теории бесконечномерных пространств.

Мы уже говорили о том, что главным размерностным инвариантом, заслуживающим название размерности без всяких дополнительных прилагательных, является $\dim X$. Второе место занимает большая индуктивная размерность $\operatorname{Ind} X$. Мы специально говорим о ней в главе 7. Кроме того, ей посвящено отдельное Приложение в конце книги.

Что же касается малой индуктивной размерности $\operatorname{ind} X$, то она хороша, лишь когда совпадает с $\dim X$ или $\operatorname{Ind} X$, т. е. в основном, когда речь идет о пространствах со счетной базой.

Сведения о содержании отдельных глав, достаточно подробные и снабженные всеми необходимыми формулировками определений и теорем, читатель найдет во введениях к этим главам.

Заметим, наконец, что в первой главе излагаются основные факты из общей теории топологических пространств. Она могла бы служить просто введением в общую топологию, если бы не некоторая неравномерность в трактовке тех или иных вопросов, неравномерность, вызванная именно потребностями самой теории размерности. Поэтому, если, например, паракомпактность и связанные с ней вопросы излагаются, как нам кажется, с достаточной подробностью, то о таких фундаментальных достижениях общей топологии за последние два десятилетия, какими является, например, теория диадических бикомпактов или общая теория непрерывных отображений (включая теорию абсолютов), не сказано ничего!

При окончательном редактировании этой книги очень большую помощь оказал нам В. В. Федорчук, который внимательнейшим образом прочитал всю рукопись и сделал множество полезных замечаний. Мы приносим ему глубокую благодарность за это. Мы обязаны ему и многими улучшениями наших первоначальных доказательств.

Мы сердечно благодарим также В. И. Зайцева, который много помогал нам при написании первых четырех глав (в частности, он составил указатель к этой книге). Полезные обсуждения мы имели с О. В. Локуциевским, который также прочитал всю рукопись. Благодарны мы также А. Г. Немцу, внимательно прочитавшему последние четыре главы рукописи.

Москва, май 1973.

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. От читателя этой книги предполагается знание основных фактов элементарной «наивной теории множеств» (как она изложена, например, в первой главе книги П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций» *)), включая, разумеется, владение операциями над множествами и понятием отображения одного множества в (в частности, на) другое. Соответствующие обозначения также предполагаются известными. Заметим, однако, что мы пишем $A \subseteq B$ для того, чтобы сказать, что каждый элемент множества A является и элементом множества B, сохраняя запись $A \subset B$ для строгого включения: $A \subset B$, когда $A \subseteq B$ и при этом $A \neq B$.

2. Если дано отображение $f\colon X \to Y$ множества X в множество Y, то прообраз $f^{-1}y$, соответственно $f^{-1}B$, для точки $y \in Y$, соответственно множества $B \subseteq Y$, всегда понимается в смысле полного прообраза точки y, соответственно множества B, т. е. как множество всех точек $x \in X$, для которых $fx = y$, соответственно $fx \in B$.

Читатель заметил, что мы пишем fx и $f^{-1}y$, а не $f(x)$ и $f^{-1}(y)$, так же как мы пишем $\sin x$, а не $\sin(x)$. Так же образ множества $M \subseteq X$ при отображении $f\colon X \to Y$ мы обозначаем через

$$fM = \bigcup_{x \in M} fx \subseteq Y.$$

Однако в тех случаях, когда это разумно и целесообразно, мы не боимся употреблять скобки, например: $f(A_2 \setminus A_1)$.

Композицию (суперпозицию) двух отображений

$$f\colon X \to Y, \quad g\colon fX \to Z$$

мы обозначаем через gf, так что для $x \in X$

$$gfx = g(f(x)) \in Z.$$

---

*) Или в любом другом учебнике, в котором сообщаются элементы теории множеств.

В редких случаях мы пользуемся понятием «малого образа» $f^{\#}A$ множества $A \subseteq X$ при отображении $f\colon X \to Y$, понимая под этим (вместе с В. И. Пономаревым) множество

$$f^{\#}A = \{y \mid f^{-1}y \subseteq A\} = Y \setminus f(X \setminus A).$$

Следовательно, $f^{\#}A \subseteq fA$, если f есть отображение X на все множество Y.

Отображение $f\colon X \to Y$, рассматриваемое лишь на каком-либо подмножестве $A \subset X$, часто называется ограничением отображения f и обозначается через $f|_A$.

3. Понятие упорядоченного множества входит в те элементарные познания по теории множеств, которые мы предполагаем у читателя этой книги. Однако в довольно многих случаях от читателя требуется и знакомство с вполне упорядоченными множествами и трансфинитными числами. Читателю, не знающему этих вещей, ничего не остается, как или принять на веру те утверждения, для доказательства которых трансфинитные числа применяются (в формулировки теорем они, как правило, не входят), или, что предпочтительнее, ознакомиться с ними (например, по третьей главе уже упомянутой книги «Введение в общую теорию множеств и функций» или по гораздо более короткому изложению в книге И. П. Натансона [1]).

4. Мы широко пользуемся понятием частично упорядоченного, в частности направленного, множества. Напоминаем соответствующие определения.

Частично упорядоченное множество — это множество X, в котором для некоторых пар его элементов x, x' введено отношение порядка: x' следует за x, что записывается так: $x' \succ x$ или $x \prec x'$; при этом всегда $x \succ x$, но одновременное выполнение условий $x' \succ x$ и $x \succ x'$ не исключается и при $x \neq x'$. Отношение порядка подчинено единственному условию транзитивности: если $x'' \succ x'$ и $x' \succ x$, то $x'' \succ x'$.

Частично упорядоченное множество X называется направленным, если для любой пары его элементов x, x' найдется элемент x'', следующий как за x, так и за x':

$$x'' \succ x, \qquad x'' \succ x'.$$

5. В настоящее время элементарные сведения о метрических пространствах входят в обязательную программу математического анализа для младших курсов университетов; мы предполагаем, что читатель владеет этими сведениями.

Глава первая

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Эта глава содержит начальные сведения по общей топологии, которые в дальнейшем будут предполагаться известными. В особенности это относится к параграфам о покрытиях пространств, а также к параграфу о связности. Покрытия составляют основной инструмент современной теории размерности. Что же касается понятия связности и примыкающего к нему понятия отделения множеств друг от друга, то именно на почве анализа и углубления этих понятий и возникли первые исследования по теории размерности.

§ 1. Топологические пространства и основные связанные с ними понятия

1. Определение топологического пространства, его открытых, замкнутых и открыто-замкнутых множеств. Определение связности. Пусть X — произвольное множество. Элементы множества X будем называть точками. «Топология $\mathfrak{T}$ в X» состоит, по определению, из двух систем $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X: $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}, \mathfrak{F}$; причем множества, являющиеся элементами одной из двух систем $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$, суть дополнения к множествам другой системы, так что достаточно задать в X одну какую-нибудь из двух систем $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{F}$, тогда вторая система будет состоять из дополнений к множествам, входящим в первую.

Множества $G \in \mathfrak{G}$ называются открытыми, а множества $F \in \mathfrak{F}$ — замкнутыми множествами топологического пространства $\{X, \mathfrak{T}\} = (X, \mathfrak{G}) = [X, \mathfrak{F}]$.

Система $\mathfrak{G}$ называется открытой топологической структурой, а система $\mathfrak{F}$ — замкнутой топологической структурой топологического пространства $\{X, \mathfrak{T}\}$.

Предполагается, что система $\mathfrak{G}$ (система $\mathfrak{F}$) удовлетворяет некоторым аксиомам — «аксиомам топологии», которые и будут сейчас сформулированы. Таким образом, приходим к следующему определению:

Определение 1_G. *Ввести в множество X топологию $\mathfrak{T}$ посредством открытых множеств или превратить множество X в топологическое пространство* $(X, \mathfrak{G}) = \{X, \mathfrak{T}\}$ — значит определить в X систему $\mathfrak{G} = \{G\}$ подмножеств $G \subseteq X$, удовлетворяющих следующим требованиям (аксиомам):

I_G. Пустое множество Λ и все множество X открыты, т. е. являются элементами системы $\mathfrak{G}$.

II_G. Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств открыты.

Называя *замкнутыми множествами* множества $F = X \setminus G$, дополнительные к открытым множествам $G \in \mathfrak{G}$, видим, что система $\mathfrak{F}$ всех замкнутых множеств пространства $(X, \mathfrak{G})$ удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам):

I_F. Все множество X и пустое множество Λ замкнуты, т. е. являются элементами системы $\mathfrak{F}$.

II_F. Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

Определение 1_F. *Ввести в множество X топологию или превратить его в топологическое пространство* $[X, \mathfrak{F}] = \{X, \mathfrak{T}\}$ *посредством замкнутых множеств* — значит определить в X систему подмножеств $\mathfrak{T} = \{F\}$, удовлетворяющих требованиям I_F, II_F. Называя тогда *открытыми множествами* множества $G = X \setminus F$, дополнительные к замкнутым множествам $F \in \mathfrak{F}$, видим, что система $\mathfrak{G}$ всех открытых множеств удовлетворяет требованиям I_G, II_G (и определяет ту же топологию $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$, что и система $\mathfrak{F}$).

Итак, топологию $\mathfrak{T}$ всякого топологического пространства можно ввести и посредством открытых, и посредством замкнутых множеств. Обычно — и это стало общепринятым — мы будем пользоваться открытыми множествами *). Хотя (как мы сейчас увидим) в одно и то же (непустое) множество можно ввести много разных топологий, но в течение одного и того же рассуждения мы в огромном большинстве случаев будем иметь дело лишь с одной из них, что и позволит нам в дальнейшем обозначать топологическое пространство $\{X, \mathfrak{T}\} = (X, \mathfrak{G}) = [X, \mathfrak{F}]$ просто через X и этим избежать излишнего педантизма.

Замечание 1. Из условия I_G (I_F) следует, что системы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ всегда непусты — они содержат в качестве элемента по крайней мере пустое множество; при этом пустое множество является единственным элементом системы $\mathfrak{G}$ (и системы $\mathfrak{F}$) в том и только том случае, когда пусто само множество X. Пустое множество Λ вместе с топологической структурой $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{F}$,

*) См. Александров [4], 1925, где введение топологии посредством открытых множеств было осуществлено впервые.

единственным элементом которой является пустое множество, называется пустым топологическим пространством; иногда удобно принимать во внимание его существование.

Замечание 2. Стандартными обозначениями для открытых множеств являются в первую очередь буквы G, O, также Γ, U, V, W. Эти буквы употребляются только для обозначения открытых множеств.

Буква F, а также Φ являются стандартными для обозначения замкнутых множеств и употребляются только для этой цели.

Иногда, вместо того чтобы сказать: «всякое замкнутое (всякое открытое) множество данного топологического пространства, удовлетворяющее данным условиям...» — будем говорить: «всякое $F \subseteq X$ (всякое $G \subseteq X$), удовлетворяющее данным условиям...».

Буквы A, B, C также преимущественно употребляются для обозначения замкнутых множеств, обычно подчиненных тем или иным дополнительным требованиям.

Определение 2. Множество, являющееся одновременно открытым и замкнутым, называется *открыто-замкнутым.*

Мы только что заметили, что во всяком непустом топологическом пространстве X имеются по крайней мере два открыто-замкнутых множества: пустое множество Λ и все множество X; эти множества называются тривиальными открыто-замкнутыми множествами данного топологического пространства. Топологическое пространство X называется *связным*, если в нем нет других открыто-замкнутых множеств, кроме тривиальных — X и Λ; в противном случае оно называется *несвязным.*

Дополнение ко всякому открыто-замкнутому множеству A, очевидно, есть открыто-замкнутое множество $B = X \setminus A$, причем если A нетривиально, то нетривиально и B.

Поэтому имеет место

Предложение 1. *Всякое несвязное пространство X допускает представление*

$$X = A \cup B, \tag{1}$$

где A и B — дизъюнктные нетривиальные открыто-замкнутые множества.

Обратно, если дано представление (1), *в котором A и B суть непустые дизъюнктные множества, являющиеся (оба) или замкнутыми или открытыми, то они будут и открыто-замкнутыми и пространство X будет несвязным.*

Замечание 3. Пустое топологическое пространство и пространство, состоящее из одной точки, являются связными. Это — «тривиальные» связные пространства.

В каждом из них возможна лишь одна топология; но уже множество D, состоящее из двух точек a и b, можно превратить в каждое из следующих трех топологических пространств: $(D, \mathfrak{G}_1)$, $(D, \mathfrak{G}_0)$, $(D, \mathfrak{G})$, где

1) система $\mathfrak{G}_1$ состоит из всех четырех подмножеств множества D, а именно: Λ, D, $\{a\}$, $\{b\}$;

2) система $\mathfrak{G}_0$ состоит из трех множеств: Λ, D, $\{a\}$ (можно было бы, конечно, ввести топологию, открытыми множествами которой являются множества Λ, D, $\{b\}$, но она отличается от предыдущей только тем, что в ней вместо одноточечного множества $\{a\}$ открытым является одноточечное множество $\{b\}$);

3) система $\mathfrak{G}$ состоит лишь из двух множеств: Λ и D.

Топологическое пространство $(D, \mathfrak{G}_1) = D$ называется простым двоеточием; все четыре множества, лежащие в этом пространстве, открыто-замкнуты. Несмотря на всю простоту его структуры, пространство $(D, \mathfrak{G}_1)$, как мы увидим дальше, входит в многие важные топологические построения.

Топологическое пространство $(D, \mathfrak{G}_0)$ имеет, как мы видели, три открытых, а следовательно, и три замкнутых множества; только множества Λ и D являются открыто-замкнутыми в пространстве $(D, \mathfrak{G}_0) = D_0$; следовательно, это пространство связно, поэтому оно и называется связным двоеточием; это пространство также занимает вполне существенное положение в общей топологии (см. гл. 2).

Наконец, пространство $(D, \mathfrak{G})$ тоже, очевидно, связно. Его можно назвать слипшимся двоеточием; но никаких применений оно не имеет и упомянуто нами лишь для полноты перечня возможных случаев.

Так как каждая топологическая структура (как $\mathfrak{G}$, так и $\mathfrak{F}$) в данном множестве X есть система подмножеств множества X, то множество всех (например, открытых) топологических структур частично упорядочено естественным образом, т. е. по включению, а именно: $\mathfrak{G}_1 \succ \mathfrak{G}_2$, если $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$, — топология тем «больше», чем «больше» в ней элементов, т. е. открытых (соответственно замкнутых) множеств. Наибольшая топология в X получается, если все подмножества множества X объявить открытыми.

Называя, как это общепринято, точку пространства X изолированной, если множество, состоящее из одной этой точки, открыто-замкнуто, естественно назвать наибольшую топологию в каком-либо множестве X изолированной топологией. С этой топологией постоянно приходится иметь дело, хотя она сама по себе и малоинтересна.

Минимальной топологией в (непустом) множестве X является топология, состоящая из двух элементов: множества X и пустого множества. Ее фактически никогда не приходится рассматривать.

2. Подпространства топологического пространства. Вполне несвязные пространства. Всякое множество $X_0 \subseteq X$ — «множество, лежащее в топологическом пространстве $\{X, \mathfrak{T}\}$» — получает вполне определенную топологию $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{F}_0$, индуцированную (или порожденную) данной топологией $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ пространства $\{X, \mathfrak{T}\}$; система $\mathfrak{G}_0$, соответственно система $\mathfrak{F}_0$, есть система всевозможных множеств вида $G_0 = X_0 \cap G$, соответственно $F_0 = X_0 \cap F$, где $G \in \mathfrak{G}$, $F \in \mathfrak{F}$.

Другими словами: открытыми, соответственно замкнутыми, в $\{X_0, \mathfrak{T}_0\}$ называются множества, являющиеся пересечениями множества X_0 с множествами, открытыми, соответственно замкнутыми, в $\{X, \mathfrak{T}\}$. Пространство $\{X_0, \mathfrak{T}_0\}$ называется подпространством пространства $\{X, \mathfrak{T}\}$ (состоящим из точек множества X_0).

Когда мы говорим о множестве $X_0 \subseteq X$ как о топологическом пространстве, мы всегда имеем в виду только что определенное подпространство $\{X_0, \mathfrak{T}_0\}$ пространства $\{X, \mathfrak{T}\}$.

Например, читателю хорошо известно топологическое пространство R^1, называемое числовой прямой. Точки этого пространства суть действительные числа; открытые множества суть, по определению, всевозможные множества, каждое из которых есть сумма интервалов.

Теперь мы можем говорить о пространстве $\mathfrak{R}^1$ всех рациональных и о пространстве $\mathfrak{J}$ всех иррациональных чисел как о подпространствах пространства R^1. Вообще, всякое множество действительных чисел является топологическим пространством— подпространством пространства R^1.

Далее, часто говорят, что некоторое множество X_0, лежащее в топологическом пространстве X, связно (или несвязно). Это значит, что связным (или несвязным) является подпространство X_0 пространства X.

Определение 2_0. Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

Читатель уже сейчас может доказать самостоятельно, что подпространство $\mathfrak{R}^1$ всех рациональных и пространство $\mathfrak{J}$ всех иррациональных точек числовой прямой являются вполне несвязными *).

Замечание 4. Из определения топологии в подпространстве X_0 пространства X вытекает, что для каждого открыто-замкнутого множества A_0 пространства X_0 существует такое замкнутое в X множество F и такое открытое в X множество G, что $A_0 = X_0 \cap F = X_0 \cap G$; однако нельзя утверждать существования открыто-замкнутого в X множества A, для которого $A_0 = X_0 \cap A$. Например, пусть X — связное пространство (как мы увидим в § 4, связной является, например, числовая прямая R^1), а X_0 — несвязное подпространство пространства X (например, при $X = R^1$ можно взять $X_0 = \mathfrak{R}^1$). Пусть A_0 — нетривиальное открыто-замкнутое множество в X_0 (например, при $X_0 = \mathfrak{R}^1$ множество всех рациональных точек, лежащих на интервале (α, β) с иррациональными концами α, β). Тогда не существует в X открыто-замкнутого A, для которого $A_0 = X_0 \cap A$.

3. Замыкание и (открытое) ядро множества в топологическом пространстве. Определение 3. Пересечение всех замкнутых множеств пространства X, содержащих данное произвольное множество $M \subseteq X$, называется *замыканием множества M в пространстве X* и обозначается через $[M]_X$ или просто через $[M]$: $[M] = \bigcap \{F \in \mathfrak{F} \mid F \supseteq M\}$. Сумма всех открытых множеств,

*) Доказательства этих утверждений даны в гл. 2, § 4.

содержащихся в M, называется (открытым) ядром множества M и обозначается через $\langle M\rangle_X$ (также через $\mathrm{I}_X M$ и $\mathrm{Int}_X M$), причем, как и в случае замыкания, значок X обычно опускается *).

Из этого определения сразу следует свойство монотонности операций замыкания и взятия открытого ядра:

Если $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$ и $\langle M_1\rangle \subseteq \langle M_2\rangle$.

Дальнейшими следствиями определения замыкания являются предложения:

(А) Замыкание любого множества замкнуто (как пересечение замкнутых множеств).

(Б) Всякое множество содержится в своем замыкании: $M \subseteq [M]$.

(В) Множество M тогда и только тогда замкнуто, когда оно совпадает со своим замыканием.

В самом деле, если M замкнуто, то множество M есть одно из $F \supseteq M$, следовательно, $[M] \subseteq M$, и, значит, в силу (Б) $[M]=M$. Обратно, если $M = [M]$, то M замкнуто (в силу предложения (А)).

Так как для любого $M \subseteq X$ множество $[M]$ замкнуто, то из (В) следует формула

(Г) $[[M]]=[M]$.

Имеют место и аналогичные («двойственные») утверждения для открытого ядра $[M]$ множества M:

(А′) $\langle M\rangle$ открыто для любого $M \subseteq X$ (как сумма открытых множеств).

(Б′) $M \supseteq \langle M\rangle$ для любого $M \subseteq X$.

(В′) M тогда и только тогда открыто, когда $M = \langle M\rangle$.

(Г′) $\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$.

Предложение 2. *Замыкание* $[M]$ *есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество* M (*наименьшее в том смысле, что всякое* $F \in \mathfrak{F}$, *содержащее множество* M, *содержит и* $[M]$: *из* $F \supseteq M$ *следует* $F \supseteq [M]$).

Аналогично, ядро $\langle M\rangle$ *множества* M *есть наибольшее* $G \in \mathfrak{G}$, *содержащееся в* M (*наибольшее в том смысле, что всякое* $G \in \mathfrak{G}$, *содержащееся в* M, *содержится и в* $\langle M\rangle$). *Наконец, из определения множеств* $[M]$ *и* $\langle M\rangle$ *и из взаимной дополнительности открытых и замкнутых множеств в пространстве* X *легко вытекают формулы*

$$X \setminus [M] = \langle X \setminus M\rangle, \qquad [M] = X \setminus \langle X \setminus M\rangle, \tag{2}$$

---

*) Надобность в нем возникает, если мы данное множество M рассматриваем как множество, лежащее в двух (или более) различных топологических пространствах. Например, множество M, состоящее из действительных чисел, мы можем рассматривать как лежащее на прямой R^1, на плоскости R^2 или в трехмерном пространстве R^3.

и (после замены M на $X \setminus M$)

$$\langle M \rangle = X \setminus [X \setminus M]. \tag{3}$$

Доказательство. Из $F \supseteq M$ следует $G \equiv X \setminus F \subseteq X \setminus M$, и обратно; поэтому

$$X \setminus \bigcap_{F \supseteq M} F = \bigcup_{G \subseteq X \setminus M} G,$$

т. е.

$$X \setminus [M] = \langle X \setminus M \rangle.$$

4. Точки прикосновения. Аксиомы Куратовского. Определение 4. *Окрестностью точки $x \in X$, соответственно множества $M \subseteq X$ пространства X* называется всякое открытое множество, содержащее точку x, соответственно множество M. Окрестности точек x и множества M обозначаются соответственно через Ox и OM (стандартное обозначение).

Определение 5. Пусть $M \subseteq X$; точка x называется *внутренней точкой множества M* (по отношению к пространству X), если у нее имеется окрестность Ox, содержащаяся в M. Точка x называется *точкой прикосновения множества M*, если $Ox \cap M \neq \Lambda$ для любой окрестности Ox точки x, т. е. если x не является внутренней точкой множества $X \setminus M$.

Предложение 3. *Ядро $\langle M \rangle$ любого множества M совпадает с множеством всех внутренних точек множества M, а замыкание $[M]$ — с множеством всех точек прикосновения множества M.*

В самом деле, если $x \in \langle M \rangle$, то $\langle M \rangle$ есть окрестность точки x, содержащаяся в M. Обратно, если окрестность Ox лежит в M, то $Ox \subseteq \langle M \rangle$ и $x \in \langle M \rangle$.

Для доказательства второго утверждения обратимся к формуле (2): условие $x \in [M] \equiv X \setminus \langle X \setminus M \rangle$, по только что доказанному, означает, что всякая окрестность Ox пересекается с $X \setminus (X \setminus M) = M$. Предложение 3 доказано.

Из предложения 3 сразу следует формула

$$[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]. \tag{4}$$

В самом деле, так как $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, то в силу монотонности замыкания имеем

$$[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2].$$

Доказываем обратное включение. Предположим, что $x \in [M_1 \cup M_2]$, но $x \notin [M_1]$. Достаточно доказать, что тогда $x \in [M_2]$.

Пусть Ox — произвольная окрестность точки x. Требуется доказать, что $Ox \cap M_2 \neq \Lambda$. Так как по предположению $x \notin [M_1]$, то существует окрестность O_1x такая, что $M_1 \cap O_1x = \Lambda$.

Так как $x \in [M_1 \cup M_2]$, то окрестность $Ox \cap O_1x = O_2x$ пересекается с $M_1 \cup M_2$; но $O_2x \cap M_1 = \Lambda$, значит, $O_2x \cap M_2 = O_2x \cap (M_1 \cup M_2) \neq \Lambda$ ч. и т. д.

Наконец, очевидно,

$$[\Lambda] = \Lambda, \qquad [X] = X. \tag{5}$$

Свойства, выражаемые формулами (4), (Б), (Г), (5), называются основными свойствами оператора замыкания или аксиомами Куратовского. Они были впервые выделены в 1922 г. К. Куратовским [1] и положены им в основу определения топологического пространства: в множестве X для каждого $M \subseteq X$ определено множество $[M]$ так, что при этом выполнены условия Куратовского (4), (Б), (Г), (5). Получим в X замкнутую топологическую структуру $\mathfrak{F}$, если назовем замкнутыми множествами множества $M \subseteq X$, для которых $[M] = M$. Тогда замыкание любого множества M в пространстве $[X, \mathfrak{F}]$ будет совпадать с тем замыканием, которое мы ввели a priori.

С другой стороны, замыкание, как мы его определили в топологическом пространстве, удовлетворяет аксиомам Куратовского. Из всего сказанного следует, что эти аксиомы определяют в точности тот класс топологических пространств, с которого мы начали наше изложение; он был впервые определен именно Куратовским *).

5. Дальнейшие элементарные определения и факты. Оператор $H(M, N)$. Граница множества. Всюду плотные и нигде не плотные множества. Предложение 4. *Если F — замкнутое, а G — открытое множество в пространстве X, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.*

В самом деле, $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$, а $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$, откуда и следует утверждение.

Определение 6. Если $X_0 \subseteq X$ и $[X_0] = X$, то множество X_0 называется *всюду плотным в пространстве* X, а пространство X называется *расширением* (*под*)*пространства* $X_0 \subseteq X$.

Множество $M \subseteq X$ называется *плотным* в открытом множестве $G \subseteq X$, если $G \subseteq [M]$, т. е. если $G \cap M$ всюду плотно в подпространстве $G \subseteq X$; множество M называется *нигде не плотным* в X, если оно не плотно ни в каком непустом $G \subseteq X$. Легко видеть, что M тогда и только тогда нигде не плотно в X, если

---

*) Итак, мы умеем вводить в данное множество одну и ту же топологию тремя способами: посредством открытых множеств, посредством замкнутых множеств и посредством операции замыкания. В следующем параграфе мы познакомимся еще и с четвертым способом: введением топологии посредством окрестностей. Он был предложен Хаусдорфом [1], [2] еще в 1914 г. (правда, в применении к более узкому классу так называемых хаусдорфовых пространств, см. § 5).

каждое непустое G содержит некоторое такое непустое G_1, что $G_1 \cap M = \Lambda$.

Замечание 6. Легко доказать, что замыкание всякого нигде не плотного множества нигде не плотно.

Замечание 7. Два взаимно дополнительных множества $P \subseteq X$ и $Q \subseteq X$ могут оба быть всюду плотными в X — пример: множество P всех рациональных и множество Q всех иррациональных точек числовой прямой. Однако если замкнутое F всюду плотно в X, то $F = X$; если открытое G всюду плотно в X, то $X \setminus G$ нигде не плотно в X.

Всякое множество $M \subseteq X$ всюду плотно в подпространстве $[M]_X$.

Определение 7. Пусть $M \subseteq X$; замкнутое множество $[M] \setminus \langle M \rangle$ называется *границей множества* M и обозначается через гр M.

Множество гр F нигде не плотно в X, хотя может быть всюду плотно в F.

Множество гр G нигде не плотно в пространстве $[G] = G \cup \cup$ гр G, тем более во всем пространстве X.

Фактически мы будем рассматривать границы открытых множеств G и лишь иногда границы замкнутых множеств F, причем, очевидно,

$$\text{гр}\, G = [G] \setminus G, \qquad \text{гр}\, F = F \setminus \langle F \rangle. \tag{6}$$

Постоянно применяется следующее элементарное

Предложение 5. *Если $M \subset X$, $O \subset X$ — дизъюнктные множества, M произвольно, O открыто, то $[M] \cap O = \Lambda$.*

В самом деле, $X \setminus O$ есть замкнутое множество, содержащее M; значит, оно содержит и $[M]$, т. е. $[M] \cap O = \Lambda$.

Особо важен случай, когда даны дизъюнктные открытые множества O_1 и O_2. Тогда $[O_1] \cap O_2 = [O_2] \cap O_1 = \Lambda$, т. е. $([O_1] \cap O_2) \cup (O_1 \cap [O_2]) = \Lambda$.

В связи с этим введем следующее

Определение 8. Для любых двух множеств M, N в топологическом пространстве X множество $([M] \cap N) \cup (M \cap [N])$ называется *хаусдорфовой производной* пары множеств M, N и обозначается через $H(M, N)$.

Множества M и N называются отделенными (по Хаусдорфу) в пространстве X, если $H(M, N) = \Lambda$.

Итак, любые два дизъюнктных открытых множества в топологическом пространстве отделены (друг от друга).

Следствие предложения 5. *Ядра замыканий дизъюнктных открытых множеств O_1 и O_2 дизъюнктны (даже ядро замыкания любого из них не пересекается с замыканием другого).*

В самом деле, из $O_1 \cap O_2 = \Lambda$ вытекает

$$[O_1] \cap O_2 = \Lambda, \quad \langle [O_1] \rangle \cap O_2 = \Lambda, \quad \langle [O_1] \rangle \cap [O_2] = \Lambda,$$

ч. и т. д.

Замечание 8. Условие отделенности двух множеств, лежащих в каком-нибудь пространстве X, т. е. условие

$$H(M, N) = \Lambda,$$

означает, что множества M и N, во-первых, дизъюнктны и, во-вторых, что каждое из них замкнуто в подпространстве $X_1 = M \cup N$ пространства X; при этом, так как каждое из множеств M, N дополнительно к другому в пространстве X_1, то условие замкнутости этих множеств в пространстве X_1 равносильно условию их открытости в X_1. Итак, — и это существенно — условие отделенности выражается в терминах топологии пространства $X_1 = M \cup N$ и не зависит от выбора того или иного объемлющего пространства, подпространствами которого являются и M и N.

Поэтому, если множества M и N отделены друг от друга в каком-либо пространстве X, то они будут отделены друг от друга и в любом другом пространстве $X' \supseteq M \cup N$, лишь бы множество $M \cup N$ получило из обоих пространств X и X' одну и ту же топологию, т. е. было бы подпространством обоих пространств X и X'.

6. Канонические замкнутые и открытые множества (*ка*- и *ко*-множества). Множество, являющееся замыканием открытого множества, называется каноническим замкнутым или, кратко, *ка*-множеством. Если $A = [G]$, то $G \subseteq \langle A \rangle \subseteq A$, значит, $A = [G] \subseteq [\langle A \rangle] \subseteq A$, т. е. $A = [\langle A \rangle]$; поэтому *ка*-множества могут быть определены как множества, являющиеся замыканием своего открытого ядра.

В каждом замкнутом множестве F содержится максимальное *ка*-множество A (быть может, пустое), именно

$$A = [\langle F \rangle].$$

Очевидно, далее, что сумма двух *ка*-множеств $A_1 = [G_1]$ и $A_2 = [G_2]$ есть *ка*-множество $A = [G_1] \cup [G_2]$ (однако пересечение двух *ка*-множеств может не быть *ка*-множеством).

Множества, являющиеся открытым ядром какого-нибудь замкнутого множества, называются каноническими открытыми или *ко*-множествами *). Если $G = \langle F \rangle$, то $G = \langle [G] \rangle$, так что *ко*-множества могут быть определены как открытые ядра своих

---

*) Множества, являющиеся пересечением конечного числа *ка*-множеств, называются *па*-множествами (обычно просто π-множествами). Термины *ко*-, *ка*-, π-множества предложены В. И. Зайцевым; они имеют все основания получить распространение.

замыканий. Из $A = [\langle A\rangle]$ по формуле (2) следует, что $X\setminus A = \langle X\setminus\langle A\rangle\rangle$. Аналогичным образом, из формулы (3) для множества $G = \langle[G]\rangle$ следует равенство $X\setminus G = [X\setminus[G]]$. Следовательно, канонические открытые множества могут быть определены как дополнения к каноническим замкнутым, и наоборот.

Всякое открытое множество G содержится в наименьшем $\varkappa o$-множестве: им является множество $\langle[G]\rangle$.

Предложение 6. *Если A — произвольное $\varkappa a$-множество, а F — произвольное замкнутое множество пространства X, то*

$$[A\setminus F] = [\langle A\rangle\setminus F].$$

Достаточно доказать, что всякая окрестность Ox всякой точки $x\in[A\setminus F]$ пересекается с множеством $\langle A\rangle\setminus F$. Положим $O_1 = Ox\cap(X\setminus F)$. Так как $x\in[A\setminus F]$, то

$$\Lambda\neq Ox\cap A\cap(X\setminus F),$$

т. е. открытое множество $O_1 = Ox\setminus F$ пересекается с $A = [\langle A\rangle]$, но тогда и $O_1\cap\langle A\rangle\neq\Lambda$, т. е.

$$\Lambda\neq Ox\cap(\langle A\rangle\setminus F),$$

ч. и т. д.

7. **Непрерывные отображения.** Отображение $f\colon X\to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным в точке* $x_0\in X$, если для него выполнено следующее

Условие Коши. Ко всякой окрестности Oy_0 точки $y_0 = fx_0$ существует такая окрестность Ox_0 точки $x_0\in X$, что $f\,Ox_0\subseteq Oy_0$.

Отображение $f\colon X\to Y$ называется *непрерывным* отображением пространства X в пространство Y, если оно непрерывно во всякой точке $x_0\in X$.

Из этого определения легко следует

Предложение 7. *Отображение $f\colon X\to Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда прообраз каждого открытого множества $V\subseteq Y$ пространства Y есть открытое множество $U = f^{-1}V$ пространства X.*

В самом деле, пусть выполнено условие Коши для любой точки $x_0\in X$ и пусть V — произвольное открытое в Y множество. Для доказательства того, что $f^{-1}V$ открыто в X, достаточно доказать, что любая точка $x\in f^{-1}V$ — внутренняя точка множества $f^{-1}V$. Но открытое множество V есть окрестность точки $y = fx$; поэтому существует окрестность Ox точки x в X, для которой $fOx\subseteq V$, а это и значит, что $Ox\subseteq f^{-1}V$.

Пусть, обратно, прообраз любого открытого в Y множества открыт в X. Докажем, что тогда условие Коши выполнено для любой точки $x_0\in X$. Берем произвольную окрестность $V = Oy_0$

точки $y_0 = fx_0$. Тогда $f^{-1}V$ есть окрестность Ox_0 точки x_0 и для нее, очевидно, $fOx_0 \subseteq Oy_0$. Из предложения 7 непосредственно следует

Предложение 8. *Отображение f: $X \to Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда прообраз $f^{-1}F$ всякого замкнутого множества F в Y есть замкнутое множество в X.*

Наконец, имеет место

Предложение 9. *Отображение f: $X \to Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любого множества $M \subseteq X$ имеем*

$$f[M]_X \subseteq [fM]_Y.$$

Доказательство. 1°. Пусть отображение f: $X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f^{-1}[fM]$ замкнуто и содержит множество M. Следовательно, $[M] \subseteq f^{-1}[fM]$, откуда $f[M] \subseteq [fM]$.

2°. Пусть $f[M]_X \subseteq [fM]_Y$ для любого $M \subseteq X$. Докажем, что f: $X \to Y$ непрерывно.

Рассмотрим замкнутое в Y множество F. Тогда

$$f[f^{-1}F] \subseteq [ff^{-1}F] = [F] = F,$$

откуда $[f^{-1}F] \subseteq f^{-1}F$, значит, $f^{-1}F$ замкнуто.

Предложение 9 доказано.

Докажем еще два важных утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Предложение 10. *Пусть F_1, F_2 — два замкнутых множества пространства X, дающих в сумме все X, и пусть f_1: $F_1 \to Y$, f_2: $F_2 \to Y$ — непрерывные отображения этих замкнутых множеств в пространство Y, совпадающие на пересечении $F_1 \cap F_2$. Тогда отображение f: $X \to Y$, задаваемое равенствами*

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x), & \text{если} \quad x \in F_1, \\ f(x) = f_2(x), & \text{если} \quad x \in F_2, \end{cases}$$

непрерывно.

Доказательство. Достаточно доказать, что прообраз $f^{-1}\Phi$ всякого замкнутого в Y множества Φ замкнут в X. Но (как легко проверить) $f^{-1}\Phi = f_1^{-1}\Phi \cup f_2^{-1}\Phi$. Множество $f_1^{-1}\Phi$ (соответственно $f_2^{-1}\Phi$) замкнуто в замкнутом множестве F_1 (соответственно в F_2) и, значит, во всем пространстве X; поэтому замкнуто и множество $f^{-1}\Phi = f_1^{-1}\Phi \cup f_2^{-1}\Phi$. Предложение 10 доказано.

Предложение 10′. *Пусть система открытых в пространстве X множеств O_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в сумме дает все пространство X. Если отображение f: $X \to Y$ таково, что его ограничение f_α: $O_\alpha \to Y$ на каждое множество O_α непрерывно, то непрерывно и само отображение f.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное, открытое в Y множество V. Его прообраз

$$f^{-1}V = f^{-1}V \cap \bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_\alpha (f^{-1}V \cap O_\alpha) = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}V$$

открыт в X в силу предложения 7 и непрерывности отображений f_α. Но тогда, опять же в силу предложения 7, отображение f непрерывно, ч. и т. д.

При непрерывном отображении $f\colon X \to Y$ образ открытого множества $G \subseteq X$ может не быть открытым в Y, а образ замкнутого множества $F \subseteq X$ может не быть замкнутым в Y. Например, рассмотрим в плоскости, снабженной прямоугольной системой координат, окружность S радиуса 1 с центром в начале координат и полуинтервал $X = [0 \leqslant x < 2\pi)$ оси абсцисс. Для любой точки $x \in X$ обозначим через fx точку окружности S, радиус-вектор которой наклонен к оси абсцисс под углом x. Этим определено взаимно однозначное непрерывное отображение $f\colon X \to S$ полуинтервала $X = [0, 2\pi)$ на окружность S, при котором образ полуинтервала $G = [0, 1)$, являющегося открытым множеством в пространстве $X = [0, 2\pi)$, не есть открытое множество в S, а образ полуинтервала $[\pi, 2\pi)$, являющегося замкнутым множеством в X, не есть замкнутое множество в S.

Определение 9. Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *открытым*, соответственно *замкнутым*, если для любого открытого $G \subseteq X$, соответственно замкнутого $F \subseteq X$, образ fG, соответственно fF, является открытым, соответственно замкнутым, множеством пространства Y.

Из определения сразу следует, что при замкнутом отображении $f\colon X \to Y$ малый образ $f^{\#}G$ открытого множества открыт.

Мы будем рассматривать лишь такие открытые и замкнутые отображения топологических пространств, которые вместе с тем являются непрерывными. Следует заметить, что среди непрерывных отображений открытые отображения образуют чрезвычайно специальный класс. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть непрерывные функции $y = fx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, осуществляющие открытые отображения отрезка $X = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ в себя. Эти функции имеют конечное число точек максимума и минимума на отрезке $[0, 1]$, причем принимают в точках максимума значение 1, а в точках минимума значение 0; в промежутках между двумя последовательными точками экстремума функция f монотонна.

Примером (в некотором смысле типичным) открытого отображения одной плоской области на другую могут служить отображения, осуществляемые аналитическими функциями комплексного переменного.

Несмотря на такой специальный характер открытых отображений, они представляют и для общей топологии большой интерес: оказывается, можно чрезвычайно широкие классы топологических пространств получить, рассматривая образы гораздо более простых пространств при открытых отображениях, — см. по этому поводу § 3, п. 5 этой главы, в особенности же гл. 9.

Положение замкнутых отображений в топологии — совершенно другое: мы увидим, что для очень важного класса пространств X и Y всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является замкнутым; в частности, это имеет место, если пространства X и Y определены как множества, лежащие в n-мерном эвклидовом пространстве R^n, причем X замкнуто и ограничено в R^n, а $Y \subseteq R^n$ совершенно произвольно.

Имеет место следующая характеристика замкнутых отображений:

Предложение 11. *Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда выполняется условие*:

(C^{-1}) *Для любого множества $M \subseteq Y$ и любой окрестности O множества $f^{-1}M$ существует такая окрестность V множества M, что $f^{-1}V \subseteq O$.*

Доказательство. 1°. Предположим, что отображение f замкнуто; рассмотрим множество $M \subseteq Y$ и окрестность O множества $f^{-1}M$. Множество $F = X \setminus O$ замкнуто в X, и $F \cap f^{-1}M = \Lambda$. Поэтому множество fF замкнуто в Y и $fF \cap M = \Lambda$. Окрестность $V = Y \setminus fF$ обладает свойством $f^{-1}V \cap F = \Lambda$, следовательно, $f^{-1}V \subseteq O$ — условие (C^{-1}) выполнено.

2°. Пусть для отображения f выполнено условие (C^{-1}). Предположим, что образ fF некоторого замкнутого в X множества F не замкнут в Y. Пусть $y \in [fF] \setminus fF$. Множество $X \setminus F$ является окрестностью множества $f^{-1}y$. Следовательно, существует такая окрестность V точки y, что $f^{-1}V \subseteq X \setminus F$. Но тогда $V \cap fF = \Lambda$, и поэтому $y \notin [fF]$. Полученное противоречие доказывает замкнутость отображения f, ч. и т. д.

Замечание 9. Из приведенного доказательства следует, что достаточно потребовать выполнения условия (C^{-1}) для одноточечных множеств $M \equiv y \in Y$, — это влечет за собою замкнутость отображения $f\colon X \to Y$ и, следовательно, выполнение условия (C^{-1}) для любого $M \subseteq Y$. Условие (C^{-1}), потребованное для одноточечных множеств $M \equiv y \in Y$, есть не что иное, как условие непрерывности многозначного отображения $f^{-1}\colon Y \to X$ (впервые явно сформулированное Гуревичем в 1926 г. и подробно изученное В. И. Пономаревым [1]). Поэтому мы можем сказать кратко:

Замкнутость отображения $f\colon X \to Y$ равносильна непрерывности обратного многозначного отображения $f^{-1}\colon Y \to X$.

Докажем относительно замкнутых (открытых) отображений еще следующее

Утверждение 1. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ пространства X в пространство Y замкнуто (открыто), то для любого множества $B \subseteq Y$ отображение $f\colon f^{-1}B \to B$ также замкнуто (открыто).*

Доказательство. Рассмотрим замкнутое (открытое) в $f^{-1}B$ множество T. Тогда в X существует замкнутое (открытое) множество F, в пересечении с $f^{-1}B$ дающее множество T. По условию множество fF замкнуто (открыто) в Y. Следовательно, замкнуто (открыто) в B множество

$$B \cap fF = f(f^{-1}B \cap F) = fT,$$

ч. и т. д.

Рассмотрим случай взаимно однозначных отображений $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y. Тогда определено и обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$. Рассмотренный выше пример отображения полуинтервала $X = [0, 2\pi)$ на окружность S показывает, что из непрерывности взаимно однозначного отображения f, вообще говоря, не следует непрерывность обратного отображения f^{-1}. Однако легко доказать

Предложение 12. *Если взаимно однозначное непрерывное отображение f пространства X на пространство Y замкнуто, то обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно (и замкнуто)* *).

Это следует из того, что прообраз всякого замкнутого множества $F \subseteq X$ при отображении $f^{-1}\colon Y \to X$ есть множество $(f^{-1})^{-1}F = fF \subseteq Y$, замкнутое в силу замкнутости отображения f.

Аналогично доказывается непрерывность отображения f^{-1}, обратного к взаимно однозначному, непрерывному и открытому отображению.

Определение 10. Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *топологическим* (или *гомеоморфным*) отображением X на Y, если f взаимно однозначно и если при этом оба отображения $f\colon X \to Y$ и $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывны **).

Другими словами: топологическое отображение пространства X на пространство Y — это такое взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, при котором множество всех открытых множеств пространства X отображается на множество всех открытых множеств пространства Y или — что то же — множество всех замкнутых множеств в X отображается на множество всех замкнутых множеств в Y.

---

*) Это частный случай предложения 11 (см. замечание 9 к нему).

**) Тогда каждое из отображений f и f^{-1} одновременно является и замкнутым и открытым.

Топологическое отображение f пространства X на какое-нибудь подпространство Y_0 пространства Y называется топологическим отображением пространства X в пространство Y. Пространства X и Y называются гомеоморфными между собою, если одно из этих пространств можно топологически отобразить на другое.

Введем еще один класс отображений, содержащий, как будет показано ниже, и класс замкнутых, и класс открытых отображений.

Определение 11 (Александров — Хопф [1]). Отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y называется *факторным*, если

(1) множество $V \subseteq Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда открыто в X множество $f^{-1}V$.

Очевидно, условие (1) эквивалентно условию

(2) множество $\Phi \subseteq Y$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда замкнуто в X множество $f^{-1}\Phi$.

Из определения факторных отображений сразу же следует их непрерывность.

Докажем

Предложение 13_G. *Непрерывное открытое отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y является факторным.*

Действительно, если множество V открыто в Y, то в силу непрерывности f множество $f^{-1}V$ открыто в X. Если же для множества $V \subseteq Y$ в пространстве X открыто множество $f^{-1}V$, то в силу открытости f множество $V = ff^{-1}V$ открыто в Y, ч. и т. д.

Аналогичным образом доказывается

Предложение 13_F. *Непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство Y факторно.*

Факторные отображения естественно возникают при так называемых факторизациях пространства X по некоторому его разбиению. Под разбиением пространства X понимается система $\mathfrak{M}$ его дизъюнктных подмножеств M, объединение которых есть все X.

Если определено разбиение $\mathfrak{M}$, то определено и естественное отображение $\mu\colon X \to \mathfrak{M}$, состоящее в том, что каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное содержащее x множество $M \in \mathfrak{M}$. Теперь множество $\mathfrak{M}$ превращаем в топологическое пространство, объявляя открытым в пространстве $\mathfrak{M}$ всякое множество $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, прообраз $\mu^{-1}\mathfrak{N}$ которого при естественном отображении $\mu\colon X \to \mathfrak{M}$ является открытым множеством пространства X *). Очевидно, ту же самую топологию на $\mathfrak{M}$ мы

*) Проверка того, что на $\mathfrak{M}$ задана топология, предоставляется читателю.

получили бы, называя замкнутым в $\mathfrak{M}$ всякое множество $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, прообраз $\mu^{-1}\mathfrak{N}$ которого замкнут в X. Эта топология называется факторной топологией на множестве $\mathfrak{M}$ (дизъюнктных подмножеств пространства X, дающих в сумме все X).

Очевидно, что при факторной топологии в $\mathfrak{M}$ естественное отображение μ: $X \to \mathfrak{M}$ является факторным и, следовательно, непрерывным отображением пространства X в пространство $\mathfrak{M}$. Само пространство $\mathfrak{M}$ называется при этом пространством разбиения $\mathfrak{M}$ или фактор-пространством X по разбиению $\mathfrak{M}$ *). Очевидно также, что условие замкнутости в X всех $M \in \mathfrak{M}$ равносильно условию замкнутости всех одноточечных множеств пространства $\mathfrak{M}$; это последнее условие выражают, говоря, что $\mathfrak{M}$ есть T_1-пространство (см. § 5, п. 1).

§ 2. Базы и вес топологических пространств

1. Определение сети, в частности базы, топологического пространства. Определение 1. Система $\Sigma = \{M\}$ каких-либо множеств M, лежащих в топологическом пространстве X, называется *сетью* пространства X (в смысле Архангельского [1]), если каждое открытое в X множество пространства X есть объединение некоторых множеств $M \in \Sigma$. Сеть, элементы которой суть открытые множества пространства X, называется *базой* этого пространства.

Предложение 1. *Для того чтобы данная система множеств $\Sigma = \{M\}$ была сетью пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox существовало такое множество $M \in \Sigma$, что $x \in M \subseteq Ox$.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{M\}$ есть сеть. Берем произвольно точку $x \in X$ и ее окрестность Ox. Множество Ox открыто и, значит, является суммой некоторых $M \in \Sigma$; значит, существует хотя бы одно слагаемое $M_x \in \Sigma$ этой суммы, содержащее точку x. Очевидно, $x \in M_x \subseteq Ox$. Итак, необходимость нашего условия доказана. Для доказательства достаточности берем произвольное открытое $G \subseteq X$. Множество G есть окрестность любой точки $x \in G$; поэтому существует множество M_x, удовлетворяющее условию $x \in M_x \subseteq G$; сумма всех этих M_x (по всем $x \in G$), очевидно, есть G.

Замечание 1. Очевидно, система всех одноточечных множеств пространства X есть сеть, а система $\mathfrak{G}$ всех открытых множеств не только сеть, но и база пространства X.

---

*) Точнее, фактор-пространством пространства X, порожденным следующим отношением эквивалентности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{M})$: две точки $x \in X$, $x' \in X$ эквивалентны, если они принадлежат к одному и тому же множеству $M \in \mathfrak{M}$. Теперь можно (и естественно) обозначить фактор-пространство $\mathfrak{M}$ через $X/\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$.

Определение 2. Минимальное кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы пространства X, обозначается через wX и называется *весом* этого пространства.

Пространства счетного веса, или — как их обычно называют — пространства со счетной базой, образуют один из важнейших классов топологических пространств. В первый период развития теории размерности в ней рассматривались исключительно пространства со счетной базой. Требование, чтобы пространство имело счетную базу, в те времена называлось (а иногда называется и сейчас) *второй аксиомой счетности* (Хаусдорф).

Определение 3. Система множеств $\Sigma_{x_0} = \{M\}$ называется *сетью в данной точке* $x_0 \in X$, если для каждой окрестности этой точки Ox_0 имеется такое $M \in \Sigma_{x_0}$, что $x_0 \in M \subseteq Ox_0$. Особенно важен случай *базы пространства в точке* x — это сеть в точке x, состоящая из открытых множеств, т. е. из окрестностей данной точки x; поэтому база в точке x называется также *определяющей системой окрестностей точки* x в пространстве X. Пространства, в которых каждая точка имеет счетную (или конечную) определяющую систему окрестностей, Хаусдорф назвал *пространствами с первой аксиомой счетности*. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-нибудь базы пространства X в его точке x, называется *характером пространства X в точке x* и обозначается через $\chi_x X$ или через $w_x X$.

Замечание 2. Если $X_0 \subset X$, то $w_x X_0 \leqslant w_x X$ для любой точки $x \in X_0$ и $wX_0 \leqslant wX$. Отсюда, в частности, следует, что как первая, так и вторая аксиомы счетности выражают наследственные свойства пространства.

Важнейшим предложением, касающимся баз и веса пространств, является

Теорема 1 (Александров — Урысон [1]). *Если вес пространства X равен $\mathfrak{m}$, то всякая база $\mathfrak{B}$ пространства X содержит подмножество $\mathfrak{B}'$ мощности $\mathfrak{m}$, также являющееся базой пространства X.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь базу $\mathfrak{B}_0$ пространства X, имеющую мощность $\mathfrak{m} = wX$. Обозначим через U элементы базы $\mathfrak{B}_0$. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная база пространства X. Нам надо выделить из базы $\mathfrak{B}$ базу $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, имеющую мощность $\mathfrak{m}$.

Начнем с того, что какую-нибудь пару (U_α, U_β) элементов базы $\mathfrak{B}_0$ назовем отмеченной, если существует хотя бы одно $V \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющее включению

$$U_\alpha \subseteq V \subseteq U_\beta. \tag{1}$$

Множество всех отмеченных пар имеет мощность не большую, чем мощность всех вообще пар базы $\mathfrak{B}_0$, т. е. мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.

Для каждой отмеченной пары (U_α, U_β) выберем по одному элементу $V \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющему условию (1). Множество $\mathfrak{B}'$ отмеченных таким образом элементов V базы $\mathfrak{B}$ также имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$. Поэтому достаточно доказать, что множество $\mathfrak{B}'$ есть база пространства X.

Итак, пусть даны точка $x \in X$ и ее окрестность Ox. Требуется найти такое $V' \in \mathfrak{B}'$, чтобы было

$$x \in V' \subseteq Ox. \tag{2}$$

Так как $\mathfrak{B}_0$ — база, то существует такое $U_\beta \in \mathfrak{B}_0$, что $x \in U_\beta \subseteq Ox$. Но базой является и $\mathfrak{B}$; поэтому существует V, удовлетворяющее включению

$$x \in V \subseteq U_\beta.$$

Наконец, можно найти такое $U_\alpha \in \mathfrak{B}_0$, что

$$x \in U_\alpha \subseteq V.$$

Отсюда следует, что пара (U_α, U_β) отмеченная; поэтому существует $V' \in \mathfrak{B}'$, удовлетворяющее условию $U_\alpha \subseteq V' \subseteq U_\beta$ и тем более условию (2), ч. и т. д.

Понятие базы позволяет выделить следующие важные классы пространств:

1) *Полурегулярные пространства* — это пространства, в которых канонические открытые множества образуют базу.

2) *Индуктивно нульмерные пространства*, т. е. такие пространства, в которых (не только *ко*-множества, но даже) открыто-замкнутые множества образуют базу.

В индуктивно нульмерных пространствах каждое открытое множество есть сумма, а каждое замкнутое множество — пересечение открыто-замкнутых множеств.

2. Определение топологии в множестве X посредством указания системы подмножеств, являющейся базой. Определение топологии посредством окрестностей. Определить топологию в множестве X, т. е. превратить X в топологическое пространство X, — значит определить, какие множества мы объявляем открытыми (при этом должны быть соблюдены условия I_G, II_G п. 1 § 1)*). Однако указать все открытые множества часто бывает затруднительно и неудобно, в многих конкретных случаях бывает удобно непосредственно указывать не все открытые множества подлежащего определению топологического пространства X, а только некоторые из них, а именно множества, которые составят

*) Вместо этого можно было бы, конечно, указать систему множеств, которые будут замкнутыми в определяемом нами топологическом пространстве, или определить для каждого множества $M \subseteq X$ его замыкание — каждый раз с соблюдением соответствующих аксиом.

одну из баз этого пространства (остальные открытые множества определятся как всевозможные суммы данных множеств).

Такой способ определения топологии основывается на следующем предложении:

Предложение 2. *Пусть в множестве X, состоящем из элементов любой природы, называемых точками, даны подмножества Γ_α, система которых, обозначаемая нами через S, обладает следующими свойствами:*

(А) *Каждая точка $x \in X$ содержится по крайней мере в одном $\Gamma_\alpha \in S$.*

(Б) *Если точка x содержится и в $\Gamma_\alpha \in S$ и в $\Gamma_\beta \in S$, то имеется некоторое $\Gamma_\gamma \in S$ такое, что $x \in \Gamma_\gamma \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$.*

Если назвать пустое множество Λ и всевозможные суммы множеств Γ_α открытыми множествами, то аксиомы I_G и II_G топологического пространства окажутся выполненными и в полученном топологическом пространстве X система S будет базой.

В самом деле, из наших предположений сразу следует, что сумма любого числа открытых множеств, а также все пространство X и пустое множество являются открытыми. Докажем, что пересечение двух (а следовательно, и любого конечного числа) открытых множеств открыто: этим будет доказано, что X — топологическое пространство, после чего уже не потребует никакого доказательства утверждение, что S есть база пространства X.

Но если даны два открытых множества $\Gamma = \bigcup_\alpha \Gamma_\alpha$ и $\Gamma' = \bigcup_\beta \Gamma_\beta$, то $\Gamma \cap \Gamma'$ есть сумма множеств вида $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$; поэтому достаточно показать, что всякое множество этого вида открыто. Последнее же утверждение следует из того, что, какова бы ни была точка $x \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$, имеется множество $\Gamma_\gamma \in S$ такое, что $x \in \Gamma_\gamma \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ (условие (Б)); поэтому множество $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ есть сумма всех содержащихся в нем множеств $\Gamma_\gamma \in S$ и, следовательно, открыто.

Часто, например в первом издании «Теории множеств» Хаусдорфа, дается не просто система S множеств Γ_α, удовлетворяющая условиям (А) и (Б), а система множеств $U(x)$, поставленных в соответствие точкам $x \in X$ и называемых окрестностями этих точек *), причем предписывается выполнение трех условий:

А) Каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие по крайней мере одно множество $U(x)$ («каждая точка $x \in X$ имеет

*) Однозначность при этом не требуется ни в ту, ни в другую сторону: одно и то же множество U может быть отнесено в качестве окрестности $U(x)$ различным точкам (например, всем $x \in U$), и каждая точка имеет, вообще говоря, бесконечно много окрестностей.

хотя бы одну окрестность»), причем всегда

$$x \in U(x).$$

Б) Для любых двух окрестностей $U_1(x)$ и $U_2(x)$ одной и той же точки $x \in X$ существует $U_3(x) \subseteq U_1(x) \cap U_2(x)$.

В) Каково бы ни было $y \in U(x)$, существует

$$U(y) \subseteq U(x).$$

Если назвать открытым всякое множество $\Gamma \subseteq X$ такое, что для любой точки $x \in \Gamma$ существует $U(x) \subseteq \Gamma$, то получится топологическое пространство, и система S всех множеств $U(x)$ (рассматриваемых независимо от того, каким точкам x они поставлены в соответствие) есть база этого пространства.

Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что в силу условия В) всякое множество $U(x)$ и сумма любого числа множеств $U(x)$ открыты. Далее, если точка x содержится в пересечении $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ открытых множеств Γ_1 и Γ_2, то по условию Б) в Γ содержится некоторая окрестность точки x, следовательно, Γ — открытое множество. Обратно, если дано какое-нибудь открытое Γ, то, беря для каждой точки $x \in \Gamma$ некоторое $U(x) \subset \Gamma$, видим, что Γ есть сумма некоторых множеств $U(x)$. Итак, непустые открытые множества могут быть просто определены как суммы всевозможных множеств $U(x)$ системы S; другими словами, оказываются выполненными условия предложения 2, чем и доказывается наше утверждение.

Множества $U(x)$, отнесенные точке $x \in X$, при условии соблюдения условий А), Б), В) образуют то, что Хаусдорф называл системой окрестностей в пространстве X, а задание при их помощи топологии называется заданием топологии при помощи системы окрестностей.

Пример 1. На числовой прямой R^1 топологию можно задать, выделив для каждой точки x в качестве определяющих ее окрестностей все интервалы вида $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$.

Наряду с понятием базы часто удобно пользоваться понятием предбазы топологического пространства.

Определение 4. Система Σ открытых в топологическом пространстве X множеств O_α называется *предбазой* пространства X, если множества, являющиеся пересечениями $O_{\alpha_1} \cap \ldots \cap O_{\alpha_s}$ всевозможных конечных подсистем системы Σ, образуют базу пространства X. Очевидно, всякая база пространства является и его предбазой.

Пример 2. На числовой прямой бесконечные интервалы вида

$$(-\infty, b), \quad (a, +\infty)$$

образуют предбазу, не образуя базы.

Предложение 3. *Отображение $f\colon X \to Y$ пространства X в пространство Y непрерывно, если прообразы $f^{-1}O_\alpha$ элементов некоторой предбазы $\sum = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства Y открыты в пространстве X.*

Доказательство. Положим

$$O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i}.$$

По условию множества $O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ образуют базу $\mathfrak{B}$ пространства Y. Очевидно,

$$f^{-1}O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = f^{-1} \bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} f^{-1}O_{\alpha_i}.$$

Поэтому прообразы элементов базы $\mathfrak{B}$ открыты в X. Возьмем открытое в Y множество O. Оно является суммой элементов некоторой подсистемы $\mathfrak{B}'$ системы $\mathfrak{B}$, т. е.

$$O = \bigcup_{\mathfrak{B}'} O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Но тогда множество

$$f^{-1}O = f^{-1} \bigcup_{\mathfrak{B}'} O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcup_{\mathfrak{B}'} f^{-1}O_{\alpha_1 \dots \alpha_s},$$

являясь суммой открытых в X множеств, открыто в X. Непрерывность отображения f доказана.

Частным случаем предложения 3 является

Предложение 4. *Для того чтобы взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство Y было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы при этом отображении некоторая база пространства X отображалась на базу пространства Y.*

Доказательство предоставляется читателю.

§ 3. Метрические и метризуемые пространства*)

1. Основные определения. Пусть X — произвольное множество; его элементы $x \in X$ будем называть точками. Ввести в множество X метрику — значит, определить на множестве всех пар (x, x'), $x \in X$, $x' \in X$, неотрицательную функцию $\rho(x, x')$ — «метрику», удовлетворяющую следующим условиям — «аксиомам» метрического пространства:

*) Введение в математику этих понятий составляет непреходящую заслугу французского математика Фреше (Maurice Fréchet).

1°. $\rho(x, x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ (аксиома тождества).

2°. $\rho(x, x') = \rho(x', x)$ (аксиома симметрии).

3°. $\rho(x, x') + \rho(x', x'') \geqslant \rho(x, x'')$ для любых трех точек x, x', x'' (аксиома треугольника).

Множество X с введенной в нем метрикой $\rho = \rho(x, x')$ называется метрическим пространством и обозначается через (X, ρ), обычно просто через X.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными свойствами метрических пространств: они входят в настоящее время в обязательную программу университетского курса по специальности «математика». Поэтому ограничимся лишь самым кратким напоминанием основных относящихся сюда понятий.

Если $M \subseteq X$, то величина

$$\operatorname{diam} M = \sup_{x \in M,\ x' \in M'} \rho(x, x') \leqslant \infty$$

называется диаметром множества M в метрическом пространстве (X, ρ). Если $\operatorname{diam} M < \infty$, то множество M называется ограниченным (в метрическом пространстве (X, ρ)).

Для любой точки $x_0 \in X$ определено расстояние $\rho(x_0, M)$ как

$$\rho(x_0, M) = \inf_{x \in M} \rho(x_0, x).$$

Шаровой (сферической) окрестностью с центром x и радиусом $\varepsilon > 0$ (или сферической ε-окрестностью точки $x \in X$) называется множество $O(x, \varepsilon)$ (или $O_\varepsilon x$) всех точек $x' \in X$, для которых $\rho(x, x') < \varepsilon$. Если $x' \in O(x, \varepsilon)$, то $\delta = \varepsilon - \rho(x, x') > 0$ и $O(x', \delta) \subseteq O(x, \varepsilon)$. Отсюда следует, что если $x \in O(x_1, \varepsilon_1) \cap \cap O(x_2, \varepsilon_2)$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $O(x, \varepsilon) \subseteq O(x_1, \varepsilon_1) \cap \cap O(x_2, \varepsilon_2)$.

Кроме того, очевидно, $x \in O(x, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Значит *), называя «открытыми» миожествами в метрическом пространстве (X, ρ) все множества, являющиеся суммами произвольного числа множеств вида $O(x, \varepsilon)$, а также множества X и Λ, мы введем в множество X топологию $\mathfrak{G}_\rho$ и этим превратим это множество в топологическое пространство $(X, \mathfrak{G}_\rho)$ (базой которого является множество всех шаровых окрестностей). Именно это топологическое пространство и только его имеют в виду, когда говорят, что всякое метрическое пространство является в то же время и топологическим.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ точек метрического пространства X называется сходящейся к точке x_0, если числовая последовательиость $\rho(x_0, x_k)$ сходится к нулю.

Легко проверяется

*) § 2, предложение 2.

Предложение 1. *Тогда и только тогда* $x_0 \in [M]$ (*для* $x_0 \in X$ *и множества* M *в метрическом пространстве* X), *когда* $\rho(x_0, M) = 0$ *или, что то же, когда в* M *существует последовательность точек* $x_k \in M$, $k = 1, 2, \ldots$, *сходящаяся к точке* x_0.

Применяя к случаю метрического пространства Y общее определение непрерывности отображения $f: X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y, получаем

Предложение 2. *Отображение топологического пространства* X *в метрическое пространство* Y *тогда и только тогда непрерывно в точке* $x_0 \in X$, *когда ко всякому* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* $Ox_0 \subseteq X$, *что для всех* $x \in Ox_0$ *имеем* $\rho(fx_0, fx) < \varepsilon$. *Если и* X — *метрическое пространство, то непрерывность отображения* f: $X \to Y$ *в точке* x_0 *означает, что ко всякому* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из* $\rho(x_0, x) < \delta$ *следует* $\rho(fx_0, fx) < \varepsilon$.

Из предложений 1 и 2 следует

Предложение 3. *Отображение* x. $X \to Y$ *метрического пространства* X *в метрическое пространство* Y *тогда и только тогда непрерывно в точке* $x_0 \in X$, *когда всякая последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ *точек* $x_k \in X$, *сходящаяся к точке* x_0, *при отображении* f *переходит в последовательность точек* $fx_k = y_k$, *сходящуюся к точке* fx_0.

Если D — произвольное множество, всюду плотное в метрическом пространстве X, а P — множество положительных рациональных чисел (в качестве P достаточно взять даже любую последовательность положительных чисел, сходящуюся к нулю), то совокупность всех шаровых окрестностей $O(d, r)$, где $d \in D$ и $r \in P$, образует базу пространства X; отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы метрическое пространство имело счетную базу, не только необходимо, но и достаточно, чтобы в нем было всюду плотным некоторое счетное множество точек.

Отметим еще одно утверждение: для того чтобы множество $\mathfrak{B}$ (открытых) множеств метрического пространства X было сетью, соответственно базой, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x \in X$ содержалась в сколь угодно малом по диаметру множестве $B \in \mathfrak{B}$.

2. Полные метрические пространства. Метрическое пространство (X_0, ρ_0) называется подпространством метрического пространства (X, ρ), если $X_0 \subseteq X$ и для любых двух точек x, x' множества X_0 имеем $\rho_0(x, x') = \rho(x, x')$.

Если X — метрическое пространство, то любое множество $X_0 \subseteq X$ обычно рассматривается как подпространство пространства X.

Если в метрическом пространстве X последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

сходится (к какой-нибудь точке x_0), то она является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши: ко всякому $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число k_0, что для $k > k_0$, $k' > k_0$ всегда $\rho(x_k, x_{k'}) < \varepsilon$. Если верно и обратное утверждение, т. е. если всякая последовательность, удовлетворяющая условию Коши, сходится, то пространство X, как известно, называется полным (Фреше).

Эквивалентное определение: метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда в нем убывающая последовательность непустых замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Предоставляем читателю доказательство эквивалентности этих двух определений полноты метрического пространства.

Всякое метрическое пространство X является всюду плотным подмножеством некоторого полного метрического пространства — полного метрического расширения (пополнения) $\tilde{X}$ пространства X (Хаусдорф). Для построения пространства $\tilde{X}$ назовем конфинальными (Хаусдорф) две фундаментальные последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots$ в пространстве X, если $\rho(x_k, x'_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Множество всех фундаментальных последовательностей распадается на классы конфинальных между собою последовательностей. В множество $\tilde{X}$ этих классов вводится метрика следующим образом: если ξ и ξ' — два класса, то берем какие-нибудь фундаментальные последовательности $\{x_k\} \in \xi$ и $\{x'_k\} \in \xi'$, являющиеся соответственно элементами классов ξ и ξ', и полагаем

$$\rho(\xi, \xi') = \lim_{k \to \infty} \rho(x_k, x'_k).$$

Легко проверить, что предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$ соответственно в классах ξ и ξ', так что число $\rho(\xi, \xi')$ определено. Легко проверяется также, что расстояние $\rho(\xi, \xi')$ удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства, так что $\tilde{X}$ есть метрическое пространство. Отождествляя каждую точку $x \in X$ с классом фундаментальных последовательностей, конфинальных последовательности, состоящей из одной точки $x_k = x$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$, можем считать, что $X \subseteq \tilde{X}$; при этом метрическое пространство $\tilde{X}$ является полным, а X — его всюду плотным подпространством.

Следующее предложение имеет многочисленные применения (в частности, в гл. 4):

Теорема 2. *Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots$ — открытые множества в непустом полном метрическом пространстве X. Если* *каждое из множеств G_k всюду плотно в X, то их пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \Delta$ также всюду плотно в X (и, значит, непусто).*

Доказательство. Требуется доказать, что при любом выборе открытого в X множества $\Gamma \neq \Lambda$ множество $\Gamma \cap \Delta$ непусто. Так как G_1 всюду плотно в X, то $\Gamma \cap G_1$ — непустое открытое множество. Берем в нем точку x_1 и шаровую окрестность $O(x_1, \varepsilon_1)$ столь малого радиуса ε_1, чтобы $[O(x_1, \varepsilon_1)] \subseteq \Gamma \cap G_1$ и $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. Так как G_2 всюду плотно в X, то открытое множество $O(x_1, \varepsilon_1) \cap G_2$ непусто. Берем в нем точку x_2 и такую шаровую окрестность $O(x_2, \varepsilon_2)$, что $[O(x_2, \varepsilon_2)] \subseteq O(x_1, \varepsilon_1)$ и $\varepsilon_2 < \frac{1}{4}$. Продолжая рассуждать таким образом, получим последовательность шаровых окрестностей $O(x_k, \varepsilon_k) = U_k$, удовлетворяющую условиям

$$[O(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1})] \subseteq \Gamma \cap G_{k+1} \cap O(x_k, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k < \frac{1}{2^k}.$$

Поэтому непустое пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} [U_k]$ (состоящее из единственной точки) лежит в $\Gamma \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, ч. и т. д.

3. Метризуемые пространства. Топологическое пространство $(X, \mathfrak{G})$ называется *метризуемым*, если во множество X можно ввести такую метрику ρ, что топология $\mathfrak{G}_\rho$, порожденная во множестве X метрикой ρ, совпадает с топологией $\mathfrak{G}$, данной в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{G})$. Одна и та же топология в данном множестве X может быть порождена различными метриками.

Вероятно, важнейшим метрическим пространством является эвклидова числовая прямая, т. е. множество всех действительных чисел с естественной метрикой ρ:

(1) $\rho(x, x') = |x - x'|$ для любых чисел x, x'.

Порожденная этой метрикой топология $\mathfrak{G}$ есть, очевидно, топология числовой прямой, определенная нами в § 1, п. 2. Но, рассматривая числовую прямую как ось абсцисс некоторой прямоугольной координатной системы OXY на плоскости, можно взять, например, точку $M_0 = (0, 1)$ на плоскости и определить — для любых двух точек x, x' оси абсцисс — расстояние $\rho_0(x, x')$ как угол между лучами $\overrightarrow{M_0x}$ и $\overrightarrow{M_0x'}$. Легко проверить что метрика ρ_0, введенная таким образом в множество X всех действительных чисел, превращает это множество в метрическое пространство (X, ρ_0), ограниченное (так как $\rho(x, x') < \pi$

для любых x, x') и неполное (тогда как эвклидова прямая с обычной метрикой (1) есть полное метрическое пространство в силу классической теоремы Коши о сходимости числовых последовательностей). Итак, одна и та же топология $\mathfrak{G}$ в данном множестве может быть определена двумя различными метриками ρ и ρ_0, причем может случиться, что одно из метрических пространств (X, ρ), (X, ρ_0) — полное, а другое — нет.

Метризуемое пространство, являющееся полным хотя бы в одной метрике, порождающей его топологию, называется топологически полным метризуемым пространством *). Множество всех иррациональных чисел, рассматриваемое как подпространство эвклидовой числовой прямой (т. е. в метрике, даваемой формулой (1)), не является полным метрическим пространством, но оно является топологически полным, так как гомеоморфно так называемому бэровскому пространству, точками которого являются всевозможные последовательности $\xi = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ натуральных чисел с метрикой ρ, определенной для

$$\xi = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots), \quad \xi' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$$

формулой

$$\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{k(\xi, \xi')},$$

где $k(\xi, \xi')$ — наименьшее натуральное число k, для которого $n'_k \neq n_k$ (диаметр бэровского пространства, очевидно, равен 1).

Замечание 1. Всякое метрическое пространство (X, ρ) гомеоморфно метрическому пространству (X, ρ') диаметра <1.

Достаточно для любых двух точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ положить

$$\rho'(x_1, x_2) = \frac{\rho(x_1, x_2)}{1 + \rho(x_1, x_2)}.$$

Пространства (X, ρ) и (X, ρ') гомеоморфны между собою (это следует из того, что всякая последовательность точек $\{x_k\}$, сходящаяся к точке x_0 в одной из двух метрик ρ, ρ', сходится к этой точке и в другой метрике).

Подпространство $\mathfrak{R}^1$ числовой прямой может служить примером топологически неполного метризуемого пространства: топология в пространстве $\mathfrak{R}^1$ не может быть порождена никакой полной метрикой, что видно хотя бы из того, что в $\mathfrak{R}^1$ существует счетная система всюду плотных открытых множеств G_1, G_2, $\ldots$, G_k, $\ldots$ с пустым пересечением: чтобы получить такую

*) Можно сказать и так: метрическое пространство X называется топологически полным, если оно гомеоморфно полному метрическому пространству Y.

систему, достаточно занумеровать каким-нибудь способом все рациональные числа:

$$r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots,$$

и положить $G_k = \mathfrak{R}^1 \setminus r_k$.

Замечание 2. Всякое метризуемое пространство $(X, \mathfrak{G})$ есть пространство с первой аксиомой счетности: если ρ — какая-нибудь метрика (порождающая в X заданную топологию $\mathfrak{G}$), то в качестве определяющей системы окрестностей для любой точки $x \in X$ можно взять систему всех шаровых окрестностей $O(x, r)$, где r пробегает все положительные рациональные числа или даже одни лишь числа вида $r = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Сделаем еще следующее очевидное

Замечание 3. Если в какой-нибудь метрике ρ, задающей топологию данного метризуемого пространства $(X, \mathfrak{G})$, последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, сходится в точке $x \in X$, то она сходится к этой же точке и во всякой метрике ρ', задающей в множестве X ту же топологию $\mathfrak{G}$.

4. Дальнейшие примеры метрических пространств. Вероятно, читатель знает определение n-мерного эвклидова пространства R^n как n-мерного линейного пространства, в котором для любых двух элементов определено скалярное произведение, удовлетворяющее обычным аксиомам. В предположении, что в пространстве выбран ортогональный базис, можно определить точки пространства R^n как наборы (последовательности) $(x_1, \ldots, x_n)$, состоящие из n действительных чисел, а расстояние между двумя точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ задать формулой

$$\rho(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2} \ ^{*)}.$$

Проверка аксиомы треугольника для введенной таким образом метрики производится легко при помощи так называемого неравенства Коши — Буняковского, а именно:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Определенное таким образом метрическое пространство оказывается полным.

Шаровые окрестности $O(x, \varepsilon)$ в пространстве R^n называются открытыми n-мерными шарами радиуса ε с центром в x; их

---

*) Можно, не пользуясь общими понятиями, рассматривать только что сказанное как определение «арифметического n-мерного пространства» — только с ним мы и будем дальше иметь дело. Заметим, что векторы n-мерного пространства можно определить также как наборы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ из n действительных чисел.

замыкания $[O(x, \varepsilon)]$ называются замкнутыми шарами. Граница $S^{n-1}(x, \varepsilon) = [O(x, \varepsilon)] \setminus O(x, \varepsilon)$ называется $(n-1)$-мерной сферой с центром x и радиусом ε.

Непосредственным обобщением n-мерного эвклидова пространства R^n является гильбертово пространство R^∞. Его точки суть, по определению, бесконечные последовательности

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$$

действительных чисел, удовлетворяющие дополнительному условию: ряд $\sum x_k^2$ должен сходиться.

Посредством того же неравенства Коши — Буняковского, обобщенного на случай бесконечных числовых последовательностей, т. е. неравенства *)

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2},$$

убеждаемся, что из сходимости рядов $\sum x_k^2$ и $\sum y_k^2$ вытекает и сходимость ряда $\sum (x_k - y_k)^2$, так что для любых двух точек

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$$

гильбертова пространства определено расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Этим гильбертово пространство определено как метрическое пространство. Снова переходом к пределу от n к ∞ доказывается полнота гильбертова пространства.

С полным основанием гильбертово пространство иногда называется счетномерным эвклидовым пространством.

Наконец, легко определить метрическое пространство R для несчетного кардинального числа $\mathfrak{m}$ — оно называется $\mathfrak{m}$-мерным гильбертовым или эвклидовым пространством.

Для определения пространства $R^{\mathfrak{m}}$ возьмем какое-нибудь множество $A = \{\alpha\}$ мощности $\mathfrak{m}$. Назовем его множеством индексов, а элементы α этого множества — индексами; при конечном $\mathfrak{m} = n$ или $\mathfrak{m} = \aleph_0$ множеством индексов было множество чисел $1, 2, \ldots, n$, соответственно множество всех натуральных чисел. Каждому $\alpha \in A$ поставим в соответствие некоторое действительное число x_α. Полученный набор $x = \{x_\alpha\}$ есть не что

*) Его легко доказать, применяя переход к пределу в неравенстве $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.

иное, как отображение $x\colon A \to R^1$ множества $A = \{\alpha\}$ в множество всех действительных чисел R^1 (это особенно ясно, если вместо $x = \{x_\alpha\}$ написать просто $x = x(\alpha)$). Мы рассматриваем наборы $x = \{x_\alpha\}$, подчиненные следующему дополнительному условию: множество тех $\alpha \in A$, для которых $x_\alpha \neq 0$, не более чем счетно, и при этом сумма $\sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha^2$ конечна. Наборы $x = \{x_\alpha\}$, подчиненные этому условию, называем точками $x \in R^{\mathfrak{m}}$. Для двух точек $x = \{x_\alpha\}$ и $y = \{y_\alpha\}$ снова определено число

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum (x_\alpha - y_\alpha)^2},$$

где суммирование распространено на (не более чем счетное!) множество тех $\alpha \in A$, для которых хотя бы одно из чисел x_α или y_α отлично от нуля.

Только что определенное расстояние удовлетворяет аксиоме треугольника, что после всего сказанного легко проверяется; две другие аксиомы метрического пространства, очевидно, также выполнены. Итак, мы определили метрическое пространство $R^{\mathfrak{m}}$, эвклидово (или гильбертово) $\mathfrak{m}$-мерное пространство для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$.

5. Пространства отображений. Определение 1. Последовательность отображений

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$$

какого-нибудь множества X в метрическое пространство Y называется *равномерно сходящейся* к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство $\rho(fx, f_kx) < \varepsilon$.

Пусть $C \equiv C(X, Y)$ есть множество всех непрерывных отображений топологического пространства X в метрическое пространство Y. Докажем, что множество C удовлетворяет следующему условию:

(А) Если последовательность $\{f_k\}$ отображений $f_k\colon X \to Y$ $(f_k \in C)$ равномерно сходится к отображению f, то $f \in C$.

Другими словами, докажем

Предложение 4. *Отображение $f\colon X \to Y$, являющееся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений топологического пространства X в метрическое пространство Y, есть непрерывное отображение.*

Доказательство. Берем произвольно точку $x_0 \in X$ и точку $y_0 = fx_0 \in Y$. Для доказательства непрерывности отображения f в точке x_0 выбираем произвольное $\varepsilon > 0$ и определяем натуральное число k_0 так, чтобы было $\rho(fx, f_kx) < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всех $x \in X$ и $k \geqslant k_0$. Далее находим такую окрестность Ox_0 точки x_0, чтобы для всех $x \in Ox_0$ было $\rho(f_k x_0, f_k x) < \varepsilon/3$. Тогда для любого $x \in Ox_0$ имеем

$$\rho(fx_0, fx) \leqslant \rho(fx_0, f_{k_0}x_0) + \rho(f_{k_0}x_0, f_{k_0}x) + \rho(f_{k_0}x, fx) < \\ < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

ч. и т. д.

Рассмотрим теперь какое-нибудь семейство C отображений произвольного множества X в метрическое пространство Y, удовлетворяющее кроме условия (А) еще и условию

(Б) Каждое отображение $f: X \to Y$ ограничено, т. е. диаметр множества $fX \subseteq Y$ в метрическом пространстве Y есть конечное число.

В множество C при этих условиях можно ввести метрику следующим образом: для $f \in C$, $g \in C$ полагаем

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(fx, gx).$$

Аксиомы тождества и симметрии очевидно выполнены. Докажем, что выполнена и аксиома треугольника. Пусть $f_1 \in C$, $f_2 \in C$, $f_3 \in C$ и $\rho(f_1, f_2) = d_1$, $\rho(f_2, f_3) = d_2$. Требуется доказать, что $\rho(f_1, f_3) \leqslant d_1 + d_2$.

Для любой точкн $x \in X$ имеем

$$\rho(f_1x, f_2x) \leqslant d_1, \qquad \rho(f_2x, f_3x) \leqslant d_2;$$

значит,

$$\rho(f_1x, f_3x) \leqslant d_1 + d_2$$

и

$$\rho(f_1, f_3) = \sup_{x \in X} \rho(f_1x, f_3x) \leqslant d_1 + d_2,$$

ч. и т. д.

Итак, множество C с только что введенной в него метрикой есть метрическое пространство. Докажем, что это пространство полное, если полным является пространство Y. Для этого прежде всего заметим, что сходимость последовательности $\{f_k\}$ в пространстве C есть, очевидно, равномерная сходимость отображений $f_k: X \to Y$.

Пусть теперь $\{f_k\}$ есть фундаментальная последовательность в метрическом пространстве C. Тогда для любого $x \in X$ последовательность $\{f_k x\}$ есть фундаментальная последовательность точек полного метрического пространства Y; следовательно, существует точка $fx = \lim f_k x \in Y$ и определено отображение $f: X \to Y$. Так как последовательность $\{f_k\}$ фундаментальна в метрическом пространстве C, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое k_0, что при $k \geqslant k_0$, $k' \geqslant k_0$ имеем $\rho(f_k x, f_{k'} x) \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$. Но тогда (переходя к пределу при $k' \to \infty$) имеем и $\rho(fx, f_k x) \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$, т. е. последовательность отображений $\{f_k\}$ равномерно сходится к отображению $f\colon X \to Y$ и это отображение ограничено; значит, согласно условию (A) имеем $f \in C$ и $\{f_k\}$ сходится в C к f. Полнота пространства C этим доказана.

В частности, имеем

Предложение 5. *Пространство $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений топологического пространства X в ограниченное полное метрическое пространство Y (в частности, в любое замкнутое ограниченное множество n-мерного эвклидова пространства) есть полное метрическое пространство.*

В связи со сказанным в конце п. 7 § 1 сформулируем еще следующую теорему Пономарева [2]:

Все топологические пространства Y, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, — и только они — являются образами метрических пространств X при непрерывных открытых отображениях. При этом в качестве X всегда можно взять индуктивно нульмерное метрическое пространство того же веса, что и Y.

§ 4. Связность

1. Определения связного, а также (вполне) несвязного и индуктивно нульмерного топологического пространства были даны в § 1, пп. 1, 2 и в § 2, п. 1.

Там же, в § 1, п. 5, была определена и «хаусдорфова производная» $H(M, N) = ([M] \cap N) \cup (M \cap [N])$ пары множеств M и N, лежащих в топологическом пространстве X.

Имеет место

Предложение 1 (условие связности Хаусдорфа). *Множество X_0, лежащее в пространстве X, тогда и только тогда несвязно, когда может быть представлено в виде суммы $X_0 = A \cup B$, где $A \neq \Lambda \neq B$ и $H(A, B) = \Lambda$.*

В самом деле, условие Хаусдорфа означает в точности, что непустые дизъюнктные множества A и B замкнуты в X_0, следовательно, открыто-замкнуты.

2. Элементарные теоремы, касающиеся связности. Предложение 2. *Если в пространстве X дано открыто-замкнутое множество C и связное подпространство X_0, пересекающееся с C, то $X_0 \subseteq C$.*

В самом деле, непустое множество $X_0 \cap C$ открыто-замкнуто в связном X_0, поэтому $X_0 \cap C = X_0$, т. е. $X_0 \subseteq C$.

Иногда это предложение формулируют и так:

Предложение 3. *Если непустое связное подпространство X_0 пространства X лежит в сумме двух непустых дизъюнктных замкнутых множеств C и C', то оно содержится в одном из них.*

Для доказательства положим $X_1 = C \cup C'$. Дизъюнктные замкнутые в X_1 множества C и C' открыто-замкнуты в X_1, а множество X_0, содержась в $C \cup C' = X$, пересекается по крайней мере с одним из множеств C, C' и, следовательно, по предложению 2 содержится в нем.

Предложение 4. *Пусть в пространстве X содержится такая точка x_0, что для всякой точки $x \in X$ имеется связное множество $Z_{x_0, x} \subseteq X$, содержащее точки x_0 и x. Тогда X связно.*

Доказательство (от противного). Пусть $X = C_0 \cup C_1$, где непустые дизъюнктные множества C_0 и C_1 замкнуты, следовательно, открыто-замкнуты. Точка x_0 лежит в одном из множеств C_0, C_1; пусть $x_0 \in C_0$. Тогда для любой точки $x \in X$ связное множество $Z_{x_0, x}$ пересекается с C_0 и, следовательно (по предложению 2), $Z_{x_0, x} \subseteq C_0$. Так как x — любая точка в X, то $X_0 \subseteq C$, $C_1 = \Lambda$; полученное противоречие доказывает предложение 4.

Особенно часто приходится применять следующий частный случай предложения 4:

Предложение 5. *Если любые две точки x и x' пространства X содержатся в некотором связном множестве $Z_{x, x'} \subseteq X$, то X связно.*

Применим предложение 5 к доказательству связности выпуклых множеств (в эвклидовом пространстве R^n). Для этого сначала докажем

Предложение 6_1. *Прямолинейный отрезок есть связное пространство.*

Доказательство (от противного). Пусть отрезок $X = [0, 1]$ несвязен; значит, $X = A \cup B$, где A и B — два непустых замкнутых множества без общих точек.

Для того чтобы получнть противоречие, достаточно заметить, что функция, равная 0 на A и 1 на B, очевндно, непрерывна на всем отрезке $[0, 1]$ и не принимает промежуточных между 0 и 1 значений.

Приведем и прямое доказательство. Разделим отрезок X пополам, на два отрезка X_1 и Y_1, и покажем, что по крайней мере один из двух отрезков X_1 и Y_1 имеет общие точки с обоими множествами A и B. Пусть это не так. Тогда каждый из отрезков X_1, Y_1 содержнтся в одном из двух множеств A или B; пусть, например, $X_1 \subseteq A$; в этом случае второй отрезок Y_1 уже не может содержаться в A (иначе B было бы пусто), значит, Y_1 содержится в B. Поэтому общая точка $\frac{1}{2}$ двух отрезков X_1 и Y_1 должна содержаться в $A \cap B$ — противоречие!

Итак, по крайней мере один из двух отрезков X_1 и Y_1 — пусть X_1 — содержит точки и множества A и множества B. Отрезок X_1 снова делим пополам, получаем два отрезка X_2 и Y_2; по крайней мере один из них — пусть это будет X_2 — содержит точки множества A и множества B. Продолжая это рассуждение, получаем последовательность отрезков $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$, каждый из которых есть половина предыдущего, причем таких, что каждый из отрезков X_n содержит как точки множества A, так и точки множества B.

Существует единственная точка ξ, общая всем отрезкам X_n, и в любой близости от точки ξ имеются как точки множества A, так и точки множества B. Другими словами, точка ξ есть точка прикосновения и множества A и множества B, а так как эти множества замкнутые, то $\xi \in A \cap B$. Полученное противоречие доказывает предложение 6_1.

Из предложений 6_1 и 5 сразу следует

Предложение 6. *Всякое выпуклое множество (в R^n или в гильбертовом пространстве R^∞) связно.*

В частности, связными являются: замкнутый и открытый шар (любого числа измерений), а также само пространство R^n (при любом n).

Предложение 7. *Сумма связных множеств Z_α, лежащих в каком-нибудь пространстве X и имеющих непустое пересечение $\bigcap\limits_\alpha Z_\alpha \neq \Lambda$, есть связное множество.*

В самом деле, пусть $x_0 \in \bigcap\limits_\alpha Z_\alpha$. Тогда для любой точки x множества $X_0 = \bigcup\limits_\alpha Z_\alpha$ имеем связное Z_α, содержащее точки x_0 и x. По предложению 4 множество X_0 связно.

Определение 1. Назовем *цепью множеств* всякую конечную последовательность

$$M_0, \quad M_1, \quad \ldots, \quad M_s$$

множеств *), обладающую тем свойством, что при любом $i = 0, 1, \ldots, s-1$

$$M_i \cap M_{i+1} \neq \Lambda. \tag{1}$$

Предложение 8. *Если множества M_i, $i = 0, 1, \ldots, s$, образующие цепь, суть связные множества, лежащие в каком-либо пространстве X, то их сумма $X_0 = \bigcup\limits_{i=0}^{s} M_i$ — также связное множество.*

В самом деле, $M_0 \cup M_1$ связно по предложению 7. Тогда, в силу того же предложения, связными являются множества

---

*) Они все являются подмножествами одного и того же множества, например множества $M = \bigcup\limits_{i=0}^{s} M_i$.

$(M_0 \cup M_1) \cup M_2$, $(M_0 \cup M_1 \cup M_2) \cup M_3$ и т. д. — вплоть до множества

$$M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_s.$$

Определение 2. Система $\mathfrak{M}$ любой мощности множеств M называется *сцепленной*, если для любых двух множеств $M \in \mathfrak{M}$, $M' \in \mathfrak{M}$ этой системы существует цепь множеств системы $\mathfrak{M}$

$$(2) \qquad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_s,$$

первый элемент которой есть множество $M = M_1$, а последний — множество $M' = M_s$.

Цепь (2) называется цепью между элементами $M = M_1$ и $M' = M_s$ системы $\mathfrak{M}$ (или цепью, связывающей множества M и M').

Предложение 9. *Если $\mathfrak{M} = \{M\}$ есть сцепленная система, состоящая из связных множеств (лежащих в топологическом пространстве X), то сумма $\bigcup\limits_{M \in \mathfrak{M}} M$ всех множеств системы $\mathfrak{M}$ также есть связное множество.*

Доказательство. Если x и x' — две произвольные точки множества $\bigcup\limits_{M \in \mathfrak{M}} M$ и $x \in M \in \mathfrak{M}$, $x' \in M' \in \mathfrak{M}$, а $M_1, \ldots, M_s$ — цепь, связывающая множества $M = M_1$ и $M' = M_s$, то $Z_{x, x'} = M_1 \cup \ldots \cup M_s$, в силу предложения 8, есть связное множество, лежащее в X и содержащее точки x и x'; теперь связность пространства X следует из предложения 5.

Предложение 10. *Если Z — связное множество, лежащее в пространстве X, и $Z_1 \subseteq X$ — любое множество, удовлетворяющее условию $Z \subseteq Z_1 \subseteq [Z]$, то Z_1 связно. В частности, замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Из нашего условия вытекает, что Z всюду плотно в Z_1, т. е. $Z_1 = [Z]_{Z_1}$. Пусть C — непустое открыто-замкнутое множество в пространстве Z_1. Так как Z всюду плотно в Z_1 и C открыто в Z_1, то $C \cap Z \neq \Lambda$, следовательно, согласно предложению 2 $Z \subseteq C$.

Но C и замкнуто в Z_1; поэтому из $Z \subseteq C$ вытекает, что и $[Z]_{Z_1} \subseteq C$, т. е. $Z_1 \subseteq C$, $Z_1 = C$. Итак, всякое непустое открыто-замкнутое C в пространстве Z_1 совпадает со всем пространством Z_1, так что Z_1 связно, ч. и т. д.

3. Компоненты в пространстве X. Определение 3. Непустое связное множество Z в пространстве X называется *максимальным связным множеством* или *компонентой* в пространстве X, если всякое связное множество $Z_1 \subseteq X$, содержащее множество Z, совпадает с Z.

Две различные компоненты K_1 и K_2 в пространстве X не могут иметь общих точек: если бы $K_1 \cap K_2 \neq \Lambda$, то согласно предложению 7 множество $K_1 \cup K_2$ было бы связным и $K_1 \cup K_2 \supset K_1$, $K_1 \cup K_2 \supset K_2$ — вопреки максимальности связных множеств K_1 и K_2.

Из того же предложения 7 вытекает, далее, что сумма всех связных множеств $Z_\alpha \subseteq X$, содержащих данное связное Z_0 *), есть (очевидно, максимальное) связное множество $K \supseteq Z_0$, т. е. единственная компонента K, содержащая связное множество Z_0; она называется компонентой связного множества в пространстве X. Если множество Z_0 состоит из единственной точки z_0, то говорим о компоненте K точки z_0 в пространстве X. Очевидно, каждая компонента K в пространстве X есть компонента любой своей точки $z_0 \in K$.

В силу предложения 10 каждая компонента K в пространстве X есть замкнутое множество. Так как каждая точка $z_0 \in X$ содержится в своей компоненте и две различные компоненты не пересекаются, то имеем

Предложение 11. *Всякое топологическое пространство X есть сумма попарно непересекающихся связных замкнутых множеств, каждое из которых является максимальным связным подмножеством, т. е. компонентой в пространстве X.*

Приведем простейшие примеры.

Во всяком вполне несвязном пространстве компоненты совпадают с точками пространства. Это, в частности, имеет место, если X есть подпространство числовой прямой, состоящее из всех рациональных или всех иррациональных точек, а также если X есть канторово совершенное множество.

Пусть X — множество всех точек плоскости R^2, абсциссы которых рациональны. Компонентами в пространстве X являются прямые вида $x = c$, где c — произвольное рациональное число; пространство X распадается на счетное число компонент.

Если же X есть множество всех точек плоскости, абсциссы которых иррациональны, то пространство X распадается на некоторое множество (мощности $\mathfrak{c}$) компонент, каждая из которых есть прямая $x = c$, где c — произвольное иррациональное число.

Итак, компоненты, на которые распадается какое-нибудь пространство X, всегда являются замкнутыми множествами, но могут не быть открытыми множествами этого пространства.

Определение 4. *Областью* в топологическом пространстве X называется всякое связное открытое множество этого пространства.

*) Такие Z_α существуют, например, само Z_0.

Определение 5. Пространство X называется *локально связным*, если множество его областей является базой этого пространства.

Теорема 3. *Пространство X тогда и только тогда локально связно, когда компонентами его открытых множеств являются области.*

Доказательство. 1°. Для любой точки x и любой ее окрестности Ox в любом пространстве X имеем включение $x \in C_x \subseteq Ox$, где C_x — компонента точки x в Ox. Итак, компоненты в открытых множествах (всякого) пространства X образуют сеть в этом пространстве. Если эти компоненты сами открыты, т. е. являются областями, то они образуют базу пространства X и X локально связно.

2°. Пусть X локально связно, Γ открыто в X и C — какая-нибудь компонента в множестве Γ. Берем произвольно точку $x \in C \subseteq \Gamma$. Так как области пространства образуют в нем базу, то существует такая область U, что $x \in U \subseteq \Gamma$. Но C есть компонента точки $x \in C$ в пространстве Γ; так как U связно, то $x \in U \subseteq C \subseteq \Gamma$. Таким образом, каждая точка $x \in C$ есть внутренняя точка C, т. е. C открыто, что и требовалось доказать.

4. **Квазикомпоненты.** Пусть x — произвольная точка пространства X. Замкнутое множество, являющееся пересечением всех открыто-замкнутых множеств $A_\alpha \subseteq X$, содержащих точку x, называется *квазикомпонентой* точки x в пространстве X и обозначается через Q_x.

Предложение 12. *Если* $z \in Q_x = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, то $Q_z = Q_x$. В самом деле, всякое открыто-замкнутое множество A, содержащее точку z, содержит и точку x — в противном случае $X \setminus A$ было бы открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, и, следовательно, было бы $Q_x \subseteq X \setminus A$, что противоречит тому, что $z \in Q_x$, $z \in A$. Итак, если $Q_x = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, $Q_z = \bigcap\limits_\gamma A_\gamma$, где пересечение берется по всем открыто-замкнутым $A_\alpha \ni x$, соответственно $A_\gamma \ni z$, то всякое A_γ есть и некоторое A_α, так что

$$Q_z = \bigcap_\gamma A_\gamma \supseteq \bigcap_\alpha A_\alpha = Q_x.$$

Пусть теперь $A = A_\alpha$ есть некоторое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x; тогда оно содержит все Q_x, следовательно, и точку z, значит, есть некоторое A_γ. Итак, всякое A_α есть некоторое A_γ, значит,

$$Q_x = \bigcap_\alpha A_\alpha \supseteq \bigcap_\gamma A_\gamma = Q_z.$$

Равенство $Q_z = Q_x$ доказано.

Предложение 13. *Если* $Q_x \cap Q_y \neq \Lambda$, *то* $Q_x = Q_y$.

В самом деле, достаточно взять $z \in Q_x \cap Q_y$. По только что доказанному $Q_x = Q_z = Q_y$. Итак, квазикомпоненты точек пространства X образуют дизъюнктную систему замкнутых множеств, дающих в сумме все пространство X.

Наконец, компонента C_x любой точки $x \in X$ содержится в квазикомпоненте Q_x точки, так что разбиение пространства X на компоненты является более дробным, чем разбиение на квазикомпоненты*).

В самом деле, пусть A_α — какое-нибудь открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Так как C_x содержит точку x, пересекается с A_α, то по предложению 2 имеем $C_x \subseteq A_\alpha$ при любом $A_\alpha \ni x$, значит,

$$C_x \subseteq \bigcap_{A_\alpha \ni x} A_\alpha = Q_x$$

Покажем на примере, что, действительно, компонента C_x некоторой точки x может не совпадать с содержащей ее квазикомпонентой.

Пространство X состоит из двух параллельных прямых α, β на плоскости OXY (α имеет уравнение $x = 0$, β — уравнение $x = 1$) и из контуров прямоугольников q_n, две стороны которых имеют уравнения $x = \frac{1}{n}$, $x = 1 - \frac{1}{n}$, а две другие стороны имеют уравнения $y = n$, $y = -n$.

Докажем, что объединение обеих прямых α и β образуют одну квазикомпоненту.

В самом деле, каждое открыто-замкнутое множество $\Phi \subset X$, содержащее точку x прямой α, содержит всю эту прямую и контуры всех прямоугольников q_n, начиная с достаточно большого n; поэтому пересечение всех этих открыто-замкнутых множеств Φ состоит из пары прямых α, β. Точно так же каждое открыто-замкнутое множество, содержащее какую-нибудь точку y прямой β, содержит и эту прямую и все контуры прямоугольников q_n с достаточно большим номером n. Поэтому пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих какую-нибудь точку y прямой β, также состоит из двух прямых α и β.

Итак, любая точка x прямой α и любая точка y прямой β имеют одну и ту же квазикомпоненту, состоящую из объединения двух прямых α и β. Между тем компонента любой точки x прямой α есть сама эта прямая α, а компонента любой точки y прямой β есть прямая β; значит, компоненты $C_x = \alpha$, $C_y = \beta$ не совпадают с квазикомпонентами $Q_x = Q_y = \alpha \cup \beta$.

---

*) Совпадение компоненты с содержащей ее квазикомпонентой при этом, конечно, не исключается.

§ 5. Аксиомы отделимости

1. Одним из основных путей к постепенному сужению класса рассматриваемых топологических пространств является введение последовательно усиливающихся «аксиом отделимости», уже самая слабая из которых исключает то явление «слипания», точек пространства, которое мы видели на примере множества X, снабженного минимальной топологией (состоящей из двух элементов: X и Λ), даже в том простейшем случае, когда множество X состояло лишь из двух точек.

Приводим аксиомы отделимости.

Аксиома T_0 (аксиома Колмогорова). *Из любых двух точек пространства X по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую вторую точку.*

Аксиома T_1. *Каждая из двух произвольных точек пространства X имеет окрестность, не содержащую вторую точку.*

Читатель легко докажет, что аксиома T_1 эквивалентна следующему условию:

T_1'. *Все одноточечные множества в пространстве X замкнуты.*

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). *Любые две точки пространства X имеют непересекающиеся окрестности.*

Аксиома T_3. *Если x — произвольная точка пространства X и F — не содержащее эту точку замкнутое множество, $F \subseteq X \setminus \{x\}$, то x и F имеют непересекающиеся окрестности.*

Аксиома T_3 может быть сформулирована и так*):

T_3'. *Какова бы ни была точка $x \in X$ и ее окрестность Ox, существует окрестность O_1x точки x, удовлетворяющая условию $[O_1x] \subseteq Ox$.*

Аксиома T_4. *Всякие два дизъюнктных замкнутых множества пространства X имеют дизъюнктные окрестности.*

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, называются соответственно T_i-пространствами.

T_2-пространства называются также хаусдорфовыми пространствами.

T_1-пространства, удовлетворяющие аксиомам T_3, соответственно T_4, называются регулярными, соответственно нормальными, пространствами.

Во всей этой книге мы будем рассматривать лишь T_1-пространства, а начиная с четвертой главы — только нормальные пространства; поэтому термины «T_3-пространство» и «регулярное пространство», а также «T_4-пространство» и «нормальное

---

*) Доказательство аналогично доказательству «малой» леммы Урысона (см. ниже).

пространство» будут для нас синонимами*). Однако определения, данные в §§ 4 и 5, имеют силу для любых топологических пространств.

Имеет место следующая так называемая

Малая лемма Урысона. *Пространство X тогда и только тогда нормально, когда для любого замкнутого множества $F \subseteq X$ и любой его окрестности OF можно найти окрестность O_1F, для которой $[O_1F] \subseteq OF$.*

В самом деле, если X нормально и даны множество F и его окрестность OF, то замкнутые множества F и $F_1 = X \setminus OF$ имеют дизъюнктные окрестности O_1F и $O_1F_1 \supseteq X \setminus OF$. Тогда $[O_1F] \cap O_1F_1 = \Lambda$, т. е. $[O_1F] \subseteq X \setminus O_1F_1 \subseteq X \setminus F_1 = OF$. Обратно, пусть для любых F, OF существует такое O_1F, что $[O_1F] \subseteq OF$. Возьмем произвольно дизъюнктные F_1, F_2 и положим $OF_1 = X \setminus F_2$. Берем такое O_1F_1, что $[O_1F_1] \subseteq OF_1$, и полагаем $OF_2 = X \setminus [O_1F_1]$. Окрестности O_1F_1 и O_1F_2 дизъюнктны, ч. и т. д.

Из малой леммы Урысона вытекает

Следствие 1. *В нормальном пространстве X два дизъюнктных замкнутых множества F_1 и F_2 имеют окрестности OF_1 и OF_2, для которых $[OF_1] \cap [OF_2] = \Lambda$.*

В самом деле, берем дизъюнктные O_1F_1, O_1F_2 и затем такие OF_1, OF_2, что $[OF_1] \subseteq O_1F_1$, $[OF_2] \subseteq O_1F_2$.

2. Наследственно нормальные и совершенно нормальные пространства. Подпространство $X_0 \subseteq X$ нормального пространства может не быть нормальным; пример—так называемая «тихоновская плоскость» — будет приведен в § 8 этой главы. Поэтому оправдано следующее

Определение 1. Пространство X называется *наследственно нормальным*, если всякое его подпространство $X_0 \subseteq X$ нормально.

Предложение 1 (Урысон [3]). *Для того чтобы пространство X было наследственно нормальным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякие два отделенных друг от друга множества P и Q имели дизъюнктные окрестности***).

---

*) Это замечание вызвано тем, что из аксиом T_3 и T_4, вообще говоря, не следует аксиома T_1, ни даже аксиома T_0, так как одноточечные множества могут не быть замкнутыми: пространство X с минимальной топологией есть T_4-пространство, не будучи даже T_0-пространством! Однако если X есть T_1-пространство, то, удовлетворяя аксиоме T_3, оно будет удовлетворять и аксиоме T_2, а удовлетворяя аксиоме T_4, будет удовлетворять и аксиоме T_3, тем более аксиоме T_2. Так что в T_1-пространствах аксиомы T_2, T_3, T_4 образуют усиливающуюся последовательность.

**) Напоминаем (см. § 1, п. 5), что множества P и Q называются отделенными в пространстве X, если

$$H(P, Q) \equiv ([P] \cap Q) \cup (P \cap [Q]) = \Lambda.$$

Доказательство. Докажем необходимость высказанного условия. Пусть X наследственно нормально, и пусть P и Q — два отделенных в нем множества. Рассмотрим подпространство

$$X_0 = X \setminus ([P] \cap [Q])$$

пространства X. Так как по предположению $P \cap [Q] = \Lambda$, то и подавно $P \cap ([P] \cap [Q]) = \Lambda$, т. е. $P \subseteq X_0$. Аналогично $Q \subseteq X_0$.

Рассмотрим теперь замкнутые в X_0 множества $A = X_0 \cap [P]$ и $B = X_0 \cap [Q]$. Они дизъюнктны, так как $A \cap B = X_0 \cap [P] \cap \cap [Q] = \Lambda$. Так как по предположению X_0 — нормальное пространство, то замкнутые в нем дизъюнктные множества A и B имеют дизъюнктные окрестности OA и OB (окрестности в пространстве X_0).

Но X_0 открыто в X, значит, множества OA и OB, будучи открытыми в X_0, открыты и в X. Остается доказать, что $P \subseteq \subseteq OA$, $Q \subseteq OB$, — этим будет доказано, что множества OA и OB являются дизъюнктными окрестностями в X множеств P и Q, что нам и требовалось.

Мы уже видели, что $P \subseteq X_0$; значит,

$$P \subseteq X_0 \cap [P] = A \subseteq OA.$$

Аналогично $Q \subseteq OB$.

Итак, необходимость нашего условия доказана.

Достаточность доказывается в двух словах. Пусть P и Q — дизъюнктные замкнутые множества (произвольного) подпространства $X_0 \subseteq X$. Тогда, очевидно, $H(P, Q) = \Lambda$; в силу нашего условия P и Q имеют дизъюнктные окрестности OA и OB в X; значит, дизъюнктные окрестности $oA = X_0 \cap OA$ и $oB = X_0 \cap \cap OB$ в X_0, чем нормальность пространства $X_0 \subseteq X$ и наследственная нормальность пространства X доказаны.

Предложение 2. *Если нормальность данного пространства X наследуется по открытым множествам (т. е. все открытые в X подпространства нормальны), то пространство X наследственно нормально (т. е. нормальны все подпространства $X_0 \subseteq \subseteq X$).*

Доказательство. Пусть X_0 — произвольное подпространство пространства X, в котором все открытые $G \subseteq X$ нормальны.

Пусть F_1 и F_2—дизъюнктные замкнутые множества в X_0. Требуется доказать, что они имеют в X_0 дизъюнктные окрестности. Пусть $\Phi_1 = [F_1]x$, $\Phi_2 = [F_2]x$, $\Psi = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Множество $X \setminus \Psi = G$ открыто в X и поэтому нормально. Множества $\Phi_1 \cap G$ и $\Phi_2 \cap G$ замкнуты в G и дизъюнктны, следовательно, имеют дизъюнктные окрестности O_1, O_2 в G; так как $F_1 \subseteq \Phi_1 \cap G$, $F_2 \subseteq \Phi_2 \cap G$, то множества $O_1 \cap X_0$, $O_2 \cap X_0$ являются дизъюнктными окрестностями множеств F_1, F_2 в X_0, ч. и т. д.

Напомним

Определение 2 (Хаусдорф). *Множеством типа F_σ* или просто *F_σ-множеством* пространства X называется всякое множество $M \subseteq X$, являющееся суммой счетного числа замкнутых (в X) множеств.

Множеством типа G_δ или *G_δ-множеством* пространства X называется всякое множество $M \subseteq X$, являющееся пересечением счетного числа открытых множеств пространства X.

Весьма важным является

Предложение 3. *Всякое F_σ-множество X_0, лежащее в нормальном пространстве X, есть нормальное подпространство пространства X.*

Доказательство опирается на следующие леммы:

Лемма 1. *Если $X_0 \subseteq X$ есть F_σ-множество в пространстве X и F_0 замкнуто в X_0, то F_0 есть F_σ-множество в пространстве X.*

В самом деле, пусть $X_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где все Φ_k замкнуты в X. Так как F_0 замкнуто в X_0, то $F_0 = X_0 \cap F$, где F замкнуто в X. Значит,

$$F_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Phi_k \cap F),$$

и лемма доказана.

Следующая лемма в дальнейшем часто применяется:

Лемма 2 (нормализующая лемма). *Пусть в топологическом пространстве X даны такие множества M^i, $i = 1, 2$, и такие счетные системы открытых множеств*

$$\omega_1 = \{O_j^1\} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \{O_j^2\}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

что

$$(1) \qquad M^1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j^1 \quad \text{и} \quad M^2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j^2,$$

$$(2) \qquad M^1 \cap [O_j^2] = \Lambda \quad \text{и} \quad M^2 \cap [O_j^1] = \Lambda, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда множества M^1 и M^2 имеют в X дизъюнктные окрестности V^1 и V^2.

Добавление к лемме 2 (Веденисов [1]). *Если, кроме того, система $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ является покрытием пространства X, то можно потребовать, чтобы*

$$X \setminus (V^1 \cup V^2) \subseteq \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{гр } O_j^i.$$

Доказательство *). Положим

$$V_1^1 = O_1^1, \quad V_k^1 = O_k^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} [O_j^2], \qquad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

и

$$V_k^2 = O_k^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{k} [O_j^1], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Множества V_k^1 и V_k^2, очевидно, открыты. Следовательно, открыты и множества $V^i = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k^i$, $i = 1, 2$. В силу условий (1) и (2) имеем включения $M^1 \subseteq V^1$ и $M^2 \subseteq V^2$.

Наконец, по построению при $j \geqslant k$ имеем

$$V_k^1 \cap V_j^2 \subseteq O_k^1 \cap (O_j^2 \setminus O_k^1) = \Lambda,$$

а при $j < k$

$$V_k^1 \cap V_j^2 \subseteq (O_k^1 \setminus O_j^2) \cap O_j^2 = \Lambda,$$

т. е. $V_k^1 \cap V_j^2 = \Lambda$ для любых k и j, следовательно, $V^1 \cap V^2 = \Lambda$. Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству добавления к лемме 2.

Прежде всего заметим, что по построению

$$\text{гр}\, V_k^1 \subseteq \text{гр}\, O_k^1 \cup \bigcup_{j \leqslant k-1} \text{гр}\, O_j^2 \quad \text{и} \quad \text{гр}\, V_k^2 \subseteq \text{гр}\, O_k^2 \cup \bigcup_{j \leqslant k} \text{гр}\, O_j^1.$$

Поэтому включение

$$X \setminus (V^1 \cup V^2) \subseteq \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{гр}\, O_j^i$$

будет доказано, если докажем включение

$$X \setminus (V^1 \cup V^2) \subseteq \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{гр}\, V_j^i$$

или, что то же, включение

$$X \subseteq (V^1 \cup V^2) \cup \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{гр}\, V_j^i = \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{\infty} [V_j^i].$$

Так как ω есть покрытие пространства X, то последнее включение вытекает из равенств

$$(3) \qquad \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{k} [V_j^i] = \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j=1}^{k} [O_j^i], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

которые сейчас и докажем.

---

*) Метод этого доказательства принадлежит Александрову (см. Урысон [3]).

Для $k=1$ равенство (3) очевидно. Пусть равенство (3) имеет место для всех $k \leqslant s$, и пусть $k=s+1$. Тогда

$$\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j=1}^{s+1}[V_j^i]=[V_{s+1}^1]\cup[V_{s+1}^2]\cup\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j=1}^{s}[V_j^i]=$$

$$=\Big[O_{s+1}^1\setminus\bigcup_{j\leqslant s}[O_j^2]\Big]\cup[V_{s+1}^2]\cup\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j=1}^{s}[O_j^i]=$$

$$=\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j=1}^{s}[O_j^i]\cup[O_{s+1}^1]\cup\Big[O_{s+1}^2\setminus\bigcup_{j\leqslant s+1}[O_j^1]\Big]=\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j=1}^{s+1}[O_j^i].$$

Добавление к лемме 2 доказано.

Лемма 3. *Пусть в нормальном пространстве X даны два отделенных F_σ-множества P и Q. Тогда эти множества имеют в X непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть множество P является суммой замкнутых множеств F_j, $j=1, 2, 3, \ldots$ Так как множества P и Q отделены, то $P\cap[Q]=\Lambda$, следовательно, $F_j\cap[Q]=\Lambda$, $j=1, 2, 3, \ldots$ Из нормальности X вытекает существование таких окрестностей O_j^1 множеств F_j, что $[O_j^1]\cap[Q]=\Lambda$, $j=1, 2, 3, \ldots$ Ясно, что $P\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}O_j^1$. Аналогичным образом строится такая счетная система открытых множеств O_j^2, $j=1, 2, 3, \ldots$, что $Q\subseteq\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}O_j^2$ и $[O_j^2]\cap[P]=\Lambda$, $j=1, 2, 3, \ldots$ Существование дизъюнктных окрестностей у множеств P и Q вытекает теперь из леммы 2.

Переходим собственно к доказательству предложения 3.

Пусть $X_0\subseteq X$ — множество типа F_σ в нормальном пространстве X; докажем, что X_0 нормально. Пусть $F_1\subseteq X_0$ и $F_2\subseteq X_0$ — два дизъюнктных множества, замкнутых в X_0. Тогда $H(F_1, F_2)=\Lambda$; кроме того, по лемме 1 множества F_1 и F_2 суть F_σ-множества пространства X. Следовательно, по лемме 3 они имеют непересекающиеся окрестности в X, значит, и в X_0. Предложение 3 доказано.

Определение 3 (Александров — Урысон [2], гл. 2). Нормальное пространство, в котором всякое открытое множество есть множество типа F_σ, называется *совершенно нормальным.*

Замечание 1. Так как во всяком пространстве X множества типа F_σ и множества типа G_δ являются взаимнодополнительными, то можно определить совершенно нормальные пространства как нормальные пространства, в которых все замкнутые множества являются G_δ-множествами.

Из определения совершенной нормальности и предложений 3 и 2 непосредственно следует, что всякое совершенно нормальное пространство является наследственно нормальным.

Докажем, что если в каком-либо пространстве X всякое открытое множество есть F_σ-множество, то тем же свойством обладает и любое подпространство $X_0 \subseteq X$. В самом деле, пусть G открыто в X_0. Тогда $G = X_0 \cap \Gamma$, где Γ открыто в X, и, следовательно, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где все Φ_k замкнуты в X. Но тогда, полагая $F_k = X_0 \cap \Phi_k$, имеем $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$; утверждение доказано. Из доказанного вытекает

Предложение 4. *Если X — совершенно нормальное пространство, то всякое подпространство $X_0 \subseteq X$ совершенно нормально.*

Замечание 2. Говорим, что данное свойство выполнено в данном пространстве X наследственно (по всем множествам или по множествам данного класса), если оно выполнено для всякого подпространства $X_0 \subseteq X$ (соответственно для $X_0 \subseteq X$, принадлежащего данному классу). Важнейший пример — наследственно нормальные пространства (в них свойство нормальности выполнено наследственно). При этом, как показывает предложение 3, свойство нормальности автоматически наследуется по множествам типа F_σ, а свойство совершенной нормальности есть просто наследственное свойство — принадлежа данному пространству X, оно принадлежит и всякому подпространству $X_0 \subseteq X$; свойство полной несвязности наследуется по множествам, содержащим более одной точки, а свойство индуктивной нульмерности наследуется по всем непустым подпространствам $X_0 \subseteq X$. В дальнейшем мы получим и много других примеров на эту тему.

Следующее утверждение выясняет поведение нормальности, наследственной нормальности и совершенной нормальности при замкнутых отображениях.

Предложение 5. *Пусть дано непрерывное замкнутое отображение $f: X \to Y$ нормального пространства X на пространство Y. Тогда пространство Y также нормально. Если пространство X наследственно (совершенно) нормально, то наследственно (совершенно) нормальным будет и пространство Y.*

Доказательство. Рассмотрим в Y дизъюнктную пару замкнутых множеств F_1 и F_2. Множества $\Phi_i = f^{-1}F_i$, $i = 1, 2$, также замкнуты и дизъюнктны. В силу нормальности X существуют дизъюнктные окрестности $O\Phi_i$, $i = 1, 2$, этих множеств. Из характеристики замкнутых отображений, данной в п. 7 § 1, вытекает существование таких окрестностей V_i множеств F_i, что $f^{-1}V_i \subseteq O\Phi_i$, $i = 1, 2$. Очевидно, окрестности V_1 и V_2 множеств F_1 и F_2 дизъюнктны. Нормальность пространства Y установлена.

Пусть теперь пространство X наследственно нормально. Рассмотрим подмножество M пространства Y. Его прообраз $f^{-1}M \subseteq \subseteq X$ нормален, и отображение $f: f^{-1}M \to M$ замкнуто (см. § 1, п. 7), следовательно, по доказанному, множество M также нормально. Наследственная нормальность Y установлена.

Пусть, наконец, пространство X совершенно нормально. Рассмотрим открытое в Y множество O. Его прообраз $f^{-1}O$ открыт в X и поэтому является счетной суммой замкнутых в X множеств Φ_i, $i = 1, 2, 3$. В силу замкнутости f множество O будет счетной суммой замкнутых в Y множеств $f\Phi_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Совершенная нормальность Y доказана. Доказано и предложение 5.

3. Функциональная отделимость. Теоремы Урысона. Вполне регулярные пространства. Наряду с отделимостью множеств посредством дизъюнктных окрестностей, Урысон [3] определил еще и другой вид отделимости, так называемую функциональную отделимость, которая скоро заняла в топологии столь же важное положение, как и отделимость посредством окрестностей.

Определение 4. Два множества P и Q, лежащие в топологическом пространстве X, называются *функционально отделимыми*, если существует определенная на всем X действительная непрерывная функция $f: X \to [\alpha, \beta]$, принимающая во всех точках одного из множеств P, Q значение α, а во всех точках другого множества значение β (так, что $\alpha \leqslant fx \leqslant \beta$ для всех $x \in X$ и, например, $fP = \alpha$, $fQ = \beta$).

Обычно берут при этом $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Почти очевидно

Предложение 6. *Если два множества P и Q функционально отделимы, то они имеют дизъюнктные окрестности.*

В самом деле, если $f: X \to [0, 1]$, $fP = 0$, $fQ = 1$, то, обозначая через OP, соответственно OQ, множество всех точек x, в которых соответственно $fx < \frac{1}{2}$ и $fx > \frac{1}{2}$, получим дизъюнктные окрестности множеств P и Q. Поэтому, если в пространстве X любые два дизъюнктных непустых замкнутых множества функционально отделимы, то пространство X нормально.

Урысон [3] доказал оказавшееся чрезвычайно важным обратное предложение:

Большая лемма Урысона. *Пусть F_0 и F_1 — два замкнутых непересекающихся множества нормального пространства X. Для любых двух действительных чисел a, b, $a < b$, существует действительная непрерывная функция $f = f_{a,b}$, опре-*

деленная во всем пространстве X, принимающая значение a во всех точках множества F_1, значение b во всех точках множества F_2 и удовлетворяющая всюду в X неравенству

$$a \leqslant fx \leqslant b.$$

Доказательство. Если одно из двух множеств, скажем F_0, пусто, то достаточно положить $fx = b$ для любого $x \in X$. Предположим, что ни одно из множеств F_0, F_1 не пусто. При этом можно предположить, что $a = 0$, $b = 1$, так как $f_{a, b}$ (для любых a, b) получается из $f_{0, 1}$ посредством формулы

$$f_{a, b}(x) = (b - a) f_{0, 1}(x) + a.$$

Дальнейшие рассуждения и будут вестись в предположении $a = 0$, $b = 1$. Они опираются на «малую» лемму Урысона (см. конец п. 1).

Полагаем $OF_0 = \Gamma_1 = X \setminus F_1$ и находим по малой лемме Урысона окрестность $O_1 F_0 = \Gamma_0$ такую, что $[\Gamma_0] \subseteq \Gamma_1$.

Предположим, что уже построены открытые множества $\Gamma_{\frac{p}{2^n}}$ (для данного натурального n и $p = 0, 1, \ldots, 2^n$) так, что при $p < p'$ имеем $\left[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}\right] \subseteq \Gamma_{\frac{p'}{2^n}}$ (для $n = 0$ это так). По малой лемме можно построить открытое $\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}$ так, чтобы

$$\left[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}\right] \subseteq \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq \left[\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}\right] \subseteq \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}}.$$

Отсюда следует, что для всех двоично-рациональных чисел r, т. е. для всех чисел вида $r = \frac{p}{2^n}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, можно построить открытые в X множества Γ_r так, что $F_0 \subseteq \Gamma_0$ и при $r < r'$

$$[\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'}.$$

Положим теперь для всех остальных t, $0 < t < 1$,

$$\Gamma_t = \bigcup_{r < t} \Gamma_r.$$

Докажем, что всегда

$$[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'} \quad \text{при} \quad t < t'.$$

В самом деле, беря двоично-рациональные r, r' так, чтобы было

$$t < r < r' < t',$$

имеем

$$\Gamma_t \subseteq \Gamma_r, \quad \text{значит,} \quad [\Gamma_t] \subseteq [\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'} \subseteq \Gamma_{t'},$$

чем утверждение доказано. Наконец, положим $\Gamma_t = \Lambda$ для $t < 0$ и $\Gamma_t = X$ для $t > 1$.

Построим теперь для каждой точки $x \in X$ некоторое сечение $(\mathrm{I}^x, \mathrm{II}^x)$ в множестве всех действительных чисел: именно, отнесем число t к нижнему классу I^x, если x не содержится в Γ_t, и к верхнему II^x, если $x \in \Gamma_t$. Это сечение определяет действительное число τ_x, причем, очевидно, $0 \leqslant \tau_x \leqslant 1$. Другими словами, определена функция

$$f_{0,1}(x) = \tau_x$$

во всем пространстве X. При этом $f_{0,1}(x) = 0$ при $x \in F_0$ и $f_{0,1}(x) = 1$ при $x \in F_1$. Докажем, наконец, непрерывность функции $f = f_{0,1}$ в каждой точке $x \in X$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность

$$Ox = \Gamma_{\tau_x+\varepsilon} \setminus [\Gamma_{\tau_x-\varepsilon}]$$

точки x. Тогда по самому определению этой окрестности имеем для всех ее точек $x' \in Ox$

$$\tau_x - \varepsilon \leqslant \tau_{x'} \leqslant \tau_x + \varepsilon,$$

т. е. $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Непосредственным следствием большой леммы является

Теорема 4 (теорема о продолжении непрерывных функций) *). *Ко всякой ограниченной непрерывной функции* φ, *заданной на замкнутом множестве* Φ *нормального пространства* X, *существует непрерывная во всем пространстве* X *функция* f, *совпадающая с* φ *во всех точках множества* Φ. *При этом, если* μ *есть верхняя грань функции* $|\varphi|$ *на* Φ, *то функцию* f *можно подобрать так, что верхней гранью ее абсолютной величины (во всем пространстве* X) *также будет число* μ.

Часто пользуются краткой формулировкой этой теоремы, говоря, что всякая непрерывная функция, заданная на замкнутом множестве нормального пространства X, может быть непрерывно продолжена на все пространство X.

Доказательство. Полагаем $\varphi_0(x) = \varphi(x)$; эта функция определена лишь на множестве Φ. Пусть $\mu \equiv \mu_0 > 0$ есть верхняя грань функции $|\varphi_0|$. Обозначаем через P_0, соответственно Q_0, замкнутое (быть может, пустое) множество тех точек множества Φ, в которых $\varphi_0(x) \leqslant -\frac{\mu_0}{3}$, соответственно $\varphi_0(x) \geqslant \frac{\mu_0}{3}$,

*) Эта теорема была доказана Бэром, Лебегом и Брауэром для случая $X = R^n$, Титце (H. Tietze) — для метрического пространства X и, наконец, Урысоном [3] в полной общности — для любого нормального пространства. Полученное Урысоном обобщение является окончательным — теорема о продолжении непрерывных функций характеризует нормальные пространства (среди всех T_1-пространств): если X не нормально, то, как мы знаем, существуют два непересекающихся замкнутых множества F_0 и F_1, не отделимых функционально; полагаем $\varphi(x) = 0$ на F_0, $\varphi(x) = 1$ на F_1; тогда получаем непрерывную функцию φ, которая определена на замкнутом множестве $F = F_0 \cup F_1$ и не может быть продолжена на все пространство X.

строим по лемме Урысона непрерывную во всем пространстве X функцию f_0, равную $-\frac{\mu_0}{3}$ на P_0, равную $\frac{\mu_0}{3}$ на Q_0 и удовлетворяющую всюду в X неравенству $|f_0(x)|\leqslant\frac{\mu}{3}$. Полагаем теперь на Φ

$$\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-f_0(x).$$

Функция φ_1 непрерывна на Φ, и верхняя грань μ_1 функции $|\varphi_1|$ удовлетворяет неравенству $\mu_1\leqslant\frac{2}{3}\mu_0$.

Совершенно так же, как мы перешли от φ_0 к φ_1, переходим от φ_1 к φ_2: обозначаем через P_1, Q_1 замкнутые множества тех точек множества Φ, в которых $\varphi_1(x)\leqslant-\frac{\mu_1}{3}$, соответственно $\varphi_1(x)\geqslant\frac{\mu_1}{3}$; строим функцию f_1, непрерывную во всем X, равную $-\frac{\mu_1}{3}$ на P_1 и равную $\frac{\mu_1}{3}$ на Q_1; полагаем на Φ

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-f_1(x).$$

Верхняя грань μ_2 функции $|\varphi_2|$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_2\leqslant\frac{2}{3}\mu_1.$$

Таким образом, шаг за шагом строим функции

$$\varphi_0=\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots,$$

непрерывные на Φ, и функции

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots,$$

непрерывные во всем X, причем на Φ имеем

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-f_n(x). \tag{4}$$

Далее, обозначая через μ_n верхнюю грань функции $|\varphi_n|$, имеем

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{\mu_n}{3},\qquad \mu_{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\mu_n,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

значит,

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\mu_0,\qquad |f_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\mu_0}{3}. \tag{5}$$

Положим теперь

$$s_n(x)=f_0(x)+\ \ldots\ +f_n(x).$$

В силу второго из неравенств (5) последовательность

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

равномерно сходится к непрерывной в X функции f, причем

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0, \tag{6}$$

так что функция $|f|$ ограничена в X тою же константой μ, что и функция $|\varphi|$ на Φ.

Далее, по формуле (4) имеем в любой точке $x \in \Phi$

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

значит,

$$s_n(x) = \varphi_0(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

и так как в силу первого из неравенств (5) функции φ_{n+1} при $n \to \infty$ стремятся к нулю, то для любого $x \in \Phi$ имеем

$$f(x) = \lim s_n(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x),$$

чем все доказано.

На основе функциональной отделимости вводится чрезвычайно важное

Определение 5 (Тихонов [2]*). Топологическое пространство называется *вполне регулярным* **), если всякая его точка функционально отделима от всякого не содержащего эту точку замкнутого множества ***).

Замечание 3. Пусть дано непрерывное отображение $f: X \to Q^n$ замкнутого множества $F \subseteq X$ нормального пространства X в n-мерный куб Q^n. Тогда, записывая точку $y = fx$ при $x \in F$ в виде $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Q^n$, имеем систему ограниченных непрерывных функций $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$, определенных на замкнутом множестве $F \subseteq X$. Каждую из этих функций можно продолжить до непрерывной функции, определенной на всем X. В результате получаем

Предложение 7. *Пусть F — замкнутое множество в нормальном пространстве X; всякое непрерывное отображение*

---

*) См. также Урысон [3], [5], т. 1, стр. 209.

**) Или тихоновским, или $T_{3\frac{1}{2}}$-, или T_ρ-пространством.

***) Задача прямого топологического определения вполне регулярных пространств (без привлечения действительных чисел и функций) лишь недавно получила окончательное решение: как показал Зайцев [1], T_1-пространство X тогда и только тогда вполне регулярно, когда оно имеет базу $\mathfrak{B} = \{U\}$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1°. Каждое замкнутое множество $F \subseteq X$ есть пересечение некоторых множеств, являющихся элементами базы $\mathfrak{B}$.

2°. Если дизъюнктные замкнутые множества F_1 и F_2 таковы, что их дополнения $X \setminus F_1 = U_1$ и $X \setminus F_2 = U_2$ являются элементами базы $\mathfrak{B}$, то они имеют дизъюнктные окрестности $U_1' = OF_1$ и $U_2' = OF_2$, являющиеся элементами базы $\mathfrak{B}$.

$f: F \to Q^n$ (где Q^n — n-мерный куб) можно продолжить до непрерывного отображения $g: X \to Q^n$.

Предложение 8. *Непрерывное отображение $f: F \to S^n$ замкнутого подмножества F нормального пространства X в n-мерную сферу S^n можно продолжить на замыкание некоторой окрестности множества F.*

Доказательство. Очевидно, S^n можно рассматривать как границу куба $Q^{n+1} \subseteq R^{n+1}$. Отображение f, по предложению 7, можно продолжить в непрерывное отображение $g: X \to Q^{n+1}$. Через O_ε обозначим ε-окрестность центра C куба Q^{n+1}, где ε меньше расстояния от C до S^n. Множество $g^{-1}(Q^{n+1} \setminus O_\varepsilon)$, очевидно, содержит замыкание $[V]$ некоторой окрестности V множества F. Через π обозначим проектирование множества $Q^{n+1} \setminus O_\varepsilon$ из центра C на S^n. Ясно, что отображение $\pi g: [V] \to S^n$ является искомым продолжением отображения f.

Из предложения 6 вытекает, что всякое вполне регулярное пространство регулярно, тогда, как с другой стороны, всякое нормальное T_1-пространство вполне регулярно. Однако существуют примеры регулярных, но не вполне регулярных и вполне регулярных, но не нормальных пространств.

Значение вполне регулярных пространств для топологии и ее приложений чрезвычайно велико, однако для нужд собственно теории размерности класс этих пространств оказывается слишком широким — как уже упоминалось, мы не выйдем в этой книге за пределы нормальных пространств; тем не менее в § 8 настоящей главы мы докажем несколько замечательных теорем, касающихся вполне регулярных пространств.

4. Совершенная нормальность метризуемых пространств. Докажем прежде всего, что всякое метризуемое пространство X нормально. Пусть ρ — какая-нибудь метрика пространства X, и пусть F_1 и F_2 — дизъюнктные замкнутые множества в X. Для каждой точки $x \in F_1$ положим $r_x = \frac{1}{2}\rho(x, F_2)$, а для каждой точки $y \in F_2$ положим $r_y = \frac{1}{2}\rho(y, F_1)$. Пусть

$$OF_1 = \bigcup_{x \in F_1} O(x, r_x), \qquad OF_2 = \bigcup_{y \in F_2} O(y, r_y).$$

Докажем, что окрестности OF_1 и OF_2 дизъюнктны. В самом деле, если бы существовала точка $z \in OF_1 \cap OF_2$, то существовали бы и такие точки $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$, что $z \in O(x_0, r_{x_0}) \cap O(y_0, r_{y_0})$. Обозначим через r наибольшее из двух чисел r_{x_0}, r_{y_1}, пусть, например, $r = r_{x_0}$. Тогда

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < r_{x_0} + r_{y_0} \leqslant 2r_{x_0} \leqslant \rho(x_0, F_2),$$

что противоречит тому, что $y_0 \in F_2$.

Для доказательства совершенной нормальности пространства X остается лишь показать, что всякое замкнутое множество $F \subseteq X$ есть множество типа G_δ. Для этого положим (при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$)

$$G_k = O\left(F, \frac{1}{k}\right).$$

Тогда $\bigcap G_k$ состоит из тех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, F) = 0$, т. е. $x \in [F] = F$. Итак, $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, ч. и т. д.

Итак:

Предложение 9. *Всякое метризуемое пространство совершенно нормально.*

§ 6. Системы множеств и покрытия

1. Системы подмножеств данного множества X. Пусть X — произвольное множество. Пусть $\sigma = \{M\}$ — произвольная система подмножеств множества X; объединение всех $M \in \sigma$ называем телом системы σ и обозначаем через $\tilde{\sigma}$, так что $\tilde{\sigma} \subseteq X$. Если E — произвольное подмножество множества X, то через σ_E (иногда через $E\sigma$) обозначаем подсистему системы σ, состоящую из всех элементов этой системы, пересекающихся с E.

Множество $\tilde{\sigma}_E$ называется *звездой* множества E относительно системы σ и обозначается часто через $\text{Зв}_\sigma E$; если при этом E состоит из единственной точки $x \in X$, то пишут $\text{Зв}_\sigma x$ и говорят о звезде точки x относительно системы σ; при этом $\text{Зв}_\sigma x = \Lambda$, если $x \in X \setminus \tilde{\sigma}$.

Всякая система $\sigma = \{M\}$ определяет систему $\sigma^* = \{\text{Зв}_\sigma x\}$, элементами которой являются звезды всевозможных точек $x \in X$ относительно системы σ.

Очевидно, системы σ и σ^* имеют одно и то же тело $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$.

Система σ называется *покрытием* множества $X_0 \subseteq X$, если $X_0 \subseteq \tilde{\sigma}$. Чаще всего мы будем рассматривать покрытия всего множества X, т. е. системы $\sigma = \{M\}$ множеств $M \subseteq X$, для которых $\tilde{\sigma} = X$. В этом случае подпокрытием покрытия называется всякая подсистема $\sigma_0 \subseteq \sigma$, для которой $\tilde{\sigma}_0 = X$. Если σ есть покрытие множества X, то покрытием этого множества X является и система σ^*.

Покрытие топологического пространства X открытыми (замкнутыми) в нем множествами будет называться открытым (замкнутым) покрытием.

Кратностью системы множеств σ в данной точке $x \in X$ — коротко $\text{кр}_x \sigma$ — называется мощность множества σ_x всех элементов системы σ, содержащих точку x. Очевидно, $\text{кр}_x \sigma = 0$

тогда и только тогда, когда $x \in X \diagdown \tilde{\sigma}$. Во всех точках $x \in \tilde{\sigma}$ имеем $\text{кр}_x \sigma \geqslant 1$.

Верхняя грань всех кардинальных чисел $\text{кр}_x \sigma$, взятых по всем $x \in X$, называется *кратностью системы* σ. В частности, кратность системы σ не превосходит счетной мощности $\aleph_0$, если система σ конечнократна (т. е. для любого $x \in X$ число $\text{кр}_x \sigma$ конечно) или счетнократна (т. е. $\text{кр}_x \sigma \leqslant \aleph_0$ для любого $x \in X$).

Счетнократные системы часто называют «точечно счетными», а конечнократные — точечно конечными. Чаще всего мы будем рассматривать в этой книге конечные системы, т. е. системы σ, состоящие из конечного числа множеств $M \subseteq X$.

Определение 1. Система множеств σ называется *звездно конечной*, если каждый элемент системы σ пересекается лишь с конечным числом элементов этой системы.

Определение 2. Мы говорим, что система множеств σ *вписана* в систему множеств σ_1 или *следует за ней*, если каждый элемент системы σ является подмножеством хотя бы одного элемента системы σ_1. В этом случае пишем $\sigma \succ \sigma_1$.

Замечание 1. Это понятие следования превращает любое множество систем (состоящих из подмножеств данного множества X), в частности любое множество покрытий множества X, в частично упорядоченное множество.

Определение 2*. Если система σ^* вписана в систему σ_1, то система σ называется *звездно вписанной* в систему σ_1, в этом случае пишут $\sigma \mathrel{\cdot\!\!\succ} \sigma_1$ (так что обозначения $\sigma \mathrel{\cdot\!\!\succ} \sigma_1$ и $\sigma^* \succ \sigma_1$ равносильны).

Очевидно, система σ звездно вписана в систему σ_1, если звезда $\text{Зв}_\sigma x$ каждой точки $x \in X$ относительно системы σ содержится в некотором (зависящем от точки x) элементе системы σ_1. Очевидно, из $\sigma \mathrel{\cdot\!\!\succ} \sigma_1$ следует $\sigma \succ \sigma_1$, так что звездная вписанность является усилением обычной.

Система σ называется *сильно звездно вписанной* в систему σ_1, если звезда каждого элемента системы σ содержится в некотором элементе системы σ_1. В этом случае пишем $\sigma \mathrel{:\!\!\succ} \sigma_1$.

Имеет место

Предложение 1. *Если* $\sigma \mathrel{\cdot\!\!\succ} \sigma_1 \mathrel{\cdot\!\!\succ} \sigma_2$, *то* $\sigma \mathrel{:\!\!\succ} \sigma_2$.

В самом деле, пусть $\sigma = \{M\}$, $\sigma_1 = \{M^{(1)}\}$, $\sigma_2 = \{M^{(2)}\}$. Вместо Зв_σ, Зв_{σ_1}, Зв_{σ_2} пишем соответственно Зв_0, Зв_1, Зв_2.

Берем произвольно $M \in \sigma$, $y \in \text{Зв}_0 M$. Тогда y лежит в некотором M_y, пересекающемся с M; берем точку $x \in M_y \cap M$. Тогда $y \in M_y \subseteq \text{Зв}_0 x$. Итак,

$$\text{Зв}_0 M \subseteq \bigcup_{x \in M} \text{Зв}_0 x. \tag{1}$$

Для каждой точки $x \in M$ берем элемент $M_x^{(1)} \in \sigma_1$, содержащий множество $\text{Зв}_0 x$. Ясно, что $M_x^{(1)} \supseteq M$.

Если точка $x_0 \in M$ фиксирована, то для любой точки $x \in M$ имеем включение $M_x^{(1)} \subseteq \text{Зв}_1 x_0$.

Выбираем элемент $M^{(2)} \in \sigma_2$, содержащий $\text{Зв}_1 x_0$; тогда $M_x^{(1)} \subseteq M^{(2)}$ для любого $x \in M$. Значит, $\text{Зв}_0 x \subseteq M^{(2)}$ для любого $x \in M$ и, в силу (1),

$$\text{Зв}_0 M \subseteq M^{(2)},$$

ч. и т. д.

Предложение 1 позволяет в большинстве случаев свести сильную звездную вписанность к обычной.

Усилением обычной вписанности является и так называемая комбинаторная вписанность: система σ' комбинаторно вписана в систему σ, если элементы обеих систем можно таким образом поставить во взаимно однозначное соответствие, что каждый элемент системы σ' содержится в соответствующем ему элементе системы σ. Если обе системы σ' и σ конечны, то комбинаторная вписанность системы σ' в систему σ означает, что обе системы состоят из одного и того же числа элементов s и что элементы обеих систем можно так занумеровать:

$$\sigma = \{A_1, \ldots, A_s\},$$
$$\sigma' = \{A_1', \ldots, A_s'\},$$

что $A_1' \subseteq A_1, \ldots, A_s' \subseteq A_s$. Вообще, если система σ' комбинаторно вписана в систему σ, то $\text{кр}\,\sigma' \leqslant \text{кр}\,\sigma$.

Замечание 2. Иногда оказывается удобным понятие *подобия* двух систем множеств: системы σ и σ' называются подобными между собою, если между ними можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что из того, что какие-нибудь, взятые в конечном числе, множества одной системы имеют непустое пересечение, следует, что соответствующие им множества другой системы также имеют непустое пересечение.

Замечание 3. Иногда приходится рассматривать системы σ, элементами которых являются множества A_α, обозначенные при помощи индексов α, взятых из данного множества индексов $A = \{\alpha\}$, чаще всего множество индексов есть просто множество, состоящее из натуральных (или трансфинитных) чисел, начиная с 0 или 1 и вплоть до некоторого $\alpha = \alpha_0$. Дадим точное определение этого понятия.

Предположим, что каждому индексу α (т. е. каждому элементу заданного множества индексов A) поставлено в соответствие некоторое множество $A_\alpha \subseteq X$, причем двум различным индексам может быть поставлено в соответствие одно и то же множество. Обозначенное множество A_α есть пара, одним из элементов которой является индекс α, а другим — соответствующее этому индексу подмножество множества X. Таким образом, обозначенные множества A_α и $A_{\alpha'}$ считаются различными, если $\alpha \neq \alpha'$. Все введенные выше понятия, очевидно, применимы и к системам обозначенных множеств; в частности, кратностью системы σ в точке x будет число обозначенных множеств — элементов системы σ, содержащих точку x.

Введем, наконец, следующее

Определение 3. *Произведением* двух систем множеств $\alpha = \{A\}$ и $\beta = \{B\}$ называется система множеств $\gamma = \alpha \wedge \beta$, элементами которой являются все (обозначенные) множества вида $A \cap B$, где $A \in \alpha$, $B \in \beta$.

2. **Укрупнение систем множеств.** Определение 4. Пусть дана система β подмножеств множества X. Систему $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$ назовем *укрупнением* системы β, если

(а) каждое Γ_λ есть сумма некоторых $B \in \beta$, причем каждое $B \in \beta$ входит в качестве слагаемого ровно в одну сумму.

Очевидно, $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$. Следовательно, если система β была покрытием множества X, то покрытием будет и укрупнение γ.

Из условия (а) легко вытекает

Предложение 2. *Для укрупнения γ системы β подмножеств X и любой точки $x \in X$ справедливо неравенство*

$$\text{кр}_x \gamma \leqslant \text{кр}_x \beta.$$

Следовательно,

$$\text{кр}\, \gamma \leqslant \text{кр}\, \beta.$$

Предположим дополнительно, что система β вписана в систему α. В этом предположении укрупнение γ называется *укрупнением системы β относительно системы α*, если в дополнение к условию (а) выполнено условие

(б) система γ комбинаторно вписана в систему α.

Покажем, что укрупнения покрытия β относительно покрытия α всегда существуют, и дадим стандартный метод для построения этих укрупнений.

Занумеруем элементы покрытия α порядковыми числами, употребляя для этого все числа (начиная с нуля), мощность которых меньше мощности покрытия α, так что

$$\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_\lambda, \ldots\}.$$

Обозначим через Γ_0 сумму всех элементов B покрытия β, содержащихся в A_0, а для любого $\lambda \geqslant 1$ обозначим через Γ_λ сумму всех $B \in \beta$, содержащихся в A_λ, но не содержащихся ни в каком $A_{\lambda'}$ с $\lambda' < \lambda$. Легко видеть, что система γ, состоящая из всех построенных таким образом Γ_λ, и будет искомым укрупнением покрытия β относительно покрытия α.

3. Замечания о звездно конечных системах и покрытиях. Пусть Σ — какая-нибудь система подмножеств данного множества X. Мы будем рассматривать сцепленные подсистемы σ_α системы Σ (см. § 4, п. 2). Объединение $\sigma_\alpha \cup \sigma_\beta$ двух сцепленных подсистем, имеющих непустое пересечение $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta \neq \Lambda$, есть, как легко видеть, снова сцепленная система; отсюда сразу следует, что объединение $\bigcup\limits_\alpha \sigma_\alpha$ любого числа (конечного или бесконечного) сцепленных систем σ_α, имеющих непустое пересечение $\bigcap\limits_\alpha \sigma_\alpha = \sigma_0 \neq \Lambda$, есть сцепленная система.

Поэтому всякая сцепленная подсистема σ_0 системы Σ (в частности, всякая подсистема σ_0, состоящая из одного какого-нибудь элемента системы Σ) содержится в единственной максимальной сцепленной подсистеме σ системы Σ, а именно в системе σ, являющейся объединением всех сцепленных подсистем $\sigma_\alpha \subseteq \Sigma$, содержащих данную подсистему σ_0.

Максимальные сцепленные подсистемы системы Σ называются иначе компонентами сцепленности (или просто компонентами) системы Σ.

Очевидно, две различные компоненты сцепленности не пересекаются и вся система Σ есть дизъюнктная сумма своих компонент сцепленности. Очевидно также, что тела различных компонент системы Σ дизъюнктны.

Замечание 4. Если система Σ является открытым покрытием пространства X, то тела ее компонент, очевидно, открыты и образуют дизъюнктное покрытие пространства X. Таким образом, дополнение до тела каждой компоненты покрытия Σ есть сумма тел остальных компонент этого покрытия. Поэтому тело каждой компоненты открытого покрытия пространства X открыто-замкнуто в X.

Предположим теперь, что система $\Sigma = \{M\}$ является звездно счетной (т. е. что каждый элемент системы Σ пересекается не более чем со счетным числом элементов той же системы). Докажем

Предложение 3 (Александров [2]). *Каждая сцепленная подсистема (в частности, компонента) σ звездно счетной системы Σ состоит из конечного или счетного числа элементов.*

Доказательство. Пусть M_0 — какой-нибудь фиксированный элемент системы σ; обозначим через σ_k подсистему системы σ, состоящую из всех элементов $M \in \sigma$, которые могут быть связаны с элементом M_0 цепочками «длины $\leqslant k$» («длиной цепочки» называется число составляющих ее элементов). Следующие утверждения очевидны:

1°. σ_1 состоит из одного элемента M_0.

2°. σ_{k+1} состоит из всех элементов $M \in \sigma$, пересекающихся хотя бы с одним элементом системы σ_k (так что, в частности, $\sigma_k \subseteq \sigma_{k+1}$).

3°. $\sigma = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_k$.

Остается доказать, что каждая система σ_k не более чем счетна. При $k=1$ это очевидно. Предположим доказанным, что система σ_k не более чем счетна. Так как с каждым элементом $M \in \sigma_k$ пересекается не более чем счетное число элементов системы σ и каждый элемент системы σ_{k+1} пересекается с некоторым элементом счетной (или конечной) системы σ_k, то и σ_{k+1} — не более чем счетная система, ч. и т. д.

4. Локально конечные и дискретные системы. Переходим к рассмотрению любых систем γ множеств, лежащих в пространстве X. Одним из основных определений является

Определение 5 (Александров [1]). Система γ множеств, лежащих в пространстве X, называется *локально конечной* в X, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность Ox, пересекающуюся не более чем с конечным числом множеств — элементов системы γ.

Предложение 4. *Если система $\gamma = \{A_\alpha\}$ локально конечна в пространстве X, то локально конечна в X и система* $[\gamma] = \{[A_\alpha]\}$.

Действительно, если окрестность Ox точки $x \in X$ пересекается лишь с множествами $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_s}$, то $Ox \cap [A_\alpha] = \Lambda$ для $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Предложение 5. *Произведение $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ двух локально конечных в пространстве X систем γ_1 и γ_2 есть локально конечная* в X *система.*

Действительно, если окрестность O_i точки x пересекает лишь конечное число элементов системы γ_i, $i = 1, 2$, то окрестность $O_1 \cap O_2$ этой точки пересекает лишь конечное число элементов системы $\gamma_1 \wedge \gamma_2$.

Предложение 6. *Если отображение $f\colon X \to Y$ пространства X в пространство Y непрерывно и система $\nu = \{A_\alpha\}$ локально конечна в Y, то система $f^{-1}\nu = \{f^{-1}A_\alpha\}$ локально конечна в X.*

Доказательство. Возьмем точку $x \in X$. Ее образ $y = fx$ обладает окрестностью O, пересекающей лишь конечное число элементов системы ν. Тогда окрестность $f^{-1}O$ точки x пересекает лишь конечное число элементов системы $f^{-1}\nu$. Локальная конечность системы $f^{-1}\nu$ доказана.

Очевидно, что всякая локально конечная система множеств является и точечно конечной (конечнократной). В то же время звездно конечная система может не быть локально конечной:

если X — числовая прямая, а γ — система всех ее одноточечных множеств, то γ — звездно, но не локально конечная система множеств.

Однако имеет место следующее очевидное утверждение:

Всякая звездно конечная система, состоящая из открытых множеств данного топологического пространства X, является локально конечной в своем теле. В частности, всякое звездно конечное открытое покрытие является локально конечным.

Важный частный случай локально конечных систем множеств выделяет следующее

Определение 6 (Бинг [1]). Система γ подмножеств пространства X называется *дискретной* в X, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью Ox, пересекающейся не более чем с одним из множеств системы γ.

Так же, как предложение 4, устанавливается

Предложение 7. *Если система $\gamma = \{A_\alpha\}$ дискретна в пространстве X, то дискретна в X и система $[\gamma] = \{[A_\alpha]\}$.*

В § 11 нам понадобится

Определение 7. Система γ подмножеств пространства X называется *σ-локально конечной*, соответственно *σ-дискретной*, если она представима в виде счетной суммы $\gamma = \bigcup \gamma_i$ локально конечных, соответственно дискретных, систем γ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Очевидно, всякая счетная система σ-дискретна.

Определение 8. Система γ множеств, лежащих в пространстве X, называется *консервативной*, если, какова бы ни была подсистема $\gamma_0 \subseteq \gamma$ системы γ, всякая точка прикосновения множества $\tilde{\gamma}_0$ является точкой прикосновения по крайней мере одного из элементов системы γ_0, т. е. если замыкание суммы любого числа элементов системы γ есть сумма замыканий этих элементов.

Из этого определения явствует, что система γ, состоящая из замкнутых множеств топологического пространства X, консервативна тогда и только тогда, когда тело любой подсистемы γ_0 системы γ есть замкнутое множество.

Легко доказывается

Предложение 8. *Всякая локально конечная, в частности дискретная, система множеств в пространстве X консервативна.*

В самом деле, пусть x — точка прикосновения тела $\tilde{\gamma}_0$ какой-нибудь подсистемы γ_0 локально конечной системы γ.

Возьмем произвольную окрестность Ox, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств $A \in \gamma_0$, пусть с $A_1, \ldots, A_s$.

Точка x, будучи точкой прикосновения множества $\tilde{\gamma}_0$, является и точкой прикосновения множества $\tilde{\gamma}_0 \cap Ox$, содержащегося в $A_1 \cup \ldots \cup A_s$, и, значит, точкой прикосновения множества

$A_1 \cup \ldots \cup A_s$. Но тогда x есть точка прикосновения и одного по крайней мере из множеств $A_1, \ldots, A_s$.

Предложение 9. *Дизъюнктная консервативная система $\gamma = \{F_\alpha\}$ замкнутых в пространстве X множеств дискретна.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Если $x \notin \tilde{\gamma}$, то в силу консервативности системы γ множество $X \setminus \tilde{\gamma}$ является окрестностью точки x, не пересекающейся ни с одним F_α. Если же $x \in F_{\alpha_0}$, то окрестность $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_0} F_\alpha$ точки x пересекается лишь с F_{α_0}. Дискретность системы γ доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два утверждения относительно укрупнений:

Предложение 10. *Если система β подмножеств пространства X локально конечна, то локально конечно в X любое укрупнение γ системы β.*

Действительно, если окрестность Ox точки $x \in X$ пересекает лишь элементы $B_1, \ldots, B_s$ системы β, то Ox пересекает лишь те элементы укрупнения γ, в которые в качестве слагаемых вошли множества $B_1, \ldots, B_s$.

Предложение 11. *Если покрытие β пространства X вписано в локально конечное покрытие α этого пространства, то любое укрупнение γ покрытия β относительно α локально конечно в X.*

Это утверждение вытекает из того, что в условиях предложения 11 покрытие γ комбинаторно вписано в α и, следовательно, локально конечно.

Среди локально конечных покрытий пространства особенной наглядностью обладают так называемые разбиения*): это — локально конечные покрытия, элементами которых являются канонические замкнутые множества с дизъюнктными открытыми ядрами. Конечные разбиения (с которыми нам главным образом и придется иметь дело) рассматривались уже давно (см., например, Александров [9], Курош [1] и др.). В частности, мы докажем в § 10, что во всякое конечное открытое покрытие нормального пространства вписано (даже комбинаторно!) некоторое конечное разбиение.

Определение 9. Покрытие, состоящее из двух элементов, называется *бинарным*.

Имеет место следующее

---

*) Общее понятие разбиения было впервые введено и исследовано Пономаревым [3]. Обращаем внимание читателя на то, что слово «разбиение» употребляется в этой книге в двух совершенно различных смыслах, один из которых указан в § 1, п. 7, а другой — только что. Однако мы надеемся, что это не сможет послужить источником каких-либо недоразумений.

Предложение 12. *Если $\alpha = \{A_1, A_2\}$ — бинарное разбиение пространства X, то*

$$\text{гр}\, A_1 = \text{гр}\, A_2 = A_1 \cap A_2,$$

и, обозначая общую границу множеств A_1 и A_2 через B, имеем

$$X = \langle A_1 \rangle \cup B \cup \langle A_2 \rangle.$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\langle A_1 \rangle = X \setminus A_2, \quad \langle A_2 \rangle = X \setminus A_1.$$

В самом деле, так как $\{A_1, A_2\}$ — покрытие, открытое множество $X \setminus A_2$ содержится в A_1, значит, $X \setminus A_2 \subseteq \langle A_1 \rangle$. С другой стороны, если открытое множество пересекается с каноническим замкнутым множеством, то оно пересекается и с его открытым ядром. Поэтому $\langle A_1 \rangle \subseteq X \setminus A_2$. Таким образом, $\langle A_1 \rangle = X \setminus A_2$. Аналогично $\langle A_2 \rangle = X \setminus A_1$. Следовательно, $X \setminus \langle A_1 \rangle = A_2$, $X \setminus \langle A_2 \rangle = A_1$. Поэтому

$$\text{гр}\, A_1 = A_1 \setminus \langle A_1 \rangle = A_1 \cap (X \setminus \langle A_1 \rangle) = A_1 \cap A_2.$$

Аналогично $\text{гр}\, A_2 = A_1 \cap A_2$. Очевидно также, что $X = (X \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (X \setminus A_1)$, т. е. $X = \langle A_1 \rangle \cup B \cup \langle A_2 \rangle$, где $B = A_1 \cap A_2 = \text{гр}\, A_1 = \text{гр}\, A_2$, что и требовалось доказать.

Закончим этот параграф важным понятием измельчающейся системы покрытий, которое понадобится, например, в § 7 гл. 5.

Определение 10 (Александров и Урысон [1]). Семейство $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ покрытий пространства X называется *измельчающимся*, если, какова бы ни была точка $x \in X$ и ее окрестность Ox, найдется такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что звезда точки x относительно покрытия α содержится в Ox.

Предложение 13. *Во всяком регулярном пространстве X со счетной базой имеется счетное измельчающееся семейство бинарных открытых покрытий.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{U_k\}$ — счетная база пространства X. Назовем пару элементов U_p, U_q базы $\mathfrak{B}$ канонической, если $[U_p] \subseteq U_q$, и занумеруем как-нибудь все канонические пары: $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots, \pi_n = (U_p, U_q)$. Для каждой канонической пары $\pi_n = (U_p, U_q)$ построим покрытие $\omega_n = \{U_q, X \setminus [U_p]\}$ пространства X.

Утверждаем, что счетное семейство $\{\omega_n\}$ всех покрытий ω_n является измельчающимся. В самом деле, пусть точка $x \in X$ и ее окрестность Ox даны. Находим прежде всего такое $U_q \in \mathfrak{B}$, чтобы $x \in U_q \subseteq Ox$. Так как пространство X по предположению регулярно, то существует такая окрестность $O_1 x$, что $[O_1 x] \subseteq U_q$. Берем теперь такое $U_p \in \mathfrak{B}$, что $x \in U_p \subseteq O_1 x$. Тогда $\pi_n = (U_p, U_q)$ есть каноническая пара и точка x содержится в элементе U_q соответствующего покрытия $\omega_n = \{U_q, X \setminus [U_p]\}$, а во втором элементе $X \setminus [U_p]$ этого покрытия, очевидно, не содержится. Таким образом, звезда точки x относительно покрытия ω_n состоит из одного элемента U_q и этот элемент содержится в заданной окрестности Ox.

Предложение 13 доказано.

§ 7. Бикомпактные, финально компактные, паракомпактные пространства. Совершенные отображения

1. Определение 1. Топологическое пространство называется

(A_1) *бикомпактным*,

(A_2) *финально компактным*,

(A_3) *паракомпактным*,

(A_4) *сильно паракомпактным*,

если во всякое открытое покрытие Ω этого пространства можно вписать открытое покрытие ω, являющееся соответственно

(a_1) *конечным*,

(a_2) *счетным*,

(a_3) *локально конечным*,

(a_4) *звездно конечным* *).

Таким образом всякое бикомпактное пространство является финально компактным, а также сильно паракомпактным, а всякое сильно паракомпактное пространство паракомпактно.

При определении бикомпактных и финально компактных пространств можно даже предположить, что конечное, соответственно счетное, покрытие ω, вписанное в Ω, составлено из элементов самого Ω, т. е. является подпокрытием покрытия Ω. В самом деле, если в покрытие Ω вписано конечное, соответственно счетное, покрытие ω, то каждый элемент $o_i \in \omega$ содержится в некотором элементе покрытия Ω, который обозначим через O_i. При этом i в первом случае пробегает конечное множество значений $i = 1, 2, \ldots, s$, а во втором — все натуральные значения $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда система $\{O_i\}$ образует подпокрытие покрытия Ω, конечное в первом, счетное во втором случае.

Таким образом, приходим к первоначальной форме определения бикомпактности, соответственно финальной компактности:

Определение 1_0. Топологическое пространство X называется *бикомпактным*, соответственно *финально компактным*, если каждое открытое покрытие пространства X содержит конечное, соответственно счетное, подпокрытие этого пространства.

---

*) Бикомпактные пространства были систематически исследованы в мемуаре Александрова и Урысона [2]. Паракомпактные пространства были определены в 1944 г. Дьедонне (Dieudonné) [1], после того как еще 1924 г. были определены локально конечные покрытия (Александров [1]).

В части, касающейся бикомпактных пространств, можно определению I_0 придать и несколько другую форму; напомним прежде всего, что:

Система $\sigma = \{M\}$ каких-то множеств $M \subseteq X$ называется *центрированной*, если всякая конечная подсистема $\sigma_0 = \{M_0, \ldots, M_n\}$ системы σ имеет непустое пересечение.

Имеет место

Предложение 1. *Пространство X тогда и только тогда бикомпактно, когда всякая центрированная система $\sigma = \{\Phi\}$ замкнутых множеств пространства X имеет непустое пересечение.*

В самом деле, пусть X бикомпактно и $\sigma = \{\Phi\}$ — центрированная система замкнутых множеств $\Phi \subseteq X$. Если бы пересечение $\bigcap\limits_{\Phi \in \sigma} \Phi$ было пусто, то дополнительные множества $\Gamma = X \setminus \Phi$ к множествам $\Phi \in \sigma$ составляли бы (открытое) покрытие ω пространства X; пусть $\omega_0 = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ — конечное подпокрытие $\omega_0 \subseteq \omega$ пространства X (существующее ввиду бикомпактности X); тогда для $\Phi_i = X \setminus \Gamma_i$, $i = 1, \ldots, s$, $\Phi_i \in \sigma$, имели бы $\Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_s = \Lambda$ вопреки центрированности системы σ.

Обратно, пусть в X всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Докажем, что X бикомпактно. Пусть $\Omega = \{\Gamma\}$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства X. Тогда замкнутые множества $\Phi = X \setminus \Gamma$, где Γ пробегает все Ω, имеют пустое пересечение. Следовательно, система $\{\Phi\}$ этих замкнутых множеств не центрирована, т. е. $\Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_s = \Lambda$ для некоторых $\Phi_i = X \setminus \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\Gamma_i \in \Omega$. Тогда $\omega = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ есть конечное покрытие пространства X, являющееся подпокрытием покрытия Ω.

Легким видоизменением предложения 1 является

Предложение 1′. *Пространство X тогда и только тогда бикомпактно, если для всякой центрированной системы (любых) множеств $\sigma = \{M\}$, $M \subseteq X$, множество $\bigcap\limits_{M \in \sigma} [M]$ непусто.*

В самом деле, из центрированности системы $\sigma = \{M\}$ следует центрированность системы $\bar{\sigma} = \{[M]\}$; поэтому, если X бикомпактно, то для любой центрированной системы имеем $\bigcap\limits_{M \in \sigma} [M] \neq \Lambda$ в силу предложения 1. Обратно, из непустоты множества $\bigcap\limits_{M \in \sigma} [M]$ для любой центрированной системы $\sigma = \{[M]\}$ следует непустота $\bigcap\limits_{F \in \sigma} F$ для любой центрированной системы $\sigma = \{F\}$ замкнутых множеств.

Замечание 1. Не оговаривая этого особо, будем рассматривать лишь такие системы множеств, все элементы которых являются подмножествами одного и того же заранее данного множества X. В этом предположении назовем центрированную систему максимальной, если она не является подсистемой никакой отличной от нее центрированной системы. С помощью трансфинитной индукции легко доказывается, что всякая центрированная система σ_0 подмножеств множества X является подсистемой некоторой максимальной центрированной системы σ (подмножеств того же множества X).

В самом деле, если система σ_0 не максимальна, то берем какую-нибудь центрированную систему $\sigma_1 \supset \sigma_0$. Вообще, если для данного порядкового числа α построена центрированная система σ_α и она не максимальна, то берем центрированную систему $\sigma_{\alpha+1} \supset \sigma_\alpha$. Если для всех порядковых чисел α, меньших, чем некоторое предельное трансфинитное число λ, построены центрированные системы σ_α так, что при $\alpha < \alpha' < \lambda$ имеем $\sigma_\alpha \subset \sigma_{\alpha'}$, то полагаем $\sigma_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \sigma_\alpha$. Тогда система σ_λ также центрирована. Построение обрывается на некоторой центрированной системе σ_α, по необходимости максимальной (иначе существовала бы $\sigma_{\alpha+1} \supset \sigma_\alpha$).

Из только что сделанного замечания следует, что в формулировке предложения 1′ можно ограничиться одними лишь максимальными центрированными системами, так что получается

Предложение 1″. *Пространство X тогда и только тогда бикомпактно, когда для всякой максимальной центрированной системы $\sigma = \{M\}$ множеств $M \subseteq X$ пересечение $\bigcap\limits_{M\in\sigma} [M]$ непусто.*

В следующем параграфе мы существенно воспользуемся этим критерием бикомпактности.

2. Предложение 2. *Всякое топологическое пространство, являющееся непрерывным образом бикомпактного, соответственно финально компактного, топологического пространства, бикомпактно, соответственно финально компактно.*

В самом деле, пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпактного (соответственно финально компактного) пространства X на пространство Y. Пусть $\Omega_Y = \{G\}$ — произвольное открытое покрытие пространства Y. Тогда множества $f^{-1}G$ образуют открытое покрытие $\Omega_X = f^{-1}\Omega_Y$ пространства X. Так как X бикомпактно (соответственно финально компактно), то имеем конечное (соответственно счетное) подпокрытие

$$\omega_X = \{f^{-1}G_i\} \subseteq \Omega_X$$

пространства X; тогда $\omega_Y = \{G_i\}$ есть конечное (соответственно счетное) покрытие пространства Y, содержащееся в Ω_Y. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Пусть* $\Phi \subseteq X$ — *замкнутое множество в пространстве* X, *и пусть* $\Omega = \{O_\alpha\}$ — *какое-нибудь открытое в* X *покрытие множества* Φ (*т. е. покрытие, элементами которого являются открытые в* X *множества*). *Если* X — *пространство, входящее в один из классов* (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) (*см. определение* 1), *то существует вписанное в* Ω *открытое в* X *покрытие* ω *множества* Φ, *принадлежащее соответственно классу* (a_1), (a_2), (a_3), (a_4) *).

Доказательство. Образуем открытое покрытие Ω' всего пространства X, состоящее из всех элементов $O_\alpha \in \Omega$ и еще из элемента $\Gamma = X \setminus \Phi$. Если пространство X принадлежит к классу (A_i), $i = 1, 2, 3, 4$, то существует вписанное в Ω' покрытие ω' пространства X, принадлежащее к классу (a_i); выбрасывая из него элементы, лежащие в $\Gamma = X \setminus \Phi$, получим искомое открытое в X покрытие ω множества Φ, принадлежащее к тому же классу (a_i).

Важнейшим следствием предложения 3 является

Предложение 4. *Замкнутое подпространство* $\Phi \subseteq X$ *пространства* X *класса* (A_i), $i = 1, 2, 3, 4$, *есть пространство того же класса* (A_i).

В самом деле, пусть $\omega = \{o_\alpha\}$ — какое-нибудь покрытие множества Φ открытыми в Φ множествами o_α. Требуется найти вписанное в ω и открытое в Φ покрытие ω_0 класса (a_i). Для этого для всякого $o_\alpha \in \omega$ возьмем открытое в X множество O_α с условием $\Phi \cap O_\alpha = o_\alpha$. Множества O_α образуют открытое в X покрытие Ω множества Φ. Согласно предложению 3 существует принадлежащее классу (a_i) открытое в X покрытие $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$, вписанное в Ω; тогда множества $U_\lambda = \Phi \cap \Gamma_\lambda$ образуют вписанное в ω открытое и принадлежащее классу (a_i) покрытие множества Φ, ч. и т. д.

Итак, все четыре свойства: бикомпактности, финальной компактности, паракомпактности и сильной паракомпактности — наследственны по замкнутым множествам.

Утверждение предложения 4, касающееся случая $i = 1$, допускает частичное обращение — им является следующее, также очень важное

Предложение 5. *Если бикомпактное пространство* X_0 *является подпространством хаусдорфова пространства* X, *то множество* X_0 *замкнуто в пространстве* X.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\xi \in X \setminus X_0$. Так как X — хаусдорфово пространство, то для каж-

*) При $i = 3$ имеется в виду покрытие, локально конечное в X.

дой точки $x \in X_0$ можно найти непересекающиеся, открытые в X множества $O_x\xi$ и Ox, содержащие соответственно точку ξ и точку x. Когда x пробегает все точки множества X_0, то выделенные множества Ox покрывают все X_0; так как подпространство X_0 бикомпактно, то из системы $\{Ox\}$ можно выбрать конечную подсистему $Ox_1, \ldots, Ox_s$, также покрывающую все X_0. Окрестности

$$OX_0 = Ox_1 \cup \ldots \cup Ox_s$$

и

$$O\xi = O_{x_1}\xi \cap \ldots \cap O_{x_s}\xi$$

не пересекаются, значит, $[OX_0]_X \cap O\xi = \Lambda$, откуда следует, что точка ξ не является точкой прикосновения множества X_0 в пространстве X, а так как ξ — произвольная точка множества $X \setminus X_0$, то множество X_0 замкнуто в X, ч. и т. д.

Из предложений 2, 4 и 5 вытекает

Предложение 6. *Всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y замкнуто.*

В самом деле, пусть F замкнуто в X; в силу предложения 4 множество F есть бикомпактное подпространство пространства X; по предложению 2 подпространство fF пространства Y бикомпактно и, следовательно, в силу предложения 5 замкнуто в хаусдорфовом пространстве Y.

Следствие 1. *Всякое взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y является топологическим.*

В самом деле (§ 1, п. 7), топологическим является всякое взаимно однозначное непрерывное замкнутое отображение.

3. Паракомпактность и аксиомы отделимости. Определение 2 (Бинг [1]). Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если любая его дискретная система замкнутых множеств F_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, имеет дизъюнктную систему окрестностей $O_\alpha \supseteq F_\alpha$.

Очевидно, коллективная нормальность является более сильным свойством, чем нормальность.

Предложение 7. *В коллективно нормальном пространстве X для любой дискретной системы замкнутых множеств F_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, существует дискретная система окрестностей $V_\alpha \supseteq F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. По условию в X существует дизъюнктная система открытых множеств $O_\alpha \supseteq F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть $\Phi = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} O_\alpha$. Так как система множеств F_α дискретна, то она консервативна. Поэтому множество $F = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} F_\alpha$ замкнуто и, в силу нормальности X, существует окрестность $O\Phi$ множества Ф, замыкание которой не пересекает F. Положим $V_\alpha = O_\alpha \setminus [O\Phi]$. Система $\{V_\alpha\}$ дискретна. Действительно, если $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} O_\alpha$, то открытое множество O_{α_0}, содержащее точку x, не пересекает множеств $V_\alpha \neq V_{\alpha_0}$. Если же $x \in \Phi$, то открытое множество $O\Phi \ni x$ не пересекается ни с одним V_α.

Предложение 7 доказано.

Предложение 8 (Бинг [1]). *Всякое хаусдорфово паракомпактное (значит, в частности, всякое хаусдорфово бикомпактное) пространство коллективно нормально (следовательно, и подавно нормально)**).

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово паракомпактное пространство. Докажем сначала, что X регулярно.

Пусть даны: замкнутое множество $\Phi \subset X$ и точка $a \in X \setminus \Phi$. Для каждой точки $x \in \Phi$ существуют непересекающиеся окрестности $O_x a$ и $O_a x$ — соответственно точки a и точки x. В покрытие $\{O_a x\}$ замкнутого множества Φ в силу предложения 3 можно вписать локальное конечное открытое в X покрытие $\omega = \{o_\lambda\}$.

Каждое o_λ содержится в некотором $O_a x$, причем $O_a x \subseteq X \setminus O_x a$, так что и $[O_a x] \subseteq X \setminus O_x a \subseteq X \setminus \{a\}$, поэтому и $[o_\lambda] \subseteq X \setminus \{a\}$.

Но $\omega = \{o_\lambda\}$ есть локально конечная, следовательно, консервативная система множеств, поэтому

$$[\tilde{\omega}] = \left[\bigcup_\lambda o_\lambda\right] = \bigcup_\lambda [o_\lambda] \subseteq X \setminus \{a\},$$

так что $Ua = X \setminus [\tilde{\omega}]$ есть окрестность точки a, с другой стороны, $U\Phi = \tilde{\omega}$ есть окрестность множества Φ и, очевидно, $Ua \cap U\Phi = \Lambda$.

Регулярность пространства X доказана.

Переходим к доказательству его коллективной нормальности. Рассмотрим дискретную в X систему замкнутых множеств F_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. В силу регулярности X каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью Ox, замыкание которой пересекает не более одного множества F_α. В покрытие $\{Ox\}$ впишем локально конечное открытое покрытие $\{U_\lambda\}$. Покрытие $\{[U_\lambda]\}$ также локально конечно, и каждый его элемент пересекает не более одного множества F_α. Поэтому система множеств

$$O_\alpha = X \setminus \bigcup_{[U_\lambda] \cap F_\alpha = \Lambda} [U_\lambda] \supseteq F_\alpha, \qquad \alpha \in \mathfrak{A},$$

открыта и дизъюнктна, ч. и т. д.

*) Нормальность хаусдорфовых бикомпактных, соответственно паракомпактных, пространств была доказана Александровым и Урысоном [2] в 1923 г. и Дьедонне [1] в 1944 г.

Бикомпактные хаусдорфовы пространства называются для краткости *бикомпактами*, а паракомпактные хаусдорфовы пространства — *паракомпактами*. Мы доказали, в частности, что все паракомпакты суть нормальные пространства. Мы увидим (в § 8, п. 5), что все нормальные пространства со счетной базой гомеоморфны множествам, лежащим в гильбертовом кирпиче, и, значит, метризуемы и имеют мощность $\leqslant \mathfrak{c}$, поэтому метризуемы и все паракомпакты (в частности, все бикомпакты) со счетной базой.

4. Компакты. Метризуемые бикомпакты называются *компактами*.

Мы предполагаем, что простейшие свойства компактов известны читателю из курса математического анализа; в частности, читатель, вероятно, знает, что во всяком компакте (множество точек которого бесконечно) содержится счетное всюду плотное множество и, следовательно (§ 3, конец п. 1), имеется счетная база (Хаусдорф). Отсюда и из того, что все бикомпакты со счетной базой метризуемы, вытекает, что компакты могут быть определены как бикомпакты со счетной базой.

Бикомпактность метрического пространства эквивалентна тому, что из всякой последовательности точек пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Отсюда сразу же следует, что всякий компакт X в любой своей метрике является полным метрическим пространством *). Он является, кроме того, и *вполне ограниченным* метрическим пространством, что означает, что при любом $\varepsilon > 0$ пространство X имеет конечное ε-покрытие **).

Имеет место и обратная

Теорема Хаусдорфа. *Всякое вполне ограниченное полное метрическое пространство есть компакт.*

Все эти предложения о компактах можно найти в любом современном курсе анализа, и мы будем предполагать, что читатель их знает.

Заметим еще, что подпространство вполне ограниченного пространства (в частности, компакта) вполне ограничено.

---

*) Верна и обратная теорема (Немыцкий и Тихонов [1]).

**) Покрытие α метрического пространства X называется *ε-покрытием*, если все его элементы имеют диаметры $< \varepsilon$. Если $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ есть ε-покрытие пространства X какими угодно множествами $M_1, \ldots, M_s$, то, заменяя множества M_i достаточно тесными их окрестностями OM_i, получим открытое ε-покрытие $\{OM_1, \ldots, OM_s\}$, а переходя к замыканиям $[M_1], \ldots, [M_s]$ или $[OM_1], \ldots, [OM_s]$, получим замкнутое ε-покрытие пространства X. Поэтому при определении полной ограниченности метрического пространства ε-покрытия $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ можно предполагать как совершенно произвольными, так и открытыми или замкнутыми — это не окажет влияния на результат.

При помощи только что сформулированной теоремы Хаусдорфа легко доказывается, что гильбертов кирпич Q^∞ является компактом.

В самом деле, как замкнутое множество полного метрического пространства, а именно всего гильбертова пространства R^∞, подпространство Q^∞ является полным метрическим пространством.

Докажем, что Q^∞ вполне ограничено. Зафиксировав какое-нибудь натуральное число N, поставим в соответствие каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_N, \ldots) \in Q^\infty$ точку $f_N x = (x_1, \ldots, x_N)$ N-мерного параллелепипеда $Q^N \subseteq Q^\infty$, состоящего из всех точек $x \in Q^\infty$, у которых все координаты, начиная с $(N+1)$-й, равны нулю. При произвольном малом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом N отображение $f_N\colon Q^\infty \to Q^N$ обладает свойством $\rho(x, fx) < \varepsilon$, т. е. является так называемым ε-сдвигом, и тогда, очевидно, прообраз $f_N^{-1}E$ всякого множества $E \subset Q^N$ диаметра $<\varepsilon$ имеет диаметр $<3\varepsilon$. Но N-мерный параллелепипед Q^N имеет конечное ε-покрытие $\alpha = \{E_1, \ldots, E_s\}$; следовательно, кирпич Q^∞ имеет 3ε-покрытие, состоящее из множеств $f_N^{-1}E_1, \ldots$ $\ldots, f_N^{-1}E_s$. Так как это верно при любом $\varepsilon > 0$, то полная ограниченность, а следовательно, и бикомпактность кирпича Q^∞ доказаны.

В следующем параграфе мы дадим (основываясь на теореме Тихонова) второе доказательство бикомпактности кирпича Q^∞.

Теорема 5*). *Несчетный компакт Φ имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Покажем, что в Φ можно найти дизъюнктную пару замкнутых несчетных множеств Φ_0 и Φ_1.

Сначала покажем существование такой точки $x_0 \in \Phi$, что

(а) любая окрестность точки x_0 несчетна. Предположим, что такой точки x_0 в Φ нет. Тогда для каждой точки $x \in \Phi$ можно выбрать счетную окрестность Ox. Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in \Phi$, можно выбрать конечное подпокрытие $\{Ox_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Так как $\Phi = \bigcup_{i=1}^{s} Ox_i$ и множества Ox_i счетны, то счетен и компакт Φ, вопреки условию. Итак, требуемая точка x_0 существует.

Покажем, что

(б) точка x_0, удовлетворяющая условию (а), обладает окрестностью Ox_0, дополнение до которой несчетно.

Предположим, что указанная окрестность Ox_0 не существует. Тогда дополнение $F_n = X \setminus O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ до $\frac{1}{n}$-окрестности точки x_0 счетно для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ Но тогда, вопреки

*) См. Александров и Урысон [2].

условию, счетен и компакт $\Phi = x_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Итак, требуемая окрестность Ox_0 существует.

Выберем окрестность Vx_0 точки x_0 с замыканием, содержащуюся в Ox_0. Тогда множества $\Phi_0 = [Vx_0]$ и $\Phi_1 = X \setminus Ox_0$ дизъюнктны, замкнуты в Φ и несчетны.

Аналогичным образом, в Φ_{i_1}, $i_1 = 0, 1$, можно найти дизъюнктные несчетные замкнутые множества $\Phi_{i_1 i_2}$, $i_2 = 0, 1$. Вообще, по индукции, для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ можно построить такие дизъюнктные замкнутые несчетные множества $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ (где $i_1 = 0, 1; \ldots; i_n = 0, 1$), что

$$\Phi_{i_1 \ldots i_{n-1}} \supseteq \Phi_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}, \qquad i_n = 0, 1.$$

Множества

$$\Phi_{i_1 \ldots i_n \ldots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_{i_1 \ldots i_n},$$

очевидно, дизъюнктиы для различных последовательиостей $i_1 \ldots i_n \ldots$, $i_n = 0, 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и непусты в силу бикомпактности Φ. Система φ множеств $\Phi_{i_1 \ldots i_n \ldots}$ континуальиа, так как континуальна система последовательностей $i_1 \ldots i_n \ldots$, $i_n = 0, 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Выбрав в каждом $\Phi_{i_1 \ldots i_n \ldots}$ по точке, получим множество мощности $\mathfrak{c}$, содержащееся в Φ. Следовательно, мощн. $\Phi \geqslant \mathfrak{c}$, ч. и т. д. Но мощн. $\Phi \leqslant \mathfrak{c}$ — это будет доказано в следующем параграфе (теорема 9, стр. 100—101).

5. Финально компактные пространства. Существуют примеры хаусдорфовых нерегулярных финально компактных пространств. В то же время имеет место

Предложение 9 (Веденисов). *Регулярное финально компактное пространство X нормально* *).

Доказательство. Рассмотрим дизъюнктную пару замкнутых в X множеств F_1 и F_2. Для каждой точки $x \in F_1$ возьмем окрестность $Ox \subseteq [Ox] \subseteq X \setminus F_2$. Множество F_1 замкнуто в X, следовательно, оно финальио компактно. Из его покрытия $\{Ox\}$, $x \in F_1$, выделим счетное подпокрытие $\{O_j^1 = Ox_j\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Ясно, что $[O_j^1] \cap F_2 = \Lambda$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогичным образом строим такое открытое покрытие $\{O_j^2\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, множества F_2, что $F_1 \cap [O_j^2] = \Lambda$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Существоваиие дизъюиктных окрестностей у миожеств F_1 и F_2 вытекает теперь из нормализующей леммы. Предложение 9 доказано.

---

*) Мы увидим в § 11, что регуляриое финальио компактное пространство даже сильно паракомпактно.

Дословно так же, как предложение 9, доказывается следующее принадлежащее Смирнову более общее утверждение:

Пусть F_1 и F_2 — два дизъюнктных замкнутых множества в регулярном пространстве X; если эти множества являются финально компактными подпространствами пространства X, то они имеют в X дизъюнктные окрестности.

Предложение 10. *Всякое пространство X, имеющее счетную базу, финально компактно.*

Мы докажем больше, а именно что пространство X со счетной базой удовлетворяет следующему условию:

Условие Линделёфа. *В любой системе Σ открытых множеств пространства X содержится счетная (или конечная) подсистема σ, сумма элементов которой равна сумме элементов всей системы Σ:*

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Sigma}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots\}$ — счетная база пространства X. Множество $U_n \in \mathfrak{B}$ назовем отмеченным элементом базы $\mathfrak{B}$, если оно содержится в некотором $\Gamma \in \Sigma$. Очевидно, тело системы Σ совпадает с суммой всех отмеченных элементов $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}, \ldots$ базы $\mathfrak{B}$. Обозначим через Γ_k какой-либо элемент системы Σ, содержащий данный отмеченный элемент U_{n_k} базы $\mathfrak{B}$. Система всех отобранных таким образом $\Gamma_k \in \Sigma$ есть счетная (или конечная) подсистема σ системы Σ, причем

$$\tilde{\Sigma} = \bigcup_k U_{n_k} \subseteq \bigcup_k \Gamma_k = \tilde{\sigma} \subseteq \tilde{\Sigma},$$

т. е. $\tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma}$, ч. и т. д.

Замечание 2. Переходя в формулировке условия Линделёфа к дополнениям фигурирующих в ней множеств, можем это условие высказать и следующим образом:

Условие Линделёфа. *Во всякой системе Σ' замкнутых множеств пространства X содержится подсистема σ', пересечение элементов которой совпадает с пересечением всех элементов системы Σ'.*

Условие Линделёфа, очевидно, эквивалентно условию финальной компактности всякого открытого множества, лежащего в данном пространстве X. Докажем, наконец, что последнее условие эквивалентно наследственной финальной компактности пространства X (заключающейся, как известно, в том, что всякое подпространство $X_0 \subseteq X$ финально компактно). В самом деле, пусть всякое открытое $G \subseteq X$ финально компактно; докажем, что тогда финально компактно и всякое подпространство $X_0 \subseteq X$. Пусть Ω^0 — какое-нибудь покрытие пространства X_0 открытыми в нем множествами G^0_α. Для каждого $G^0_\alpha \in \Omega^0$ берем такое открытое в X множество G_α, что $X_0 \cap G_\alpha = G^0_\alpha$. Тогда $G = \bigcup_\alpha G_\alpha \supseteq X^0$ открыто в X, следовательно, является финально компактным подпространством пространства X. Поэтому существует счетная подсистема $\omega = \{G_n\}$ системы $\{G_\alpha\}$, покрывающая все G. Но тогда множества $G^0_n = X_0 \cap G_n$ образуют счетную подсистему ω^0 системы Ω^0, покрывающую все пространство X_0. Мы доказали

Предложение 11. *Для наследственной финальной компактности пространства X каждое из следующих условий является достаточным (и очевидно необходимым):*

(а) *условие Линделёфа;*

(б) *финальная компактность каждого открытого подпространства G пространства X.*

Докажем, что всякое регулярное наследственно финально компактное пространство не только (наследственно) нормально, но и совершенно нормально. Для этого достаточно доказать, что всякое открытое $G \subseteq X$ есть F_σ-множество. Для каждой точки $x \in G$ возьмем в X окрестность Ox с условием $[Ox] \subseteq G$ (в силу предположенной регулярности пространства X такая окрестность существует). Вследствие финальной компактности подпространства G система $\{Ox\}$ выделенных нами окрестностей Ox содержит счетную подсистему $\sigma = \{O_n\}$, $O_n = Ox_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, с телом $\tilde{\sigma} = G$. Но каждое из отображенных нами O_n удовлетворяет условию $[O_n] \subseteq G$ для любого n; значит, $G = \bigcup_n O_n \subseteq \bigcup_n [O_n] \subseteq G$, т. е. $G = \bigcup_n [O_n]$, ч. и т. д.

Докажем, наконец, что, и обратно, всякое совершенно нормальное финально компактное пространство X наследственно финально компактно. Достаточно доказать финальную компактность всякого открытого $G \subseteq X$. Так как X совершенно нормально, то $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где все F_n замкнуты в X и, следовательно, финально компактны. Пусть Ω — какое-либо открытое покрытие подпространства $G \subseteq X$. Так как F_n финально компактно, то существует счетная подсистема ω_n системы Ω, покрывающая множество F_n. Объединение $\omega = \bigcup_n \omega_n$ есть счетная подсистема системы Ω, покрывающая все G, ч. и т. д.

Итак, доказано

Предложение 12. *Класс регулярных наследственно финально компактных пространств совпадает с классом совершенно нормалных финально компактных пространств.*

Частным случаем предложения 12 является

Предложение 13. *Для бикомпактов свойства наследственной финальной компактности и совершенной нормальности эквивалентны между собой.*

Замечание 3. В гл. 5, § 9, нам понадобится следующее утверждение:

Пусть в совершенно нормальном финально компактном пространстве X дана строго убывающая система замкнутых множеств Φ_λ, занумерованных порядковыми числами $\lambda \leqslant \mu$ *). Тогда число μ счетно.

Доказательство. Предположим, что число μ несчетно. Тогда $\Phi_{\omega_1} \subset \Phi_\lambda$ для любого $\lambda < \omega_1$. Из предложений 11, 12 и замечания 2 вытекает существование такой последовательности порядковых чисел $\lambda_i < \omega_1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_{\lambda_i} = \bigcap_{\lambda<\omega_1} \Phi_\lambda.$$

Существует такое порядковое число $\lambda_0 < \omega_1$, что $\lambda_i < \lambda_0$, $i = 1$, 2, 3, ... Тогда

$$\bigcap_{\lambda < \omega_1} \Phi_\lambda \subseteq \Phi_{\lambda_0+1} \subset \Phi_{\lambda_0} \dot{\subseteq} \bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_{\lambda_i} = \bigcap_{\lambda < \omega_1} \Phi_\lambda.$$

Полученное противоречие доказывает счетность числа μ.

6. Совершенные отображения. В п. 2 было показано, что свойства бикомпактности и финальной компактности при непрерывном отображении «переходят» от прообраза к образу. Сейчас мы установим утверждение о «переходе» некоторых свойств от образа к прообразу.

Сначала введем следующий важный класс отображений.

Определение 3. Непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *совершенным*, если прообраз $f^{-1}y$ любой точки $y \in Y$ является бикомпактным.

Любое непрерывное отображение бикомпакта на бикомпакт является, очевидно, совершенным отображением (см. предложение 6).

Предложение 14. *Пусть дано совершенное отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y. Если пространство Y*

(а) *бикомпактно,*

(б) *финально компактно,*

(в) *сильно компактно,*

---

*) Строгое убывание системы множеств Φ_λ означает, что $\Phi_{\lambda'} \supset \Phi_{\lambda''}$ при $\lambda' < \lambda''$.

(г) *паракомпактно, то таким же будет соответственно и пространство X.*

Доказательство. Сначала сделаем следующее простое замечание. Пусть в пространстве X дано открытое покрытие $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и пусть система ωf получается из системы ω заменой каждого множества O_α конечным набором открытых множеств $O_\alpha^1, \ldots, O_\alpha^{s(\alpha)}$, в сумме дающих O_α. Тогда система ωf является, очевидно, открытым покрытием пространства X, и, кроме того, если покрытие ω было (а) конечным, (б) счетным, (в) звездно конечным, (г) локально конечным, то соответственно таким же будет и покрытие ωf.

Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\nu = \{V_\beta\}$ пространства X. Так как множество $f^{-1}y$, $y \in Y$, бикомпактно, то существует такая конечная подсистема ν_y системы ν, что $f^{-1}y \subseteq \tilde{\nu}_y$. Так как отображение f замкнуто, то существует окрестность Oy точки y, прообраз $f^{-1}Oy$ которой содержится в $\tilde{\nu}_y$ (см. § 1, п. 7). В покрытие $\{Oy\}$ пространства Y впишем (а) конечное, (б) счетное, (в) звездно конечное, (г) локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Каждый элемент покрытия $\omega = \{O_\alpha = f^{-1}U_\alpha\}$ содержится хотя бы в одном множестве $\tilde{\nu}_y$. Выберем для каждого α одно множество $\tilde{\nu}_\alpha = \tilde{\nu}_y(\alpha)$, содержащее множество O_α.

Пусть $\nu_\alpha = \{V_{\beta_1}^\alpha, \ldots, V_{\beta_s}^\alpha\}$. Положим

$$O_{\beta_i}^\alpha = V_{\beta_i}^\alpha \cap O_\alpha, \qquad i = 1, \ldots, s = s(\alpha).$$

В силу сделанного в начале доказательства замечания покрытие ωf, состоящее из множеств $O_{\beta_i}^\alpha$, $i = 1, \ldots, s(\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, является (а) конечным, (б) счетным, (в) звездно конечным, (г) локально конечным. Кроме того, покрытие ωf вписано в покрытие ν.

Предложение 14 доказано.

Предложение 15. *Пусть f: $X \to Y$ — совершенное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y. Если пространство X имеет счетную базу, то пространство Y также имеет счетную базу.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{V_1, V_2, \ldots\}$ — счетная база открытых множеств пространства X. Обозначим через $\mathfrak{B}^*$ систему всех множеств W, являющихся конечными объединениями элементов базы $\mathfrak{B}$. Система $\mathfrak{B}^*$, очевидно, счетна. Обозначим через $f^{\#}\mathfrak{B}^*$ систему всех малых образов множеств $W \in \mathfrak{B}^*$. Система $f^{\#}\mathfrak{B}^*$ счетна и состоит из открытых подмножеств пространства Y. Покажем, что $f^{\#}\mathfrak{B}^*$ — база пространства Y. Пусть $y \in Y$ и Oy — произвольная окрестность точки y. Так как $f^{-1}y$ бикомпактно, то существует такое конечное покрытие $\{V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}\}$ множества $f^{-1}y$ элементами базы $\mathfrak{B}$, что $V_{i_j} \subseteq f^{-1}Oy$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $y \in f^{\#}W \subseteq Oy$, где $W = \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{i_j}$. Предложение 15 доказано.

Теорема Вайнштейна [1]. *Замкнутое отображение* $f: X \to Y$ *метрического пространства* X *на регулярное пространство с 1-й аксиомой счетности* Y *периферически бикомпактно в том смысле, что* $\operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y)$ *есть бикомпакт для любой точки* $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим точку $y \in Y$ и множество $\Phi = \operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y)$. Если множество Φ пусто, то оно бикомпактно. Пусть $\Phi \neq \Lambda$. Выберем какую-нибудь последовательность точек $x_n \in \Phi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и покажем, что эта последовательность имеет в Φ предельную точку.

Так как Y обладает 1-й аксиомой счетности, то можно так выбрать систему окрестностей V_n точки y, что $V_{n+1} \subseteq V_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и для любой окрестности Vy найдется такой номер n, что $V_n \subseteq V_y$.

Выберем числа $\varepsilon_n > 0$ так, что $O_{\varepsilon_n}x_n \subseteq f^{-1}V_n$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $x_n \in \Phi = \operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y)$, то для каждого n можно выбрать точку

$$x'_n \in O_{\varepsilon_n}x_n \cap (X \setminus f^{-1}y) = O_{\varepsilon_n}x_n \setminus f^{-1}y.$$

Последовательность $y_n = fx'_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, очевидно, сходится к точке y, и $y_n \neq y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, множество $B = \{y_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ не замкнуто в Y. Так как множество $A = \{x'_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ удовлетворяет соотношению $fA = B$, а отображение f замкнуто, то множество A также не замкнуто.

Из замкнутости отображения f следует, что $f[A] \supseteq [B] \ni y$. Поэтому существует точка $x \in [A]$, для которой $fx = y$, т. е.

$$x \in f^{-1}y \cap [A] \subseteq f^{-1}y \cap [X \setminus f^{-1}y] \subseteq f^{-1}y \cap \operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y) \subseteq \Phi.$$

Выберем такую подпоследовательность последовательности x'_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, что $\rho\left(x'_{n_k}, x\right) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда и

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, x\right) \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(\rho\left(x_{n_k}, x'_{n_k}\right) + \rho\left(x'_{n_k}, x\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left[\varepsilon_{n_k} + \rho\left(x'_{n_k}, x\right)\right] = 0,$$

т. е. точка x является предельной для последовательности x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Компактность, а в силу метризуемости X, и бикомпактность множества Φ доказаны. Теорема доказана.

Замечание 4. В условиях теоремы для произвольной точки $y \in Y$ положим $\Psi_y = \operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y)$, если $\operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y) \neq \Lambda$, и $\Psi_y = x_y \in f^{-1}y$, если $\operatorname{гр}(X \setminus f^{-1}y) = \Lambda$. Множество $X' = \bigcup\limits_{y \in Y} \Psi_y$ замкнуто в X, так как его дополнение открыто в X и $fX' = Y$. Поэтому отображение $f: X' \to Y$ замкнуто и, очевидно, бикомпактно, т. е. совершенно.

§ 8. Топологические произведения. Теоремы А. Н. Тихонова. Локально бикомпактные пространства

1. Произведение двух множеств (двух пространств) и график отображения. Произведение $X_1 \times X_2$ двух множеств X_1, X_2 было определено еще Г. Кантором как множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Это определение позволило рассматривать в аналитической геометрии плоскость как произведение двух прямых, а тор как произведение двух окружностей. Топология в произведение $W = X_1 \times X_2$ двух топологических пространств X_1, X_2 вводится посредством так называемых прямоугольных окрестностей, т. е. базы, элементами которой являются произведения $U \times V$, где U и V пробегают соответственно совокупность открытых множеств в X_1 и X_2. Множество $X_1 \times X_2$ с этой топологией называется топологическим произведением пространств X_1, X_2. Очевидно, получим ту же топологию в $X_1 \times X_2$, если заставим U и V пробегать элементы какой-нибудь базы $\mathfrak{B}_1$, соответственно $\mathfrak{B}_2$, пространств X_1 и X_2 (если речь идет о произведении $X_1 \times X_2$ двух прямых X_1 и X_2, в которых взяты базы $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, состоящие из интервалов, то на плоскости $X_1 \times X_2$ получим базу, элементами которой являются открытые прямоугольники).

Если $w = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, то x_1 и x_2 называются (соответственно первой и второй) координатами точки $w = (x_1, x_2)$. Ставя в соответствие каждой точке $w = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ее i-ю координату, $i = 1, 2$, получим отображение $\pi_i : (X_1 \times X_2) \to X_i$, $i = 1, 2$, называемое проектированием или проекцией произведения на его сомножитель X_i. Если X_1, X_2 — топологические пространства и $X_1 \times X_2$ — их топологическое произведение, то отображения проектирования, очевидно, непрерывны (и открыты).

Заметим, что для открытых в X и Y, соответственно, множеств U и V имеет место очевидное равенство

$$\operatorname{гр}(U \times V) = (\operatorname{гр} U \times [V]) \cup ([U] \times \operatorname{гр} V)\ ^{*)}.$$

Пусть теперь $f: X \to Y$ — какое-нибудь отображение произвольного множества X в произвольное множество Y. Графиком этого отображения называется множество $Z_f \subseteq X \times Y$, состоящее из всех точек вида $z = (x, fx) \in X \times Y$. Если $z_1 = (x_1, fx_1)$ и $z_2 = (x_2, fx_2)$ — две различные точки графика Z_f, то их первые координаты x_1 и x_2 различны; поэтому, рассматривая проектирование $\pi_1 : X \times Y \to X$ лишь на графике Z_f, получим взаимно однозначное отображение $\pi : Z_f \to X$, обратное отображение $q : X \to Z_f$ к которому ставит в соответствие точке $x \in X$ точку $qx = (x, fx) \in Z_f$.

---

*) Для множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ мы естественным образом отождествляем произведение $A \times B$ и множество $\{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Пусть $X \times Y$ — топологическое произведение пространств X, Y и $f: X \to Y$ — непрерывное отображение.

Имеет место

Предложение 1. *Отображение $\pi: Z_f \to X$ является гомеоморфизмом между графиком Z_f и пространством X.*

Достаточно доказать непрерывность обратного отображения $q: X \to Z_f$ в произвольной точке $x_0 \in X$. Для этого берем произвольную базисную окрестность $Z_f \cap O(x_0, y_0)$ точки $z_0 = (x_0, y_0) \in Z_f$, где $y_0 = fx_0$, $O(x_0, y_0) = U \times V$ и U, V — окрестности точек x_0 и y_0 соответственно в X, Y. Так как отображение $f: X \to Y$ непрерывно, то существует такая окрестность $U' \subseteq U$ точки x_0 в X, что $fU' \subset V$. Тогда, очевидно,

$$qU' \subseteq Z_f \cap (U' \times V) \subseteq Z_f \cap (U \times V),$$

чем непрерывность отображения $q: X \to Z_f$ в точке x_0 доказана.

2. Топологическое произведение и произведения отображений. А. Н. Тихонову [2] принадлежит большая заслуга распространения понятия топологического произведения на любое (бесконечное) число сомножителей.

Пусть дано множество $\mathfrak{A}$ любой мощности τ, элементы которого будем называть «индексами» и обозначать греческими буквами α, α', ... Пусть каждому индексу α отнесено некоторое определенное множество X_α. Произведение $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ полученной системы множеств*), по определению, есть множество X, элементами $x = \{x_\alpha\}$ которого являются наборы точек x_α, получающиеся, если каждому индексу $\alpha \in \mathfrak{A}$ отнести по одному элементу $x_\alpha \in X_\alpha$.

Если дано $x = \{x_\alpha\} \in X$, то $x_\alpha \in x$ называется α-й координатой точки $x \in X$ или проекцией этой точки в множество X_α. Отображение, ставящее в соответствие произвольной точке $x \in X$ ее α-ю координату x_α, назовем проектированием произведения X на сомножитель X_α и будем обозначать, обычно, через π_α.

Если $M \subseteq X$, то вместо $\pi_\alpha M$ часто пишут $(M)_\alpha$.

Пусть теперь дано некоторое подмножество $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ множества индексов и для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}'$ дано некоторое множество $P_\alpha \subseteq X_\alpha$; для $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ положим $P_\alpha = X_\alpha$. Тогда множество $P = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha \subseteq X$ называется цилиндром над основанием

---

*) Множества X_α и $X_{\alpha'}$ нашей системы могут состоять из одних и тех же элементов; поэтому, строго говоря, мы имеем систему «обозначенных» множеств X_α (понимая под обозначенным множеством пару, состоящую из данного множества и того индекса α, которому это множество отнесено). См. § 6, замечание 3.

$P' = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}'} P_\alpha$ или просто цилиндром над множествами P_α, $\alpha \in \mathfrak{A}'$. Легко проверить, что

$$P = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \pi_\alpha^{-1} P_\alpha.$$

Предположим теперь, что множества X_α суть топологические пространства. Следуя А. Н. Тихонову, введем в произведение $X = \prod_\alpha X_\alpha$ топологию следующим образом. Возьмем произвольное конечное число индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и в каждом X_α, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, возьмем открытое множество U_α; обозначим через $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ цилиндр над множествами $U_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, U_{\alpha_s} \subseteq X_{\alpha_s}$, т. е. $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}) = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i}$. Эти множества $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ назовем элементарными открытыми множествами пространства $X = \prod_\alpha X_\alpha$ (с его тихоновской топологией); открытые множества в этом пространстве определяются как всевозможные суммы элементарных открытых множеств; аксиомы (А), (Б) предложения 2 из § 2 при этом, как легко видеть, выполняются.

Если в каждом пространстве X_α выбрать по множеству P_α, то произведение $P = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha$ множеств P_α естественным образом лежит в топологическом произведении $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ пространств X_α. Так как система всех элементарных открытых множеств произведения X высекает на множестве P в точности систему всех элементарных открытых множеств топологического произведения пространств P_α, то индуцированная на P пространством X топология совпадает с топологией произведения пространств P_α. Таким образом,

произведение подпространств является подпространством произведения.

Из определения тихоновской топологии сразу следует, что *проектирование* $\pi_{\alpha'}$: $\prod_\alpha X_\alpha \to X_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathfrak{A}$, *есть непрерывное и открытое отображение.*

Автоматически проверяется

Предложение 2. *Произведение любого числа хаусдорфовых пространств X_α есть хаусдорфово пространство**).

*) Сразу доказывается и что произведение T_1-пространств есть T_1-пространство. Можно доказать, что произведение регулярных пространств регулярно. Мы докажем ниже (п. 5) аналогичную теорему для вполне регулярных пространств. Однако произведение даже двух нормальных пространств может не быть нормальным.

Предложение 3. *Если* $\mathfrak{B}_\alpha = \{U_\alpha\}$ *есть база пространства* X_α, *то, беря при определении элементарных открытых множеств* $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ *лишь элементы* $U_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}_{\alpha_i}$, *получим базу пространства* X.

Доказательство проводится автоматически и может быть предоставлено читателю.

Из предложения 3 вытекает

Предложение 4. *Произведение кардинального числа* $\leqslant \tau$ *пространств* X_α, *каждое из которых имеет вес* $\leqslant \tau$, *является пространством веса* $\leqslant \tau$, *где* $\tau \geqslant \aleph_0$.

В самом деле, в каждом из данных пространств X_α возьмем базу $\mathfrak{B}_\alpha$ мощности $\leqslant \tau$. Базой $\mathfrak{B}$ пространства $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$ является множество всевозможных $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$, для которых $U_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}_{\alpha_i}$. Так как мощность множества $\mathfrak{A}$ всех индексов α не превосходит числа τ, то и множество всех конечных комбинаций $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ этих индексов не превосходит τ. Но на каждую комбинацию $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ приходится не более τ комбинаций вида $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}$, значит, и не более τ элементарных открытых множеств $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$, так что мощность множества всех полученных элементарных открытых множеств $\leqslant \tau$.

Следующее предложение, в сущности, очевидно, но часто применяется и поэтому будет сейчас сформулировано явно:

Предложение 5. *Если* $x^0 = \{x^0_\alpha\} \in [M]$, $M \subseteq X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$, *то* $x^0_\alpha \in [\pi_\alpha M]$ *при любом индексе* $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Это предложение сразу следует из непрерывности проектирования π_α: $X \to X_\alpha$.

Важным следствием предложения 5 является

Предложение 6. *Произведение* $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ *любого числа индуктивно нульмерных пространств индуктивно нульмерно.*

Доказательство. Возьмем в каждом X_α базу $\mathfrak{B}_\alpha$, состоящую из открыто-замкнутых множеств U_α; элементарные открытые множества $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$, где $U_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}_{\alpha_i}$, образуют базу $\mathfrak{B}$ пространства X и по определению открыты в X; поэтому для доказательства предложения 6 достаточно убедиться в том, что любое множество $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ замкнуто. Пусть

$$x^0 = \{x^0_\alpha\} \in \left[O\left(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}\right)\right]_X.$$

Полагая в предложении 5 $M = O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$, видим, что $x^0_{\alpha_i} \in [U_{\alpha_i}] = U_{\alpha_i}$. Так как это верно для любого $i = 1, 2, \ldots, s$, то $x^0 = \{x^0_\alpha\} \in O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ — замкнутость множества $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$, значит и все предложение 6, доказаны.

Определение 1. Пусть дана система отображений

$$f_\alpha\colon X \to Y_\alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

топологического пространства X в топологические пространства Y_α. Тогда отображение

$$f\colon X \to Y = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha,$$

ставящее в соответствие точке $x \in X$ точку $fx = \{f_\alpha x\} \in Y$, называется *диагональным произведением* отображений f_α.

Очевидно, диагональное произведение $f\colon X \to Y = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$ отображений $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ удовлетворяет для любого α соотношению

$$f_\alpha = \pi_\alpha f,$$

где π_α обозначает проектирование произведения Y на сомножитель Y_α.

Предложение 7. *Диагональное произведение f непрерывных отображений f_α непрерывно.*

Доказательство. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$f_\alpha = \pi_\alpha f.$$

Поэтому, в силу непрерывности отображений f_α, для произвольного элементарного открытого множества

$$O = O\left(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}\right) = \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} \subseteq Y$$

прообраз

$$f^{-1}O = f^{-1} \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} f^{-1} \pi_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} f_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i}$$

открыт в X. Так как элементарные открытые в Y множества образуют в Y базу, то отображение f непрерывно (см. § 2, предложение 3), ч. и т. д.

Определение 1'. Пусть дана система отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ топологических пространств X_α в топологические пространства Y_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Отображение

$$f\colon \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$$

топологического произведения $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ в топологическое произведение $Y = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$, ставящее в соответствие точке $x = \{x_\alpha\} \in X$ точку $fx = \{f_\alpha x_\alpha\} \in Y$, называется *произведением отображений* f_α и пишется

$$f = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha.$$

Предложение 7'. *Произведение $f = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha$ непрерывных отображений f_α: $X_\alpha \to Y_\alpha$ непрерывно. Если при этом все отображения f_α открыты, соответственно индуктивно нульмерны* *), *то открытым, соответственно индуктивно нульмерным, будет и отображение f.*

Доказательство. Рассмотрим точку $x^0 = \{x_\alpha^0\} \in X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ и возьмем окрестность Oy^0 точки

$$y^0 = fx^0 = \{f_\alpha x_\alpha^0\} \in Y = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha.$$

Не ограничивая общности рассуждений, окрестность Oy^0 можно считать элементарной, т. е. можно считать, что существуют такие индексы α_i и такие окрестности O_{α_i} точек $f_{\alpha_i} x_{\alpha_i}^0$, $i = 1, \ldots, s$, что

$$Oy^0 = \left\{\{y_\alpha\} \in Y \mid y_{\alpha_i} \in O_{\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, s\right\}.$$

Из непрерывности отображений f_α вытекает существование таких окрестностей V_{α_i} точек x_{α_i}, что

$$f_{\alpha_i} V_{\alpha_i} \subseteq O_{\alpha_i}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Тогда для окрестности

$$Vx^0 = \left\{\{x_\alpha\} \in X \mid x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i},\ i = 1, \ldots, s\right\}$$

точки x^0 имеем включение

$$fVx^0 \subseteq Oy^0,$$

так как для произвольной точки $x = \{x_\alpha\} \subset Vx^0$ имеем $f_{\alpha_i} x_{\alpha_i} \in O_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$, следовательно, $fx = \{f_\alpha x_\alpha\} \in Oy^0$. Непрерывность отображения f доказана.

Предположим, что все отображения f_α открыты.

Рассмотрим элементарное открытое подмножество $O = O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ произведения X. Тогда, очевидно, $fO = O(f_{\alpha_1} U_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_s} U_{\alpha_s})$.

Следовательно, образы элементарных открытых в X множеств при отображении f открыты в X. Если O — произвольное открытое в X множество, то оно является суммой элементарных открытых множеств O_β, $\beta \in \mathfrak{B}$, и образ $fO = f\left(\bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} O_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} fO_\beta$, очевидно, открыт в Y.

Наконец, если все отображения f_α индуктивно нульмерны, то, в силу предложения 6, для любой точки $y = \{y_\alpha\} \in Y$ прообраз $f^{-1}y = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha^{-1} y_\alpha$ индуктивно нульмерен, т. е. отображение f также индуктивно нульмерно. Предложение 7' доказано.

Следующее предложение является бесконечномерным обобщением предложения 7 из § 5.

Предложение 8. *Непрерывное отображение*

$$f\colon F \to I^\tau$$

*) Отображение f: $X \to Y$ индуктивно нульмерно, если индуктивно нульмерны все прообразы $f^{-1}y$, $y \in Y$.

замкнутого в нормальном пространстве X множества F в тихоновский кирпич $I^\tau = \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} I_\alpha$, $I_\alpha = [0, 1]$, мощн. $\mathfrak{A} = \tau$, *можно продолжить в непрерывное отображение*

$$\bar{f}\colon X \to I^\tau.$$

Доказательство. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ функция

$$f_\alpha = \pi_\alpha f\colon F \to I_\alpha$$

непрерывна, как суперпозиция непрерывных отображений. По теореме Урысона существует непрерывная функция

$$\bar{f}_\alpha\colon X \to I_\alpha,$$

являющаяся продолжением функции f_α. Диагональное произведение $\bar{f}\colon X \to I^\tau$ является продолжением отображения f и непрерывно в силу предложения 7, ч. и т. д.

3. Примеры топологических произведений. Произведение прямых $X_1, \ldots, X_n$ есть n-мерное эвклидово пространство R^n (рассматриваемое как топологическое пространство) *).

Произведение счетного числа простых двоеточий гомеоморфно канторову совершенному множеству (доказательство предоставляется читателю как упражнение).

Пусть множество индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ имеет произвольную бесконечную мощность τ и D_α есть, при любом $\alpha \in \mathfrak{A}$, простое двоеточие. Тогда произведение $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_\alpha$ обозначается через D^τ и называется канторовым дисконтинуумом веса τ. Это — чрезвычайно важное топологическое пространство. Как следует из предыдущего, D^τ есть индуктивно нульмерное хаусдорфово пространство. Мы сейчас увидим, что оно бикомпактно.

Другим важнейшим, тоже хаусдорфовым, пространством веса τ является уже упоминавшийся тихоновский кирпич I^τ веса τ, а именно произведение $I^\tau = \prod\limits_\alpha I_\alpha$ отрезков $I_\alpha = [0, 1]_\alpha$, где $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ имеет мощность τ.

Докажем, что пространство $I^{\aleph_0}$, т. е. топологическое произведение счетного числа прямолинейных сегментов, есть (с точностью до гомеоморфизма) гильбертов кирпич Q^∞.

В самом деле, рассмотрим топологическое произведение X сегментов X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Так как топологическое произведение определено в чисто топологических терминах, то мы можем взять за X_n отрезок $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ числовой прямой. В этом

*) Упорядоченность координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точки $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ является следствием упорядоченности множества $\mathfrak{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$ индексов.

предположении пространство $X=\prod\limits_n X_n$ и гильбертов кирпич Q^∞ состоят из одних и тех же точек

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots),\qquad 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^n},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Остается доказать, что тождественное отображение X на Q^∞ является топологическим. Для этого достаточно доказать два утверждения (а) и (б).

(а) Каковы бы ни были точка $x=\{x_n\}\in X\equiv Q^\infty$ и число $\varepsilon>0$, можно найти такую окрестность $Ox\subseteq X$, что для всех точек $x'\in Ox$ имеем $\rho(x,x')<\varepsilon$ (расстояние в Q^∞).

(б) Каковы бы ни были точка $x=\{x_n\}\in Q^\infty\equiv X$ и ее окрестность $Ox\subseteq X$, можно найти такое ε, что из $\rho(x,x')<\varepsilon$ в Q^∞ следует $x'\in Ox$.

Доказательство утверждения (а). Берем N столь большим, чтобы было $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}$.

Окрестность Ox точки x в X определяем условиями (налагаемыми на координаты x'_k точки $x'=\{x'_k\}\in X$)

$$|x_1-x'_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}},\ \ldots,\ |x_N-x'_N|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}};$$

она удовлетворяет высказанному требованию.

Доказательство утверждения (б). Можем предположить, что Ox состоит из всех точек $x'=(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_k,\ \ldots)$, удовлетворяющих при некоторых $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s$ и $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_s$ условиям $\left|x_{n_i}-x'_{n_i}\right|<\varepsilon_i$.

Если теперь ε—наименьшее из чисел $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_s$ и x'—произвольная точка, для которой $\rho(x,\ x')<\varepsilon$, то для нее и подавно $\left|x_{n_i}-x'_{n_i}\right|<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i$ при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Утверждение (б) доказано.

Замечание 1. Если предполагать известным, что Q^∞ — компакт, то в силу следствия 1 § 7 достаточно доказать, что тождественное отображение пространства Q^∞ на X непрерывно, т. е. доказать одно лишь утверждение (б).

Обобщим полученный результат о гомеоморфизме $I^{\aleph_0}$ и Q^∞.

Предложение 9. *Пусть даны метрические пространства X_n с такими метриками ρ_n, что*

$$\operatorname{diam} X_n\leqslant 1$$

для всех $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Тогда топология произведения $X=\prod\limits_{n=1}^{\infty}X_n$

порождается метрикой ρ *на* X, *принимающей на произвольной паре точек* $x' = \{x'_n\}$ *и* $x'' = \{x''_n\}$ *из* X *значение*

$$\rho(x', x'') = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n^2 (x'_n, x''_n)\right]^{1/2}.$$

Доказательство. (а) Рассмотрим точку $x = \{x_n\} \in X$ и ее ε-окрестность $O_\varepsilon x$, $\varepsilon > 0$, относительно метрики ρ. Номер N выберем так, чтобы было

$$\sum_{n > N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Окрестность Ox точки x относительно топологии произведения определим следующим образом:

$$Ox = \left\{ x' = \{x'_n\} \in X \mid \rho_n(x'_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}, \quad n = 1, \ldots, N \right\}.$$

Очевидно,

$$Ox \subseteq O_\varepsilon x.$$

(б) Рассмотрим окрестность Ox точки $x = \{x_n\} \in X$ относительно топологии произведения. Очевидно, можно считать окрестность Ox элементарной, т. е. считать

$$Ox = \{x' = \{x'_n\} \in X \mid \rho_n(x'_n, x_n) < \varepsilon_n, \quad n = 1, \ldots, s\}.$$

Пусть $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2^n}}, \ldots, \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2^n}}\right\}$. Если $\rho(x' = \{x'_n\}, x) < \varepsilon$, то $\rho_n(x'_n, x_n) < \varepsilon\sqrt{2^n} \leqslant \varepsilon_n$ для $n = 1, \ldots, s$. Следовательно,

$$O_\varepsilon x \subseteq Ox.$$

Предложение 9 доказано.

На любом метризуемом пространстве X можно ввести метрику, относительно которой $\operatorname{diam} X \leqslant 1$ (см. § 3, п. 3). Поэтому из доказанного предложения вытекает

Предложение 10. *Топологическое произведение счетного числа метризуемых пространств метризуемо.*

Замечание 2. Так же, как предложение 9, доказывается, что:

топология произведения $X \times Y$ метрических пространств (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) порождается метрикой

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = [\rho_1^2(x', x'') + \rho_2^2(y', y'')]^{1/2}.$$

Следующее предложение — одно из важнейших во всей общей топологии.

4. Первая теорема Тихонова [2]. Теорема 6. *Топологическое произведение X любой системы $\{X_\alpha\}$ бикомпактных топологических пространств X_α бикомпактно.*

Доказательство. В силу предложения 1″ предыдущего параграфа достаточно доказать, что всякая максимальная центрированная система $\{M^\lambda\} = \sigma$ любых множеств $M^\lambda \subseteq X$ имеет общую точку прикосновения x_0, т. е. имеется точка $x_0 \in \bigcap\limits_{M^\lambda \in \sigma} [M^\lambda]$.

Сформулируем две простые леммы:

Лемма 1. *Пересечение $M^{\lambda_1} \cap \ldots \cap M^{\lambda_s}$ любого конечного числа элементов максимальной центрированной системы $\sigma = \{M^\lambda\}$ есть элемент системы σ.*

Утверждение следует из того, что, пополняя систему σ элементом $M^{\lambda_1} \cap \ldots \cap M^{\lambda_s}$, получаем снова центрированную систему множеств.

Лемма 2. *Если $\sigma = \{M^\lambda\}$ есть максимальная центрированная система множеств M^λ и множество N пересекается со всеми $M^\lambda \in \sigma$, то $N \in \sigma$.*

В самом деле, из леммы 1 следует, что все множества вида

$$N \cap M^{\lambda_1} \cap \ldots \cap M^{\lambda_s}$$

непусты, следовательно, пополняя ими систему σ, получим снова центрированную систему.

Положим $M^\lambda_\alpha = \pi_\alpha M^\lambda$. Система всех множеств M^λ_α (здесь α постоянно, а λ переменно) есть центрированная система в пространстве X_α. Так как X_α бикомпактно, то множества M^λ_α имеют по крайней мере одну общую точку прикосновения $\bar{x}_\alpha \in X_\alpha$. Докажем, что точка $\bar{x} = \{\bar{x}_\alpha\} \in X$ есть общая точка прикосновения M^λ. Для этого надо показать, что всякая элементарная окрестность точки $\bar{x}$ пересекается с любым M^λ. Произвольная элементарная окрестность $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s})$ точки $\bar{x}$ получается фиксированием некоторого конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и выбором окрестностей U_{α_i} точек $\bar{x}_{\alpha_i}$ в X_{α_i} для $i = 1, \ldots, s$. Но для «одноиндексных» окрестностей $O(U_{\alpha_i})$ точки $\bar{x}$ утверждение $O(U_{\alpha_i}) \cap M^\lambda \neq \Lambda$ равносильно утверждению $U_{\alpha_i} \cap M^\lambda_{\alpha_i} \neq \Lambda$, истинность которого непосредственно следует из того, что $\bar{x}_{\alpha_i} \in [M^\lambda_{\alpha_i}]$.

Итак, каждая одноиндексная окрестность точки $\bar{x}$ пересекается со всеми M^λ; но система всех M^λ — максимальная центрированная система, значит, по лемме 2 каждая одноиндексная окрестность точки $\bar{x}$ есть элемент системы $\{M^\lambda\}$. Каждая элементарная окрестность произвольной точки пространства есть пересечение конечного числа одноиндексных окрестностей, значит, в силу леммы 1 система $\{M^\lambda\}$, содержа, как мы видели, в числе своих элементов все одноиндексные окрестности точки $\bar{x}$, необходимо содержит и все вообще элементарные окрестности точки $\bar{x}$, откуда следует, что любая окрестность точки $\bar{x}$ пересекается с любым множеством M^λ, значит, $\bar{x} \in [M^\lambda]$ при любом $M^\lambda \in \sigma$ — первая теорема Тихонова доказана.

Так как произведение хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство, то из доказанного вытекает

Следствие 1. *Произведение любой системы бикомпактов есть бикомпакт.*

В частности, бикомпактами являются канторовы дисконтинуумы D^τ и тихоновские кирпичи I^τ.

Замечание 3*). Пространство D^τ является, при надлежащем определении в нем операции сложения, топологической группой. Пространство $F^\tau \equiv D_0^\tau$, т. е. произведение τ экземпляров связного двоеточия D_0, замечательно тем, что содержит топологический образ любого T_0-пространства веса $\leqslant\tau$. Далее, каждое T_0-пространство веса $\leqslant\tau$ является взаимно однозначным и в одну сторону непрерывным образом некоторого множества, лежащего в D^τ, а каждый бикомпакт веса $\leqslant\tau$ является непрерывным образом некоторого замкнутого множества, лежащего в D^τ.

Однако не на всякий бикомпакт можно отобразить (какой-либо) канторов дисконтинуум D^τ (пример указан в конце п. 7). Бикомпакт X называется диадическим, если он является непрерывным образом некоторого дисконтинуума D^τ. Диадическими бикомпактами являются, в частности, все метризуемые бикомпакты (компакты). Необходимым условием для диадичности бикомпакта X является условие Суслина: всякая система дизъюнктных открытых в X множеств счетна (теорема Шпильрайна-Марчевского).

По поводу только что затронутых вопросов см., например, статьи Александрова [15], [19].

Здесь же из предложений этого круга идей докажем лишь одно, именно следующее:

Теорема 7 (вторая теорема Тихонова [2]). *Всякое вполне регулярное пространство бесконечного веса τ гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в тихоновском кирпиче веса τ.*

5. Следствия второй теоремы Тихонова. Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем по поводу нее некоторые замечания и выведем из нее некоторые следствия. Прежде всего, из нее следует, что тихоновский кирпич I^τ «веса τ» действительно имеет вес τ: в самом деле, будучи произведением τ отрезков, I^τ имеет вес $\leqslant\tau$, а содержа топологический образ любого

*) См. гл. 2, § 3.

вполне регулярного пространства веса τ *), не может иметь вес $<\tau$ **).

Далее, легко доказывается, что

всякое подпространство X_0 вполне регулярного пространства X само есть вполне регулярное пространство.

Отсюда, в частности, следует, что всякое подпространство нормального пространства, значит, и всякое подпространство бикомпакта вполне регулярны. С другой стороны, по второй теореме Тихонова вполне регулярные пространства (веса τ) с точностью до гомеоморфизма являются подпространствами некоторого бикомпакта (веса τ), именно тихоновского кирпича I^τ (при этом X является всюду плотным подпространством бикомпакта $[X]_{I^\tau} \subseteq I^\tau$).

Итак, имеет место предложение:

Теорема 8. *Вполне регулярные пространства (веса τ) могут быть определены как всюду плотные подпространства бикомпактов (веса τ), или как подпространства нормальных пространств (веса τ), или, наконец (с точностью до гомеоморфизма), как подпространства тихоновского кирпича I^τ.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 2. *Топологическое произведение $X = \prod X_\alpha$ любого числа вполне регулярных пространств вполне регулярно.*

В самом деле, обозначая через $\tilde{X}_\alpha$ бикомпакт, содержащий пространство X_α, видим, что $X = \prod X_\alpha \subseteq \prod \tilde{X}_\alpha$; но пространство $\tilde{X} = \prod \tilde{X}_\alpha$ есть бикомпакт, значит, его подпространство X вполне регулярно. Тихоновский кирпич I^τ при $\tau = \aleph_0$ превращается, как мы видели в п. 3, в гильбертов кирпич Q^∞; следовательно, вторая теорема Тихонова является ***) обобщением следующей теоремы Урысона [2] о погружении ****).

Теорема 9. *Всякое (вполне) регулярное пространство со счетной базой гомеоморфно множеству, лежащему в гильбертовом кирпиче (и, следовательно, метризуемо).*

Гильбертово пространство (значит, и кирпич Q^∞), будучи метризуемым пространством со счетным всюду плотным множеством, есть пространство со счетной базой; поэтому теорема 9 может быть сформулирована и так:

Для того чтобы топологическое пространство X было гомеоморфно множеству, лежащему в гильбертовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетную базу и обладало любым из следующих свойств:

---

*) Например, пространства, состоящего из τ изолированных точек.

**) Это легко доказать и непосредственно.

***) И по методу своего доказательства.

****) См. Тихонов [1]. Урысоном эта теорема доказана для нормальных пространств.

1) *нормальность*,
2) *полная регулярность*,
3) *регулярность* *).

Принципиальное значение этой теоремы очень велико: она полностью характеризует с топологической стороны множества, лежащие в гильбертовом пространстве, указывая неожиданно короткий путь, по которому можно прийти от самых общих топологических построений — топологических пространств — к совершенно конкретному объекту теории точечных множеств — к множествам, расположенным в гильбертовом пространстве.

Из теоремы 9 и предложений 2 и 15 § 7 вытекает

Следствие 3. *Непрерывный хаусдорфов образ компакта — компакт.*

Из теоремы 9, далее, вытекает

Теорема 10. *Все метрические пространства, содержащие счетные всюду плотные множества, и только такие метрические пространства гомеоморфны множествам, лежащим в гильбертовом пространстве.*

6. Доказательство второй теоремы Тихонова. Пусть X — вполне регулярное пространство. Множество $\Sigma = \{f_\alpha\}$ непрерывных функций $f_\alpha\colon X \to [0, 1]$ назовем множеством функций, расчленяющим пространство X, если для любой точки $x_0 \in X$ и любой ее окрестности Ox_0 в X можно найти такую функцию $f_\alpha \in \Sigma$, что $f_\alpha x_0 = 0$, $f_\alpha(X \setminus Ox_0) = 1$. Расчленяющие семейства функций во вполне регулярном пространстве X заведомо существуют: таково во всяком случае семейство всех непрерывных функций $f\colon X \to [0, 1]$.

Вторая теорема Тихонова будет доказана, как скоро мы докажем следующие два предложения:

(А) Во вполне регулярном пространстве веса τ существует расчленяющее множество функций мощности τ.

(Б) Если во вполне регулярном пространстве X существует расчленяющее множество функций мощности τ, то существует и топологическое отображение φ пространства X в тихоновский кирпич I^τ.

Из утверждения (Б) следует, что мощность всякого расчленяющего множества функций не меньше, чем вес пространства.

Лемма 3. *Пусть x_0 — точка вполне регулярного пространства X. Ко всякой окрестности Ox_0 точки x_0 можно найти такую окрестность O_1x_0 той же точки, что замкнутые множества $[O_1x_0]$ и $X \setminus Ox_0$ функционально отделимы в X (так что, в частности, $[O_1x_0] \subseteq Ox_0$).*

---

*) Эквивалентность этих трех свойств для пространств со счетной базой следует из предложений 9 и 10 § 7, п. 5.

Для доказательства этой леммы возьмем какую-нибудь функцию $f\colon X \to [0, 1]$, непрерывную в X, равную 0 в x_0 и равную 1 в $X \setminus Ox_0$. Обозначим через O_1x_0 множество всех точек $x \in X$, в которых $fx < \frac{1}{2}$, определим функцию так:

$$f_1x = \begin{cases} 0, & \text{если } fx \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\left(fx - \frac{1}{2}\right), & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant fX \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция f_1x непрерывна (см. § 1, п. 7, предложение 10) и отделяет друг от друга множества O_1x_0 и $X \setminus Ox_0$.

Доказательство утверждения (А). Возьмем теперь базу $\mathfrak{B} = \{U_\nu\}$ пространства X, имеющую мощность τ; пару $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$, где $U_\mu \in \mathfrak{B}$, $U_\nu \in \mathfrak{B}$, назовем канонической, если $[U_\mu] \subseteq U_\nu$ и множества $[U_\mu]$, $X \setminus U_\nu$ являются функционально отделимыми. Множество всех канонических пар обозначим через σ. Оно имеет мощность $\leqslant \tau$. Выберем теперь для каждой канонической пары $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$ функцию $f_\alpha\colon X \to [0, 1]$, непрерывную в X, равную 0 на $[U_\mu]$ и 1 на $X \setminus U_\nu$. Множество Ξ отобранных нами функций f_α имеет мощность $\leqslant \tau$ и есть множество, расчленяющее пространство X. В самом деле, каковы бы ни были точка x_0 и ее окрестность G в X, возьмем содержащуюся в G окрестность $Ox_0 = U_\nu \in \mathfrak{B}$, подберем к ней окрестность O_1x_0 согласно лемме 3 и лежащую в O_1x_0 окрестность $O_2x_0 = U_\mu$; пара (U_μ, U_ν) есть каноническая пара π_α, причем $f_\alpha x_0 = 0$ и $f_\alpha x = 1$ для $x \in X \setminus G$. Утверждение (А) доказано.

Доказательство утверждения (Б). Пусть дано множество

$$\Xi = \{f_\alpha\}$$

функций, расчленяющее пространство X, с индексами α, пробегающими некоторое множество $\mathfrak{A}$ мощности τ. Топологическое отображение φ пространства X в I^τ построим следующим образом. Пусть для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ взят сегмент

$$I_\alpha = [0 \leqslant t_\alpha \leqslant 1]$$

числовой прямой. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие точку

$$f_\alpha x \in I_\alpha.$$

Получим точку $\varphi x = \{f_\alpha x\} \in I^\tau = \prod\limits_\alpha I_\alpha$. Этим определено отображение φ пространства X на некоторое множество $\varphi X = Y \subseteq I^\tau$.

Отображение φ взаимно однозначно. В самом деле, пусть $x \in X$, $x' \in X$, $x \neq x'$. К окрестности $X \setminus \{x'\}$ точки x подбираем, согласно определению расчленяющего множества функций, функцию $f_\alpha \in \Xi$ так, чтобы $f_\alpha x = 0$ и $f_\alpha x' = 1$; тогда α-е координаты $f_\alpha x$ и $f_\alpha x'$ точек $\{f_\alpha x\}$ и $\{f_\alpha x'\}$ различны, так что $\varphi x \neq \varphi x'$.

В силу предложения 7 отображение φ непрерывно.

Отображение φ^{-1}: $Y \to X$ непрерывно. В самом деле, пусть $y = \{t_\alpha\} \in Y$, $\varphi^{-1} y = x \in X$. К произвольной окрестности Ox точки x в X требуется подобрать такую окрестность Oy в I^τ, чтобы $\varphi^{-1}(Oy \cap Y) \subseteq Ox$. Берем функцию $f_\alpha \in \Xi$ так, чтобы было $f_\alpha x = 0$ и $f_\alpha (X \setminus Ox) = 1$. Тогда α-я координата t_α точки $y = \varphi x$ есть $t_\alpha = f_\alpha x = 0$. Обозначаем через Oy множество всех точек $y' = \{t'_\alpha\} \in I^\tau$, у которых $t'_\alpha < 1$. Для любой точки $y' \in Y$, попавшей в Oy, имеем $\varphi^{-1} y' \in Ox$. В самом деле, если бы $x' = \varphi^{-1} y \in X \setminus Ox$, то было бы $f_\alpha x' = 1$, т. е. α-я координата точки x' равнялась бы 1, вопреки определению точки y'.

Утверждение (Б), а значит, и вторая теорема Тихонова доказаны.

Докажем с помощью второй теоремы Тихонова следующее

Предложение 11. *Для топологического произведения $X \times B$ вполне регулярного пространства X на бикомпакт B проекция π_X: $X \times B \to X$ произведения $X \times B$ на сомножитель X является замкнутым (и, следовательно, совершенным) отображением.*

Доказательство. По второй теореме Тихонова пространство X можно считать подмножеством тихоновского куба I^τ при некотором τ. Проекция π: $I^\tau \times B \to I^\tau$ произведения $I^\tau \times B$ на сомножитель I^τ замкнута (см. предложение 6 из § 7).

Кроме того, на множестве $X \times B = \pi^{-1} X$ она совпадает с отображением π_X. В силу утверждения 1 из § 1 отображение π_X замкнуто, ч. и т. д.

Из доказанного предложения и предложения 14 из § 7 вытекает

Следствие 4. *Топологическое произведение $X \times B$ паракомпакта X, соответственно сильно паракомпактного (хаусдорфова) пространства X, на бикомпакт B паракомпактно, соответственно сильно паракомпактно.*

7. Бикомпактные расширения. Локально бикомпактные пространства. Назовем бикомпактным расширением данного вполне регулярного пространства X всякий бикомпакт $\bar{X} = bX$, содержащий пространство X в качестве всюду плотного множества. Из только что проведенных рассуждений следует, что всякое расчленяющее семейство функций пространства X определяет некоторое бикомпактное расширение этого пространства. В самом деле, пусть τ — мощность данного расчленяющего множества функций. Мы имели топологическое отображение φ пространства X на некоторое множество $Y = \varphi X \subseteq I^\tau$. Возьмем замыкание $[Y]$ множества Y (в I^τ). Заменяя точки $y \in Y \subseteq [Y]$ взаимно однозначно соответствующими им точками $x \in X$, можем считать, что само X лежит в бикомпакте $[Y]$ и является всюду плотным множеством этого бикомпакта, который, таким образом, становится бикомпактным расширением пространства X. Особенно интересен случай, когда расчленяющее множество функций есть максимальное множество этого рода, т. е. состоит из всех непрерывных в X функций $f\colon X \to [0, 1]$. Соответствующее бикомпактное расширение $\tilde{X}$ пространства X называется максимальным бикомпактным расширением этого пространства и обозначается через βX. Это расширение называется также расширением Стоуна — Чеха тихоновского пространства X.

Бикомпактным расширениям вполне регулярных, в частности нормальных, пространств, а среди них в особенности расширению Стоуна — Чеха будет посвящен весь следующий параграф этой главы.

Сейчас же мы скажем несколько слов о так называемых минимальных или «одноточечных» бикомпактных (хаусдорфовых) расширениях пространства X — это бикомпакты $\tilde{X}$, получающиеся из пространства X присоединением к ним единственной неизолированной точки, т. е. расширения вида $\tilde{X} = X \cup \xi$, где $\tilde{X}$ — бикомпакт, а $\xi = \tilde{X} \setminus X$ — одна точка (неизолированная в $\tilde{X}$). Разумеется, существование таких расширений предполагает (как и существование всяких вообще хаусдорфовых бикомпактных расширений), что X — вполне регулярное пространство. Однако это условие, будучи необходимым, далеко не достаточно: необходимое и достаточное условие для существования одноточечного бикомпактного хаусдорфова расширения $\tilde{X} = X \cup \xi$ пространства X заключается в том, чтобы X было хаусдорфовым локально бикомпактным пространством (тогда оно автоматически будет и вполне регулярным). При этом пространство X называется *локально бикомпактным* (Александров, 1924, [2]), если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $Ox \subseteq X$, замыкание которой $[Ox]$ бикомпактно.

Предложение 12. *Всякое открытое подпространство $G \subseteq X$ бикомпакта X локально бикомпактно.*

В самом деле, вследствие нормальности бикомпакта X каждая точка $x \in G$ имеет окрестность Ox, замыкание $[Ox]$ которой лежит в G и, как замкнутое множество в бикомпакте X, само есть бикомпакт.

Докажем предложение, обратное предложению 12, даже в несколько усиленном виде:

Теорема 11 (Александров [2]). *Ко всякому локально бикомпактному хаусдорфову пространству X (и только к такому пространству) можно присоединить одну точку ξ так, что получится бикомпакт $\tilde{X} = X \cup \xi$ (причем топология в X, как в* *подпространстве бикомпакта $\bar{X}$, будет совпадать с топологией,* a priori *данной в* X); *при этом топология в* $\bar{X}$ *однозначно определена топологией в* X.

В самом деле, пусть $\bar{X}$ есть бикомпакт. Отсюда уже следует, что X (как открытое множество в бикомпакте $\bar{X}$) есть локально бикомпактное пространство. Далее, все те и только те из множеств, лежащих в X, открыты в $\bar{X}$, которые открыты в X (иначе топология, данная в X a priori, не совпадала бы с топологией, полученной из $\bar{X}$). Если Γ есть открытое множество в $\bar{X}$, содержащее точку ξ, то $\Gamma = \xi \cup G$, где G открыто в X, причем $F = X \setminus G = \bar{X} \setminus \Gamma$, как замкнутое множество в бикомпакте $\bar{X}$, само бикомпактно. Обратно, всякое множество вида $\Gamma = \xi \cup G$, где $F = X \setminus G$ есть бикомпакт, открыто в $\bar{X}$, так как его дополнение $\bar{X} \setminus \Gamma = X \setminus G$, будучи бикомпактом, замкнуто в $\bar{X}$.

Итак, если существует бикомпакт $\bar{X} = X \cup \xi$, содержащий данное хаусдорфово пространство X, то это возможно во всяком случае лишь тогда, когда X локально бикомпактно, причем топология в $\bar{X}$ однозначно определена тем, что открытые множества в $\bar{X}$, не содержащие ξ, суть все открытые множества в X и только они, а открытые множества в $\bar{X}$, содержащие точку ξ, суть не что иное, как множества вида $\xi \cup G$, где $G \subseteq X$ и $X \setminus G$ есть бикомпакт. Докажем, что в том случае, когда X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, пространство $\bar{X} = X \cup \xi$ с только что описанной топологией действительно есть бикомпакт. Прежде всего, легко проверяется, что в $\bar{X}$ выполнены аксиомы топологического пространства. Докажем, далее, что хаусдорфова аксиома отделимости также выполнена в пространстве $\bar{X}$. Это ясно для любых двух точек x и x', лежащих в X; но для ξ и любой точки $x \in X$ также можно найти непересекающиеся окрестности в $\bar{X}$, для этого достаточно взять $Ox \subset X$ так, чтобы $\Phi = [Ox]_X$ было бикомпактно, — тогда окрестности Ox и $O\xi = \xi \cup (X \setminus \Phi)$ не пересекаются. Наконец, $\bar{X}$ бикомпактно. В самом деле, пусть Σ — система открытых в $\bar{X}$ множеств Γ_α, покрывающих все $\bar{X}$. Среди множеств $\Gamma_\alpha \in \Sigma$ имеется некоторое $\Gamma_0 \equiv O\xi = \xi \cup (X \setminus \Phi)$, где $\Phi \subset X$ есть бикомпакт. Остальные множества $\Gamma_\alpha \in \Sigma$, $\alpha \neq 0$, во всяком случае покрывают бикомпакт Φ; среди них можно выбрать конечное число множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, покрывающих Φ. Множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ покрывают все пространство $\bar{X}$, чем бикомпактность этого пространства доказана.

Теорема 11 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Любое множество X с максимальной (т. е. изолированной) топологией (см. § 1, конец п. 1) в нем есть локально бикомпактное хаусдорфово (и притом метризуемое) пространство. Если X несчетно, то его минимальное (одноточечное) бикомпактное расширение $\tilde{X} = X \cup \xi$ есть недиадический бикомпакт.

Приведем в заключение один интересный пример произведения двух пространств. Обозначим через $W(\alpha)$ множество всех порядковых чисел, меньших, чем данное порядковое число α. Это множество превращается в топологическое пространство, если за базу открытых множеств взять систему всех открытых интервалов множества $W(\alpha)$ (эта топология называется интервальной). Если α — изолированное порядковое число ($\alpha = \beta + 1$), то множество $W(\alpha)$ имеет наибольший элемент β, и поэтому упорядоченное множество $W(\alpha)$, как множество с наименьшим и наибольшим элементами, не имеющее щелей, будет бикомпактом в интервальной топологии *).

Рассмотрим теперь произведение $W(\omega_0 + 1) \times W(\omega_1 + 1)$. Это пространство, как произведение двух бикомпактов, является бикомпактом и, следовательно, нормальным пространством. Обозначим через T пространство, получающееся из нашего произведения выбрасыванием единственной точки (ω_0, ω_1). Это локально бикомпактное пространство, называемое «тихоновской плоскостью», не нормально. Не отделимы множества $F_1 = \{(\alpha, \omega_1) \mid \alpha < \omega_0\}$ и $F_2 = \{(\omega_0, \beta) \mid \beta < \omega_1\}$, верхняя и правая грани «прямоугольника». Следовательно, бикомпакт $W(\omega_0+1) \times \times W(\omega_1 + 1)$ не наследственно нормален. Исторически первым примером не наследственно нормального бикомпакта был бикомпакт $W(\omega_1 + 1) \times W(\omega_2 + 1)$ (см. Александров и Урысон [2]).

§ 9. Максимальное бикомпактное расширение

В этом параграфе пространство X всегда предполагается вполне регулярным. Через bX всегда обозначается бикомпактное расширение пространства X. Определенное в предыдущем параграфе максимальное (стоун-чеховское) бикомпактное расширение βX обладает многими замечательными свойствами. Некоторые из этих свойств мы сейчас установим.

Непрерывное отображение $f\colon bX \to b'X$ бикомпактного расширения bX пространства X в бикомпактное расширение $b'X$ того же пространства X называется естественным, если $fx = x$ для любой точки $x \in X$.

Так как $f(bX) \supseteq X$ и образ бикомпакта bX замкнут в $b'X$, то всегда (для естественного отображения $f\colon bX \to b'X$)

$$f(bX) = b'X,$$

т. е. естественное отображение является отображением «на».

*) См. Александров и Урысон [2], гл. I. Читатель может и сам доказать это утверждение в качестве нетрудного упражнения.

Теорема 12 (М. Стоун [1], Чех [4]). *Каждое из следующих трех условий необходимо и достаточно для того, чтобы бикомпактное расширение bX было естественно гомеоморфно максимальному расширению βX:*

1°. *Любая непрерывная функция*

$$f\colon X \to [0, 1]$$

может быть продолжена в непрерывную функцию

$$\bar{f}\colon bX \to [0, 1].$$

2°. *Любое непрерывное отображение*

$$\varphi\colon X \to B$$

пространства X в бикомпакт B может быть продолжено в непрерывное отображение

$$\bar{\varphi}\colon bX \to B.$$

3°. *Расширение bX обладает естественным отображением на любое бикомпактное расширение пространства X.*

Доказательство. Докажем, что βX удовлетворяет условию 1°. Пусть дана непрерывная функция

$$f\colon X \to [0, 1].$$

Так как расширение βX строится при помощи расчленяющей системы

$$\Xi_{\max} = \{f_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

всех непрерывных на X функций

$$f_\alpha\colon X \to I_\alpha = [0, 1],$$

то функция f совпадает с одной из функций f_α. Пусть $f = f_{\alpha_0}$. Обозначая мощность множества $\{f_\alpha\}$ всех непрерывных функций $f_\alpha\colon X \to I_\alpha$ (т. е. мощность $\mathfrak{A}$) через τ, полагаем

$$\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha = I^\tau.$$

Как было показано в § 8, отображение

$$\varphi\colon X \to \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha \equiv I^\tau,$$

ставящее в соответствие точке $x \in X$ точку $\varphi x = \{f_\alpha x\}$, является гомеоморфизмом. При этом для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ справедливо соотношение

$$f_\alpha = \pi_\alpha \varphi,$$

где $\pi_\alpha\colon I^\tau \to I_\alpha$, как всегда, есть проекция.

Если пространство X отождествить при помощи гомеоморфизма φ с множеством $\varphi X \subseteq \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha$, то функция f_{α_0} отождествится с отображением

$$\pi_{\alpha_0}\colon X \equiv \varphi X \to I_{\alpha_0}.$$

Отображение

$$\pi_{\alpha_0}\colon \beta X \equiv [\varphi X] \to I_{\alpha_0}$$

будет, очевидно, искомым продолжением $\bar{f}$ отображения f. Теперь покажем, что из утверждения 1° следует утверждение 2°. Сначала рассмотрим тривиальный случай, когда вес бикомпакта B конечен. Тогда сам бикомпакт B конечен и может быть рассматриваем как подмножество отрезка $I = [0, 1]$.

По условию отображение

$$\varphi\colon X \to B \subseteq I$$

может быть продолжено в непрерывное отображение

$$\bar{\varphi}\colon bX \to I.$$

Так как

$$\bar{\varphi}(bX) = \bar{\varphi}[X]_{bX} \subseteq [\bar{\varphi}X]_I = [\varphi X]_I = [B]_I = B,$$

то утверждение 2° в случае конечного веса бикомпакта B справедливо.

Пусть вес B равен $\tau \geqslant \aleph_0$. По теореме Тихонова можно считать бикомпакт B подмножеством тихоновского кирпича

$$I^\tau = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha, \qquad I_\alpha = [0, 1].$$

Каждая функция

$$f_\alpha = \pi_\alpha \varphi\colon X \to I_\alpha$$

непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ по предположению существует непрерывное продолжение

$$\bar{f}_\alpha\colon bX \to I_\alpha.$$

Диагональное произведение $\bar{\varphi}\colon bX \to I^\tau$ отображений $\bar{f}_\alpha$ непрерывно (см. § 8, предложение 7); при этом, если $x \in X$, то

$$\bar{\varphi}x = \{\bar{f}_\alpha x\} = \{f_\alpha x\} = \{\pi_\alpha \varphi x\} = \varphi x,$$

так что на X отображение $\bar{\varphi}$ совпадает с φ. Наконец, в силу непрерывности отображения $\bar{\varphi}$ имеем включение

$$\bar{\varphi}(bX) = \bar{\varphi}[X]_{bX} \subseteq [\bar{\varphi}X]_{I^\tau} = [\varphi X]_{I^\tau} \subseteq B.$$

Итак, из утверждения 1° следует утверждение 2°.

Утверждение 3° вытекает из утверждения 2° очевидным образом. Итак, расширение βX удовлетворяет всем условиям 1°—3°.

Прежде чем выводить из утверждения 3° естественный гомеоморфизм $bX = \beta X$, докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если непрерывные отображения*

$$f_1\colon X \to Y \quad \textit{и} \quad f_2\colon X \to Y$$

топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y совпадают на всюду плотном в X множестве X', то они совпадают на всем пространстве X.

Доказательство. Предположим, что в X существует такая точка x_0, что

$$y_1 = f_1 x_0 \neq y_2 = f_2 x_0.$$

Возьмем непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 точек y_1 и y_2 соответственно. В силу непрерывности отображений f_1 и f_2 должна существовать такая окрестность V точки x_0, что $f_1 V \subseteq \subseteq O_1$ и $f_2 V \subseteq O_2$. Так как множество X' всюду плотно в X, то множество $V' = V \cap X'$ непусто. Так как $f_1 V' \subseteq O_1$ и $f_2 V' \subseteq O_2$, то

$$f_1 V' \cap f_2 V' = \Lambda.$$

Но так как на X' отображения f_1 и f_2 совпадают, то

$$f_1 V' = f_2 V' \neq \Lambda.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 1 следует, что естественное отображение $f\colon bX \to b'X$ определено однозначно (тождественным отображением $X \to X$). Теперь выведем из утверждения 3° существование естественного гомеоморфизма расширений bX и βX.

Через h обозначим естественное отображение bX на βX (существующее в силу условия 3°).

Так как βX удовлетворяет условию 3°, то существует естественное отображение

$$h'\colon \beta X \to bX.$$

Суперпозиция $h'h\colon bX \to bX$ является естественным отображением, поэтому отображение $h'h$ на всюду плотном в bX множестве X совпадает с тождественным отображением бикомпакта в bX. Из леммы 1 следует, что отображение $h'h$ вообще совпадает с тождественным отображением бикомпакта bX. Следовательно, отображение h взаимно однозначно. Так как естественное отображение есть отображение «на» и непрерывно, а bX — бикомпакт, то h есть естественный гомеоморфизм в bX на βX. Теорема 12 доказана.

В множестве $\mathfrak{B}_X$ всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X можно ввести частичный порядок, считая $bX > b'X$, если существует естественное отображение bX на $b'X$. Из теоремы 12 следует, что стоун-чеховское расширение βX является максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathfrak{B}_X$, что и позволяет называть βX максимальным бикомпактным расширением пространства X.

Особенно хорошими свойствами обладает стоун-чеховское расширение βX в случае нормального пространства X.

Предложение 1. *Для произвольного замкнутого подмножества F нормального пространства X замыкание $[F]_{\beta X}$ гомеоморфно максимальному бикомпактному расширению βF пространства F.*

Доказательство. В силу теоремы 12 достаточно показать, что любое непрерывное отображение

$$f\colon F \to [0, 1]$$

можно продолжить в непрерывное отображение

$$\bar{f}\colon [F]_{\beta X} \to [0, 1].$$

Фиксируем какое-нибудь непрерывное отображение

$$f\colon F \to I = [0, 1].$$

Так как X — нормальное пространство, то существует непрерывное продолжение

$$\varphi\colon X \to I$$

отображения f. По теореме 12 существует непрерывное продолжение

$$\tilde{\varphi}\colon \beta X \to I$$

отображения φ. Отображение

$$\tilde{\varphi}\colon [F]_{\beta X} \to I$$

будет искомым продолжением $\bar{f}$ отображения f, ч. и т. д.

Предложение 2. *Если замкнутые в нормальном пространстве X множества F_1 и F_2 дизъюнктны, то дизъюнктны и их замыкания $[F_1]_{\beta X}$ и $[F_2]_{\beta X}$.*

Так как пара замкнутых дизъюнктных подмножеств нормального пространства функционально отделима, то предложение 2 вытекает из следующего утверждения:

Лемма 2. *Если замкнутые подмножества F_1 и F_2 вполне регулярного пространства X функционально отделимы, то*

$$[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} = \Lambda.$$

Доказательство. Из функциональной отделимости множеств F_1 и F_2 вытекает существование непрерывной на X функции

$$f\colon X \to [0, 1],$$

равной 0 на F_1 и 1 на F_2. Продолжим функцию f в непрерывную функцию

$$\bar{f}\colon \beta X \to [0, 1].$$

Множества $\Phi_1 = \bar{f}^{-1}(0)$ и $\Phi_2 = \bar{f}^{-1}(1)$ замкнуты в βX и дизъюнктны. Так как $F_i \subseteq \Phi_i$, $i = 1, 2$, то и $[F_i]_{\beta X} \subseteq \Phi_i$, $i = 1, 2$, откуда

$$[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Lambda,$$

ч. и т. д.

Предложение 2 можно усилить следующим образом:

Предложение 3. *Для произвольной конечной системы замкнутых в нормальном пространстве X множеств F_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, s$, справедливо соотношение*

$$\bigcap_{i=1}^{s} [F_i]_{\beta X} = \left[\bigcap_{i=1}^{s} F_i \right]_{\beta X}.$$

Доказательство. Включение

$$\bigcap_{i=1}^{s} [F_i]_{\beta X} \supseteq \left[\bigcap_{i=1}^{s} F_i \right]_{\beta X}$$

очевидно. Докажем противоположное включение.

Пусть сначала $s = 2$, и пусть существует точка

$$x \in ([F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X}) \setminus [F_1 \cap F_2]_{\beta X}.$$

Тогда существует окрестность O точки x в βX, замыкание которой не пересекается с множеством $[F_1 \cap F_2]_{\beta X}$. Множества $\Phi_1 = [O] \cap F_1$ и $\Phi_2 = [O] \cap F_2$ замкнуты в пространстве X, непусты и дизъюнктны. В силу предложения 2

$$[\Phi_1]_{\beta X} \cap [\Phi_2]_{\beta X} = \Lambda.$$

Но в то же время

$$x \in [\Phi_1]_{\beta X} \cap [\Phi_2]_{\beta X}.$$

Действительно, так как $x \in [F_i]_{\beta X} \subseteq [F_i \setminus O]_{\beta X} \cup [\Phi_i]_{\beta X}$ и так как $x \notin [F_i \setminus O]_{\beta X}$, то $x \in [\Phi_i]_{\beta X}$, $i = 1, 2$.

Итак, относительно множества $[\Phi_1]_{\beta X} \cap [\Phi_2]_{\beta X}$ мы получили два противоречащих одно другому утверждения. Следовательно, для $s = 2$ имеет место включение

$$\bigcap_{i=1}^{s} [F_i]_{\beta X} \subseteq \left[\bigcap_{i=1}^{s} F_i \right]_{\beta X}.$$

Предположим, что это включение имеет место для всех $s \leqslant r$, $r \geqslant 2$, и пусть $s = r + 1$. Тогда по доказанному для $s = 2$ и по индуктивному предположению

$$\bigcap_{i=1}^{r+1}[F_i]_{\beta X}=\bigcap_{i=1}^{r}[F_i]_{\beta X}\cap[F_{r+1}]_{\beta X}\subseteq$$

$$\subseteq\left[\bigcap_{i=1}^{r}F_i\right]_{\beta X}\cap[F_{r+1}]_{\beta X}\subseteq\left[\bigcap_{i=1}^{r}F_i\cap F_{r+1}\right]_{\beta X}=\left[\bigcap_{i=1}^{r+1}F_i\right]_{\beta X},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Для произвольной конечной системы* $\nu=\{F_i\}$, $i=1, \ldots, s$, *замкнутых в нормальном пространстве множеств система*

$$[\nu]=\{[F_i]_{\beta X}\}, \qquad i=1, \ldots, s,$$

подобна системе ν. *В частности, если система* ν *имеет кратность* $\leqslant n+1$, *то и система* $[\nu]$ *имеет кратность* $\leqslant n+1$.

Для открытого во вполне регулярном пространстве X множества V положим $O_\beta V=\beta X\setminus[X\setminus V]_{\beta X}$. Множество $O_\beta V$ открыто в βX, и, очевидно,

$$O_\beta V\cap X=V.$$

Из предложения 3 вытекает

Следствие 2. *Для конечного открытого покрытия* $\omega=\{V_i\}$, $i=1, \ldots, s$, *нормального пространства* X *система*

$$\beta\omega=\{O_\beta V\}, \qquad i=1, \ldots, s,$$

является открытым покрытием расширения βX.

Доказательство. В силу предложения 3 справедливо соотношение

$$\beta X\setminus\bigcup_{i=1}^{s}O_\beta V_i=\bigcap_{i=1}^{s}[X\setminus V_i]_{\beta X}=$$

$$=\left[\bigcap_{i=1}^{s}(X\setminus V_i)\right]_{\beta X}=\left[X\setminus\bigcup_{i=1}^{s}V_i\right]_{\beta X}=\Lambda,$$

ч. и т. д.

§ 10. Покрытия нормальных пространств

1. Раздутие и ужатие конечных систем и покрытий. Теорема 13 (теорема о раздутии; Чех). *Пусть*

$$\sigma=\{F_1, \ldots, F_s\} \tag{1}$$

— произвольная конечная система замкнутых множеств нормального пространства X. *Тогда окрестности* $O_1=OF_1$ ..., $O_s=OF_s$ *этих множеств могут быть выбраны таким образом, что системы* σ

и $\omega=\{O_1, \ldots, O_s\}$ *(даже* σ *и* $[\omega]=\{[O_1], \ldots, [O_s]\}$ *будут подобны между собой* *).

Доказательство. Обозначим через Φ_1 объединение всевозможных множеств вида $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}$, где $F_{i_1}\in\sigma, \ldots, F_{i_k}\in\sigma$ таковы, что $F_1\cap F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}=\Lambda$. Так как замкнутое множество Φ_1 не пересекается с F_1, то $X\setminus\Phi_1$ есть окрестность множества F_1; следовательно, в силу малой леммы Урысона (см. § 5) существует такое открытое множество O_1, что $F_1\subseteq O_1\subseteq[O_1]\subseteq X\setminus\Phi_1$.

Системы множеств $\sigma=\{F_1, F_2, \ldots, F_s\}$ и $\sigma_1=\{[O_1], F_2, \ldots, F_s\}$ подобны между собою. В самом деле, если $F_1\cap F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\Lambda$, то тем более $[O_1]\cap F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\Lambda$. Обратно, из $F_1\cap F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}=\Lambda$ следует, что $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\subseteq\Phi_1$, и, значит,

$$[O_1]\cap F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\subseteq[O_1]\cap\Phi_1=\Lambda.$$

Предположим, что открытые множества $O_1, \ldots, O_n$, $1\leqslant n<s$, построены таким образом, что $F_1\subseteq O_1, \ldots, F_n\subseteq O_n$ и системы σ и

$$\sigma_n=\{[O_1], \ldots, [O_n], F_{n+1}, \ldots, F_s\}$$

подобны между собою. Рассуждая о системе σ_n и о множестве F_{n+1} так же, как мы только что рассуждали о системе σ и множестве F_1, получим такое открытое множество $O_{n+1}\supseteq F_{n+1}$, что системы σ_n и

$$\sigma_{n+1}=\{[O_1], \ldots, [O_n], [O_{n+1}], F_{n+2}, \ldots, F_s\},$$

а значит, и системы σ и σ_{n+1} будут подобны между собой. Построение заканчивается на системе $\sigma_s=\{[O_1], \ldots, [O_s]\}$, удовлетворяющей всем поставленным требованиям.

Теорема 14 (теорема об ужатии конечных покрытий; Чех). *Ко всякому конечному открытому покрытию*

$$\omega=\{O_1, \ldots, O_s\}$$

нормального пространства X *существует комбинаторно вписанное в него замкнутое покрытие*

$$\alpha=\{F_1, \ldots, F_s\}.$$

При этом можно предположить, что замкнутые множества F_i *являются каноническими (т. е.* $F_i=[\Gamma_i]$, *где* $\Gamma_i=\langle F_i\rangle$), *а система* $\gamma=\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ *есть покрытие пространства* X.

Доказательство. К системе замкнутых множеств

$$\sigma=\{X\setminus O_1, \ldots, X\setminus O_s\}$$

*) В данном случае это означает, что из $[O_{i_1}]\cap\ldots\cap[O_{i_r}]\neq\Lambda$ всегда следует $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_r}\neq\Lambda$.

применим предыдущую теорему и построим такие открытые множества $O'_1, \ldots, O'_s$, что

$$X \setminus O_1 \subseteq O'_1, \ \ldots, \ X \setminus O_s \subseteq O'_s, \tag{2}$$

значит,

$$X \setminus O'_1 \subseteq O_1, \ \ldots, \ X \setminus O'_s \subseteq O_s \tag{2'}$$

и система $\{[O'_1], \ldots, [O'_s]\}$ подобна системе σ. Так как $\{O_1, \ldots, O_s\}$ есть покрытие пространства X, то

$$(X \setminus O_1) \cap \ldots \cap (X \setminus O_s) = \Lambda,$$

значит, и $[O'_1] \cap \ldots \cap [O'_s] = \Lambda$, т. е. множества

$$O''_1 = X \setminus [O'_1], \ \ldots, \ O''_s = X \setminus [O'_s]$$

образуют покрытие пространства X.

При этом для всех $i = 1, 2, \ldots. s$ имеем

$$[O''_i] = [X \setminus [O'_i]] \subseteq [X \setminus O'_i] = X \setminus O'_i \subseteq O_i,$$

т. е. покрытие

$$\{[O''_1], \ \ldots, \ [O''_s]\}$$

комбинаторно вписано в ω и состоит из канонических замкнутых множеств. Так как $O''_i \subseteq \langle [O''_i] \rangle = \Gamma_i$ и $\{O''_1, \ldots, O''_s\}$ есть покрытие пространства X, то тем более покрытием этого пространства является $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$.

Теорема доказана.

Докажем следующее

Дополнение к теореме 14. *Во всякое конечное открытое покрытие*

$$\omega = \{O_1, \ \ldots, \ O_s\}$$

комбинаторно вписано некоторое разбиение $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$.

В самом деле, мы только что построили такое покрытие $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$, состоящее из канонических открытых множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, что

$$[\gamma] = \{[\Gamma_1], \ \ldots, \ [\Gamma_s]\}$$

комбинаторно вписано в $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$.

Положим $A_1 = [\Gamma_1]$ и для $i = 2, \ldots, s$

$$A_i = [[\Gamma_i] \setminus ([\Gamma_1] \cup \ldots \cup [\Gamma_{i-1}])].$$

Тогда $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ есть покрытие пространства X. Чтобы убедиться в этом, возьмем произвольную точку $x \in X$ и первое такое i, $i = 1, 2, \ldots, s$, что $x \in [O''_i] \subseteq [\Gamma_i]$. Тогда

$$x \in [\Gamma_i] \setminus ([\Gamma_1] \cup \ldots \cup [\Gamma_{i-1}]) \subseteq A_i.$$

Докажем, что каждое A_i есть $\varkappa a$-множество. В самом деле, еще в § 1 было замечено, что для произвольного $\varkappa a$-множества A и произвольного замкнутого множества B имеем $[A \setminus B] = [\langle A \rangle \setminus B]$. Значит, в нашем случае

$$A_i = \Big[[\Gamma_i] \setminus \bigcup_{j<i} [\Gamma_j]\Big] = \Big[\Gamma_i \setminus \bigcup_{j<i} [\Gamma_j]\Big]$$

есть $\varkappa a$-множество. Наконец (так как Γ_i есть $\varkappa o$-множество), имеем $\langle A_i \rangle \subseteq \Gamma_i$, а если $j < i$, то $\langle A_i \rangle \subseteq \Gamma_i \setminus \Gamma_j$, поэтому $\langle A_j \rangle \cap \langle A_i \rangle = \Lambda$ при $j \neq i$.

Итак, покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ есть действительно разбиение пространства X, комбинаторно вписанное в покрытие ω.

2. Случай компактов. Вернемся к теореме о раздутии в случае, когда X — компакт. Сохраняем обозначения теоремы. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ имеем $F_i \subseteq O_i$, значит, $\rho(F_i, X \setminus O_i) > 0$. Возьмем такое ε, что $\varepsilon < \rho(F_i, X \setminus O_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда система

$$\omega' = \{O(F_1, \varepsilon), \ldots, O(F_s, \varepsilon)\}$$

будет подобна системе

$$\sigma = \{F_1, \ldots, F_s\}.$$

Если какое-нибудь множество $M \subseteq X$ имеет диаметр $< \varepsilon$ и пересекается с некоторыми элементами $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ системы σ, то

$$M \subseteq O(F_{i_1}, \varepsilon), \ldots, M \subseteq O(F_{i_k}, \varepsilon)$$

и, следовательно,

$$O(F_{i_1}, \varepsilon) \cap \ldots \cap O(F_{i_k}, \varepsilon) \neq \Lambda.$$

Но тогда (ввиду подобия систем σ и ω') и

$$F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \neq \Lambda.$$

Итак, доказано следующее

Предложение 1 (лемма Лебега о системах замкнутых множеств в компактах). *Ко всякой конечной системе замкнутых множеств*

$$\sigma = \{F_1, \ldots, F_s\}$$

компакта X можно найти такое число ε, называемое лебеговым числом для системы σ, что система

$$O(F_1, \varepsilon), \ldots, O(F_s, \varepsilon)$$

подобна системе σ. Тогда из того, что какое-нибудь множество M диаметра $< \varepsilon$ пересекается с данными элементами

$F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ *системы* σ, *следует, что эти элементы имеют непустое пересечение*:

$$F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \neq \Lambda.$$

Очевидно, если ε — лебегово число системы σ, то и всякое положительное $\varepsilon' < \varepsilon$ также является лебеговым числом системы σ.

В некотором смысле двойственным к предложению 1 является

Предложение 2 (лемма Лебега для открытых покрытий компактов). *Ко всякому конечному открытому покрытию*

$$\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

компакта X *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *называемое лебеговым числом открытого покрытия* ω, *что всякое множество* M *диаметра* $< \varepsilon$ *целиком лежит хотя бы в одном* $O_i \in \omega$.

В самом деле, за ε достаточно взять лебегово число системы замкнутых множеств $\sigma = \{X \setminus O_1, \ldots, X \setminus O_s\}$. Так как $\{O_1, \ldots$ $\ldots, O_s\}$ есть покрытие пространства X, то $(X \setminus O_1) \cap \ldots$ $\ldots \cap (X \setminus O_s) = \Lambda$; поэтому множество M диаметра $< \varepsilon$ не может пересекаться со всеми множествами $X \setminus O_1, \ldots, X \setminus O_s$, значит, M содержится в дополнении $X \setminus (X \setminus O_i) = O_i$ хотя бы к одному из них, т. е. $M \subseteq O_i$, ч. и т. д.

3. Корректные покрытия нормальных пространств. Замкнутое множество называется корректным, если оно есть множество типа G_δ; открытое — если оно есть F_σ. В совершенно нормальных, в частности в метризуемых, пространствах и все замкнутые и все открытые множества корректны.

Очевидно, корректные открытые множества являются дополнениями к корректным замкнутым, и наоборот.

Предложение 3 (лемма Веденисова). *Замкнутое множество* F *нормального пространства* X *тогда и только тогда корректно, когда имеется непрерывная функция* $f\colon X \to [0, 1]$, *для которой множество* F *есть множество всех ее нулей, т. е.* $F = f^{-1}0$.

Доказательство. Пусть F — корректное замкнутое множество в нормальном пространстве X, и пусть $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, где все G_n открыты. Построим по большой лемме Урысона для каждого натурального числа n такую непрерывную функцию $f_n\colon X \to [0, 1]$, что $f_n F = 0$, $f_n(X \setminus G_n) = 1$.

Положим

$$fx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n x.$$

Как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, функция f непрерывна на всем X; она и отображает X в отрезок $[0, 1]$.

Для $x \in F$ имеем, очевидно, $fx = 0$. Если же $x \in X \setminus F$, то при некотором n имеем $x \in X \setminus G_n$, следовательно, $f_n x = 1$, $fx \geqslant \geqslant \frac{1}{2^n} > 0$ — одна половина леммы Веденисова доказана.

Вторая половина верна даже без предположения нормальности пространства X. В самом деле, пусть F — множество всех нулей некоторой непрерывной функции $f\colon X \to [0, 1]$. Докажем, что F есть множество типа G_δ. Для этого положим $G_n = \left\{ x \mid fx < \frac{1}{n} \right\}$. Множества G_n открыты, и $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Лемма Веденисова доказана.

Предложение 4. *Для произвольного замкнутого множества F и его окрестности O в нормальном пространстве X можно найти такое корректное замкнутое множество F_1 и такое корректное открытое множество O_1, что $F \subseteq F_1 \subseteq O$ и $F \subseteq O_1 \subseteq O$.*

Для доказательства первого утверждения возьмем снова непрерывную функцию $f\colon X \to [0, 1]$, равную 0 на F и 1 на $X \setminus O$. Тогда множество всех нулей функции f есть корректное замкнутое множество F_1 и $F \subseteq F_1 \subseteq O$.

Второе утверждение предложения 4 легко выводится из первого: строим согласно первому утверждению корректное замкнутое множество F_1, содержащее замкнутое множество $X \setminus O$ и лежащее в открытом множестве $X \setminus F$. Тогда $O_1 = X \setminus F_1$ есть корректное открытое множество, содержащее множество $X \setminus (X \setminus F) = F$ и лежащее в $X \setminus (X \setminus O) = O$.

Добавление к предложению 4. Можно даже потребовать от корректного открытого множества O_1, чтобы было $F \subseteq O_1 \subseteq [O_1] \subseteq O$, — достаточно взять сначала открытое $O' \supseteq F$ под условием $[O'] \subseteq O$ и построить для него корректное открытое O'_1, для которого $F \subseteq O'_1 \subseteq O'$; тогда $F \subseteq O'_1 \subseteq [O'_1] \subseteq [O'] \subseteq O$.

Назовем покрытие корректным замкнутым, соответственно корректным открытым, если его элементами являются корректные замкнутые, соответственно корректные открытые, множества; имеем

Предложение 5. *Во всякое конечное открытое покрытие $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ нормального пространства X можно комбинаторно вписать корректное замкнутое покрытие α_1 и корректное открытое покрытие ω_1.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \{F_1, \ldots, F_s\}$ — какое-нибудь замкнутое покрытие пространства X, комбинаторно вписанное в ω (такое существует по теореме об ужатии покрытий). Для каждого $i = 1, \ldots, s$ строим корректное замкнутое множество A_i под условием $F_i \subseteq A_i \subseteq O_i$ и корректное открытое множество o_i под условием $F_i \subseteq o_i \subseteq O_i$. Тогда

$$\alpha_1 = \{A_1, \ldots, A_s\}$$

и

$$\omega_1 = \{o_1, \ldots, o_s\}$$

суть покрытия пространства X, комбинаторно вписанные в ω, причем α_1 является корректным замкнутым, а ω_1 — корректным открытым.

Это предложение понадобится в главе четвертой.

4. Ужатия бесконечных покрытий. Предложение 6 (лемма об ужатии открытых точечно конечных покрытий; Лефшец [1]). *Для любого открытого точечно конечного покрытия* $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *нормального пространства X существует комбинаторно вписанное в ω замкнутое покрытие ν пространства X. Более того,*

$$\nu = \{[V_\alpha]\}, \qquad \alpha \in \mathfrak{A},$$

где все V_α открыты и система $\{V_\alpha\}$ также является покрытием пространства X.

Доказательство. Пусть мощность покрытия ω равна τ и множество индексов $\mathfrak{A}$ состоит из всех порядковых чисел α, $0 \leqslant \alpha < \omega(\tau)$. Множество $F_0 = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha > 0} O_\alpha$ замкнуто в X и содержится в O_0.

В силу нормальности пространства X существует окрестность V_0 множества F_0, замыкание $\Phi_0 = [V_0]$ которой содержится в O_0. Очевидно, система $\omega_0 = \{V_0; O_\alpha, \alpha > 0\}$ является покрытием пространства X.

Предположим, что для всех $\alpha < \beta$ уже построены открытые множества V_α, замыкания $[V_\alpha]$ которых содержатся в O_α, и системы $\omega_\alpha = \{V_{\alpha'} \mid \alpha' \leqslant \alpha;\ O_{\alpha'}, \alpha' > \alpha\}$ образуют покрытия пространства X.

Пусть сначала число β не предельное, т. е. существует такое число β', что $\beta = \beta' + 1$. Тогда множество

$$F_\beta = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \leqslant \beta'} V_\alpha \cup \bigcup_{\alpha > \beta} O_\alpha \right)$$

замкнуто в X и содержится в множестве O_β. Следовательно, существует окрестность V_β множества F_β, замыкание $[V_\beta]$ которой содержится в O_β. Система $\omega_\beta = \{V_\alpha \mid \alpha \leqslant \beta;\ O_\alpha, \alpha > \beta\}$ является покрытием пространства X.

Пусть число β предельное. Покажем, что система $\omega'_\beta = \{V_\alpha \mid \alpha < \beta;\ O_\alpha, \alpha \geqslant \beta\}$ является покрытием пространства X.

Возьмем точку $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \geqslant \beta} O_\alpha$. В силу выбора точки и точечной конечности покрытия ω существует такой конечный набор индексов $\alpha_1 < \ldots < \alpha_s < \beta$, что $x \in \bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \neq \alpha_i \\ i=1, \ldots, s}} O_\alpha$. Так как система ω_{α_s} по индуктивному предположению является покрытием пространства X и $x \notin \bigcup_{\alpha > \alpha_s} O_\alpha$, то $x \in \bigcup_{\alpha \leqslant \alpha_s} V_\alpha$. Тем более, $x \in \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha$.

Итак, система ω'_β является покрытием. Как и выше, можно построить такое открытое множество V_β, что $[V_\beta] \subseteq O_\beta$ и система $\omega_\beta = \{V_\alpha \mid \alpha \leqslant \beta;\ O_\alpha,\ \alpha > \beta\}$ является покрытием пространства X.

Продолжая построение, получим покрытие $\{V_\alpha, \alpha < \omega(\tau)\}$, удовлетворяющее условию $[V_\alpha] \subseteq O_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Система $\{[V_\alpha]\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, является искомым замкнутым покрытием.

Предложение 7. *В любое открытое покрытие паракомпакта X можно комбинаторно вписать замкнутое локально конечное покрытие.*

Доказательство. В покрытие ω впишем открытое локально конечное покрытие ω'. По предположению 6 существует замкнутое покрытие λ пространства X, комбинаторно вписанное в покрытие ω' и поэтому локально конечное. Укрупнение покрытия λ относительно ω комбинаторно вписано в ω, локально конечно и замкнуто (в силу предложений 8 и 10 § 6), ч. и т. д.

В гл. 4 и 6 нам существенно понадобится

Предложение 8. *В любое открытое локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, нормального пространства X можно вписать σ-дискретное открытое корректное покрытие ν. Если кратность покрытия $\omega \leqslant n+1$, то можно считать, что покрытие ν распадается в сумму не более чем $n+1$ дискретных систем.*

Доказательству предложения 8 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если покрытие топологического пространства X локально конечно, то покрытие ω', состоящее из пересечений $O_{\alpha_1} \cap \ldots \cap O_{\alpha_s}$ всевозможных конечных наборов различных элементов покрытия ω, также локально конечно.*

Действительно, если окрестность Ox точки $x \in X$ пересекает конечное число элементов покрытия ω, то Ox пересекает лишь конечное число элементов покрытия ω', ч. и т. д.

Пусть ω — произвольное покрытие топологического пространства X; множество точек $x \in X$, содержащихся ровно в k элементах покрытия ω, назовем множеством точек k-кратности покрытия ω.

Лемма 2. *Для открытого точечно конечного покрытия $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, топологического пространства X множество A^1 точек однократности* *покрытия* ω *замкнуто в* X *и является телом дискретной системы* λ_1 *замкнутых в* X *множеств* $A_\alpha = X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} O_\beta \subseteq O_\alpha$. *Если пространство* X *нормально, а покрытие* ω *локально конечно, то в* X *существует дискретная система корректных открытых множеств* V_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *удовлетворяющая условиям*

$$A_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq O_\alpha, \qquad \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Замкнутость множеств A_α вытекает из открытости покрытия ω. Дискретность системы λ_1 вытекает из того, что любая точка $x \in X$ содержится в некотором O_{α_0}, а множество O_{α_0} пересекается лишь с одним элементом A_{α_0} системы λ_1.

Соотношение $\tilde{\lambda}_1 = A^1$ очевидно. Замкнутость множества A^1 вытекает из консервативности системы λ_1.

Пусть теперь пространство X нормально, а покрытие ω локально конечно. Из предложения 6 вытекает существование комбинаторно вписанного в ω замкнутого покрытия $\mu = \{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Из комбинаторной вписанности μ в ω вытекает локальная конечность покрытия μ и, следовательно, его консервативность. Поэтому множества $U_\alpha = X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} F_\beta$ открыты в X.

Так как

$$X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} O_\beta \subseteq X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} F_\beta = F_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} F_\beta,$$

то имеют место включения

$$A_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq F_\alpha.$$

Поэтому система $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, локально конечна. Ясно также, что она дизъюнктна.

В силу предложения 4 для каждого α можем взять такое корректное открытое множество V_α, что

$$A_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq [V_\alpha] \subseteq U_\alpha.$$

Система $\tilde{\nu}_1 = \{[V_\alpha]\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, замкнута, дизъюнктна и локально конечна. В силу предложений 8 и 9 из § 6, п. 4, система $\tilde{\nu}_1$ дискретна. Следовательно, дискретна и система $\nu_1 = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ч. и т. д.

Теперь докажем предложение 8.

Через A^k обозначим множество k-кратности покрытия ω и положим $B_k = \bigcup_{i \leqslant k} A^i$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Из леммы 2 вытекает существование такой вписанной в ω дискретной системы ν_1 корректных открытых множеств, что $B_1 = A^1 \subseteq \tilde{\nu}_1$.

Пусть для всех $i \leqslant k$ уже построены вписанные в покрытие ω дискретные системы ν_i корректных открытых множеств, удовлетворяющие соотношениям

$$B_i \subseteq \bigcup_{j \leqslant i} \tilde{\nu}_j.$$

Пусть $i = k + 1$. Так как

$$X \setminus B_i = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}} O_{\alpha_1} \cap \ldots \cap O_{\alpha_{i+1}} \,^{*)},$$

*) Индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}$ различны.

то множества B_l замкнуты в X, $l=1, 2, 3, \ldots$ В частности, в X замкнуто множество B_k.

В силу нормальности X существует такая корректная окрестность U замкнутого множества $X\setminus\bigcup\limits_{l\leqslant k}\tilde{\nu}_l$, что

$$[U]\subseteq X\setminus B_k.$$

Замкнутое в X множество $[U]$ нормально и покрывается системой $\omega'_{k+1}=\{O\alpha_1\cap\ldots\cap O\alpha_{k+1}\}$, состоящей из пересечений всевозможных наборов из $k+1$ различных элементов покрытия ω. Пересечение $A^{k+1}\cap[U]$ совпадает с множеством точек однократности покрытия $\omega_{k+1}=\{O\alpha_1\cap\ldots\cap O\alpha_{k+1}\cap[U]\}$ множества $[U]$. По лемме 1 система ω'_{k+1} локально конечна в X. Следовательно, локально конечно в $[U]$ покрытие ω_{k+1}. Из леммы 2 вытекает существование такой вписанной в систему ω_{k+1}, а следовательно и в покрытие ω, дискретной в $[U]$ системы ν^*_{k+1} корректных, открытых в $[U]$ множеств V^*_θ, что

$$\tilde{\nu}^*_{k+1}\supseteq A^{k+1}\cap[U].$$

Система

$$\nu_{k+1}=\{V_\theta=V^*_\theta\cap U\}$$

вписана в покрытие ω и состоит из открытых во всем пространстве X множеств. Эта система, очевидно, дискретна во всем X. Так как множества V^*_θ имеют тип F_σ в $[U]$, а следовательно и в X, а множество U также имеет тип F_σ в X, то множества V_θ имеют тип F_σ в X *). Наконец,

$$B_{k+1}=B_k\cup A^{k+1}\subseteq\bigcup_{l\leqslant k}\tilde{\nu}_l\cup\left(A^{k+1}\cap\left(X\setminus\bigcup_{l\leqslant k}\tilde{\nu}_l\right)\right)\subseteq$$

$$\subseteq\bigcup_{l\leqslant k}\tilde{\nu}_l\cup(A^{k+1}\cap U)\subseteq\bigcup_{l\leqslant k}\tilde{\nu}_l\cup\tilde{\nu}_{k+1}.$$

Продолжая построение систем ν_l, получим искомое σ-дискретное покрытие ν.

Если кратность покрытия $\omega\leqslant n+1$, то $X=B_{n+1}$ и уже система $\bigcup\limits_{l=1}^{n+1}\nu_l$ будет покрытием пространства X, ч. и т. д.

Из предложения 8 вытекает

Предложение 9. *В любое открытое локально конечное покрытие ω нормального пространства X можно вписать замкнутое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. В покрытие ω впишем открытое корректное покрытие, распадающееся в сумму дискретных систем $\nu_l=\{O_{\alpha_l}\}$, $\alpha_l\in\mathfrak{A}_l$, $l=1, 2, 3, \ldots$ Каждое множество $O\alpha_l$ представим в виде счетной суммы

---

*) Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i\cap\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Phi_j=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(F_i\cap\Phi_j)$.

замкнутых в X множеств $F\alpha_{ij}$, $j=1, 2, 3, \ldots$ При фиксированных i и j система $\lambda_{ij}=\{F\alpha_{ij}\}$, очевидно, дискретна. Следовательно, система $\lambda=\bigcup_{i,j}\lambda_{ij}$ является σ-дискретным, замкнутым и вписанным в ω покрытием пространства X. Предложение доказано.

§ 11. Метризация и паракомпактность

1. Теорема А. Стоуна о паракомпактности метрических пространств. Критерии метризуемости *). Теорема 15 (А. Стоун [1]). *Метризуемое топологическое пространство паракомпактно. В любое открытое покрытие метризуемого пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Докажем сначала второе утверждение.

Лемма 1. *В любое открытое покрытие $\omega=\{O_\alpha\}$ метрического пространства X можно вписать открытое покрытие ν, распадающееся в сумму таких систем $\nu_n=\{U_\alpha^n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, что*

$$\rho(U_\alpha^n, X\setminus O_\alpha)\geqslant \varepsilon_n>0, \tag{1}$$

$$\rho(U_\alpha^n, U_\beta^n)\geqslant \delta_n>0 \tag{2}$$

для любых n, α и $\beta\neq\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\omega=\{O_\alpha\}$ пространства X. Предполагаем, что индексы α пробегают все порядковые числа от нуля до первого порядкового числа некоторой мощности τ. Положим

$$F_\alpha^n=\left\{x\in O_\alpha \mid \rho(x, X\setminus O_\alpha)\geqslant\frac{1}{2^n}\right\},\quad A_\alpha^n=F_\alpha^n\setminus\bigcup_{\alpha'<\alpha}F_{\alpha'}^{n+1}$$

и

$$U_\alpha^n=\left\{x\in X \mid \rho(x, A_\alpha^n)<\frac{1}{2^{n+3}}\right\},\qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

Так как $\rho(F_\alpha^n, X\setminus O_\alpha)\geqslant\frac{1}{2^n}$, то

$$\rho(U_\alpha^n, X\setminus O_\alpha)\geqslant\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+3}}=\frac{7}{2^{n+3}},$$

---

*) Возможен и следующий порядок чтения этого параграфа:

а) пункт 2 (большая теорема Стоуна (теорема 19) и паракомпактность метрических пространств как ее следствие);

б) в теореме 16 ограничиться формулировкой Нагата — Смирнова — необходимость условия (б) теоремы 16 сразу следует из уже доказанной паракомпактности;

в) теоремы 17 и 18;

г) чтение остальных утверждений этого параграфа отложить до того момента, когда в них возникнет надобность.

в частности,

$$U_\alpha^n \subseteq O_\alpha$$

для любого n и любого α.

Таким образом, система ν всех открытых множеств U_α^n вписана в покрытие ω.

Систему всех множеств U_α^n при фиксированном n обозначим через ν_n. Очевидно, $\nu = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$.

Оценим расстояние между элементами U_α^n и U_β^n системы ν_n. Пусть для определенности $\alpha < \beta$. Тогда по построению

$$A_\beta^n \subseteq X \setminus F_\alpha^{n+1}.$$

Из аксиомы треугольника следуют неравенства

$$\rho(A_\beta^n, F_\alpha^n) \geqslant \rho(X \setminus F_\alpha^{n+1}, F_\alpha^n) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\rho(U_\beta^n, F_\alpha^n) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{3}{2^{n+3}}$$

и

$$\rho(U_\beta^n, U_\alpha^n) \geqslant \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Покажем, что ν есть покрытие пространства X. Рассмотрим точку $x \in X$. Через α_0 обозначим наименьшее из тех чисел α, для которых $x \in O_\alpha$. Так как существует такой номер n, что $x \in F_{\alpha_0}^n$, то $x \in F_{\alpha_0}^n \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\alpha_0} O_\alpha \subseteq A_{\alpha_0}^n \subseteq U_{\alpha_0}^n$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — некоторая система подмножеств метрического пространства X, для которой при любых $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \neq \beta$, расстояние $\rho(U_\alpha, U_\beta)$ больше некоторой положительной константы d. Тогда система $\{U_\alpha\}$ дискретна.

Действительно, $\frac{d}{2}$-окрестность произвольной точки $x \in X$ пересекает не более одного множества U_α.

Из сделанного замечания и неравенства (2) в лемме 1 следует дискретность систем ν_n. Таким образом, в любое открытое покрытие метризуемого пространства можно вписать σ-дискретное открытое покрытие. Второе утверждение теоремы 15 доказано.

Докажем первое утверждение теоремы 15 — паракомпактность метрического пространства X.

В произвольным образом выбранное открытое покрытие $\omega = \{O_\alpha\}$ пространства X впишем открытое покрытие $\nu = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$.

удовлетворяющее неравенствам (1) и (2) леммы 1. Положим

$$V_\alpha^n = \left\{ x \in X \mid \rho\left(x, U_\alpha^n\right) < \min\left(\frac{\varepsilon_n}{2}, \frac{\delta_n}{4}\right)\right\}.$$

Очевидно, множества V_α^n открыты и

$$[U_\alpha^n] \subseteq V_\alpha^n \subseteq O_\alpha. \tag{3}$$

Из неравенства треугольника и неравенства (2) следует неравенство

$$\rho\left(V_\alpha^n, V_\beta^n\right) \geqslant \frac{\delta_n}{2}, \qquad \alpha \neq \beta.$$

В силу сделанного выше замечания, для каждого n система $\eta_n = \{V_\alpha^n\}$ дискретна. Из включений (3) вытекает дискретность, а значит, и консервативность системы $\mu_n = \{[U_\alpha^n]\}$. Поэтому

$$\Phi_n = [\tilde{\mu}_n] = \bigcup_\alpha [U_\alpha^n] \subseteq \tilde{\eta}_n.$$

Положим

$$W_\alpha^1 = V_\alpha^1 \quad \text{и} \quad W_\alpha^n = V_\alpha^n \setminus \bigcup_{i<n} \Phi_i \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Множества W_α^n открыты, и $W_\alpha^n \subseteq V_\alpha^n \subseteq O_\alpha$ (см. (3)), следовательно, система $\xi = \{W_\alpha^n\}$ вписана в покрытие ω.

Покажем, что ξ есть локально конечное покрытие пространства X.

Рассмотрим точку $x \in X$. Пусть n_0 есть минимум тех номеров n, для которых $x \in \tilde{\eta}_n$, и пусть $x \in V_\alpha^{n_0}$. Тогда

$$x \in V_\alpha^{n_0} \setminus \bigcup_{n<n_0} \tilde{\eta}_n \subseteq V_\alpha^{n_0} \setminus \bigcup_{n<n_0} \Phi_n = W_\alpha^{n_0}.$$

Таким образом, ξ есть покрытие пространства X.

Через n_1 обозначим минимум тех номеров n, для которых $x \in \tilde{\nu}_n$. Тогда для любого $n > n_1$ имеем

$$W_\alpha^n \cap \tilde{\nu}_{n_1} = \left(V_\alpha^n \setminus \bigcup_{i<n} \Phi_i\right) \cap \tilde{\nu}_{n_1} \subseteq \tag{4}$$

$$\subseteq \left(V_\alpha^n \setminus \Phi_{n_1}\right) \cap \tilde{\nu}_{n_1} \subseteq \left(V_\alpha^n \setminus \tilde{\nu}_{n_1}\right) \cap \tilde{\nu}_{n_1} = \Lambda.$$

Системы η_n дискретны, поэтому существует окрестность Ox, пересекающая не более одного элемента каждой из систем $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$. Так как $W_\alpha^n \subseteq V_\alpha^n$, то Ox пересекается для каждого фиксированного $n = 1, \ldots, n_1$ не более чем с одним элементом системы $\{W_\alpha^n\}$. Следовательно, (см. (4)) окрестность $\tilde{\nu}_{n_1} \cap Ox$ точки x пересекается лишь с конечным числом множеств W_α^n. Локальная конечность покрытия ξ установлена. Теорема доказана.

Любая счетная система подмножеств топологического пространства является и σ-локально конечной и σ-дискретной. Поэтому следующий метризационный критерий является естественным обобщением теоремы Урысона о метризуемости регулярных пространств со счетной базой.

Теорема 16 (Бинг [1], Нагата [1], Смирнов [1]). *Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно для метризуемости регулярного пространства*:

(а) *пространство X обладает σ-дискретной базой, или, кратко, B-базой (т. е. базой, являющейся σ-дискретной системой)*;

(б) *пространство X обладает σ-локально конечной базой, или, кратко, NS-базой (т. е. базой, являющейся σ-локально конечной системой)*.

Доказательство. Докажем сначала, что метризуемое пространство X удовлетворяет условиям (а) и (б) теоремы.

Через ω_i обозначим покрытие пространства X из $\frac{1}{i}$-окрестностей всех точек $x \in X$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Пусть η_i — какое-нибудь σ-дискретное открытое покрытие пространства X, вписанное в покрытие ω_i. Система $\eta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \eta_i$, очевидно, является σ-дискретной базой пространства X.

Таким образом, метризуемое пространство обладает σ-дискретной, а следовательно, и σ-локально конечной базой.

Необходимость условий (а) и (б) для метризуемости пространства X установлена. Переходим к доказательству достаточности. Так как всякая B-база является и NS-базой, то достаточно доказать, что регулярное пространство, имеющее NS-базу, метризуемо.

Лемма 2. *В наших условиях пространство X совершенно нормально.*

Докажем сначала, что X нормально. Пусть A и B — два дизъюнктных замкнутых множества в X. Для каждой точки $x \in A$ возьмем принадлежащую базе $\mathfrak{B} = \bigcup_n \gamma_n$, где системы $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, локально конечны, окрестность $\Gamma_{n(x), \alpha(x)}$ точки x с условием $[\Gamma_{n(x), \alpha(x)}] \subseteq X \setminus B$. Вследствие регулярности пространства X такая окрестность существует. Точно так же для каждой точки $y \in B$ возьмем окрестность $\Gamma_{n(y), \alpha(y)}$ точки y под условием $[\Gamma_{n(y), \alpha(y)}] \subseteq X \setminus A$. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ обозначим через G_n сумму $\bigcup_{n(x)=n,\ x \in A} \Gamma_{n(x), \alpha(x)}$, взятую по всем $x \in A$, для которых $n(x) = n$: $G_n = \bigcup_{x \in A} \Gamma_{n, \alpha(x)}$.

Точно так же положим

$$H_n = \bigcup_{n(y)=n,\ y \in B} \Gamma_{n(y),\ \alpha(y)} = \bigcup_{y \in B} \Gamma_{n,\ \alpha(y)}.$$

Очевидно, $A \subseteq \bigcup\limits_n G_n$, $B \subseteq \bigcup\limits_n H_n$. Так как при любом n система γ_n локально конечна, значит, консервативна, то

$$[G_n] = \bigcup_{x \in A} [G_{n,\ \alpha(x)}] \subseteq X \setminus B, \qquad [H_n] = \bigcup_{y \in B} [H_{n,\ \alpha(y)}] \subseteq X \setminus A.$$

Положим, далее,

$$U_n = G_n \setminus \bigcup_{k \leqslant n} [H_k], \quad V_n = H_n \setminus \bigcup_{k \leqslant n} [G_k], \quad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

так что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. При любых m, n имеем $U_m \cap V_n = \Lambda$. В самом деле, пусть, например, $m > n$. Тогда $U_m \cap V_n \subseteq \subseteq X \diagdown [H_n] \subseteq X \diagdown [V_n]$, $U_m \cap V_n = \Lambda$. Следовательно, $U \cap V = \Lambda$, т. е. U и V являются непересекающимися окрестностями соответственно множеств A и B. Нормальность пространства X доказана.

Докажем, что всякое открытое в X множество G есть множество типа F_σ. Для этого для каждой точки $x \in G$ находим окрестность $\Gamma_{n(x),\ \alpha(x)} \in \mathfrak{B}$ под условием $[\Gamma_{n(x),\ \alpha(x)}] \subset G$ (что возможно в силу регулярности пространства X) и обозначаем снова через Γ_n сумму $\bigcup\limits_{x \in G} \Gamma_{n,\ \alpha(x)}$ по всем $x \in G$, для которых $n(x) = n$. В силу консервативности системы γ_n имеем $[\Gamma_n] = \bigcup\limits_{x \in G} [\Gamma_{n,\ \alpha(x)}] \subseteq G$, а так как каждая точка $x \in G$ содержится в некотором Γ_n, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n] = G$.

Лемма доказана.

Пусть пространство X имеет базу σ, являющуюся объединением локально конечных систем

$$\sigma_i = \{O_\alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \qquad \mathfrak{A} = \bigcup_i \mathfrak{A}_i.$$

По лемме Веденисова (§ 10) для каждого элемента O_α системы σ_i существует непрерывная функция

$$f_\alpha\colon X \to [0,\ 1],$$

равная нулю в точках множества $X \diagdown O_\alpha$ и только в них, $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Отсюда и из локальной конечности системы σ_i

следует, что произвольная точка $x \in X$ обладает окрестностью Ox, на которой для каждого i лишь конечное число функций f_α может принимать значения, отличные от нуля. Поэтому на X определена и непрерывна положительная функция

$$f_i(x) = 1 + \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} f_\alpha(x).$$

Следовательно, для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}_i$ на X определена и непрерывна функция

$$g_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{f_i(x)}.$$

Очевидно,

$$(*) \qquad \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 < 1$$

и

$$(**) \qquad \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x) - g_\alpha(y)]^2 \leqslant \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 + \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(y)]^2$$

для любых x и y из X.

Для $\alpha \in \mathfrak{A}_i$ положим $t_\alpha(x) = \frac{1}{2^{i/2}} g_\alpha(x)$, $x \in X$. Тогда

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} [t_\alpha(x)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Следовательно, набор $hx = \{t_\alpha(x)\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, можно рассматривать как точку обобщенного гильбертова пространства R^τ, где $\tau =$ мощн. $\mathfrak{A}$ (см. гл. 1, § 3).

Покажем, что полученное отображение

$$h\colon X \to R^\tau$$

является гомеоморфизмом.

Если x и y — различные точки пространства X, то существует такой элемент O_α базы σ, что $x \in O_\alpha$ и $y \notin O_\alpha$. Тогда $t_\alpha(x) > 0 = t_\alpha(y)$, следовательно, $hx \neq hy$. Таким образом, отображение $h\colon X \to hX$ взаимно однозначно.

Покажем его непрерывность. Возьмем произвольно точку $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное n так, что $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Локальная конечность систем σ_i позволяет выбрать окрестность Ux_0, пересекающую лишь конечное число элементов систем σ_i для всех $i \leqslant n$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — это все те индексы из $\mathfrak{B}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$, для которых пересечения $Ux_0 \cap O_\alpha$ непусты. Из непрерывности функций t_α вытекает существование такой окрестности $Vx_0 \subseteq Ux_0$, что

$$\left| t_{\alpha_j}(x_0) - t_{\alpha_j}(y) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2s}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s, \ y \in Vx_0.$$

Так как пересечения $Ux_0 \cap O_\alpha$ пусты при $\alpha \in \mathfrak{B}_n \setminus (\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_s)$, то для этих α имеем равенства $t_\alpha(x_0) = t_\alpha(y) = 0$, $y \in Vx_0$. Следовательно,

$$(5) \qquad \sum_{\alpha \in \mathfrak{B}_n} [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2 < s \cdot \frac{\varepsilon^2}{2s} = \frac{\varepsilon^2}{2}, \ y \in Vx_0.$$

В силу выбора числа n и оценок (**) и (*) имеет место неравенство

$$(6) \qquad \sum_{\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}_n} [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2 = \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x_0) - g_\alpha(y)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Из неравенств (5) и (6) для любой точки $y \in Vx_0$ вытекает неравенство

$$\rho(hx_0, hy) = \left(\sum_\alpha [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Непрерывность отображения h доказана.

Докажем непрерывность обратного отображения

$$h^{-1}: hX \to X.$$

Возьмем произвольно точку $t \in hX$ и окрестность Ox точки $x = h^{-1}t$. Найдется такой элемент O_α базы σ, что $x \in O_\alpha \subseteq Ox$. Тогда $\varepsilon = t_\alpha x > 0$. Если $t' \in hX$, $\rho(t, t') < \varepsilon$ и $y = h^{-1}t'$, то $|t_\alpha y - t_\alpha x| < \varepsilon$, следовательно, $t_\alpha y > 0$, т. е. $y \in O_\alpha$. Итак, $h^{-1}O(\varepsilon, t) \subseteq O_\alpha \subseteq Ox$. Непрерывность отображения $h^{-1}: hX \to X$ и теорема 16 доказаны.

Замечание 2. Только что проведенные рассуждения позволяют легко доказать и следующее предложение, обобщающее теорему Урысона (гл. 1, § 8, теорема 9).

Теорема 17 (Даукер [1]). *Обобщенное гильбертово пространство R^τ, $\tau \geqslant \aleph_0$, содержит топологический образ любого метризуемого пространства веса $\leqslant \tau$.*

Лемма 3. *Локально конечная система $\sigma = \{M\}$ подмножеств топологического пространства X веса $wX \leqslant \tau$, $\tau \geqslant \aleph_0$, содержит не более чем τ элементов.*

Доказательство. Возьмем в X базу $\mathfrak{B} = \{O_\alpha\}$, мощн. $\{\alpha\} \leqslant \tau$. Обозначим через $\mathfrak{B}'$ множество всех тех элементов $O_{\alpha'}$ базы $\mathfrak{B}$, каждый из которых пересекается лишь с конечным числом множеств $M \in \sigma$, так что $k_{\alpha'} =$ мощн. $\sigma_{O_{\alpha'}}$ есть конечное число. Система σ локально конечна, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}' = X$ и $\sigma = \bigcup\limits_{\alpha'} \sigma_{O_{\alpha'}}$, значит, мощн. $\sigma = \sum\limits_{\alpha'} k_{\alpha'}$; так как мощн. $\{\alpha'\} \leqslant$ $\leqslant$ мощн. $\{\alpha\} \leqslant \tau$, то и мощн. $\sigma \leqslant \tau$. Лемма доказана.

Докажем теорему 17. При доказательстве теоремы 16 мы показали, что пространство X, обладающее σ-локально конечной базой мощности τ, топологически отображается в R^{τ}. Если вес метрического пространства X не превосходит τ, $\tau \geqslant \aleph_0$, то по лемме 3 любая σ-локально конечная база в X имеет мощность $\tau' \leqslant \tau$ и X топологически отображается в $R^{\tau'} \subseteq R^{\tau}$, что и требовалось доказать.

Понятие паракомпактности позволяет очень просто сформулировать первый общий метризационный критерий.

Теорема 18 (Александров и Урысон [1]). *Хаусдорфово пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно паракомпактно и обладает счетной измельчающейся системой открытых покрытий* *).

Доказательство. 1°. Если пространство X метризуемо, то оно по теореме Стоуна паракомпактно и покрытия $\omega_n = \{O\left(x, \frac{1}{n}\right), x \in X\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, образуют в нем измельчающуюся систему.

2°. Пусть пространство X паракомпактно и открытые покрытия ω_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, образуют измельчающуюся в X систему. Впишем в покрытие ω_i открытое локально конечное покрытие ν_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда система покрытий ν_i, очевидно, измельчается, а поэтому система $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \nu_i$ является σ-локально конечной базой в X. Паракомпактность пространства X обеспечивает его нормальность (см. § 7); поэтому по теореме 16 пространство X метризуемо, что и требовалось доказать.

2. Большая теорема А. Стоуна и паракомпактность метрических пространств как ее следствие. С существующим с древних времен интуитивным представлением «непрерывного пространства» связано интуитивное же представление о «бесконечной делимости» пространства, которому в мире общетопологических идей соответствует идея о существовании для каждого открытого покрытия α пространства X «более мелкого» покрытия β этого же пространства. Понятие вписанности покрытия β в покрытие α еще не гарантирует того, что покрытие β является существенно более мелким, чем покрытие α, — это следует уже из того, что каждое покрытие вписано в себя самого. Гарантию

*) Определение измельчающейся системы покрытий дано в § 6 этой главы (определение 10).

фактического измельчения, или «дробления», покрытия дает более сильное понятие звездной вписанности (см. § 6, определение 2*). Поэтому мы скажем, что данное открытое покрытие ω пространства X допускает дробление, если существует открытое покрытие ω', звездно вписанное в ω. И наконец, мы скажем, что пространство X допускает дробление, если допускает дробление каждое открытое покрытие этого пространства.

Естественно, возникает вопрос: каковы же те топологические пространства, которые допускают дробление? Принципиальный интерес этого вопроса определяется тем, что именно пространства, допускающие дробление, мы склонны считать наиболее отвечающими нашим интуитивным представлениям о пространстве как о некоторой «непрерывной среде». Полный ответ на поставленный вопрос дается глубокой и трудной теоремой А. Стоуна, несомненно принадлежащей к значительнейшим достижениям общей топологии, — в частности, и потому, что она связывает между собою два совершенно различных круга топологических понятий.

Теорема 19 (большая теорема А. Стоуна [1]). *Среди нормальных пространств все паракомпакты и только они допускают дробление.*

Эта теорема, очевидно, содержит два утверждения. Первое из них состоит в том, что всякий паракомпакт допускает дробление. Это утверждение легко вытекает из следующего:

Предложение 1. *Всякое открытое локально конечное покрытие нормального пространства X допускает дробление.*

Если предложение 1 доказано и X — паракомпакт, то во всякое открытое покрытие ω пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие ω', а в ω' можно — в силу предложения 1 — звездно вписать открытое покрытие ω'', которое, очевидно, звездно вписано и в ω. Значит, ω допускает дробление, а так как ω — произвольное открытое покрытие пространства X, то допускает дробление и пространство X.

Переходим к доказательству предложения 1.

Пусть $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — локально конечное покрытие пространства X. По предложению 6 из § 10 существует замкнутое покрытие $\lambda = \{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, комбинаторно вписанное в покрытие ω, т. е. $F_\alpha \subseteq O_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Из комбинаторной вписанности λ в ω вытекает локальная конечность и, следовательно, консервативность покрытия λ.

Для произвольного конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ положим

$$V_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \neq \alpha_i \\ i=1, \ldots, s}} F_\alpha.$$

Множества $V_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$, очевидно, открыты. Покажем, что система ν всевозможных множеств $V_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ звездно вписана в покрытие ω и сама является покрытием пространства X.

Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Так как покрытие λ локально конечно, то точка x содержится лишь в конечном числе элементов этого покрытия. Пусть это будут множества $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_s}$. Тогда, очевидно, $x \in V_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$. Следовательно, система ν есть покрытие пространства X. Покажем, что $\text{Зв}_\nu x \subseteq O_{\alpha_1}$, покажем, другими словами, что из $x \in V_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r} \in \nu$ следует, что $V_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r} \subseteq O_{\alpha_1}$. Но если $x \in V_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}$, то $x \notin F_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha'_j$, $j = 1, \dots, r$. Между тем $x \in F_{\alpha_1}$, значит, $\alpha_1 = \alpha'_{j_0}$ при некотором $j_0 = 1, \dots, r$. Но $V_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r} O_{\alpha'_j} \subseteq O_{\alpha'_{j_0}}$, а $O_{\alpha'_{j_0}} = O_{\alpha_1}$, т. е. $V_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r} \subseteq O_{\alpha_1}$, — и утверждение доказано. Итак, ν есть искомое покрытие, звездно вписанное в покрытие ω.

Первое утверждение теоремы 19 доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы 19.

Предложение 2. *Нормальное пространство X, допускающее дробление, паракомпактно.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{G} = \{G_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, есть счетное открытое покрытие нормального пространства X, и пусть в $\mathfrak{G}$ можно так комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\mathfrak{F} = \{F_n\}$, что $F_n \subseteq G_n$.*

Тогда в $\mathfrak{G}$ можно так комбинаторно вписать открытое локально конечное счетное покрытие $\mathfrak{H} = \{H_n\}$, что $H_n \subseteq G_n$.

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$ берем такое открытое множество G'_n, что

$$F_n \subseteq G'_n \subseteq [G'_n] \subseteq G_n.$$

Очевидно, семейство открытых множеств $\mathfrak{G}' = \{G'_n\}$ и тем более семейство замкнутых множеств $\overline{\mathfrak{G}}' = \{[G'_n]\}$ является покрытием пространства X.

Полагаем $H_n = G_n \setminus \left[\bigcup_{k<n} G'_k\right]$ и доказываем, что $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ есть покрытие пространства X. В самом деле, для каждого $x \in X$ берем такое наименьшее n, что $x \in [G'_n]$. Тогда $x \in G_n$ и $x \notin \left[\bigcup_{k<n} G'_k\right]$, значит, $x \in H_n$. Очевидно, $\mathfrak{H}$ комбинаторно вписано в $\mathfrak{G}$. Остается доказать, что покрытие $\mathfrak{H}$ локально конечно.

Пусть $x \in X$. Так как $\mathfrak{G}'$—покрытие, то существует множество G'_p, содержащее точку x. Множество G'_p не может пересекаться с H_n, $n > p$, так как $H_n = G_n \setminus \bigcup_{k<n} [G_n] \subseteq X \setminus [G'_p]$ при $n > p$. Следовательно, G'_p есть окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним из множеств H_{p+1}, H_{p+2}, ..., т. е. пересекающаяся лишь с конечным числом элементов H_n покрытия $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Пусть пространство X допускает дробление. Докажем, что X паракомпактно. Возьмем произвольное открытое покрытие $\gamma = \gamma_0 = \{U_\alpha\}$ пространства X. Будем строить локально конечное покрытие, вписанное в γ.

а) Возьмем открытое покрытие $\gamma_1 = \{U^1_\alpha\}$, звездно вписанное в γ_0, и вообще открытое покрытие $\gamma_n = \{U^n_\alpha\}$, звездио вписанное в $\gamma_{n-1} = \{U^{n-1}_\alpha\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ индексы α пробегают все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\omega_\tau = \omega_\tau(n)$, являющееся наименьшим порядковым числом, мощность которого равна мощности покрытия γ_n.

Звезду какого-либо множества $M \subseteq X$ относительно покрытия γ_n обозначим через $\text{Зв}_n M$; звезду точки $x \in X$ относительно покрытия γ_n обозначим через $\text{Зв}_n x$.

Каждое γ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, звездно вписано во все предыдущие покрытия γ_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Заметим, что из звездной вписанности какого-нибудь покрытия π' в покрытие π следует его так называемая «правильная» вписанность, состоящая в том, что объединение всяких двух пересекающихся элементов покрытия π' содержится в некотором элементе покрытия π.

б) Полагаем

$$F'_{n\alpha} = \{x \in U_\alpha \mid \text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha\}$$

и доказываем прежде всего тождество

$$F'_{n\alpha} = X \setminus \text{Зв}_n (X \setminus U_\alpha). \tag{7}$$

В самом деле, пусть $x \in F'_{n\alpha}$. Тогда $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$, т. е.

$$\text{Зв}_n x \cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda.$$

Если бы $x \in \text{Зв}_n(X \setminus U_\alpha)$, то существовало бы некоторое $U^n_\beta \in \gamma_n$, пересекающееся с $X \setminus U_\alpha$ и содержащее точку x, так что $\text{Зв}_n x \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \Lambda$, тогда как $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$. Итак, левая часть равенства содержится в правой. Докажем, что правая содержится в левой. Пусть $x \in X \setminus \text{Зв}_n(X \setminus U_\alpha)$. Тогда для всякого $U^n_\beta \in \gamma_n$ из $x \in U^n_\beta$ следует $U^n_\beta \cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda$, т. е. $U^n_\beta \subseteq U_\alpha$. Другими словами, $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$ и $x \in F'_{n\alpha}$.

Равенство (7) доказано.

Так как покрытие γ_{n+1} вписано в γ_n (даже звездно), то для любого $M \subseteq X$, в частности для $M = X \setminus U_\alpha$, имеем $\text{Зв}_{n+1} M \subseteq \text{Зв}_n M$; поэтому непосредственным следствием тождества (7) является включение $F'_{n\alpha} \subseteq F'_{n+1,\,\alpha}$. Мы докажем больше, а именно:

$$\text{Зв}_{n+1} F'_{n\alpha} \subseteq F'_{n+1,\,\alpha}. \tag{8}$$

Пусть $x \in \text{Зв}_{n+1} F'_{n\alpha}$. Это значит, что существует такое $U_\beta^{n+1} \in \gamma_{n+1}$, что $x \in U_\beta^{n+1}$ и $U_\beta^{n+1} \cap F'_{n\alpha} \neq \Lambda$. Отсюда надо вывести, что

$$\text{Зв}_{n+1} x \subseteq U_\alpha.$$

Но покрытие γ_{n+1} звездно вписано в γ_n; значит, существует такое $U_\mu^n \in \gamma_n$, что

$$\text{Зв}_{n+1} x \subseteq U_\mu^n \tag{9}$$

(и, очевидно, $U_\mu^n \cap F'_{n\alpha} \neq \Lambda$). Из последнего неравенства вытекает, что U_μ^n не содержится в $X \setminus F'_{n\alpha} = \text{Зв}_n (X \setminus U_\alpha)$, т. е. $U_\mu^n \cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda$, а это значит, что $U_\mu^n \subseteq U_\alpha$. Отсюда и из (9) следует, что $x \in F'_{n+1,\,\alpha}$. Формула (8) доказана.

Так как звезда всякого множества $M \subseteq X$ относительно открытого покрытия есть открытое в X множество, то из (7) следует, что все $F'_{n\alpha}$ замкнуты, а из (8) вытекает, что множество

$$V_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} F'_{n\alpha}$$

открыто в X.

Докажем теперь, что при любом заданном n семейство $\mathfrak{F}_n = \{F'_{n\alpha}\}$ есть замкнутое покрытие пространства X. В самом деле, пусть $x \in X$ произвольно. Так как γ_n звездно вписано в γ, то $\text{Зв}_n x$ содержится в некотором U_α, а тогда $x \in F'_{n\alpha} \in \mathfrak{F}$, ч. и т. д.

Положим (имея в виду, что индексы α суть порядковые числа)

$$F_{n\alpha} = F'_{n\alpha} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta. \tag{10}$$

Так как множества V_β открыты, то $F_{n\alpha}$ замкнуто. Из определения множеств V_β следует, далее, что тождество (10) можно записать и так:

$$F_{n\alpha} = F'_{n\alpha} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \bigcup_{k=1}^{\infty} F'_{k\beta}. \tag{10'}$$

Докажем, что совокупность $\mathfrak{F}_0$ всех $F_{n\alpha}$ (где n пробегает все натуральные числа, а α для каждого n — все порядковые числа $<\omega_\tau(n)$) есть покрытие пространства X, очевидно, замкнутое.

Берем произвольно точку $x \in X$. Обозначим через α наименьшее порядковое число, $\alpha < \omega_\tau(n)$, удовлетворяющее условию:

существует такое натуральное n, что $x \in F'_{n\alpha}$; такое α существует, так как $\mathfrak{F}' = \{F'_{n\alpha}\}$ есть покрытие, значит (при всяком n точка x содержится в некотором $F'_{n\alpha}$), мы ищем такое n, чтобы α было при этом наименьшим.

Итак, $x \in F'_{n\alpha}$, но $x \notin F'_{k\beta}$, каково бы ни было натуральное k и $\beta < \alpha$. Но это и значит, что $x \in F'_{n\alpha} \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \bigcup\limits_{k} F'_{k\beta}$, т. е. что $x \in F_{n\alpha}$.

в) Не существует такого $U^{n+1}_\eta \in \gamma_{n+1}$, которое одновременно пересекалось бы с какими-либо $F_{n\alpha}$ и $F_{n\beta}$ при $\alpha \neq \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha > \beta$. Очевидно, достаточно доказать, что

$$F_{n\alpha} \cap \text{Зв}_{n+1} F_{n\beta} = \Lambda.$$

Но (см. (8) и (10))

$$\text{Зв}_{n+1} F_{n\beta} \subseteq \text{Зв}_{n+1} F'_{n\beta} \subseteq F'_{n+1\beta} \subseteq V_\beta \subseteq X \setminus F_{n\alpha},$$

откуда утверждение следует.

Из только что доказанного выводим, далее, утверждение:

г) Не существует $U^{n+3}_\nu \in \gamma_{n+3}$, одновременно пересекающегося с $\text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$ и $\text{Зв}_{n+3} F_{n\beta}$ при $\beta \neq \alpha$.

Пусть существует U^{n+3}_ν, пересекающееся с $\text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$ и $\text{Зв}_{n+3} F_{n\beta}$. Тогда существуют такие $U^{n+3}_{\alpha'}$ и $U^{n+3}_{\beta'}$, что $F_{n\alpha} \cap U^{n+3}_{\alpha'} \neq \Lambda$, $F_{n\beta} \cap U^{n+3}_{\beta'} \neq \Lambda$, $U^{n+3}_\nu \cap U^{n+3}_{\alpha'} \neq \Lambda$, $U^{n+3}_\nu \cap U^{n+3}_{\beta'} \neq \Lambda$. Так как $U^{n+3}_\nu \cap U^{n+3}_{\alpha'} \neq \Lambda$ и $U^{n+3}_\nu \cap U^{n+3}_{\beta'} \neq \Lambda$, то объединение $U^{n+3}_\nu \cup U^{n+3}_{\alpha'}$ содержится в некотором U^{n+2}_λ, а объединение $U^{n+3}_\nu \cup U^{n+3}_{\beta'}$ — в некотором U^{n+2}_μ. Но тогда $U^{n+2}_\lambda \cap U^{n+2}_\mu \neq \Lambda$, а поэтому $U^{n+2}_\lambda \cup U^{n+2}_\mu$ содержится в некотором U^{n+1}_η, которое пересекается как с $F_{n\alpha}$, так и с $F_{n\beta}$, вопреки доказанному в пункте в).

д) Положим $G_{n\alpha} = \text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$. Из доказанного следует, что семейство $\mathfrak{G}_n = \{G_{n\alpha}\}$ есть дискретная система множеств. Следовательно, дискретной будет и система $\mathfrak{F}_n = \{F_{n\alpha}\}$.

Положим, наконец,

$$F_n = \bigcup_\alpha F_{n\alpha}, \qquad G_n = \bigcup_\alpha G_{n\alpha}.$$

Очевидно, $F_n \subseteq G_n$.

Как тело дискретной системы замкнутых множеств, множество F_n замкнуто.

Далее, так как семейство $\mathfrak{F}_0 = \{F_{n\alpha}\}$ есть замкнутое покрытие пространства X, то замкнутым покрытием этого пространства является и семейство

$$\mathfrak{F} = \{F_n\}.$$

Тем более семейство $\mathfrak{G} = \{G_n\}$ есть (открытое) покрытие пространства X. При этом $F_n \subseteq G_n$, так что мы находимся в условиях леммы 4. Из нее следует существование локально конечного покрытия $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ пространства X, комбинаторно вписанного в $\mathfrak{G}$, так что $H_n \subseteq G_n$, $\bigcup\limits_n H_n = X$.

Положим

$$H_{n\alpha} = H_n \cap G_{n\alpha}$$

и докажем, что семейство γ' всех множеств $H_{n\alpha}$ (при любых n и α) есть покрытие пространства X. В самом деле, для множества $H_n \subseteq G_n$ имеем

$$H_n = \bigcup_\alpha (H_n \cap G_{n\alpha}), \quad \text{т. е.} \quad H_n = \bigcup_\alpha H_{n\alpha},$$

значит,

$$\bigcup_{n,\alpha} H_{n\alpha} = \bigcup_n \bigcup_\alpha H_{n\alpha} = \bigcup_n H_n = X.$$

Далее, согласно формуле (8) имеем

$$H_{n\alpha} \subseteq G_{n\alpha} = \text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha} \subseteq F'_{n+1,\,\alpha},$$

поэтому покрытие γ' вписано в $\gamma = \{U_\alpha\}$.

Остается доказать, что покрытие γ' локально конечно. Пусть $x \in X$. Так как $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ локально конечно, то существует окрестность Ox точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств H_n (т. е. не пересекающаяся ни с одним H_n, номер n которого больше некоторого числа n_0). Так как система $\mathfrak{G}_n$ дискретна, то для каждого $n \leqslant n_0$ существует окрестность $O_n x \subseteq \subseteq Ox$, пересекающаяся не более чем с одним $G_{n\alpha}$. Тогда окрестность $O'x = \bigcap\limits_{n=1}^{n_0} O_n x$ не пересекается ни с каким $H_{n\alpha} \subseteq H_n$ при $n > n_0$, а при $n \leqslant n_0$ может пересекаться не более чем с одним $H_{n\alpha} \subseteq G_{n\alpha}$, значит, всего может пересекаться лишь с конечным числом элементов покрытия γ'.

Паракомпактность пространства X доказана.

Дадим второе доказательство паракомпактности метрических пространств, выведя ее как простое следствие из теоремы 19.

Пусть X — метрическое пространство. Будем считать $\operatorname{diam} X < \infty$. Требуется доказать, что ко всякому открытому покрытию $\gamma = \{\Gamma_\alpha\}$ имеется звездно вписанное в него открытое покрытие γ'. Относительно индексов α, которыми занумерованы элементы покрытия γ, вновь предполагаем, что они являются порядковыми числами (пробегающими все значения, начиная с 0 до наименьшего порядкового числа ω_τ, мощность которого равна мощности покрытия γ, $0 \leqslant \alpha < \omega_\tau$).

Для каждой точки $x \in X$ обозначаем через $\alpha(x)$ наименьшее такое порядковое число α, что $x \in \Gamma_\alpha$. Тогда через $\varepsilon(x)$ обозначаем число

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{4} \rho(x, X \setminus \Gamma_{\alpha(x)})$$

и полагаем

$$U(x) = O(x, \varepsilon(x)). \tag{11}$$

Замечание 3. Если для точки $y \in X$ имеем $\rho(x, y) < 4\varepsilon(x)$, то $\rho(x, y) < \rho(x, X \setminus \Gamma_{\alpha(x)})$ и, значит, $y \in \Gamma_{\alpha(x)}$.

Этим замечанием мы существенно воспользуемся в конце нашего доказательства; пока же заметим лишь, что из него следует включение

$$U(x) = O(x, \varepsilon(x)) \subseteq O(x, 4\varepsilon(x)) \subseteq \Gamma_{\alpha(x)}.$$

Множество всех $U(x)$, взятых для всех точек $x \in X$, образует покрытие

$$\gamma' = \{U(x)\}, \qquad x \in X,$$

пространства X. Докажем, что γ' есть искомое покрытие, звездно вписанное в γ.

Берем произвольную точку $a \in X$; полагаем

$$E_a = \{x\colon U(x) \ni a\} = \{x\colon \varepsilon(x) > \rho(x, a)\}. \tag{12}$$

Положим

$$d(a) = \sup_{x \in E_a} \varepsilon(x). \tag{13}$$

Очевидно, $d(a)$ есть положительное число (конечное в силу сделанного предположения о конечности диаметра пространства X).

Берем точку

$$b \in E_a \quad \text{под условием} \quad \varepsilon(b) > \frac{2}{3} d(a),$$

т. е. под условием

$$d(a) < \frac{3}{2} \varepsilon(b). \tag{14}$$

Наша цель будет достигнута, если мы докажем, что $\text{Зв}_{\gamma'}(a)$, т. е. множество $\bigcup\limits_{U(x)\ni a} U(x)$, содержится в элементе $\Gamma_{\alpha(b)}$ покрытия γ.

Для этого в свою очередь достаточно доказать, что из $U(x)\ni a$, т. е. из $x\in E_a$, следует $U(x)\subseteq\Gamma_{\alpha(b)}$.

Итак, пусть $x\in E_a$. Это значит, что

$$\varepsilon(x)>\rho(x, a). \tag{15}$$

Требуется доказать, что тогда для любой точки $y\in U(x)$ имеем $y\in\Gamma_{\alpha(b)}$. Но из сделанного выше замечания следует, что для этого в свою очередь достаточно доказать, что

$$\rho(b, y)<4\varepsilon(b).$$

Итак, нам даны: точка $a\in X$, точка $b\in E_a$ и, значит, $\varepsilon(b)>\rho(b, a)$ (по формуле (12)), точка $x\in E_a$ и, значит, $\rho(x, a)<\varepsilon(x)$, точка $y\in U(x)$ и, значит, $\rho(x, y)<\varepsilon(x)$. Вычисляем в этих условиях

$$\rho(y, b)\leqslant\rho(y, x)+\rho(x, a)+\rho(a, b)<\varepsilon(x)+\varepsilon(x)+\varepsilon(b). \tag{16}$$

Но $x\in E_a$, поэтому из (13) и (14) следует

$$\varepsilon(x)\leqslant d(a)<\frac{3}{2}\varepsilon(b).$$

Подставляя это в последнюю часть неравенства (16), получаем

$$\rho(y, b)<\frac{3}{2}\varepsilon(b)+\frac{3}{2}\varepsilon(b)+\varepsilon(b)=4\varepsilon(b),$$

что и требовалось доказать.

3. Критерии паракомпактности. Мы только что доказали, что нормальное пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда в любое его открытое покрытие ω можно сильно звездно вписать некоторое открытое покрытие ω'. Во многих случаях полезны критерии паракомпактности, содержащиеся в следующей теореме Майкла [1]:

Теорема 20. *Для регулярного пространства X каждое из следующих условий эквивалентно условию паракомпактности:*

(1) *в любое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие;*

(2) *в любое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие;*

(3) *в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие (состоящее из множеств произвольной природы);*

(4) *в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие,*

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из паракомпактности X на основании предложения 8 из § 10. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1) очевидным образом.

Выведем из утверждения (2) утверждение (3).

Лемма 5. *В любое открытое счетное покрытие* $\omega = \{O_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *топологического пространства* X *можно комбинаторно вписать локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть

$$K_1 = O_1 \quad \text{и} \quad K_j = O_j \setminus \bigcup_{i<j} O_i, \qquad j = 2, 3, 4, \ldots$$

Так как, очевидно, $\bigcup\limits_{i\leqslant j} K_i = \bigcup\limits_{i\leqslant j} O_i$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, то система $\nu = \{K_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, является покрытием пространства X, комбинаторно вписанным в покрытие ω. Выберем точку $x \in X$ и через i_0 обозначим минимум тех i, для которых $x \in O_i$. Тогда множество O_{i_0} является окрестностью точки x, пересекающей множества K_i лишь для $i \leqslant i_0$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольное открытое покрытие ω пространства X и впишем в него открытое покрытие ν, распадающееся в сумму локально конечных систем $\nu_i = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ В открытое счетное покрытие $\{\tilde{\nu}_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, пространства X, по лемме 5, комбинаторно впишем локально конечное покрытие $\eta = \{D_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как каждая система $\eta_i = \{O_\alpha \cap D_i\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, локально конечна в X, вписана в покрытие ν и покрывает множество D_i, а покрытие η локально конечно, то система $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i$ является локально конечным покрытием пространства X, вписанным в покрытие ω. Итак, утверждение (2) теоремы 20 влечет утверждение (3).

Пусть дано утверждение (3). Рассмотрим произвольное открытое покрытие ω пространства X. В силу регулярности X, для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, замыкание которой содержится в одном из элементов покрытия ω. Впишем в покрытие $\{Ox\}$ локально конечное покрытие $\{D_\alpha\}$. Покрытие $\{[D_\alpha]\}$ замкнуто, вписано в покрытие ω и локально конечно (см. § 6, п. 4). Итак, утверждение (3) теоремы 20 влечет за собою утверждение (4).

Пусть имеет место утверждение (4). Покажем, что пространство X паракомпактно.

Рассмотрим открытое покрытие ω пространства X. В покрытие ω впишем какое-нибудь локально конечное покрытие λ. Для каждой точки $x \in X$ возьмем окрестность Ox, пересекающую лишь конечное число элементов покрытия λ. В покрытие $\{Ox\}$

впишем замкнутое локально конечное покрытие $\mu = \{F_\alpha\}$. Для каждого элемента D покрытия λ рассмотрим окрестность

$$OD = X \setminus \bigcup_{F_\alpha \cap D = \Lambda} F_\alpha.$$

Из построения окрестностей OD ясно, что соотношения

$$OD \cap F_\alpha = \Lambda \quad \text{и} \quad D \cap F_\alpha = \Lambda$$

равносильны для любых $D \in \lambda$ и $F_\alpha \in \mu$. Следовательно, каждый элемент F_α покрытия μ пересекает лишь конечное число элементов системы $\xi = \{OD\}$, $D \in \lambda$. Так как для произвольной точки $x \in X$ существует окрестность V_x, пересекающая лишь конечное число элементов покрытия μ, а каждый из этих элементов пересекается лишь с конечным числом элементов системы ξ, то система ξ локально конечна. Фиксируем для каждого элемента D покрытия λ какой-нибудь содержащий его элемент U_D покрытия ω. Тогда система $\{U_D \cap OD\}$ является, очевидно, локально конечным открытым покрытием пространства X, вписанным в покрытие ω. Паракомпактность пространства X установлена, и теорема 20 доказана.

4. Несколько предложений о сильно паракомпактных и финально компактных пространствах. Предложение 3. *Локально бикомпактное паракомпактное пространство X сильно паракомпактно.*

Лемма 6. *Если замыкание каждого элемента локально конечного покрытия ω топологического пространства X бикомпактно, то покрытие ω звездно конечно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент A покрытия ω и его замыкание $[A]$; каждая точка $x \in [A]$ обладает в X окрестностью Ox, пересекающей лишь конечное число элементов покрытия ω. Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in [A]$, бикомпактного множества $[A]$ выделим конечное подпокрытие $\{Ox_i\}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, s$. Так как каждое множество Ox_i пересекает лишь конечное число элементов покрытия ω, то их сумма $O = \bigcup_{i=1}^{s} Ox_i$ обладает тем же свойством. Но тогда и множество $A \subseteq O$ пересекает лишь конечное число элементов покрытия ω, что и требовалось доказать.

Докажем предложение 3.

Возьмем произвольное открытое покрытие ω пространства X. Для каждой точки $x \in X$ выберем окрестность Ox, замыкание которой бикомпактно. По условию в пересечение $\omega \wedge \omega'$ покрытий ω и $\omega' = \{Ox\}$, $x \in X$, можно вписать локально конечное открытое покрытие ω''. Оно, очевидно, вписано и в ω и в ω'. Из вписанности ω'' в ω' следует, что замыкания элементов покрытия

ω'' бикомпактны. Из леммы 6 следует, что покрытие ω'' звездно конечно, что и требовалось доказать.

Так как метризуемые пространства паракомпактны, то справедливо

Следствие 1. *Локально бикомпактное метризуемое пространство сильно паракомпактно.*

Предложение 4. *Регулярное финально компактное пространство X сильно паракомпактно.*

Прежде чем доказать это предложение, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Регулярное финально компактное пространство паракомпактно.*

Лемма сразу же следует из определения финальной компактности и теоремы 20.

Из регулярности локально бикомпактного хаусдорфова пространства, из леммы 7 и предложения 3 вытекает

Следствие 2. *Локально бикомпактное хаусдорфово финально компактное пространство сильно паракомпактно.*

Топологическое пространство X будем называть σ-бикомпактным, если его можно представить в виде счетной суммы бикомпактных подмножеств.

Лемма 8. *Любое σ-бикомпактное пространство финально компактно.*

Доказательство. Пусть пространство X представлено в виде суммы своих бикомпактных подмножеств X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть ω — произвольное открытое покрытие пространства X. Для каждого номера i из ω выделим конечную подсистему ω_i, покрывающую множество X_i. Ясно, что система $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i$ является счетным подпокрытием покрытия ω, что и требовалось доказать.

Лемма 9. *В нормальном пространстве X в любой окрестности F_σ-множества A содержится корректная окрестность, т. е. окрестность, являющаяся F_σ-множеством.*

Доказательство. Пусть множество A является суммой замкнутых в X множеств A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть O — окрестность A. Так как для каждого номера i в окрестности O множества A_i содержится корректная окрестность V_i (см. § 10, предложение 4), то множество $V = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$ является искомой окрестностью множества A. Лемма доказана.

Следствие 3. *В нормальном пространстве X в любой окрестности финально компактного множества $B \subseteq X$ содержится корректная окрестность.*

Доказательство. Пусть O — окрестность множества B. Для каждой точки $x \in B$ возьмем окрестность Ox, с замыканием содержащуюся в O. Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in B$, множества B выделим счетное подпокрытие $\{Ox_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Множество $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [Ox_i]$ имеет тип F_σ в X, содержит множество B и содержится в O. По лемме 9 существует корректная окрестность V множества A, а следовательно, и множества B, содержащаяся в O, что и требовалось доказать.

Докажем теперь предложение 4. Так как пространство X нормально (и даже по лемме 7 паракомпактно), то его можно, в силу теоремы Тихонова, считать подмножеством бикомпакта bX. Рассмотрим какое-нибудь открытое покрытие $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства X. Каждое множество O_α является пересечением X с некоторым открытым в bX множеством U_α. Сумма

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$$

является окрестностью X в bX. Из следствия 3 вытекает возможность выбрать корректную окрестность V множества X в bX, содержащуюся в U.

Так как множество V открыто в бикомпакте bX, то оно локально бикомпактно. Так как множество V имеет тип F_σ в бикомпакте bX, то оно является σ-бикомпактным. В силу леммы 8 и следствия 2 множество V сильно паракомпактно. Поэтому в покрытие $\{V \cap U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, множества V можно вписать открытое звездно конечное покрытие $\{W_\lambda\}$. Очевидно, покрытие $\{W_\lambda \cap X\}$ пространства X будет открытым, звездно конечным и вписанным в покрытие ω, что и требовалось доказать.

Следствие 4. *Любое σ-бикомпактное регулярное пространство сильно паракомпактно.*

Следствие 5. *Метрические пространства со счетной базой сильно паракомпактны.*

Следующее утверждение показывает, что для связных пространств сильная паракомпактность и финальная компактность эквивалентны (см. предложение 4):

Предложение 5. *Если связное пространство X сильно паракомпактно, то оно и финально компактно.*

Действительно (см. § 6, п. 3), в силу открытости и замкнутости тела любой компоненты звездно конечного открытого покрытия ω пространства X и в силу связности X, покрытие ω имеет всего лишь одну компоненту. Но так как каждая компонента звездно конечного покрытия счетна, то покрытие ω счетно.

Таким образом, вписав в произвольное открытое покрытие ν пространства X звездно конечное открытое покрытие, мы впишем в ν открытое счетное покрытие. Предложение 6 доказано.

ПРИБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ПЕРВОЙ

§ 1. Обратные спектры топологических пространств *)

Пусть дано направленное множество $\mathfrak{A}$, элементы α, β, γ, ... которого будем называть индексами. Пусть каждому $\alpha \in \mathfrak{A}$ поставлено в соответствие топологическое пространство X_α и всякий раз, как только $\beta > \alpha$, определено непрерывное отображение

$$\mathfrak{S}_\alpha^\beta \colon X_\beta \to X_\alpha,$$

причем если $\gamma > \beta > \alpha$, то

$$\mathfrak{S}_\alpha^\gamma = \mathfrak{S}_\alpha^\beta \mathfrak{S}_\beta^\gamma. \tag{1}$$

Тогда будем говорить, что дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пространства X_α будем называть элементами спектра S, а отображения $\mathfrak{S}_\alpha^\beta$ — проекциями **). Условие (1) называется условием транзитивности проекций этого спектра.

Точка $x = \{x_\alpha\}$ топологического произведения $\Pi = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ называется нитью спектра S, если $x_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^\beta x_\beta$ при $\beta > \alpha$. Элемент x_α нити x называется α-й координатой нити x. Пределом спектра S называется множество $X \subseteq \Pi$ всех нитей спектра S, снабженное топологией, индуцированной произведением Π. В этом случае пишем:

$$X = \lim S.$$

Из определения топологии в X сразу следует, что

$$wX \leqslant w\left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha\right) \leqslant \max\left(\sup_\alpha wX_\alpha, \text{мощн. } \mathfrak{A}\right).$$

Проектирования $\pi_\alpha \colon \Pi \to X_\alpha$, рассматриваемые лишь на пределе X спектра S, будем называть проекциями предела X в элементы X_α спектра S и обозначать через $\mathfrak{S}_\alpha \colon X \to X_\alpha$. Из определения нитей сразу же вытекают равенства

$$\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^\beta \mathfrak{S}_\beta \tag{2}$$

при $\beta > \alpha$.

Так как непрерывны проектирования $\pi_\alpha \colon \Pi \to X_\alpha$, то непрерывны и проекции $\mathfrak{S}_\alpha \colon X \to X_\alpha$.

---

*) Впервые для частного случая, когда T_0-пространства X_α являются комплексами, а множество индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ счетно, введены Александровым [7], [9] («проекционные спектры»). Это были исторически первые «обратные системы». Далее см. Курош [1], Фрейденталь [1], Александров [19], Стинрод [1].

**) Через $\mathfrak{S}_\alpha^\alpha$ будем обозначать тождественное отображение X_α.

По определению топологии в Π и в X, базу в X образуют пересечения X с элементарными открытыми в Π множествами, т. е. множества вида

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{s} \pi_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} \varpi_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i},$$

где множества O_{α_i} открыты в X_{α_i}, $i = 1, \ldots, s$. Докажем более сильное

Предложение 1. *Базу в X образуют всевозможные множества вида $\varpi_\alpha^{-1} O_\alpha$, где O_α — открытое в X_α множество, $\alpha \in \mathfrak{A}$.*

Действительно, пусть $O = \bigcap_{i=1}^{s} \varpi_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i}$, где множества O_{α_i} открыты в X_{α_i}, $i = 1, \ldots, s$. Возьмем индекс $\alpha \geqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда множество $O_\alpha = \bigcap_{i=1}^{s} \left(\varpi_{\alpha_i}^{\alpha}\right)^{-1} O_{\alpha_i}$ открыто в пространстве X_α и, в силу соотношений (2),

$$\bigcap_{i=1}^{s} \varpi_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} \varpi_{\alpha}^{-1} \left(\varpi_{\alpha_i}^{\alpha}\right)^{-1} O_{\alpha_i} = \varpi_\alpha^{-1} O_\alpha.$$

Предложение 1 доказано.

Прообразы $\varpi_\alpha^{-1} O_\alpha$ открытых в элементах X_α спектра S множеств O_α будем называть элементарными открытыми множествами предела X спектра S.

Так как при $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ подпространство T_i-пространства является T_i-пространством и так как произведение T_i-пространств является T_i-пространством, то предел X спектра из T_i-пространств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, является T_i-пространством, $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

По тем же соображениям (см. гл. 1, § 8, предложение 6) предел обратного спектра из индуктивно нульмерных пространств индуктивно нульмерен.

Предложение 2. *Если элементы обратного спектра $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, хаусдорфовы, то предел X спектра S замкнут в произведении $\Pi = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $y = \{y_\alpha\} \in \Pi \setminus X$. Тогда существует такая пара индексов α и $\beta > \alpha$, что

$$\varpi_\alpha^\beta y_\beta = y'_\alpha \neq y_\alpha.$$

Возьмем непересекающиеся окрестности Oy_α и Oy'_α точек y_α и y'_α. Из непрерывности проекции ϖ_α^β вытекает существование такой окрестности Oy_β точки y_β, что $\varpi_\alpha^\beta O y_\beta \subseteq O y'_\alpha$. Ясно, что множество $\pi_\alpha^{-1} O y_\alpha \cap \pi_\beta^{-1} O y_\beta$ является окрестностью точки y в Π и содержится в $\Pi \setminus X$. Таким образом, множество $\Pi \setminus X$ открыто, а множество X замкнуто в Π, что и требовалось доказать.

Из доказанного предложения и из теоремы Тихонова о бикомпактности произведения бикомпактов вытекает

Предложение 3. *Предел обратного спектра из бикомпактов*) является бикомпактом.*

*) То есть спектра, элементы которого являются бикомпактами.

Предел спектра из непустых пространств может быть, вообще говоря, пустым. Однако имеет место

Предложение 4 (Курош [1], Стинрод [1]). *Предел X обратного спектра $\{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из непустых бикомпактов X_α непуст.*

Доказательство. Через Π_β обозначим множество тех точек $x = \{x_\alpha\} \in \Pi$, для которых $x_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^\beta x_\beta$ при $\alpha < \beta$. Так как бикомпакт X_β непуст по условию, то непусто и множество Π_β. Действительно, если $x_\beta^0 \in X_\beta$, то множество Π_β содержит точку x, у которой $x_\alpha = x_\beta^0$ при $\alpha = \beta$, $x_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^\beta x_\beta^0$ при $\alpha < \beta$, а остальные координаты выбраны произвольно. Система множеств Π_β, $\beta \in \mathfrak{A}$, центрирована, так как $\bigcap\limits_{i=1}^{s} \Pi_{\beta_i} \supseteq \Pi_\beta$ при $\beta > \beta_i$, $i = 1, \ldots, s$. Наконец, множества Π_β замкнуты в Π, что доказывается так же, как предложение 2. В силу бикомпактности произведения Π пересечение $\bigcap\limits_{\beta \in \mathfrak{A}} \Pi_\beta$ непусто и состоит, очевидно, из нитей спектра S, что и требовалось доказать.

Как было показано в предложении 7 из § 8 гл. I, непрерывные отображения пространства X в сомножители топологического произведения порождают непрерывное отображение X в само произведение. Установим аналогичное утверждение для обратных спектров. Пусть дан обратный спектр $S = \{Y_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и пусть для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ определено отображение $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ множества X в пространство Y_α, причем

$$f_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^\beta f_\beta, \tag{3}$$

если $\beta > \alpha$.

Тогда для любой точки $x \in X$ набор $\{f_\alpha x\} \in \Pi = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$ является нитью спектра S, т. е. определено отображение f: $X \to Y$ множества X в предел Y спектра S. Это отображение мы будем называть пределом отображений f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и писать

$$f = \lim_{\mathfrak{A}} f_\alpha.$$

Очевидно, отображение f для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет условию

$$f_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha f. \tag{4}$$

Предложение 5. 1°. *Пусть X есть топологическое пространство, а все отображения f_α непрерывны; тогда предел f отображений f_α также непрерывен. 2°. Если, кроме того, множество $f_\alpha X$ всюду плотно в Y_α для любого α, то множество fX всюду плотно в пределе Y спектра S. 3°. Если X — бикомпакт, все элементы Y_α спектра S хаусдорфовы и множества $f_\alpha X$ всюду плотны в Y_α, то $fX = Y$.*

Доказательство. 1°. Отображение f: $X \to Y \subseteq \Pi$ совпадает с диагональным произведением непрерывных отображений f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и поэтому непрерывно (см. гл. I, § 8, предложение 7).

2°. Рассмотрим открытое в Y_α множество O_α и его прообраз $\mathfrak{S}_\alpha^{-1} O_\alpha$. Если $[f_\alpha X] = Y_\alpha$, то $f_\alpha X \cap O_\alpha \neq \Lambda$. Тогда, в силу соотношения (4), и $fX \cap \mathfrak{S}_\alpha^{-1} O_\alpha \neq \Lambda$.

Из предложения 1 следует, что $[fX] = Y$, если $[f_\alpha X] = Y_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$.

3°. Если все Y_α хаусдорфовы, то и предел Y спектра S хаусдорфов. Поэтому, если X — бикомпакт, то его образ fX — также бикомпакт и, следовательно, замкнут в Y, откуда $fX = [fX] = Y$, ч. и т. д.

Предложение 6. *Пусть даны спектры* $S = \{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *и* $\Sigma = \{Y_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *и для всех* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *определены такие непрерывные отображения*

$$g_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha,$$

что

$$\pi_\alpha^\beta g_\beta = g_\alpha \mathfrak{S}_\alpha^\beta \tag{3'}$$

при $\beta > \alpha$. *Тогда существует такое непрерывное отображение* $f\colon X \to Y$ *предела* X *спектра* S *в предел* Y *спектра* Σ, *что*

$$\pi_\alpha f = g_\alpha \mathfrak{S}_\alpha. \tag{4'}$$

Доказательство. Отображения $f_\alpha = g_\alpha \mathfrak{S}_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ непрерывны, и при $\beta > \alpha$ имеем

$$f_\alpha = g_\alpha \mathfrak{S}_\alpha = g_\alpha \mathfrak{S}_\alpha^\beta \mathfrak{S}_\beta = \pi_\alpha^\beta g_\beta \mathfrak{S}_\beta = \pi_\alpha^\beta f_\beta.$$

По предложению 5 предел f отображений f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, непрерывен и выполнено условие (4):

$$\pi_\alpha f = f_\alpha = g_\alpha \mathfrak{S}_\beta.$$

Предложение 6 доказано.

Рассмотрим спектр $S = \{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и в каждом X_α выберем подпространство A_α таким образом, что $\mathfrak{S}_\alpha^\beta A_\beta \subseteq A_\alpha$ при $\beta > \alpha$. Тогда, очевидно, определен спектр $S_A = \{A_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$ *), $\alpha \in \mathfrak{A}$. Произведение $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ естественно вложено в произведение $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, и нити спектра S_A являются, очевидно, нитями спектра S. Поэтому предел A спектра S_A естественно вложен в предел X спектра S. Покажем, что

$$A = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\alpha^{-1} A_\alpha. \tag{5}$$

Действительно, если $x = \{x_\alpha\} \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\alpha^{-1} A_\alpha$, то $x_\alpha \in A_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Следовательно, нить x спектра S является и нитью спектра S_A, т. е. $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\alpha^{-1} A_\alpha \subseteq A$. Наоборот, если $x \in A$, то $\mathfrak{S}_\alpha x \in A_\alpha$, т. е. $A \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\alpha^{-1} A_\alpha$. Равенство (5) установлено. В частности, имеем

Предложение 7. *Для множества* F, *замкнутого в пределе* X *спектра* $S = \{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *предел спектра* $S_F = \{\mathfrak{S}_\alpha F, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *совпадает с множеством* F.

Доказательство. Как мы только что показали, достаточно установить равенство

$$F = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\alpha^{-1} \mathfrak{S}_\alpha F.$$

---

*) Проекции $\mathfrak{S}_\alpha^\beta$ рассматриваются теперь только на A_β.

Включение $F \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\tilde{\omega}_\alpha F$ очевидно. Пусть $x \notin F$. Тогда существует (см. предложение 1) такой индекс α и такое открытое в X_α множество O_α, что $x \in \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha \subseteq X \setminus F$. Следовательно, $\tilde{\omega}_\alpha F \cap O_\alpha = \Lambda$ и $x \notin \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\tilde{\omega} F$. Тем более $x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\tilde{\omega}_\alpha F$. Итак, $F \supseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\tilde{\omega}_\alpha F$. Предложение 7 доказано.

Предложение 7 позволяет переходить от спектра $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, с проекциями $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ и $\tilde{\omega}_\alpha$, не являющимися, вообще говоря, отображениями «на», к спектру с тем же пределом, что и исходный спектр, и с проекциями $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ и $\tilde{\omega}_\alpha$, являющимися отображениями «на».

Действительно, в силу предложения 7 достаточно рассмотреть спектр $\{\tilde{\omega}_\alpha X, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Подмножество $\mathfrak{A}'$ направленного множества $\mathfrak{A}$ называется конфинальной частью $\mathfrak{A}$, если для любого элемента $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует элемент $\alpha' \in \mathfrak{A}'$, следующий за α: $\alpha' \geqslant \alpha$.

Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}'$ — конфинальная часть множества $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}'$ есть направленное множество и определен обратный спектр $S' = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, называемый конфинальной частью спектра S.

Предложение 8. *Пусть обратный спектр $S' = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, является конфинальной частью обратного спектра $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда отображение $\tilde{\omega}$: $X \to X'$ предела X спектра S в предел X' спектра S', ставящее в соответствие нити $x = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, спектра S нить $x' = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, спектра S', есть гомеоморфизм X на X'.*

Доказательство. Построим отображение $\tilde{\omega}'$: $X' \to X$, обратное к $\tilde{\omega}$. Пусть $x' = \{x_\alpha\} \in X'$. Для произвольного $\alpha \in \mathfrak{A}$ положим

$$x_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta, \quad \text{где} \quad \beta \geqslant \alpha \quad \text{и} \quad \beta \in \mathfrak{A}'.$$

Точка x_α от выбора индекса $\beta \in \mathfrak{A}'$ не зависит. Действительно, пусть $\beta \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \alpha$, β и $\gamma \in \mathfrak{A}'$. Возьмем индекс $\delta \in \mathfrak{A}'$, следующий и за β и за γ. Тогда (так как x' — нить спектра S')

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \tilde{\omega}_\beta^\delta x_\delta = \tilde{\omega}_\alpha^\delta x_\delta = \tilde{\omega}_\alpha^\gamma \tilde{\omega}_\gamma^\delta x_\delta = \tilde{\omega}_\alpha^\gamma x_\gamma.$$

Таким образом, мы имеем точку $x = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, произведения $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$. Покажем, что это нить спектра S.

Пусть $\beta > \alpha$. Возьмем $\gamma \geqslant \beta$, $\gamma \in \mathfrak{A}'$. Тогда, по определению множества x, имеем

$$x_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^\gamma x_\gamma = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \tilde{\omega}_\beta^\gamma x_\gamma = \tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta.$$

Итак, в соответствие произвольно выбранной нити $x' \in X'$ мы поставили нить $x = \tilde{\omega}' x' \in X$.

Очевидно, $\tilde{\omega}\tilde{\omega}' x' = x'$, $x' \in X'$ и $\tilde{\omega}'\tilde{\omega} x = x$, $x \in X$. Поэтому отображение $\tilde{\omega}$: $X \to X'$ является взаимно однозначным отображением X на X', а отображение $\tilde{\omega}'$ обратно к $\tilde{\omega}$.

Пусть множество O_α открыто в X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Возьмем индекс $\beta \geqslant \alpha$. $\beta \in \mathfrak{A}'$. Тогда

$$\tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha = \left(\tilde{\omega}_\alpha^\beta \tilde{\omega}_\beta\right)^{-1} O_\alpha = \tilde{\omega}_\beta^{-1} \left(\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right)^{-1} O_\alpha.$$

Поэтому базу в X образуют (см. предложение 1) всевозможные множества вида $\tilde{\omega}_\beta^{-1}O_\beta$, где O_β — открытое в X_β множество, $\beta \in \mathfrak{A}'$. Обозначая через $\tilde{\omega}'_\beta$ проекцию предела X' в элемент X_β спектра S', имеем

$$\tilde{\omega}_\beta^{-1}O_\beta = \{x = \{x_\alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}:\ x_\beta \in O_\beta\}$$

и

$$\left(\tilde{\omega}'_\beta\right)^{-1} O_\beta = \left\{x' = \{x_\alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}':\ x_\beta \in O_\beta\right\}.$$

Поэтому

$$\tilde{\omega}\tilde{\omega}_\beta^{-1}O_\beta = \left(\tilde{\omega}'_\beta\right)^{-1} O_\beta,$$

т. е. отображение $\tilde{\omega}$ переводит базу пространства X в базу пространства X' и потому является гомеоморфизмом (см. гл. 1, § 2 предложение 4), что и требовалось доказать.

Предложение 9. *Если в спектре* $S = \left\{X_\alpha,\ \tilde{\omega}_\alpha^\beta\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *из бикомпактов* X_α *все проекции* $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ *являются отображениями «на», то и все проекции* $\tilde{\omega}_\alpha$ *являются отображениями «на».*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь индекс α_0 и точку $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$. Множество $\mathfrak{A}' = \{\alpha \in \mathfrak{A}:\ \alpha \geqslant \alpha_0\}$, в силу направленности $\mathfrak{A}$, является конфинальной частью $\mathfrak{A}$. Поэтому вместо спектра S, по предыдущему предложению, достаточно рассмотреть спектр $S' = \left\{X_\alpha,\ \tilde{\omega}_\alpha^\beta\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$. По условию бикомпакты $\left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\alpha\right)^{-1} x_\alpha = \Phi_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, непусты и при $\beta > \alpha \geqslant \alpha_0$ выполнено соотношение

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta\Phi_\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\beta\left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\beta\right)^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha^\beta\left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\alpha\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right)^{-1} x_{\alpha_0} =$$
$$= \tilde{\omega}_\alpha^\beta\left(\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right)^{-1}\left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\alpha\right)^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha^\beta\left(\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right)^{-1}\Phi_\alpha = \Phi_\alpha.$$

Но

$$\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{-1}x_{\alpha_0} = \left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\alpha\tilde{\omega}_\alpha\right)^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^\alpha\right)^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\Phi_\alpha$$

для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$, поэтому

$$\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{-1}x_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \tilde{\omega}_\alpha^{-1}\Phi_\alpha.$$

Из равенства (5) следует, что множество $\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{-1}x_{\alpha_0}$ гомеоморфно пределу спектра $\left\{\Phi_\alpha,\ \tilde{\omega}_\alpha^\beta\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, а этот предел, в силу предложения 4, непуст, значит, непусто и множество $\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{-1}x_{\alpha_0}$. Следовательно, $\tilde{\omega}_{\alpha_0}X \ni x_{\alpha_0}$. Так как точка $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$ бралась произвольно, то $\tilde{\omega}_{\alpha_0}X = X_{\alpha_0}$. Индекс α_0 взят произвольно, поэтому предложение 9 доказано.

Предложение 10. *Если множества F_1 и F_2 замкнуты в пределе X обратного спектра $\left\{X_\alpha,\ \tilde{\omega}_\alpha^\beta\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $F_1 \cap F_2 = \Lambda$ и множество F_1 бикомпактно, то существует такой индекс β и в X_β существует такое открытое множество O_β, что*

$$F_1 \subseteq \tilde{\omega}_\beta^{-1}O_\beta \subseteq X \setminus F_2,$$

в частности,

$$\tilde{\omega}_\beta F_1 \cap \tilde{\omega}_\beta F_2 = \Lambda.$$

Доказательство. Для каждой точки $x \in F_1$ существует такой индекс $\alpha = \alpha(x)$ и такое открытое в X_α множество O_α, что $x \in V_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha \subseteq X \setminus F_2$. Из покрытия $\{V_\alpha\}$ бикомпактного множества F_1 выделим конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_i}\}$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть $\beta > \alpha_i$ и $O_i = \left(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\beta}\right)^{-1} O_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда

$$V_{\alpha_i} = \tilde{\omega}_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i} = \tilde{\omega}_\beta^{-1} \left(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\beta}\right)^{-1} O_{\alpha_i} = \tilde{\omega}_\beta^{-1} O_i, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Положим $O_\beta = \bigcup\limits_{i=1}^{s} O_i$. Множество $V = \tilde{\omega}_\beta^{-1} O_\beta = \bigcup\limits_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ есть окрестность множества F_1, не пересекающаяся с множеством F_2. Следовательно, $\tilde{\omega}_\beta F_1 \cap \tilde{\omega}_\beta F_2 = \Lambda$, что и требовалось доказать.

Предложение 11. *Пусть дан обратный спектр* $S = \left\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\beta}\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *из бикомпактов* X_α *с проекциями* $\tilde{\omega}_\alpha^{\beta}$, *являющимися отображениями «на». Тогда для любого открытого покрытия* ω *предела* X *спектра* S *существует такой индекс* $\alpha = \alpha(\omega)$ *и такое конечное открытое покрытие* $\{V_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, *бикомпакта* X_α, *что покрытие* $\left\{\tilde{\omega}_\alpha^{-1} V_i\right\}$, $i = 1, \ldots, s$, *вписано в покрытие* ω.

Доказательство. Представив элементы покрытия ω в виде суммы элементарных открытых множеств, получим открытое покрытие ω' бикомпакта X из элементарных множеств, вписанное в покрытие ω. Из покрытия ω' выделим конечное подпокрытие $\nu = \left\{O_i = \tilde{\omega}_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i}\right\}$, $i = 1, \ldots, s$, бикомпакта X (множество O_{α_i} открыто в X_{α_i}, $i = 1, \ldots, s$). Возьмем индекс $\alpha > \alpha_i$, $i = 1, \ldots, s$, и положим $V_i = \left(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\alpha}\right)^{-1} O_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Множества V_i открыты в X_α, и покрытие

$$\nu = \left\{\tilde{\omega}_\alpha^{-1} V_i = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} \left(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\alpha}\right)^{-1} O_{\alpha_i} = O_i\right\}$$

вписано в покрытие ω.

Из предложения 9 следует, что

$$\bigcup_{i=1}^{s} V_i \supseteq \bigcup_{i=1}^{s} \tilde{\omega}_\alpha O_i = \tilde{\omega}_\alpha \bigcup_{i=1}^{s} O_i = \tilde{\omega}_\alpha X = X_\alpha,$$

т. е. система $\{V_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, является покрытием бикомпакта X_α. Предложение 11 доказано.

Предложение 12. *Если в обратном спектре* $S = \left\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\beta}\right\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *из хаусдорфовых пространств* X_α *все проекции* $\tilde{\omega}_\alpha^{\beta}$ *являются совершенными отображениями, то совершенными отображениями будут все проекции* $\tilde{\omega}_\alpha\colon X \to X_\alpha$ *предела* X *спектра* S. *Если для индекса* α_0 *проекции* $\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{\alpha}$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, *являются отображениями «на», то отображением «на» будет и проекция* $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$.

Доказательство. Фиксируем какой-нибудь индекс α_0 и покажем, что проекция $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ является совершенным отображением. Возьмем точку $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$. Очевидно,

$$\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{-1} x_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \geqslant \alpha_0} \tilde{\omega}_\alpha^{-1} \left(\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{\alpha}\right)^{-1} x_{\alpha_0}.$$

Для бикомпактов $\Phi_\alpha = (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} x_{\alpha_0}$ имеем (при $\beta \geqslant \alpha$) соотношение

$$\Phi_\beta = (\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha_0})^{-1} x_{\alpha_0} = (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0}\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha})^{-1} x_{\alpha_0} = (\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha})^{-1} (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} x_{\alpha_0} = (\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha})^{-1} \Phi_\alpha.$$

Поэтому в силу формулы (5) множество $\Phi = \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha_0} x_{\alpha_0}$ совпадает с пределом спектра $\{\Phi_\alpha, \tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}\}$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, а в силу предложения 3 Φ есть бикомпакт. Если все проекции $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0}$ являются отображениями «на», то бикомпакты Φ_α непусты, $\alpha \geqslant \alpha_0$, и, по предложению 4, непуст бикомпакт Φ, т. е. $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ есть отображение «на».

Установим замкнутость проекции $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$.

Для каждого $\alpha \geqslant \alpha_0$ рассмотрим множества $Y_\alpha = [\tilde{\omega}_\alpha X]$. В силу непрерывности проекций $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ и включений $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}\tilde{\omega}_\beta X = \tilde{\omega}_\alpha X \subseteq Y_\alpha$ имеем включения

$$\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha} Y_\beta \subseteq Y_\alpha, \qquad \beta \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0.$$

Из замкнутости множеств Y_β в X_β и замкнутости проекций $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ следует, что $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha} Y_\beta = Y_\alpha$ и что отображение $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$: $Y_\beta \to Y_\alpha$ замкнуто. Ясно также, что множества $Y_\beta \cap (\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha})^{-1} y_\alpha$ бикомпактны для любого $y_\alpha \in Y_\alpha$. Итак, отображения $\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}$: $Y_\beta \to Y_\alpha$, $\beta \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0$, являются совершенными отображениями Y_β на Y_α.

По формуле (5) и предложению 8 предел спектра $S' = \{Y_\alpha, \tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}\}$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, совпадает с множеством $\bigcap\limits_{\alpha \geqslant \alpha_0} \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} Y_\alpha \subseteq X$. Но так как $Y_\alpha \supseteq \tilde{\omega}_\alpha X$ для любого α, то предел спектра S' совпадает с пределом X спектра S. Так как множество Y_{α_0} замкнуто в X_{α_0}, то достаточно установить замкнутость отображения $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$: $X \to Y_{\alpha_0}$.

Рассмотрим замкнутое в X множество F и точку $x_{\alpha_0} \in Y_{\alpha_0} \setminus \tilde{\omega}_{\alpha_0} F$. Прообраз $\Phi = \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha_0} x_{\alpha_0}$ является, по доказанному, бикомпактом и $F \cap \Phi = \Lambda$. По предложению 10 существует такой индекс $\alpha \geqslant \alpha_0$ и в X_α существует такое открытое множество O_α, что

$$\Phi \subseteq \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} O_\alpha \subseteq X \setminus F.$$

Так как все проекции в спектре S' являются отображениями «на», то, по доказанному, отображением «на» будет и проекция $\tilde{\omega}_\alpha$. Поэтому

$$\Phi_\alpha = (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} \Phi_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha_0} x_{\alpha_0} = \tilde{\omega}_\alpha \Phi,$$

и, следовательно,

$$\Phi_\alpha \subseteq O_\alpha.$$

Из замкнутости отображения $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0}$: $Y_\alpha \to Y_{\alpha_0}$ вытекает (см. гл. 1, § 1, предложение 11) существование такой окрестности Ox_{α_0} точки x_{α_0}, что $(\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} Ox_{\alpha_0} \subseteq O_\alpha$. Но тогда

$$\tilde{\omega}^{-1}_{\alpha_0} Ox_{\alpha_0} = \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} (\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha_0})^{-1} Ox_{\alpha_0} \subseteq \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha} O_\alpha \subseteq X \setminus F,$$

следовательно, $\tilde{\omega}_{\alpha_0} F \cap Ox_{\alpha_0} = \Lambda$. Так как точка $x_{\alpha_0} \notin \tilde{\omega}_{\alpha_0} F$ выбиралась произвольным образом, то множество $\tilde{\omega}_{\alpha_0} F$ замкнуто в Y_{α_0}. Предложение доказано.

Важным частным случаем обратных спектров являются спектры, для которых множество $\mathfrak{A}$ является множеством натуральных чисел (или множеством неотрицательных целых чисел), т. е. спектры вида

$$S=\{X_n, \mathfrak{F}_n^m\}, \qquad n=(0), 1, 2, 3, \ldots$$

Для таких спектров достаточно указать лишь проекции $\mathfrak{F}_n^{n+1}$, $n=(0), 1, 2, 3, \ldots$, считая

$$\mathfrak{F}_n^m=\mathfrak{F}_n^{n+1}\mathfrak{F}_{n+1}^{n+2}\ldots\mathfrak{F}_{m-1}^m.$$

Очевидно, если все пространства X_n непусты, а проекции $\mathfrak{F}_n^{n+1}$ являются отображениями «на», то проекции $\mathfrak{F}_n\colon X\to X_n$ предела X в элемент X_n спектра S также являются отображениями «на» и, в частности, $X\neq\Lambda$.

Следующие утверждения, выясняющие связь обратных спектров с топологическими произведениями, понадобятся нам лишь в гл. 9.

Предложение 13. *Гильбертов кирпич Q^∞ гомеоморфен пределу спектра $S=\{Q^n, \mathfrak{F}_n^{n+1}\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, элементами которого являются n-мерные кубы Q^n (рассматриваемые при $n>1$ как произведения $Q^{n-1}\times Q^1$), а проекции $\mathfrak{F}_n^{n+1}$ которого совпадают с проекциями произведения $Q^{n+1}=Q^n\times Q^1$ на сомножитель Q^n.*

Доказательство. Гильбертов кирпич Q^∞ будем рассматривать как произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty}Q_i^1$ счетной системы отрезков $Q_i^1=\{x_i\colon 0\leqslant x_i\leqslant 1\}$, $i=1, 2\ 3, \ldots$ (см. гл. 1, § 8). Элемент Q^n спектра S будем рассматривать как произведение $\prod\limits_{i=1}^{n}Q_i^1$ отрезков $Q_i^1=\{x_i\colon 0\leqslant x_i\leqslant 1\}$, $i=1, \ldots, n$, а проекцию $\mathfrak{F}_n^{n+1}$ — как отображение, ставящее в соответствие точке $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\in Q^{n+1}$ точку $(x_1, \ldots, x_n)\in Q^n$.

Через $p_n\colon Q^\infty\to Q^n$ обозначим отображение, ставящее в соответствие точке $(x_1, \ldots, x_i, \ldots)\in Q^\infty$ точку $(x_1, \ldots, x_n)\in Q^n$. Это отображение, очевидно, непрерывно, и

$$p_n=\mathfrak{F}_n^m p_m$$

при $1\leqslant n\leqslant m$. Следовательно, определен предел

$$p\colon Q^\infty\to Y$$

отображений p_n, где Y — предел спектра S. Как уже отмечалось выше, отображение p непрерывно и

$$p_n=p\mathfrak{F}_n, \tag{6}$$

где $\mathfrak{F}_n$ — проекция предела Y спектра S в элемент Q^n этого спектра, $n=1, 2, 3, \ldots$

Если точки $x'=(x_1', \ldots, x_i', \ldots)\in Q^\infty$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_i'', \ldots)\in Q^\infty$ различны, то существует такой номер n, что $x_n'\neq x_n''$. Тогда $p_nx'\neq p_nx''$ и, в силу соотношения (6), $px'\neq px''$, т. е. отображение $p\colon Q^\infty\to pQ^\infty$ взаимно однозначно.

Рассмотрим нить $y=\{y_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, спектра S. Пусть $y_n=(x_1, \ldots, x_n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Тогда набор $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ есть точка $x\in Q^\infty$, для которой $p_nx=y_n$, т. е. $px=y$. Следовательно, отображение $p\colon Q^\infty\to Y$ есть отображение на весь предел Y. Так как Q^∞ — бикомпакт, то (см. гл. 1, § 7, следствие 1) p есть топологическое отображение Q^∞ на Y. Предложение 13 доказано.

Мы сейчас докажем предложение, являющееся обобщением только что полученного.

Начнем с предварительных рассмотрений.

Множество всех непредельных порядковых чисел, меньших предельного порядкового числа θ бесконечной мощности τ, обозначим через $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим систему бикомпактов X_α, занумерованных всеми числами $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Положим $P_1 = X_1$. Предположим, что для всех чисел $\beta < \gamma$, $\gamma < \theta$ уже построены: бикомпакты P_β и при $\beta' < \beta$ непрерывные отображения $\mathfrak{S}^\beta_{\beta'}$ бикомпактов P_β на бикомпакты $P_{\beta'}$, удовлетворяющие при $\beta'' < \beta' < \beta$ соотношениям

$$\mathfrak{S}^\beta_{\beta''} = \mathfrak{S}^{\beta'}_{\beta''}\mathfrak{S}^\beta_{\beta'}.$$

Если число γ непредельное, то положим $P_\gamma = P_{\gamma-1} \times X_\gamma$ и через $\mathfrak{S}^\gamma_{\gamma-1}$ обозначим проекцию произведения $P_{\gamma-1} \times X_\gamma$ на сомножитель $P_{\gamma-1}$. При $\beta < \gamma - 1$ положим $\mathfrak{S}^\gamma_\beta = \mathfrak{S}^{\gamma-1}_\beta \cdot \mathfrak{S}^\gamma_{\gamma-1}$. Ясно, что $\mathfrak{S}^\gamma_\beta$ есть отображение «на».

Пусть $\beta' < \beta < \gamma$. Тогда

$$\mathfrak{S}^\gamma_{\beta'} = \mathfrak{S}^{\gamma-1}_{\beta'}\mathfrak{S}^\gamma_{\gamma-1} = \mathfrak{S}^\beta_{\beta'} \cdot \mathfrak{S}^{\gamma-1}_\beta \mathfrak{S}^\gamma_{\gamma-1} = \mathfrak{S}^\beta_{\beta'} \cdot \mathfrak{S}^\gamma_\beta.$$

Если число γ предельное, то через P_γ обозначим предел спектра $S_\gamma = \left\{P_\beta, \mathfrak{S}^\beta_{\beta'}\right\}$, $\beta < \gamma$, а через $\mathfrak{S}^\gamma_\beta$ — проекцию этого предела в элемент P_β спектра S_γ. Соотношение $\mathfrak{S}^\gamma_{\beta'} = \mathfrak{S}^\beta_{\beta'}\mathfrak{S}^\gamma_\beta$ при $\beta' < \beta < \gamma$ сразу же следует из определения проекций $\mathfrak{S}^\gamma_{\beta'}$ и $\mathfrak{S}^\gamma_\beta$. То, что проекции $\mathfrak{S}^\gamma_\beta$ являются отображениями «на», следует из предложения 12.

Бикомпакт, являющийся пределом спектра $S = S(X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}) = \left\{P_\beta, \mathfrak{S}^\beta_{\beta'}\right\}$, $\beta < \theta$, обозначим через P, его проекции на элементы P_β спектра S обозначим через $\mathfrak{S}_\beta$.

Теперь докажем

Предложение 14. *Бикомпакт P гомеоморфен произведению $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$.*

Через q_α обозначим проекцию произведения $P_\alpha = P_{\alpha-1} \times X_\alpha$ на сомножитель X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Возьмем нить $y = \{y_\beta\} \in P$, $y_\beta \in P_\beta$, спектра S. Через hy обозначим набор $\{q_\alpha y_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Ясно, что $hy \in X$.

Итак, мы имеем отображение

$$h\colon P \to X.$$

Покажем, что h есть отображение «на». Возьмем точку $x = \{x_\alpha\} \in X$. Положим $y_1 = q_1^{-1}x_1$. Пусть для всех чисел $\beta < \gamma$, $\gamma < \theta$, уже построены точки $y_\beta \in P_\beta$, удовлетворяющие при $\beta' < \beta$ соотношениям $\mathfrak{S}^\beta_{\beta'}y_\beta = y_{\beta'}$. Если число γ непредельное, то полагаем $y_\gamma = (y_{\gamma-1}, x_\gamma) \in P_\gamma$. Если число γ предельное, то через y_γ обозначим нить $\{y_\beta\}$, $\beta < \gamma$, спектра S_γ. Ясно, что и в первом и во втором случае $\mathfrak{S}^\gamma_\beta y_\gamma = y_\beta$ при $\beta < \gamma$. Построив указанным способом точки y_β для всех $\beta < \theta$, получим точку $y = \{y_\beta\} \in P$, для которой $hy = x$. Итак,

$$hP = X.$$

Покажем, что отображение h взаимно однозначно. Пусть $y^i = \{y^i_\beta\}$, $i = 1, 2$, и $y^1 \neq y^2$. Тогда существует такое наименьшее $\gamma < \theta$, что $y^1_\gamma \neq y^2_\gamma$. Число γ не может быть предельным. В самом деле, если бы оно было предельным, то нити $y^1_\gamma = \{y^1_\beta\}$ и $y^2_\gamma = \{y^2_\beta\}$, $\beta < \gamma$, имели бы различные координаты y^1_β и y^2_β для некоторого $\beta < \gamma$, что противоречит минимальности γ. Итак, число γ непредельное.

В силу минимальности γ справедливо соотношение $q_\gamma y^1_\gamma \neq q_\gamma y^2_\gamma$. Следовательно, $hy^1 \neq hy^2$. Взаимная однозначность h установлена.

Докажем непрерывность h. Фиксируем в бикомпакте X_{α_0} открытое множество O_{α_0}. Через V_{α_0} обозначим множество тех точек $x = \{x_\alpha\} \in X$ для которых $x_{\alpha_0} \in O_{\alpha_0}$. Ясно, что $h^{-1}V_{\alpha_0} = \tilde{\omega}^{-1}_{\alpha_0} q^{-1}_{\alpha_0} O_{\alpha_0}$. В силу непрерывности отображений $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ и q_{α_0} множество $h^{-1}O_{\alpha_0}$ открыто.

Так как всевозможные конечные пересечения множеств вида V_{α_0} образуют базу в X и прообраз пересечения равен пересечению прообразов, то прообразы элементов некоторой базы произведения X открыты в P. Следовательно, отображение h непрерывно. В силу бикомпактности P отображение h является гомеоморфизмом. Итак, предел спектра S гомеоморфен произведению $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, что и требовалось доказать.

Так как мощность множества непредельных чисел α, меньших числа θ мощности $\tau \geqslant \aleph_0$, равна τ, то имеем

Следствие 1. *Предел спектра $S(X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A})$, где все X_α являются отрезками, гомеоморфен тихоновскому кубу I^τ при $\tau > \aleph_0$ и гильбертову кирпичу при $\tau = \aleph_0$.*

§ 2. Веерные произведения топологических пространств

Пусть дана система непрерывных отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to X_0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, топологических пространств X_α в топологическое пространство X_0. Через X обозначим множество тех точек $x = \{x_\alpha\} \in \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, для каждой из которых существует такая точка $x_0 = x_0(x) \in X_0$, что $f_\alpha x_\alpha = x_0$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Множество X, снабженное топологией, индуцированной топологией произведения $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, назовем веерным произведением пространств X_α относительно отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to X_0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и будем обозначать через

$$\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} (f_\alpha\colon X_\alpha \to X_0).$$

Очевидно,

$$wX \leqslant w \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha \leqslant \max(\sup_\alpha wX_\alpha, \text{ мощн. } \mathfrak{A}).$$

Ограничения $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ проекций $\pi_\alpha\colon \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha \to X_\alpha$ будем называть проекциями веерного произведения X в сомножители X_α.

Таким образом, множества вида $\bigcap\limits_{i=1}^{s} p^{-1}_{\alpha_i} O_{\alpha_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — произвольный конечный набор индексов α, а O_{α_i} — произвольные открытые подмножества сомножителей X_{α_i}, $i=1, \ldots, s$, образуют в X базу. Элементы этой базы будем называть элементарными открытыми в X множествами.

Так как

$$f_\alpha p_\alpha = f_\beta p_\beta$$

для любых α и β из $\mathfrak{A}$, то отображение

$$p_0 = f_\alpha p_\alpha \colon X \to X_0, \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

определено однозначно. Его мы также будем называть проекцией веерного произведения X. Так как проекции p_α непрерывны (см. гл. 1, § 8), то непрерывна и проекция p_0.

Элементы x_α набора $x = \{x_\alpha\} \in X \subseteq \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ будем называть координатами точки x.

Так как топология в X индуцируется топологией произведения $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, то имеет место

Предложение 1. *Для любой точки $x_0 \in X_0$ множество $p_0^{-1} x_0$ совпадает с произведением $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha^{-1} x_0 \subseteq \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$. Для любой точки $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$ множество $p_{\alpha_0}^{-1} x_{\alpha_0}$ совпадает с множеством $x_{\alpha_0} \times \prod\limits_{\alpha \neq \alpha_0} f_\alpha^{-1} f_{\alpha_0} x_{\alpha_0}$.*

Отсюда вытекает

Первая лемма «о параллельных». *Пусть дано веерное произведение X пространств X_1 и X_2 относительно отображений $f_1 \colon X_1 \to X_0$ и $f_2 \colon X_2 \to X_0$.*

Если $x_1 \in X_1$ и $x_0 = f_1 x_1$, то проекция p_2 гомеоморфно отображает множество $p_1^{-1} x_1 = x_1 \times f_2^{-1} x_0$ на множество $f_2^{-1} x_0$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"'] & X_0
\end{tikzcd}$$

Первая лемма «о параллельных» утверждает, таким образом, в частности, и следующее:

если прообразы всех точек пространства X_0 при отображении f_2 обладают каким-либо общим топологическим свойством (например, все они бикомпактны, или индуктивно нульмерны, или связны, или конечны, или счетны и т. д.), то тем же свойством обладают и прообразы всех точек пространства X_1 при («параллельном f_2») отображении p_1.

Прежде чем перейти ко второй лемме «о параллельных», докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть дано веерное произведение X пространств X_1 и X_2 относительно отображений $f_1 \colon X_1 \to X_0$ и $f_2 \colon X_2 \to X_0$. Тогда для любого множества $A \subseteq X_1$ справедливо соотношение*

$$p_1^{-1} A \subseteq p_2^{-1} f_2^{-1} f_1 A.$$

Действительно, по первой лемме «о параллельных»

$$p_2p_1^{-1}A = \bigcup_{x\in A} p_2p_1^{-1}x = \bigcup_{x\in A} f_2^{-1}f_1x = f_2^{-1}f_1A,$$

откуда нужное включение следует. Лемма доказана.

Вторая лемма «о параллельных». *Пусть дано веерное произведение X пространств X_1 и X_2 относительно отображений $f_1\colon X_1\to X_0$ и $f_2\colon X_2\to X_0$. Тогда:*

(а) *если отображение f_2 открыто, то открыто и отображение p_1;*

(б) *если отображение f_2 совершенно, то совершенно и отображение p_1.*

Доказательство. Докажем утверждение (а). Возьмем открытое в X множество O и точку $x=(x_1, x_2)\in O$. Из определения топологии в X вытекает существование таких окрестностей V_i точек x_i в X_i, $i=1,2$, что $p_1^{-1}V_1\cap p_2^{-1}V_2\subseteq O$. По условию множество $U=f_2V_2$ открыто. Следовательно, открыты в X_1 множества $f_1^{-1}U=U_1$ и $U_1\cap V_1$. Так как $f_1x_1=f_2x_2\in U$, то $x_1\in U_1\cap V_1$. Поэтому

$$x=(x_1, x_2)\in p_1^{-1}(U_1\cap V_1)\cap p_2^{-1}V_2\subseteq p_1^{-1}V_1\cap p_2^{-1}V_2\subseteq O.$$

Так как $f_1(U_1\cap V_1)\subseteq U=f_2V_2$, то для любой точки $x_1'\in U_1\cap V_1$ найдется такая точка $x_2'\in V_2$, что $f_2x_2'=f_1x_1'$. Следовательно, $(x_1', x_2')\in p_1^{-1}V_1\cap\cap p_2^{-1}V_2\subseteq O$ и $p_1(x_1', x_2')=x_1'$. Таким образом, $p_1O\supseteq U_1\cap V_1\ni x_1$, т. е. точка $x_1=p_1x$ является внутренней точкой множества p_1O. В силу произвольности точки $x\in O$ множество p_1O открыто. Пункт (а) леммы доказан.

Докажем утверждение (б). Из того, что отображение f_2 совершенно, и из первой леммы «о параллельных» вытекает бикомпактность всех прообразов $p_1^{-1}x_1$, $x_1\in X_1$. Осталось показать замкнутость отображения p_1.

Рассмотрим замкнутое в X множество F и точку $x_1^0\notin p_1F$. Множество $\Phi=p_1^{-1}x_1^0$, по доказанному, бикомпактно и не пересекается с F. В окрестности $X\setminus F$ произвольной точки $x=(x_1^0, x_2)\in\Phi$ содержится элементарная окрестность $Ox=p_1^{-1}Ox_1^0\cap p_2^{-1}Ox_2$. Из покрытия $\{Ox\}$, $x\in\Phi$, множества Φ выделим конечное подпокрытие $\{O_i=p_1^{-1}O_ix_1^0\cap p_2^{-1}Ox_2^i\}$, $i=1, \ldots, s$. Пусть $V_1=\bigcap_{i=1}^{s} O_ix_1^0$ и $V_2=\bigcup_{i=1}^{s} Ox_2^i$. Тогда

$$(1)\qquad \Phi\subseteq\bigcup_{i=1}^{s}(p_1^{-1}V_1\cap p_2^{-1}Ox_2^i)=p_1^{-1}V_1\cap\bigcup_{i=1}^{s}p_2^{-1}Ox_2^i=$$
$$=p_2^{-1}V_1\cap p_2^{-1}V_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{s}O_i\subseteq X\setminus F.$$

Если $x_0=f_1x_1^0$, то по первой лемме «о параллельных» множество $f_2^{-1}x_0$ совпадает с множеством $p_2\Phi$ и поэтому содержится в множестве V_2.

Предложение 11 из § 1 гл. I обеспечивает существование такой окрестности Ox_0 точки x_0, что

$$(2)\qquad f_2^{-1}Ox_0\subseteq V_2.$$

Непрерывность отображении f_1 позволяет найти такую окрестность $Ox_1^0 \subseteq V_1$ точки x_1^0, что

(3) $$f_1 Ox_1^0 \subseteq Ox_0.$$

Из леммы 1 и соотношений (1), (2), (3) следует, что

$$p_1^{-1}Ox_1^0 \subseteq p_2^{-1}f_2^{-1}f_1 Ox_1^0 \cap p_1^{-1}V_1 \subseteq$$
$$\subseteq p_2^{-1}f_2^{-1}Ox_0 \cap p_1^{-1}V_1 \subseteq p_2^{-1}V_2 \cap p_1^{-1}V_1 \subseteq X \setminus F,$$

т. е. $Ox_1^0 \cap p_1 F = \Lambda$. Таким образом, любая точка множества $X_1 \setminus p_1 F$ является для него внутренней, т. е. множество $p_1 F$ замкнуто. Пункт (б), а вместе с ним и лемма доказаны.

В гл. 9 нам понадобится следующая лемма (примыкающая к уже доказанным утверждениям о веерных произведениях):

Лемма 2. *Пусть дано веерное произведение*

$$X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} (f_\alpha\colon X_\alpha \to X_0).$$

Тогда проекции

$$p_0\colon X \to X_0 \quad \text{и} \quad p_\alpha\colon X \to X_\alpha, \qquad \alpha \in \mathfrak{A},$$

являются (а) *открытыми, соответственно* (б) *индуктивно нульмерными, если* (а) *открытыми и отображениями «на», соответственно* (б) *индуктивно нульмерными, являются все отображения* f_α.

Доказательство. (а) Возьмем открытое в X множество O и точку $x \in O$. Пусть $x_\alpha = p_\alpha x$ и $x_0 = p_0 x$.

Фиксируем какой-нибудь индекс $\alpha = \alpha_0$. Из определения топологии в X вытекает существование таких индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и таких окрестностей O_i точек x_{α_i}, $i = 0, 1, \ldots, s$, что $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{s} p_{\alpha_i}^{-1} O_i \subseteq O$.

Пусть $V_0 = \bigcap\limits_{i=0}^{s} f_{\alpha_i} O_i$. Если отображения f_α открыты, то V_0 есть окрестность точки x_0. Положим $V_{\alpha_0} = O_0 \cap f_{\alpha_0}^{-1} V_0$. Ясно, что V_{α_0} есть окрестность точки x_{α_0}. Покажем, что

$$p_0 O \supseteq V_0 \quad \text{и} \quad p_{\alpha_0} O \supseteq V_{\alpha_0}.$$

Так как

$$p_0 O = f_{\alpha_0} p_{\alpha_0} O \quad \text{и} \quad f_{\alpha_0} V_{\alpha_0} = V_0,$$

то достаточно установить включение $p_{\alpha_0} O \supseteq V_{\alpha_0}$. Пусть

$$x'_{\alpha_0} \in V_{\alpha_0} \quad \text{и} \quad x'_0 = f_{\alpha_0} x'_{\alpha_0}.$$

Так как $f_{\alpha_i} O_i \subseteq V_0$, то в O_i существует такая точка x'_{α_i}, что $f_{\alpha_i} x'_{\alpha_i} = x'_0$, $i = 1, \ldots, s$. Так как f_α являются отображениями на X_0, то в X_α существуют такие точки x'_α, что $f_\alpha x'_\alpha = x'_0$, $\alpha \neq \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Ясно, что точка $x' = \{x'_\alpha\}$ принадлежит множеству O и $p_{\alpha_0} x' = x'_{\alpha_0}$, следовательно, $p_{\alpha_0} O \supseteq V_{\alpha_0}$. Открытость проекций p_0 и p_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, установлена.

(б) Индуктивная нульмерность проекций p_0 и p_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, следует из предложения 1 этого параграфа и предложения 6 из § 8 гл. 1. Лемма доказана.

Следующее утверждение касается отображений в веерное произведение:

Лемма 3. *Пусть дано веерное произведение*

$$Y = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} (g_\alpha\colon Y_\alpha \to Y_0),$$

и пусть определены такие непрерывные отображения $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *что для любых двух индексов* α *и* α' *из* $\mathfrak{A}$ *выполняется соотношение*

$$g_\alpha f_\alpha = g_{\alpha'} f_{\alpha'}. \tag{4}$$

Тогда диагональное произведение $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$ *отображений* f_α *есть отображение в веерное произведение* $Y \subseteq \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой точки $x \in X$ выполняется включение $\{f_\alpha x\} \in Y$. Но это так в силу условия (4). Лемма доказана.

Замечание 1. Из предложения 7 § 8 гл. 1 сразу же следует, что отображение f в лемме 3 непрерывно, если непрерывны все отображения f_α, и удовлетворяет условиям

$$p_\alpha f = f_\alpha, \tag{5}$$

где p_α есть проекция Y в Y_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Глава вторая

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

§ 1. Перегородки. Большая и малая индуктивные размерности

1. Перегородки. «Прикосновение составляет отличительную принадлежность тел и дает им название геометрических, когда в них удерживаем это свойство, не принимая в рассуждение все другие, существенные ли то будут, или случайные».

Этими словами Н. И. Лобачевский начинает первую главу своего сочинения «Новые начала геометрии».

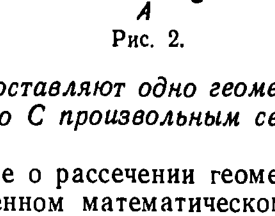

Рис. 2.

Пояснив только что приведенные слова чертежом (рис. 2), Лобачевский продолжает:

«Два тела A, B, касаясь друг друга, составляют одно геометрическое тело C ... Обратно, всякое тело C произвольным сечением S разделяется на две части A, B».

Взятое во всей общности представление о рассечении геометрического тела на две части на современном математическом языке находит свое адекватное выражение в следующем определении:

Определение 1. Скажем, что *множество E разбивает топологическое пространство X, если $X \setminus E$ несвязно.*

Замкнутое множество B, разбивающее пространство, называется *перегородкой* в этом пространстве. Тогда

$$X \setminus B = O_1 \cup O_2,$$

где O_1 и O_2 — непустые дизъюнктные открытые множества *) пространства X.

Определение 1′. Говорим, что *множество E разбивает пространство X между данными множествами P и Q* или что оно

*) Напоминаем, что через O, o, а также через G, U, V, Γ в этой книге обозначаются только открытые множества, через F, Φ — только замкнутые.

отделяет множества P и Q пространства X, если $X\setminus E = H_1 \cup H_2$, где H_1, H_2 дизъюнктны и открыты в $X\setminus E$ и $P \subseteq H_1$, $Q \subseteq H_2$. Если E замкнуто в X, оно называется *перегородкой между P и Q в X*, и тогда множества H_1, H_2 открыты во всем X *).

В дальнейшем мы среди множеств, разбивающих данное пространство, будем почти во всех случаях рассматривать лишь замкнутые множества (перегородки). Этому, в частности, содействует следующее

Предложение 1. *Если в наследственно нормальном пространстве X множество E отделяет множества P и Q, то существует содержащаяся в E перегородка B между P и Q.*

Доказательство. Так как X наследственно нормально и, очевидно, $H(H_1, H_2) = \Lambda$, то в силу предложения 1, гл. 1, § 5, п. 2, имеются дизъюнктные открытые в X множества $O_1 \supseteq H_1$, $O_2 \supseteq H_2$. Множество $B = X\setminus(O_1 \cup O_2)$ замкнуто в X и содержится в E. Очевидно, $X \setminus B = O_1 \cup O_2$, $O_1 \supseteq P$, $O_2 \supseteq Q$, так что B есть искомая перегородка между P и Q.

Замечание 1. Если

$$X = X_1 \cup X_2,$$

где множества X_1 и X_2 замкнуты в X и ни одно из них не совпадает со всем пространством X, то $B = X_1 \cap X_2$ есть перегородка в X (достаточно положить $O_1 = X \setminus X_2 \equiv X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$, $O_2 = X \setminus X_1 \equiv X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$; тогда $X \setminus B = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \Lambda$).

Обратно, если B — перегородка в пространстве X и

$$X \setminus B = O_1 \cup O_2, \qquad O_1 \cap O_2 = \Lambda,$$

то, полагая $X_1 = O_1 \cup B$, $X_2 = O_2 \cup B$, получаем представление пространства X в виде суммы $X = X_1 \cup X_2$ замкнутых множеств X_1, X_2, причем $X_1 \cap X_2 = B$ (очевидно).

Определение 1а. Перегородка B (в пространстве X) называется *тонкой*, если $\langle B \rangle = \Lambda$.

Предложение 2. *Всякое бинарное (т. е. состоящее из двух элементов) разбиение* **) $\alpha = \{A_1, A_2\}$ *пространства X определяет в X тонкую перегородку*

$$B = \text{гр}\, A_1 = \text{гр}\, A_2,$$

причем (гл. 1, § 6, п. 4, предложение 12)

$$X \setminus B = O_1 \cup O_2,$$

где $O_1 = \langle A_1 \rangle$, $O_2 = \langle A_2 \rangle$.

---

*) В этом определении множества P и Q могут быть и пустыми!

**) См. гл. 1, § 6, п. 4.

Обратно, для всякой тонкой перегородки B существует по крайней мере одно такое бинарное разбиение $\alpha = \{A_1, A_2\}$, что определяемая им перегородка $B_\alpha = \operatorname{гр} A_1 = \operatorname{гр} A_2$ содержится в B.

В самом деле, пусть B — тонкая перегородка в X и $X \setminus B = O_1 \cup O_2$ (где открытые в X множества O_1 и O_2 непусты и дизъюнктны). Тогда, полагая $A_1 = [O_1]$, $A_2 = [O_2]$, имеем $X = A_1 \cup A_2$ — в противном случае $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ было бы непустым открытым множеством, лежащим в B, и перегородка B не была бы тонкой. Пара $\{A_1, A_2\} = \alpha$ есть бинарное разбиение, для которого множество $B_\alpha = \operatorname{гр} A_1 = \operatorname{гр} A_2$ содержится в B.

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Любая перегородка B (между данными множествами P и Q) содержит тонкую перегородку (между теми же множествами).*

Доказательство. Пусть $X \setminus B = o_1 \cup o_2$, $o_1 \cap o_2 = \Lambda$, $o_1 \supseteq P$, $o_2 \supseteq Q$. Полагаем $O_1 = X \setminus [o_2]$. Тогда O_1 открыто, $O_1 \supseteq o_1$, $O_1 \cap o_2 = \Lambda$.

Далее, $O_1 \cup [o_2] = X$. Тем более $[O_1] \cup [o_2] = X$. Поэтому $\alpha = \{[O_1], [o_2]\}$ есть разбиение пространства X, причем $B_\alpha = \operatorname{гр} [O_1] = \operatorname{гр} [o_2] \subseteq B$, ч. и т. д.

В силу предложения 3 мы в дальнейшем практически всегда будем рассматривать лишь тонкие перегородки.

Замечание 2. Определение 1 сводит понятие перегородки между непустыми множествами к понятию связности. Но, и обратно, можно сказать, что пространство X несвязно, если пустое множество образует в нем перегородку между непустыми множествами: тогда в пространстве X существует разбиение, состоящее из двух непустых открыто-замкнутых множеств.

Заметим также, что множества P и Q в пространстве X тогда и только тогда имеют дизъюнктные окрестности OP и OQ, когда между P и Q в X существует перегородка: если $OP \cap OQ = \Lambda$, то такой перегородкой является $X \setminus (OP \cup OQ)$. Обратное утверждение очевидно. Наконец, мы помним, что в наследственно нормальном пространстве X наличие у множеств P и Q дизъюнктных окрестностей OP и OQ эквивалентно тому, что эти множества отделены, т. е. что $H(P, Q) = \Lambda$.

Итак, в наследственно нормальном пространстве отделенность двух множеств эквивалентна существованию перегородки между ними.

На протяжении всей этой книги мы будем иметь много поводов убедиться в том, что в основе всей теории размерности лежат два понятия, применяемые в различной обстановке и в различных вариантах, а именно понятие перегородки и понятие покрытия. Мы будем по большей части рассматривать конечные покрытия — как открытые, так и замкнутые; при этом последние всегда можно свести к одним лишь разбиениям. Что касается перегородок, то можно обойтись одними лишь тонкими перегородками, рассмотрение которых, по существу, эквивалентно рассмотрению бинарных разбиений.

2. Индуктивные размерности $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$. Полагаем по определению $\operatorname{Ind} X = -1$ в том и только том случае, когда пространство X пусто.

Предположим, что класс пространств X, для которых $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$, уже определен.

Для данного пространства $X \neq \Lambda$ полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, если между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами P и Q пространства X имеется перегородка B, для которой $\operatorname{Ind} B \leqslant n-1$.

Если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ и в то же время имеется хотя бы одна пара дизъюнктных замкнутых множеств P, Q, между которыми нет ни одной перегородки B, удовлетворяющей условию $\operatorname{Ind} B \leqslant n-2$, то говорят, что $\operatorname{Ind} X = n$. Это последнее равенство означает, следовательно, что условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ выполнено, но условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$ уже не выполнено. Наконец, если условие $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ не выполнено ни при каком натуральном числе n, то говорим, что $\operatorname{Ind} X = \infty$, причем принимаем соглашение, что $n < \infty$ при любом $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Определенный таким образом топологический инвариант $\operatorname{Ind} X$ называется большой индуктивной размерностью пространства X.

Из самого определения $\operatorname{Ind} X$ вытекает

Предложение 4. *Если размерность $\operatorname{Ind} X$ конечна, то пространство X нормально.*

В самом деле, из конечности $\operatorname{Ind} X$ следует, что между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами P и Q в X существует перегородка B, но тогда $X \setminus B = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \Lambda$, $P \subseteq O_1$, $Q \subseteq O_2$, т. е. O_1, O_2 суть дизъюнктные окрестности множеств P и Q.

Переходим к определению малой индуктивной размерности $\operatorname{ind} X$ (оно аналогично определению $\operatorname{Ind} X$): полагаем $\operatorname{ind} X = -1$ в том и только том случае, когда $X = \Lambda$. Полагаем $\operatorname{ind} X \leqslant n$, если для любой точки p пространства X и для любого не содержащего эту точку замкнутого множества Q существует перегородка B между p и Q, удовлетворяющая условию $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$; полагаем $\operatorname{ind} X = n$, если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и если при этом точку p и замкнутое множество $Q \subseteq X \setminus p$ можно выбрать так, что между p и Q не существует никакой перегородки B, для которой было бы $\operatorname{ind} B \leqslant n-2$. Если же неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n$ не имеет места ни при каком натуральном n, то полагаем $\operatorname{ind} X = \infty$.

Замечание 3. Если для данной фиксированной точки p и любого замкнутого $Q \subseteq X \setminus p$ существует (между p и Q) перегородка B, для которой $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$, то пишем $\operatorname{ind}_p X \leqslant n$; при этом равенство $\operatorname{ind}_p X = n$ означает, что неравенство $\operatorname{ind}_p X \leqslant n$ имеет место, а неравенство $\operatorname{ind}_p X \leqslant n-1$ уже не выполнено. Как и прежде, полагаем $\operatorname{ind}_p X = \infty$, если неравенство $\operatorname{ind}_p X \leqslant n$ не выполнено ни при каком n. Определенный таким образом инвариант $\operatorname{ind}_p X$ называется малой индуктивной размерностью пространства X в данной точке p. Очевидно,

$$\operatorname{ind} X = \sup_{p \in X} \operatorname{ind}_p X.$$

Предложение 5. *Если в данной точке $p \in X$ малая индуктивная размерность $\operatorname{ind}_p X$ конечна, то пространство X регулярно в точке p. Если же $\operatorname{ind}_p X = 0$, то точка p функционально отделима от всякого замкнутого $Q \subseteq X \setminus p$, так что всякое пространство X, нульмерное в смысле $\operatorname{ind} X = 0$, вполне регулярно.*

Первое утверждение следует из существования перегородки между точкой p и любым замкнутым $Q \subseteq X \setminus p$. Если же эта перегородка пуста, то $X = O_1 \cup O_2$, где $p \in O_1$, $Q \subseteq O_2$, $O_1 \cap O_2 = \Lambda$. Тогда функция f, равная 0 на O_1 и 1 на O_2, отделяет точку p от множества Q.

Следующее замечание нам сейчас же понадобится:

Предложение 6. *Если B — перегородка в пространстве X между замкнутыми множествами P и Q и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое подпространство, пересекающееся как с P, так и с Q, то $B_0 = X_0 \cap B$ есть перегородка в X_0 между $P_0 = X_0 \cap P$ и $Q_0 = X_0 \cap Q$.*

Доказательство предоставляется читателю.

Для любого T_1-пространства X имеет место формула

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X. \tag{1}$$

В самом деле, надо доказать, что при любом n из $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ следует $\operatorname{ind} X \leqslant n$. Это утверждение верно, если $\operatorname{Ind} X = -1$. Предполагая наше утверждение верным при $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$, докажем его для $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Но если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, то (в частности) между любой точкой $p \in X$ и любым замкнутым в X множеством $Q \subseteq X \setminus p$ существует перегородка B, для которой $\operatorname{Ind} B \leqslant n-1$, и, следовательно (согласно предположению индукции), $\operatorname{ind} B \leqslant \operatorname{Ind} B \leqslant n-1$, так что $\operatorname{ind} X \leqslant n$, ч. и т. д.

3. Монотонность большой и малой индуктивной размерности соответственно по замкнутым и любым подмножествам. Предложение 7. *Если множество* $X_0 \subset X$ *замкнуто в* X, *то* $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Предложеиие очевидно, если $\operatorname{Ind} X = \infty$.

Пусть $\operatorname{Ind} X = k < \infty$; требуется доказать, что тогда $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant k$. Это так, если $k = -1$; предположим, что утверждение доказано для $k \leqslant n-1$, докажем его для $k = n$. Итак, $\operatorname{Ind} X = n$. Требуется доказать, что между любыми двумя дизъюнктными, замкнутыми в X_0 множествами P_0 и Q_0 имеется перегородка $B_0 \subset X_0$, для которой $\operatorname{Ind} B_0 \leqslant n-1$. Но так как X_0 замкнуто в X, то P_0 и Q_0 также замкнуты в X, значит, между ними в X существует перегородка, для которой $\operatorname{Ind} B \leqslant n-1$. Тогда $B_0 = X_0 \cap B$ есть перегородка между P_0 и Q_0 в X, и так как $B_0 \subseteq B$, то по предположению индукции имеем и $\operatorname{Ind} B_0 \leqslant n-1$. Предложение доказано.

Предложение 7_0. *Если X_0 — любое подпространство пространства X, то* $\operatorname{ind} X_0 \leqslant \operatorname{ind} X$.

Аналогично предыдущему надо доказать, что из $\operatorname{ind} X = k$ следует $\operatorname{ind} X_0 \leqslant k$. При $k = -1$ утверждение тривиально; докажем его для $k = n$ в предположении, что оно верно при $k \leqslant n-1$. Пусть $p \in X_0$ и замкнутое в X_0 множество Q_0 выбраны произвольно при единственном условии: $Q_0 \subseteq X \setminus p$. Требуется найти в X_0 перегородку B_0 между p и Q_0, для которой $\operatorname{ind} B_0 \leqslant n-1$. Для этого берем в X такое замкнутое Q, что $X_0 \cap Q = Q_0$. Тогда $p \in X \setminus Q$, и, следовательно, в X существует перегородка B между p и Q, для которой $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$. Тогда $X_0 \cap B = B_0$ есть перегородка в X_0 между p и Q_0. Так как $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$ и $B_0 \subseteq B$, то по индукционному предположению и $\operatorname{ind} B_0 \leqslant n-1$. Предложение доказано.

Замечание 4. Пусть в пространстве X дана перегородка B (между точкой p и замкнутым множеством Q или между двумя дизъюнктными замкнутыми множествами P и Q), удовлетворяющая условию $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$, соответственно $\operatorname{Ind} B \leqslant n-1$; тогда в силу предложения 3 существует тонкая перегородка $B' \subseteq B$ (между теми же объектами p и Q, соответственно P и Q), а в силу предложений 7, 7_0 эта перегородка также удовлетворяет условию $\operatorname{ind} B' \leqslant n-1$, соответственно $\operatorname{Ind} B' \leqslant n-1$. Поэтому при определении большой и малой индуктивных размерностей можно было ограничиться одними лишь тонкими перегородками.

4. Другая форма определения $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$. Можно придать определениям инвариантов $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ следующую форму:

1. Для пустого пространства $X = \Lambda$ и только для него полагаем $\operatorname{Ind} X = -1$, $\operatorname{ind} X = -1$.

2. Полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, если для любого замкнутого $F \subset X$ и любой его окрестности OF имеется окрестность O_1F, для которой $[O_1F] \subseteq OF$ и $\operatorname{Ind} \text{гр}\, O_1F \leqslant n-1$.

Аналогично полагаем $\operatorname{ind}_p X \leqslant n$, если для каждой окрестности Op точки $p \in X$ найдется окрестность O_1p, для которой $[O_1p] \subseteq Op$ и $\operatorname{ind} \text{гр}\, O_1p \leqslant n-1$. Как и раньше, полагаем

$$\operatorname{ind} X = \sup_{p \in X} \operatorname{ind}_p X.$$

Эквивалентность этого второго определения индуктивных размерностей $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ первоначально данному («первому») определению легко вытекает из следующей леммы, доказательство которой может быть предоставлено читателю:

Лемма. *Если P и Q — два дизъюнктных замкнутых множества в пространстве X и окрестность OP множества P удовлетворяет условию $[OP] \subseteq X \setminus Q$, то* гр *$OP$ есть перегородка между P и Q; обратно, если B есть такая перегородка между P и Q, что $X \setminus B = O_1 \cup O_2$, $P \subseteq O_1$, $Q \subseteq O_2$ и множества O_1, O_2 открыты и дизъюнктны, то* гр *$O_1 \subseteq B$.*

Замечание 5. Определение малой индуктивной размерности можно теперь сформулировать и так: $\operatorname{ind} \Lambda = -1$; полагаем $\operatorname{ind} X \leqslant n$, если в пространстве X имеется база $\mathfrak{B}$, для всех элементов U которой $\operatorname{ind} \text{гр}\, U \leqslant n-1$. В частности, имеем тогда и только тогда $\operatorname{ind} X = 0$, если $X \neq \Lambda$ и в пространстве X имеется база, состоящая из открыто-замкнутых множеств *). Аналогично $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$ означает, что в любой окрестности OF любого замкнутого множества F содержится открыто-замкнутая окрестность O_1F.

Историческая справка. Большая индуктивная размерность была определена в 1913 г. Брауэром [4] (L. E. J. Brouwer, 1881—1966) для класса всех локально связных полных метрических пространств. Брауэр (в той же работе [4]) доказал для n-мерного эвклидова пространства R^n равенство $\operatorname{Ind} R^n = n$ **). Этой работе Брауэра предшествовала опубликованная в 1912 г. статья Пуанкаре [1] (H. Poincaré 1854—1912), в которой в научно-популярной форме (без каких-либо строгих математических определений и тем более доказательств) излагалась идея о возможности индуктивного определения числа измерений (эвклидова) пространства посредством «рассечения» пространства, т. е., как мы теперь говорим, посредством перегородок. Эта идея Пуанкаре, восходящая, может быть, еще к Больцано и даже к Лобачевскому, получила точный математический смысл впервые в уже упомянутой работе Брауэра [4], давшего определение инварианта $\operatorname{Ind} X$ и доказавшего равенство $\operatorname{Ind} R^n = n$.

В 1921 г., независимо от Брауэра и друг от друга, Урысон [1] и Менгер [1] пришли к понятию малой индуктивной размерности и положили его в основу систематического построения теории размерности. Дальнейшие подробности по этому поводу см. Александров [22].

---

*) Итак, определенные нами в гл. 1, § 2, «индуктивно нульмерные» пространства суть не что иное, как пространства X, для которых $\operatorname{ind} X = 0$.

**) Фактически и равенство $\dim R^n = n$ — см. следующий параграф.

§ 2. Размерность $\dim X$ (определенная посредством покрытий)

1. Определение размерности $\dim X$. Во всем этом параграфе под покрытием понимается всегда конечное покрытие.

Следуя Урысону ([4], гл. 5) *), мы определяем размерность $\dim X$ сначала для компактов X.

Мы говорим, что компакт X имеет размерность $\dim X \leqslant n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое ε-покрытие **) кратности $\leqslant n+1$.

Если при этом для некоторого $\varepsilon > 0$ компакт X не имеет замкнутого ε-покрытия кратности $\leqslant n$, то мы говорим, что $\dim X = n$.

Из этого определения сразу следует, что $\dim \Lambda = -1$ (так как кратность покрытия, состоящего из одного пустого множества, равна нулю), а также что для любого компакта X, состоящего из конечного числа точек, $\dim X = 0$.

Предложение 1. *Если в этом определении $\dim X$ для компактов заменим замкнутые покрытия открытыми, то получим определение, эквивалентное первоначальному.*

В самом деле, пусть компакт X при всяком $\varepsilon > 0$ имеет замкнутое ε-покрытие α кратности $\leqslant n+1$: $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$, максимум диаметров всех $A_i \in \alpha$ меньше ε и, следовательно, меньше некоторого $\varepsilon' < \varepsilon$. Чтобы получить открытое покрытие ω кратности $n+1$, достаточно заменить каждое A_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$, столь тесной окрестностью OA_i, чтобы диаметры всех OA_i были по-прежнему меньше ε и чтобы кратность покрытия $\omega = \{OA_1, \ldots, OA_s\}$ равнялась кратности α (это возможно по теореме о раздутии покрытий — гл. 1, § 10).

Обратно, пусть при всяком $\varepsilon > 0$ существует открытое ε-покрытие $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ кратности $\leqslant n+1$. Тогда по теореме об ужатии покрытий (гл. 1, § 10) существует такое замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ (являющееся даже разбиением), что $A_i \subseteq O_i$; следовательно, кр. $\alpha \leqslant$ кр. $\omega \leqslant n+1$.

Теперь переходим к определению основного объекта, изучаемого в этой книге.

Основное определение. Для любого топологического пространства X полагаем $\dim X \leqslant n$, если в любое конечное

---

*) Одна из самых больших заслуг Урысона в теории размерности состоит в том, что он впервые выделил (1921) размерность $\dim X$ в качестве самостоятельного топологического инварианта и доказал (для компактов X) тождество $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$. Это равенство верно и для всех пространств со счетной базой (см. гл. 4, § 8). О роли Лебега в определении размерности $\dim X$ см. гл. 3, § 3, подстрочное примечание на стр. 212.

**) Покрытие метрического пространства называется ε-покрытием, если все его элементы имеют диаметр $<\varepsilon$ (см. стр. 81, сноска **)).

открытое покрытие Ω пространства X можно вписать конечное открытое покрытие ω кратности $\leqslant n+1$.

Замечание 1. (а) В этом определении требование конечности покрытия ω несущественно.

В самом деле, если открытое покрытие ω имеет кратность $\leqslant n+1$ и вписано в покрытие Ω, то укрупнение покрытия ω относительно Ω *) будет конечным открытым покрытием кратности $\leqslant n+1$, вписанным в покрытие Ω.

(б) В основном определении всегда можно потребовать, чтобы покрытие ω было комбинаторно вписано в покрытие Ω и потому конечно: если ω вписано в Ω и имеет кратность $\leqslant n+1$, то укрупнение *) покрытия ω относительно Ω также имеет кратность $\leqslant n+1$ и комбинаторно вписано в Ω.

Дадим следующее общее

Определение 1. Скажем, что *топологическое пространство X имеет сколь угодно мелкие покрытия данного класса* $\mathfrak{A}$, если во всякое открытое покрытие Ω пространства X можно вписать покрытие класса $\mathfrak{A}$.

Предложение 2. *Если X — компакт, то определение* 1 *означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ компакт X имеет ε-покрытия класса* $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть во всякое открытое покрытие Ω компакта X можно вписать покрытие α класса $\mathfrak{A}$.

Возьмем при произвольном ε открытое ε-покрытие Ω компакта X (для этого достаточно для каждой точки $x \in X$ взять окрестность Ox диаметра $<\varepsilon$ и выделить из системы $\{Ox\}$ всех этих Ox конечное покрытие $\Omega = \{Ox_1, \ldots, Ox_s\}$ компакта X).

Впишем в Ω покрытие $\alpha \in \mathfrak{A}$. Очевидно, α есть ε-покрытие класса $\mathfrak{A}$.

Обратно, предположим, что при любом $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие α компакта X, принадлежащее к классу $\mathfrak{A}$. Пусть $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное открытое покрытие компакта X. Возьмем в качестве ε лебегово число **) покрытия Ω и рассмотрим какое-нибудь ε-покрытие α компакта X, принадлежащее к классу $\mathfrak{A}$. Оно вписано в покрытие Ω.

Теперь мы можем сказать кратко: *неравенство* $\dim X \leqslant n$ *означает, что пространство X имеет сколь угодно мелкие открытые покрытия кратности* $\leqslant n+1$.

Если пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n$, но не удовлетворяет неравенству $\dim X \leqslant n-1$ (т. е. если $\dim X \leqslant n$ и в то же время для некоторого открытого покрытия Ω всякое вписанное в него открытое покрытие ω имеет кратность $\geqslant n+1$), то $\dim X = n$.

---

*) См. гл. 1, § 6, п. 2.

**) Гл. 1, § 10.

Наконец, если ни для какого натурального n неравенство $\dim X \leqslant n$ не оказывается выполненным (т. е. если ко всякому n существует такое открытое покрытие Ω, что всякое вписанное в него открытое покрытие ω имеет кратность $> n+1$), то говорим, что пространство X бесконечномерно, и пишем $\dim X = \infty$.

Замечание 2. Из предложения 1 следует, что для компактов X только что приведенное определение размерности $\dim X$ эквивалентно данному в начале параграфа первоначальному урысоновскому «ε-определению».

Замечание 3. (Топологическая инвариантность размерности $\dim X$.) Общее определение размерности $\dim X$ сформулировано в топологических терминах (открытого покрытия, его кратности, вписанности одного покрытия в другое), т. е. в терминах, сохраняющихся при топологических отображениях: если дано топологическое отображение f пространства X на пространство Y, то в силу этого отображения открытые покрытия одного из этих пространств — с сохранением их кратности и вписанности одного покрытия в другое — взаимно однозначно соответствуют открытым покрытиям другого пространства. Поэтому для двух гомеоморфных между собою пространств X и Y имеем $\dim X = \dim Y$.

Этот факт и имеют в виду, когда говорят о топологической инвариантности размерности $\dim X$. Пока размерность $\dim Y$ была определена лишь для компактов при помощи метрического понятия ε-покрытия, то равенство $\dim X = \dim Y$ для двух гомеоморфных между собою компактов X и Y было теоремой (хотя и очеиь простой), которую нужно было доказать. После того как мы убедились, что размерность $\dim X$ для компактов может быть определена в чисто топологических терминах, доказывать уже нечего!

Во всем дальнейшем под размерностью пространства X всегда понимается размерность $\dim X$; когда мы имеем в виду ту или иную индуктивную размерность $\operatorname{Ind} X$ или $\operatorname{ind} X$, то это будет всякий раз оговорено.

2. Простейшие свойства размерности $\dim X$. Хотя размерность $\dim X$ формально определена для любого пространства X, но изучаться она будет лишь в предположении, что X — нормальиое пространство. Однако следующие две теоремы верны и без этого предположения.

Теорема 1 (монотонность размерности $\dim X$ по замкнутым множествам). *Если* $\dim X = n$ *и* X_0 *замкнуто в* X, *то и* $\dim X_0 \leqslant n$.

Для доказательства возьмем произвольное открытое покрытие $\Omega_0 = \{O_1^0, \ldots, O_s^0\}$ пространства X_0. Надо доказать, что в Ω_0 можно вписать покрытие ω_0 кратности $\leqslant n+1$.

Для каждого O_i^0 берем открытое в X множество O_i так, чтобы $X_0 \cap O_i = O_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Кроме того, берем $O_{s+1} = X \setminus X_0$. Множества

(1) $$O_1, O_2, \ldots, O_s, O_{s+1}$$

образуют покрытие пространства X. Так как $\dim X = n$, то существует покрытие ω кратности $\leqslant n+1$ пространства X

$$\omega = \{o_1, o_2, \ldots, o_\nu\},$$

вписанное в покрытие (1). Множества

$$X_0 \cap o_1, \ldots, X_0 \cap o_\nu$$

образуют покрытие ω_0 подпространства X_0, очевидно, имеющее кратность $\leqslant n+1$. Остается доказать, что покрытие ω_0 вписано в покрытие Ω_0, т. е. что каждое $X_0 \cap o_j$ содержится в некотором O_i^0. Но каждое o_j содержится в некотором O_i, следовательно, каждое $X_0 \cap o_j$ содержится в иекотором $X_0 \cap O_i$. Если $i = s+1$, то $O_i = X \setminus X_0$, и поэтому $X_0 \cap O_i$ пусто. Поэтому каждое непустое $X_0 \cap o_j$ содержится в некотором O_i с $i \leqslant s$, следовательно, содержится и в $X_0 \cap O_i = O_i^0$, ч. и т. д.

Теорема 2. *Если топологическое пространство X нульмерно: $\dim X = 0$, то X нормально и $\operatorname{Ind} X = 0$.*

В самом деле, пусть P и Q—два дизъюнктных замкнутых множества в X. Тогда множества $O_1 = X \setminus Q$ и $O_2 = X \setminus P$ образуют открытое покрытие

$$\Omega = \{O_1, O_2\}$$

пространства X, причем $P \subseteq O_1$, $Q \subseteq O_2$. Так как $\dim X = 0$, то существует дизъюнктное открытое покрытие $\omega = \{o_1, \ldots, o_s\}$, вписанное в Ω. Обозначим через O_1' объединение всех $o_i \in \omega$, лежащих в O_1, а через O_2' — объединение всех остальных элементов покрытия ω. Тогда O_1' и O_2'—дизъюнктные открытые множества и $\Omega' = \{O_1', O_2'\}$ есть покрытие пространства X (укрупнение покрытия ω относительно Ω). Если $o_i \in \omega$ пересекается с P, то оно не может лежать в $X \setminus P = O_2$ и потому лежит в O_1, значит, и в O_1'; точно так же всякое $o_i \in \omega$, пересекающееся с Q, не может лежать в $O_1 = X \setminus P$ и лежит в O_2'. Отсюда следует, что O_1' и O_2' являются (дизъюнктными) окрестностями множеств P и Q. Так как при этом $X = O_1' \cup O_2'$, то пустое множество есть перегородка между P и Q, так что $\operatorname{Ind} X = 0$ (и X нормально). Теорема 2 доказана.

Теперь предполагаем, что X — нормальное пространство.

Предложение 3. *Следующие три свойства нормального пространства X эквивалентны между собою:*

(А) *В X имеются сколь угодно мелкие открытые покрытия кратности* $\leqslant n+1$.

(Б) *В X имеются сколь угодно мелкие замкнутые покрытия кратности* $\leqslant n+1$.

(В) *В X имеются сколь угодно мелкие конечные разбиения кратности* $\leqslant n+1$.

Таким образом, каждое из свойств (А), (Б), (В) характеризует класс нормальных пространств X, для которых $\dim X \leqslant n$.

Для доказательства достаточно проверить правильность логической схемы

$$(А) \to (В) \to (Б) \to (А).$$

Доказываем (А) $\to$ (В). Пусть Ω — произвольное открытое покрытие пространства X. В силу свойства (А) в Ω можно вписать открытое покрытие ω кратности $\leqslant n+1$. Согласно дополнению к теореме 14 гл. 1, § 10, в ω можно комбинаторно вписать разбиение α; очевидно, $\text{кр}\,\alpha \leqslant \text{кр}\,\omega \leqslant n+1$, и α вписано в Ω.

Следование (В) $\to$ (Б) очевидно.

Докажем, что (Б) $\to$ (А). Пусть $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное конечное открытое покрытие пространства X. Из (Б) вытекает, что в Ω вписано замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots \ldots, A_s\}$ кратности $\leqslant n+1$. Согласно теореме о раздутии покрытий существуют окрестности OA_j множеств $A_j \in \alpha$, образующие покрытие ω_α, подобное покрытию α и, следовательно, имеющее ту же кратность $\leqslant n+1$, что и α. Так как α вписано в Ω, то каждое $A_j \in \alpha$ лежит в некотором $O_{i(j)} \in \Omega$. Положим для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$

$$o_j = OA_j \cap O_{i(j)}.$$

Тогда $\omega = \{o_1, \ldots, o_s\}$ есть покрытие кратности $\leqslant n+1$, вписанное в Ω, и предложение 3 доказано.

Замечание 4. Из предложения 3 и замечания 1 следует, что размерность $\dim X$ может быть определена каждым из следующих способов:

$\dim X \leqslant n$ означает, что в каждое конечное открытое покрытие пространства X может быть комбинаторно вписано некоторое конечное

(а) открытое покрытие,

(б) замкнутое покрытие

(в) разбиение

кратности $\leqslant n+1$.

3. Определение канторовых многообразий (континуумов U^n). Урысон считал одним из самых основных понятий теории размерности введенное им понятие канторова многообразия:

n-мерным канторовым многообразием называется *) всякий n-мерный бикомпакт X, $\dim X = n$, в котором любая перегородка B между непустыми множествами имеет размерность $\dim B \geqslant n-1$. В частиости, одномерные канторовы многообразия суть, очевидно, просто одномерные континуумы (т. е. связные одномерные бикомпакты). Урысон назвал их «канторовыми кривыми» **) и посвятил им вторую часть своего «Мемуара о канторовых многообразиях».

На основании замечания 1 в предыдущем параграфе мы можем определить n-мерное канторово многообразие как n-мерный бикомпакт X, обладающий тем свойством, что при всяком представлении его в виде суммы двух непустых и отличных от всего пространства X замкнутых множеств X_1 и X_2 пересечение $X_1 \cap X_2$ имеет размерность $\dim (X_1 \cap X_2) \geqslant n-1$.

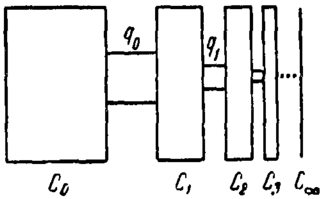

Рис. 3.

Таким образом, двумерный континуум, состоящий из двух замкнутых треугольников, с общей вершиной и не имеющих других общих точек, не является канторовым многообразием, так же как объединение двух сфер, касающихся друг друга. Мы докажем в гл. 4, что всякий замкнутый n-мерный симплекс есть n-мерное канторово многообразие (теорема, доказанная Урысоном лишь для $n \leqslant 3$; доказательство для любого n было дано П. С. Александровым [6] в 1926 г., см. также [9] и [12]). Примером двумерного канторова многообразия является, однако, и изображенный на рис. 3 континуум, являющийся суммой прямоугольников $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$, отрезка C_∞ и прямоугольников q_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, связывающих прямоугольники C_k и C_{k+1}; диаметры этих «перемычек» q_k стремятся к нулю при $k \to \infty$.

---

*) Урысон рассматривал лишь бикомпакты со счетной базой, т. е. метризуемые бикомпакты (компакты). Для них, как мы увидим в гл. 4, имеет место формула Урысона $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$, так что в определенин *метризуемого* канторова многообразия можно вместо dim брать ind или Ind. В общем случае это уже не так (см. гл. 5, § 6).

**) Название имеет следующее происхождение. Г. Кантору принадлежит определение общей плоской кривой как лежащего в плоскости континуума без внутренних точек. Д. Ф. Егоров поставил в 1921 г. перед П. С. Урысоном проблему (впервые сформулированную им еще в 1911 г.): найти внутреннюю характеристику этих кривых, независимую от их расположения на плоскости. Урысон решил эту проблему, доказав, что плоский континуум тогда и только тогда не имеет внутренних точек, когда его размерность равна 1. Дальнейшей задачей было определение наиболее общих поверхностей («двумерных канторовых многообразий») и вообще «канторовых многообразий» любой размерности n.

Важность, которую Урысон придавал понятию канторова многообразия, видна уже из того, что свою основную работу по теории размерности он назвал «Мемуаром о канторовых многообразиях». В дальнейшем для краткости будем n-мерные канторовы многообразия часто называть «континуумами U^n». Мы будем заниматься ими в главе пятой, § 9, и в главе восьмой, § 2.

§ 3. Нульмерные пространства

1. Предложение 1. *Для любого пространства X свойства $\dim X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$ эквивалентны между собою (и имеют своим следствием нормальность пространства X, а также и равенство $\operatorname{ind} X = 0$).*

Доказательство. Мы уже видели (§ 2, теорема 2), что из $\dim X = 0$ вытекает $\operatorname{Ind} X = 0$ (и, значит, и $\operatorname{ind} X = 0$), а также нормальность пространства X.

Пусть $\operatorname{Ind} X = 0$; тогда X нормально (§ 1, предложение 4). Возьмем произвольное открытое покрытие $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$. На основании теоремы об ужатии покрытий существует комбинаторно вписанное в Ω замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$. Так как $\operatorname{Ind} X = 0$, то для каждого $A_i \in \alpha$ существует такое открыто-замкнутое U_i, что $A_i \subseteq U_i \subseteq O_i$, т. е. в Ω вписано покрытие $\gamma = \{U_1, \ldots, U_s\}$, состоящее из открыто-замкнутых множеств. Полагая $o_1 = U_1$, $o_2 = U_2 \setminus U_1$, вообще $o_i = U_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} U_j$, $i = 3, \ldots, s$, получаем вписанное в Ω дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие $\omega = \{o_1, \ldots, o_s\}$, чем равенство $\dim X = 0$ доказано. Так как всегда $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$, то из $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$ всегда следует $\operatorname{ind} X = 0$.

Предложение 2. *Из равенства $\operatorname{ind} X = 0$, значит, и подавно из равенства $\operatorname{Ind} X = 0$ или, что то же, $\dim X = 0$ вытекает, что X вполне несвязно.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ind} X = 0$ и $X_0 \subseteq X$ — множество, содержащее более одной точки. Требуется доказать, что X_0 несвязно. Берем в X_0 две точки p и q. Из $\operatorname{ind} X = 0$ вытекает, что пустое множество образует перегородку между p и q в X; но тогда оно образует перегородку и в X_0, ч. и т. д.

Предложение 3. *Если X финально компактно, то из $\operatorname{ind} X = 0$ следует $\dim X = 0$, значит, и $\operatorname{Ind} X = 0$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ind} X = 0$. Дано покрытие

$$\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

пространства X. Требуется найти вписанное в него дизъюнктное открытое покрытие. Каждая точка $x \in X$ содержится в некотором $O_i \in \Omega$. По предположению $\operatorname{ind} X = 0$. Поэтому существует открыто-замкнутая окрестность Ux, содержащаяся в выбранном нами $O_i \ni x$. Так как X финально компактно, то из множества взятых нами Ux можно выделить счетное покрытие

$$\{U_1 = Ux_1, \ \ldots, \ U_k = Ux_k, \ \ldots\},$$

очевидно, вписанное в Ω.

Положим теперь

$$o_1 = U_1, \quad o_2 = U_2 \setminus U_1, \ \ldots, \ o_k = U_k \setminus \bigcup_{j<k} U_j, \ \ldots$$

Так как все U_k открыто-замкнуты, то открыто-замкнутыми будут и множества o_k. Кроме того, они дизъюнктны и образуют покрытие

$$\omega' = \{o_1, \ o_2, \ \ldots, \ o_k, \ \ldots\},$$

вписанное в Ω. Равенство $\dim X = 0$ доказано.

Из всего сказанного вытекает

Теорема 3. *Для финально компактного пространства X — в частности для бикомпактного пространства X и для пространства X со счетной базой — все три равенства*

$$\dim X = 0, \quad \operatorname{Ind} X = 0, \quad \operatorname{ind} X = 0$$

эквивалентны между собою.

2. Нульмерные бикомпакты. Определение 1. Пространство называется *вполне разрывным*, если оно не содержит никакого собственного континуума (т. е. связного бикомпакта, состоящего более чем из одной точки).

Всякое вполне несвязное пространство, очевидно, и вполне разрывно.

Если бикомпакт X вполне разрывен, то он и вполне несвязен — в противном случае в нем содержалось бы связное множество X_0, состоящее более чем из одной точки, и множество $[X_0]$ было бы лежащим в X собственным континуумом.

Основной теоремой о связности бикомпактов является

Теорема 4. *В бикомпакте X компонента C_x любой точки $x \in X$ совпадает с ее квазикомпонентой Q_x.*

Доказательство основывается на важном замечании, известном под названием леммы Шуры-Буры.

Лемма Шуры-Буры. *Пусть в бикомпакте X дана совокупность замкнутых множеств $\sigma = \{\Phi_\alpha\}$ с непустым пересечением $\Phi = \bigcap \Phi_\alpha$. Пусть $O\Phi$ — произвольная окрестность множества Φ. Тогда существует конечное число множеств $\Phi_\alpha \in \sigma$ с пересечением, лежащим в $O\Phi$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{F_\alpha\}$ всех множеств вида $F_\alpha = \Phi_\alpha \setminus O\Phi$. Множества F_α замкнуты в бикомпакте X. Поэтому, если бы семейство $\{F_\alpha\}$ было центрированным, то пересечение всех его элементов было бы непусто, т. е. $\Lambda \neq \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha} \Phi_\alpha \setminus O\Phi = \Phi \setminus O\Phi$, что очевидно, неверно.

Итак, имеем конечное число множеств F_α — пусть $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_s}$ — с пустым пересечением. Но тогда

$$\Lambda = F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_s} = \Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \setminus O\Phi,$$

т. е. $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \subseteq O\Phi$, ч. и т. д.

Следствие 1. *Если семейство непустых замкнутых множеств $\sigma = \{\Phi_\alpha\}$ бикомпакта X направлено по включению (т. е. для любых $\Phi_{\alpha_1} \in \sigma$, $\Phi_{\alpha_2} \in \sigma$ имеется $\Phi_{\alpha_3} \subseteq \Phi_{\alpha_1} \cap \Phi_{\alpha_2}$), то каждая окрестность $O\Phi$ непустого множества $\Phi = \bigcap\limits_{\alpha} \Phi_\alpha$ содержит некоторое $\Phi_\alpha \in \sigma$.*

В самом деле, находим по лемме Шуры-Буры множества $\Phi_{\alpha_1}, \ldots, \Phi_{\alpha_s}$ под условием $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \subseteq O\Phi$. В силу направленности по включению семейства σ имеется $\Phi_\alpha \in \sigma$, лежащее в $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s}$, — оно и является искомым $\Phi_\alpha \subseteq O\Phi$.

Это следствие, в частности, применимо к так называемым мультипликативным семействам σ непустых замкнутых множеств (т. е. семействам, которые вместе с любыми двумя элементами Φ_{α_1}, Φ_{α_2} содержат их пересечение).

Переходим к доказательству теоремы 4. Так как всегда $C_x \subseteq Q_x$, то достаточно доказать, что квазикомпонента Q_x точки x бикомпакта X содержится в компоненте C_x этой точки. Для этого в свою очередь надо лишь доказать, что Q_x связно: в самом деле, если мы это докажем, то Q_x, как связное множество, содержащее точку x, будет лежать в максимальном связном множестве, содержащем эту точку, т. е. в множестве C_x, — и наша цель будет достигнута.

Итак, доказываем связность замкнутого в X множества Q_x. Доказываем снова от противного: пусть $Q_x = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — два непустых дизъюнктных замкнутых множества. Так как F_1 и F_2 — замкнутые множества бикомпакта X, а всякий бикомпакт есть нормальное пространство, то множества F_1 и F_2 имеют в X непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2, которые в своей сумме образуют окрестность $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$ множества Q_x. Имеем по определению квазикомпоненты

$$Q_x = \bigcap_{\alpha} A_\alpha,$$

где $\{A_\alpha\}$ — семейство всех открыто-замкнутых множеств бикомпакта X, содержащих точку x. Так как пересечение двух открыто-замкнутых множеств открыто-замкнуто, то семейство всех A_α мультипликативно, так что мы находимся в условиях следствия леммы Шуры-Буры. Поэтому существует A_α, лежащее в $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$. Так как $C_x \subseteq Q_x$, то

$$C_x \subseteq OF_1 \cup OF_2.$$

Но C_x связно и потому, содержась в $OF_1 \cup OF_2$, лежит в одном из множеств OF_1 или OF_2. Пусть $C_x \subseteq OF_1$. Открыто-замкнутое A_α по предположению лежит в $OF_1 \cup OF_2$. Отсюда следует, что $A_\alpha \cap OF_1 = A_\alpha \setminus OF_2$, т. е. $A_\alpha \cap OF_1$ замкнуто. Кроме того, множество $A_\alpha \cap OF_1$, очевидно, открыто. Итак, $A_\alpha \cap OF_1$ есть открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Поэтому $Q_x \subseteq A_\alpha \cap OF_1$, что противоречит тому, что $F_2 \subseteq Q_x$.

Теорема 4 доказана.

Из доказанного легко следует основная

Теорема 5. *Для бикомпактов свойство нульмерности эквивалентно полной несвязности и полной разрывности.*

Доказательство. Как мы знаем (предложение 2), из нульмерности любого пространства следует его полная несвязность и тем более его полная разрывность.

Нам надо доказать, что из полной разрывности бикомпакта уже следует его нульмерность.

Уже упоминалось, что всякий вполне разрывный бикомпакт вполне несвязен. Итак, компоненты вполне разрывного бикомпакта совпадают с его точками. Но компоненты бикомпакта являются и его квазикомпонентами, так что каждая точка x вполне разрывного бикомпакта X есть пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых множеств. Отсюда по лемме Шуры-Буры следует, что открыто-замкнутые множества, содержащие точку x, образуют базу этой точки в пространстве X. Этим доказано равенство $\operatorname{ind}_x X = 0$ для каждой точки $x \in X$, значит, и равенства $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = \dim X = 0$.

Теорема 6 (Александров, 1936, [15], [19]). *Для того чтобы топологическое пространство X веса τ было индуктивно нульмерно (т. е. чтобы было $\operatorname{ind} X = 0$), необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно (непустому) множеству, лежащему в канторовом дисконтинууме D^τ веса τ.*

Доказательство. Так как тихоновская база пространства D^τ (как произведения простых двоеточий) состоит из открыто-замкнутых множеств, то $\operatorname{ind} D^\tau = 0$; значит, и для всякого непустого $X \subseteq D^\tau$ имеем $\operatorname{ind} X = 0$ — одно утверждение теоремы (достаточность) доказано.

Переходим ко второму утверждению: пусть $\operatorname{ind} X = 0$, $wX = \tau$; построим топологическое отображение f пространства X на некоторое $Y \equiv fX \subseteq D^\tau$.

Так как вес пространства X равен τ, то во всякой базе этого пространства содержится база мощности τ; содержится она и в базе, состоящей из всех открыто-замкнутых множеств пространства X. Итак, пусть $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}$ есть база мощности τ, состоящая из открыто-замкнутых множеств V_α; они занумерованы индексами α, пробегающими какое-нибудь множество $\mathfrak{A}$ значений мощности τ.

Пусть $D_\alpha = \{1^{(\alpha)}, 2^{(\alpha)}\}$ — изолированное (простое) двоеточие. Положим $f_\alpha V_\alpha = 1^{(\alpha)}$ и $f_\alpha(X \setminus V_\alpha) = 2^{(\alpha)}$. Очевидно, функция f_α непрерывна на X. Через $f\colon X \to D^\tau = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} D_\alpha$ обозначим диагональное произведение отображений f_α. Очевидно, $f_\alpha = \pi_\alpha f$, где π_α — проекция D^τ на D_α. Множества $\pi_\alpha^{-1} 1^{(\alpha)}$ и $\pi_\alpha^{-1} 2^{(\alpha)}$ образуют псевдобазу в D^τ, а их прообразы $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1} 1^{(\alpha)}) = f_\alpha^{-1} 1^{(\alpha)} = V_\alpha$ и $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1} 2^{(\alpha)}) = f_\alpha^{-1} 2^{(\alpha)} = X \setminus V_\alpha$ открыты в X. Следовательно (см. гл. 1, § 2, предложение 3), отображение f непрерывно. Так как для любых двух точек $x \in X$, $x' \in X$ существует такое α, что $x \in V_\alpha$, $x' \in X \setminus V_\alpha$, то $f_\alpha x \neq f_\alpha x'$, откуда $fx \neq fx'$. Таким образом, f взаимно однозначно отображает X на $Y = fX$. Наконец, $fV_\alpha = Y \cap \pi_\alpha^{-1} 1^{(\alpha)}$, т. е. образы элементов базы $\mathfrak{B}$ открыты в Y, следовательно, отображение $f\colon X \to Y$ открыто и поэтому является гомеоморфизмом. Теорема 6 доказана.

Следствие 2. *Нульмерные пространства со счетной базой и только они гомеоморфны подмножествам канторова совершенного множества.*

С теоремой 6 интересно сопоставить следующее предложение:

Теорема 7 (Александров, 1936, [15], [19]). *Всякое T_0-пространство X веса τ есть взаимно однозначный и (в одну сторону) непрерывный образ некоторого подпространства Z бикомпакта D^τ.*

Доказательство. Возьмем в пространстве X базу $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}$ мощности τ; элементы V_α базы $\mathfrak{B}$ занумерованы индексами α, за которые примем хотя бы все порядковые числа мощности $<\tau$.

Лемма 1. *Пусть для каждого α определено множество E_α, причем либо $E_\alpha = V_\alpha$, либо $E_\alpha = X \setminus V_\alpha$. Пересечение всех E_α (а в случае хаусдорфова X и пересечение всех $[E_\alpha]$) состоит не более чем из одной точки.*

В самом деле, если p и q — две различные точки пространства X, то по аксиоме Колмогорова по крайней мере у одной из двух точек p, q существует окрестность, не содержащая вторую точку. Пусть, например, $V_\alpha \ni p$, $q \in X \setminus V_\alpha$. Точки p и q не могут одновременно принадлежать множеству E_α, тем более пересечению всех E_α. Если же X — хаусдорфово пространство, то для двух данных точек можно выбрать V_α так, что $p \in V_\alpha$, $q \in X \setminus [V_\alpha]$.

Отсюда следует, что в хаусдорфовом X пересечение всех $[E_\alpha]$ не может содержать обеих точек p и q. В самом деле, если $E_\alpha = V_\alpha$, то $p \in E_\alpha$, $q \notin [E_\alpha]$. Если же $E_\alpha = X \setminus V_\alpha$, то $[E_\alpha] = E_\alpha = X \setminus V_\alpha$ и $p \notin [E_\alpha]$. Лемма доказана.

Пусть теперь $z = \{z_\alpha\}$—произвольная точка пространства D^τ, $z_\alpha = 0$ или 1. Полагаем $E_\alpha(z) = V_\alpha$, если $z_\alpha = 0$, и $E_\alpha(z) = X \setminus V_\alpha$, если $z_\alpha = 1$. Обозначим через Z множество тех $z \in D^\tau$, для которых множество $\bigcap\limits_\alpha E_\alpha(z)$ непусто и, следовательно *), состоит из одной точки, которую обозначим через $\varphi(z)$. Таким образом, определено отображение $\varphi\colon Z \to X$.

Докажем, что отображение $\varphi\colon Z \to X$ есть отображение на все X,—этим будет доказана и непустота множества $Z \subseteq D^\tau$. Пусть x — произвольная точка пространства X. Если для данного α имеем $x \in V_\alpha$, то полагаем $z_\alpha = 0$; если же $x \in X \setminus V_\alpha$, то полагаем $z_\alpha = 1$.

Получаем точку $z = \{z_\alpha\}$, для которой $E_\alpha(z) = V_\alpha$, если $z_\alpha = 0$, и $E_\alpha(z) = X \setminus V_\alpha$, если $z_\alpha = 1$, причем $\bigcap\limits_\alpha E_\alpha(z) = \varphi(z) = x$.

Итак, отображение $\varphi\colon Z \to X$ на X определено. Доказываем, что оно взаимно однозначно. В самом деле, если $z = \{z_\alpha\}$ и $z' = \{z'_\alpha\}$—две различные точки множества Z, то для некоторого α имеем $z_\alpha \neq z'_\alpha$; предположим, что $z_\alpha = 0$, $z'_\alpha = 1$; тогда $E_\alpha(z) = V_\alpha \ni \varphi(z)$, $E_\alpha(z') = X \setminus V_\alpha \ni \varphi(z')$ и $\varphi(z) \neq \varphi(z')$.

Доказываем, наконец, непрерывность отображения $\varphi\colon Z \to X$. Пусть $z^0 = \{z^0_\alpha\}$—произвольная точка множества Z, и пусть V_{α_0}—произвольная окрестность точки $x^0 = \varphi z^0$, так что $x^0 \in V_{\alpha_0} = E_{\alpha_0}(z^0)$. Берем одноиндексную окрестность U_{α_0} точки $z^0 = \{z^0_\alpha\}$. Тогда для всех точек $z = \{z_\alpha\} \in U_{\alpha_0}$ имеем $z_{\alpha_0} = z^0_{\alpha_0}$, $E_{\alpha_0}(z) = E_{\alpha_0}(z^0) = V_{\alpha_0}$, $\varphi z \in V_{\alpha_0}$; непрерывность отображения φ в произвольной точке $z_0 \in Z$ и вся теорема 7 доказаны.

Из теоремы 7 легко выводится

Теорема 8 (Александров [15], [16]). *Всякий бикомпакт X веса τ есть непрерывный образ некоторого замкнутого множества $\Phi \subseteq D^\tau$.*

Доказательство. Строим, как при доказательстве предыдущей теоремы, взаимно однозначное непрерывное отображение φ некоторого множества $Z \subseteq D^\tau$ на пространство X. Теорема 8 будет доказана, если мы продолжим отображение $\varphi\colon Z \to X$ до однозначного (но, вообще говоря, уже не взаимно

*) В силу только что доказанной леммы.

однозначного) непрерывного отображения $\bar{\varphi}: \Phi \to X$, где $\Phi = [Z]_{D^\tau}$. Для этого берем произвольную точку $\bar{z} = \{\bar{z}_\alpha\} \in \Phi = [Z]$. Определяем $E_\alpha(z)$, как выше при доказательстве теоремы 7, и доказываем, что $\bigcap\limits_\alpha [E_\alpha(\bar{z})] \neq \Lambda$. Для этого в силу бикомпактности пространства X достаточно доказать, что для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ имеем $[E_{\alpha_1}(\bar{z})] \cap \ldots \cap [E_{\alpha_s}(\bar{z})] \neq \Lambda$. Берем тихоновскую окрестность $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}(\bar{z}) \subseteq D^\tau$ точки $\bar{z} = \{\bar{z}_\alpha\}$, состоящую из всех точек $z = \{z_\alpha\}$, для которых $z_{\alpha_1} = \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots \ldots, z_{\alpha_s} = \bar{z}_{\alpha_s}$. Для всех точек $z \in U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}(\bar{z}) \cap Z$ имеем $E_{\alpha_1}(z) = E_{\alpha_1}(\bar{z}), \ldots, E_{\alpha_s}(z) = E_{\alpha_s}(\bar{z})$, и, значит, $\varphi z \in E_{\alpha_1}(\bar{z}) \cap \ldots \cap E_{\alpha_s}(\bar{z})$.

Итак, непустота пересечения $\bigcap\limits_\alpha [E_\alpha(\bar{z})]$ доказана для любой точки $\bar{z} \in \Phi$. В силу леммы это пересечение не может содержать более одной точки, значит, определено однозначное отображение $\bar{\varphi}: \Phi \to X$ формулой $\bar{\varphi}\bar{z} = \bigcap\limits_\alpha E_\alpha(\bar{z})$ для любого $\bar{z} \in \Phi$.

Остается доказать, что это отображение непрерывно в любой точке $\bar{z}_0 = \{\bar{z}_\alpha^0\} \in \Phi$.

Так как бикомпакт X есть регулярное пространство, то достаточно для любой окрестности V_{α_0} точки $x^0 = \bar{\varphi}\bar{z}^0 \in X$ найти такую окрестность $O\bar{z}^0$ точки $\bar{z}^0 \in \Phi$, что $\varphi(\Phi \cap O\bar{z}^0) \subseteq [V_{\alpha_0}]$. В качестве окрестности $O\bar{z}_0$ достаточно взять одноиндексную тихоновскую окрестность $U_{\alpha_0}\bar{z}^0$. В самом деле, при $z = \{z_\alpha\} \in \Phi \cap U_{\alpha_0}\bar{z}^0$ будет $z_{\alpha_0} = \bar{z}^0_{\alpha_0}$, значит $E_{\alpha_0}(z) = E_{\alpha_0}(\bar{z}^0) = V_{\alpha_0}$, $\bar{\varphi}(z) \in V_{\alpha_0}$, ч. и т. д.

Пользуясь тем, что всякий бикомпакт X веса τ можно рассматривать как замкнутое множество, лежащее в тихоновском кирпиче I^τ, теорему 8 можно доказать в двух словах.

Легко видеть, что произведение $\prod\limits_\alpha C_\alpha$ канторовых совершенных множеств C_α, взятых в числе τ, есть бикомпакт D^τ. Существует стандартное непрерывное отображение φ_α: $C_\alpha \to I_\alpha$ канторова совершенного множества на отрезок *). Беря произведение **) φ: $\prod\limits_\alpha C_\alpha \to I^\tau$ отображений φ_α, получим непрерывное отображение бикомпакта D^τ на I^τ. Предполагая, что бикомпакт X лежит в I^τ, берем прообраз $\Phi = \varphi^{-1}X \subseteq D^\tau$ при отображении φ: $D^\tau \to I^\tau$. Тогда отображение φ отображает замкнутое множество Φ на бикомпакт X, ч. и т. д.

Рассмотрим доказательство теоремы 7. Назовем тихоновскую окрестность $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}z$ точки $z = \{z_\alpha\} \in D^\tau$ и (при $z \in Z$) со-

*) Склеивающее попарно концы смежных к канторову совершенному множеству C_α интервалов (считая $C_\alpha \subset [0, 1]$).

**) См. гл. 1, § 8.

ответствующую окрестность $Z \cap U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} z$ точки z относительно Z окрестностью первого рода, если $z_{\alpha_1} = \ldots = z_{\alpha_s} = 0$. Из приведенного доказательства теоремы 7 вытекает, что при отображении φ множество всех окрестностей первого рода пространства Z (взаимно однозначно) переходит в базу.

Назовем теперь пространством F^τ пространство, получаемое из D^τ, если в нем в качестве окрестностей его точек оставить лишь окрестности первого рода. Легко проверить, что определенное этой системой окрестностей пространство F^τ есть топологическое, и притом T_0-пространство; более того, пространство F^τ есть не что иное, как топологическое произведение связных двоеточий $D_0^\alpha = (0^\alpha, 1^\alpha)$, в которых одноточечное множество, состоящее из точки 0^α, открыто, а одноточечное множество 1^α замкнуто, но не открыто. Поэтому F^τ есть бикомпактное T_0-пространство, а лежащее в нем множество Z есть T_0-пространство, гомеоморфное (посредством отображения φ) пространству X.

Итак, доказана следующая

Теорема 9 (Александров, 1936, [15], [19]). *Бикомпактное T_0-пространство F^τ, определенное как топологическое произведение τ штук связных двоеточий, является универсальным в классе всех T_0-пространств веса τ в том смысле, что всякое T_0-пространство веса τ гомеоморфно некоторому подпространству пространства F^τ.*

Нам понадобится в следующем параграфе

Предложение 4 (теорема суммы для нульмерных множеств). *Пусть пространство X представлено в виде суммы $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ своих замкнутых подмножеств X_k размерности $\operatorname{Ind} X_k = 0$ (или, что то же, $\dim X_k = 0$), $k = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда $\operatorname{Ind} X = 0$, а следовательно, и $\dim X = 0$.*

Доказательство. Пусть P и Q — дизъюнктные, замкнутые в X множества. Нам надо доказать, что пустое множество есть перегородка между P и Q.

Найдем такие дизъюнктные, открыто-замкнутые в X_1 множества A_1 и B_1, что

$$X_1 = A_1 \cup B_1, \qquad P \cap X_1 \subseteq A_1, \qquad Q \cap X_1 \subseteq B_1.$$

Множества $P \cup A_1$ и $Q \cup B_1$ дизъюнктны и замкнуты в нормальном X; поэтому имеются в X окрестности G_1, H_1 соответственно множеств $P \cup A_1$, $Q \cup B_1$ с дизъюнктными замыканиями в X.

Итак,

$$G_1 \cup H_1 \supseteq X_1 \qquad [G_1] \cap [H_1] = \Lambda$$

(замыкания здесь и далее в X).

Заменяя в предыдущем рассуждении множества P и Q через множества $[G_1]$ и $[H_1]$, строим открытые в X множества G_2 и H_2, удовлетворяющие условиям

$$G_2 \cup H_2 \supseteq X_2, \quad [G_2] \cap [H_2] = \Lambda, \quad [G_1] \subseteq G_2, \quad [H_1] \subseteq H_2.$$

Продолжая рассуждать таким образом, получим две возрастающие последовательности открытых в X множеств

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_k \subseteq \ldots, \ [G_k] \subseteq G_{k+1},$$

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_k \subseteq \ldots, \ [H_k] \subseteq H_{k+1}$$

такие, что $G_k \cup H_k \supseteq X_1 \cup \ldots \cup X_k$,

$$[G_k] \cap [H_k] = \Lambda.$$

Полагаем $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, $H = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$. Так как $X = \bigcup\limits_{k} X_k$, то $G \cup H = X$. Так как $G_k \cap H_k = \Lambda$ и $G_k \subseteq G_{k+1}$, $H_k \subseteq H_{k+1}$ для любого k, то и $G \cap H = \Lambda$.

Наконец, $P \subseteq G$, $Q \subseteq H$.

Предложение 4 доказано.

Замечание 1. Предложение 4 остается, очевидно, верным, если в его формулировке предполагать, что слагаемые множества X_k суть любые F_σ-множества в X.

Из предложения 4 и предложения 7 из § 1 вытекает

Следствие 3. *Если множество X_0 имеет тип F_σ в X и* $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$, *то и* $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant 0$.

Следствие 4. *Если совершенно нормальное пространство X есть сумма двух множеств $X = X_1 \cup X_2$ размерности* $\operatorname{Ind} X_1 \leqslant 0$, $\operatorname{Ind} X_2 \leqslant 0$, *из которых одно (например, X_1) замкнуто, а другое произвольно, то* $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$.

Доказательство. Множество $X \setminus X_1 \subseteq X_2$ открыто в X, следовательно, имеет в X и тем более в X_2 тип F_σ. По предыдущему следствию $\operatorname{Ind}(X \setminus X_1) \leqslant \operatorname{Ind} X_2 \leqslant 0$. Из замечания к предложению 4 следует неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$, ч. и т. д.

Предложение 5. *Пусть финально компактное пространство X представлено в виде суммы $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ своих замкнутых подмножеств X_k размерности* $\operatorname{ind} X_k \leqslant 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда и* $\operatorname{ind} X \leqslant 0$.

Доказательство. По предложению 3 имеем $\operatorname{Ind} X_k \leqslant \operatorname{ind} X_k \leqslant 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда из предложения 4 следует, что $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X \leqslant 0$, ч. и т. д.

Из предложения 5 и следствия 3 вытекает

Следствие 5. *Если совершенно нормальное финально компактное пространство X есть сумма двух индуктивно нуль-*

мерных подпространств, $X = X_1 \cup X_2$, из которых одно (например, X_1) замкнуто, а другое произвольно, то $\operatorname{ind} X = 0$.

В частности, это следствие имеет место, если X — метризуемое пространство со счетной базой.

Предполагая, что X_1 состоит из одной точки, получаем

Следствие 6. *Если метризуемое пространство X со счетной базой есть сумма нульмерного множества и одной точки, то оно нульмерно.*

§ 4. Малая индуктивная размерность. Формула Урысона — Менгера. Примеры нульмерных и не нульмерных пространств

1. Если пространство X состоит из изолированных точек, то, очевидно, $\operatorname{ind} X = 0$. Все множества в X открыто-замкнуты, откуда сразу следует, что и $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$: в любое покрытие $\{O_1, \ldots, O_s\}$ можно вписать покрытие из отдельных точек.

В частности, нульмерны все пространства, состоящие из конечного числа точек. Из предложений 4 и 5 предыдущего параграфа вытекает

Предложение 1. *Для метрического пространства X, состоящего из счетного числа точек,* $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X = 0$.

Из этого предложения, в частности, вытекает, что множество всех рациональных точек пространства*) R^n нульмерно. Но нульмерно и множество J всех иррациональных точек числовой прямой, а также и всякое нигде не плотное множество на числовой прямой, в частности канторово совершенное множество. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать

Предложение 2. *Множество $M \subset R^1$, соответственно $M \subset S^1$, нульмерно, если его дополнение N всюду плотно.*

В самом деле, если N всюду плотно, то любая точка $x \in M$ при любом $\varepsilon > 0$ содержится в интервале (y', y'') диаметра $< \varepsilon$ с концами y', y'', принадлежащими множеству N. Тогда $M \cap (y', y'')$ есть окрестность точки x в пространстве M диаметра $< \varepsilon$, граница которой в M пуста.

Мы видели (гл. 1, § 8, предложение 6), что топологическое произведение пространств X_α, индуктивно нульмерных (в смысле $\operatorname{ind} X_\alpha = 0$), индуктивно нульмерно.

Отсюда и из теоремы 3 следует, что для любого кардинального числа τ канторов дисконтинуум D^τ есть нульмерный бикомпакт: $\dim D^\tau = \operatorname{Ind} D^\tau = \operatorname{ind} D^\tau = 0$.

Далее, множество $\mathfrak{R}^\tau$ всех рациональных точек тихоновского кирпича I^τ (в частности, гильбертова кирпича $Q^\infty = I^{\aleph_0}$) есть произведение τ экземпляров пространства $\mathfrak{R}$, состоящего из всех

*) Точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ называется рациональной, если рациональны все ее координаты $x_1, \ldots, x_n$.

рациональных точек отрезка $[0; 1]$ числовой прямой, поэтому $\operatorname{ind} \mathfrak{R}^\tau = 0$. В частности (при $\tau = \aleph_0$) множество $\mathfrak{R}^{\aleph_0}$ рациональных точек гильбертова кирпича является пространством со счетной базой; поэтому из теоремы 3 следует, что

$$0 = \operatorname{ind} \mathfrak{R}^{\aleph_0} = \operatorname{Ind} \mathfrak{R}^{\aleph_0} = \dim \mathfrak{R}^{\aleph_0}.$$

Множество J^n (соответственно J^τ) всех точек пространства R^n (соответственно пространства I^τ), все координаты которых иррациональны, нульмерно (как произведение соответствующего числа экземпляров пространства J всех иррациональных чисел числовой прямой) *).

Пусть N_τ есть пространство мощности τ, состоящее из изолированных точек. Произведение счетного числа экземпляров пространства N_τ есть индуктивно нульмерное хаусдорфово (даже метризуемое!) пространство, называемое бэровским пространством веса τ. При $\tau = \aleph_0$ получаем классическое бэровское пространство; оно гомеоморфно множеству всех иррациональных чисел числовой прямой.

2. Из того, что числовая прямая R^1 связна, следует (§ 3, предложение 2), что $\operatorname{ind} R^1 \geqslant 1$.

С другой стороны, каждая точка прямой имеет сколь угодно тесную окрестность (интервал), граница которой состоит из двух точек и, следовательно, нульмерна, так что $\operatorname{ind} R^1 \leqslant 1$. Значит, $\operatorname{ind} R^1 = 1$. Точно так же и для окружности S^1 имеем $\operatorname{ind} S^1 = 1$. В случае, когда X есть прямая или окружность, легко доказываются и равенства $\operatorname{Ind} X = 1$, $\dim X = 1$.

Так как каждая точка плоскости R^2 и двумерной сферы S^2 имеет сколь угодно тесную окрестность, граница которой есть окружность, то $\operatorname{ind} R^2 \leqslant 2$, а также и $\operatorname{ind} S^2 \leqslant 2$. Продолжая таким образом рассуждать по индукции, мы убеждаемся в том, что при любом n

$$\operatorname{ind} R^n \leqslant n, \qquad \operatorname{ind} S^n \leqslant n.$$

Равенство $\operatorname{ind} R^n = \operatorname{ind} S^n = n$ будет доказано лишь в гл. 4, после того как мы докажем в § 3 следующей главы, что размерность $\dim T^n$ для n-мерного замкнутого симплекса T^n равна n, а в гл. 4, что $\dim T^n < \operatorname{ind} T^n$.

3. Формула Урысона — Менгера. Самым замечательным фактом, касающимся малой индуктивной размерности, является бесспорно, формула Урысона — Менгера

$$\operatorname{ind}(M \cup N) \leqslant \operatorname{ind} M + \operatorname{ind} N + 1 \tag{1}$$

*) В то же время множество всех рациональных точек всего гильбертова пространства R^∞ имеет положительную размерность (Гуревич — Волмэн [1]), а именно размерность 1, как доказал Эрдёш [1].

для любых множеств M и N в произвольном наследственно нормальном пространстве X.

Непосредственным и очевидным ее обобщением является неравенство

$$(2)\qquad \operatorname{ind}(M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_n) \leqslant \operatorname{ind} M_0 + \ldots + \operatorname{ind} M_n + n$$

для любых множеств в наследственно нормальном пространстве.

В частности, если наследственно нормальное пространство X есть сумма $n+1$ индуктивно нульмерных множеств $M_0, M_1, \ldots$ $\ldots, M_n$, то

$$(2_0)\qquad \operatorname{ind} X \leqslant n.$$

Для доказательства формулы (1) нужна

Лемма 1. *Пусть в наследственно нормальном пространстве X дано множество X_0 и в нем точка x_0:*

$$x_0 \in X_0 \subseteq X.$$

Для того чтобы было $\operatorname{ind}_{x_0} X_0 \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности Ox_0 (точки x_0 относительно X) содержалась окрестность O_1x_0 (относительно X), для которой

$$\operatorname{ind}(X_0 \cap \operatorname{гр} O_1x_0) \leqslant n-1.$$

Достаточность условия очевидна: полагая $o_1x_0 = X_0 \cap O_1x_0$, находим такую окрестность точки x_0 относительно X_0 (лежащую в произвольно заданной окрестности $ox_0 = X_0 \cap Ox_0$), для которой $\operatorname{гр}_{X_0} o_1x_0 \subseteq X_0 \cap \operatorname{гр} O_1x_0$ и, следовательно, $\operatorname{ind} \operatorname{гр}_{X_0} o_1x_0 \leqslant$ $\leqslant n-1$.

Переходим к доказательству необходимости высказанного условия. Берем произвольную окрестность Ox_0 точки x_0 относительно пространства X. Так как по предположению $\operatorname{ind}_{x_0} X_0 \leqslant n$, то в X_0 существует окрестность ox_0 точки x_0, для которой имеем $ox_0 \subseteq X_0 \cap Ox_0$ и $\operatorname{ind} \operatorname{гр}_{X_0} ox_0 \leqslant n-1$. Множества ox_0 и $X_0 \setminus$ $\setminus [ox_0]$ лежат в X_0 и отделены друг от друга; поэтому они имеют в пространстве X дизъюнктные окрестности U_1 и U_2 (гл. 1, § 5, предложение 1). Так как $\operatorname{гр}_X U_1 = [U_1]_X \setminus U_1$ не содержит точек ни U_1, ни U_2, значит, и подавно не содержит ни точек ox_0, ни точек $X_0 \setminus [ox_0]_{X_0}$, то

$$X_0 \cap \operatorname{гр}_X U_1 \subseteq \operatorname{гр}_{X_0} ox_0$$

и, следовательно, $\operatorname{ind}(X_0 \cap \operatorname{гр} U_1) \leqslant n-1$, ч. и т. д.

Переходим к доказательству формулы (1). Эта формула очевидна, если имеет место хотя бы одно из равенств $\operatorname{ind} M =$ $= \infty$, $\operatorname{ind} N = \infty$. Поэтому предположим, что $\operatorname{ind} M = m$ и $\operatorname{ind} N = n$ суть целые числа $\geqslant -1$.

Требуется доказать, что

$$\text{(1}')\qquad \operatorname{ind}(M\cup N)\leqslant m+n+1.$$

Доказательство будем вести индукцией относительно числа $m+n$. При $m+n=-2$ неравенство (1′) выполнено, так как тогда $m=-1$, $n=-1$, т. е. $M=N=M\cup N=\Lambda$; значит, левая часть неравенства (1′) есть -1, правая $(-2)+1=-1$ и само неравенство (1′) верно.

Предположим, что неравенство (1′) доказано при $m+n\leqslant k-1$, и доказываем его при $m+n=k$. Берем произвольную точку $x\in M\cup N$ и произвольную ее окрестность Ox относительно пространства $M\cup N$. Без ограничения общности можно предположить, что $x\in M$. Тогда $\operatorname{ind}_x M\leqslant m$ и, в силу только что доказанной леммы, можно найти такую окрестность $O_1x\subseteq Ox$ точки x (относительно пространства $M\cup N$), что *)

$$\operatorname{ind}(M\cap \operatorname{гр} O_1x)\leqslant m-1.$$

В то же время

$$\operatorname{ind}(N\cap \operatorname{гр} O_1x)\leqslant \operatorname{ind} N\leqslant n.$$

Применяя к

$$\begin{cases} M_1=M\cap \operatorname{гр} O_1x, & \operatorname{ind} M_1\leqslant m-1,\\ N_1=N\cap \operatorname{гр} O_1x, & \operatorname{ind} N_1\leqslant n \end{cases}$$

неравенство (1′) (что законно, так как $\operatorname{ind} M_1+\operatorname{ind} N_1\leqslant m-1+n\leqslant k-1$), имеем $\operatorname{ind}(M_1\cup N_1)\leqslant (m-1)+n=m+n$. Но $M_1\cup N_1=\operatorname{гр} O_1x$, так что мы доказали неравенство

$$\operatorname{ind}\operatorname{гр} O_1x\leqslant m+n.$$

Так как O_1x — произвольно малая (т. е. содержащаяся в произвольно заданной Ox) окрестность произвольной точки $x\in M\cup N$ (относительно $M\cup N$), то $\operatorname{ind}(M\cup N)\leqslant m+n+1$, ч. и т. д.

4. Множество $Y_n^{(m)}$. Пусть $m\geqslant n\geqslant 0$. Обозначим через $Y_n^{(m)}$ множество всех точек $x=(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ пространства R^m, каждая из которых имеет не более чем n рациональных координат, и докажем неравенство

$$\text{(3)}\qquad \operatorname{ind} Y_n^{(m)}\leqslant n,$$

которое понадобится нам в гл. 4 при воспроизведении (принадлежащего Гуревичу) элементарного доказательства формулы Урысона $\dim X=\operatorname{ind} X=\operatorname{Ind} X$ для всех пространств со счетной базой.

---

*) $\operatorname{гр} O_1x$ до конца доказательства означает границу множества O_1x в $M\cup N$.

Переходим к доказательству неравенства (3).

Обозначим через $R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ множество всех тех точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ пространства R^m, для которых

$$x_{i_1} = r_1, \dots, x_{i_n} = r_n,$$

где $r_1, r_2, \dots, r_n$ — произвольно заданные рациональные числа. Очевидно, $R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ есть $(m-n)$-мерное подпространство эвклидова пространства R^m. Обозначнм через $C \equiv C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ множество всех тех точек множества $R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$, все координаты x_i которых, кроме $x_{i_1} = r_1, \dots, x_{i_n} = r_n$, иррациональны. Очевидно, при взаимно однозначном (конгруэнтном) соответствии между $R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ и обычным пространством R^{m-n} (точки которого суть всевозможные наборы $y_1, \dots, y_{m-n}$ из $m-n$ действительных чисел) множеству $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ соответствует множество J^{m-n} тех точек пространства R^{m-n}, все координаты $y_1, \dots, y_{m-n}$ которых иррациональны. Мы видели, что $\operatorname{ind} J^{m-n} = 0$, следовательно, $\operatorname{ind} C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} = 0$. Обозначим теперь через $J_n^{(m)}$ множество тех точек пространства R^m, число рациональных координат каждой из которых равно n (так что $J_0^{(m)} = J^m$):

$$C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} \subset J_n^{(m)}.$$

Мы помним, кроме того, что $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} \subseteq R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$. Докажем, что $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ замкнуто в $J_n^{(m)}$. Действительно, пусть x — точка прикосновения множества $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$, лежащая в $J_n^{(m)}$. Так как $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} \subseteq R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ и $R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ замкнуто во всем R^m, то $x \in R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$. Но по предположению

$x \in J_n^{(m)}$, значит, x имеет ровно n рациональных координат, а так как $x \in R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$, то x уже имеет рациональные координаты $x_{i_1} = r_1, \dots, x_{i_n} = r_n$ и остальные координаты точки x иррациональны, а это значит, что $x \in C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$. Итак, $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$ есть замкнутое в $J_n^{(m)}$ множество, причем $\operatorname{ind} C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} = 0$. Но, очевидно,

$$J_n^{(m)} = \bigcup_{\substack{i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n}} C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$$

(суммирование берется по всем комбинациям $i_1, \dots, i_n$ из n натуральных чисел, не превосходящих числа m, и по всем комбинациям $r_1, \dots, r_n$ рациональных чисел). Значит, множество $J_n^{(m)}$ есть сумма счетного числа своих замкнутых подмножеств $C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix}$, для каждого из которых $\operatorname{ind} C\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ r_1 \dots r_n \end{pmatrix} = 0$. Согласно предложению 4 из § 3 отсюда следует, что $\operatorname{ind} J_n^{(m)} = 0$.

Наконец,

$$Y_n^{(m)} = J_0^{(m)} \cup J_1^{(m)} \cup \dots \cup J_n^{(m)},$$

откуда (по следствию из неравенства Урысона, цитированному в начале этого параграфа) заключаем, что

$$\operatorname{ind} Y_n^{(m)} \leqslant n.$$

5. Веер Кнастера и Куратовского *). Кнастером и Куратовским построен пример вполне несвязного одномерного множества X_0. Этот пример, принадлежащий к числу самых замечательных примеров в теоретико-множественной топологии, построен в 1921 г. (еще до возникновения общей теории размерности).

Возьмем на плоскости прямоугольную систему координат и построим на отрезке [0; 1] оси абсцисс канторово совершенное множество П. Возьмем точку $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и рассмотрим всевозможные прямолинейные отрезки $[c, p]$, где p пробегает все точки множества П. Сумму всех этих отрезков обозначим через C и назовем конусом над множеством П (с вершиной c).

---

*) Кнастер и Куратовский [1], § 5, пример α.

Каждая отличная от c точка $\xi \in C$ определяется содержащим ее отрезком $[c, p]$ и своей ординатой y, так что имеем однозначную запись $\xi = (p, y)$.

Легко видеть, что множество C замкнуто на плоскости; будучи ограниченным, оно является компактом. Наконец, C связно (как объединение отрезков, имеющих общую точку — вершину c). Итак, C — плоский континуум, следовательно, $1 \leqslant \leqslant \operatorname{ind} C \leqslant 2$.

Докажем, что $\operatorname{ind} C = 1$. Сферическая окрестность $o(\xi, \varepsilon)$ произвольной точки $\xi \in C$ есть пересечение $C \cap O(\xi, \varepsilon)$, где $O(\xi, \varepsilon)$ — открытый круг с центром ξ и радиусом ε. Граница s_ε множества $o(\xi, \varepsilon)$ в C есть пересечение множества C с окружностью $S_\varepsilon = S(\xi, \varepsilon)$, и s_ε, как легко видеть, нигде не плотно на S_ε, откуда следует, что $\operatorname{ind} s_\varepsilon = 0$ (см. предложение 2).

Итак, $\operatorname{ind}_\xi C \leqslant 1$ для любой точки $\xi \in C$ — неравенство $\operatorname{ind} C \leqslant 1$ доказано.

Назовем отрезок $[c, p]$, $p \in \Pi$, отрезком первого (соответственно второго) рода, если его конец p есть точка первого (соответственно второго) рода канторова множества Π.

Если $[c, p]$ — отрезок первого рода, то обозначим через C_p множество всех тех лежащих на нем точек (p, y), ординаты y которых рациональны; если же $[c, p]$ — отрезок второго рода, то через C_p обозначается множество его точек с иррациональными ординами. Объединение

$$X = \bigcup_{p \in \Pi} C_p$$

всех множеств C_p и называется веером Кнастера — Куратовского.

Очевидно, что $c \in X$. Очевидно также, что пересечение множества X с осью абсцисс состоит из всех точек первого рода множества Π. Наконец, полагаем

$$X_0 = X \setminus c.$$

Так как $X_0 \subset X \subset C$, то

$$\operatorname{ind} X_0 \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{ind} C = 1. \tag{4}$$

Мы докажем утверждения:

1°. $\operatorname{ind} X_0 = \operatorname{ind} X = 1$.

2°. X связно.

3°. X_0 вполне несвязно.

Из 2° и формулы (4) уже следует, что $\operatorname{ind} X = 1$ (даже $\operatorname{ind}_x X = 1$ для любой точки $x \in X$). Но тогда и $\operatorname{ind} X_0 = 1$, так как для любой точки $x \in X_0$ имеем, очевидно, $\operatorname{ind}_x X_0 = \operatorname{ind}_x X$.

Итак, требуется лишь доказать утверждения 2° и 3°.

Доказательство утверждения 3°. Надо привести к противоречию предположение, что существует содержащее более чем одну точку связное множество $Z \subseteq X_0$. Множество Z заведомо не может лежать в одном C_p, так как каждое C_p, будучи гомеоморфным или множеству всех рациональных, или множеству всех иррациональных чисел, вполне несвязно.

Итак, существуют две точки $z \in Z \cap C_p$, $z' \in Z \cap C_{p'}$, где p и p' — различные точки множества Π. Возьмем какую-нибудь точку x_0, лежащую на интервале (p, p') оси абсцисс и не принадлежащую множеству Π. Прямая cx_0 не имеет общих точек с множеством X_0, значит, и с Z и делит плоскость на две полуплоскости Q и Q', $z \in Q$, $z' \in Q'$. Итак, множества $Z \cap Q = Oz$ и $Z \cap Q' = Oz'$ дизъюнктны и открыты в Z, $z \in Oz$, $z' \in Oz'$, что противоречит связности множества Z.

Доказательство утверждеиия 2° ведем также от противного. Пусть X несвязно; тогда

$$X = O_1 \cup O_2,$$

где O_1 и O_2 — дизъюнктные непустые открыто-замкнутые в X множества. Точка c принадлежит одному из множеств O_1, O_2. Пусть, иапример, $c \in O_1$.

Так как O_1 открыто в X, то некоторая сферическая окрестность (относительно X) точки c содержится в O_1. Поэтому для любого $p \in \Pi$ нижняя грань b_p ординат y всех точек $\xi = (p, y)$, для которых пересечение отрезка $[\xi, c]$ (соединяющего точки ξ и c) с множеством C_p содержится в O_1: $[\xi, c] \cap C_p \subseteq O_1$, удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant b_p < \frac{1}{2} - \alpha,$$

где α — положительное число, не зависящее от p.

Точки p, для которых $b_p = 0$, ие могут составлять всюду плотного подмножества множества Π, так как в этом случае имели бы $b_p = 0$ для всех точек $p \in \Pi$ и $X \subseteq O_1$, т. е. $X = O_1$, $O_2 = \Lambda$.

Итак, имеется отрезок $[\alpha; \beta] \subseteq [0; 1]$ такой, что для всех точек p «куска» $\Pi_{\alpha\beta} = \Pi \cap [\alpha, \beta]$ множества *) Π имеем $b_p > 0$.

Вместо множества Π будем теперь рассматривать множество $\Pi_{\alpha\beta}$. Если точка $p \in \Pi$ — второго рода, то b_p непременно рационально, так как при иррациональиом b_p точка (p, b_p), имеющая ординату b_p, принадлежала бы множеству C_p, т. е. одному

*) При определении куска $\Pi_{\alpha\beta}$ множества Π всегда предполагается, что точка α есть правый, а β — левый конец некоторого смежного интервала Δ_α, соответственно Δ_β, к множеству Π, так что кусок $\Pi_{\alpha\beta}$ гомеоморфен (и подобен) всему множеству Π (конус $C_{\alpha\beta}$ над $\Pi_{\alpha\beta}$ гомеоморфен — и даже аффинно эквивалентен — конусу C над всем множеством Π).

из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств O_1, O_2, и в то же время была бы точкой прикосновения каждого из них, что, очевидно, невозможно.

Обозначим через E множество всех точек второго рода множества $\Pi_{\alpha\beta}$ и рассмотрим теперь все рациональные числа $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ интервала $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; пусть E_n — множество всех тех точек $p \in E$, для которых $b_p = r_n$. Тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Так как $E = \Pi_{\alpha\beta} \setminus D$, где D счетно, то множество E не может быть суммой счетного числа нигде не плотных на $\Pi_{\alpha\beta}$ множеств *). Поэтому существует такое n, что множество E_n плотно на некотором куске $\Pi_{\alpha'\beta'}$ множества $\Pi_{\alpha\beta}$. Для всех точек $p \in E \cap \Pi_{\alpha'\beta'}$ имеем

$$b_p = r_n.$$

Возьмем какую-нибудь точку p первого рода в куске $\Pi_{\alpha'\beta'}$ и рассмотрим точку $z = (p, r_n)$. Тогда $z \in C_p \subset X$, так что z лежит в одном из двух множеств O_1, O_2. В любой близости от точки z лежат точки множества O_1, а именно точки $z' = (p', y')$, для которых числа $|p - p'|$, $p' \in E$, и $y' - r_n$ положительны и достаточно малы. Значит, $z \in O_1$, так как O_1 замкнуто в X. Но в любой близости от точки z лежат и точки множества O_2, а именно точки $z' = (p', y')$, где $p' \in E$, и числа $|p - p'|$, $r_n - y'$ достаточно малы и положительны. Из замкнутости O_2 следует, что $z \in O_2$. Итак, $z \in O_1 \cap O_2$ — мы получили противоречие. Утверждение 2° доказано.

Замечание 1. Кнастер и Куратовский построили свой замечательный пример как пример вполне несвязного пространства X_0, превращающегося в связное пространство X после присоединения одной-единственной точки z. Мы знаем, с другой стороны, что после присоединения единственной точки к нульмерному пространству (по крайней мере при условии существования счетной базы) мы снова всегда получаем нульмерное пространство, откуда вытекает невозможность сведения понятия положительной размерности к понятию связности. С другой стороны, одной из фундаментальных теорем всей теории размерности является теорема, утверждающая, что в каждом n-мерном (би)компакте содержится n-мерное канторово многообразие (Гуревич и Тумаркин — для компактов). Веер Кнастера — Куратовского показывает безнадежность попыток перенести эту теорему на случай не бикомпактных пространств (по

*) В противном случае суммой счетного числа своих нигде не плотных подмножеств был бы и весь компакт $\Pi_{\alpha\beta}$ (т. е. канторово совершенное множество), что, как известно, невозможно.

крайней мере в пределах теоретико-множественной топологии) *).

6 **). **Размерное ядро.** В годы первых работ Урысона и Менгера по теории размерности, когда в центре внимания стояла малая индуктивная размерность, значительный интерес привлекало к себе так называемое размерное ядро n-мерного пространства X: это множество $N(X)$ всех точек $x \in X$, в которых $\operatorname{ind}_x X = \operatorname{ind} X = n$. Урысон, высказав в качестве гипотезы утверждение о наличии в каждом n-мерном компакте подмножества, являющегося n-мерным канторовым многообразием, хорошо понимал, что доказательство этого утверждения позволило бы ответить на все основные вопросы, касающиеся размерного ядра компакта. Однако после теоремы Гуревича — Тумаркина оставался вопрос о размерном ядре некомпактного пространства и в первую очередь вопрос о размерности $\operatorname{ind} N(X)$ размерного ядра. В случае компакта X

$$\operatorname{ind} N(X) = \operatorname{ind} X,$$

что доказано еще Урысоном и Менгером и сразу следует из теоремы Гуревича — Тумаркина. Менгер доказал интересную теорему, что для любого пространства X (метризуемого, со счетной базой)

$$\operatorname{ind} N(X) \geqslant -1 + \operatorname{ind} X.$$

Результат оказался окончательным, что следует из построенных Серпинским и Куратовским примеров плоских одномерных множеств, размерные ядра которых счетны.

Особенно просто множество, построенное Куратовским и известное под названием «графика Куратовского» ***).

Возьмем на плоскости прямоугольную систему координат; на отрезке $[0;\ 1]$ оси абсцисс строим канторово совершенное множество Π. На этом множестве определяем функцию f следующим образом. Берем произвольно точку $x \in \Pi$. Она может быть записана в виде бесконечной троичной дроби, троичные знаки (цифры) в которой равны 0 или 2. Это значит, что число x может быть записано в виде ряда

$$(5) \qquad x = \frac{2}{3^{k_1}} + \frac{2}{3^{k_2}} + \ldots + \frac{2}{3^{k_n}} + \ldots, \quad k_1 < k_2 < \ldots$$

---

*) Комбинаторный подход к этому вопросу, а именно подход со стороны проекционных спектров, делает тем не менее такое перенесение возможным. См. Александров [20].

**) В этом пункте мы рассматриваем лишь метризуемые пространства со счетной базой.

***) Куратовский [6] т. 1, § 27, стр. 308.

Тогда значение функции f в точке x определяем как

$$f(x)=\frac{(-1)^{k_1}}{2}+\frac{(-1)^{k_2}}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^{k_n}}{2^n}+\ldots,\quad f(0)=0.$$

График этой функции, т. е. множество всех точек $(x, f(x))$ плоскости, где $x \in \Pi$, и есть «график Куратовского» K.

Пусть $z=(x, f(x))$. Оказывается, если x — правый конец какого-либо смежного к Π интервала (и, следовательно, ряд (5) конечен), то $\operatorname{ind}_z K = 1$. Для всякой другой точки $z \in K$ имеем $\operatorname{ind}_z K = 1$.

В основе (элементарного, но довольно кропотливого) доказательства, которое приводить не будем, лежит следующая

Лемма 2. *Во всех точках $x \in \Pi$, не являющихся правыми концами смежных к Π интервалов, функция Куратовского непрерывна. Если же x — правый конец смежного интервала и*

$$x=\frac{2}{3^{k_1}}+\frac{2}{3^{k_2}}+\ldots+\frac{2}{3^{k_s}},$$

то функция f имеет в точке x разрыв с колебанием $\frac{1}{2^3}$.

Глава третья

РАЗМЕРНОСТЬ ПОЛИЭДРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Введение

В § 1 этой главы мы напоминаем элементарные предложения аналитической геометрии, касающиеся симплексов и барицентрических координат *).

В § 2 вводятся понятия симплициального комплекса (как геометрического, так и абстрактного) и полиэдра, а также понятие нерва конечной системы множеств, с простейшими относящимися сюда предложениями.

В § 3 доказывается знаменитая лемма Шпернера и при помощи нее выводится основная формула $\dim P^n = n$ для n-мерного полиэдра.

В § 4 лемма Шпернера прилагается к доказательству элементарных классических теорем Брауэра: о существовании неподвижной точки для непрерывного отображения замкнутого симплекса в себя и об инвариантности внутренних точек множества $M \subseteq R^n$ при топологических отображениях $f\colon M \to R^n$.

В § 5 определяются существенные отображения $f\colon X \to \overline{T}^n$ на замкнутый симплекс и доказывается существенность тождественного отображения

$$f\colon \overline{T}^n \to \overline{T}^n.$$

В Прибавлении к гл. 3 в связи с только что введенным понятием существенного отображения вводится понятие гомотопии и доказывается «лемма о грибе» (лемма Борсука), которая понадобится, однако, лишь в § 8 гл. 4 (и далее в этом томе применяться не будет).

---

*) Предполагается, что читатель знаком с элементарным курсом линейной алгебры. Здесь мы только напоминаем некоторые известные факты из этого курса и выводим нужные нам следствия из них. См., например, Александров [24], гл. 14 или Понтрягин [2].

§ 1. Пространство R^n и его симплексы

1. Геометрическая независимость и общее расположение точек пространства R^n. В пространстве R^n предполагается раз навсегда данной некоторая прямоугольная система координат. В этом предположении точки пространства R^n обозначаем (например) через $x=(x_1, \ldots, x_n)$, векторы — через $\boldsymbol{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа. Расстояние между точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ есть

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Приложить к точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$ вектор $\boldsymbol{y}=\{y_1, \ldots, y_n\}$ — значит построить точку $x+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, называемую концом приложенного к точке x вектора $\boldsymbol{y}$; точка x называется началом приложенного к ней вектора $\boldsymbol{y}$. Любая (упорядоченная) пара точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ в свою очередь определяет вектор $\overrightarrow{xy}=\{y_1-x_1, \ldots, y_n-x_n\}$.

Взвешенной суммой точек $a^1=(a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, a^k=(a_1^k, \ldots, a_n^k)$ с весами $\mu_1, \ldots, \mu_k$ называется точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$, для которой при $i=1, 2, \ldots, n$ имеем

$$x_i=\mu_1 a_i^1+\mu_2 a_i^2+\ldots+\mu_k a_i^k.$$

В этих условиях точка x обозначается так:

$$x=\mu_1 a^1+\mu_2 a^2+\ldots+\mu_k a^k.$$

Плоскостью размерности k, $0\leqslant k\leqslant n$, в пространстве R^n называется множество точек x, получаемых приложением к какой-нибудь точке $a=(a_1, \ldots, a_n)$ всевозможных векторов $u=\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_k u_k$, являющихся линейными комбинациями данных k линейно независимых векторов $u_1, \ldots, u_k$.

Любые $k+1$ точек пространства R^n лежат хотя бы в одной k-мерной плоскости. Пусть $a^0, a^1, \ldots, a^k$ — какие-нибудь $k+1$ точек пространства R^n. Обозначим через $V(a^0, \ldots, a^k)$ линейное подпространство, порожденное всеми векторами вида $\overrightarrow{a^i a^j}$, где i и j принимают все значения $0, 1, \ldots, k$. Так как $\overrightarrow{a^i a^j}=\overrightarrow{a^i a^0}+\overrightarrow{a^0 a^j}$, то векторы $\boldsymbol{u}_1=\overrightarrow{a^0 a^1}$, $\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{a^0 a^2}$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_k=\overrightarrow{a^0 a^k}$ составляют систему образующих пространства $V(a^0, \ldots, a^k)$, размерность которого, таким образом, $\leqslant k$. Если она равна k, т. е. если векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ линейно независимы, то точки $a^0, a^1, \ldots, a^k$ называются геометрически независимыми; иногда удобно говорить, что множество $\{a^0, a^1, \ldots, a^k\}$ геометрически независимо.

Итак, всякие $k+1$ точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$ пространства R^n лежат в некоторой плоскости размерности $\leqslant k$ пространства R^n, а именно в плоскости $R(a^0, \ldots, a^k)$, полученной приложением к одной из точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$ — например к точке a^0 — всех векторов $\boldsymbol{u} \in V(a^0, \ldots, a^k)$, т. е. всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Если точки $a^0, a^1, \ldots, a^k$ геометрически независимы (и только в этом случае), они принадлежат к k-мерной плоскости $R(a^0, \ldots, a^k)$ и не лежат ни в какой плоскости меньшего числа измерений. Плоскость $R(a^0, \ldots, a^k)$, очевидно, однозначно определенную точками $a^0, \ldots, a^k$, будем называть плоскостью, натянутой на точки $a^0, \ldots, a^k$.

Если $a^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$ при $i = 0, 1, \ldots, k$, то $\boldsymbol{u}_i = \overrightarrow{a^0a^i} = \{x_1^i - x_1^0, \ldots, x_n^i - x_n^0\}$ и для линейной независимости векторов $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, т. е. для геометрической независимости точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$, необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$U(a^0, \ldots, a^k) = \begin{pmatrix} x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & \ldots & x_n^1 - x_n^0 \\ x_1^2 - x_1^0 & x_2^2 - x_2^0 & \ldots & x_n^2 - x_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^k - x_1^0 & x_2^k - x_2^0 & \ldots & x_n^k - x_n^0 \end{pmatrix}$$

имела ранг k. Докажем, что это условие равносильно тому, чтобы матрица

$$A(a^0, \ldots, a^k) = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \ldots & x_n^0 & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^k & x_2^k & \ldots & x_n^k & 1 \end{pmatrix}$$

имела ранг $k+1$. В самом деле, если ранг матрицы $U(a^0, \ldots, a^k)$ равен k, то в ней лежит невырождающаяся квадратная матрица порядка k.

Обозначения можно выбрать так, чтобы этой матрицей была матрица порядка k, лежащая в верхнем левом углу матрицы $U(a^0, \ldots, a^k)$, т. е. чтобы детерминант

$$D_0 = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & \ldots & x_k^1 - x_k^0 \\ x_1^2 - x_1^0 & x_2^2 - x_2^0 & \ldots & x_k^2 - x_k^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^k - x_1^0 & x_2^k - x_2^0 & \ldots & x_k^k - x_k^0 \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Но этот детерминант равен детерминанту

$$D=\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_k^0 & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_k^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^k & x_2^k & \dots & x_k^k & 1 \end{vmatrix},$$

в чем убеждаемся непосредственно, вычитая в детерминанте D первую строку из всех остальных (и разлагая полученный детерминант по элементам последнего столбца). Из того, что $D \neq 0$, следует, что ранг матрицы $A(a^0, \dots, a^k)$ равен $k+1$. Аналогично, из того, что ранг матрицы $A(a^0, \dots, a^k)$ равен $k+1$, следует, что ранг матрицы $U(a^0, \dots, a^k)$ равен k.

Итак:

Предложение 1. *Для геометрической независимости точек $a^0, a^1, \dots, a^k$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A(a^0, \dots, a^k)$ был равен $k+1$.*

Предложению 1 можно придать и следующую форму:

Предложение 1′. *Точки*

$$a^0, a^1, \dots, a^k$$

геометрически независимы в R^n тогда и только тогда, когда единственной системой чисел

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k,$$

удовлетворяющей двум условиям:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_k=0, \\ \lambda_0 a^0+\lambda_1 a^1+\dots+\lambda_k a^k=0, \end{array}\right. \tag{1}$$

является система

$$\lambda_0=0, \quad \lambda_1=0, \quad \dots, \quad \lambda_k=0.$$

В самом деле, совокупность двух условий (1), очевидно, равносильна тому, что равна нулю линейная комбинация строк матрицы $A(a^0, \dots, a^k)$, имеющая своими коэффициентами числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Выводим отсюда важное для нас

Предложение 2′. *Пусть $a^0, a^1, \dots, a^k$ — какие-нибудь точки пространства R^n, причем $k \leqslant n$. Тогда в любой заданной близости соответственно от точек $a^0, a^1, \dots, a^k$ можно найти геометрически независимые точки $b^0, b^1, \dots, b^k$.*

В самом деле, возьмем какую-нибудь систему геометрически независимых точек $c^0, c^1, \dots, c^k$, например

$$c^0=(0, 0, \dots, 0), \quad c^1=(1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad c^k=(0, \dots, \underset{(k)}{1}, \dots, 0),$$

и рассмотрим для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, точку

$$z^i(t) = tc^i + (1-t)a^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Легко видеть, что матрица $A(z^0(t), z^1(t), \ldots, z^k(t))$ может быть записана в виде

$$A(z^0(t), \ldots, z^k(t)) = tA(c^0, \ldots, c^k) + (1-t)A(a^0, \ldots, a^k).$$

Так как точки $c^0, \ldots, c^k$ геометрически независимы, то ранг матрицы $A(c^0, \ldots, c^k)$ равен $k+1$, так что некоторый лежащий в ней детерминант $(k+1)$-го порядка D_1 отличен от нуля.

Соответствующий детерминант в матрице $A(z^0(t), \ldots$ $\ldots, z^k(t))$ обозначим через D_t (при $t = 1$ получаем $D(1) = D_1$). Так как $D_1 \neq 0$, то детерминант $D(t)$ не равен нулю тождественно и, будучи многочленом от переменной t, обращается в нуль лишь для конечного числа значений t, пусть для $t = t_0, \ldots, t = t_k$, а для всех остальных значений — в том числе и для сколь угодно малых — этот детерминант отличен от нуля; значит, при $t \neq t_0, \ldots, t_k$ матрица $A(z^0(t), \ldots, z^k(t))$ имеет ранг $k+1$ и точки $z^0(t), \ldots, z^k(t)$ геометрически независимы; при достаточно малых значениях t эти точки сколь угодно близки соответственно к точкам $a^0, a^1, \ldots, a^k$ (соответствующим значению $t = 0$). Предложение 2′ доказано.

Предложение 2″. *Пусть точки $a^0, \ldots, a^k, a^i = (a^i_1, \ldots, a^i_n)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, геометрически независимы в R^n. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что геометрически независимы и любые точки $b^0, b^1, \ldots, b^k$, для которых $\rho(b^i, a^i) < \varepsilon$ (при $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k$).*

В самом деле, из геометрической независимости точек $a^0, \ldots, a^k$ следует, что матрица $A(a^0, \ldots, a^k)$ имеет ранг $k+1$, так что в ней лежнт некоторый отлнчный от нуля детерминант D порядка $k+1$. Но этот детерминант является непрерывной функцией от координат точек $a^0, \ldots, a^k$; поэтому, если он отличен от нуля для точек $a^0, \ldots, a^k$, то он будет отличен от нуля и если заменить эти точки достаточно близкими к ним точками $b^0, \ldots, b^k$.

Предложения 2′ и 2″ можно следующим образом объединить в одно:

Предложение 2. *Всякую систему из $k+1$ точек пространства R^n можно при $k \leqslant n$ сколь угодно малым сдвигом перевести в геометрически независимую; всякая геометрически независимая система точек после достаточно малого, в остальном произвольного, сдвига остается геометрически независимой.*

Введем теперь следующее фундаментальное

Определение 1. Множество точек пространства R^n *находится в общем положении*, если всякое подмножество этого множества, состоящее из $n+1$ (или меньшего числа) точек, геометрически независимо.

Из предложения 2 легко вытекает

Предложение 3. *Пусть дано конечное или счетное множество точек*

$$M=\{a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^k,\ \ldots\},$$

лежащих в пространстве R^n, и последовательность положительных чисел ε_1, ε_2, ... Сдвигая каждую точку a^i меньше чем на ε_i, можно перевести множество M в множество $N=\{b^1,\ b^2,\ \ldots$ $\ldots,\ b^i,\ \ldots\}$, находящееся в общем положении. Если при этом точки $a^1, \ldots, a^k$ находятся в общем положении, то можно считать, что $b^1=a^1, \ldots, b^k=a^k$.

В самом деле, положим $b^l=a^l$, $l=1, \ldots, k$. Пусть для $l\leqslant m$ точки b^l, находящиеся в общем положении, уже построены под условием $\rho(a^l, b^l)<\varepsilon_l$. Тогда выбираем точку $b^{m+1}\in O(a^{m+1}, \varepsilon_{m+1})$, не лежащую ни в одной из плоскостей $R(b^{l_1}, \ldots, b^{l_n})$, натянутых на какие-либо из n построенных ранее точек $b^1, \ldots, b^m$. Если бы точки $b^1, \ldots, b^{m+1}$ не были в общем положении, то при каких-то $l_1\leqslant m, \ldots, l_n\leqslant m$ точки $b^{l_1}, \ldots, b^{l_n}, b^{m+1}$ не были бы геометрически независимы и лежали бы в $(n-1)$-мерной плоскости, которая, в силу геометрической независимости точек $b^{l_1}, \ldots, b^{l_n}$, совпадает с плоскостью $R(b^{l_1}, \ldots, b^{l_n})$. Тогда точка b^{m+1} лежала бы в плоскости $R(b^{l_1}, \ldots, b^{l_n})$ — вопреки построению.

В § 2 гл. 4 нам понадобится

Замечание 1. Пусть в пространстве R^{2n+1} дана n-мерная плоскость R^n и конечная система точек $M=\{a^1, \ldots, a^s\}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$, сдвигая каждую точку a^i в точку b^i меньше чем на ε, можно перевести множество M в такое находящееся в общем положении множество $N=\{b^1, \ldots, b^s\}$, что k-мерная плоскость R^k, $k\leqslant n$, натянутая на любые $k+1$ точек $b^{l_0}, b^{l_1}, \ldots, b^{l_k}$, не имеет общих точек с R^n.

Доказательство. Выберем в плоскости R^n геометрически независимую систему из $n+1$ точек $c^0, c^1, \ldots, c^n$.

По предложению 3 существует такая находящаяся в общем положении система N' точек $c^0, c^1, \ldots, c^n, b^1, \ldots, b^s$, что

$$\rho(a^l, b^l)<\varepsilon, \qquad l=1, \ldots, s.$$

Возьмем $k+1$ точек $b^{l_0}, b^{l_1}, \ldots, b^{l_k}$, $k\leqslant n$, и плоскость R^k, на них натянутую. Предположим, что существует точка $d\in R^n\cap R^k$. Выберем в R^n и R^k базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{n+1}, \ldots$ $\ldots, e_{n+k}$ соответственно. Тогда плоскость, определенная точкой d

и векторами $e_1, \ldots, e_{n+k}$, имеет размерность $\leqslant n+k$ и содержит $n+k+2$ точек $c^0, \ldots, c^n, b^{i_0}, \ldots, b^{i_k}$ находящейся в общем положении в R^{2n+1} системы N'. Полученное противоречие доказывает справедливость сделанного замечания.

Предложение 4. *Конечное множество M, находящееся в общем положении, сохраняет это свойство при достаточно малом сдвиге.*

В самом деле, рассмотрим все подмножества $M_1, \ldots, M_s$ данного множества M, состоящие из $n+1$ точек. Каждое из множеств $M_1, \ldots, M_s$ состоит из геометрически независимых точек. Обозначим через ε_i, $i=1, 2, \ldots, s$, столь малое число, что всякое множество M'_i, получающееся из M_i посредством ε_i-сдвига, все еще геометрически независимо. Пусть ε — наименьшее из чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Всякое множество M', получающееся из M посредством ε-сдвига, очевидно, находится в общем положении.

Лишь немного сложнее доказывается

Предложение 4_∞. *Если счетное множество $M=\{a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots\}$ находится в R^n в общем положении, то существуют такие положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, что всякое множество $M'=\{b^1, b^2, \ldots, b^k, \ldots\}$, в котором $\rho(b^k, a^k)<\varepsilon_k$, находится также в общем положении.*

2. Барицентрические координаты. Симплексы. Пусть в R^n даны геометрически независимые точки

$$a^0, a^1, \ldots, a^k$$

(так что $k\leqslant n$). Векторы $u_1=\overrightarrow{a^0a^1}, \ldots, u_k=\overrightarrow{a^0a^k}$ линейно независимы. Прилагая всевозможные их линейные комбинации $u=\mu_1u_1+\ldots+\mu_ku_k$ к точке a^0, получим все точки x плоскости $R^k=R(a^0, \ldots, a^k)$ и только точки этой плоскости, которые, таким образом, записываются в виде

$$(2)\quad \begin{aligned} x &= a^0+\mu_1u_1+\ldots+\mu_ku_k= \\ &= a^0+\mu_1(a^1-a^0)+\ldots+\mu_k(a^k-a^0)= \\ &= (1-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_k)a^0+\mu_1a^1+\ldots+\mu_ka^k \end{aligned}$$

или

$$(3)\qquad x=\mu_0a^0+\mu_1a^1+\ldots+\mu_ka^k,$$

где $\mu_0=1-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_k$.

Итак, плоскость $R(a^0, \ldots, a^k)$ есть множество всех точек x, записывающихся в виде «взвешенной суммы» (3) точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$, где числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ («веса») связаны единственным условием

$$(4)\qquad \mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_k=1.$$

При этом дополнительном условии числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ определены однозначно.

В самом деле, пусть

$$x = \mu_0 a^0 + \mu_1 a^1 + \ldots + \mu_k a^k = \mu_0' a^0 + \mu_1' a^1 + \ldots + \mu_k' a^k.$$

Тогда, полагая

$$\lambda_0 = \mu_0' - \mu_0, \ \ldots, \ \lambda_k = \mu_k' - \mu_k,$$

имеем

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0,$$
$$\lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_k a^k = 0.$$

Так как точки $a^0, a^1, \ldots, a^k$ геометрически независимы, то отсюда в силу предложения 1 вытекает, что

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

т. е.

$$\mu_0' = \mu_0, \ \ldots, \ \mu_k' = \mu_k.$$

Далее, коэффициенты $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ в формуле (3), как легко вывести из самого их определения, являются непрерывными функциями координат точки x (в данной фиксированной системе координат пространства R^n) и, следовательно, непрерывными функциями точки x метрического пространства R^n.

Определение 2. Коэффициенты $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$, однозначно определенные точкой $x \in R^n$ (посредством равенств (3), (4)) и однозначно определяющие эту точку, называются ее *барицентрическими координатами* (в барицентрической координатной системе, состоящей из точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$).

Таким образом, барицентрическая координатная система (или базис барицентрических координат) данной k-мерной плоскости есть, по определению, любая совокупность, состоящая из $k+1$ геометрически независимых точек $a^0, \ldots, a^k$ этой плоскости.

Замечание 2. Любая подсистема $a^{i_0}, \ldots, a^{i_h}$ геометрически независимой системы $a^0, \ldots, a^k$ также геометрически независима, причем $R^h = R(a^{i_0}, \ldots, a^{i_h}) \subseteq R^k = R(a^0, \ldots, a^k)$ и точки $x \in R^h$ имеют в системе барицентрических координат $a^0, \ldots, a^k$ нулевые координаты μ_j для всех $j \neq i_0, \ldots, i_h$, а остальные координаты (т. е. μ_j при $j = i_0, \ldots, i_h$) те же, что и в системе $a^{i_0}, \ldots, a^{i_h}$ (в плоскости R^h). Проверка предоставляется читателю.

Определение 3. Пусть в R^n дана совокупность геометрически независимых точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$, $k \leqslant n$. Множество всех точек $x \in R^n$, все барицентрические координаты которых в системе $a^0, \ldots, a^k$ положительны, называется *открытым n-мерным* *симплексом* с вершинами $a^0, \ldots, a^k$ и обозначается через $T^k = |a^0, \ldots, a^k|$, а совокупность всех точек, барицентрические координаты которых в системе $a^0, \ldots, a^k$ неотрицательны, называется *замкнутым n-мерным симплексом* $\overline{T}^k = \overline{a^0 \ldots a^k}$ с вершинами $a^0, \ldots, a^k$.

Множество всех вершин данного симплекса (открытого или замкнутого) называется его *остовом.*

Без большого труда доказываются следующие предложения *):

1. Замкнутый симплекс $\overline{T}^k = \overline{a^0 \ldots a^k}$ есть замыкание открытого симплекса $T^k = |a^0 \ldots a^k|$, а открытый симплекс T^k есть открытое ядро замкнутого симплекса $\overline{T}^k$ (относительно подпространства $R^k = R(a^0, \ldots, a^k)$ пространства R^n).

2. И открытый и замкнутый симплексы с вершинами $a^0, \ldots, a^k$ суть выпуклые множества пространства R^n, причем замкнутый симплекс $\overline{T}^k$ есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данные точки $a^0, \ldots, a^k$.

Принципиально важным для нас является

Предложение 5. *Симплекс **) однозначно определяет свой остов.*

Так как, с другой стороны, остов какого-либо симплекса (т. е. всякое множество геометрически независимых точек пространства R^n) однозначно определяет симплекс, остовом которого является, то из предложения 5 следует, что соответствие между симплексами пространства R^n и их остовами является взаимно однозначным.

Предложение 5 непосредственно вытекает из следующего утверждения:

Предложение 5'. *Для того чтобы точка* $x = \mu_0 a^0 + \ldots + \mu_k a^k \in \overline{T}^k$ *была вершиной симплекса* $T^k = |a^0 \ldots a^k|$, *необходимо и достаточно, чтобы эта точка не была серединой никакого отрезка* $b'b''$, *концы* $b' \neq b''$ *которого принадлежат замкнутому симплексу* $\overline{T}^k = \overline{a^0 \ldots a^k}$. *При этом серединой отрезка* $b'b''$ *называется точка* $c = \frac{1}{2} b' + \frac{1}{2} b''$.

Доказательство предложения 5'. Предположим сначала, что точка

$$x = \mu_0 a^0 + \ldots + \mu_k a^k \in \overline{T}^k$$

отлична от всех вершин $a^0, \ldots, a^k$; тогда среди чисел $\mu_0, \ldots, \mu_k$ по крайней мере два отличны от нуля (и, следовательно, положительны). Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$. Возьмем положительное ε,

---

*) См., например, Александров [21], Прибавление 2, §§ 2, 3.

**) Под симплексом мы можем понимать здесь как открытый, так и замкнутый симплекс (поскольку они однозначно определяют друг друга).

меньшее каждого из чисел μ_0, μ_1, и положим

$$b' = (\mu_0 + \varepsilon) a^0 + (\mu_1 - \varepsilon) a^1 + \mu_2 a^2 + \ldots + \mu_k a^k,$$
$$b'' = (\mu_0 - \varepsilon) a^0 + (\mu_1 + \varepsilon) a^1 + \mu_2 a^2 + \ldots + \mu_k a^k.$$

Так как $\mu_0 - \varepsilon > 0$, $\mu_1 - \varepsilon > 0$, $(\mu_0 + \varepsilon) + (\mu_1 - \varepsilon) = (\mu_0 - \varepsilon) + (\mu_1 + \varepsilon) = \mu_0 + \mu_1$, то $b' \in \overline{T}^k$, $b'' \in \overline{T}^k$; кроме того,

$$\frac{1}{2} b' + \frac{1}{2} b'' = \mu_0 a^0 + \mu_1 a^1 + \ldots + \mu_k a^k = x,$$

т. е. точка x есть середина отрезка $\overline{b'b''}$.

Пусть теперь x — какая-нибудь вершина симплекса $T^k = |a^0 \ldots a^k|$, например $x = a^0$. Предположим, что

$$x = \frac{1}{2} b' + \frac{1}{2} b'',$$
$$b' = \mu_0' a^0 + \mu_1' a^1 + \ldots + \mu_k' a^k,$$
$$b'' = \mu_0'' a^0 + \mu_1'' a^1 + \ldots + \mu_k'' a^k.$$

Так как $b' \neq b''$, то всегда существуют такие $i \neq j$, что $\mu_i' > 0$, $\mu_j'' > 0$ *).

Из $i \neq j$ следует, что i и j не могут быть одновременно равны нулю; пусть, например, $i \neq 0$.

По предположению $a^0 = \frac{1}{2} b' + \frac{1}{2} b''$; но тогда i-я барицентрическая координата точки a^0, равная по определению нулю, равна $\frac{1}{2}\mu_i' + \frac{1}{2}\mu_i'' \geqslant \frac{1}{2}\mu_i' > 0$ — противоречие!

3. Грани симплекса. Пусть $a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}$ — некоторые из вершин данного k-мерного симплекса $T^k = |a^0 \ldots a^k|$. Тогда эти вершины $a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}$ геометрически независимы и определяют в плоскости $R(a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}) \subseteq R(a^0, \ldots, a^k)$ открытый симплекс $T^r = |a^{i_0} \ldots a^{i_r}|$ и замкнутый симплекс $\overline{T}^r = \overline{a^{i_0} \ldots a^{i_r}}$, называемые соответственно открытой и замкнутой r-мерной гранью симплекса T^k (с вершинами $a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}$). При этом T^r, соответственно $\overline{T}^r$, состоит из всех точек $x \in R^k(a^0, \ldots, a^k)$, у которых при $j = i_0, \ldots, i_r$ барицентрические координаты μ_j положительны, соответственно неотрицательны, а все остальные барицентрические координаты в системе $a^0, a^1, \ldots, a^k$ равны нулю.

*) В самом деле, так как $\sum \mu_i' = \sum \mu_i'' = 1$, то пара чисел $\mu_i' > 0$, $\mu_j'' > 0$ существует. Если бы при этом всегда было $i = j$, то тогда $\mu_i' = \mu_j'' = 1$ и $b' = b'' = a^i$.

Поэтому имеет место

Предложение 6. *При* $0 \leqslant r \leqslant h \leqslant k$ *замкнутая грань* $\overline{T}^r = \overline{a^{i_0} \ldots a^{i_r}}$ *тогда и только тогда содержится в замкнутой грани* $\overline{T}^h = \overline{a^{j_0} \ldots a^{j_h}}$, *когда остов грани* T^r *содержится в остове грани* T^h, *другими словами, когда множество индексов* $i_0, \ldots, i_r$ *является подмножеством множества индексов* $j_0, \ldots, j_h$.

Особенно важен случай $(k-1)$-мерной грани T_i^{k-1} симплекса $T^k = |a^0 \ldots a^k|$: по определенню остов грани T_i^{k-1} состоит из всех вершин симплекса T^k, кроме одной вершины a^i; грань T_i^{k-1} называется $(k-1)$-мерной гранью симплекса T^k, противоположной вершине a^i, и записывается в виде

$$T_i^{k-1} = |a^0 \ldots \hat{a}^i \ldots a^k|;$$

«домик» над a^i означает, что именно эта вершина не является вершиной грани T_i^{k-1}.

Из предложения 6 при $h = k-1$ следует

Предложение 6_{k-1}. *Замкнутая грань* $\overline{T}^r$ *симплекса* $\overline{T}^k$ *тогда и только тогда содержится в замкнутой грани* $\overline{T}_i^{k-1}$, *когда вершина* a^i, *противоположная грани* $\overline{T}_i^{k-1}$, *не является вершиной грани* $\overline{T}^r$.

Удобна в некоторых случаях и такая формулировка только что сделанного утверждения:

Предложение $6'_{k-1}$. *Замкнутая грань* $\overline{T}^r$ *тогда и только тогда не содержится в* $(k-1)$-*мерной грани* $\overline{T}_i^{k-1}$, *когда вершина* a^i, *противоположная грани* $\overline{T}_i^{k-1}$, *есть одна из вершин грани* $\overline{T}^r$.

Среди всех точек замкнутого симплекса $\overline{T}^k = \overline{a^0 \ldots a^k}$ точки его $(k-1)$-мерной грани $\overline{T}_i^{k-1}$ характеризуются тем, что равна нулю i-я барицентрическая координата μ_i этих точек.

Поэтому имеем

Предложение 7. *Пересечение всех* $(k-1)$-*мерных замкнутых граней* k-*мерного симплекса* T^k *пусто.*

В самом деле, если бы точка $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{k} \overline{T}_i^{k-1}$ существовала, то все ее барицентрические координаты $\mu_0, \ldots, \mu_k$ должны были бы равняться нулю, что невозможно, так как $\mu_0 + \ldots + \mu_k = 1$.

Сделаем в связи с этим следующее

Замечание 3. Пусть ε — лебегово число системы всех $(k-1)$-мерных замкнутых граней $\overline{T}_0^{k-1}, \overline{T}_1^{k-1}, \ldots, \overline{T}_k^{k-1}$ симплекса $T^k = |a^0 \ldots a^k|$ (оно существует, так как эти грани суть компакты). Тогда никакое множество $M \subset R^n$ диаметра $< \varepsilon$ не может пересекаться со всеми $\overline{T}_0^{k-1}, \overline{T}_1^{k-1}, \ldots, \overline{T}_k^{k-1}$. Отсюда следует: если множество $M \subset R^n$ диаметра $< \varepsilon$ содержит данную вершину $a^i \in \overline{T}^k$, то оно не пересекается с гранью $\overline{T}_i^{k-1}$, противоположной этой вершине.

В самом деле, вершина a^i содержится во всех гранях $\overline{T}_h^{k-1}$, кроме грани $\overline{T}_i^{k-1}$, противоположной вершине a^i. Если бы множество M, содержа вершину a^i, пересекалось с $\overline{T}_i^{k-1}$, то оно пересекалось бы со всеми $(k-1)$-мерными замкнутыми гранями $\overline{T}_0^{k-1}, \overline{T}_1^{k-1}, \ldots, \overline{T}_k^{k-1}$, что противоречит тому, что $\operatorname{diam} M < \varepsilon$ и ε — лебегово число системы $\overline{T}_0^{k-1}, \overline{T}_1^{k-1}, \ldots, \overline{T}_k^{k-1}$.

§ 2. Симплициальные комплексы

1. Геометрические комплексы. *Симплициальные* (геометрические) *комплексы* — это множества открытых симплексов (данного пространства R^n). Они могут быть подчинены тем или иным дополнительным условиям, и тогда слово «комплекс» сопровождается соответствующим прилагательным. Так, например, мы будем в большинстве случаев иметь в этой книге дело с конечными комплексами, т. е. с конечными множествами симплексов; можно, далее, требовать, чтобы симплексы, являющиеся элементами данного комплекса, были дизъюнктными. Комплекс K называется *n-мерным*, если все его симплексы имеют размерность $\leqslant n$ и среди них имеется хотя бы один размерности n. Основное требование, которое мы предъявляем к рассматриваемым нами комплексам, — это требование полноты: комплекс K называется *полным*, если каждый симплекс, являющийся гранью какого-либо симплекса комплекса K, сам является элементом этого комплекса. Полный конечный комплекс K, элементами которого являются дизъюнктные (открытые) симплексы данного пространства R^n, называется *триангуляцией* (лежащей в этом R^n). Легко видеть, что замкнутые симплексы $\overline{T}$, являющиеся замыканиями элементов T данной триангуляции K, удовлетворяют следующему условию: любые два из этих замкнутых симплексов либо вовсе не пересекаются, либо их пересечением является общая замкнутая грань обоих данных симплексов.

Замечание 1. Если не оговорено противное, мы под симплексом всегда понимаем открытый симплекс.

В соответствии с общей терминологией, принятой в этой книге, мы называем телом какого-либо комплекса K объединение (теоретико-множественную сумму) всех симплексов, являющихся элементами комплекса K. Тело комплекса K обозначается через $\tilde{K}$ *). Тело всякой триангуляции совпадает с суммой замыканий всех симплексов этой триангуляции и (как сумма конечного числа компактов, лежащих в данном R^n) есть компакт. Всякий компакт, являющийся телом некоторой триангуляции, называется *полиэдром*; если $P = \tilde{K}$, то триангуляция K называется *триангуляцией полиэдра* P. Итак, каждая триангуляция есть триангуляция своего тела, но один и тот же полиэдр имеет (кроме тривиальных случаев нульмерных полиэдров) бесконечно много триангуляций.

Подкомплексом комплекса K называется, разумеется, всякий комплекс K_0, все элементы которого являются и элементами комплекса K. Если не оговорено противное, мы под комплексом K будем всегда предполагать полный комплекс; однако мы в полных комплексах K постоянно будем рассматривать и неполные подкомплексы K_0.

Для всякого неполного комплекса K_0 определено его *комбинаторное замыкание*, а именно полный комплекс $[K_0]$, состоящий из всех симплексов $T \in K_0$ и из всех граней этих симплексов. В частности, можно говорить о комбинаторном замыкании симплекса T, понимая под этим полный комплекс $[T]$, состоящий из симплекса T и всех его граней.

Полный комплекс $\sigma T = [T] \setminus T$, состоящий из всех собственных граней симплекса T, называется его *комбинаторной границей*.

2. Абстрактные симплексы и комплексы. Нервы. Мы видели, что в пространстве R^n симплексы взаимно однозначно соответствуют их остовам. Поэтому во многих вопросах удобно рассматривать вместо данного полного комплекса K множество остовов всех составляющих его симплексов $T \in K$. Эти остовы тогда называются *абстрактными симплексами*, а их множества — *абстрактными комплексами*. Общее определение таково. Вообразим себе какое-нибудь произвольно заданное множество E, элементы которого условно будем называть вершинами. Всякое непустое конечное множество $T \subseteq E$ будем называть остовом или (абстрактным) симплексом данного поля вершин E; непустые подмножества симплекса T называем гранями этого симплекса.

Числом измерений или размерностью симплекса будем называть уменьшенное на 1 число составляющих его вершин.

Всякое множество K абстрактных симплексов поля вершин E называется (абстрактным) комплексом этого поля вершин. Условие полноты комплекса формулируется так же, как раньше: оно состоит в том, что всякая грань симплекса, являю-

---

*) Если комплекс K состоит из одного (открытого) симплекса T, то его тело $\tilde{K} = \tilde{T}$ будем часто обозначать просто через $\tilde{T}$.

щегося элементом комплекса K, также есть элемент комплекса K.

Понятие комбинаторного замыкания неполного комплекса сохраняет свою силу и для абстрактных комплексов. В частности, можно говорить о комбинаторном замыкании $[T]$ и комбинаторной границе $[T] \setminus T$ абстрактного симплекса.

Размерность комплекса K определяется как верхняя грань размерностей симплексов $T \in K$.

Отождествляя, когда это удобно, обычные, «геометрические» симплексы с их остовами, можем считать геометрические комплексы частным случаем абстрактных.

Важнейшим примером абстрактных комплексов являются *нервы* конечных систем множеств. Пусть $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — такая система; каждому ее элементу M_i ставим в соответствие некоторую вершину e_i (проще всего, но не всегда удобнее считать за вершину e_i само множество $M_i \in \alpha$); несколько вершин образуют «остов» (симплекс), если соответствующие им множества имеют непустое пересечение. Полученный таким образом абстрактный комплекс и называется *нервом* данной системы множеств. Понятие нерва будет основным понятием во многих частях этой книги.

3. Звезды. Открытые и замкнутые подкомплексы. Назовем *комбинаторной звездой* какого-либо симплекса T комплекса K множество $O_K T$ всех симплексов комплекса K, имеющих симплекс T своей собственной или несобственной (т. е. совпадающей с T) гранью. Комбинаторной звездой главного симплекса является он сам *).

Подкомплекс K_0 комплекса K называется *открытым* в K, если со всяким симплексом $T \in K_0$ в K_0 содержится и вся (комбинаторная) звезда этого симплекса. Открытые подкомплексы триангуляций образуют важнейший пример неполных комплексов.

Подкомплекс K_0 комплекса K, дополнение $K \setminus K_0$ к которому открыто, называется *замкнутым*; если K — полный комплекс, то его замкнутые подкомплексы совпадают с полными.

Предложение 1. *Комбинаторные звезды $O_K T_1, \ldots, O_K T_r$ полного симплициального комплекса тогда и только*

---

*) Остовы симплициального комплекса K образуют частично упорядоченное по включению множество; этот порядок, естественно, переносится и на симплексы нашего комплекса; поэтому для двух симплексов T и T' комплекса K мы пишем $T' \geqslant T$, если T есть грань (может быть, и несобственная) симплекса T'; $T' > T$ означает, что T — собственная грань симплекса T'. Комбинаторная звезда симплекса $T \in K$ состоит из всех симплексов $T' \geqslant T$ комплекса K. Очевидно, звезды суть, вообще говоря, неполные комплексы.

Симплекс $T \in K$ называется *главным*, если в K не существует симплекса $T' > T$, т. е. если в K нет симплекса, имеющего симплекс T своею собственной гранью.

тогда имеют непустое пересечение, когда симплексы $T_1, \ldots, T_r$ *являются гранями некоторого симплекса комплекса* K, *т. е. когда объединение остовов симплексов* $T_1, \ldots, T_r$ *есть остов некоторого симплекса* $T \in K$ *(этот симплекс называется комбинаторной суммой симплексов* $T_1, \ldots, T_r$*). В этом случае*

$$O_K T_1 \cap \ldots \cap O_K T_r = OT.$$

Доказательство состоит из автоматической проверки того, что каждый симплекс, входящий в одну половину этого равенства, входит и в другую.

В частности, комбинаторные звезды $O_K e_0, \ldots, O_K e_r$ вершин $e_0, \ldots, e_r$ комплекса K имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда эти вершины образуют остов некоторого симплекса комплекса K. Другими словами, комплекс K есть нерв системы звезд своих вершин.

Если K — триангуляция, то в большинстве случаев мы будем рассматривать не комбинаторные звезды комплекса K, а их тела, которые будем называть *открытыми звездами* и обозначать через OT; открытые звезды вершин для краткости называются *главными звездами* (данной триангуляции). Пересечение тел каких-либо подкомплексов триангуляции K есть тело пересечения этих подкомплексов*); поэтому открытые звезды $Oe_0, \ldots, Oe_r$ каких-либо вершин $e_0, \ldots, e_r$ триангуляции K имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда эти вершины образуют остов некоторого симплекса комплекса K, — мы имеем основное предложение.

Теорема 1. *Триангуляция K является нервом системы своих главных звезд.*

Следствие 1. *Система* $\omega_K = \{Oe_i\}$ *открытых звезд триангуляции* K *полиэдра* $P = \tilde{K}$ *является открытым покрытием полиэдра* P, *кратность которого равна* $n+1$, *где* n — *размерность комплекса* K.

Как мы уже упоминали, замкнутые подкомплексы триангуляции (и вообще полного комплекса) K совпадают с полными подкомплексами комплекса K. Поэтому тело $\tilde{K}_0$ замкнутого подкомплекса K_0 триангуляции K есть компакт (подполиэдр $\tilde{K}_0 \subseteq \tilde{K}$) и, следовательно, замкнутое в $\tilde{K}$ множество. Обратное предложение очевидно: если тело $\tilde{K}_0$ подкомплекса $K_0 \subseteq K$ замкнуто в $\tilde{K}$, то все грани любого симплекса $T \in K_0$ должны принадлежать комплексу K_0, т. е. K_0 есть полный, следовательно, замкнутый подкомплекс комплекса K. Итак, имеем

Предложение 2. *Для того чтобы тело* $\tilde{K}_0$ *подкомплекса* $K_0 \subseteq K$ *триангуляции* K *было замкнутым множеством в* $\tilde{K}$, *не-*

*) Это вытекает из того, что триангуляция есть система дизъюнктных множеств (симплексов).

обходимо и достаточно, чтобы K_0 был замкнутым подкомплексом комплекса K.

Так как открытые подкомплексы комплекса K суть дополнения к замкнутым подкомплексам, то из предложения 2 следует

Предложение 2′. *Для того чтобы тело $\tilde{K}_0$ подкомплекса $K_0 \subseteq K$ триангуляции K было открытым в $\tilde{K}$, необходимо и достаточно, чтобы K_0 был открытым подкомплексом комплекса K.*

4. Симплициальные отображения. Пусть каждой вершине a симплициального комплекса X поставлена в соответствие некоторая вершина $b = fa$ симплициального комплекса Y, причем выполнено условие: если какие-нибудь вершины $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$ комплекса X образуют в X остов некоторого симплекса, то и вершины $fa_{i_0}, \ldots, fa_{i_r}$, среди которых могут быть и совпадающие, образуют остов некоторого симплекса комплекса Y («отображение не разрывает остовов»).

В силу этого условия каждому остову, а следовательно, и каждому симплексу $T = |a_{i_0} \ldots a_{i_r}|$ комплекса X соответствует некоторый симплекс $T' = fT$ комплекса Y, и мы получаем отображение f комплекса X в комплекс Y; определенное таким образом отображение $f: X \to Y$ называется *симплициальным отображением* комплекса X в комплекс Y.

Если симплициальное отображение комплекса X на комплекс Y взаимно однозначно, то оно называется *изоморфным отображением* (изоморфизмом), а комплексы X и Y, допускающие изоморфное отображение друг на друга, называются *изоморфными* между собой. Легко доказывается

Теорема 2. *Всякий конечный n-мерный полный симплициальный комплекс P изоморфен некоторой триангуляции Q, лежащей в R^m при любом $m \geqslant 2n+1$.*

В самом деле, пусть $a_1, \ldots, a_s$ — все вершины комплекса P. Берем какие-либо точки $b_1, \ldots, b_s$ в R^m в общем положении, т. е. так, что никакие $m+1$ из них не лежат в $(m-1)$-мерной плоскости пространства R^m. На точки $b_{i_0}, \ldots, b_{i_r}$, $r \leqslant n$, натягиваем в R^m симплекс в том и лишь в том случае, когда $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$ образуют остов комплекса P. Точки $b_{i_0}, \ldots, b_{i_r}$ геометрически независимы в R^m, так что симплекс $|b_{i_0} \ldots b_{i_r}| \subset R^m$ существует *). Полученные таким образом симплексы в R^m попарно не имеют общих точек; в самом деле, рассмотрим симплексы

$$|b_{i_0} \ldots b_{i_h}| \subset R^m \quad \text{и} \quad |b_{j_0} \ldots b_{j_k}| \subset R^m,$$

*) Для справедливости последнего, очевидно, достаточно требования $m \geqslant n$.

соответствующие различным симплексам

$$|a_{i_0} \ldots a_{i_h}| \quad \text{и} \quad |a_{j_0} \ldots a_{j_k}|$$

комплекса P. Так как размерность комплекса X равна n, то $h \leqslant n$ и $k \leqslant n$; поэтому объединение остовов симплексов $|b_{i_0} \ldots b_{i_h}|$ и $|b_{j_0} \ldots b_{j_k}|$ состоит не более чем из $(h+1)+(k+1) \leqslant \leqslant (n+1)+(n+1) = 2n+2 \leqslant m+1$ точек и, значит, будучи множеством геометрически независимых точек в R^m, является остовом некоторого симплекса пространства R^m, имеющего в качестве своих граней как $|b_{j_0} \ldots b_{j_k}|$, так и $|b_{i_0} \ldots b_{i_h}|$; эти симплексы, таким образом, не имеют общих точек.

Итак, построенные нами симплексы в R^m образуют триангуляцию Q, очевидно, изоморфную комплексу P.

При $m \geqslant n$ приведенное выше доказательство теоремы 2 переходит в доказательство следующего предложения:

Теорема 2'. *Всякий конечный n-мерный симплициальный комплекс изоморфен при $m \geqslant n$ комплексу Q, состоящему из симплексов пространства R^m. Всякий такой комплекс Q называется геометрической реализацией в R^m (абстрактного) комплекса P. Комплекс Q при этом, вообще говоря, не является триангуляцией, так как симплексы его могут пересекаться.*

Понятие геометрической реализации Q данного абстрактного комплекса P понадобится нам в основном для случая, когда P является нервом некоторой системы множеств, в частности некоторого покрытия α какого-либо пространства X. Отметим в особенности случай, когда $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ есть покрытие некоторого пространства X, определенного как множество, лежащее в гильбертовом пространстве $R^{\mathfrak{m}}$ (при этом обычно $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_0$).

Пусть при этом дано некоторое $\varepsilon > 0$ и вершины $b_1, \ldots, b_s$ комплекса Q выбраны в $R^{\mathfrak{m}}$ так, что $\rho(M_i, b_i) < \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда комплекс Q называется реализацией нерва P покрытия α, взятой «вблизи» (точнее, «в ε-близости») к покрытию α.

Пусть f — симплициальное отображение триангуляции X на комплекс Y. Тогда вершины каждого симплекса T комплекса X отображены на вершины некоторого симплекса T' комплекса Y; но тогда определено и аффинное отображение симплекса T на симплекс T'; можно доказать, что эти аффинные отображения, определенные на каждом симплексе комплекса X, в своей совокупности образуют единое непрерывное («кусочно аффинное») отображение полиэдра $\tilde{X}$ в полиэдр $\tilde{Y}$, которое будем обозначать через $\tilde{f}$ (часто и просто через f).

Итак:

Предложение 3. *Симплициальное отображение f триангуляции X в триангуляцию Y порождает непрерывное отображение $\bar{f}$ полиэдра $\bar{X}$ в полиэдр $\bar{Y}$; отображение $\bar{f}$ также называется симплициальным отображением.*

5. Следование триангуляций и подразделения их. Определение 1. *Триангуляция K' следует за триангуляцией K*, если каждый симплекс $T' \in K'$ содержится в некотором (очевидно, единственном) симплексе $T \in K$; симплекс $T \in K$ называется *носителем* симплекса $T' \in K'$ в триангуляции K.

Если K' следует за K, то, очевидно, $\bar{K}' \subseteq \bar{K}$; если при этом $\bar{K}' = \bar{K}$, т. е. если каждый симплекс $T \in K$ есть сумма лежащих в нем симплексов триангуляции $T' \in K'$, то K' называется *подразделением* *) триангуляции K.

6. Барицентрическое подразделение. Одним из простейших и важнейших подразделений данной триангуляции K является барицентрическое подразделение. Возьмем в каждом симплексе $T \in K$ точку, которую назовем центром симплекса T. *Барицентрическое подразделение* комплекса K определяется как некоторая триангуляция K_1, вершинами которой являются центры симплексов комплекса K (так что вершины комплекса K_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с симплексами комплекса K); при этом несколько вершин комплекса K_1 образуют, по определению, остов этого комплекса, если они могут быть записаны в таком порядке

$$e_0, e_1, \ldots, e_r,$$

что соответствующие им симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_r$ образуют убывающую цепочку

$$T_0 > T_1 > \ldots > T_r \tag{1}$$

(неравенство $T_{i+1} < T_i$ означает, что T_{i+1} есть собственная грань симплекса T_i).

Из (1) следует, что симплекс $|e_0 \ldots e_r| \in K_1$ лежит в симплексе $T_0 \in K$; поэтому триангуляция K_1 следует за K. Доказательство того, что K_1 есть подразделение комплекса K, легче всего получить, дав несколько другую формулировку определения барицентрического подразделения. Эта вторая формулировка (непосредственно эквивалентная первоначальной) основывается на важном понятии *пирамиды над комплексом*. Пирамидой с вершиной o над абстрактным полным комплексом X

*) Для дальнейшего важно заметить, что подразделение неполного комплекса K определяется как множество лежащих на симплексах комплекса K симплексов некоторого подразделения комбинаторного замыкания $[K]$ комплекса K.

называется абстрактный комплекс oX, симплексами которого является сама вершина o и все симплексы вида

$$t = |ot'| = |oa^1 \ldots a^r|, \quad \text{где } t' = |a^1 \ldots a^r| \in X;$$

$r = 1, 2, \ldots, n+1$ и n — размерность комплекса X. При этом мы рассматриваем обычные геометрические комплексы как частные случаи абстрактных.

В частности, комбинаторная звезда Oe любой вершины e полного комплекса K является пирамидой над ее комбинаторной границей $[Oe] \setminus Oe$ (эта граница, очевидно, состоит из всех симплексов, не входящих в звезду Oe, но являющихся гранями симплексов $T \in Oe$).

Непосредственно нужен нам будет следующий пример. Пусть T — обычный открытый геометрический симплекс. Пусть $\sigma'T$ — какое-нибудь подразделение комбинаторной границы $\sigma T = [T] \setminus T$ симплекса T. Очевидно, множество $S = \bar{T} \setminus T$ является телом комплексов σT и $\sigma' T$. Пусть $o \in T$ — точка внутри симплекса T («центр»). Тогда пирамида $o\sigma'T$ есть подразделение открытого симплекса T, т. е. неполный комплекс, состоящий из дизъюнктных симплексов и имеющий своим телом симплекс T.

В самом деле, пусть дана отличная от точки o произвольная точка $x \in T$. Проводим через нее луч $\overrightarrow{ox}$ до его пересечения с $S = \bar{T} \setminus T$ в точке x'. Точка x' содержится в единственном симплексе $t' \in \sigma' T$, следовательно, $x \in |ot'|$, чем доказано, что тело комплекса $o\sigma'T$ есть симплекс T. Если бы точка x принадлежала двум симплексам $|ot'_1| \in o\sigma'T$ и $|ot'_2| \in o\sigma'T$, то (ввиду выпуклости этих симплексов) этим симплексам принадлежал бы и открытый отрезок ox'. Значит, точка x' принадлежит симплексам t'_1 и t'_2 комплекса $\sigma'T$, вопреки дизъюнктности этих симплексов. Итак, пирамида $o\sigma'T$ есть действительно подразделение симплекса T, а полный комплекс $o\sigma'T \cup \sigma'T$ — подразделение комплекса $[T]$. Эти подразделения называются центральными подразделениями с центром o относительно подразделения $\sigma'T$ комплекса σT.

Пусть теперь дан n-мерный комплекс K, $n > 0$. Через K^{n-1} обозначим его подкомплекс, состоящий из всех симплексов размерности $\leqslant n-1$. Пусть дано какое-нибудь подразделение $(K^{n-1})'$ комплекса K^{n-1} и в каждом n-мерном симплексе T_i комплекса K выбрана точка («центр») o_i. Тогда для каждого i определено подразделение $\sigma'T_i$ границы симплекса T_i и, следовательно, комплекс $\sigma'T_i \cup o_i\sigma'T_i$. Комплекс $K' = \bigcup\limits_i (\sigma'T_i \cup o_i\sigma'T_i)$ назовем центральным подразделением с центрами o_i комплекса K относительно подразделения $(K^{n-1})'$ подкомплекса K^{n-1}, Теперь барицентрическое подразделение любой триангуляции K размерности n может быть — по индукции относительно числа n — определено следующим образом. Барицентрическое (как и всякое вообще) подразделение нульмерного комплекса K совпадает с комплексом K. Предположим, мы определили барицентрическое подразделение любой триангуляции размерности $\leqslant n-1$, так что выполняется следующее условие: барицентрическое подразделение K' комплекса K размерности $m \leqslant n-1$ есть центральное подразделение комплекса K с центрами o_i внутри симплексов T_i размерности m комплекса K относительно барицентрического подразделения $(K^{m-1})'$ подкомплекса K^{m-1} комплекса K, состоящего из всех симплексов размерности $\leqslant m-1$. Определим барицентрическое подразделение n-мерной триангуляции K следующим образом. Возьмем комплекс $K^{n-1} \dot{\subset} K$, состоящий из всех симплексов комплекса K, имеющих размерность $\leqslant n-1$. Для него барицентрическое подразделение уже определено. В каждом $T_i^n \in K$ берем точку o_i и центральное подразделение с центрами o_i относительно барицентрического подразделения комплекса K^{n-1} считаем барицентрическим подразделением комплекса K.

Обычно под центром симплекса $\bar{T}^n = |a^0 \ldots a^n|$ понимают его геометрический центр тяжести, т. е. точку o, являющуюся взвешенной суммой

$$o = \frac{1}{n+1} a^0 + \ldots + \frac{1}{n+1} a^n$$

с равными весами. Тогда имеет место следующая элементарно-геометрическая теорема: наибольшее из расстояний $\rho(o, a^i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, не превосходит числа $\frac{n}{n+1}\delta$, где δ есть диаметр симплекса $T^n = |a^0 \ldots a^n|$, т. е. наибольшее из расстояний между двумя какими-нибудь его вершинами *). Отсюда следует: если при переходе от данного n-мерного полного комплекса K к его барицентрическому подразделению K_1 под центрами симплексов $T \in K$ понимать их геометрические центры тяжести и обозначить через d, соответственно d_1, мелкость комплекса K, соответственно K_1, т. е. наибольшее число, являющееся диаметром какого-либо симплекса данного комплекса, то

$$d_1 \leqslant \frac{n}{n+1} d. \tag{2}$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что, производя последовательно операцию барицентрического подразделеиия, можно

*) Доказательство см., например, Александров [21], стр. 655.

от данной триангуляции K перейти к сколь угодно мелкому ее подразделению K_h.

Замечание 2. Все сказанное о барицентрическом подразделении триангуляции K дословно применимо и к более общему случаю полного конечного комплекса, состоящего из (вообще говоря, не дизъюнктных) симплексов, лежащих в данном R^n.

Замечание 3. Иногда (например, в гл. 8) приходится вместо триангуляций рассматривать так называемые комплексы выпуклых многогранников, определение которых отличается от определения триангуляции только тем, что элементами комплекса могут быть любые лежащие в данном R^n выпуклые многогранники (не непременно являющиеся симплексами). Существенно заметить, что барицентрические подразделения таких комплексов определяются совершенно так же, как для триангуляции (в частности, барицентрическое подразделение любого комплекса выпуклых многогранников всегда является триангуляцией). Как известно, пространство R^n может быть разбнто на конгруэнтные кубы, диаметры которых меньше любого заданного $\varepsilon > 0$, образующие так называемый кубильяж W_ε. Возьмем всевозможные пересечения элементов данной триангуляции K (лежащей в R^n) с кубами кубильяжа W_ε; мы получаем комплекс выпуклых многогранников K', образующих подразделение триангуляции K, состоящий из элементов, меньших ε по диаметру. Переходя затем к барицентрическому подразделению K'' комплекса K', получим триангуляцию мелкости ε, состоящую из симплексов и являющуюся подразделением исходной триангуляции K. Таким образом, важный факт существования у данной триангуляции сколь угодно мелких подразделений доказывается и без приведенной выше оценки диаметров симплексов барицентрического подразделения.

Замечание 4. Барицентрическое подразделение K_1 триангуляции K имеет, как видно на примерах, весьма наглядный геометрический смысл; но комплекс K_1 очень удобно воспринимается и как абстрактный комплекс; за вершины этого абстрактного комплекса можно взять симплексы комплекса K; тогда убывающие последовательности (1) симплексов $T_i \in K$ объявляются остовамн комплекса K_1. Таким образом, единственной основой определения барицентрического подразделения комплекса является то обстоятельство, что всякий комплекс есть частично упорядоченное множество.

Это замечание сохраняет силу и для барицентрического подразделения комплекса выпуклых многогранников.

7. Связность комплекса. Симплициальный комплекс K называется *связным*, если в нем нет отличного от всего K непустого подкомплекса $K_0 \subset K$, одновременно замкнутого и открытого.

Назовем «ломаной» данного полного комплекса K, связывающей вершины e_1 и e_s комплекса K, всякую конечную последовательность его одномерных симплексов вида

$$|e_1e_2|, |e_2e_3|, \ldots, |e_{s-1}e_s|$$

(каждые два последовательных звена $|e_{i-1}e_i|$ и $|e_ie_{i+1}|$ имеют общую вершину e_i).

Легко доказывается

Предложение 4. *Полный комплекс связен тогда и только тогда, когда любые две его вершины могут быть связаны ломаной.*

Далее, n-мерный комплекс K называется *размерно однородным*, если каждый его симплекс является собственной или несобственной гранью некоторого n-мерного симплекса. Размерно однородный комплекс K^n (размерности n) называется *сильно связным*, если при всяком его представлении в виде объединения двух замкнутых n-мерных подкомплексов K_1^n и K_2^n:

$$K^n = K_1^n \cup K_2^n,$$

пересечение $K_1^n \cap K_2^n$ есть комплекс размерности $\geqslant n-1$.

§ 3. Равенство $\dim P^n = n$ для n-мерных (в элементарном смысле) полиэдров. Леммы Шпернера

1. Докажем прежде всего неравенство

$$\dim P^n \leqslant n. \tag{1a}$$

Для этого достаточно показать (см. гл. 2, § 2), что полиэдр имеет при любом $\varepsilon > 0$ открытое ε-покрытие кратности $\leqslant n+1$. Для получения такого покрытия возьмем триангуляцию K полиэдра, симплексы которой по диаметру меньше $\varepsilon/3$; открытые звезды Oe_i вершин этой триангуляции имеют диаметр $<\varepsilon$ и образуют, согласно следствию теоремы 1 (§ 2 этой главы), открытое покрытие кратности $n+1$ полиэдра $\bar{K} = P^n$. Неравенство (1a) доказано. Из него следует

Предложение 1. *Всякий компакт Φ, лежащий в n-мерном эвклидовом пространстве R^n, имеет размерность* $\dim \Phi \leqslant n$.

В самом деле, компакт $\Phi \subset R^n$, будучи ограниченным замкнутым множеством, лежит в некотором замкнутом симплексе $\bar{T}^n$ и образует замкнутое подпространство этого симплекса. Поэтому, в силу теоремы о монотонности размерности dim по замкнутым множествам (гл. 2, § 2) и формулы (1a), имеем

$$\dim \Phi \leqslant \dim \bar{T}^n \leqslant n.$$

Для доказательства основного равенства

(1) $$\dim P^n = n$$

остается доказать неравенство

(1б) $$\dim P^n \geqslant n,$$

которое в свою очередь достаточно доказать для случая, когда полиэдр P^n является n-мерным замкнутым симплексом T^n. В самом деле, всякий n-мерный полиэдр P^n содержит n-мерный замкнутый симплекс T^n. Поэтому $\dim P^n \geqslant \dim T^n$, и нужно только доказать основное

Предложение 2 (Лебег)*). *Пусть T^n — замкнутый симплекс. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое замкнутое ε-покрытие симплекса T^n имеет кратность $\geqslant n+1$.*

Прежде чем доказывать это предложение, выведем из него, т. е. из равенства $\dim T^n = n$, знаменитую теорему Брауэра об инвариантности числа измерений n-мерного эвклидова пространства:

Предложение 3. *При $m \neq n$ пространства R^m и R^n не гомеоморфны между собою.*

Мы докажем несколько более сильное предложение, а именно:

Предложение 4. *При $m > n$ никакое множество $E \subseteq R^m$, содержащее внутренние (относительно R^m) точки, не может быть топологически отображено в R^n.*

В самом деле, пусть такое отображение $f\colon E \to R^n$ существует. Так как E содержит внутренние точки относительно R^m, то в E лежит m-мерный замкнутый симплекс T^m, переходящий при топологическом отображении f в компакт $\Phi \subset R^n$.

Так как T^m и Φ гомеоморфны между собою, то $\dim \Phi = \dim T^m = m$, т. е. $\dim \Phi = m > n$ (мы предполагаем равенство (1) доказанным). В то же время из $\Phi \subset R^n$ следует, что $\dim \Phi \leqslant n$. Противоречие!

Итак, все свелось к предложению 2. Мы выведем его из так называемой леммы Шпернера [1], к которой и переходим.

2. Леммы Шпернера. Первая лемма Шпернера (основная). *Пусть дана триангуляция K замкнутого симплекса $T^n = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n}$.*

---

*) Эту замечательную теорему высказал впервые Лебег в 1911 г. Лебег, таким образом, был первым математиком, который понял связь между размерностью и кратностью покрытий. Однако доказательство, данное Лебегом в его работе [1], содержало пробелы. Первое безупречное доказательство теоремы Лебега было дано Брауэром в 1913 г. в работе [4]. Сам Лебег дал безупречное доказательство своей теоремы лишь в 1921 г. в работе [2].

Предположим, что каждой вершине e триангуляции K поставлена в соответствие некоторая вершина fe симплекса T^n, причем выполнено условие:

если вершина e триангуляции K лежит на какой-нибудь грани T^r симплекса T^n, то поставленная ей в соответствие вершина fe симплекса T^n есть вершина этой грани T^r.

Тогда найдется по крайней мере один симплекс τ^n триангуляции K, вершинам которого поставлены в соответствие сплошь различные (и, следовательно, все) вершины симплекса T^n.

Доказательство. Назовем симплекс $\tau^n \in K$ нормальным, если в силу нашего соответствия вершинам симплекса τ^n соответствуют сплошь различные и, следовательно, все вершины симплекса T^n. Наша задача состоит в том, чтобы доказать существование хотя бы одного нормального симплекса $\tau^n \in K$. Но мы сейчас докажем больше, а именно что число нормальных симплексов в K всегда нечетно.

Доказательство будем вести индукцией по числу измерений n симплекса T^n. При $n = 0$ предложение очевидно.

Предполагая утверждение доказанным для $n-1$, доказываем его для n.

Грань, противоположную вершине a_k, обозначим через $\overline{T}_k^{n-1}$; ее вершинами являются все вершины симплекса T^n, кроме вершины a_k.

Триангуляция K симплекса T^n порождает и определенную триангуляцию K_k грани $\overline{T}_k^{n-1}$.

В частности, нас будет интересовать триангуляция K_0 грани $\overline{T}_0^{n-1} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Назовем $(n-1)$-мерный симплекс $\tau^{n-1} \in K$ отмеченным, если его вершинам поставлены в соответствие все вершины $a_1, \ldots, a_n$ грани $\overline{T}_0^{n-1}$.

Следовательно, лежащие на $\overline{T}_0^{n-1}$ отмеченные симплексы τ_j^{n-1} суть не что иное, как нормальные симплексы триангуляции K_0; значит, по индукционному предположению их число нечетно. Подсчитаем, сколько может быть отмеченных граней у какого-нибудь симплекса τ^n триангуляции K.

Пусть сначала симплекс τ^n нормален; обозначим его вершины через $e_0, \ldots, e_n$, причем нумерацию этих вершин сделаем такой, чтобы вершине e_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, соответствовала вершина a_i симплекса T^n, так что $fe_0 = a_0, \ldots, fe_n = a_n$. Тогда очевидно, что у симплекса τ^n имеется единственная отмеченная грань, а именно грань $|e_1 \ldots e_n|$. Пусть теперь симплекс $\tau^n = |e_0 e_1 \ldots e_n|$ не нормален, но имеет все же отмеченную грань $\tau^{n-1} = |e_1 \ldots e_n|$, причем обозначения снова выбраны так, что вершине e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, поставлена в соответствие вершина a_i. Так как симплекс не нормален, то вершине e_0 симплекса τ^n

не может соответствовать вершина a_0 симплекса T^n, так что вершине e_0 поставлена в соответствие одна из вершин $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, пусть, например, вершина a_1. Тогда симплекс τ^n имеет ровно две отмеченные грани, а именно $|e_1e_2\ldots e_n|$ и $|e_0e_2\ldots e_n|$.

Итак, число отмеченных граней симплекса τ^n триангуляции K равно 1, если τ^n — нормальный симплекс, и равно нулю или 2, если симплекс τ^n не нормален.

Обозначим через α_i число отмеченных граней симплекса $\tau_i^n \in K$ и положим $\alpha = \sum\limits_i \alpha_i$ (суммирование по всем n-мерным симплексам τ_i^n триангуляции K).

Из только что сказанного следует, что каждому нормальному симплексу $\tau_i^n \in K$ соответствует в сумме $\alpha = \sum\limits_i \alpha_i$ нечетное слагаемое (а именно $\alpha_i = 1$), а каждому не нормальному — четное ($\alpha_i = 0$ или 2). Вся сумма $\alpha = \sum\limits_i \alpha_i$ будет четным или нечетным числом в соответствии с тем, будет ли четным или нечетным число нечетных слагаемых α_i, т. е. число нормальных симплексов триангуляции K.

Итак, нам надо доказать, что число α — нечетное.

Займемся вычислением числа α. Пусть

$$\tau_1^n, \tau_2^n, \ldots, \tau_\mu^n$$

— все n-мерные, а

$$\tau_1^{n-1}, \tau_2^{n-1}, \ldots, \tau_\nu^{n-1}$$

— все $(n-1)$-мерные симплексы триангуляции K. Обозначим через ε_{ij} число, равное 1, если τ_j^{n-1} есть отмеченная грань симплекса τ_i^n, и равное нулю в противном случае. Тогда $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{\nu} \varepsilon_{ij}$ и $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \sum\limits_{j=1}^{\nu} \varepsilon_{ij}$, и мы можем написать

$$\alpha = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} = \sum_j \sum_i \varepsilon_{ij} = \sum_j \beta_j,$$

где $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \varepsilon_{ij}$. Число β_j равно, очевидно, числу n-мерных симплексов $\tau_i^n \in K$, имеющих данный $(n-1)$-мерный симплекс τ_j^{n-1} своей отмеченной гранью. Посмотрим, какие значения может принимать β_j.

Предположим сначала, что симплекс τ_j^{n-1} лежит внутри симплекса $\overline{T}^n$. Если τ_j^{n-1} — отмеченный симплекс, то он является отмеченной гранью обоих прилегающих к нему n-мерных симплексов $\tau_{i_1}^n$ и $\tau_{i_2}^n$ триангуляции K, и тогда $\beta_j = 2$. Если же симплекс τ_j^{n-1} не отмеченный, то $\beta_j = 0$. Итак, четность суммы

$\alpha = \sum_j \beta_j$ не изменится, если мы выкинем из нее все слагаемые β_j, соответствующие симплексам τ_j^{n-1}, лежащим внутри симплекса $\overline{T}^n$, т. е. оставим лишь те β_j, для которых τ_j^{n-1} лежит на какой-нибудь $(n-1)$-мерной замкнутой грани $\overline{T}_k^{n-1}$ симплекса $\overline{T}^n$. Но если эта грань $\overline{T}_k^{n-1}$ не есть грань $\overline{T}_0^{n-1} = \overline{a_1 \ldots a_n}$, то лежащий на ней симплекс τ_j^{n-1} по основному условию леммы Шпернера не может быть отмеченным. Итак, для симплекса τ_j^{n-1}, лежащего на границе симплекса $\overline{T}^n$, но не на грани $\overline{T}_0^{n-1} = \overline{a_1 \ldots a_n}$, имеем $\beta_j = 0$. Значит, не меняя четности числа $\alpha = \sum_j \beta_j$, можно в сумме $\sum_j \beta_j$ оставить лишь те слагаемые β_j, которые соответствуют симплексам τ_j^{n-1}, лежащим на грани $\overline{T}_0^{n-1} = \overline{a_1 \ldots a_n}$. Но каждый такой симплекс $\tau_j^{n-1} \subseteq \overline{T}_0^{n-1}$ является гранью единственного прилегающего к нему симплекса $\tau_{i(j)}^n$ и сумма $\beta_j = \sum_i \varepsilon_{ij}$ совпадает с единственным слагаемым $\varepsilon_{i(j),j}$, которое отлично от нуля (и тогда равно 1) в том и только в том случае, когда τ_j^{n-1} есть отмеченный симплекс. Поэтому сумма $\sum_j \beta_j$ (распространенная на все слагаемые β_j, для которых τ_j^{n-1} лежит на $\overline{T}_0^{n-1}$) равна числу отмеченных симплексов $\tau_j^{n-1} \subseteq \overline{T}_0^{n-1}$ или, что то же, числу нормальных симплексов триангуляции K_0 замкнутого симплекса $\overline{T}_0^{n-1}$. По индуктивному предположению это число нечетно, значит, нечетна и вся сумма $\sum_j \beta_j = \alpha$, чем основная лемма Шпернера доказана.

Вторая лемма Шпернера. *Если покрытие n-мерного замкнутого симплекса T^n состоит из $n+1$ замкнутых множеств*

$$A_0, A_1, \ldots, A_n,$$

поставленных в соответствие вершинам

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

симплекса T_n таким образом, что каждая грань $\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_r}}$ этого симплекса покрыта множествами $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$, соответствующими ее вершинам, то существует точка, принадлежащая всем множествам $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Для доказательства сначала убедимся в том, что в любой триангуляции K замкнутого симплекса T^n найдется симплекс, остов которого пересекается со всеми множествами $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$.

Поставим в соответствие каждой вершине e триангуляции K вершину a_k симплекса T^n, выбранную так, чтобы множество A_k, соответствующее этой вершине, содержало точку e; при этом, если вершина e лежит на грани $\overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}}$ симплекса T^n, то ставим ей в соответствие вершину этой грани. Мы видим, что условия основной леммы Шпернера осуществлены, откуда утверждение и следует.

Теперь докажем, что

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i \neq \Lambda.$$

По доказанному и в силу неравенства (2) § 2 для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ можно выбрать такие точки $x_k^i \in A_i$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, что

$$\rho\left(x_k^i, x_k^{i'}\right) < \frac{1}{k}.$$

Последовательности x_k^i, $k = 1, 2, 3, \ldots$, не ограничивая общности рассуждений, можно считать сходящимися. Тогда их общий предел будет принадлежать всем множествам A_i (в силу их замкнутости). Лемма доказана.

Непосредственным следствием второй леммы Шпернера является

Третья лемма Шпернера. *Пусть*

$$\alpha = \{A_0, \ldots, A_n\}$$

— такое замкнутое покрытие замкнутого симплекса $\overline{T}^n = \overline{a_0 \ldots a_n}$, *что множество* A_i (*при* $i = 0, 1, \ldots, n$) *не имеет общих точек с замкнутой гранью* $\overline{T}_i^{n-1}$, *противоположной вершине* a_i. *Тогда*

$$A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \Lambda.$$

Достаточно доказать, что для любой грани $T^r = |a_{i_0} \ldots a_{i_r}|$ имеем $\overline{T}^r \subseteq A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_r}$, и применить вторую лемму.

Итак, рассмотрим грань $T^r = |a_{i_0} \ldots a_{i_r}|$.

Включение

$$\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}} \subseteq A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_r}$$

будет доказано, если мы покажем, что из всех элементов покрытия α только элементы $A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}$ могут иметь общие точки с гранью $\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}}$. Итак, возьмем какое-нибудь A_j, $j \neq i_0, \ldots, i_r$.

Грань $\overline{T}_j^{n-1}$, противоположная вершине a_j, содержит все вершины симплекса T^n, кроме вершины a_j, значит, в частности, все вершины $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$, а потому содержит и грань $\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}}$, образованную этими вершинами. По условию множество A_j не пересекается с гранью $\overline{T}_j^{n-1}$, поэтому оно не имеет общих точек с гранью $\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}} \subseteq \overline{T}_j^{n-1}$, ч. и т. д.

Доказательство предложения 2. Пусть ε — лебегово число системы $\{\overline{T}_0^{n-1}, \overline{T}_1^{n-1}, \ldots, \overline{T}_n^{n-1}\}$ всех $(n-1)$-мерных замкнутых граней симплекса T^n (см. гл. 1, § 10). Возьмем какое-нибудь ε-покрытие

$$\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_s\}$$

симплекса T^n. Тогда покрытие α обладает следующим основным свойством:

(*) никакой элемент покрытия α не пересекается со всеми гранями $\overline{T}_0^{n-1}, \overline{T}_1^{n-1}, \ldots, \overline{T}_n^{n-1}$.

Отсюда следует (как уже отмечалось выше, в § 1, п. 3), что множество A_j, содержащее какую-нибудь вершину a_i симплекса T^n, не может пересекаться с гранью $\overline{T}_i^{n-1}$, противоположной этой вершине, а так как из двух различных вершин a_i, a_k любая содержится в $(n-1)$-мерной замкнутой грани, противоположной другой, то никакое множество A_j не может содержать двух вершин симплекса T^n.

Предположим, что нумерация элементов покрытия выбрана так, что

$$a_0 \in A_0, \quad a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n.$$

Если $s > n$, то возьмем какое-нибудь целое $j \geqslant n$ и поступим следующим образом: отыщем замкнутую грань $\overline{T}_i^{n-1}$, не пересекающуюся с множеством A_j (такая грань $\overline{T}_i^{n-1}$ заведомо существует), вычеркнем из покрытия α элемент A_j, а элемент A_i заменим элементом $A_i' = A_i \cup A_j$. Полученное покрытие обозначим через α_1. Элемент $A_i' = A_i \cup A_j \in \alpha_1$, заменивший собою элемент A_i, по-прежнему не пересекается с $\overline{T}_i^{n-1}$ (так как ни A_i, ни A_j с $\overline{T}_i^{n-1}$ не пересекались). Поэтому покрытие α_1 обладает основным свойством (*), но число его элементов на 1 меньше числа элементов покрытия α. Покажем, что

$$\text{кр}\, \alpha_1 \leqslant \text{кр}\, \alpha. \tag{2}$$

Если среди элементов покрытия α, содержащих точку x, не имеется ни одного или только одно из множеств A_i, A_j, то $\text{кр}_x \alpha_1 = \text{кр}_x \alpha$. Если же точка x содержится и в A_i и в A_j, то $\text{кр}_x \alpha_1 = \text{кр}_x \alpha - 1$. Формула (2) доказана.

Повторим описанную операцию конечное число раз — до тех пор, пока не придем к покрытию α_h, состоящему из $n+1$ элементов, обладающему свойством (*) и удовлетворяющему, следовательно, основному условию третьей леммы Шпернера; поэтому существует точка, принадлежащая всем $n+1$ элементам покрытия α_h, т. е. кратность покрытия α_h равняется $n+1$. Но при переходе от α к α_h кратность покрытий не возрастала. Значит, так как кр. $\alpha_h = n+1$, то кр. $\alpha \geqslant n+1$, что и требовалось доказать.

§ 4. Некоторые дальнейшие следствия леммы Шпернера

Теорема 3 (Брауэр [2]). *При всяком непрерывном отображении f замкнутого симплекса $\overline{T}^n$ в себя имеется по крайней мере одна неподвижная точка (т. е. такая точка $x \in \overline{T}^n$, что $fx = x$).*

Пусть

$$T^n = |a_0 \ldots a_n|,$$

и пусть при непрерывном отображении

$$f\colon \overline{T}^n \to \overline{T}^n$$

точка x с барицентрическими координатами $\mu_0, \ldots, \mu_n$ переходит в точку fx с барицентрическими координатами $\mu_0', \ldots, \mu_n'$ (барицентрические координаты берутся в системе $\{a_0, \ldots, a_n\}$).

Обозначим через A_i множество всех тех точек $x \in \overline{T}^n$, для которых $\mu_i' \leqslant \mu_i$. Ясно, что все A_i суть замкнутые множества. Докажем, что они образуют покрытие α, удовлетворяющее условиям второй леммы Шпернера, т. е. что произвольная замкнутая (собственная или несобственная) грань $\overline{T}^r = \overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}}$ симплекса T^n покрыта множествами $A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}$. Пусть x — произвольная точка замкнутой грани $\overline{a_{i_0} \ldots a_{i_r}}$. Тогда $\mu_{i_0} + \ldots + \mu_{i_r} = 1 \geqslant \mu_{i_0}' + \ldots + \mu_{i_r}'$, откуда следует, что по крайней мере для одного i_k имеем $\mu_{i_k}' \leqslant \mu_{i_k}$ и, значит, $x \in A_{i_k}$. Итак, условия второй леммы Шпернера выполнены, так что имеется точка x, принадлежащая всем A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для этой точки x выполнены неравенства

$$0 \leqslant \mu_0' \leqslant \mu_0, \quad 0 \leqslant \mu_1' \leqslant \mu_1, \ldots, 0 \leqslant \mu_n' \leqslant \mu_n,$$

которые в силу условий

$$\mu_0' + \ldots + \mu_n' = \mu_0 + \ldots + \mu_n = 1$$

переходят в равенства

$$\mu_0' = \mu_0, \ \ldots, \ \mu_n' = \mu_n.$$

Другими словами, $fx = x$, что и требовалось доказать*).

Замечание 1. Очевидно, теорема остается верной, если заменить замкнутый симплекс T^n любым гомеоморфным ему множеством.

В качестве последнего применения (второй) леммы Шпернера докажем следующее фундаментальное предложение**):

Теорема 4 (Брауэр [2]) (об инвариантности внутренних точек множеств $E \subseteq R^n$ при топологических отображениях $f: E \to R^n$). *При всяком топологическом отображении какого-нибудь множества $E \subseteq R^n$ на какое-нибудь множество $E' = fE \subseteq P^n$ всякая внутренняя точка множества E переходит во внутреннюю точку множества E', всякая невнутренняя точка $p \in E$ переходит в невнутреннюю точку $p' \in E'$.*

При этом «внутренняя точка» (соответственно «невнутренняя точка») значит: «внутренняя точка» (соответственно «невнутренняя») относительно R^n.

В основе доказательства лежит следующее

Определение 1. Пусть $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ — какая-нибудь система множеств, лежащих в пространстве R^n. *Под изменением системы α «лишь в данном открытом множестве $U \subset R^n$»* понимается переход от системы α к системе $\alpha' = \{A_1', \ldots, A_s'\}$, удовлетворяющей условиям $A_i' \setminus U = A_i \setminus U$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\alpha = \{A_1, \ \ldots, \ A_s\}$$

— замкнутое покрытие кратности $n+1$ компакта $\Phi \subset R^n$, обладающее тем свойством, что существует лишь одна точка p, принадлежащая $n+1$ элементам покрытия α. Тогда, если p есть невнутренняя точка Φ, то, изменив покрытие α лишь в произвольно малой окрестности точки p, можно преобразовать покрытие α в покрытие α' кратности $\leqslant n$.

Доказательство леммы. Возьмем произвольно малый n-мерный симплекс T^n, содержащий внутри себя точку p. Всякая точка границы S^{n-1} симплекса T^n принадлежит не более чем к n элементам покрытия α. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность каждой точки из S^{n-1} пересекается не более чем с n элементами покрытия α.

*) Только что приведенное замечательное доказательство теоремы 3 принадлежит Кнастеру, Куратовскому и Мазуркевичу [1].

**) Другое доказательство (основанное на понятии гомотопии) этой теоремы помещено в гл. 5, § 9, замечание 4.

Возьмем теперь какое-нибудь замкнутое ε-покрытие

$$\beta = \{B_1, \ldots, B_m\}$$

кратности n множества S^{n-1}.

Для каждого множества $B_j \in \beta$ определяем некоторое единственное множество $A_{i(j)} \in \alpha$ следующим образом:

1. Если B_j не пересекается с Φ, то берем в качестве $A_{i(j)}$ произвольное множество $A_i \in \alpha$, пересекающееся с T^n.

2. Если множество B_j пересекается с компактом Φ, то обозначаем через $A_{i(j)}$ любое из пересекающихся с ним множеств A_i (в силу выбора числа ε таких A_i может быть не больше n).

Замечание 2. Различным $B_j \in \beta$ может соответствовать одно и то же $A_{i(j)}$, т. е. для $j_1 \neq j_2$ может оказаться $i(j_1) = i(j_2)$.

Построим теперь систему α'' замкнутых множеств A''_i следующим образом.

Всякое $A_i \in \alpha$, не являющееся множеством $A_{i(j)}$ ни для какого B_j, есть, по определению, элемент A''_i системы α''; если же A_i есть множество $A_{i(j)}$ для одного или нескольких B_j, то определяем A''_i как объединение всех этих B_j и множества A_i. Из этого построения следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ имеем

$$A_i \subseteq A''_i; \tag{1}$$

поэтому

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{s} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} A''_i = \Phi \cup S^{n-1}. \tag{2}$$

Кроме того, $A''_i \subseteq A_i \cup S^{n-1}$ (каждое множество A''_i есть сумма множества A_i с некоторым, быть может, пустым множеством, лежащим в S^{n-1}).

Поэтому точка q, принадлежащая каким-то данным множествам $A''_{i_1}, \ldots, A''_{i_r}$, или принадлежит множествам $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$, или лежит на S^{n-1} (оба случая не исключают друг друга). Мы теперь хотим доказать, что точка p есть единственная точка компакта $\Phi \cup S^{n-1}$, принадлежащая $n+1$ множествам A''_i. На основании только что сказанного для этого достаточно показать, что любая точка $q \in S^{n-1}$ принадлежит не более чем n множествам A''_i.

Если q не принадлежит Φ, то q принадлежит не более чем к n множествам B_j, пусть к $B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}$; соответствующие $A_{i(j)}$ пусть будут $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$, числом не более n; точка q принадлежит лишь элементам $A''_{i_1}, \ldots, A''_{i_r}$ системы α'', т. е. не более чем n элементам.

Пусть теперь $q \in S^{n-1} \cap \Phi$ и $A_1, \ldots, A_h$, $B_1, \ldots, B_k$ суть все элементы покрытий α и β, содержащие точку q. Все множества $B_1, \ldots, B_k$ лежат в ε-окрестности $O(q, \varepsilon)$ точки q. Среди всех не более чем n элементов покрытия α, пересекающихся с $O(q, \varepsilon)$, несомненно, имеются и множества $A_1, \ldots, A_h$. Итак, пусть все элементы α, пересекающиеся с $O(q, \varepsilon)$, суть

$$A_1, \ldots, A_h, \ldots, A_r, \qquad r \leqslant n.$$

Среди них находятся и все $A_{i(j)}$ для $j = 1, 2, \ldots, k$; поэтому среди всех элементов системы α'' содержать точку q могут лишь $A_1'', \ldots, A_r''$, числом не более r, $r \leqslant n$, чем наше утверждение и доказано.

Возьмем теперь внутри симплекса T^n какую-либо точку x, не принадлежащую множеству Φ (так как p — невнутренняя точка Φ, лежащая внутри T^n, то найти нужную нам точку x всегда можно).

Рассмотрим те элементы системы α'', которые пересекаются с S^{n-1}; пусть это будут

$$A_1'', \ldots, A_\nu''.$$

Обозначая через (x, A_i'') объединение всех замкнутых отрезков вида $\overline{xq}$, где $q \in S^{n-1} \cap A_i''$, положим

$$A_i''' = (A_i'' \setminus (A_i'' \cap T^n)) \cup (x, A_i'') \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

и

$$A_i''' = A_i'' \setminus T^n \quad \text{для} \quad i > \nu.$$

Множество A_i''' может отличаться от множества A_i'' лишь на точки, принадлежащие к T^n; поэтому точка, не принадлежащая к T^n, не может содержаться более чем в n множествах A_i'''. Что же касается точек T^n, то из них лишь точка x может принадлежать к $n+1$ множествам A_i''' (так как в противном случае проекция такой точки q на S^{n-1} из точки x принадлежала бы к $n+1$ множествам A_i'' вопреки доказанному выше). Так как $x \notin \Phi$, то, полагая для всех i

$$A_i' = A_i''' \cap \Phi,$$

получаем покрытие

$$\alpha' = \{A_1', \ldots, A_s'\}$$

множества Φ кратности $\leqslant n$.

Очевидно, каждое A_i' может отличаться от соответствующего A_i лишь на точки, принадлежащие T^n, а так как симплекс T^n можно было взять произвольно малым, то мы вправе сказать, что покрытие α' произошло из покрытия α видоизменением этого последнего в произвольно малой окрестности точки p. Лемма, таким образом, доказана.

Из леммы выведем

Предложение 1. *При топологическом отображении f замкнутого n-мерного симплекса T^n в n-мерное эвклидово пространство R^n всякая внутренняя точка p симплекса T^n переходит во внутреннюю точку множества $\Phi = fT^n$.*

Доказательство. Пусть $T^n = |e_0 \ldots e_n|$. Возьмем барицентрическое подразделение границы S^{n-1} симплекса T^n и построим пирамиду над этим подразделением с вершиной в точке p. Получим триангуляцию K замкнутого симплекса T^n, отличающуюся от барицентрического подразделения только тем, что «центром тяжести» симплекса T^n является точка p. Обозначим через A_i объединение замыканий всех симплексов комплекса K, имеющих e_i своей вершиной.

Точка p является единственной общей точкой множеств $A_0, \ldots, A_n$; при этом как само покрытие

$$\alpha = \{A_0, \ldots, A_n\}$$

замкнутого симплекса T^n, так и всякое покрытие, которое получится из α видоизменением множества A_i в достаточно малой окрестности точки p, удовлетворяет условиям второй леммы Шпернера.

Отсюда следует:

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ всякое покрытие α', полученное из α видоизменением множеств A_i в ε-окрестности точки p, есть покрытие кратности $\geqslant n+1$.

Пусть теперь точка $q = f(p)$ есть невнутренняя точка множества Φ. Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы образ δ-окрестности точки q (относительно Φ) при отображении f^{-1} лежал в ε-окрестности точки p.

Пользуясь леммой 1, видоизменим множества fA_i в δ-окрестности точки q так, чтобы получилось покрытие β' кратности $\leqslant n$ множества Φ. При отображении f^{-1} покрытие β' переходит в покрытие α' той же кратности $\leqslant n$, являющееся видоизменением покрытия α в ε-окрестности точки p, что невозможно. Предложение 1 этим доказано.

Теорема 4 доказывается теперь в нескольких словах. Пусть p — внутренняя точка множества $E \subseteq R^n$; точка p является внутренней точкой некоторого n-мерного симплекса $T^n \subseteq E$ и поэтому при данном топологическом отображении f множества E в R^n переходит в точку q, являющуюся внутренней точкой множества fT^n и тем более внутренней точкой множества $E' = fE$.

Всякая невнутренняя точка p множества E переходит при топологическом отображении f в невнутреннюю точку множества fE, так как в противном случае внутренняя точка fp множества

fE перешла бы при топологическом отображении f^{-1} в невнутреннюю точку p множества E, чего не может быть.

Теорема 4 этим полностью доказана.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее лишь формально более общее утверждение, которое, однако, нам понадобится в этом же параграфе.

Теорема 4′. *Пусть U^n и V^n — топологические пространства, гомеоморфные R^n; пусть дано топологическое отображение f множества $E \subseteq U^n$ на множество $E' \subseteq V^n$; тогда всякая внутренняя точка множества E относительно U^n переходит при отображении f во внутреннюю точку множества E относительно V^n.*

В теореме 4′ содержится

Предложение 2. *Пусть U^n и V^n гомеоморфны R^n; пусть f — топологическое отображение открытого в U^n множества E в пространство V^n. Тогда множество fE открыто в V^n. В частности, всякий топологический образ всего пространства U^n в V^n есть открытое множество пространства V^n.*

Так как при $m < n$ мы можем рассматривать R^m как нигде не плотное множество пространства R^n, то топологическое отображение R^n на R^m невозможно. Мы получили, таким образом, новое доказательство предложения 3 § 3.

Определение 2. Компакт, гомеоморфный n-мерному замкнутому симплексу, называется *n-мерным элементом.*

Так как размерность топологически инвариантна и размерность симплекса равна числу его измерений, то число n в определении 2 действительно есть размерность n-мерного элемента и потому определено однозначно (т. е. никакое топологическое пространство не может быть при $n \neq m$ одновременно n-мерным и m-мерным элементом).

Докажем следующее важное

Предложение 3. *При всех топологических отображениях замкнутого n-мерного симплекса $\overline{T}^n$ на n-мерный элемент E^n граница $\overline{T}^n \setminus T^n$ симплекса T переходит в одно и то же множество S^{n-1}, называемое границей n-мерного элемента E^n; открытое множество $E^n \setminus S^{n-1}$ плотно в E^n и обозначается через $\langle E^n \rangle$; оно называется внутренностью элемента E^n.*

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 — два топологических отображения $\overline{T}^n$ на E^n. Если бы, например, для точки $x \in \overline{T}^n \setminus T^n$ было

$$f_2 x \notin f_1(\overline{T}^n \setminus T^n),$$

то было бы $f_1^{-1} f_2 x \notin \overline{T}^n \setminus T^n$; между тем $f_1^{-1} f_2$ есть топологическое отображение $\overline{T}^n$ на себя, при котором, в силу предложения 1, множество $\overline{T}^n \setminus T^n$ отображается на себя. Полученное противоречие доказывает, что

$$f_2(\overline{T}^n \setminus T^n) \subseteq f_1(\overline{T}^n \setminus T^n).$$

Таким же образом доказывается, что

$$f_1(\overline{T}^n \setminus T^n) \subseteq f_2(\overline{T}^n \setminus T^n),$$

т. е. что

$$f_1(\overline{T}^n \setminus T^n) = f_2(\overline{T}^n \setminus T^n).$$

Так как множество T^n открыто и плотно в $\overline{T}^n$, то множество $E^n \setminus S^{n-1}$, будучи образом множества T^n при топологическом отображении $\overline{T}^n$ на E^n, открыто и плотно в E^n. Предложение 3 этим доказано.

Из предложения 2 без труда выводится следующая теорема, представляющая собою обобщение теоремы 4′:

Теорема 4″. *При всяком топологическом отображении какого-нибудь множества E_1, лежащего в n-мерном топологическом многообразии**) M_1^n, *на какое-нибудь множество E_2, лежащее в n-мерном топологическом многообразии M_2^n, всякая внутренняя точка множества E_1 (относительно M_1^n) переходит во внутреннюю точку множества E_2 (относительно M_2^n), всякая невнутренняя точка E_1 (относительно M_1^n) переходит в невнутреннюю точку E_2 (относительно M_2^n).*

Доказательство можно предоставить читателю.

§ 5. Существенные отображения на замкнутый симплекс

В этом параграфе мы обозначаем через $\overline{T}^n$ замкнутый n-мерный симплекс или любое гомеоморфное ему множество, лежащее в R^n (чаще всего шар или куб); через T^n, соответственно S^{n-1}, обозначается открытое ядро множества $\overline{T}^n \subset R^n$, соответственно его граница (относительно R^n):

$$S^{n-1} = \overline{T}^n \setminus T^n.$$

Как было показано в § 4, при топологическом отображении множества $\overline{T}^n$ на $\overline{T}_1^n \subset R^n$ множества T^n и S^{n-1} отображаются соответственно на T_1^n и S_1^{n-1}.

Под X понимаем любое нормальное пространство.

Фундаментальное значение в этой книге имеет

Определение 1 (Александров [11], [12]). Непрерывное отображение $f\colon X \to \overline{T}^n$ называется *существенным*, если вся-

*) n-мерным топологическим многообразием называется топологическое пространство, имеющее базу, все элементы которой гомеоморфны пространству R^n.

кое непрерывное отображение f_1: $X \to T^n$, совпадающее с f во всех точках множества

$$\Phi = f^{-1}S^{n-1},$$

есть отображение на все T^n.

Согласно этому определению всякое существенное отображение f: $X \to T^n$ есть отображение на T^n.

Очевидно, определение 1 означает, что непрерывное отображение f: $X \to T^n$ несущественно тогда и только тогда, когда имеется такое отображение f_1 пространства X на некоторое собственное подмножество $Y \subset T^n$, что

$$(1)\quad f_1x = fx \text{ для всех } x \in \Phi = f^{-1}S^{n-1}.$$

Предложение 1. *Для того чтобы непрерывное отображение f: $X \to T^n$ было несущественно, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы существовало удовлетворяющее условию* (1) *непрерывное отображение f_1: $X \to S^{n-1}$.*

При доказательстве этого предложения мы вправе заменить данное множество T^n любым гомеоморфным ему множеством, например, предположить, что T^n есть замкнутый шар (с внутренностью T^n и границей S^{n-1}).

Пусть f: $X \to T^n$ — несущественное отображение. Тогда имеется удовлетворяющее условию (1) отображение

$$f_1\colon X \to Y \subset \overline{T}^n.$$

Берем какую-нибудь точку $y_0 \in T^n \setminus Y$ и обозначим через

$$\pi\colon \overline{T}^n \setminus y_0 \to S^{n-1}$$

центральную проекцию множества $T^n \setminus y_0$ в S^{n-1}, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in T^n \setminus y_0$ точку пересечения луча $\overrightarrow{y_0y}$ со сферой S^{n-1}. Очевидно, на S^{n-1} отображение π является тождественным. Рассматривая отображение π на множестве $Y \equiv f_1X \subseteq T^n \setminus y_0$, получаем отображение

$$f' = \pi f_1\colon X \to S^{n-1},$$

совпадающее на $\Phi = f^{-1}S^{n-1}$ с отображением f_1 и с отображением f, что и требовалось доказать.

Очевидной перефразировкой предложения 1 является следующее

Предложение 1'. *Для того чтобы непрерывное отображение f: $X \to T^n$ было несущественным, необходимо и достаточно, чтобы отображение*

$$f|_\Phi\colon \Phi \to S^{n-1}$$

допускало продолжение до некоторого непрерывного отображения

$$f'\colon X \to S^{n-1}.$$

Доказательство предоставляется читателю.

Теперь в качестве последнего приложения леммы Шпернера мы докажем следующее

Предложение 2 (Брауэр). *Тождественное отображение замкнутого симплекса на себя есть существенное отображение.*

Другими словами:

Не существует непрерывного отображения замкнутого симплекса $\overline{T}^n$ в его границу S^{n-1}, оставляющего неподвижными все точки границы.

Предположим, что такое отображение $\varphi\colon \overline{T}^n \to S^{n-1}$ существует. Совокупность всех собственных граней симплекса T^n образует триангуляцию $\Sigma^{n-1} = [T^n] \setminus T^n$ его границы S^{n-1}. Для каждой вершины a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, симплекса T^n определена противоположная этой вершине грань T_k^{n-1}, и открытой звездой вершины a_k относительно триангуляции Σ^{n-1} является (открытое в S^{n-1}) множество $Oa_k = S^{n-1} \setminus \overline{T}_k^{n-1}$. Эти звезды образуют покрытие $\Omega = \{Oa_0, \ldots, Oa_n\}$ границы S^{n-1}. При этом пересечение всех Oa_k пусто (так как каждая точка $x \in S^{n-1}$ принадлежит хотя бы одной замкнутой $(n-1)$-мерной грани $\overline{T}_k^{n-1}$ и, следовательно, не принадлежит соответствующей звезде Oa_k).

Пусть ε — лебегово число открытого покрытия Ω компакта S^{n-1}, так что всякое множество $E \subset S^{n-1}$, имеющее диаметр $<\varepsilon$, целиком лежит хотя бы в одном Oa_k. Возьмем столь мелкую триангуляцию K замкнутого симплекса $\overline{T}^n$, чтобы для звезды oe_j любой вершины e_j этой триангуляции диаметр множества $\varphi(oe_j)$ был меньше ε. Тогда каждой вершине $e_j \in K$ можно поставить в соответствие вершину $a_k = fe_j$ симплекса T^n под условием

$$\varphi(oe_j) \subseteq Oa_k.$$

Покажем, что при этом соответствии выполнено условие основной леммы Шпернера, а именно: если e_j лежит на грани $T^r = |a_{i_0} \ldots a_{i_r}|$ симплекса T^n, то вершина $a_k = fe_j$ есть одна из вершин этой грани. В самом деле, так как $e_j \in T^r \subset S^{n-1}$, то $\varphi e_j = e_j$, и мы имеем

$$T^r \ni e_j = \varphi e_j \in \varphi(oe_j) \subseteq Oa_k = S^{n-1} \setminus \overline{T}_k^{n-1},$$

так что грань T^r не содержится в замкнутой грани $\overline{T}_k^{n-1}$; а это значит, что вершина a_k, противоположная грани T_k^{n-1}, есть одна из вершин грани T^r.

Итак, отображение $e_j \to fe_j = a_h$ множества всех вершин триангуляции K симплекса T^n на множество вершин этого симплекса удовлетворяет условию основной леммы Шпернера; значит, существует n-мерный симплекс τ^n триангуляции K, вершинам $e_{j_0}, \ldots, e_{j_n}$ которого поставлены в соответствие сплошь различные и, следовательно, все вершины симплекса T^n, так что, выбрав надлежащим образом нумерацию $e_{j_0}, \ldots, e_{j_n}$ вершин симплекса τ^n, имеем

$$\varphi(oe_{j_0}) \subseteq Oa_0, \quad \varphi(oe_{j_1}) \subseteq Oa_1, \ \ldots, \ \varphi(oe_{j_n}) \subseteq Oa_n.$$

Но открытый симплекс τ^n содержится в звезде каждой из его вершин $oe_{j_0}, oe_{j_1}, \ldots, oe_{j_n}$, так что

$$\varphi\tau^n \subseteq \varphi oe_{j_0} \cap \ldots \cap \varphi oe_{j_n} \subseteq Oa_0 \cap \ldots \cap Oa_n = \Lambda.$$

Противоречие получено, предложение доказано.

ПРИБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ТРЕТЬЕЙ

§ 1. Понятие гомотопии; существенные отображения на сферу

Понятие существенного отображения $f\colon X \to T^n$ на замкнутый симплекс подвело нас вплотную к одному из важнейших понятий топологии — понятию гомотопии и непрерывной деформации отображения.

Определение 1 (Брауэр [3]). Два непрерывных отображения f_0 и f_1 пространства X в пространство Y называются *гомотопными* между собой, если существует такое непрерывное отображение $f\colon X \times I \to Y$, $I = [a, b]$, что $f(x, a) = f_0x$, $f(x, b) = f_1x$ для всех $x \in X$.

Очевидно, что отрезок $I = [a, b]$ можно заменить любым другим отрезком $I = [a', b']$, в частности отрезком $I = [0, 1]$.

Гомотопия между отображениями $f_0\colon X \to Y$ и $f_1.\ X \to Y$ называется связанной данным множеством $\Phi \subseteq X$, если требуется выполнение дополнительного условия

$$f(x, t) = f(x, a) = f(x, b) \quad \text{для всех} \quad x \in \Phi, \quad t \in [a, b].$$

Разберемся в интуитивном смысле определения гомотопии. Если отображения $f_a\colon X \to Y$, $f_b\colon X \to Y$ гомотопны между собой, то, полагая

$$f_tx = f(x, t) \in Y$$

(для данного t, $a \leqslant t \leqslant b$, для всех $x \in X$), получаем семейство отображений f_t пространства X в Y, определенных для всех значений t, $a \leqslant t \leqslant b$, параметра t, связывающее между собою два данных отображения f_a: $X \to Y$ и f_b: $X \to Y$ и непрерывно зависящее от параметра t в том смысле, что, каковы бы ни были $\xi \in X$, $\tau \in [a, b] \equiv I$ и окрестность $Of_\tau\xi$ точки $f_\tau\xi \in Y$, найдется такая окрестность $O\xi$ точки $\xi \in X$ и такая окрестность $O\tau \subseteq I$ точки τ, что для всех $x \in O\xi$ и $t \in O\tau$ будем иметь

$$f_t x \in Of_\tau\xi.$$

Очевидно, возможность связать два заданных отображения f_a и f_b семейством отображений f_t, в указанном смысле непрерывно зависящих от параметра t, в точности эквивалентна тому, что отображения f_a и f_b гомотопны между собою. Рассматривая параметр t как время, говорят, что отображение f_a непрерывно переходит или непрерывно деформируется в течение промежутка времени $a \leqslant t \leqslant b$ в отображение f_b, пробегая при этом через всю (упорядоченную по t) совокупность отображений f_t. При этом (упорядоченную по t) совокупность отображений f_t, $a \leqslant t \leqslant b$, часто называют деформацией отображения f_a в отображение f_b. Если естественный порядок на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ заменить на обратный, получим деформацию отображения f_b в отображение f_a — совершенно все равно, сказать ли, что отображения f_a и f_b гомотопны между собою или что одно из этих отображений (все равно, какое) допускает деформацию («может быть деформировано») в другое.

Замечание 1. Иногда называют само отображение f: $X \times I \to Y$ гомотопией между отображениями f_a: $X \to Y$ и f_b: $X \to Y$.

Из самого определения гомотопии следует, что отношение гомотопии между двумя отображениями f_0 и f_1 симметрично. Отношение гомотопии транзитивно. В самом деле, пусть f_0, f_1, f_2 суть три отображения пространства X в пространство Y, причем даны гомотопии f': $X \times I_1 \to Y$, f'': $X \times I_2 \to Y$ соответственно между f_0, f_1 и между f_1, f_2, где $I_1 = [0 \leqslant t \leqslant 1]$, $I_2 = [1 \leqslant t \leqslant 2]$. Тогда, полагая $I = [0 \leqslant t \leqslant 2]$, получим гомотопию f: $X \times I \to Y$ между f_0 и f_2, считая $f(x, t) = f'(x, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $f(x, t) = f''(x, t)$ при $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Наконец, отношение гомотопии рефлексивно: каждое отображение f гомотопно самому себе: достаточно для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, положить $f(x, t) = fx$, чтобы получить искомую гомотопию (тождественную деформацию).

Итак, отношение гомотопии порождает разбиение множества $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y на классы гомотопных между собой отображений, или на гомотопические классы (Брауэр [3]).

В дальнейшем пространство Y будет метрическим пространством, и притом весьма простой структуры (в большинстве случаев просто n-мерной сферой или n-мерным замкнутым симплексом), а отображение $f(x, t)$ будет равномерно непрерывным по t в том смысле, что ко всякому $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t' - t''| < \delta$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\rho(f(x, t'), f(x, t'')) < \varepsilon$. В этом случае говорят о равномерной гомотопии.

Пример 1. Следующий пример, при всей своей простоте, выражает факт первостепенного значения.

Пусть f_0 и f_1 — два непрерывных отображения пространства X в сферу S^n, обладающих тем свойством, что ни для какой точки $x \in X$ точки f_0x и f_1x не являются диаметрально противоположными на сфере S^n. Тогда отображения f_0 и f_1 гомотопны между собою.

В самом деле, при произвольном $x \in X$ точки f_0x и f_1x, не будучи диаметрально противоположными, однозначно определяют связывающую их в S^n кратчайшую дугу большого круга (направленную от f_0x к f_1x). Обозначая при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, через f_tx точку, делящую эту (направленную) дугу в отношении $t:(1-t)$, получаем искомую деформацию отображения f_0 в отображение f_1. (Деформация эта, говоря наглядно, состоит в том, что мы заставляем в течение отрезка времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ всякую точку f_0x равномерно скользить по дуге, связывающей f_0x с f_1x, в точку f_1x.)

Совершенно аналогичен предыдущему, но еще проще

Пример 2. Пусть f_0 и f_1 — два непрерывных отображения пространства X в границу n-мерного куба Q^n, причем для любой точки $x \in X$ имеется грань куба, содержащая обе точки f_0x и f_1x. Тогда отображения f_0 и f_1 гомотопны между собою.

В самом деле, из наших предположений следует, что при любом $x \in X$ точки f_0x и f_1x являются концами (единственного) прямолинейного отрезка $\Delta(x)$, лежащего в границе куба Q^n. Обозначая снова при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, через f_tx точку отрезка $\Delta(x)$, делящую его в отношении $t:(1-t)$, получаем деформацию f_t отображения f_0 в отображение f_1.

Этот пример понадобится нам при доказательстве так называемой теоремы «о перегородках» (гл. 5, § 8).

Очевидно, куб Q^n можно здесь заменить любым другим выпуклым многогранником.

В качестве первого приложения понятия гомотопии введем понятие существенного отображения пространства X на сферу S^n.

Прежде всего, назовем нуль-отображением (или «постоянным» отображением пространства X в сферу S^n) отображение пространства X на одну какую-нибудь точку $y_0 \in S^n$. Очевидно, всякие два нуль-отображения $f_0\colon X \to S^n$ и $f_1\colon X \to S^n$ гомотопны между собою; если $f_0X = y_0 \in S^n$, $f_1X = y_1 \in S^n$, то, взяв дугу $D_{0,1}$ большого круга, соединяющую точки y_0 и y_1 в S^n

(и направленную от y_0 к y_1), и обозначив для любой точки x через $f_t x$ точку, делящую дугу $D_{0,1}$ в отношении $t:(1-t)$, получим искомую деформацию отображения f_0 в f_1.

Определение 2. Непрерывное отображение f пространства X в сферу S^n называется *несущественным*, если оно гомотопно нуль-отображению. В противном случае отображение f называется *существенным*.

Заметим: если при отображении $f\colon X \to S^n$ хотя бы одна точка $y_0 \in S^n$ «остается непокрытой» (т. е. $y_0 \in S^n \setminus fX$), то отображение f несущественно. В самом деле, обозначим через y_1 точку, диаметрально противоположную точке y_0; тогда через каждую точку $y \in S^n$ проходит единственная дуга меридиана, т. е. дуга $\overset{\curvearrowright}{y_0, y, y_1}$ большого круга. Для любой точки $x \in X$ обозначим (при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$) через $f_t x$ ту точку дуги $\overset{\curvearrowright}{fx, y_1}$ меридиана $\overset{\curvearrowright}{y_0, f_x, y_1}$, которая делит дугу $\overset{\curvearrowright}{fx, y_1}$ в отношении $t:(1-t)$. Этим определяется деформация отображения $f \equiv f_0$ в отображение f_1, ставящее в соответствие всем точкам $x \in X$ точку $y_1 \in S^n$.

Итак, всякое существенное отображение пространства X в сферу S^n есть отображение на всю эту сферу.

Очевидно, всякое отображение $f\colon X \to S^n$, гомотопное несущественному отображению, само несущественно — все несущественные отображения $f\colon X \to S^n$ образуют один гомотопический класс.

Отметим два утверждения о существенных отображениях на сферу, которые нам понадобятся в гл. 8.

Предложение 1. *Если при отображении $f\colon X \to S^n$ подпространство $A \subset X$ существенно отображается на сферу S^n, то отображение $f\colon X \to S^n$ существенно.*

Доказательство. Предположим, что отображение $f\colon X \to S^n$ несущественно. Следовательно, существует гомотопия $\varphi\colon X \times I \to S^n$, связывающая отображение f с нуль-отображением. Тогда гомотопия $\varphi|_{A \times I}\colon A \times I \to S^n$ связывает отображение $f|_A$ с нуль-отображением, что противоречит существенности отображения $f\colon A \to S^n$. Предположение 1 доказано.

Предложение 2. *Шар $\bar{O}^n$ нельзя существенно отобразить на сферу S^{n-1}.*

Доказательство. Пусть $f\colon \bar{O}^n \to S^{n-1}$ — какое-ибудь непрерывное отображение. Покажем, что оно гомотопно постоянному отображению. Считаем, что радиус $\bar{O}^n$ равен 1, а центр лежит в начале координат. Точки шара $\bar{O}^n$ отождествляем с их радиус-векторами. Тогда для любой точки $x \in \bar{O}^n$ и любого числа t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, однозначно определена точка $tx \in \bar{O}^n$ (точка tx делит отрезок $[0, x]$ в отношении t).

Рассмотрим теперь отображение φ: $\bar{U}^n \times I \to S^{n-1}$, задаваемое равенством $\varphi(x, t) = f(tx)$. Отображение φ, очевидно, непрерывно. На верхнем основании цилиндра $\bar{U}^n \times I$ отображение φ совпадает с f, а нижнее основание цилиндра $\bar{U}^n \times I$ отображение φ переводит в точку $f(0) \in S^{n-1}$. Таким образом, отображение φ: $\bar{U}^n \times I \to S^{n-1}$ осуществляет гомотопию между отображением f и некоторым постоянным отображением, ч. и т. д.

Важнейшим применением связанных гомотопий являются для нас существенные отображения на замкнутый симплекс T^n с границей S^{n-1}. Пусть дано непрерывное отображение f: $X \to T^n$ нормального пространства X. Пусть $\Phi = f^{-1} S^{n-1}$.

Очевидно, отображение f: $X \to T^n$ тогда и только тогда несущественно, когда посредством гомотопии, связанной множеством Φ, отображение f можно перевести в некоторое непрерывное отображение f_1: $X \to S^{n-1}$.

Таким образом, в соответствии с геометрической обстановкой существенные отображения f: $X \to S^n$ в сферу и существенные отображения f: $X \to T^n$ в (замкнутый) симплекс (или шар) отличаются между собою в основном тем, что в первом случае речь идет о «свободных», а во втором — о связанных гомотопиях.

§ 2. Лемма о грибе

Нижеследующая лемма имеет многочисленные применения во всех вопросах, связанных с понятием гомотопии. Для частного случая полиэдров она была доказана Хопфом (H. Hopf) *), в более общих предположениях — Борсуком (K. Borsuk) [2] и, наконец, в полной общности — Даукером (C. H. Dowker) [2]. Мы будем называть эту лемму леммой о грибе.

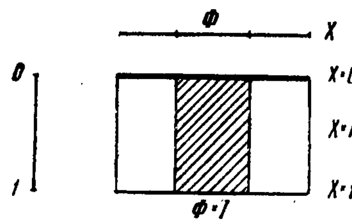

Рис. 4.

Лемма о грибе. *Пусть X — нормальное пространство, Φ — замкнутое множество в X, f_0 и f_1 — два гомотопных между собою отображения множества Φ в сферу S^n. Если отображение f_0 может быть продолжено в непрерывное отображение F_0 всего пространства X в S^n, то и f_1 может быть продолжено в отображение F_1 всего X в S^n, и притом так, что отображения F_0 и F_1 гомотопны между собою.*

Изобразим наглядно стоящую перед нами задачу. На рис. 4 изображено все произведение $X \times I$ («большой» цилиндр, здесь $I = [0 \leqslant t \leqslant 1]$, при этом $(X \times 0)$ нарисовано в виде верхнего,

*) См. Александров—Хопф [1], гл. 13, § 1, лемма 1.

а $(X \times 1)$ в виде нижнего основания). В этом «большом» цилиндре содержится «малый» цилиндр — произведение $\Phi \times I$. Отображение f_0: $\Phi \to S^n$ записываем в виде F: $(\Phi \times 0) \to S^n$, причем F: $(X \times 0) \to S^n$, где $F(x, 0) = F_0(x)$ есть (по предположению существующее) продолжение отображения f_0: $\Phi \to S^n$ на все X. С другой стороны, f_1: $X \to S^n$, записываем в виде $f_1 x \equiv F(x, 1)$ для всех $x \in \Phi$. Но f_0: $\Phi \to S^n$ и f_1: $\Phi \to S^n$ связаны между собою гомотопией f: $\Phi \times I \to S^n$. Таким образом, на «грибе» $(X \times 0) \cup (\Phi \times I)$ определено отображение

$$F\colon\ (X \times 0) \cup (\Phi \times I) \to S^n.$$

Задача заключается в том, чтобы, во-первых, продолжить отображение F: $(\Phi \times 1) \to S^n$ до отображения F: $(X \times 1) \to S^n$ и после этого распространить отображение F: $(X \times 0) \cup (\Phi \times I) \cup (X \times 1) \to S^n$ на весь большой цилиндр.

Переходим к решению поставленной задачи.

Сделаем прежде всего следующую редукцию этой задачи к ее частному случаю: предположим, что лемма о грибе доказана для любых отображений f_0: $\Phi \to S^n$ и f_1: $\Phi \to S^n$, отличающихся друг от друга меньше чем на некоторое фиксированное $\varepsilon > 0$, т. е. для отображений f_0 и f_1, для которых

$$\rho(f_0, f_1) = \sup_{x \in \Phi} \rho(f_0 x, f_1 x) < \varepsilon.$$

Сделав это предположение, докажем лемму о грибе в общем случае. Для этого вспомним, что данная нам гомотопия f_t между отображениями f_0 и f_1 (на Φ) есть гомотопия, равномерная относительно t; поэтому для данного нам $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|t' - t''| < \delta$ для всех $x \in X$ будет

$$\rho(f_{t'} x, f_{t''} x) < \varepsilon.$$

Разобьем отрезок $I = [0, 1]$ на отрезки $I_k = [a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, s-1$, $a_0 = 0$, $a_s = 1$ длины $< \delta$. Тогда f_{a_k} и $f_{a_{k+1}}$, во-первых, гомотопны между собою, а во-вторых, отличаются друг от друга меньше чем на ε; поэтому (в силу предположенного доказанным частного случая леммы) из того, что отображение f_{a_k} может быть продолжено в отображение F_{a_k}: $X \to S^n$, следует, что $f_{a_{k+1}}$ может быть продолжено в отображение $F_{a_{k+1}}$: $X \to S^n$, гомотопное отображению F_{a_k}. Давая k последовательно значения $0, 1, \ldots, s-1$ и помня, что $a_0 = 0$, $a_s = 1$, получим последовательно гомотопные между собою (и начальному отображению $F_0 = F_{a_0}$) отображения $F_{a_1}, \ldots, F_{a_s} \equiv F_1$, где F_{a_k} есть продолжение f_{a_k}, и, значит, F_1 есть искомое продолжение отображения f_1.

Итак, при доказательстве леммы о грибе мы вправе предположить, что $\rho(f_0, f_1) < \varepsilon$ при некотором произвольно заданном $\varepsilon > 0$.

Приступаем к доказательству в этом частном случае.

Берем сферу $S^n \subset R^{n+1}$ радиуса 1 и фиксируем раз навсегда некоторое (произвольное) положительное $\varepsilon < 1$.

Рассматривая отображение f_1 множества Φ в S^n как отображение этого множества в куб Q^{n+1}, продолжаем отображение f_1 по обобщенной лемме Урысона в отображение g_1: $X \to Q^{n+1}$, так что

(1) $$g_1 x = f_1 x, \quad \text{если} \quad x \in \Phi.$$

Определяем открытое в X множество

(2) $$U = \{x \mid \rho(F_0 x, g_1 x) < \varepsilon\}.$$

Так как на Φ имеем $g_1 x = f_1 x$, $\sup \rho(f_1 x, f_0 x) < \varepsilon$, то

$$\Phi \subseteq U,$$

т. е. U есть окрестность (относительно X) множества Φ. Далее, так как $F_0 U \subseteq F_0 X \subseteq S^n$, то по самому определению множества U имеем

(3) $$g_1 U \subseteq O(S^n, \varepsilon).$$

Определяем теперь отображение h_1: $X \times I \to Q^{n+1}$ следующим образом.

Точка $h_1(x, t)$ делит отрезок $\overrightarrow{[F_0 x, g_1 x]}$ в отношении $t : (1 - t)$. Из этого определения следует, что h_1: $X \times I \to Q^{n+1}$ осуществляет гомотопию между отображениями F_0: $X \to Q^{n+1}$ и g_1: $X \to Q^{n+1}$.

Утверждаем, что

(4) $$h_1(U \times I) \subseteq O(S^n, \varepsilon).$$

В самом деле, пусть $(x, t) \in U \times I$; тогда $x \in U$ и, значит, в силу (3)

$$g_1 x \in O(S^n, \varepsilon).$$

Так как $F_0 x \in S^n$ (даже для любого $x \in X$), то весь отрезок $[F_0 x, g_1 x]$ лежит в $O(S^n, \varepsilon)$; но для любого t и $x \in U$ точка $h_1(x, t)$ есть точка этого отрезка; итак, включение (4) доказано.

Теперь по большой лемме Урысона определяем на всем X непрерывную функцию s: $X \to [0, 1]$ так, чтобы $s(X \setminus U) = 0$, $s\Phi = 1$. Полагаем для всех $(x, t) \in X \times I$, т. е. во всем большом цилиндре,

(5) $$h_2(x, t) = h_1(x, s(x)\, t).$$

Доказываем последовательно утверждения.

Во-первых,

(6) $$h_2(X \times I) \subseteq O(S^n, \varepsilon).$$

В самом деле, если $x \in U$, то имеем (опираясь на (4))

$$h_2(x, t) = h_1(x, s(x)t) \in O(S^n, \varepsilon);$$

если же $x \in X \setminus U$, то (вспоминая определение функции s и отображения h_1) имеем даже

$$h_2(x, t) = h_1(x, 0) = F_0(x) \in S^n.$$

Итак, включение (6) доказано.

Во-вторых, $h_2(x, t)$ равномерно непрерывно по t (это непосредственно вытекает из определения h_2 и из того, что h_1 равномерно непрерывно по t).

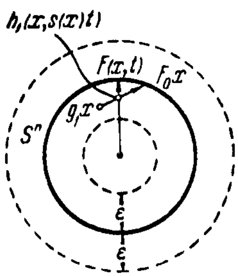

Рис. 5.

В-третьих, для всех $x \in X$ имеем

(7) $$h_2(x, 0) = h_1(x, 0) = F_0(x) \in S^n.$$

Для всех $x \in \Phi$ имеем $s(x) = 1$ и, следовательно,

$$h_2(x, 1) = h_1(x, s(x)1) = h_1(x, 1) = g_1 x,$$

т. е. для всех $x \in \Phi$ имеем

(8) $$h_2(x, 1) = f_1 x.$$

Наконец, так как $h_2(X \times I) \subseteq O(S^n, \varepsilon)$ и ε меньше радиуса сферы S^n, то центр сферы S^n не содержится в $h_2(X \times I)$. Поэтому на отображение h_2 можно наложить центральную проекцию π из центра сферы S^n на эту сферу. Таким образом, получается отображение

(9) $$F(x, t) = \pi h_2(x, t) \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in X \times I$$

всего большого цилиндра $X \times I$ в сферу S^n (рис. 5).

Из (7) и (8) следует, что $h_2(x, t) \in S^n$ при $t = 0$ и всех $x \in X$, и при $t = 1$ и всех $x \in \Phi$; значит, проекция π оставляет точку $h_2(x, t)$ на месте, так что

(9′) $$F(x, 1) = h_2(x, 1) = f_1 x \quad \text{для} \quad x \in \Phi,$$

(10) $$F(x, 0) = h_2(x, 0) = F_0(x, 0) \text{ для } x \in X.$$

Из (9′) следует, что, полагая $F_1 x = F(x, 1)$, получим отображение $F_1\colon X \to S^n$, являющееся продолжением отображения $f_1\colon \Phi \to S^n$.

Из (10) следует, что $F\colon X \times I \to S^n$ осуществляет искомую гомотопию *) между найденным продолжением $F_1\colon X \to S^n$ ото-

*) Равномерную, так как отображение π равномерно непрерывно.

бражения f_1: $\Phi \to S^n$ и заданным с самого начала продолжением F_0: $X \to S^n$ отображения f_0: $\Phi \to S^n$.

Лемма о грибе полностью доказана.

Непосредственным ее приложением является следующее

Предложение 1. *Пусть $f \equiv f_1$ — существенное отображение нормального пространства X на замкнутый шар T^n с границей S^{n-1} и $\Phi = f^{-1}S^{n-1}$. Пусть f_0 есть непрерывное отображение пространства X в T^n, при котором $f_0^{-1}S^{n-1} \supseteq \Phi$. Если отображения $f|_\Phi$ и $f_0|_\Phi$ являются гомотопными между собою отображениями множества Φ в сферу S^{n-1}, то f_0: $X \to T^n$ есть существенное отображение на T^n.*

В самом деле, если бы f_0: $X \to T^n$ было несущественным, то отображение $f_0|_\Phi$ можно было бы продолжить в отображение F_0: $X \to S^{n-1}$. Но тогда в силу леммы о грибе отображение $f_1|_\Phi$ также можно было бы продолжить в отображение F_1: $X \to S^{n-1}$ вопреки существенности отображения f_1.

Предложение 2. *Если отображение f: $X \to T^n$ нормального пространства X на n-мерный симплекс T^n существенно, то тогда для любой грани T^k симплекса T^n отображение f: $f^{-1}T^k \to T^k$ также существенно.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Рассмотрим какую-нибудь $(n-1)$-мерную грань T^{n-1} симплекса T^n и предположим, что отображение $g = f : (F \equiv f^{-1}T^{n-1}) \to T^{n-1}$ несущественно.

Ограничивающие T^n и T^{n-1} сферы обозначим соответственно через S^{n-1} и S^{n-2}.

Положим $Q^{n-1} = (S^{n-1} \setminus T^{n-1}) \cup S^{n-2}$. По предположению существует непрерывное отображение φ': $F \to S^{n-2}$, совпадающее с g на $g^{-1}S^{n-2}$. Отображение φ: $f^{-1}S^{n-1} \to Q^{n-1}$, совпадающее с f на $f^{-1}Q^{n-1}$ и с φ' на F, непрерывно (см. гл. 1, § 1, предложение 10). В силу примера 2 из § 1 Прибавления к гл. 3 отображения

$$\varphi:\ f^{-1}S^{n-1} \to Q^{n-1} \subseteq S^{n-1} \quad \text{и} \quad f:\ f^{-1}S^{n-1} \to S^{n-1}$$

гомотопны. Так как множество Q^{n-1} гомеоморфно $(n-1)$-мерному кубу, то (по предложению 7 из § 5 гл. 1) отображение φ можно продолжить в отображение ψ: $X \to Q^{n-1}$. Из предложения 1 следует, что отображение ψ: $X \to Q^{n-1} \subseteq T^n$ должно быть существенным, а это, очевидно, не так. Полученное противоречие доказывает, что отображение f: $f^{-1}T^{n-1} \to T^{n-1}$ для любой $(n-1)$-мерной грани T^{n-1} симплекса T^n существенно. Так как любая $(k-1)$-мерная грань T^n является гранью k-мерной грани T^n, то очевидной индукцией получаем нужное нам утверждение. Предложение доказано.

Глава четвертая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. I

Введение

1. В нашем понимании общая теория размерности в основном слагается из свойств инварианта $\dim X$, не предполагающих ни метризуемости пространства X, ни наличия в нем счетной базы; в большинстве случаев речь идет о свойствах, имеющих место для любых нормальных пространств или для бикомпактов. Эти свойства излагаются в гл. 4 и 5. В соответствии с этим в этих двух главах мы понимаем, если не сказано противное, под пространством всегда нормальное пространство. Спешим, однако, заметить, что §§ 4 и 5 и отчасти § 8 настоящей главы посвящены в основном теоремам, касающимся пространств со счетной базой. В этих параграфах доказывается прежде всего теорема Нёбелинга — Понтрягина о возможности топологического включения всякого n-мерного (в смысле $\dim X = n$) пространства со счетной базой в эвклидово пространство R^{2n+1} (см. § 4), ее усиления и следствия (§ 5) и формула Урысона

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X \tag{1}$$

(§§ 5 и 8).

2. Но возвратимся к общей теории, касающейся произвольных нормальных пространств. Среди предложений, составляющих содержание этой теории, назовем прежде всего так называемую теорему об ω-отображениях. Формулировке этой теоремы и определению ω-отображений предпошлем небольшое вступление, которое начнем издалека.

Пусть X — множество, лежащее в метрическом пространстве R (в дальнейшем R будет или эвклидовым пространством R^n, или гильбертовым пространством R^∞). Непрерывное отображение f множества X на множество Y, лежащее в том же пространстве R, назовем *ε-сдвигом*, если при данном положительном ε имеем для каждой точки $x \in X$ неравенство

$$\rho(x, fx) < \varepsilon.$$

Понятие ε-сдвига было фактически введено Брауэром, доказавшим в 1911 г. в своей гениальной работе [1], что единичный куб Q^n нельзя при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ отобразить посредством ε-сдвига ни на какое лежащее в кубе Q^n нигде не плотное в нем множество (общая форма этого предложения будет в § 3 доказана под названием «брауэровского принципа инвариантности»).

Назовем теперь отображение f метрического пространства X на какое-нибудь множество Y *ε-отображением*, если прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ при этом отображении имеет диаметр $< \varepsilon$.

В дальнейшем мы будем рассматривать, не оговаривая этого особо, лишь непрерывные ε-отображения, так что множество Y в определении ε-отображений всегда будет топологическим (даже метрическим) пространством. При помощи очевидного применения аксиомы треугольника мы сразу убеждаемся в том, что каждый ε-сдвиг является 3ε-отображением (даже $(2\varepsilon + \delta)$-отображением при любом $\delta > 0$). Интуитивный смысл ε-сдвигов и ε-отображений заключается в том, что ε-сдвиг при «малом» ε «мало» отличается от тождественного отображения, а ε-отображение — от взаимно однозначного отображения. В частности, это означает, что ε-отображение $f: X \to Y$ компакта X на компакт Y «мало» отличается от гомеоморфизма.

Следующая теорема, известная под названием теоремы об ε-отображениях, была началом нового направления в теории размерности, которое можно назвать «геометрическим»:

Теорема об ε-отображениях (Александров, 1926, [5]). *Всякий n-мерный компакт X при любом $\varepsilon > 0$ допускает ε-отображение на некоторый n-мерный полиэдр; с другой стороны, имеется такое $\varepsilon = \varepsilon_X$, что не возможно никакое ε-отображение данного n-мерного компакта X на полиэдр (вообще в компакт) размерности $< n$. Если при этом компакт X дан как множество, лежащее в эвклидовом или гильбертовом пространстве, то в предыдущей формулировке ε-отображения могут быть заменены ε-сдвигами — теорема «об ε-отображениях» переходит в теорему «об ε-сдвигах».*

Итак, размерность компакта X может быть определена как наименьшее такое целое число $n \geqslant 0$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение, соответственно ε-сдвиг, на n-мерный полиэдр; если такого n не существует, то $\dim X = \infty$.

Существенно заметить, что для некомпактных метрических пространств (даже являющихся ограниченными множествами трехмерного эвклидова пространства) это определение теряет силу: в гл. 8 читатель найдет построенный К. Ситниковым пример ограниченного множества $X \subset R^3$, для которого $\dim X = 2$

и которое тем не менее при любом $\varepsilon < 0$ может быть посредством ε-сдвига переведено в одномерный полиэдр.

Заметим, что если $f: X \to Y$ есть ε-отображение компакта X на компакт Y, то каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность Oy, для которой

$$\operatorname{diam} f^{-1}Oy < \varepsilon.$$

Мы сейчас увидим, что это следует из замкнутости всякого непрерывного отображения компакта (в любое хаусдорфово Y) и из предложения 11 § 1 гл. 1. В самом деле, пусть дана точка $y_0 \in Y$; так как $\operatorname{diam} f^{-1}y_0 < \varepsilon$, то при достаточно малом $\delta > 0$ окрестность $O(f^{-1}y_0, \delta)$ все еще имеет диаметр $<\varepsilon$; по предложению 11 из § 1 гл. 1 существует такая окрестность $Oy_0 \subseteq Y$, что для любой точки $y \in Oy_0$ имеем $f^{-1}y \in O(f^{-1}y_0, \delta)$, значит, $f^{-1}Oy_0 \subseteq O(f^{-1}y_0, \delta)$ и потому $\operatorname{diam} f^{-1}y_0 < \varepsilon$.

Теперь ясно, что следующее общее определение является топологическим аналогом определения ε-отображения компакта:

Определение ω-отображения. Пусть ω — открытое покрытие топологического пространства X и $f: X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f называется *ω-отображением*, если всякая точка $y \in Y$ имеет окрестность Oy, прообраз $f^{-1}Oy$ которой содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω *).

Докажем следующее элементарное

Предложение 1. *Для того чтобы компакт X при всяком $\varepsilon > 0$ допускал ε-отображение в (на) компакт Y, принадлежащий данному классу $\mathfrak{R}$ (например, в n-мерный полиэдр), необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного открытого покрытия ω компакта X существовало ω-отображение $f: X \to Y$ в (на) компакт Y этого класса.*

В самом деле, пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение $f: X \to Y$ в (на) компакт $Y \in \mathfrak{R}$. Докажем, что тогда для каждого конечного открытого покрытия ω компакта X существует ω-отображение в (на) компакт $Y \in \mathfrak{R}$. Пусть ε — лебегово число данного открытого покрытия ω. Берем такое $Y \in \mathfrak{R}$, что существует ε-отображение $f: X \to Y$, и для каждого $y \in Y$ берем окрестность Oy так, чтобы $\operatorname{diam} f^{-1}Oy < \varepsilon$; тогда $f^{-1}Oy$ содержится в некотором элементе покрытия ω — первое утверждение предложения 1 доказано.

Пусть теперь при любом конечном открытом ω существует ω-отображение $f: X \to Y$, где $Y \in \mathfrak{R}$; берем произвольное $\varepsilon > 0$ и какое-нибудь открытое конечное покрытие ω компакта X, элементы которого имеют диаметры $<\varepsilon$. Тогда всякое ω-отображение $f: X \to Y$ является и ε-отображением; предложение 1 доказано.

Из предложения 1 вытекает, что теорема об ε-отображениях для компактов является частным случаем следующей общей теоремы:

---

*) Важно с самого начала сделать следующее замечание: если $Y_0 \subset Y$ и $f: X \to Y_0$ есть ω-отображение пространства X на Y_0, то оно может и не быть ω-отображением пространства X в Y.

Теорема об ω-отображениях. *Если* $\dim X = n$, *то для всякого конечного открытого покрытия* ω *существует* ω-*отображение пространства* X *на* n-*мерный полиэдр; с другой стороны, имеется такое конечное открытое покрытие* ω, *что не существует никакого* ω-*отображения* $f: X \to P$ *в полиэдр* P *размерности* $< n$.

Другими словами, неравенство $\dim X \leqslant n$ означает, что для любого конечного открытого покрытия ω существует ω-отображение $f: X \to P$ в (или, что равносильно, на) полиэдр P размерности $\leqslant n$. Так как $\dim X = \infty$ есть отрицание условия $\dim X \leqslant n$ для любого n, то равенство $\dim X = \infty$ означает, что для любого n имеется такое покрытие ω_n, для которого не существует никакого ω_n-отображения пространства X в полиэдр размерности $\leqslant n$.

Теорема об ω-отображениях доказана в § 3 при помощи результатов, изложенных в § 1 *). Эти результаты позволяют в § 2 доказать и так называемые аппроксимационные теоремы для отображений $f: X \to R^n$, простейшие из которых применяются в § 4 к доказательству теоремы Нёбелинга — Понтрягина, а более сложные находят многочисленные дальнейшие приложения.

В основе поименованных теорем и всего вообще принятого в этой книге геометрического направления теории размерности лежит понятие нерва системы множеств (см. гл. 3, § 2, п. 2) — в частности, полиэдры, являющиеся образами рассматриваемых пространств при их ω- и ε-отображениях, оказываются телами нервов соответствующих покрытий этих пространств (см. § 3, п. 1, теорема 5).

3. Теорема Нёбелинга — Понтрягина имеет большое познавательное значение: эта теорема дает топологическую характеризацию множеств, лежащих в эвклидовых пространствах:

Для того чтобы топологическое пространство X *было гомеоморфно множеству, лежащему в каком-нибудь эвклидовом пространстве* R^n, *необходимо и достаточно, чтобы* X *было регулярным* **) *пространством, имеющим счетную базу и конечную размерность.*

---

*) Переход от исходной теоремы об ε-отображениях к доказательству общей теоремы об ω-отображениях был осуществлен в работах Александрова [17], [20] на основе результата Куратовского, который, введя в работе [3] понятие так называемого барицентрического отображения, доказал возможность ω-отображения любого нормального пространства в тело нерва произвольного его покрытия. Барицентрическим и более общим каноническим отображениям посвящен § 1, составляющий фундамент всей главы.

**) Или — что в данном случае равносильно — нормальным.

Принадлежащее В. Гуревичу (W. Hurewicz) усиление теоремы Нёбелинга — Понтрягина позволяет нам, в частности, доказать в § 5 неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ для всех пространств *) со счетной базой и редуцировать таким образом доказательство основного урысоновского тождества (1) к неравенствам $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{ind} X$, которые и доказываются в § 8 **).

4. Теорема об ε-отображениях (и обобщающая ее теорема об ω-отображениях) является исторически первой реализацией следующей общей точки зрения, плодотворность которой подтверждена дальнейшим развитием теоретико-множественной топологии: свойства общих теоретико-множественных образований (начиная с компактов и переходя к значительно более общим топологическим пространствам) возможно и целесообразно сводить к наглядным геометрическим свойствам элементарных геометрических фигур (полиэдров, в частности симплексов и сфер) посредством тех или иных более или менее простых и наглядных непрерывных отображений.

Следующей иллюстрацией этой общей точки зрения является (доказанная в § 6) вторая основная теорема, а именно:

Теорема о существенных отображениях для компактов (Александров, [11], [12] 1930) ***). *Если $\dim X = n$, то пространство X можно существенно отобразить на n-мерный замкнутый симплекс (и на любой замкнутый симплекс размерности $\leqslant n$ ****); в то же время при $m > n$ всякое отображение n-мерного пространства X на m-мерный симплекс несущественно.*

Другими словами, неравенство $\dim X \geqslant n$ эквивалентно возможности существенного отображения пространства X на замкнутый n-мерный симплекс; равенство $\dim X = \infty$ эквивалентно

---

*) Напоминаем, что рассматриваются лишь нормальные пространства.

**) Неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$, доказанное для бикомпактов Александровым, 1940, [18], доказывается в § 8 для финально компактных (Морита [1], Смирнов [2]) и даже для сильно паракомпактных пространств (Морита [2]); этим достигнут, по-видимому, «естественный предел общности», так как для паракомпактов и даже для метризуемых пространств X это неравенство может уже не выполняться (Рой [1]). В § 8 доказывается также неравенство Веденисова $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ для нормальных X.

***) Теорема о существенных отображениях, первоначально доказанная (как и теорема об ω-отображениях) для компактов, последовательно освобождалась от излишних ограничений А. А. Марковым и Н. Б. Веденисовым, пока не была доказана во всей общности Александровым [20] и Хемингсеном [1]. Впоследствии она перефразировалась (например, в книге Гуревича — Волмэна [1]) без каких-либо изменений в ее содержании, приобретая, однако, видимость нового результата.

****) См. Прибавление к гл. 3, § 2, предложение 2.

возможности существенного отображения на симплекс любого числа измерений *).

Из только что сказанного вытекает, что теорема об ω-отображениях характеризует пространства размерности $\leqslant n$, а теорема о существенных отображениях — пространства размерности $\geqslant n$.

5. В качестве третьей теоремы общей теории размерности в этой главе (§ 7) будет доказана

Теорема суммы (Менгер — Урысон) **). *Если пространство X есть сумма счетного (или конечного) числа своих замкнутых множеств, каждое из которых имеет размерность $\leqslant n$, то и само пространство X имеет размерность $\leqslant n$.*

6. В конце § 3 вводится понятие нульмерного отображения $f: X \to Y$ (т. е. такого отображения, при котором все точки $y \in Y$ имеют нульмерные прообразы $f^{-1}y$).

Оказывается, имеет место следующая характеристика размерности компактов (Гуревич [4]):

Для компакта X размерность $\dim X$ есть наименьшее целое число n, для которого существует нульмерное непрерывное отображение $f: X \to Q^n$ компакта X в n-мерный куб Q^n ***).

Если считать известным доказываемое в § 8 неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ для компактов X, то доказать эту теорему можно уже в § 3. Она также является подтверждением тезиса, сформулированного в начале п. 4.

7. К числу основных теорем о пространствах со счетной базой, доказываемых в § 8, мы можем присоединить еще следующие две:

1. Теорему Менгера — Урысона, утверждающую, что неравенство $\dim X \leqslant n$ эквивалентно возможности представить пространство X в виде суммы $n+1$ нульмерных подпространств.

2. Теорему Гуревича — Нёбелинга об «универсальном n-мерном компакте», представляющую собой (вероятно, окончательное) усиление теоремы Нёбелинга — Понтрягина, а именно:

В $(2n+1)$-мерном кубе Q^{2n+1} существует n-мерный компакт, содержащий топологический образ всякого n-мерного пространства со счетной базой.

---

*) Разумеется, в этой формулировке замкнутый симплекс можно заменить любым гомеоморфным ему пространством, в частности любым замкнутым выпуклым телом — шаром, кубом и т. п. (см. гл. 3, § 5).

**) Теорема суммы была первоначально доказана Урысоном и Менгером в 1921—1922 гг. для компактов и σ-компактных пространств (пространство называется σ-компактным, если оно есть объединение счетного числа подпространств, каждое из которых является компактом). Для любых пространств со счетной базой теорема суммы была в 1925—1926 гг. доказана Гуревичем и Тумаркиным; в общем случае она доказана Чехом [3] в 1933 г., Уоллесом [1] в 1945 г. и Хеммингсеном [1] в 1946 г.

***) Дальнейшее развитие эта теорема найдет в § 3 гл. 6, посвященном размерности метрических пространств.

В пятой главе эта последняя теорема будет обобщена для любых пространств данного веса τ (З а р е л у а [4], П а с ы н к о в [9]).

В § 9 доказывается теорема суммы для локально конечных систем: если данное пространство есть тело локально конечной системы замкнутых множеств размерности $\leqslant n$, то и $\dim X \leqslant n$.

Последние параграфы главы, т. е. §§ 10 и 11, посвящены двум результатам Даукера: в § 10 теорема об ω-отображениях обобщается на случай любого локально конечного покрытия ω; в § 11 доказывается, что из неравенства $\dim X \leqslant n$ вытекает возможность вписать во всякое локально конечное открытое покрытие пространства X (локально конечное открытое) покрытие кратности $\leqslant n+1$.

§ 1. Канонические и барицентрические отображения

В §§ 1—9 под покрытием пространства X всегда понимается (если не сказано противное) конечное открытое покрытие.

Пусть триангуляция $N = N_\omega$ есть геометрически реализованный в R^m нерв *) покрытия $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ пространства X. Через e_i обозначаем вершину нерва N, соответствующую элементу O_i покрытия ω.

Отображение f пространства X в полиэдр $\bar{N}$ называется *каноническим* (*по отношению к покрытию* ω), если прообраз $f^{-1}Oe_i$ каждой звезды Oe_i содержится в O_i. Очевидно, канонические отображения образуют частный случай ω-отображений. Наконец, мы скажем, что при отображении $f\colon X \to \bar{N}$ симплекс $T \in N$ покрыт существенно, если существенно отображение $f\colon f^{-1}\bar{T} \to \bar{T}$; при этом, как всегда, $\bar{T}$ есть замкнутый симплекс с тем же остовом, что и T. Основой всего принятого в этой книге подхода к теории размерности является следующая

Т е о р е м а 1 (теорема о канонических отображениях). *Пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное покрытие пространства X с нервом N, реализованным в виде триангуляции; можно найти такой подкомплекс N' нерва N и такое каноническое относительно ω отображение f. $X \to \bar{N}$, при котором образ fX есть полиэдр $\bar{N}' \subseteq \bar{N}$ и каждый главный симплекс* **) *комплекса N' покрыт существенно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Первый шаг.* Построение барицентрического отображения. Пусть N — какая-нибудь геометрическая реализация нерва ***) покрытия ω. Берем корректное покрытие

*) Определение нерва и его геометрической реализации см. гл. 3, § 2.

**) Симплекс комплекса N называется главным, если в N нет симплекса $T' > T$ (гл. 3, § 2).

***) Для дальнейших приложений существенно, что изложенное ниже построение барицентрического отображения годится для любой геометрической реализации нерва N, не предполагающей, что (открытые) симплексы геометрически реализованного нерва N непременно дизъюнктны.

$\omega' = \{O'_1, \ldots, O'_s\}$, комбинаторно вписанное в ω; для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ строим на X непрерывную функцию f_i, равную нулю на $X \setminus O'_i$ и положительную во всех точках $x \in O'_i$; если X — метрическое пространство, то всякое покрытие ω корректно, и мы полагаем просто $f_i(x) = \min\{1, \rho(x, X \setminus O_i)\}$. После того, как функции f_i определены, строим отображение f пространства X в полиэдр $\tilde{N}$, называемое барицентрическим. Для каждой точки $x \in X$ рассматриваем все содержащие ее элементы O'_i покрытия ω'; пусть это будут $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$. Тогда среди функций $f_i(x)$ только функции $f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}$ принимают в x положительные значения, а остальные равны в точке x нулю. Поэтому, помещая в вершины нерва $e_1, \ldots, e_s$ соответственно массы $f_1(x), \ldots, f_s(x)$, мы положительные массы поместим лишь в вершины $e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}$, соответствующие элементам $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$, содержащим точку x. Центр тяжести y этих масс, т. е. точка с барицентрическими координатами

$$\frac{f_{i_k}(x)}{\sum\limits_{j=0}^{r} f_{i_j}(x)} = \frac{f_{i_k}(x)}{\sum\limits_{i=1}^{s} f_i(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

в барицентрической координатной системе, состоящей из точек e_{i_k}, $k = 0, 1, \ldots, r$ (см. определение 2, § 1, гл. 3), есть точка (открытого) симплекса $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in N$ (этот симплекс существует, так как $O'_{i_0} \cap \ldots \cap O'_{i_r} \ni x$). Эту точку y мы и определяем в качестве точки $f(x)$ — образа точки x при отображении f. Итак, если $O'_{i_0}, \ldots$ $\ldots, O'_{i_r}$ — все элементы покрытия ω', содержащие точку x, то $f(x) \in |e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$. Так как функции $f_i(x)$ непрерывны, то и точка $f(x)$ непрерывно зависит от точки x, т. е. отображение $f\colon X \to \tilde{N}$ непрерывно.

Второй шаг. Теперь предполагаем, что нерв N реализован в качестве триангуляции.

Докажем включение

$$f^{-1}Oe_i \subseteq O_i.$$

Пусть $x \in f^{-1} Oe_i$ и T — единственный симплекс триангуляции N, содержащий точку fx. Тогда непременно $e_i < T$, значит, $f_i x \neq 0$, $x \in O'_i \subseteq O_i$. Включение $f^{-1}Oe_i \subseteq O'_i \subseteq O_i$ доказано.

Легко доказать и больше, именно равенство

$$f^{-1}Oe_i = O'_i. \tag{1}$$

В самом деле, если $fx \in T$, то среди функций f_i отличные от нуля значения в точке x принимают лишь $f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}$, что означает, что среди всех множеств O'_i все множества $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$

и только они содержат точку x. Другими словами, $f^{-1}T$ совпадает с множеством $E_{i_0 \ldots i_r}$ тех точек $x \in X$, каждая из которых принадлежит всем множествам $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$ и только этим множествам $O'_i \in \omega'$:

$$(2) \qquad f^{-1}|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| = (O'_{i_0} \cap \ldots \cap O'_{i_r}) \setminus \bigcup_{j \neq i_0, \ldots, i_r} O'_j = E_{i_0 \ldots i_r}.$$

Звезда Oe_i есть сумма дизъюнктных симплексов вида $|e_i e_{j_1} \ldots e_{j_r}|$, имеющих e_i в числе своих вершин (при $r = 0$ получаем самое вершину $e_i \in Oe_i$). Множество O'_i есть сумма дизъюнктных подмножеств вида $E_{ij_1 \ldots j_r}$ (при $r = 0$ получаем множество E_i, состоящее из тех точек x, которые принадлежат множеству O'_i и никакому другому $O'_j \in \omega'$). Разумеется, некоторые из слагаемых этой суммы могут оказаться пустыми. Но согласно равенству (2)

$$f^{-1}|e_i e_{j_1} \ldots e_{j_r}| = E_{ij_1 \ldots j_r};$$

суммируя (при данном i) все равенства этого вида (по всевозможным $j_1, \ldots, j_r$), получаем слева $f^{-1}Oe_i$, а справа O'_i, т. е. получаем искомое равенство (1).

Третий шаг. Леммы о спуске. Пусть даны отображения $f: X \to \tilde{N}$ и $f_1: X \to \tilde{N}_1$, где N_1 — подкомплекс комплекса N. Говорим, что отображение f_1 получается из f посредством *спуска* (или *выметания*), если из $f(x) \in T \in N$ и $f_1(x) \in T_1$ всегда следует, что $T_1 \leqslant T$.

Лемма 1. *Если f_1 получается из f посредством спуска, то $f_1^{-1}Oe \subseteq f^{-1}Oe$ для любой вершины $e \in N$.*

Действительно, пусть $f_1(x) \in T_1 \subseteq Oe$, т. е. $f_1(x) \in T_1 \geqslant e$. Тогда $f(x) \in T \geqslant T_1 \geqslant e$, т. е. $f(x) \in T \subseteq Oe$, чем утверждение и доказано.

Из леммы 1 сразу следует основная

Лемма 2. *Если f есть каноническое отображение пространства X в тело нерва N_ω и f_1 получается из f посредством спуска, то и f_1 есть каноническое отображение $f_1: X \to \tilde{N}_\omega$.*

Переходим к последней лемме о спуске.

Лемма 3. *Пусть при отображении $f: X \to \tilde{K}$ пространства X в триангулированный полиэдр $\tilde{K}$ имеется главный симплекс $T \in K$, не покрытый существенно. Тогда существует замкнутый (собственный) подкомплекс $K_1 = (K \setminus T) \subset K$ и отображение $f_1: X \to \tilde{K}_1$, получающееся из f посредством спуска.*

Доказательство. Пусть главный симплекс $T \in K$ не покрыт существенно. Положим $\Theta = f^{-1}\bar{T}$. Обозначая, как всегда, через $S = \bar{T} \setminus T$ границу симплекса T, рассмотрим отображение $f_1: \Theta \to S$, совпадающее на $f^{-1}S$ с отображением f. Такое f_1

можно найти, так как по предположению $f\colon \Theta \to T$ несущественно. Так как на $f^{-1}(\tilde{K}\setminus T) \cap f^{-1}T = f^{-1}S$ отображения f и f_1 совпадают, то, полагая $f_1 x = fx$ для $x \in f^{-1}(\tilde{K}\setminus T)$, получим непрерывное отображение $f_1\colon X \to \tilde{K}$, отличающееся от f только тем, что точки $x \in X$, отображавшиеся посредством f в симплекс T, теперь отображаются в границу этого симплекса. Другими словами, f_1 получается из f посредством спуска. Лемма 3 доказана.

Окончание доказательства теоремы 1. Предположим, что какой-то главный симплекс T_1 комплекса N при отображении f не покрыт существенно. Тогда мы можем применить лемму 3 о спуске и преобразовать посредством спуска отображение $f\colon X \to \tilde{N}$ в отображение $f_1\colon X \to \tilde{N}_1$, где полиэдр $\tilde{N}_1$ есть тело комплекса $N_1 = N \setminus T_1 \subset N$. Отображение f_1 есть (в силу леммы 2) снова каноническое (относительно ω) отображение. Если при отображении $f_1\colon X \to \tilde{N}_1 \subseteq \tilde{N}$ некоторый главный симплекс $T_2 \in N_1$ не покрыт существенно, то по лемме 3 существует отображение $f_2\colon X \to \tilde{N}_2$, полученное из f_1, а следовательно и из f, посредством спуска, причем полиэдр $\tilde{N}_2$ есть тело комплекса $N_2 = N_1 \setminus T_2 \subset N_1 \subset N$.

Так как комплекс N конечен, то, продолжая описанный процесс («спуска»), мы получим такое отображение $f_k\colon X \to \tilde{N}_k$ пространства X в тело $\tilde{N}_k$ подкомплекса N_k нерва N, что все главные симплексы комплекса N_k будут покрыты существенно, а отображение f_k получено из f посредством спуска и поэтому (см. лемму 2) является каноническим (относительно ω). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если при отображении $f\colon X \to \tilde{K}$ все главные симплексы комплекса K покрыты существенно, то f есть отображение на весь полиэдр $\tilde{K}$.

В самом деле, пусть отображение $f\colon X \to \tilde{K}$ не есть отображение на $\tilde{K}$ и $y \in \tilde{K}\setminus fX$. Пусть $T_y \in K$ есть носитель точки y в комплексе K и $T \geqslant T_y$ — главный симплекс. Тогда (см. гл. 3, § 5, определение 1) симплекс T не может быть при отображении f покрыт существенно.

Следующее предложение, как нам кажется, существенно дополняет теорему 1:

Предложение 1. *Пусть ω — покрытие бикомпакта X и $\varphi\colon X \to \tilde{K}$ есть ω-отображение на полиэдр $\tilde{K}$ данной триангуляции K. Тогда всякое достаточно мелкое подразделение K' триангуляции K есть нерв некоторого вписанного в ω покрытия ω' бикомпакта X.*

Доказательство. Обозначим через $\gamma = \{U_1, \ldots, U_s\}$ покрытие компакта $\tilde{K}$, обладающее тем свойством, что покрытие

$$\varphi^{-1}\gamma = \{\varphi^{-1}U_1, \ldots, \varphi^{-1}U_s\}$$

вписано в покрытие ω. Пусть K' — произвольное подразделение комплекса K, столь мелкое, что покрытие γ', состоящее из открытых звезд комплекса K', вписано в γ. Тогда покрытие $\varphi^{-1}\gamma' = \omega'$, очевидно, вписано в ω. Но нерв покрытия ω', совпадая с нервом покрытия γ', есть комплекс K', ч. и т. д.

Замечание 2. С только что доказанной теоремой 1 тесно связано следующее понятие:

Покрытие $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ пространства X называется *неприводимым*, если никакой собственный подкомплекс N' нерва N_ω не является нервом покрытия «более мелкого», чем ω (т. е. покрытия, вписанного в покрытие ω).

Предложение 2. *Существуют сколь угодно мелкие неприводимые покрытия. Более подробно: каково бы ни было покрытие ω, существует неприводимое покрытие, вписанное в ω.*

В самом деле, если данное покрытие ω приводимо, то существует комплекс $N' \subset N_\omega$, являющийся нервом покрытия ω' более мелкого, чем покрытие ω; если это покрытие ω' все еще приводимо, то находим комплекс $N'' \subset N'$, являющийся нервом покрытия ω'' более мелкого, чем ω', и т. д. Так как комплекс $N = N_\omega$ конечен, то убывающая последовательность

$$N \supset N' \supset N'' \supset \ldots$$

конечна, т. е. обрывается на некотором $N^{(\nu)} \subset N$, являющемся нервом неприводимого покрытия $\omega^{(\nu)}$, вписанного в первоначальное покрытие ω. Предложение 2 доказано.

Привлечение неприводимых покрытий позволяет доказать следующее

Предложение 3 (Пономарев). *Пусть ω — неприводимое покрытие пространства X и N_ω — его нерв, реализованный в виде триангуляции. Тогда при всяком каноническом отображении f пространства X в полиэдр $\tilde{N}_\omega$ все главные симплексы $T \in N_\omega$ существенно покрыты.*

Доказательство. Если бы предложение 3 было неверно, то, применив лемму 3 о спуске, можно было бы посредством спуска из отображения f получить отображение f_1: $X \to \tilde{N}_1$, где полиэдр $\tilde{N}_1$ есть тело комплекса $N_1 = N \setminus T$, а T — главный симплекс комплекса N.

Отображение f_1 есть (в силу леммы 2) снова каноническое (относительно ω), и прообразы $f_1^{-1}Oe_i$ главных звезд комплекса N_1 образуют покрытие ω_1, вписанное в ω, так что нерв покрытия ω_1 есть (собственный или несобственный) подкомплекс комплекса $N_1 \subset N_\omega$, что противоречит неприводимости покрытия ω. Предложение 3 доказано.

Естественность рассмотрения неприводимых покрытий в теории размерности подчеркивается и следующим предложением:

Предложение 4 (Пономарев). *Всякое неприводимое покрытие n-мерного пространства X есть покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

В самом деле, пусть покрытие ω пространства X неприводимо. Вписываем в покрытие ω покрытие γ кратности $\leqslant n+1$ и через ω' обозначаем укрупнение γ относительно ω (см. гл. 1, § 6, п. 2). Нерв покрытия ω' является (собственным или несобственным) подкомплексом нерва N_ω. В силу неприводимости ω непременно $N_\omega = N_{\omega'}$. Так как кратность $\omega' \leqslant n+1$ (см. гл. 1, § 6, п. 2), то и кратность $\omega \leqslant n+1$, что и требовалось доказать.

§ 2. Аппроксимационные теоремы

1. Первая аппроксимационная теорема. Непосредственным следствием теоремы о канонических отображениях являются так называемые аппроксимационные теоремы (для непрерывных отображений φ: $X \to R^n$).

Теорема 2 (первая аппроксимационная теорема)*). *Пусть φ — произвольное непрерывное отображение n-мерного нормального пространства X в m-мерный куб $Q^m \subset R^m$, $m \geqslant n$. При любом ε существует аппроксимирующее отображение f пространства X в n-мерный полиэдр $\tilde{N} \subset Q^m$, отличающееся от φ меньше чем на ε в смысле*

$$\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad x \in X. \tag{1}$$

Если же $m \geqslant 2n+1$ и дано произвольное покрытие ω пространства X, то можно, кроме того, предположить, что f есть каноническое ω-отображение в $\tilde{N} = \tilde{N}_\omega$ (и существует такой подкомплекс N' нерва N, что $fX = \tilde{N}'$).

*Далее, пусть при $m \geqslant 2n+1$ в R^m произвольно выбрана плоскость R_1^n. Тогда от аппроксимирующего отображения f можно дополнительно потребовать, чтобы множество $[fX]$ находилось от плоскости R_1^n на положительном расстоянии***).

Очевидно, первая аппроксимационная теорема может быть сформулирована и следующим образом:

Теорема 2′. *Пусть $C \equiv C(X, Q^m)$ — пространство всех непрерывных отображений φ: $X \to Q^m$. Тогда множество $C^{(n)}$ тех отображений $\varphi \in C$, при которых образы φX содержатся в n-мерных полиэдрах, лежащих в Q^m, всюду плотно в пространстве C. Если $m \geqslant 2n+1$ и дано открытое покрытие ω пространства X, то в пространстве C всюду плотно множество $C^{\omega, n}$*

---

*) Она понадобится нам уже в § 6 этой главы при доказательстве теоремы о существенных отображениях.

**) Выполнение этого дополнительного условия существенно понадобится нам в § 3 этой главы.

тех ω-отображений φ: $X \to Q^m$, при которых образы φX лежат в n-мерных полиэдрах.

Наконец, если кроме покрытия ω пространства X задана еще n-мерная плоскость R_1^n пространства R^m, $m \geqslant 2n+1$, то всюду плотно в пространстве C и множество C_ω^1 тех ω-отображений φ: $X \to Q^m$, при которых множество $[\varphi X]$ лежит в конечном n-мерном полиэдре и на положительном расстоянии от плоскости R_1^n.

Доказательство теоремы 2. Куб Q^m покрываем конечным числом шаров $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, диаметра $< \frac{\varepsilon}{2}$. Прообразы $\varphi^{-1}V_j = U_j$ этих шаров образуют покрытие $\omega_1 = \{U_j\}$ пространства X. Берем корректное, кратности $n+1$, покрытие

$$\omega_0 = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

пространства X, более мелкое, чем ω_1 (и чем ω, если дано это последнее). Берем для каждого $i = 1, \ldots, s$ точку $p_i \in O_i \in \omega_0$ и выбираем точки $e_1, \ldots, e_s$ внутри куба Q^m в общем положении в $R^m \supset Q^m$ так, чтобы было

$$\rho(e_i, \varphi p_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Если при этом $m \geqslant 2n+1$ и в R^m дана n-мерная плоскость R_1^n, то подчиняем выбор точек $e_1, e_2, \ldots, e_s$ дополнительному условию, чтобы никакая из n-мерных плоскостей, натянутых на какие-нибудь $n+1$ из точек $e_1, e_2, \ldots, e_s$, не пересекалась с плоскостью R_1^n (это возможно в силу замечания 1 § 1 гл. 3). Точки $e_1, e_2, \ldots, e_s$ делаем вершинами нерва N покрытия ω_0. Так как $\dim \tilde{N} = n$ и $m \geqslant n$, то каждый остов нерва N состоит из геометрически независимых точек в R^m (мы ведь брали точки $e_1, \ldots, e_s$ в общем положении); поэтому симплексы нерва N суть геометрические (открытые) симплексы*); если же $m \geqslant 2n+1$, то эти симплексы дизъюнктны и нерв N является триангуляцией.

Кроме того, если $m \geqslant 2n+1$ и в R^m выделена плоскость R_1^n, то в силу дополнительного условия, которому в любом случае подчинен выбор точек $e_1, \ldots, e_s$, замыкание ни одного из симплексов нерва N не пересекается с плоскостью R_1^n, так что и тело $\tilde{N}$ нерва N, будучи компактом, не пересекающим плоскость R_1^n, находится на положительном расстоянии от этой плоскости: $\rho(\tilde{N}, R_1^n) > 0$.

---

*) Которые, однако (если требуется лишь $m \geqslant n$), могут иметь общие точки.

Строим теперь барицентрическое отображение $f\colon X \to \tilde{N}$; в частном случае, когда $m \geqslant 2n+1$ и N является триангуляцией, отображение f является каноническим и, значит, ω_0-отображением. По теореме 1 и замечанию 1 § 1 можно считать, что $fX = \tilde{N}'$ для некоторого подкомплекса N' нерва N.

Если при этом в R^m выделена плоскость R_1^n, то по построению $\rho(\tilde{N}, R_1^n) > 0$, и, значит, $\rho([fX], R_1^n) > 0$. Остается доказать, что в случае любого $m \geqslant n$ выполнено неравенство (1). Пусть x — произвольная точка пространства X; пусть все содержащие ее элементы покрытия ω_0 суть $O_{i_0}, \ldots, O_{i_r}$. Тогда (если f есть барицентрическое отображение) среди всех чисел $f_i(x)$ только $f_{i_0}(x), \ldots, f_{i_r}(x)$ положительны, так что $f(x)$ содержится в симплексе $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in N$. Если же f получено из барицентрического отображения посредством спуска (при $m \geqslant 2n-1$), то $fx \in \overline{e_{i_0} \ldots e_{i_r}}$. С другой стороны, каждое O_i содержится в некотором $U_j = \varphi^{-1}V_j$, так что

$$\operatorname{diam} \varphi O_i \leqslant \operatorname{diam} \varphi U_j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, помня, что $p_i \in O_i$, $\rho(\varphi p_i, e_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, имеем $\rho(\varphi x, \varphi p_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(\varphi x, e_i) < \varepsilon$ при $i = i_0, \ldots, i_r$.

Значит, все точки $e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}$ лежат в шаре $O(\varphi x, \varepsilon)$, но тогда в этом же шаре лежит и весь симплекс $\overline{e_{i_0} \ldots e_{i_r}}$, содержащий точку fx. Неравенство (1) и вся теорема 2 доказаны.

Замечание 1. Теорема 2′ содержит, в сущности, два предложения $2_А$ и $2_Б$.

Теорема $2_А$. *Пусть X — нормальное пространство размерности $\dim X = n$ и $m \geqslant 2n+1$. Пусть Q^m — куб размерности m и ω — произвольное покрытие пространства X. Тогда множество $C_\omega(X, Q^m)$ всех ω-отображений пространства X в Q^m всюду плотно в пространстве $C(X, Q^m)$ всех непрерывных отображений $f\colon X \to Q^m$.*

В частности, пусть X — компакт, $\varepsilon > 0$ и ω является ε-покрытием пространства X. Тогда непосредственным следствием теоремы $2_А$ является

Теорема $2'_А$. *Пусть X — компакт размерности n и $m \geqslant 2n+1$. При любом $\varepsilon > 0$ множество $C_\varepsilon(X, Q^m)$ всех ε-отображений компакта X в Q^m всюду плотно в пространстве $C(X, Q^m)$.*

Теорема $2_Б$. Пусть X — *нормальное пространство*, $\dim X = n$ *и $m \geqslant n$. Тогда в множестве $C(X, Q^m)$ всюду плотно множество $C^{(n)}(X, Q^m)$ всех отображений $\varphi\colon X \to Q^m$, при которых образы φX содержатся в n-мерных полиэдрах, лежащих в Q^m,*

2. Добавление к первой аппроксимационной теореме. В § 3 этой главы нам понадобится следующая

Теорема 3. *Для любого отображения φ нормального n-мерного пространства X в n-мерный куб $Q^n \subset R^n$, любого покрытия ω пространства X и любого $\varepsilon > 0$ существует такое отображение $\psi: X \to Q^n$, что $\rho(\varphi, \psi) < \varepsilon$ и отображение ψ представляется в виде суперпозиции $\psi = \pi f$, в которой первое отображение f есть ω-отображение $f: X \to \bar{N}_\omega \subset Q^m$, $m \geqslant 2n+1$, а второе отображение $\pi: fX \to Q^n$ конечнократно.*

В частности, если X — компакт, то для любого фиксированного $\delta > \theta$ отображение f можно считать δ-отображением.

То же самое утверждение можно (для случая компактов) переформулировать и так:

В пространстве $C(X, Q^n)$ всех непрерывных отображений n-мерного компакта X в n-мерный куб Q^n для любого $\delta > 0$ плотно множество таких отображений ψ, для которых прообраз $\psi^{-1}(y) = f^{-1}\pi^{-1}y$ каждой точки $y \in \psi X$ распадается в конечную дизъюнктную сумму компактов диаметра $< \delta$).*

В самом деле, если множество $\pi^{-1}y \subset Q^n$ состоит из точек $z_1, \ldots, z_k$ полиэдра $\bar{N}_\omega$, то $\psi^{-1}y$ есть дизъюнктная сумма

$$\psi^{-1}y = f^{-1}z_1 \cup \ldots \cup f^{-1}z_k$$

прообразов $f^{-1}z_i$, $i = 1, \ldots, k$, каждый из которых имеет диаметр $< \delta$.

Доказательство теоремы 3 основывается на следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть в m-мерном эвклидовом пространстве R^m дана n-мерная плоскость R^n. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования пространства R^m на R^n. Пусть в R^m дана произвольная система точек*

$$\mu = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}.$$

Тогда для любого $\gamma > 0$ существует такой γ-сдвиг g системы μ в систему

$$g\mu = \{gx_1, gx_2, \ldots, gx_s\},$$

находящуюся в общем положении в R^m, что система

$$\pi g\mu = \{\pi gx_1, \pi gx_2, \ldots, \pi gx_s\}$$

находится в общем положении в R^n.

Заметим, кроме того, что (по теореме Пифагора) для любых двух точек x, x' пространства R^m имеем

$$\rho(\pi x, \pi x') \leqslant \rho(x, x'),$$

*) Такие отображения называются δ-дискретными (см. § 3, п. 3).

так что в условии леммы имеем и

$$\rho(\pi g x_i, \pi x_i) \leqslant \rho(g x_i, x_i) < \gamma$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. Переводим систему точек $\pi\mu = \{\pi x_1, \ldots, \pi x_s\}$ посредством $\frac{\gamma}{2}$-сдвига h в систему $h\pi\mu = \{h\pi x_1, \ldots, h\pi x_s\}$, имеющую общее положение в R^n. Так как при достаточно малом сдвиге общее положение данной конечной системы точек сохраняется, то существует такое $\varepsilon < \frac{\gamma}{2}$, что при всяком ε-сдвиге системы $h\pi\mu$ в R^n эта система сохраняет свое общее положение в R^n. При каждом $i = 1, 2, \ldots, s$ вся $(m-n)$-мерная плоскость $\pi^{-1}(\pi x_i)$ переходит в $(m-n)$-мерную плоскость $\pi^{-1}(h\pi x_i)$ посредством $\frac{\gamma}{2}$-сдвига (на вектор $\overrightarrow{\pi x_i, h\pi x_i}$). Поэтому в плоскости $\pi^{-1}(h\pi x_i)$ можно найти точку y_i под условием $\rho(x_i, y_i) < \frac{\gamma}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Подвергнем теперь систему точек

$$\nu = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$$

ε-сдвигу g', переводящему ее в общее положение в R^m. Тогда будем иметь

$$\rho(\pi y_i, \pi g' y_i) < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \rho(h\pi x_i, \pi g' y_i) < \varepsilon.$$

По определению числа ε точки $\pi g' y_i$, отстоя от точек $h\pi x_i$ меньше чем на ε, будут образовывать систему

$$\pi g' y_1, \ldots, \pi g' y_s,$$

находящуюся в общем положении в R^n. Мы утверждаем, что переход от точек x_i к точкам $g' y_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, осуществляет искомый γ-сдвиг

$$g\colon x_i \to g' y_i \equiv g x_i.$$

В самом деле, точки $g x_i = g' y_i$ находятся в общем положении — так был выбран сдвиг g'. Далее,

$$\rho(x_i, g x_i) \equiv \rho(x_i, g' y_i) \leqslant \rho(x_i, y_i) + \rho(y_i, g' y_i) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

Наконец, мы видели, что точки $\pi g x_i$, т. е. точки $\pi g' y_i$, лежат в R^n в общем положении. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 возвратимся к теореме 2, в которой будем считать $R^n \subset R^m$, $m \geqslant 2n + 1$.

Даны: n-мерное пространство X, его покрытие ω, непрерывное отображение $\varphi: X \to Q^n \subset R^n \subset R^m$ и число $\varepsilon > 0$. Строим вписанное в ω покрытие ω_0 (как при доказательстве теоремы 2) и реализуем его нерв в виде триангуляции N, лежащей в R^m, выбирая вершины $e_1, \ldots, e_s$ этой триангуляции, как указано при доказательстве теоремы 2.

При этом, в силу только что доказанной леммы, мы не только можем предполагать, что вершины $e_1, \ldots, e_s$ триангуляции N находятся в общем положении, но что и ортогональные проекции $\pi e_1, \ldots, \pi e_s$ этих вершин в подпространство $R^n \subset R^m$ находятся в общем положении в R^n, так что при ортогональном проектировании $\pi: R^m \to R^n$ симплексы триангуляции N не будут вырождаться *), и, значит, отображение π, рассматриваемое на $\tilde{N}$, является конечнократным. Мы видели при доказательстве теоремы 2, что каноническое отображение

$$f: X \to \tilde{N}$$

удовлетворяет неравенству $\rho(\varphi, f) < \varepsilon$ и является ω-отображением. В частном случае, когда X — компакт, вместо покрытия ω можно было задать число $\delta > 0$ и потребовать, чтобы f было δ-отображением.

Отображение π: $R^m \to R^n$ есть оператор ортогонального проектирования, а φ есть отображение пространства X в R^n, так что $\pi\varphi = \varphi$, поэтому

$$\rho(\varphi, \pi f) = \rho(\pi\varphi, \pi f) \leqslant \rho(\varphi, f) < \varepsilon.$$

Наконец, отображение π, рассматриваемое на $\tilde{N}$ и тем более на $fX \subseteq \tilde{N}$, конечнократно.

Отображение $\psi = \pi f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, которая, таким образом, доказана.

3. Вторая аппроксимационная теорема. Частичным обобщением теоремы 2 является

Теорема 4 (вторая аппроксимационная теорема **); Мардешич [1]). *Пусть $\varphi: X \to \underline{K}$ есть отображение нормального пространства X в триангулированный полиэдр $P = \underline{K}$. Пусть ω — произвольное достаточно мелкое ***) корректное покрытие пространства X, N_ω — его нерв, реализованный в виде триангуляции. Существует такое симплициальное отображение $\pi: \tilde{N}_\omega \to \underline{K}$, что при каноническом отображении $f_\omega: X \to \tilde{N}_\omega$ (и любом $x \in X$) носитель точки $\pi f_\omega x$ в комплексе K ****) есть грань носителя точки φx в комплексе K, т. е. отображение πf_ω получено из отображения φ посредством спуска.*

---

*) То есть их размерность не будет понижаться.

**) Эта теорема понадобится нам в гл. 5, § 5.

***) Под достаточно мелким покрытием всегда понимаем всякое покрытие более мелкое, чем некоторое данное покрытие ω_0 («задающее мелкость»); в данном случае, как мы сейчас увидим, можно положить $\omega_0 = \{\varphi^{-1} Ob_i\}$, где Ob_i — главные звезды триангуляции K.

****) То есть симплекс комплекса K, содержащий точку $\pi f_\omega x$.

Доказательство. Пусть $\{Ob_j\}=\gamma$ есть покрытие полиэдра $\bar{K}$, состоящее из главных звезд Ob_j комплекса K. Положим $\omega_0=\{\varphi^{-1}Ob_j\}$. Пусть $\omega=\{O_i\}$ — любое покрытие, вписанное в ω_0. Для каждой вершины e_i нерва $N=N_\omega$ выберем вершину $b_j \in K$, под условием

$$\varphi O_i \subseteq Ob_j, \qquad j=j(i),$$

и положим $\pi e_i = b_{j(i)}$ (для любого $i=1, \ldots, s$). Этим определено симплициальное отображение π: $\bar{N} \to \bar{K}$. В самом деле, если $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$ есть симплекс нерва N, то $O_{i_0} \cap \ldots \cap O_{i_r} \neq \Lambda$; значит, непусто и множество $\varphi O_{i_0} \cap \ldots \cap \varphi O_{i_r}$ и подавно

$$Ob_{j(i_0)} \cap \ldots \cap Ob_{j(i_r)} \neq \Lambda;$$

но тогда вершины $b_{j(i_0)}, \ldots, b_{j(i_r)}$ образуют остов некоторого симплекса в K.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка, и пусть все содержащие ее $O_i \in \omega$ суть

$$O_{i_0}, \ldots, O_{i_r}.$$

Тогда носитель точки $f_\omega x$ есть симплекс $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in N$ и симплекс $\pi(|e_{i_0} \ldots e_{i_r}|)=|b_{j(i_0)} \ldots b_{j(i_r)}|$ есть носитель точки $\pi f_\omega x$; при этом, по определению отображения π, имеем $\varphi O_{i_0} \subseteq \subseteq Ob_{j(i_0)}, \ldots, \varphi O_{i_r} \subseteq Ob_{j(i_r)}$, так что

$$\varphi(x) \in \varphi O_{i_0} \cap \ldots \cap \varphi O_{i_r} \subseteq Ob_{j(i_0)} \cap \ldots \cap Ob_{j(i_r)} = \\ = O\,|b_{j(i_0)} \ldots b_{j(i_r)}|.$$

Другими словами, носитель точки φx в комплексе K принадлежит звезде симплекса $|b_{j(i_0)} \ldots b_{j(i_r)}| \in K$, являющегося носителем точки $\pi f_\omega x$, а это значит, что носитель точки $\pi f_\omega x$ есть грань носителя точки φx.

Замечание 2. Утверждение второй аппроксимационной теоремы, очевидно, остается верным, если заменить отображение f_ω любым отображением f'_ω: $X \to \tilde{N}'_\omega$, получающимся из f_ω посредством спуска.

Замечание 3. Беря триангуляцию K полиэдра P достаточно мелкой, получаем во второй аппроксимационной теореме для всякого заданного ε оценку $\rho(\varphi x, \pi f_\omega x) < \varepsilon$. Чтобы получить из второй аппроксимационной теоремы первую половину первой аппроксимационной теоремы, заметим, что симплициальное отображение π, о котором идет речь во второй аппроксимационной теореме, и есть не что иное, как реализация нерва N_ω вблизи множества φX.

§ 3. Доказательство теоремы об ω- и ε-отображениях. Нульмерные отображения компактов в кубы той же размерности

1. Брауэровский принцип инвариантности. Начнем со второго утверждения теоремы об ω-отображениях*) (Теорема 5); доказываем более сильное предложение, а именно:

Теорема 5′ (брауэровский принцип инвариантности). *Пусть* $\dim X = n$; *тогда имеется такое конечное открытое покрытие* ω_0 *пространства* X, *что не возможно никакое* ω_0-*отображение пространства* X *в нормальное пространство размерности* $< n$.

Доказательство (от противного). Пусть для данного n-мерного пространства X и любого покрытия ω этого пространства имеется ω-отображение пространства X в нормальное пространство Y размерности $\dim Y < n$. Приведем это предложение к противоречию. Для этого возьмем такое покрытие $\omega \equiv \omega_0 = \{O_1, \ldots, O_s\}$, что в него нельзя вписать никакого покрытия кратности $< n+1$; такое ω_0 существует, так как $\dim X = n$. По предположению при этом ω_0 существует ω_0-отображение $f_0 : X \to Y$ в нормальное пространство Y, $\dim Y < n$. Согласно определению ω-отображения каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность Oy, прообраз $f_0^{-1}Oy$ которой содержится в некотором элементе покрытия ω_0.

Обозначим через W_i объединение тех Oy, для которых $f_0^{-1}Oy \subseteq O_i \in \omega_0$. Тогда

$$\{W_1, \ldots, W_s\}$$

есть конечное покрытие пространства Y. Вписываем в него покрытие

$$\{V_1, \ldots, V_s\}$$

кратности $\leqslant n$. Тогда $\{f_0^{-1}V_1, \ldots, f_0^{-1}V_s\}$ есть покрытие кратности $\leqslant n$ пространства X, вписанное в ω_0.

Полученное противоречие доказывает брауэровский принцип инвариантности, а значит, и второе утверждение теоремы об ω-отображениях.

Доказываем первое утверждение теоремы об ω-отображениях. Пусть ω — произвольное покрытие n-мерного пространства X; требуется построить ω-отображение пространства на n-мерный полиэдр. Заменяя, если нужно, покрытие ω более мелким, можем, без ограничения общности, предположить, что оно имеет кратность $n+1$ и что не существует никакого ω-отображения пространства X в полиэдр размерности $< n$. Пусть три-

---

*) См. введение, п. 2, где, в частности, дана ссылка на работу Брауэра [1].

ангуляция N есть нерв покрытия ω. Согласно теореме о канонических отображениях существуют подкомплекс $N' \subseteq N$ и каноническое отображение f пространства X на полиэдр $\bar{N}'$. Так как $\bar{N}' \subseteq \bar{N}$, то $\dim \bar{N} \leqslant n$; в силу выбора покрытия ω имеем, с другой стороны, $\dim \bar{N}' \geqslant n$. Итак, $\dim \bar{N}' = n$, ч. и т. д.

2. Случай компактов; теорема об ε-отображениях. Из предложения 1, доказанного во введении (п. 2), вытекает, что в теореме 5 содержится

Теорема 5_0 (теорема об ε-отображениях). *Пусть n-мерное пространство X является компактом. Тогда при всяком $\varepsilon > 0$ имеется ε-отображение f пространства X на n-мерный полиэдр и в то же время существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что не возможно никакое ε_0-отображение в полиэдр (и даже в бикомпакт) размерности $< n$.*

Далее, имеет место

Теорема 6. *Пусть X — компакт размерности n, лежащий в эвклидовом (или в гильбертовом) пространстве R^m, $n \leqslant m \leqslant \infty$. При любом $\varepsilon > 0$ можно посредством ε-сдвига превратить компакт X в n-мерный полиэдр $\bar{N} \subset R^m$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что невозможен ε_0-сдвиг компакта X в полиэдр размерности $< n$.*

Доказательство. Второе утверждение вытекает из того, что всякий ε-сдвиг компакта есть 2ε-отображение. Первое утверждение получим, если в первой аппроксимационной теореме (случай $m \geqslant n$) возьмем в качестве φ тождественное отображение; тогда отображение f, удовлетворяющее неравенству (1) (из § 2), есть ε-сдвиг в n-мерный полиэдр $\bar{N}$.

Берем этот полиэдр в достаточно мелкой триангуляции K. Если f не есть отображение на $\bar{N} = \bar{K}$, то по крайней мере в одном главном симплексе $T \in K$ имеется точка $x_0 \in T \setminus fX$. Производим «спуск» («выметание» симплекса T), налагая на отображение f отображение $g: \bar{K} \to (\bar{K} \setminus T)$, тождественное на $\bar{K} \setminus T = \bar{K}_1$ и определенное в T как проекция из x_0 на границу $\bar{T} \setminus T$.

Посредством конечного числа таких выметаний приходим к отображению f_ν пространства X на полиэдр $\bar{K}_\nu$, все еще являющемуся ε-сдвигом.

Как показывает упомянутый еще во введении пример Ситникова, содержащееся в теореме 6 определение размерности компактов посредством ε-сдвигов к некомпактным метрическим пространствам (даже счетного веса) неприменимо (см. гл. 8, введение и § 3).

В связи с теоремой 6 сформулируем следующее утверждение, доказанное Г. С. Чогошвили [1]:

Теорема Чогошвили. *Компакт X, лежащий в m-мерном эвклидовом пространстве R^m, имеет размерность $n \leqslant m$ тогда* *и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ и любой $(m-n-1)$-мерной плоскости $R^{m-n-1} \subseteq R^m$ существует такой ε-сдвиг $f: X \to R^m$ компакта X, что*

$$fX \cap R^{m-n-1} = \Lambda.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы Чогошвили останется верным, если в нем компакт X заменить произвольным подмножеством пространства R^m, а размерность — метрической размерностью *) (Чогошвили [1]).

3. Нульмерные отображения компактов в кубы той же размерности. Неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ для компактов. Определение 1. Мы говорим, что отображение $f: X \to Y$ имеет *размерность* $\leqslant k$, и пишем $\dim f \leqslant k$, если для каждой точки $y \in Y$ верно неравенство

$$\dim f^{-1}y \leqslant k;$$

если при этом хотя бы для одной точки $y \in Y$ предыдущее неравенство переходит в равенство

$$\dim f^{-1}y = k,$$

то пишем $\dim f = k$ — отображение f в этом случае называется k-мерным.

Докажем следующую теорему:

Теорема 7 (Гуревич [4]). *Для любого n-мерного компакта X множество его нульмерных отображений в n-мерный куб Q^n является в пространстве $C(X, Q^n)$ всех отображений X в Q^n всюду плотным множеством типа G_δ.*

Определение 2. Отображение $f: X \to Y$ компакта X назовем *ε-дискретным*, если прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in fX$ разлагается в конечную дизъюнктную сумму компактов диаметра $< \varepsilon$.

В § 2 (теорема 3) было показано, что множество ε-дискретных отображений n-мерного компакта X в n-мерный куб Q^n для любого $\varepsilon > 0$ всюду плотно в пространстве $C(X, Q^n)$.

Лемма 1. *Пусть X — произвольный компакт. Для любого $\varepsilon > 0$ множество C_ε^* всех ε-дискретных отображений компакта X в куб Q^n открыто в пространстве $C(X, Q^n)$.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любого ε-дискретного отображения $f: X \to Q^n$ существует такое $\delta > 0$, что всякое отображение $g: X \to Q^n$, удовлетворяющее условию $\rho(f, g) < \delta$, будет ε-дискретным.

Докажем сначала существование числа $\eta > 0$, удовлетворяющего следующему условию: для любого множества $A \subseteq fX$,

*) См. гл. 8.

диаметр которого меньше η, прообраз $f^{-1}A$ распадается в конечную дизъюнктную сумму открытых в $f^{-1}A$ множеств диаметра $<\varepsilon$. Возьмем произвольную точку $y \in fX$. Ее прообраз $f^{-1}y$ распадается в дизъюнктную сумму замкнутых множеств $F_1, \ldots$ $\ldots, F_s$ диаметра $<\varepsilon$. Заключим множества F_i в дизъюнктные окрестности V_i диаметра $<\varepsilon$, $i = 1, \ldots, s$. В силу замкнутости f существует такая окрестность Oy точки y, что $f^{-1}Oy \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} V_i$. Окрестности Oy, взятые для всех точек $y \in fX$, образуют открытое покрытие ω компакта fX. Через η обозначим лебегово число покрытия ω. Если множество A имеет диаметр $<\eta$, то оно содержится в одном из множеств Oy, т. е. множество $f^{-1}A$ содержится в сумме соответствующих множеств V_i, $i = 1, \ldots, s$, и, следовательно, распадается на открытые в $f^{-1}A$ множества $V_i \cap f^{-1}A$, $i = 1, \ldots, s$, диаметра $<\varepsilon$. Существование числа η доказано.

Рассмотрим теперь такое отображение $g: X \to Q^n$, что $\rho(f, g) < \frac{\eta}{2}$. Пусть $y \in gX$ и $x \in g^{-1}y$. Тогда $\rho(fx, y) = \rho(fx, gx) < \frac{\eta}{2}$, т. е. компакт $fg^{-1}y \subseteq fX$ содержится в $\frac{\eta}{2}$-окрестности точки y и имеет диаметр $< \eta$. По доказанному выше множество $f^{-1}fg^{-1}y$, а значит и содержащееся в нем множество $g^{-1}y$, распадается в конечную дизъюнктную сумму открытых, а значит, и замкнутых в $f^{-1}fg^{-1}y$ (соответственно в $g^{-1}y$) множеств диаметра $<\varepsilon$. Лемма доказана.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ множество C^*_ε открыто и всюду плотно в пространстве $C(X, Q^n)$. В силу полноты этого пространства пересечение C^* множеств $C^*_{1/i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, есть всюду плотное в нем G_δ-множество; в частности, множество C^* непусто. Отображения, принадлежащие множеству $f \in C^*$, нульмерны. Действительно, если $f \in C^*$, то для любой точки $y \in fX$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}y = F$ разлагается в конечную дизъюнктную сумму замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$. Если ω — произвольное покрытие F, а η — лебегово число этого покрытия, то, взяв $\varepsilon < \eta$, получим дизъюнктное замкнутое покрытие множества F, вписанное в покрытие ω. Нульмерность отображения f и теорема 7, таким образом, доказаны.

Большое принципиальное значение теоремы 7 заключается в том, что эта теорема во многих случаях позволяет свести изучение n-мерных компактов к изучению замкнутых множеств n-мерного куба. Примером может служить доказательство формулы

(1) $$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X \quad \text{для всех компактов } X.$$

Неравенство (1) очевидно, если $\dim X = \infty$. Если же $\dim X = n < \infty$, то неравенство (1) вытекает из неравенства $\operatorname{ind} Q^n \leqslant n$, теоремы 7 и следующей теоремы 8, представляющей и самостоятельный интерес.

Теорема 8. *Если компакт X обладает нульмерным отображением $f\colon X \to Y$ в компакт Y, то* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{ind} Y$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда размерность $\operatorname{ind} Y$ конечна. Если $\operatorname{ind} Y = -1$, то $\operatorname{ind} X = -1 \leqslant \leqslant \operatorname{ind} Y$. Предположим, что доказываемое равенство справедливо для $\operatorname{ind} Y < n$, $n \geqslant 0$, и пусть $\operatorname{ind} Y = n$.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X$ и произвольную ее окрестность Ox_0. Положим $y_0 = fx_0$. Так как $\dim f^{-1}y_0 = 0$, то и $\operatorname{ind} f^{-1}y_0 = 0$ (см. гл. 2, § 3, предложение 1). Поэтому существует открыто-замкнутое в $f^{-1}y_0$ (и, следовательно, замкнутое в X) множество F_1, содержащее точку x_0 и лежащее в множестве $Ox_0 \cap f^{-1}y_0 \subseteq Ox_0$. Множество $F_2 = f^{-1}y_0 \setminus F_1$ также открыто-замкнуто в $f^{-1}y_0$. Множества F_1 и F_2 дизъюнктны и замкнуты в X; поэтому они обладают окрестностями V_1 и V_2 с дизъюнктными замыканиями. Можно при этом считать, что $V_1 \subseteq Ox_0$. Множество $V = V_1 \cup V_2$ является окрестностью множества $f^{-1}y_0$. В силу замкнутости отображения f существует такая окрестность U точки y_0, что $f^{-1}U \subseteq V$. При этом, очевидно, можно предположить, что $\operatorname{ind} \operatorname{гр} U \leqslant n-1$.

Рассматривая нульмерное отображение $f\colon X \to Y$ на замкнутом множестве $f^{-1} \operatorname{гр} U$, получим снова нульмерное отображение, так что из индуктивного предположения вытекает неравенство $\operatorname{ind} f^{-1} \operatorname{гр} U \leqslant \operatorname{ind} \operatorname{гр} U \leqslant n-1$. Пусть $W_i = f^{-1} U \cap V_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$x_0 \in W_1 \subseteq V_1 \subseteq Ox_0$$

и

$$\operatorname{гр} W_1 \subseteq \operatorname{гр} W_1 \cup \operatorname{гр} W_2 = \operatorname{гр} (W_1 \cup W_2) = \operatorname{гр} f^{-1} U \subseteq f^{-1} \operatorname{гр} U.$$

В силу монотонности размерности ind (гл. 2, § 1, предложение 7_0) имеем

$$\operatorname{ind} \operatorname{гр} W_1 \leqslant \operatorname{ind} f^{-1} \operatorname{гр} U \leqslant n-1,$$

откуда $\operatorname{ind} X \leqslant n = \operatorname{ind} Y$. Теорема 8 и неравенство (1) доказаны.

В § 8 этой главы, а также в § 2 гл. 5 неравенство (1) будет доказано для произвольных пространств со счетной базой.

В § 8 мы докажем для всех компактов (и даже для всех сильно паракомпактных пространств) формулу $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$, после чего мы будем иметь равенство $\dim X = \operatorname{ind} X$. Эта формула позволяет нам вывести из теоремы 8

Следствие 1. *Если существует нульмерное отображение $f\colon X \to Q^n$ компакта X в n-мерный куб Q^n, то* $\dim X \leqslant n$.

Это следствие вместе с теоремой 7 дает следующую новую характеристику размерности компактов:

Теорема 9. *Для того чтобы компакт X имел размерность $\dim X = n$, необходимо и достаточно, чтобы существовало нульмерное отображение $f\colon X \to Q^n$ в n-мерный куб Q^n и не существовало нульмерного отображения компакта X в куб меньшего числа измерений**).

§ 4. Теорема Нёбелинга — Понтрягина

Начинаем с доказательства теоремы Нёбелинга — Понтрягина в ее первоначальном виде (как гипотеза она была сформулирована еще Урысоном, в частном случае эта теорема была доказана Менгером [2]).

Теорема 10_0**). *Всякий компакт X размерности $\dim X = n$ гомеоморфен некоторому (очевидно, замкнутому) множеству, лежащему в $(2n+1)$-мерном кубе Q^{2n+1}.*

Доказательство основывается на двух леммах.

Первая лемма есть теорема $2'_A$ § 2, утверждающая, что при всяком $\varepsilon > 0$ множество C_ε всех ε-отображений компакта X размерности $\dim X = n$ в куб Q^{2n+1} размерности $2n+1$ всюду плотно в пространстве C всех отображений компакта X в куб Q^{2n+1}.

Вторая лемма утверждает, что множество C_ε всех ε-отображений (любого) компакта X в куб Q любой размерности открыто в пространстве C всех непрерывных отображений $f\colon X \to Q$. Доказываем эту вторую лемму.

Берем какое-нибудь $f_0 \in C_\varepsilon$. Для каждой точки $y \in Q$ существует окрестность Oy, для которой $f_0^{-1}Oy$ имеет диаметр $< \varepsilon$ (см. введение, п. 2). Эти Oy образуют покрытие куба Q, в котором можно выбрать конечное подпокрытие ω_Q. Пусть η — лебегово число покрытия ω_Q. Тогда для всякого множества $M \subseteq Q$, диаметра $< \eta$, прообраз $f_0^{-1}M$ имеет в X диаметр $< \varepsilon$. Вторая лемма будет доказана, если мы убедимся в том, что $\frac{\eta}{2}$-окрестность $O\left(f_0, \frac{\eta}{2}\right)$ отображения f_0 в пространстве C содержится в C_ε. Итак, пусть $f \in O\left(f_0, \frac{\eta}{2}\right)$, т. е. $\rho(f_0, f) < \frac{\eta}{2}$. Докажем, что $f \in C_\varepsilon$. Для этого достаточно доказать, что для всякой точки $y_0 \in Q$ прообраз $f^{-1}y_0$ имеет в X диаметр $< \varepsilon$, т. е. что из $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $fx_1 = fx_2 = y_0$ следует $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$.

---

*) Мы помним, что для завершения доказательства этой теоремы нам осталось доказать неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ для компактов, что и будет сделано в § 8.

**) См. Нёбелинг [1], Понтрягин и Толстова [1].

Но $\rho(f_0, f) < \frac{\eta}{2}$, поэтому

$$\rho(f_0x_1, f_0x_2) \leqslant \rho(f_0x_1, fx_1) + \rho(fx_1, fx_2) + \rho(fx_2, f_0x_2) < \frac{\eta}{2} + 0 + \frac{\eta}{2} = \eta;$$

следовательно, по определению числа η имеем $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Выведем из двух только что сформулированных лемм теорему 10_0. Надо доказать, что множество C_0 всех топологических отображений компакта X в $(2n+1)$-мерный куб Q^{2n+1} непусто. Мы докажем больше, а именно что множество C_0 всюду плотно в пространстве C всех непрерывных отображений пространства X в куб Q^{2n+1}.

Пусть $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначим через $C^{(k)}$ множество всех ε_k-отображений $f\colon X \to Q^{2n+1}$. В силу наших лемм множество $C^{(k)}$ при любом k открыто и всюду плотно в пространстве C. Так как C — полное метрическое пространство, то множество $\bigcap_k C^{(k)}$ также всюду плотно в C, но оно состоит из непрерывных отображений, каждое из которых есть ε_k-отображение при любом k; значит, $\bigcap_k C^{(k)}$ состоит из взаимно однозначных отображений компакта X в куб Q^{2n+1}, т. е. из топологических отображений. Итак, $\bigcap_k C^{(k)} \subseteq C_0$ — множество всех топологических отображений $f\colon X \to Q^{2n+1}$ — всюду плотно в C, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Очевидно, $C_0 \subseteq \bigcap_k C^{(k)}$, т. е. $C_0 = \bigcap_k C^{(k)}$ есть всюду плотное G_δ-множество в пространстве C.

Переходим к доказательству общей теоремы Нёбелинга — Понтрягина:

Теорема 10. *Всякое пространство X со счетной базой, имеющее размерность $\dim X = n$, гомеоморфно множеству, лежащему в кубе Q^{2n+1} размерности $2n+1$.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 10_0.

Снова имеем две леммы, из которых первая есть теорема 2_A § 2, а вторая лемма утверждает, что для любого покрытия ω произвольного нормального пространства X множество $C^{(\omega)}$ всех ω-отображений пространства X в куб Q произвольного числа измерений открыто в пространстве C всех непрерывных отображений $f\colon X \to Q$.

Доказываем эту лемму.

Пусть ω — произвольное покрытие пространства X и $f_0 \in C^{(\omega)}$. Требуется найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы ε-окрестность $O(f_0, \varepsilon)$ точки f_0 пространства C содержалась в $C^{(\omega)}$.

Чтобы найти такое ε, выбираем для каждой точки $y \in Q$ окрестность Vy так, чтобы множество $f_0^{-1}Vy$ содержалось в некотором элементе покрытия ω. Из покрытия $\{Vy\}$ куба Q выбираем конечное покрытие

$$\gamma = \{Vy_1, \ldots, Vy_s\}.$$

Берем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы 5ε было лебеговым числом покрытия γ, и докажем, что всякое отображение f: $X \to Q$, отличающееся от f_0 меньше чем на ε, есть ω-отображение.

Итак, пусть отображение f: $X \to Q$ удовлетворяет условию $\rho(f_0, f) < \varepsilon$. Докажем, что f есть ω-отображение. Для этого в свою очередь достаточно показать, что для любой точки $y_0 \in Q$ множество $f^{-1}O(y_0, \varepsilon)$ содержится в некотором элементе покрытия ω.

Пусть $x \in f^{-1}O(y_0, \varepsilon)$, значит, $fx \in O(y_0, \varepsilon)$, следовательно (так как $\rho(f_0, f) < \varepsilon$), имеем

$$f_0x \in O(y_0, 2\varepsilon),$$

а потому для любых двух точек x, x' из $f^{-1}O(y_0, \varepsilon)$ будет

$$\rho(f_0x, f_0x') < 4\varepsilon,$$

т. е. $\operatorname{diam} f_0f^{-1}O(y_0, \varepsilon) \leqslant 4\varepsilon < 5\varepsilon$. Но 5ε есть лебегово число покрытия γ, поэтому из последнего неравенства следует, что все множество $f_0f^{-1}O(y_0, \varepsilon)$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия γ, а следовательно, прообраз этого множества при отображении f_0, т. е. множество

$$f_0^{-1}f_0f^{-1}O(y_0, \varepsilon),$$

содержится в некотором элементе покрытия ω:

$$f_0^{-1}f_0f^{-1}O(y_0, \varepsilon) \subseteq O_i.$$

Но тогда и

$$f^{-1}O(y_0, \varepsilon) \subseteq f_0^{-1}f_0f^{-1}O(y_0, \varepsilon) \subseteq O_i.$$

Итак, мы доказали, что всякое f: $X \to Q$, для которого $\rho(f_0, f) < \varepsilon$, есть ω-отображение. Лемма доказана *).

Переходим к доказательству общей теоремы 10. Пусть

(1) $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$$

*) При этом доказательстве мы нигде не предполагали, что в пространстве X имеется счетная база.

— измельчающаяся последовательность покрытий пространства X (в силу предложения 13 § 6 гл. 1 во всяком пространстве со счетной базой существует такая последовательность). Обозначим через C^k множество всех ω_k-отображений пространства X в куб Q^{2n+1}. В силу нашей первой леммы (теорема $2_\text{А}$) множество C^k всюду плотно в полном метрическом пространстве C всех непрерывных отображений $f\colon X \to Q^{2n+1}$; в силу второй леммы множество C^k открыто в пространстве C. Значит, множество $\bigcap\limits_k C^k$ всюду плотно в пространстве C.

Остается доказать, что всякое отображение $f \in \bigcap\limits_k C^k$ есть топологическое отображение $f\colon X \to Q^{2n+1}$. Для этого берем произвольно точку $x_0 \in X$ и окрестность $Ox_0 \subset X$; полагаем $y_0 = fx_0$ и определяем k так, чтобы звезда $O_k x_0$ точки x_0 относительно покрытия ω_k содержалась в Ox_0 (это возможно, так как последовательность (1) измельчающаяся).

Отображение f есть ω_k-отображение; поэтому существует такая окрестность Oy_0, что $f^{-1}Oy_0$ содержится в некотором элементе O_i^k покрытия ω_k; так как $x_0 \in f^{-1}Oy_0$, то O_i^k содержится в звезде $O_k x_0$, значит, и подавно $f^{-1}Oy_0 \subseteq O_k x_0 \subseteq Ox_0$. Отсюда сразу выводим, что f — взаимно однозначное отображение: если бы $fx_0 = fx_1 = y_0$ при $x_0 \neq x_1$, то для дизъюнктных Ox_0, Ox_1 мы нашли бы Oy_0, удовлетворяющее невозможному включению $f^{-1}Oy_0 \subseteq Ox_0 \cap Ox_1$. Так как для каждого Ox_0 мы построили Oy_0 под условием $f^{-1}Oy_0 \subseteq Ox_0$, то отображение f^{-1} не только однозначно, но и непрерывно, и, значит, f есть гомеоморфизм, чем общая теорема Нёбелинга — Понтрягина доказана.

§ 5. Усиления теоремы Нёбелинга — Понтрягина и их следствия

Предыдущими рассуждениями доказана не только теорема Нёбелинга — Понтрягина, но и ее усиление:

Теорема 11. *Если X — пространство размерности n со счетной базой, то в пространстве $C = C(X, Q)$ всех непрерывных отображений пространства X в $(2n+1)$-мерный куб Q множество всех топологических отображений образует всюду плотное множество.*

Однако и эта теорема допускает дальнейшее усиление. При формулировке первой аппроксимационной теоремы мы уже отметили тот факт, что для любого покрытия ω пространства X всюду плотным в пространстве $C(X, Q)$ является не только множество C_ω всех ω-отображений, но и множество $C_\omega^! \subseteq C_\omega$ тех ω-отображений $f\colon X \to Q$, при которых множество $[fX]$ не пересекается с заданной n-мерной плоскостью $R^n \subset R^{2n+1}$ и, следовательно, будучи компактом, находится от нее на положительном расстоянии. Из этого последнего обстоятельства (и из нашей второй леммы в § 4) вытекает, что множество C^1_ω, кроме того, является открытым в пространстве $C(X, Q)$.

Пусть теперь X — пространство со счетной базой и

(1) $$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_k, \quad \ldots$$

— какая-нибудь измельчающаяся последовательность его покрытий. Пусть, с другой стороны,

(2) $$R^n_1, \quad R^n_2, \quad \ldots, \quad R^n_h, \ldots$$

— какое-нибудь счетное множество n-мерных плоскостей в R^{2n+1}. Через C^k_h обозначаем множество тех ω_k-отображений $f\colon X \to Q$, при которых $[fX] \subset Q \setminus R^n_h$. Все эти C^k_h всюду плотны и открыты в $C(X, Q)$; значит, множество $C^0 = \bigcap\limits_{k,h} C^k_h$ также всюду плотно в $C(X, Q)$ и оно, по доказанному, состоит из топологических отображений $f\colon X \to Q$, при которых компакт $[fX]$ не пересекается ни с одной из плоскостей (2).

Возьмем в качестве счетного множества (2) множество всех плоскостей $R^n\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_{n+1} \\ r_1, & \ldots, & r_{n+1}\end{pmatrix}$ (см. гл. 2, § 4). Плоскость

$$R^n\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_{n+1} \\ r_1, & \ldots, & r_{n+1}\end{pmatrix}$$

состоит из всех точек $\xi = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in R^{2n+1}$, удовлетворяющих $n+1$ уравнениям

$$x_{i_1} = r_1, \ \ldots, \ x_{i_{n+1}} = r_{n+1},$$

где $r_1, \ldots, r_{n+1}$ — произвольные рациональные числа. Те точки куба Q, которые принадлежат хотя бы одной из этих плоскостей, — это в точности те точки ξ, у которых имеется по крайней мере $n+1$ рациональных координат. Поэтому множество точек $\xi \in Q$, не принадлежащих ни одной из плоскостей (2), — это множество $Q^{(2n+1)}_n$ тех точек $(2n+1)$-мерного (единичного) куба $Q = Q^{2n+1}$, у которых имеется не более чем

$$(2n+1) - (n+1) = n$$

рациональных координат.

Другими словами,

$$Q^{(2n+1)}_n = Q^{2n+1} \cap Y^{(2n+1)}_n,$$

где $Y^{(2n+1)}_n$ есть множество всех точек $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in R^{2n+1}$, имеющих не более чем n рациональных координат. Мы видели, что в множестве $Q_n^{(2n+1)}$ лежит компакт — замыкание $[fX]$ образа fX пространства X при любом топологическом отображении $f \in C_n^0$. Но мы видели в § 4 гл. 2, что $\operatorname{ind} Y_n^{(2n+1)} \leqslant n$, значит, и $\operatorname{ind} Q_n^{(2n+1)} \leqslant n$, а так как $[fX] \subseteq Q_n^{(2n+1)}$ и $f\colon X \to Q_n^{(2n+1)}$ — топологическое отображение, то и $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Итак, мы доказали, что из $\dim X \leqslant n$ следует $\operatorname{ind} X \leqslant n$; другими словами, мы доказали неравенство

(3) $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ для всех X со счетной базой.

Кроме того, доказана следующая

Теорема 12 (обобщенная теорема Нёбелинга [1] — Гуревича [4] — Куратовского [5]). *Пусть X — пространство со счетной базой и $\dim X = n$; пусть $Q = Q^{2n+1}$ — единичный $(2n+1)$-мерный куб. В пространстве $C = C(X, Q)$ всех непрерывных отображений $f\colon X \to Q$ содержится всюду плотное множество*) топологических отображений пространства X в компакты, лежащие в множестве $Q_n^{(2n+1)}$ (состоящем из всех точек куба Q^{2n+1}, имеющих не более n рациональных координат).*

В § 4 гл. 2 мы видели, что

$$\operatorname{ind} Q_n^{(2n+1)} \leqslant \operatorname{ind} Y_n^{(2n+1)} \leqslant n.$$

В § 8 этой главы мы докажем, что для всякого пространства со счетной базой имеет место неравенство

(4) $$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X,$$

так что $\dim Q_n^{(2n+1)} \leqslant n$. Но для замкнутого n-мерного симплекса $\overline{T}^n$ имеем $\dim \overline{T}^n = n$ (гл. 3, § 3), и, значит, топологический образ симплекса $\overline{T}^n$ содержится (по только что доказанному) в $Q_n^{(2n+1)}$. Поэтому $\dim Q_n^{(2n+1)} = n$. Следовательно, в $Q_n^{(2n+1)}$ лежит компакт C^n, содержащий топологический образ самого $Q_n^{(2n+1)}$, значит, и всякого пространства X со счетной базой размерности $\dim X = n$ (в частности, симплекса $\overline{T}^n$). Отсюда вытекает, что $\dim C^n \geqslant n$; с другой стороны, $C^n \subset Q_n^{(2n+1)}$, значит, $\dim C^n \leqslant n$. Итак, $\dim C^n = n$.

Таким образом, неравенство

(4) $$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X,$$

которое будет доказано в § 8, — это единственное, что нам остается для того, чтобы была доказана следующая основная

---

*) Даже второй катерии (это означает, что дополнение к нему есть сумма счетного числа нигде не плотных в C множеств).

Теорема 13 (Гуревич [1], Нёбелинг [1]). *Для всякого целого числа $n \geqslant 0$ имеется n-мерный компакт $C^n \subset Q_n^{(2n+1)}$, содержащий топологический образ Z всякого пространства X со счетной базой размерности $\dim X \leqslant n$. Беря замыкание $[Z] \subseteq C^n$, получим n-мерный компакт, содержащий всюду плотное множество, гомеоморфное пространству X.*

Наконец, из (уже доказанного) неравенства (3) и (подлежащего доказательству в § 8) неравенства (4) вытекает, что

(5) $\dim X = \operatorname{ind} X$ для всех X со счетной базой.

§ 6. Доказательство теоремы о существенных отображениях

Теорема 14 (теорема о существенных отображениях) состоит из двух утверждений:

а) *Всякое n-мерное пространство X может быть существенно отображено на n-мерный замкнутый симплекс $\overline{T}^n$.*

б) *Всякое отображение n-мерного пространства в m-мерный симплекс (или шар) при $m > n$ несущественно.*

Доказательство утверждения а) Пусть $\dim X = n$; выбираем покрытие ω пространства X так, что не существует никакого ω-отображения пространства X в полиэдр размерности $< n$.

Заменяя, если нужно, покрытие ω более мелким, можем предположить его кратность равной $n+1$.

По теореме о канонических отображениях (§ 2, теорема 1) можно найти такой подкомплекс N' нерва N_ω и такое каноническое отображение f пространства X на полиэдр $\widetilde{N}'$, что всякий главный симплекс комплекса N' покрыт существенно. В силу выбора покрытия ω среди этих главных симплексов имеется n-мерный симплекс $T_0^n = |e_0 \ldots e_n|$. Положим $\Xi = f^{-1}\overline{T}_0^n$; тогда отображение f: $\Xi \to \overline{T}_0^n$ существенно.

Пусть вершины комплекса N', не являющиеся вершинами симплекса T_0^n, суть

$$e_{n+1}, \ldots, e_s.$$

Построим симплициальное отображение g комплекса N' на симплекс T_0^n, полагая

$$g(e_0) = e_0, \ldots, g(e_n) = e_n, \quad g(e_{n+1}) = \ldots = g(e_s) = e_0.$$

На симплексе T_0^n и его гранях отображение g тождественно, а все остальные симплексы комплекса N' оно переводит на ту или иную грань (возможно, собственную) симплекса T_0^n. В результате образ полиэдра $\widetilde{N}'$ при отображении $\widetilde{g}$ есть замкнутый симплекс $\overline{T}_0^n$. Наложив отображение $\tilde{g}$ на отображение f, получим непрерывное отображение

$$f_1 = \tilde{g}f\colon X \to \overline{T}_0^n,$$

при котором все точки $x \in X$, для которых $fx \in \tilde{N}' \setminus T_0^n$, т. е. все множество $f^{-1}(\tilde{N}' \setminus T_0^n)$, значит (так как $S \subseteq \tilde{N}' \setminus T_0^n$) и множество $f^{-1}S \subset f^{-1}(\tilde{N}' \setminus T_0^n)$, отобразятся в S. Итак,

$$f^{-1}S \subseteq f_1^{-1}S.$$

Докажем, что отображение f_1 есть существенное отображение пространства X на $\overline{T}_0^n$. В противном случае существовало бы отображение $\varphi\colon X \to S$, совпадающее с f_1 во всех точках множества $f_1^{-1}S$, значит, и подавно во всех точках множества $f^{-1}S$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \Xi \to S$; оно совпадает с f на $f^{-1}S$, что противоречит существенности отображения $f\colon \Xi \to \overline{T}_0^n$. Утверждение а) доказано.

Ниже $\overline{Q}$ обозначает замкнутый шар, Q—открытый шар в R^m.

Основная лемма. *Пусть φ — существенное отображение пространства X (произвольной размерности) на m-мерный шар $\overline{Q} \subset R^m$. Пусть $\overline{Q}_0 \subset Q$ — меньший шар (размерности m), концентричный шару $\overline{Q}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при всяком отображении f пространства X в R^m, отличающемся от φ меньше чем *) на ε, весь шар $\overline{Q}_0$ содержится в fX.*

Добавление к лемме. *В условиях леммы шар $\overline{Q}_0$ существенно покрыт при отображении f.*

Прежде чем доказать эту лемму, покажем, как из нее и из ранее установленных результатов следует утверждение б) теоремы о существенных отображениях.

Пусть при $n < m$ дано существенное отображение $\varphi\colon X \to \overline{Q}$ пространства X размерности n на m-мерный шар $\overline{Q}$. Согласно лемме определяем для отображения φ шар $\overline{Q}_0 \subset Q$ и число $\varepsilon > 0$. По первой аппроксимационной теореме (§ 2, теорема 2) существует такое отображение f пространства X в n-мерный полиэдр $\Pi \subseteq R^m$, что $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Так как полиэдр $\Pi \subseteq R^m$, имея размерность $n < m$, нигде не плотен в пространстве R^m, то он не может содержать в себе m-мерный шар $\overline{Q}_0$ — вопреки требованию $\overline{Q}_0 \subseteq fX \subseteq \Pi$ нашей леммы. Противоречие!

Итак, надо доказать лишь лемму.

Пусть $\overline{Q} \subset R^m$ (замкнутый шар радиуса r); центр этого шара обозначим через c. Пусть $\overline{Q}_0$ — шар радиуса r_0 с тем же центром c. Нам дано существенное отображение $\varphi\colon X \to \overline{Q}$. Выберем

*) В обычном смысле $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon$ для всех $x \in X$.

положительное $\varepsilon < \frac{r - r_0}{2}$ и докажем, что при всяком отображении $f\colon X \to R^m$, отличающемся от φ меньше чем на ε, будет

$$\bar{Q}_0 \subseteq fX.$$

Этим лемма будет доказана.

Обозначим через $\bar{Q}'$ (замкнутый) шар с тем же центром c и радиусом r', $r - \varepsilon < r' < r$, так что $r' - r_0 > \varepsilon$. Сферы, ограничивающие шары $\bar{Q}$, $\bar{Q}_0$, $\bar{Q}'$, обозначим соответственно через S, S_0, S'. Положим $\varphi^{-1}\bar{Q}' = A'$, $\varphi^{-1}(\bar{Q} \setminus Q') = A''$. Тогда

$$A' \cup A'' = X, \qquad A' \cap A'' = \varphi^{-1}S'.$$

Определим вспомогательное отображение g пространства X в $\bar{Q}$ следующим образом:

1) Пусть $x \in A''$. Тогда $\varphi x \in \bar{Q} \setminus Q'$. Проводим прямую через точки c и φx и рассмотрим на ней отрезок, лежащий между двумя сферами S и S'. Этот отрезок, ориентированный по направлению к центру c, обозначим через Δ.

Определяем gx как точку, делящую направленный отрезок $\overrightarrow{\varphi x\, fx}$ в том же отношении, в каком точка φx делит отрезок Δ. Очевидно,

$$gx = \varphi x, \quad \text{если} \quad x \in \varphi^{-1}S,$$

$$gx = fx, \quad \text{если} \quad x \in \varphi^{-1}S'.$$

2) Пусть $x \in A'$. Тогда $\varphi x \in \bar{Q}'$ и мы полагаем $gx = fx$. Так как и на A' и на A'' отображение g определено как непрерывное отображение и в точках $x \in A' \cap A'' = \varphi^{-1}S'$ оба отображения совпадают, то мы получили непрерывное отображение g всего пространства X в $\bar{Q}$. При этом на $\varphi^{-1}S$ отображение g совпадает с существенным отображением φ, а потому g есть отображение пространства X на весь шар $\bar{Q}$. В частности,

$$\bar{Q}_0 \subset \bar{Q} = gX.$$

Если $x \in A''$, т. е. $\varphi x \in \bar{Q} \setminus Q'$, то весь отрезок $[\varphi x, fx]$, имея длину $< \varepsilon < r' - r_0$, лежит вне $\bar{Q}_0$, так что и точка gx, принадлежа этому отрезку, лежит вне $\bar{Q}_0$.

Итак, если $x \in A''$, то $gx \notin \bar{Q}_0$. Поэтому, если $gx \in \bar{Q}_0$, то непременно $x \in A'$. Но так как $\bar{Q}_0 \subseteq gX$, то $\bar{Q}_0 \subseteq gA'$. По определению для $x \in A'$ имеем $gx = fx$, значит, $\bar{Q}_0 \subseteq gA' = fA'$, что и требовалось доказать.

Лемма, а значит и теорема о существенных отображениях доказаны.

Докажем добавление к основной лемме.

Начнем со следующих двух простых замечаний.

Замечание (А). Если $\varphi\colon X \to \bar{Q}$ существенно и отображение $g\colon X \to \bar{Q}$ совпадает с φ на $\varphi^{-1}S$, то и g существенно.

В самом деле, заметим прежде всего, что в наших условиях из $\varphi x \in S$ следует $gx \in S$, т. е. $\varphi^{-1}S \subseteq g^{-1}S$. Поэтому, если бы g не было существенно, т. е. имелось бы отображение g_1. $X \to S$, совпадающее с g на $g^{-1}S$, то и на $\varphi^{-1}S$ отображение g_1 совпадало бы с g, значит, и с φ — вопреки существенности отображения φ *).

Замечание (Б). Если φ: $X \to \overline{Q}$ существенно и $X_0 = \varphi^{-1}\overline{Q}_0$, то и отображение φ: $X_0 \to \overline{Q}_0$ существенно.

Для доказательства предположим противное. Тогда существует отображение φ_1: $X_0 \to S_0 = \overline{Q}_0 \diagdown Q_0$ такое, что $\varphi_1 x = \varphi x$ для $x \in \varphi^{-1}S_0$. Распространяем отображение φ_1: $X_0 \to S_0 \subset \overline{Q} \diagdown Q_0$ до отображения φ: $X \to \overline{Q} \diagdown Q_0$, полагая $\varphi_1 x = \varphi x$ в точках

$$x \in \varphi^{-1}(\overline{Q} \diagdown Q_0)$$

(так как для точек $x \in \varphi_1^{-1}S_0$ уже имеем $\varphi_1 x = \varphi x$, то отображение φ_1: $X \to \overline{Q} \diagdown Q_0$ непрерывно на всем X). Очевидно, $\varphi_1 x = \varphi x$ и на $\varphi^{-1}S$, а так как $\varphi_1 X \subseteq \overline{Q} \diagdown Q_0$, то получаем противоречие с существенностью отображения φ.

Теперь добавление к основной лемме доказывается в двух словах. Заметим прежде всего, что для любой точки $x \in X$ имеем

$$\rho(\varphi x, gx) < \varepsilon. \tag{1}$$

Докажем теперь, что

$$X_0 = f^{-1}\overline{Q}_0 = g^{-1}\overline{Q}_0. \tag{2}$$

В самом деле, пусть сначала $x \in f^{-1}\overline{Q}_0$. Тогда $fx \in \overline{Q}_0$, значит, $\varphi x \in \overline{Q}'$ и $gx = fx \in \overline{Q}_0$. Итак, $f^{-1}\overline{Q}_0 \subseteq g^{-1}\overline{Q}_0$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in g^{-1}\overline{Q}_0$, т. е. $gx \in \overline{Q}_0$. Тогда (в силу неравенства (1))

$$\varphi x \in \overline{Q}', \quad gx = fx, \quad fx \in \overline{Q}_0, \quad x \in f^{-1}\overline{Q}_0.$$

Равенство (2) доказано.

Требуется доказать, что отображение f множества $X_0 = f^{-1}\overline{Q}_0$ на $\overline{Q}_0$ существенно. Но в силу замечания (А) отображение g: $X \to \overline{Q}$ существенно, значит, в силу замечания (Б) существенно и отображение g: $X_0 \to \overline{Q}_0$. Но на $X_0 = g^{-1}\overline{Q}_0 = f^{-1}\overline{Q}_0$ отображения g и f совпадают; значит, отображение f: $X_0 \to \overline{Q}_0$ существенно и добавление к лемме доказано.

Замечание 1. Приведенное доказательство основной леммы к теореме 14 (и добавления к этой лемме) опирается лишь на самые элементарные соображения; если воспользоваться

*) Замечание (А) также является простым следствием предложения 1 из § 2 Прибавления к гл. 3.

Прибавлением к гл. 3 (лемма о грибе), то можно дать более короткое доказательство:

Пусть снова радиусы шаров Q и Q_0 равны r и r_0, $0 < \varepsilon < \min(r - r_0, r_0)$; пусть для отображения $f\colon X \to \bar{Q}_0$ имеем $\rho(fx, \varphi x) < \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Предположим, что отображение $f\colon f^{-1}\bar{Q}_0 \to \bar{Q}_0$ несущественно. Тогда существует отображение $f_1'\colon f^{-1}\bar{Q}_0 \to S_0$, совпадающее с f на $f^{-1}S_0$. Отображение $f_1\colon X \to \bar{Q} \setminus Q_0$, совпадающее с f_1' на $f^{-1}\bar{Q}_0$ и с f на $f^{-1}(\bar{Q} \setminus Q_0)$, непрерывно (см. гл. 1, § 1, предложение 10). Спроектируем теперь из центра шара Q множество $\bar{Q} \setminus Q_0$ на сферу S, обозначив это проектирование через π. Ясно, что отображение

$$\varphi_1 = \pi f_1\colon X \to S$$

непрерывно.

Если $x \in \varphi^{-1}S$, то $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon < r - r_0$. Поэтому $\rho(S, fx) < \varepsilon$ и $fx \in \bar{Q} \setminus Q_0$. Следовательно, $\rho(\varphi x, \varphi_1 x) = \rho(\varphi x, \pi f_1 x) = \rho(\varphi x, \pi f x) \leqslant \rho(\varphi x, fx) + \rho(fx, \pi fx) < 2\varepsilon < 2r$, т. е. точки φx и $\varphi_1 x$ не являются диаметрально противоположными точками сферы S, и поэтому (см. пример 1 из § 1 Прибавления к гл. 3) отображения

$$\varphi\colon \varphi^{-1}S \to S \quad \text{и} \quad \varphi_1\colon \varphi^{-1}S \to S$$

гомотопны. Но тогда (по предложению 1 из § 2 Прибавления к гл. 3) отображение $\varphi_1\colon X \to S \subseteq Q$ должно было бы быть существенным, а это не так. Полученное противоречие доказывает лемму и добавление к ней.

З а м е ч а н и е 2. Теорема о существенных отображениях позволяет по-новому доказать, что для n-мерного (в элементарном смысле слова) замкнутого симплекса T^n имеем $\dim T^n = n$: для этого достаточно найти какое-либо существенное отображение n-мерного симплекса T^n на себя. Но, как показано в гл. 3, таким отображением является тождественное отображение.

Обратно, если каким-нибудь образом доказано, что $\dim T^n = n$, то из теоремы о существенных отображениях сразу выводится существенность тождественного отображения замкнутого симплекса T^n на себя. В самом деле, пусть f — какое-нибудь существенное отображение T^n на себя (оно имеется в силу теоремы о существенных отображениях и равенства $\dim T^n = n$). Если бы тождественное отображение $\tau\colon T^n \to T^n$ было бы несущественным, то имелось бы отображение τ' замкнутого симплекса T^n в его границу S^{n-1}, тождественное на S^{n-1}. Но тогда $f' = f\tau'$ было бы отображением в S^{n-1}, совпадающим с f на $f^{-1}S^{n-1}$, что противоречит предположению существенности отображения f.

Иногда теорему о существенных отображениях удобно формулировать в следующем виде:

Теорема 14′. *Неравенство* $\dim X \leqslant n$ *для нормального пространства* X *осуществляется тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение* f_A *любого замкнутого множества* $A \subseteq X$ *в сферу* S^n *может быть продолжено до непрерывного отображения* f_X: $X \to S^n$.

В самом деле, пусть выполнено последнее условие, и пусть f — какое-либо непрерывное отображение пространства X в $(n+1)$-мерный замкнутый симплекс T^{n+1} с границей S^n. Положим $A = f^{-1}S^n$. По предположению отображение f, рассматриваемое на A, может быть продолжено до отображения f_X: $X \to S^n$, откуда следует, что отображение f несущественно. Итак, всякое непрерывное отображение f: $X \to T^{n+1}$ несущественно, а потому $\dim X \leqslant n$. Одна половина теоремы доказана.

Доказываем вторую половину. Пусть $\dim X \leqslant n$, и пусть дано какое-нибудь непрерывное отображение f_A: $A \to S^n$. Докажем, что отображение f_A можно продолжить до непрерывного f_X: $X \to S^n$. Предполагая, что S^n есть граница замкнутого шара T^{n+1}, рассматриваем f_A: $A \to S^n$ как отображение в T^{n+1} и продолжаем его, по предложению 7 § 5 гл. 1, до отображения f: $X \to T^{n+1}$. При этом $\Phi = f^{-1}S \supseteq A$. Так как $\dim X \leqslant n$, то отображение f несущественно. Так что имеется отображение f_X: $X \to S^n$, совпадающее с f на $\Phi = f^{-1}S^n \supseteq A$ и, следовательно, являющееся продолжением отображения f_A. Теорема 14′ доказана.

Определение (Александров [20]). Для подмножества A нормального пространства X будем писать

$$\operatorname{rd}_X A \leqslant n$$

(*относительная размерность* A *в* $X \leqslant n$), если для любого лежащего в A и замкнутого в X множества F справедливо неравенство $\dim F \leqslant n$, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 14′ позволяет доказать следующее утверждение:

Теорема 15 (Даукер [6]). *Если в нормальном пространстве* X *существует такое замкнутое множество* F, *что*

$$\dim F \leqslant n \quad \text{и} \quad \operatorname{rd}_X X \setminus F \leqslant n,$$

то и $\dim X \leqslant n$.

Лемма 1. *Пусть дано непрерывное отображение* f: $F \to S^n$ *замкнутого подмножества* F *нормального пространства* X. *Если* $\operatorname{rd}_X X \setminus F \leqslant n$, *то существует непрерывное продолжение*

$$\varphi\colon X \to S^n$$

отображения f.

Доказательство. Отображение f можно продолжить в непрерывное отображение f': $[O] \to S^n$ замыкания некоторой окрестности O множества F (см. гл. 1, § 5, предложение 8). По условию $\dim (X \setminus O) \leqslant n$. Следовательно, отображение f': гр $O \to S^n$ можно продолжить (по теореме 14′) в непрерывное отображение ψ: $X \setminus O \to S^n$. Отображение φ: $X \to S^n$, равное f' на $[O]$ и ψ на $X \setminus O$, непрерывно (см. гл. 1, § 1, предложение 10) и является продолжением f, ч. и т. д.

Доказательство теоремы 15. Рассмотрим замкнутое в X множество Φ и его непрерывное отображение f: $\Phi \to S^n$. По теореме 14′ существует непрерывное продолжение g: $F \to S^n$ отображения f: $\Phi \cap F \to S^n$. Отображение h: $\Phi \cup F \to S^n$, равное f на Φ и g на F, непрерывно. Так как $X \setminus (F \cup \Phi) \subseteq X \setminus F$, то $\operatorname{rd}_X X \setminus (F \cup \Phi) \leqslant \operatorname{rd}_X X \setminus F \leqslant n$. По лемме 1 существует непрерывное продолжение φ: $X \to S^n$ отображения h, а следовательно, и отображения f. По теореме 14′ $\dim X \leqslant n$, что и требовалось доказать.

Так как для нормального подпространства A пространства X, очевидно, выполнено неравенство

$$\operatorname{rd}_X A \leqslant \dim A,$$

то имеем

Следствие 1. *Если в наследственно нормальном пространстве X существует такое замкнутое множество F, что*

$$\dim F \leqslant n \quad \text{и} \quad \dim (X \setminus F) \leqslant n,$$

то и

$$\dim X \leqslant n.$$

§ 7. Доказательство теоремы суммы

Теорема 16. *Пусть X — нормальное пространство, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, каждое A_i замкнуто в X и $\dim A_i \leqslant n$. Тогда и $\dim X \leqslant n$.*

Доказательство (см. Хеммингсен [1]). Рассмотрим замкнутое в X множество F и его непрерывное отображение f: $F \to S^n$. Так как $\operatorname{rd}_X (A_1 \setminus F) \leqslant \dim A_1 \leqslant n$, то по лемме 1 § 6 отображение f можно непрерывно продолжить в отображение f_1': $A_1 \cup F \to S^n$. По предложению 8 из § 5 гл. 1 существует такая окрестность O_1 множества $A_1 \cup F$, что отображение f_1' можно непрерывно продолжить в отображение

$$f_1\colon [O_1] \to S^n.$$

Предположим, что для всех $i < k$, $k > 1$, уже построены такие непрерывные отображения

$$f_i\colon [O_i] \to S^n, \tag{1}$$

что $A_i \cup [O_{i-1}] \subseteq O_i$ и f_i есть продолжение f_{i-1}, $i = 2, \ldots, k-1$, Пусть $i=k$. Так как $\operatorname{rd}_X A_k \setminus [O_{k-1}] \leqslant \dim A_k \leqslant n$, то, по лемме 1 § 6 и по предложению 8 из § 5 гл. 1, отображение f_{k-1} можно непрерывно продолжить в отображение

$$f_k\colon [O_k] \to S^n$$

замыкания окрестности O_k множества $A_k \cup [O_{k-1}]$. Продолжая построение, получим отображения (1) для всех $i=1, 2, 3, \ldots$

Для точки $x \in X$ через $i(x)$ обозначим минимум тех i, для которых $x \in O_i$. Положим $\varphi x = f_{i(x)}x$. Так как $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i$, то отображение $\varphi\colon X \to S^n$ определено на всем X. Так как $\varphi|_F \equiv f_1|_F \equiv f$, то отображение $\varphi\colon X \to S^n$ является продолжением отображения f. Наконец, так как отображение f_i является продолжением отображения f_{i-1}, $i=2, 3, 4, \ldots$, то $\varphi|_{O_i} \equiv f_i|_{O_i}$, $i=1, 2, 3, \ldots$; следовательно, отображение φ непрерывно на каждом множестве O_i, а значит, и на их сумме $\bigcup\limits_i O_i = X$. По теореме 14′ имеем $\dim X \leqslant n$, что и требовалось доказать.

§ 8. Некоторые следствия теоремы суммы и окончание исследования пространств со счетной базой

1. Неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ для финально компактных и сильно паракомпактных пространств *). Доказательство этого неравенства опирается на две леммы, первая из которых понадобится нам и при доказательстве равенства $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для пространств со счетной базой.

Лемма 1. *Пусть X — финально компактное пространство, $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и ω — произвольное (быть может, бесконечное) открытое покрытие пространства X.*

Тогда существуют: счетная система дизъюнктных открытых множеств

$$\Sigma = \{U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots\}$$

и счетная система замкнутых множеств

$$\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1°. *Системы Σ и $\mathfrak{A}$ вписаны в покрытие ω.*

2°. $\operatorname{ind} A_k \leqslant n-1$ *для любого* $k=1, 2, 3, \ldots$

3°. $X = \bigcup\limits_i U_i \cup \bigcup\limits_k A_k$.

*) В частности, для пространств со счетной базой.

Доказательство. По предположению для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $[Ox]$ содержится в некотором элементе покрытия ω;

б) $\operatorname{ind} \operatorname{гр} Ox \leqslant n-1$.

В силу финальной компактности пространства X система всех этих окрестностей Ox содержит счетную подсистему

$$O_1, O_2, \ldots, O_k, \ldots; \qquad \operatorname{ind} \operatorname{гр} O_k < n-1,$$

покрывающую все пространство X. Положим теперь $A_k = \operatorname{гр} O_i$, и, значит, $\operatorname{ind} A_k \leqslant n-1$,

$$U_1 = O_1, \ \ldots, \ U_i = O_i \setminus \Big[\bigcup_{j<i} O_j\Big], \qquad i = 2, 3, 4, \ldots$$

Множества U_i открыты и попарно не пересекаются.

Докажем равенство 3°. Пусть x_0 — произвольная точка пространства X. Обозначим через i_0 наименьшее такое i, что $x_0 \in O_i$. Тогда $x_0 \notin \bigcup_{j<i_0} O_j$. Если при этом $x_0 \in \Big[\bigcup_{j<i_0} O_j\Big]$, то при некотором j имеем $x_0 \in [O_j] \setminus O_j = \operatorname{гр} O_j = A_j$. Если же $x_0 \notin \Big[\bigcup_{j<i_0} O_j\Big]$, то $x_0 \in U_{i_0}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть в нормальном пространстве X для всех замкнутых в X множеств F, удовлетворяющих неравенству* $\operatorname{ind} F \leqslant n-1$, *выполнено и неравенство* $\dim F \leqslant n-1$. *Пусть, кроме того, для данного конечного покрытия* $\omega = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ *пространства X построены:*

счетная дизъюнктная система открытых множеств

$$\Sigma = \{U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots\}$$

и счетная система замкнутых множеств

$$\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\},$$

удовлетворяющие условиям 1°—3° *леммы* 1. *Тогда в покрытие* ω *можно вписать открытое покрытие кратности* $\leqslant n+1$.

Доказательство. Положим $A = \bigcup_k A_k$. Так как A есть множество типа F_σ в нормальном X, то A — нормальное пространство. Так как $\operatorname{ind} A_k \leqslant n-1$, то по условию $\dim A_k \leqslant n-1$, а тогда по теореме суммы $\dim A \leqslant n-1$.

Множество $\Phi = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ замкнуто в X и (по формуле 3°) содержится в A, так что $\dim \Phi \leqslant n-1$. Поэтому в покрытие *)

$$\omega_\Phi = \{\Phi \cap \Gamma_1, \ldots, \Phi \cap \Gamma_s\}$$

---

*) Нас не смущает, что здесь и в аналогичных случаях ниже некоторые элементы покрытия могут оказаться пустыми.

пространства Φ можно вписать замкнутое покрытие $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}$ кратности $\leqslant n$ того же подпространства $\Phi \subset X$. По теореме о раздутии (гл. 1, § 10) можно каждое Φ_j заменить некоторой его окрестностью $V_j = O\Phi_j$ в X так, что образованное этими V_j покрытие

$$\gamma = \{V_1, V_2, \ldots, V_s\}$$

окрестности $O\Phi = \bigcup\limits_j O\Phi_j$ множества Φ будет все еще иметь кратность $\leqslant n$ и останется вписанным в покрытие ω (в которое, как мы помним, была вписана система множеств φ). Объединение системы $\gamma = \{V_1, \ldots, V_s\}$ кратности $\leqslant n$ и дизъюнктной системы $\Sigma = \{U_i\}$ есть система ω' кратности $\leqslant n+1$, вписанная в ω и, очевидно, являющаяся счетным открытым покрытием пространства X. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству неравенства

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \tag{1}$$

для финально компактного пространства X.

При $\operatorname{ind} X = -1$ оно верно. Предположим, что оно доказано для всех X, для которых $\operatorname{ind} X < n$. Пусть $\operatorname{ind} X = n$. Докажем, что тогда $\dim X \leqslant n$.

Пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное (конечное открытое) покрытие пространства X. Тогда, по леммам 1 и 2, в покрытие ω можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$. Следовательно, $\dim X \leqslant n$. Неравенство (1) доказано.

Согласно сказанному в конце § 5, теперь — *для пространств X со счетной базой* — полностью доказаны и основная теорема 13 и равенство

$$\dim X = \operatorname{ind} X.$$

Докажем теперь неравенство (1) для всякого сильно паракомпактного пространства X.

Доказательство. Если $\operatorname{ind} X = -1$, то $\dim X = -1 \leqslant \operatorname{ind} X$. Пусть доказываемое неравенство справедливо в случае, когда $\operatorname{ind} X = k < n$, и пусть $\operatorname{ind} X = n$.

Возьмем конечное открытое покрытие ω пространства X. Для каждой точки $x \in X$ возьмем окрестность Ox, с замыканием содержащуюся в одном из элементов покрытия ω и с $\operatorname{ind} \operatorname{гр} Ox \leqslant n-1$. В полученное покрытие $\varkappa = \{Ox\}$, $x \in X$, пространства X впишем звездно конечное покрытие ν. Рассмотрим произвольную компоненту ν_λ покрытия ν (см. гл. 1, § 6). Тело $\tilde{\nu}_\lambda$ компоненты ν_λ открыто-замкнуто в X и не пересекается с телами других компонент покрытия ν (см. гл. 1, § 6, п. 3). Пусть $V_1, \ldots, V_k, \ldots$ — элементы компоненты ν_λ: $V_k \in \nu_\lambda \subseteq \nu$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$, Для каждого k обозначим через $Ox(k)$ один из элементов покрытия $\varkappa$, содержащий множество V_k. Положим $O_k = Ox(k) \cap \tilde{v}_\lambda$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, $\tilde{v}_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ и $\text{гр}\, O_k \subseteq \text{гр}\, Ox(k) \cup \text{гр}\, \tilde{v}_\lambda = \text{гр}\, Ox(k)$, откуда $\text{ind}\, \text{гр}\, O_k \leqslant \text{ind}\, \text{гр}\, Ox(k) \leqslant n-1$. Положим

$$A_k = \text{гр}\, O_k$$

и

$$U_1 = O_1, \ \ldots, \ U_i = O_i \setminus \left[\bigcup_{j<i} O_j\right], \qquad i = 2, 3, 4, \ldots$$

Тогда $\text{ind}\, A_k \leqslant n-1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Как в лемме 1, можно показать, что $\tilde{v}_\lambda = \bigcup_i U_i \cup \bigcup_k A_k$. Кроме того, так как замыкания элементов покрытия $\varkappa$ содержатся в элементах покрытия ω, то и система $\mathfrak{A}$ множеств A_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и система Σ множеств U_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, вписаны в покрытие ω.

По лемме 2 и в силу индуктивного предположения существует открытое покрытие μ_λ множества $\tilde{v}_\lambda$, вписанное в покрытие ω и кратности $\leqslant n+1$.

Так как система множеств $\tilde{v}_\lambda$ дизъюнктна, а сами они открыты в X, то объединение всех систем μ_λ даст открытое покрытие μ пространства X, вписанное в покрытие ω и кратности $\leqslant n+1$. Следовательно, $\dim X \leqslant n$. Неравенство (1) установлено.

2. Равенство $\text{Ind}\, X = \text{ind}\, X$ для пространств со счетной базой*). Неравенство $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$ для пространств со счетной базой. Для любого нормального пространства X имеем $\text{ind}\, X \leqslant \text{Ind}\, X$ (гл. 2, § 1). Надо доказать неравенство

$$\text{Ind}\, X \leqslant \text{ind}\, X \tag{2}$$

для пространства X со счетной базой.

При $\text{ind}\, X = -1$ неравенство (2) верно. Предположим, что оно доказано для всех X, для которых $\text{ind}\, X < n$. Пусть $\text{ind}\, X = n$. Докажем, что тогда и $\text{Ind}\, X \leqslant n$.

Берем произвольное замкнутое множество $\Phi \subset X$ и произвольную его окрестность $O\Phi$. Требуется найти такую окрестность $O_1\Phi \subseteq O\Phi$, что $\text{Ind}\, \text{гр}\, O_1\Phi \leqslant n-1$.

Возьмем прежде всего окрестность V множества Φ, удовлетворяющую условию

$$[V] \subseteq O\Phi,$$

*) Для компактов и σ-компактных пространств это равенство фактически доказано еще Урысоном и Менгером в их работах [1], [2], а в общем случае — Гуревичем [2] и Тумаркиным [1]—[3].

и применим лемму 1 из п. 1 к покрытию

$$\omega = \{O\Phi,\ X \setminus [V]\}$$

пространства X, т. е. построим вписанные в ω:

счетную систему дизъюктных открытых множеств $\Sigma = \{U_i\}$,

счетную систему замкнутых множеств $\mathfrak{A} = \{A_k\}$, $\operatorname{ind} A_k \leqslant n-1$, так, чтобы выполнилось равенство

$$X = \bigcup_i U_i \cup \bigcup_k A_k.$$

Систему Σ разобьем на две подсистемы без общих элементов Σ' и Σ'': Σ' состоит из всех U_i, пересекающихся с $[V]$, а Σ'' — из всех остальных U_i. Тела систем Σ' и Σ'' обозначим соответственно через U', U'', так что $\left(\text{полагая } A = \bigcup_k A_k\right)$ имеем

а) $$X = U' \cup U'' \cup A,$$

б) $$U' \cap U'' = \Lambda,$$

в) $$[V] \cap U'' = \Lambda.$$

Так как система $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$ вписана в ω и ни один элемент подсистемы Σ', очевидно, не может содержаться в $X \setminus [V]$, то все элементы $U_i \in \Sigma'$ лежат в $O\Phi$, так что $U' \subseteq O\Phi$. Так как в силу б) и в) $U' \cup V$ и U'' — дизъюнктные открытые множества, то граница множества $U' \cup V$ не пересекается с U'' и, следовательно (очевидно, не пересекаясь и с $U' \cup V$), лежит в A. Но для пространства X со счетной базой доказано равенство $\dim X = \operatorname{ind} X$. Значит, $\dim A_k = \operatorname{ind} A_k \leqslant n-1$, а по теореме суммы и $\operatorname{ind} A = \dim A \leqslant n-1$. По индуктивному предположению $\operatorname{Ind} A \leqslant n-1$. Так как $\operatorname{гр}(U' \cup V) \subseteq A$, то и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр}(U' \cup V) \leqslant n-1$. Итак, открытое множество $O_1\Phi = U' \cup V$ есть лежащая в $O\Phi$ окрестность множества Φ, для которой

$$\operatorname{Ind} \operatorname{гр} O_1\Phi \leqslant n-1.$$

Неравенство (2) доказано. Вместе с тем доказано и основное *тождество Урысона*

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$$

для всех пространств со счетной базой.

Теорема 17 *). *Всякое n-мерное пространство со счетной базой может быть представлено как сумма $n+1$ попарно не-*

---

*) Первая часть этой теоремы была доказана Урысоном и Менгером для компактов и их счетных сумм, т. е. для абсолютных F_σ-пространств; в общем случае доказательство дано впервые Гуревичем и Тумаркиным в их цитированных выше работах. Вторая часть теоремы доказана Урысоном и Менгером во всей общности.

пересекающихся нульмерных множеств. Обратно, всякое пространство, являющееся суммой $n+1$ нульмерных множеств, не более чем n-мерно.

Таким образом, если считать понятие нульмерного множества известным (см. гл. 2, § 3), то размерность пространства X со счетной базой может быть определена так: она по определению бесконечна, если пространство не может быть представлено в виде суммы конечного числа нульмерных множеств. Если же пространство X может быть представлено как сумма конечного числа нульмерных множеств, то оно называется конечномерным, и тогда существует такое n, что X может быть представлено как сумма $n+1$, но не может быть представлено как сумма меньшего числа нульмерных слагаемых. В этом случае размерность X полагается равной n.

Доказательство теоремы 17. Первое утверждение теоремы вытекает из следующего вспомогательного утверждения:

Если $\dim X = n$, то существуют множества X^0, X', $X = X^0 \cup \cup X'$, $X^0 \cap X' = \Lambda$, такие, что $\dim X^0 = 0$, $\dim X' = n-1$.

Доказываем это вспомогательное утверждение. Возьмем базу $\mathfrak{B} = \{U\}$, $\dim \text{гр}\, U \leqslant n-1$. Так как в X имеется счетная база, то счетная база содержится и в базе $\mathfrak{B}$, так что без ограничения общности можно принять, что сама база $\mathfrak{B}$ счетная:

$$\mathfrak{B} = \{U_k\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \ \dim \text{гр}\, U_k \leqslant n-1.$$

Положим $X' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{гр}\, U_k$, $X^0 = X \setminus X'$. Среди множеств U_k имеются такие, у которых $\dim \text{гр}\, U_k = n-1$; в противном случае граница каждого U_k имела бы размерность $\leqslant n-2$ и, следовательно, так как U_k образуют базу пространства X, было бы $\dim X \leqslant n-1$. Поэтому по теореме суммы $\dim X' = n-1$. С другой стороны, множества $U_k^0 = X^0 \cap U_k$ образуют, очевидно, базу множества X^0, и надо лишь доказать, что все U_k^0 не только открыты, но и замкнуты в X^0. Но

$$[U_k^0]_{X^0} = X^0 \cap [U_k^0]_X \subseteq X^0 \cap [U_k]_X = X^0 \cap (U_k \cup \text{гр}\, U_k) = X^0 \cap U_k = U_k^0,$$

значит $[U_k^0]_{X^0} = U_k^0$, откуда утверждение и следует.

Вспомогательное утверждение, а значит, и первое утверждение теоремы 17 доказаны.

Второе утверждение, очевидно, вытекает из равенства $\dim X = \text{ind}\, X$ и из ранее доказанного неравенства Урысона — Менгера для малой индуктивной размерности, которое теперь может быть переписано в виде

(3) $$\dim (A \cup B) \leqslant \dim A + \dim B + 1$$

для любых двух множеств A и B, лежащих в пространстве X со счетной базой.

Тождество Урысона $\operatorname{ind} X = \dim X$ позволяет легко доказать для пространств со счетной базой X и Y неравенство

(4) $$\dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Так как произведение $X \times Y$ обладает счетной базой, то неравенство (4) эквивалентно неравенству

(4′) $$\operatorname{ind} (X \times Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y.$$

Достаточно рассмотреть лишь случай $\operatorname{ind} X < \infty$ и $\operatorname{ind} Y < \infty$. Неравенство (4′) очевидно для $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y = -1$. Предположим, что оно верно при $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y < n$, $n > -1$, и пусть $\operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y = n$.

Возьмем точку $(x_0, y_0) \in X \times Y$ и ее окрестность O. Можно, очевидно, считать, что $O = Ox_0 \times Oy_0$, где Ox_0 и Oy_0 — окрестности точек x_0 и y_0. Выберем такие окрестности $U \subseteq Ox$ и $V \subseteq Oy_0$ точек x_0 и y_0 соответственно, что

$$\operatorname{ind} \operatorname{rp} U < \operatorname{ind} X, \qquad \operatorname{ind} \operatorname{rp} V < \operatorname{ind} Y.$$

Так как

$$\operatorname{rp} (U \times V) = (\operatorname{rp} U \times [V]) \cup ([U] \times \operatorname{rp} V)$$

(см. гл. 1, § 8, п. 1), то по теореме суммы и по индуктивному предположению

$$\operatorname{ind} \operatorname{rp} (U \times V) = \dim \operatorname{rp} U \times V = \max (\dim \operatorname{rp} U \times [V],\ \dim [U] \times \operatorname{rp} V) \leqslant$$
$$\leqslant \max (\operatorname{ind} X - 1 + \operatorname{ind} Y,\ \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y - 1) \leqslant n - 1.$$

Следовательно, $\operatorname{ind} (X \times Y) \leqslant n$. Итак, неравенство (4′) верно. Поэтому верно и неравенство (4).

Этими результатами мы заканчиваем наш экскурс в теорию пространств со счетной базой.

3. Неравенство Веденисова. Возвращаясь к общей теории, докажем неравенство Веденисова [2]

(5) $$\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$$

для любого нормального пространства X.

Мы будем вести это доказательство индукцией по числу $\operatorname{Ind} X$.

1. При $\operatorname{Ind} X = -1$ неравенство (5) очевидно.

2. Предположим, что для пространств X, удовлетворяющих условию $\operatorname{Ind} X < n$, неравенство (5) верно. Докажем, что оно

выполнено и для пространств X, удовлетворяющих условию $\operatorname{Ind} X = n$. Докажем, другими словами, что из $\operatorname{Ind} X = n$ следует $\dim X \leqslant n$.

Пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Требуется найти вписанное в ω покрытие ω' кратности $\leqslant n+1$. По теореме об ужатии существует замкнутое покрытие $\{A_1, \ldots, A_s\}$, комбинаторно вписанное в ω, т. е. $A_i \subseteq O_i$, $i = 1, \ldots, s$. Далее, так как X — нормальное пространство и $\operatorname{Ind} X = n$, то для каждого A_i можно найти такую окрестность $OA_i = V_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, что $[V_i] \subseteq O_i$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_i \leqslant n - 1$. По индуктивному предположению $\dim \operatorname{гр} V_i \leqslant \operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_i \leqslant n - 1$. Полагая $F = \bigcup\limits_i \operatorname{гр} V_i$, получаем по теореме суммы $\dim F \leqslant n - 1$.

Рассмотрим теперь множества

$$U_1 = V_1, \ U_2 = V_2 \setminus [V_1], \ \ldots, \ U_k = V_k \setminus \bigcup_{j<k} [V_j] \quad \text{для} \quad k \leqslant s.$$

Тогда, очевидно, система множеств *) $\{U_1, \ldots, U_s\}$ дизъюнктна, вписана в ω и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i \cup F$.

Рассмотрим множество $\Phi = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i$. Множество Φ замкнуто в X. Так как, кроме того, $\Phi \subseteq F$, то $\dim \Phi \leqslant n - 1$. Поэтому в покрытие $\omega' = \{O_1 \cap \Phi, \ldots, O_s \cap \Phi\}$ можно вписать замкнутое покрытие $\varphi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_k\}$ кратности $\leqslant n$. Очевидно, φ вписано в ω. По теореме о раздутии каждое Φ_j, $j = 1, \ldots, k$, можно заменить его окрестностью H_j так, что кратность полученного семейства $\gamma = \{H_1, \ldots, H_k\}$ будет равна кратности φ и, следовательно, $\leqslant n$. При этом, очевидно, можно предположить, что семейство γ вписано в ω.

Рассмотрим, наконец, покрытие $\omega' = \{U_1, \ldots, U_s, H_1, \ldots, H_k\}$ пространства X. Оно вписано в ω и имеет кратность $\leqslant n + 1$, ч. и т. д.

4. Монотонность размерности $\dim X$ в совершенно нормальных (в частности, в метрических) пространствах и монотонность по сильно паракомпактным подмножествам. Предложение 1. *Если подмножество A нормального пространства X имеет в X тип F_σ, то для нормального* **) *подпространства A имеем*

$$\dim A \leqslant \dim X.$$

---

*) Среди множеств A_i, V_i, U_i могут быть и пустые.

**) В силу предложения 3 из § 5 гл. 1.

Доказательство. Пусть A представлено в виде счетной суммы замкнутых в X множеств A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда $\dim A_i \leqslant \dim X$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

В силу теоремы суммы

$$\dim A \leqslant \sup_i \dim A_i \leqslant \dim X,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если окрестность O подмножества X_0 пространства X покрыта открытыми в X множествами O_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, и существует такое нормальное подпространство X_1 пространства X, что $X_0 \subseteq X_1 \subseteq O$ и $\dim X_1 \leqslant n$, то в покрытие $\nu = \{O_i \cap X_0\}$, $i = 1, \ldots, s$, множества X_0 можно вписать открытое (в X_0) покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Доказательство. Впишем в открытое покрытие $\{O_i \cap X_1\}$, $i = 1, \ldots, s$, конечное открытое покрытие $\{G_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, кратности $\leqslant n+1$. Тогда покрытие $\{G_j \cup X_0\}$, $j = 1, \ldots, k$, множества X_0 будет открытым, вписанным в ν и кратности $\leqslant n+1$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 вытекает

Предложение 2 (Лифанов*)). *Пусть X_0 — нормальное подпространство нормального пространства X. Для неравенства*

$$\dim X_0 \leqslant \dim X$$

достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы для любой окрестности O множества X_0 существовало нормальное подпространство $X_1 = X_1(O)$ пространства X, для которого $X_0 \subseteq X_1 \subseteq O$ и $\dim X_1 \leqslant \dim X$.

Доказательство. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\nu = \{G_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, множества X_0. Выберем такие открытые в X множества O_i, что $G_i = O_i \cap X_0$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда система $\{O_i\}$ покрывает окрестность $O = \bigcup_{i=1}^{s} O_i$ множества X_0. Из леммы 3 следует, что в покрытие можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant \dim X + 1$, следовательно, $\dim X_0 \leqslant \dim X$, что и требовалось доказать.

Подпространство X_0 нормального пространства X назовем, следуя Смирнову [3], *нормально расположенным в X*, если в любой окрестности O множества X_0 найдется множество $X_1 \supseteq X_0$ типа F_σ в X.

Из предложений 1 и 2 сразу же вытекает

Предложение 3 (Смирнов [3]). *Если подпространство X_0 нормально расположено в нормальном пространстве X,*

---

*) См. Лифанов и Пасынков [1].

то

$$\dim X_0 \leqslant \dim X.$$

Так как в совершенно нормальном пространстве X произвольная окрестность O произвольного множества $X_0 \subseteq X$ имеет тип F_σ, то любое подпространство совершенно нормального пространства X нормально расположено в X. Поэтому доказана

Теорема 18 (монотонность $\dim X$ в совершенно нормальных пространствах X; Чех). *Для произвольного подпространства X_0 совершенно нормального (в частности, метрического) пространства X имеем*

$$\dim X_0 \leqslant \dim X. \tag{6}$$

Теорема 19 (Смирнов [3]). *Неравенство* (6) *верно для любого финально компактного подпространства X_0 нормального пространства X.*

Доказательство. В силу предложения 3 достаточно показать, что X_0 нормально расположено в X. Возьмем произвольно окрестность O множества X_0 и для каждой точки $x \in X_0$ выберем такую окрестность Ox, что $[Ox] \subseteq O$. Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in X_0$, множества X_0 выберем счетное подпокрытие $\{Ox_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда F_σ-множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [Ox_i]$ содержит X_0 и содержится в O. Нормальная расположенность X_0, а значит, и нужное неравенство доказаны.

Докажем более общее утверждение:

Теорема 19′ (Морита [3]). *Неравенство* (6) *верно для любого сильно паракомпактного подпространства X_0 нормального пространства X.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\nu = \{G_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, множества X_0. Выберем такие открытые в X множества O_i, что $G_i = O_i \cap X_0$. Тогда сумма $O = \bigcup\limits_{i=1}^{s} O_i$ является окрестностью X_0 в X. Для каждой точки $x \in X_0$ возьмем такую окрестность Ox, что $[Ox] \subseteq O$. В покрытие $\{Ox \cap X_0\}$, $x \in X_0$, множества X_0 впишем открытое (в X_0) звездно конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_\alpha\}$. Рассмотрим какую-нибудь компоненту γ_θ покрытия γ *). Она состоит из счетного числа элементов Γ_{α_j}, $j = 1, 2, 3, \ldots$, покрытия γ. Замыкания $[\Gamma_{\alpha_j}]$ содержатся в замыканиях окрестностей Ox, следовательно, содержатся в O. Итак, мы нашли F_σ-множество $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} [\Gamma_{\alpha_j}]$, содержащее тело $\tilde{\gamma}_\theta$

*) См. гл. 1, § 6, п. 3.

компоненты γ_θ и содержащееся в O. По лемме 3 и предложению 1 в покрытие $\{\tilde\gamma_\theta \cap O_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, тела $\tilde\gamma_\theta$ можно вписать открытое (в $\tilde\gamma_\theta$) покрытие ω_θ кратности $\leqslant \dim X + 1$. Так как тело $\tilde\gamma_\theta$ компоненты γ_θ открыто в X_0 *), то система ω_0 открыта в X_0. Так как $\tilde\gamma_\theta \cap \tilde\gamma_{\theta_1} = \Lambda$ при $\theta \neq \theta_1$, то объединение систем ω_θ, построенных для всех компонент покрытия γ, дает открытое покрытие множества X_0 кратности $\leqslant \dim X + 1$, вписанное в исходное покрытие ν, чем неравенство (6) установлено.

§ 9. Теорема суммы для локально конечных систем замкнутых множеств нормального пространства; локальная размерность $\operatorname{loc}\dim X$

Теорема 20 (Катетов [3], Морита [2]). *Если множество F, лежащее в нормальном пространстве X, является телом локально конечной в X системы θ замкнутых в X множеств F_α размерности $\dim F_\alpha \leqslant n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то оно замкнуто в X и $\dim F \leqslant n$.*

Доказательство. Замкнутость множества F вытекает из консервативности локально конечной системы θ, доказанной в гл. 1, § 6.

Множество $F \subseteq X$, будучи замкнутым в X, является нормальным подпространством пространства X. Для доказательства неравенства $\dim F \leqslant n$, в силу теоремы 14′ (в § 6), достаточно показать, что любое непрерывное отображение f замкнутого в F множества Φ в n-мерную сферу S^n можно продолжить на все множество F.

Обозначим через τ мощность множества $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ и через $\omega(\tau)$ — наименьшее порядковое число мощности τ. Индексы α считаем порядковыми числами от 1 до $\omega(\tau)$ включительно. Продолжение отображения f будем строить по индукции. Так как $\dim F_1 \leqslant n$, то по теореме 14′ отображение f: $\Phi \cap F_1 \to S^n$ можно продолжить в непрерывное отображение g_1: $F_1 \to S^n$. Отображение f_1: $\Phi \cup F_1 \to S^n$, равное f на Φ и g_1 на F_1, очевидно, непрерывно.

Пусть $\Phi_\alpha = \Phi \cup \bigcup\limits_{\alpha' < \alpha} F_{\alpha'}$. Предположим, что для всех чисел $\alpha < \beta$ уже построены непрерывные отображения f_α: $\Phi_\alpha \to S^n$, совпадающие с f на Φ и с $f_{\alpha'}$ на $\Phi_{\alpha'}$ для любого $\alpha' < \alpha$. Построим отображение f_β: $\Phi_\beta \to S^n$.

Рассмотрим сначала случай, когда число $\beta < \omega(\tau)$ не предельное, т. е. $\beta = \alpha_0 + 1$. Система множеств F_α, $\alpha \leqslant \alpha_0$, локально конечна, следовательно, множество Φ_{α_0} замкнуто. Так как $\dim F_\beta \leqslant n$, то по теореме 14′ отображение f_{α_0}: $F_\beta \cap \Phi_{\alpha_0} \to S^n$ можно продолжить в непрерывное отображение g_β: $F_\beta \to S^n$.

*) См. гл. 1, § 6, п. 3.

Отображение $f_\beta\colon \Phi_\beta \to S^n$, равное g_β на F_β и f_{α_0} на Φ_{α_0}, очевидно, непрерывно. По индуктивному предположению отображение f_{α_0} совпадает с f на Φ и с f_α на Φ_α для всех $\alpha < \alpha_0$. Поэтому f_β совпадает с f на Φ и с f_α на Φ_α для всех $\alpha \leqslant \alpha_0$, т. е. для всех $\alpha < \beta$.

Рассмотрим случай предельного числа $\beta \leqslant \omega(\tau)$. Система множеств F_α, $\alpha < \beta$, локально конечна, следовательно, множество $\Phi'_\beta = \Phi \cup \bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$ замкнуто. Очевидно, $\Phi'_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \Phi_\alpha$. Для произвольной точки $x \in \Phi'_\beta$ через $\alpha(x)$ обозначим наименьшее из таких чисел α, что $x \in \Phi_\alpha$. Отображение $f'_\beta\colon \Phi'_\beta \to S^n$ определим, положив $f'_\beta(x) = f_{\alpha(x)}(x)$, $x \in \Phi'_\beta$.

Рассмотрим произвольный индекс $\alpha < \beta$ и точку $x \in \Phi_\alpha$. Если $\alpha(x) = \alpha$, то $f'_\beta(x) = f_\alpha(x)$. Если же $\alpha(x) < \alpha$, то, во-первых, по предположению индукции $f_{\alpha(x)}(x) = f_\alpha(x)$ и, во-вторых, $f_{\alpha(x)}(x) = f'_\beta(x)$ по определению f'_β, откуда $f'_\beta = f_\alpha(x)$. Таким образом, отображение f'_β совпадает с отображением f_α на Φ_α для любого $\alpha < \beta$.

Докажем непрерывность отображения f'_β. Произвольная точка $x \in \Phi'_\beta$ обладает окрестностью Ox, пересекающейся лишь с элементами $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_k}$ некоторой конечной подсистемы системы θ и еще, быть может, с множеством Φ. Пусть $\alpha_0 = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Тогда, по предположению индукции, отображение f_{α_0} непрерывно на множестве $\Phi_{\alpha_0} \supseteq \Phi \cap \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \supseteq Ox$. Так как отображение f'_β совпадает с отображением f_{α_0} на $\Phi_{\alpha_0} \supseteq Ox$, то отображение f'_β непрерывно в точке x. Непрерывность отображения f'_β доказана.

В силу замкнутости множества Φ'_β и неравенства $\dim F_\beta \leqslant n$ отображение $f'_\beta\colon F_\beta \cap \Phi'_\beta \to S^n$, по теореме 14′, можно продолжить в непрерывное отображение $g_\beta\colon F_\beta \to S^n$. Отображение f_β, равное g_β на F_β и f'_β на Φ, непрерывно. Оно совпадает с f на Φ и с f_α на Φ_α для любого $\alpha < \beta$, так как этим свойством обладает отображение f'_β.

Итак, для любого $\beta \leqslant \omega(\tau)$ существует непрерывное отображение $f_\beta\colon \Phi_\beta \to S^n$, совпадающее с f на Φ. Так как $\Phi_{\omega(\tau)} = F$, то отображение $f_{\omega(\tau)}$ будет искомым продолжением отображения f. Теорема 20 доказана.

Следствие 1 (теорема суммы для σ-локально конечных систем множеств). *Если подмножество F нормального пространства X является телом σ-локально конечной в X системы θ*

замкнутых множеств F_α *размерности* $\dim F_\alpha \leqslant n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *то и* $\dim F \leqslant n$.

Доказательство. Пусть система θ распадается в сумму локально конечных систем θ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда, по предыдущей теореме, множества θ_i замкнуты в X и $\dim \tilde{\theta}_i \leqslant n$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Множество $\tilde{\theta} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i$, имея тип F_σ, нормально, и, по теореме суммы, $\dim \tilde{\theta} \leqslant n$, что и требовалось доказать.

Одним из важных приложений основной теоремы этого параграфа является возможность «локализации» определения размерности $\dim X$ посредством следующего определения.

Определение 1 (Даукер [6], Нагами [1]). Для нормального пространства X считаем $\operatorname{loc}\dim X \leqslant n$, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, для которой $\dim [Ox] \leqslant n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (для пустого X полагаем $\operatorname{loc}\dim X = -1$).

Теорема 21 (Даукер [6], Нагами [1]). *Для паракомпакта X всегда*

$$\operatorname{loc}\dim X = \dim X.$$

Доказательство. Неравенство $\operatorname{loc}\dim \leqslant \dim X$ следует из монотонности размерности $\dim X$ по замкнутым подмножествам.

Докажем неравенство $\operatorname{loc}\dim X \geqslant \dim X$. Пусть $\operatorname{loc}\dim X = n < \infty$. Возьмем для каждой точки $x \in X$ такую окрестность Ox, что $\dim [Ox] \leqslant n$. В покрытие $\{Ox\}$, $x \in X$, впишем замкнутое локально конечное покрытие $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Так как каждое множество F_α содержится в некотором множестве $Ox(\alpha)$, то $\dim F_\alpha \leqslant \dim [Ox(\alpha)] \leqslant n$. По теореме 20 имеем $\dim X \leqslant n$. Теорема 21 доказана.

§ 10. Первая теорема Даукера*)

1. Бесконечные комплексы. Их геометрнческая реализация в гильбертовом пространстве $R^{\mathfrak{m}}$. Определение абстрактного симплициального комплекса над данным полем вершин E было дано в гл. 3, § 2, п. 2. В этом параграфе будут рассматриваться бесконечные (главным образом полные) комплексы. Так же, как и конечный комплекс, бесконечный комплекс $K = \{T\}$ является частично упорядоченным множеством симплексов (с порядком $T' < T$, если T' — собственная грань симплекса T).

Типичным примером полного комплекса является нерв N_ω подмножеств данного множества X.

---

*) В этом и следующем параграфах рассматриваемые вопросы нзлагаются менее тщательно, чем раньше. Еще одно доказательство второй теоремы Даукера (основного результата § 11) можно найти в гл. 6.

Понятие симплекса $T \subset R^n$ и его основные свойства (см. гл. 3, § 1) не зависят от конечномерности пространства R^n и потому дословно переносятся в гильбертово пространство $R^\mathfrak{m}$ при любом кардинальном числе $\mathfrak{m}$.

Определение. Полный комплекс K, элементами которого являются дизъюнктные (открытые) симплексы гильбертова пространства $R^\mathfrak{m}$, называется *триангуляцией в гильбертовом пространстве* $R^\mathfrak{m}$, если множество вершин комплекса K является метрически дискретной системой одноточечных множеств в пространстве $R^\mathfrak{m}$, т. е. если вершины $e_\alpha \in K$ при некотором ε имеют ε-окрестности, образующие дизъюнктную систему $\{Oe_\alpha\}$.

Следующее предложение, по существу восходящее к Даукеру, является обобщением теоремы 2 гл. 3:

Теорема 22. *Всякий полный комплекс K над полем вершин E бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ изоморфен триангуляции в гильбертовом пространстве $R^\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Каждой вершине $e_\alpha \in E$ поставим в соответствие точку $x^\alpha \in R^\mathfrak{m}$ следующим образом: $x^\alpha = \{x^\alpha_\beta\}$, $x^\alpha_\alpha = 1$, $x^\alpha_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$. На точки $x^{\alpha_0}, \ldots, x^{\alpha_r}$ натягиваем в $R^\mathfrak{m}$ симплекс в том и только том случае, когда вершины $e_{\alpha_0}, \ldots, e_{\alpha_r}$ образуют остов комплекса K. Так как точки x^α находятся в $R^\mathfrak{m}$ в общем положении (любые n точек не лежат ни в какой $(n-2)$-мерной плоскости), полученные таким образом открытые симплексы $|x^{\alpha_0} \ldots x^{\alpha_r}|$ попарно не имеют общих точек. Итак, построенные нами симплексы в $R^\mathfrak{m}$ образуют комплекс X, изоморфный комплексу K. Очевидно также, что множество вершин $\{x^\alpha\}$ комплекса K является дискретной системой в пространстве $R^\mathfrak{m}$, так как различные вершины находятся на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга. Таким образом, комплекс X является триангуляцией в гильбертовом пространстве $R^\mathfrak{m}$. Теорема доказана.

Только что построенную и всякую изоморфную ей триангуляцию X, называемую геометрической реализацией комплекса K, будем также обозначать через K. Тело геометрической реализации комплекса K будем для краткости называть телом комплекса K и обозначать через $\tilde{K}$.

Таким образом, тело любого полного комплекса K над полем вершин (бесконечной) мощности $\mathfrak{m}$ является подмножеством обобщенного гильбертова пространства $R^\mathfrak{m}$. В частности, если ω — система мощности $\mathfrak{m}$ подмножеств пространства X, то $\tilde{N}_\omega \subset R^\mathfrak{m}$.

Замечание 1. Можно доказать следующее утверждение: если размерность комплекса K не превосходит числа n (все его симплексы имеют размерности $\leqslant n$), то множество симплексов геометрической реализации комплекса K является консервативной системой множеств (см. гл. 1, § 6) в пространстве R^m. Следовательно, для произвольного полного комплекса K симплексы триангуляции K образуют σ-консервативную систему в пространстве R^m.

2. Первая теорема Даукера. Предметом этого параграфа является

Теорема 23 (Даукер [2], [3]). *Если ω есть локально конечное открытое покрытие нормального пространства X, то существует каноническое отображение пространства X в тело $\tilde{N}_\omega$ нерва N_ω покрытия ω.*

Доказательство*). Так как в любое локально конечное открытое покрытие ω нормального пространства X можно вписать локально конечное корректное покрытие, без ограничения общности можно считать $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, корректным покрытием. Обозначим через e_α вершину триангуляцию N_ω, соответствующую O_α. Будем считать e_α точкой пространства R^m, все координаты которой равны нулю, кроме α-й, которая равна 1. Для каждого α строим такую непрерывную функцию f_α, что $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant 1$ во всем пространстве X, причем $f_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in X \setminus O_\alpha$.

Рассмотрим все O_α, которые содержат произвольно заданную точку $x \in X$. Пусть это будут $O_{\alpha_0}, \ldots, O_{\alpha_r}$. Тогда среди функций f_α только функции $f_{\alpha_0}, \ldots, f_{\alpha_r}$ принимают в точке x положительные значения. Полагаем

$$\mu_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\sum\limits_{\beta \in \mathfrak{A}} f_\beta(x)}.$$

Для каждой точки x набор $\{\mu_\alpha(x)\}$ определяет точку $f(x) = \{\mu_\alpha(x)\} \in R^m$. Если $O_{\alpha_0}, \ldots, O_{\alpha_r}$ суть все элементы покрытия ω, содержащие точку x, т. е. $x \in \bigcap\limits_i O_{\alpha_i} \setminus \bigcup\limits_{\beta \neq \alpha_i} O_\beta$, то существует симплекс $|e_{\alpha_0} \ldots e_{\alpha_r}| \subseteq \tilde{N}_\omega$ и $f(x)$ есть точка этого (открытого) симплекса.

Переходим к доказательству непрерывности отображения f. Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0) \in \tilde{N}_\omega$; пусть $O_\varepsilon y_0$ есть произвольная ε-окрестность точки y_0. Подберем такую окрестность Ux_0 точки x_0, чтобы было $fUx_0 \subseteq O_\varepsilon y_0$. Так как ω есть локально конечное покрытие, то существует такая окрестность Ox_0 точки x_0, что с Ox_0 пересекается лишь конечное число элементов покрытия ω; пусть это будут $O_{\alpha_0}, \ldots, O_{\alpha_s}$. Рассмотрим теперь множество

$$O_1 x_0 = \left\{ x \in X \mid |\mu_{\alpha_i}(x_0) - \mu_{\alpha_i}(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{s+1}},\ i = 0, \ldots, s \right\}$$

*) Мы воспроизводим доказательство Федорчука [1].

и положим $Ux_0 = Ox_0 \cap O_1x_0$. Тогда при $x \in Ux_0$ имеем

$$\sum_{\alpha} (\mu_\alpha(x_0) - \mu_\alpha(x))^2 = \sum_{i=0}^{s} (\mu_{\alpha_i}(x_0) - \mu_{\alpha_i}(x))^2 + \sum_{\beta \neq \alpha_i} (\mu_\beta(x_0) - \mu_\beta(x))^2 < \varepsilon,$$

так как $\sum_{\beta \neq \alpha_i} (\mu_\beta(x_0) - \mu_\beta(x))^2 = 0$. Таким образом, $fUx_0 \subseteq O_\varepsilon y_0$ и непрерывность отображения f доказана.

Чтобы доказать, что f есть каноническое отображение, достаточно показать, что прообраз любой главной звезды Oe_α содержится в элементе O_α покрытия ω.

Проверка этого факта состоит в дословном повторении аналогичного рассуждения в теореме 1.

Так как гильбертово пространство $R^{\mathfrak{m}}$ имеет вес $\mathfrak{m}$ (для бесконечного $\mathfrak{m}$), справедливо

Следствие 1. *Если ω есть локально конечное открытое покрытие бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ нормального пространства X, то существует ω-отображение пространства X в метрическое пространство веса $\mathfrak{m}$.*

Мощность всякого локально конечного покрытия пространства X бесконечного веса $\mathfrak{m}$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Для всякого открытого покрытия ω паракомпактного пространства X веса $\mathfrak{m}$ существует ω-отображение пространства X в метрическое пространство веса $\mathfrak{m}$.*

§ 11. Вторая теорема Даукера: $\dim X = \dim_\infty X = \dim^* X$

Говорят, что $\dim_\infty X \leq n$, если во всякое локально конечное открытое покрытие α пространства X можно вписать открытое покрытие β кратности $\leq n+1$. При этом $\dim_\infty X = n$, если $\dim_\infty X \leq n$ и не выполняется неравенство $\dim_\infty X \leq n-1$.

Аналогично определяется размерность $\dim^* X$ с заменой локально конечных покрытий звездно конечными.

Лемма 1. *В любое счетное локально конечное открытое покрытие $\gamma = \{\Gamma_k\}$ нормального пространства X можно вписать счетное звездно конечное открытое покрытие.*

Ввиду элементарного характера этой важной леммы мы сначала даем ей более длинное, но зато совершенно элементарное доказательство, а затем — короткое, но опирающееся на первую теорему Даукера (и на следствие 5 из § 11 первой главы).

Первое доказательство. Пусть $\delta = \{F_k\}$ — замкнутое покрытие пространства X, комбинаторно вписанное в γ:

$$F_k \subseteq \Gamma_k.$$

По лемме Урысона строим для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ непрерывную функцию φ_k: $X \to [0; 1]$, равную 1 на F_k, равную нулю на $X \setminus \Gamma_k$. Положим

$$A_k = \varphi_k^{-1}0 \supseteq X \setminus \Gamma_k,$$

$$G_k = X \setminus A_k.$$

Тогда

$$F_k \subseteq G_k \subseteq \Gamma_k.$$

Каждое G_k есть открытое F_σ-множество, и система $\mathfrak{G} = \{G_k\}$ есть локально конечное покрытие пространства, комбинаторно вписанное в γ. Каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому F_k, значит, некоторая функция φ_k в этой точке равна 1. Поэтому непрерывная функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi_k(x)$ положительна в каждой точке $x \in X$ и $\varphi(x) \leqslant 1$. Отсюда вытекает, что счетная совокупность открытых множеств

$$H_k = \left\{x \in X,\ \varphi(x) > \frac{1}{k}\right\} \tag{1}$$

является покрытием пространства X. Кроме того, для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ мы полагаем

$$\Phi_k = \left\{x \in X,\ \varphi_k(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}, \tag{2}$$

так что

$$\Phi_{k-1} \subseteq H_k \subseteq \Phi_k \subseteq H_{k+1}.$$

Докажем, что для любого k имеет место включение

$$\Phi_k \subseteq \bigcup_{i \leqslant k} G_i. \tag{3}$$

В самом деле, если

$$x \in X \setminus \bigcup_{i \leqslant k} G_i = \bigcap_{i \leqslant k} A_i,$$

то $\varphi_i(x) = 0$ при $i \leqslant k$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{n \geqslant k+1} \frac{1}{2^n} \varphi_n(x) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant k+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{k}$, значит, $x \notin \Phi_k$ — включение (3) доказано.

Положим

$$U_{kj} = G_j \cap (H_{k+1} \setminus \Phi_{k-1}), \tag{4}$$

где $j = 1, 2, \ldots, k$, а $k = 1, 2, 3, \ldots$ Покажем, что система $\omega = \{U_{kj}\}$ — искомая. Очевидно, что система ω вписана в покрытие $\mathfrak{G}$ и, следовательно, в покрытие γ. Пусть $x \in X$. Так как $\varphi(x) > 0$, то существует такое k, что $x \in \Phi_k \setminus \Phi_{k-1}$.

Вследствие включения (3) существует такое $j \leqslant k$, что $x \in G_j$, значит, $x \in G_j \cap (\Phi_k \setminus \Phi_{k-1})$.

Из (2) и (1) вытекает, что

$$x \in G_j \cap (H_{k+1} \setminus \Phi_{k-1}) = U_{kj}.$$

Итак, ω является покрытием пространства X. Остается доказать, что ω — звездно конечное покрытие. Пусть U_{ni} — произвольный элемент покрытия ω. Имеем $U_{ni} \subseteq H_{n+1} \setminus \setminus \Phi_{n-1} \subseteq \Phi_{n+1} \setminus \Phi_{n-1}$, так что U_{ni} не пересекается ни с каким U_{kj} при $k \geqslant n+2$. Это значит, что U_{ni} может пересекаться лишь с такими U_{kj}, у которых $k \leqslant n+1$, значит, и $j \leqslant n+1$, а таких U_{kj} в ω только конечное число. Лемма 1 доказана.

Второе доказательство. По первой теореме Даукера существует ω-отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на подмножество Y гильбертова пространства. Пространство Y обладает счетной базой, следовательно, оно финально компактно и сильно паракомпактно (см. гл. 1, § 11, п. 4). Для каждой точки $y \in Y$ выберем окрестность Oy, прообраз $f^{-1}Oy$ которой содержится в одном из элементов покрытия ω. В покрытие $\{Oy\}$ впишем открытое звездно конечное покрытие λ, а из покрытия λ выберем счетное подпокрытие $\nu = \{V_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Покрытие $\nu^{-1} = \{f^{-1}V_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, будет счетным открытым, звездно конечным и вписанным в ω. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть γ — звездно конечное покрытие нормального пространства X. Тогда в покрытие γ можно вписать звездно конечное покрытие ω, для которого существует ω-отображение f пространства X в тело $\tilde{N}_\omega$ нерва N_ω покрытия ω, существенное на прообразе каждого симплекса комплекса N_ω.*

Доказательство. Положим $\gamma_1 = \gamma$ и обозначим через N_1 нерв покрытия γ_1. Пусть f_1 — какое-нибудь каноническое отображение X в $\tilde{N}_1$. Так как покрытие γ_1 звездно конечно, то в звезде каждой вершины имеются симплексы старшей размерности. Поэтому, пользуясь процессом спуска, аналогичным примененному в § 1, получаем замкнутый подкомплекс $N_2 \subseteq N_1$ и отображение $f_2\colon X \to \tilde{N}_2$ (комплекс N_2 получается из N_1, если выбросить из N_1 все симплексы старшей размерности, несущественно покрытые отображением f_1). Отображение f_2 получается из f_1 соответствующим спуском (происходит одновременное выметание всех главных симплексов, не покрытых существенно).

Докажем, что отображение f_2 непрерывно. В самом деле, система симплексов триангуляции $\tilde{N}_1$ локально конечна. Поэтому в малой окрестности любой точки из $\tilde{N}_1$ отображение f_2 является композицией конечного числа непрерывных отображений, каждое из которых состоит в выметании лишь одного симплекса. В этих условиях непрерывность отображения f_2 непосредственно следует из леммы 2 § 1.

Продолжая этот процесс, получаем последовательность комплексов $N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k \supset \ldots$ и последовательность отображений $f_1 : X \to \tilde{N}_1$, $f_2 : X \to \tilde{N}_2$, ..., $f_k : X \to \tilde{N}_k$, ...

Пересечение $N_\omega = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ есть непустой комплекс. В самом деле, отправляясь от произвольного симплекса $T_1 \in N_1$, мы после конечной цепочки симплексов $T_1 \geqslant \ldots \geqslant T_h$, из которых каждый (начиная с T_2) есть грань предыдущего, придем к симплексу T_h, содержащемуся во всех комплексах N_h, N_{h+1}, ..., значит, и в $\bigcap\limits_k N_k$.

Если x — произвольная точка пространства X, то, начиная с некоторого (зависящего от этой точки) натурального числа k, будем иметь $f_k(x) = f_{k+1}(x) = \ldots$, так что, полагая (для данной точки x)

$$f(x) = f_k(x) = f_{k+1}(x) = \ldots,$$

получим предельное отображение

$$f = \lim_{k \to \infty} f_k \colon \ X \to \tilde{N}_\omega,$$

являющееся, как легко видеть, непрерывным отображением, существенно покрывающим каждый симплекс комплекса N_ω.

Теперь определяем покрытие ω как покрытие, элементами которого являются прообразы звезд вершин комплекса N_ω при отображении f. Лемма 2 доказана.

Теорема 24 (Даукер [2]). *Для нормального пространства X имеем*

$$\dim_\infty X = \dim^* X = \dim X.$$

Доказательство. А. Неравенства $\dim_\infty X \geqslant \dim^* X \geqslant \dim X$ очевидны.

Б*. Пусть $\dim X \leqslant n$; докажем, что $\dim^* X \leqslant n$. Пусть γ — звездно конечное покрытие пространства X. В силу леммы 2 в покрытие γ можно вписать звездно конечное покрытие ω, для которого имеется ω-отображение $f : X \to \tilde{N}_\omega$, существенно покрывающее каждый симплекс $T \in N$. Так как $\dim X \leqslant n$, то отсюда следует, что все симплексы $T \in N$ имеют размерность $\leqslant n$. Значит, кратность покрытия $\omega \leqslant n + 1$ и $\dim^* X \leqslant n$.

Б$^\infty$. Пусть $\dim X \leqslant n$; докажем, что $\dim_\infty X \leqslant n$.

Лемма 3. *В любое покрытие ω метрического пространства X можно вписать локально конечное σ-дискретное покрытие.*

В самом деле, в покрытие ω можно вписать σ-дискретное покрытие $\gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k$ (например, состоящее из элементов σ-дискретной базы). Затем в покрытие γ впишем локально конечное покрытие δ и возьмем его укрупнение δ_γ относительно γ.

Покрытие δ_γ (как укрупнение локально конечного покрытия δ) локально конечно (см. гл. 1, § 6); оно, кроме того, комбинаторно вписано в σ-дискретное покрытие γ и поэтому σ-дискретно. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Во всякое локально конечное покрытие $\gamma=\{\Gamma_\alpha\}$ нормального пространства X можно вписать локально конечное σ-дискретное покрытие.*

В самом деле, берем каноническое γ-отображение $f\colon X\to\tilde{N}_\gamma$ в (бесконечный полиэдр) $\tilde{N}_\gamma$ — тело нерва N_γ покрытия γ. Тогда главные звезды триангуляции N_γ образуют покрытие δ полиэдра $\tilde{N}_\gamma$, прообраз $f^{-1}\delta$ которого вписан в γ. В покрытие δ вписываем (согласно лемме 3) локально конечное σ-дискретное покрытие δ'. Прообраз $f^{-1}\delta'$ есть σ-дискретное локально конечное покрытие пространства X, вписанное в покрытие γ, что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству утверждения $Б^\infty$.

Пусть $\gamma=\{\Gamma_\alpha\}$—локально конечное покрытие пространства X. По лемме 4 существует σ-дискретное локально конечное покрытие β, вписанное в γ.

Пусть

$$\beta=\bigcup_{k=1}^{\infty}\beta_k,$$

где $\beta_k=\{G_\alpha^k\}$ — дискретная система открытых множеств в X; тогда

$$X=\bigcup_k\tilde{\beta}_k.$$

По лемме 1 в счетное локально конечное покрытие

$$\Omega=\{\tilde{\beta}_k\}$$

пространства X, являющееся укрупнением покрытия β, можно вписать звездно конечное покрытие Ω^*.

Уже доказано, что из $\dim X\leqslant n$ следует, что $\dim^* X\leqslant n$, поэтому в Ω^* можно вписать звездно конечное покрытие ω^* кратности $\leqslant n+1$. Укрупнив покрытие ω^* относительно счетного покрытия Ω, получаем такое счетное покрытие $\omega'=\{O_k'\}$ кратности $\leqslant n+1$, что $O_k'\subseteq\tilde{\beta}_k=\bigcup\limits_\alpha G_\alpha^k$. Положим $C_\alpha^k=G_\alpha^k\cap O_k'$

и $\delta_k = \{C_\alpha^k\}$, $\delta = \bigcup\limits_k \delta_k$. Очевидно, что система δ комбинаторно вписана в β и, следовательно, вписана в γ. Телом системы δ_k является множество O_k'. Значит, система δ является покрытием пространства X. Кроме того, покрытие δ локально конечно, как покрытие, комбинаторно вписанное в локально конечное покрытие β. Докажем, что кратность покрытия δ не превосходит $n+1$. В самом деле, элементы C_α^k и $C_{\alpha'}^k$ системы δ_k не пересекаются. В то же время $C_\alpha^k \subseteq O_k'$, и, следовательно, пересекающихся множеств C_α^k (с различными k) может быть не больше, чем элементов O_k' покрытия ω', т. е. $\leqslant n+1$. Теорема 24 доказана.

Следствие 1. *В любое открытое покрытие паракомпакта (в частности, метрического пространства) X размерности $\dim X \leqslant n$ можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Глава пятая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. II

Введение

Эта глава является непосредственным продолжением предыдущей; три различных круга вопросов составляют ее содержание.

Первый — самый значительный — сосредоточен вокруг так называемой факторизационной теоремы для бикомпактов. Этому кругу вопросов посвящены пять первых параграфов (из общего числа десяти), включая, однако, вспомогательный § 1, в котором доказывается необходимая для дальнейшего формула $\dim \beta X = \dim X$ (а заодно и формула $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$).

Факторизационные теоремы утверждают, что в определенных условиях для отображения $f: X \to Z$ существуют: такое пространство Y и такие отображения $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$, что $f = hg$, $\dim Y \leqslant \dim X$, $wY \leqslant wZ$, и если Z принадлежит некоторому классу пространств $\mathfrak{M}$, то и $Y \in \mathfrak{M}$.

Можно выделить два основных случая, когда факторизационные теоремы доказаны:

1) X, Y и Z — бикомпакты (Мардешич, 1960, [1]).

2) X — нормальное пространство, Y и Z — метрические пространства (Пасынков, 1963—1964, [6], [9] *)).

В этой главе мы будем иметь дело лишь с факторизационной теоремой для бикомпактов. При этом надо иметь в виду следующее. Заслуживает особого внимания частный случай названной теоремы, а именно тот, в котором бикомпакт Z (а следовательно, и Y) предполагается метризуемым. Этот частный случай мы и называем первой или «специальной» факторизационной теоремой для бикомпактов. Дело в том, что эта «специальная» теорема в дальнейшем как бы раздваивается, приводя и к общей факторизационной теореме для бикомпактов и к факторизационной теореме «для нормальных и метрических

*) Доказательства см. Пасынков [11], [14].

пространств», в которой X — нормальное пространство, а Y и Z — метрические. Эта последняя теорема будет доказана в гл. 6.

После того, как в § 1 будут доказаны равенства $\dim\beta X = \dim X$ (и $\operatorname{Ind}\beta X = \operatorname{Ind} X$), мы доказываем в § 2 первую факторизационную теорему для бикомпактов. Из нее в том же параграфе выводится прямое доказательство теоремы о существовании для всех n-мерных пространств со счетной базой n-мерного универсального компакта (теорема 13 гл. 4).

В § 3 доказывается вторая, т. е. общая, факторизационная теорема для бикомпактов. Параллельно с нею в том же параграфе доказывается аппроксимационная теорема Мардешича: всякий n-мерный бикомпакт есть предел обратного спектра из n-мерных компактов.

В § 4 при помощи факторизационной теоремы доказывается существование универсального бикомпакта данного веса и данной размерности, т. е. строится бикомпакт Π^n_τ, содержащий топологический образ всякого n-мерного*) нормального пространства X веса τ.

Эта теорема (доказанная в 1963 г. — совершенно различными методами — А. В. Зарелуа и Б. А. Пасынковым) выводится при нашем способе изложения из более общей теоремы, в которой от тихоновского пространства X требуется лишь, чтобы было $\dim\beta X = n$ (n-мерные нормальные пространства X этому требованию удовлетворяют).

В качестве следствия получается теорема (Скляренко, 1958, [1]: всякое n-мерное нормальное пространство веса τ имеет n-мерное бикомпактное расширение того же веса.

Пятый параграф посвящен теореме Фрейденталя (всякий n-мерный компакт есть предел счетного обратного спектра из n-мерных полиэдров). В том же параграфе показывается, что n-мерный бикомпакт может и не быть пределом никакого обратного спектра из n-мерных полиэдров.

Второй круг вопросов касается взаимоотношений между тремя основными размерностными инвариантами: $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$. После (отнюдь не полного!) обзора того, что мы по этому вопросу знаем, мы приводим в § 6 примеры бикомпактов X, для которых $\dim X < \operatorname{ind} X$.

В § 7 мы возвращаемся к фундаментальному тождеству Урысона $\dim X = \operatorname{ind} X$ для пространств со счетной базой, естественно расчленяющемуся на два неравенства:

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} X \leqslant \dim X.$$

Положение этих неравенств в нашем изложении теории размерности оказывается неодинаковым: для неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant$

*) Во всей этой главе пространство X называется n-мерным, если $\dim X = n$.

$\leqslant \dim X$ мы имеем хотя и короткое (принадлежащее В. Гуревичу), но довольно искусственное доказательство, изложенное в § 5 гл. 4. Это доказательство не выходит за рамки пространств со счетной базой и не дает нам понимания тех более общих топологических закономерностей, от которых выполнение неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ могло бы зависеть. В отличие от этого обстановка, в которой доказывается неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$, гораздо более удовлетворительна: в § 8 гл. 4 это неравенство было получено как следствие тех или иных условий типа компактности, налагаемых на пространство X (бикомпактность, финальная компактность, наконец, сильная паракомпактность — это последнее условие может быть еще немного ослаблено). Но здесь мы подходим и к концу пути возможных ослаблений условий типа компактности: для паракомпактов (и даже для метризуемых пространств без счетной базы) неравенство $\dim X \leqslant \leqslant \operatorname{ind} X$ может уже не иметь места (как и указывается специально в § 6). В то же время для всех метризуемых пространств имеет место равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$, доказанное Катетовым [2] *) (а также Морита [4]).

Таким образом, можно считать, что неравенство $\dim X \leqslant \leqslant \operatorname{ind} X$ практически довольно полно проанализировано, и аналогичная задача естественно ставится для неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant \leqslant \dim X$. В. И. Пономарев дал один из удовлетворительных вариантов решения этой задачи, введя весьма широкий класс пространств, для которых неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ имеет место. Мы называем эти пространства пономаревскими; они, во всяком случае, охватывают все метризуемые пространства (значит, и подавно все нормальные пространства со счетной базой), все нульмерные пространства, да и вообще более или менее все известные в настоящее время пространства, для которых неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ установлено. Достаточное условие Пономарева, естественно, совсем другой природы, чем условия типа компактности. Это условие может быть, пожалуй, охарактеризовано как требование достаточно правильного измельчения покрытий кратности $n+1$ (в данном n-мерном пространстве X). Исследованию этого условия и связанных с ним вопросов и посвящен § 7 настоящей главы. Заметим, что совершенно аналогичному исследованию подвергается и неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant \leqslant \dim X$.

В следующих двух параграфах мы возвращаемся к классической проблематике теории размерности, восходящей еще к ее основателям — Брауэру и Урысону. Это — проблематика, касающаяся понятия перегородки в данном пространстве и связанного с ним понятия канторова многообразия (которое, как известно,

---

*) Мы даем два различных доказательства этой теоремы в гл. 6 и 7.

Урысон считал центральным во всей теории размерности). В соответствии со сказанным § 8 посвящен так называемой теореме о перегородках, сформулированной в самом начале § 8, а § 9 — канторовым многообразиям. Доказывается — в обобщенном виде — гипотеза Урысона, что всякий n-мерный бикомпакт содержит n-мерное канторово многообразие; вводится понятие размерной компоненты (= максимального канторова многообразия, лежащего в данном бикомпакте), и доказывается теорема о существовании и единственности представления n-мерного (размерно однородного) бикомпакта в виде суммы его размерных компонент.

Наконец, дается аксиоматическое определение размерности в классе компактов, обобщаемое в Прибавлении к гл. 5 на класс пространств со счетной базой.

Замечание. Во всей этой главе под «покрытием» понимается конечное открытое покрытие; покрытия других видов (в частности, замкнутые) всегда соответственно квалифицируются. Кроме того, приняты следующие соглашения:

а) Вес wX всех рассматриваемых пространств X предполагается бесконечным.

б) Под произведением двух покрытий α и β (одного и того же пространства X) понимается покрытие (того же пространства X), элементами которого являются все непустые среди пересечений какого-либо $A \in \alpha$ с каким-либо $B \in \beta$.

в) Если даны отображение $f: X \to Y$ и покрытие $\beta = \{B_j\}$ пространства Y, то $f^{-1}\beta$ есть, по определению, прообраз покрытия β, т. е. покрытие $\{f^{-1}B_j\}$ пространства X.

г) Если дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ с пределом X, то под $\tilde{\omega}_\alpha$: $X \to X_\alpha$ всегда понимаем определенную в § 1 Прибавления к гл. 1 проекцию предела X в X_α.

§ 1. Равенства (1) $\dim \beta X = \dim X$, (2) $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$ для нормальных пространств. Дискретная сумма пространств

1. Доказательство равенства $\dim \beta X = \dim X$ *). Докажем сначала, что $\dim \beta X \geqslant \dim X$. Для этого достаточно из $\dim \beta X \leqslant n$ вывести $\dim X \leqslant n$. Напомним, что для любого открытого в X множества H через $O_\beta H$ обозначается наибольшее открытое в βX множество, дающее в пересечении с X множество H. Пусть $\omega = \{H_1, \ldots, H_s\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. По следствию 2 § 9 гл. 1 система множеств $O_\beta H_1, \ldots, O_\beta H_s$ образует покрытие Ω пространства βX. Если $\dim \beta X \leqslant n$, то в покрытие Ω можно вписать открытое покры-

*) См. Волмэн [1].

тие $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r\}$ пространства βX, имеющее кратность $\leqslant n+1$. Тогда множества $X \cap \Gamma_1, \ldots, X \cap \Gamma_r$ образуют покрытие кратности $\leqslant n+1$ пространства X, вписанное в ω. Так как ω — произвольное открытое покрытие пространства X, то $\dim X \leqslant n$.

Докажем теперь, что $\dim \beta X \leqslant \dim X$; для этого достаточно из $\dim X \leqslant n$ вывести $\dim \beta X \leqslant n$.

Пусть дано открытое покрытие $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ бикомпакта βX. В покрытие Ω можно комбинаторно вписать (гл. 1, § 10) замкнутое покрытие $\{F_1, \ldots, F_s\}$ пространства βX. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ возьмем окрестность V_i множества F_i под условием

$$[V_i]_{\beta X} \subseteq O_i.$$

В открытое покрытие $\gamma = \{X \cap V_1, \ldots, X \cap V_s\}$ пространства X впишем конечное замкнутое покрытие $\nu = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_s\}$ кратности $\leqslant n+1$ (см. гл. 2, § 2, замечание 4).

В силу следствия 1 из § 9 гл. 1 система $[\nu] = \{[\Phi_1]_{\beta X}, \ldots$ $\ldots, [\Phi_s]_{\beta X}\}$ имеет ту же кратность $\leqslant n+1$, что и система ν. Так как

$$\bigcup_{j=1}^{k} [\Phi_j]_{\beta X} = \left[\bigcup_{j=1}^{k} \Phi_j\right]_{\beta X} = [X]_{\beta X} = \beta X,$$

то система $[\nu]$ является покрытием бикомпакта βX. Наконец, каждый элемент покрытия $[\nu]$ содержится в одном из множеств $[V_i \cap X]_{\beta X} \subseteq [V_i]_{\beta X} \subseteq O_i$, поэтому покрытие $[\nu]$ вписано в покрытие ω. Неравенство $\dim \beta X \leqslant n$ доказано.

2. Доказательство равенства Веденисова [2] $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$ для нормального пространства X.

Лемма 1. *Если замкнутое в нормальном пространстве X множество Φ является перегородкой между замкнутыми (и дизъюнктными) в X множествами F_1 и F_2, то $[\Phi]_{\beta X}$ есть перегородка в βX между $[F_1]_{\beta X}$ и $[F_2]_{\beta X}$.*

Доказательство. Из определения перегородки следует, что $X \setminus \Phi = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \Lambda$, $V_i \supseteq F_i$, $i = 1, 2$, и множества V_i открыты в X.

Пусть

$$\Psi_i = V_i \cup \Phi, \qquad i = 1, 2.$$

Множества Ψ_i замкнуты в X, и

$$\Psi_1 \cap F_2 = \Psi_2 \cap F_1 = \Lambda.$$

Поэтому (см. гл. 1, § 9, предложение 2)

$$[F_1]_{\beta X} \subseteq \beta X \setminus [\Psi_2]_{\beta X} = O_\beta V_1, \quad [F_2]_{\beta X} \subseteq \beta X \setminus [\Psi_1]_{\beta X} = O_\beta V_2.$$

Так как $\Psi_1 \cup \Psi_2 = V_1 \cup \Phi \cup V_2$, то

$$O_\beta V_1 \cap O_\beta V_2 = \beta X \setminus ([\Psi_1]_{\beta X} \cup [\Psi_2]_{\beta X}) = \beta X \setminus [\Psi_1 \cup \Psi_2]_{\beta X} = \Lambda.$$

Поэтому множество

$$\beta X \setminus (O_\beta V_1 \cup O_\beta V_2) = [\Psi_1]_{\beta X} \cap [\Psi_2]_{\beta X} =^{*)} = [\Psi_1 \cap \Psi_2]_{\beta X} = [\Phi]_{\beta X}$$

есть перегородка в βX между множествами $[F_i]_{\beta X}$, $i = 1, 2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если множество O открыто в максимальном бикомпактном расширении βX вполне регулярного пространства X, то*

$$[O] \subseteq [O \cap X]_{\beta X}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$O \subseteq [O \cap X]_{\beta X}.$$

Очевидно,

$$O \cap [X \setminus O]_{\beta X} = \Lambda \quad \text{и} \quad \beta X = [X \cap O]_{\beta X} \cup [X \setminus O]_{\beta X},$$

откуда нужное включение следует. Лемма доказана.

Докажем равенство Веденисова. Очевидно, соотношения $\operatorname{Ind} X = -1$ и $\operatorname{Ind} \beta X = -1$ равносильны. Предположим, что соотношения $\operatorname{Ind} X \leqslant m$ и $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant m$ равносильны для всех $m < n$. Покажем их равносильность для $m = n$.

Пусть $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. Рассмотрим в βX дизъюнктную пару замкнутых множеств F_1 и F_2. Возьмем такие их окрестности OF_1 и OF_2, что

$$[OF_1] \cap [OF_2] = \Lambda.$$

Множества $[OF_i] \cap X$, $i = 1, 2$, замкнуты в X и дизъюнктны. Поэтому между ними в X существует перегородка Φ размерности

$$\operatorname{Ind} \Phi < n.$$

Из индуктивного предположения, предложения 1 § 9 гл. 1 и леммы 1 следует, что замыкание $[\Phi]_{\beta X} = \beta\Phi$ является перегородкой в βX между множествами $[[OF_i] \cap X]_{\beta X}$, $i = 1, 2$, и имеет размерность

$$\operatorname{Ind} [\Phi]_{\beta X} < n.$$

Из леммы 2 следует, что

$$F_i \subseteq [OF_i] \subseteq [OF_i \cap X]_{\beta X} \subseteq [[OF_i] \cap X]_{\beta X}, \qquad i = 1, 2,$$

*) См. гл. 1, § 9, предложение 3.

Поэтому $[\Phi]_{\beta X}$ есть перегородка в βX между F_1 и F_2. Мы установили неравенство $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n$ (исходя из неравенства $\operatorname{Ind} X \leqslant n$).

Пусть теперь $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n$. Докажем, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. Рассмотрим в X дизъюнктную пару замкнутых множеств F_1 и F_2. Их замыкания $\overline{F}_i = [F_i]_{\beta X}$ дизъюнктны (см. гл. 1, § 9, предложение 2), поэтому между $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ в βX существует перегородка $\overline{\Phi}$ размерности

$$\operatorname{Ind} \overline{\Phi} < n.$$

Тогда $\Phi = \overline{\Phi} \cap X$ есть перегородка в X между F_1 и F_2 и

$$[\Phi]_{\beta X} \subseteq \overline{\Phi}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Ind} [\Phi]_{\beta X} \leqslant \operatorname{Ind} \overline{\Phi} < n.$$

Из индуктивного предположения и из предложения 1 § 9 гл. 1 имеем

$$\operatorname{Ind} \Phi = \operatorname{Ind} \beta\Phi = \operatorname{Ind} [\Phi]_{\beta X} < n,$$

т. е.

$$\operatorname{Ind} X \leqslant n.$$

Равенство Веденисова доказано.

Замечание 1. Ю. М. Смирнов [2] показал, что существует нормальное пространство X, для которого

$$\operatorname{ind} \beta X \neq \operatorname{ind} X.$$

В то же время мы покажем в гл. 7 (также следуя Ю. М. Смирнову), что для совершенного нормального пространства имеет место равенство $\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$ (и, значит, $\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \beta X$).

3. Дискретная сумма пространств. Уже в следующем параграфе нам понадобится понятие дискретной суммы пространств. Определим его.

Пусть дана система топологических пространств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Дискретной суммой $d \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ пространств X_α будем называть дизъюнктную сумму $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ множеств X_α, снабженную следующей топологией:

множество O открыто в $d \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ тогда и только тогда, когда открыто каждое множество $O \cap X_\alpha$ в топологии пространства X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Очевидно, естественно возникающее при каждом $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ тождественное отображение множеств $f_{\alpha_0}\colon X_{\alpha_0} \to X_{\alpha_0} \subseteq d \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$

есть гомеоморфизм пространства X_{α_0} на открыто-замкнутое в $d\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$ множество, которое естественно отождествить с пространством X_{α_0}. Для нормальных X_α легко доказываются следующие формулы:

$$\dim d\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \dim X_\alpha, \tag{3}$$

$$\operatorname{Ind} d\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha \leqslant \sup \operatorname{Ind} X_\alpha. \tag{4}$$

Сначала докажем формулу (3). Пусть $\dim X_\alpha \leqslant n$, $\alpha\in\mathfrak{A}$. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\omega=\{O_i\}$, $i=1, \ldots, s$, пространства $X=d\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$. Для каждого α в покрытие $\{O_i \cap X_\alpha\}$, $i=1, \ldots, s$, впишем открытое и кратности $\leqslant n+1$ покрытие ν_α открытого в X множества X_α. Очевидно, система $\nu=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \nu_\alpha$ есть открытое покрытие пространства X, вписанное в покрытие ω и кратности $\leqslant n+1$ (в силу дизъюнктности множеств X_α при различных α). Следовательно (см. гл. 2, § 2, замечание 1), $\dim \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha \leqslant n$. Неравенство (3) доказано.

Перейдем к неравенству (4). Оно верно, если $\operatorname{Ind} X_\alpha=-1$, $\alpha\in\mathfrak{A}$. Предположим, что оно верно в случае $\operatorname{Ind} X_\alpha \leqslant k$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, $k=-1, 0, \ldots, n-1$, и пусть $k=n$.

Возьмем в $X=d\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$ пару дизъюнктных замкнутых множеств F_1 и F_2. Тогда для каждого α в открыто-замкнутом в X множестве X_α между F_1 и F_2 (т. е. между $F_1\cap X_\alpha$ и $F_2\cap X_\alpha$) найдется перегородка Φ_α размерности $\operatorname{Ind}\Phi_\alpha \leqslant n-1$. Множество $\Phi=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Phi_\alpha$ есть, очевидно, перегородка между F_1 и F_2 в X, и, кроме того, оно гомеоморфно пространству $d\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Phi_\alpha$. По индуктивному предположению $\operatorname{Ind}\Phi \leqslant n-1$. Следовательно, $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. Неравенство (4) доказано.

§ 2. Первая факторизационная теорема для бикомпактов и ее следствия

Теорема 1 (Мардешич [1]). *Для отображения f бикомпакта X на компакт Φ существуют: такой компакт Ψ размерности $\dim\Psi \leqslant \dim X$ и такие непрерывные отображения $g\colon X \xrightarrow{\text{на}} \Psi$ и $h\colon \Psi\to\Phi$, что $f=hg$.*

Доказательство. При $\dim X=\infty$ можно, очевидно, положить $\Psi=\Phi$, $g=f$, взяв за h тождественное отображение.

Итак, пусть $\dim X = r < \infty$. Положим

$$P_0 = \Phi, \quad g_0 = f\colon X \to \Phi.$$

Будем считать также $\operatorname{diam}\Phi \leqslant 1$ (см. гл. 1, § 3, замечание 1).

Возьмем какое-нибудь $\frac{1}{2^0}$-покрытие μ_{00} компакта P_0 и положим $\mu'_{00} = g_0^{-1}\mu_{00}$.

Впишем в μ'_{00} покрытие ω_1 кратности $\leqslant r+1$. Через g_1 обозначим ω_1-отображение бикомпакта X на r-мерный полиэдр P_1. Будем рассматривать P_1 в такой метрике ρ_1, что в ней $\operatorname{diam} P_1 \leqslant 1$.

Предположим, что для всех $n \leqslant j-1$ уже построены: покрытия ω_n кратности $\leqslant n+1$ бикомпакта X и ω_n-отображения $g_n\colon X \to P_n$ в r-мерные полиэдры P_n с метрикой ρ_n, в которой $\operatorname{diam} P_n \leqslant 1$, при этом для каждого $n \leqslant j-1$ и каждого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в P_n существуют такие $\frac{1}{2^n}$-покрытия μ_{kn}, что покрытие ω_n вписано в произведение прообразов $\mu'_{kn} = g_k^{-1}\mu_{kn}$ этих покрытий.

Пусть $n = j$. Для каждого $k < j$ возьмем $\frac{1}{2^j}$-покрытие μ_{kj} компакта P_k и положим $\mu'_{kj} = g_k^{-1}\mu_{kj}$. В произведение покрытий $\mu'_{0j} \wedge \mu'_{1j} \wedge \ldots \wedge \mu'_{j-1,\,j}$ впишем покрытие ω_j кратности $\leqslant r+1$. Через g_j обозначим ω_j-отображение бикомпакта X в r-мерный полиэдр P_j, рассматриваемый в такой метрике ρ_j, что в ней $\operatorname{diam} P_j \leqslant 1$.

Полиэдры P_n и отображения g_n построим для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ В произведении $P = \prod\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ введем метрику ρ, определяя для двух каких-нибудь точек

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \quad \text{и} \quad y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_n, \ldots)$$

расстояние

$$\rho(y, y') = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n^2(y_n, y'_n)\right)^{1/2}.$$

Отображения $g_n : X \to P_n$ определяют непрерывное отображение $g : X \to P$ по формуле $gx = \{g_n x\}$ (см. гл. 1, § 8, предложение 7). Компакт gX обозначим через Ψ. Естественное проектирование произведения P на сомножитель P_n обозначим $\pi_n : P \to P_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда, очевидно,

(a) $$g_n = \pi_n g, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для отображения $h = \pi_0\colon \Psi \to P_0 = \Phi$ имеем $f = g_0 = \pi_0 g = hg$.

Покажем, что $\dim \Psi \leqslant r$, для чего достаточно показать, что Ψ обладает сколь угодно мелкими покрытиями кратности $\leqslant r+1$.

Мы сейчас построим для каждого натурального числа j некоторое покрытие $\gamma_j = \{H_1, \ldots, H_{s_j}\}$ компакта Ψ, которое будет иметь кратность $\leqslant r+1$ и при достаточно большом j будет сколь угодно мелким.

Заметим прежде всего, что для любого множества $M^{(n)} \subseteq P_n$ имеем равенство

$$gg_n^{-1}M^{(n)} = \pi_n^{-1}M^{(n)} \cap \Psi, \tag{б}$$

являющееся очевидным следствием соотношений (а) и равенства $gX = \Psi$.

Так как $g_j : X \to P_j$ есть ω_j-отображение, $j = 1, 2, 3, \ldots$, то существует такое покрытие

$$\eta = \{U_1^j, \ldots, U_{s_j}^j\}$$

полиэдра P_j, что каждое $g_j^{-1}U_k^j$ содержится в некотором элементе покрытия ω_j.

Так как $\dim P_j \leqslant r$, то — заменяя, если нужно, покрытие η вписанным в него покрытием — можем считать, что кратность покрытия η не превосходит $r+1$.

Положим теперь

$$H_k^j = \pi_j^{-1}U_k^j \cap \Psi.$$

Тогда

$$\gamma_j = \{H_1^j, \ldots, H_{s_j}^j\}$$

есть покрытие компакта Ψ, также кратности $\leqslant r+1$, причем — в силу формулы (б) — имеем

$$H_k^j = gg_j^{-1}U_k^j. \tag{в}$$

Покажем, что при достаточно большом j элементы покрытия γ_j имеют сколь угодно малый диаметр; неравенство $\dim \Psi \leqslant r$ этим будет доказано. Каждое множество $g_j^{-1}U_k^j$, содержась в некотором элементе покрытия ω_j, содержится и в некотором элементе каждого из покрытий

$$\mu'_{0j}, \mu'_{1j}, \ldots, \mu'_{j-1,j},$$

следовательно, каждое из множеств

$$g_m(g_j^{-1}U_k^j), \quad k = 1, \ldots, s_j,$$

содержится в некотором элементе покрытия

$$\mu_{ij}, \quad m = 0, 1, \ldots, j-1,$$

и, значит, имеет диаметр $<\frac{1}{2^j}$. Поэтому (см. (в))

$$\text{(г)}\qquad \operatorname{diam}\pi_m H_k^j = \operatorname{diam}\pi_m g g_j^{-1} U_k^j = \operatorname{diam} g_m g_j^{-1} U_k^j < \frac{1}{2^j}$$

для $k=1, \ldots, s_j$; $m=0, 1, \ldots, j-1$.

Так как для любого множества $M \subseteq P$, очевидно,

$$\operatorname{diam} M \leqslant \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\operatorname{diam}\pi_n M)^2\right]^{1/2}$$

и так как

$$\operatorname{diam} P_n \leqslant 1, \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

то в силу неравенства (г) имеем

$$\operatorname{diam} H_k^j \leqslant \left[\sum_{n=0}^{j-1} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^j}\right)^2 + \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right]^{1/2} < \left(\frac{2}{2^{2j}} + \frac{2}{2^j}\right)^{1/2},$$

что при достаточно большом j достаточно мало. Теорема 1 доказаиа.

Следствие 1. *Для счетной (или конечной) системы отображений f_i бикомпакта X на компакты Φ_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, существуют: такой компакт Ψ с $\dim\Psi \leqslant \dim X$ и такие непрерывные отображения $g\colon X \xrightarrow{\text{на}} \Psi$ и $h_i\colon \Psi \to \Phi_i$, что $f_i = h_i g$, $i=1, 2, \ldots$*

Доказательство. Отображения f_i определяют непрерывное отображение f бикомпакта X в произведение $\Phi = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ по правилу $fx = \{f_i x\}$. Проекцию компакта $fX \subseteq \Phi = \prod \Phi_i$ в компакт Φ_i обозначим через π_i, $i=1, 2, 3, \ldots$ По предыдущей теореме существуют такой компакт Ψ, $\dim\Psi \leqslant \dim X$, и такие отображения $g\colon X \xrightarrow{\text{на}} \Psi$ на $h\colon \Psi \to fX$, что $f = hg$. Компакт Ψ, отображения g и $h_i = \pi_i h$, очевидно, являются искомыми.

Выведем из теоремы 1 теорему о существовании универсального n-мерного компакта и теорему о включении n-мерного пространства со счетной базой в компакт той же размерности.

Теорема 2 (Нёбелинг [1], Гуревич [1]). *Существует такой компакт $\Pi_{\aleph_0}^n$ размерности $\dim \Pi_{\aleph_0}^n = n$, что любое пространство X со счетной базой размерности $\dim X = n$ гомеоморфно некоторому подмножеству компакта $\Pi_{\aleph_0}^n$.*

Доказательство. Класс пространств со счетной базой и с $\dim X = n$ разбивается на подклассы $\alpha \in A$ попарно гомеоморфных между собой пространств. Выберем из каждого класса α пространство X_α. Тогда (см. § 1) $\dim X_\alpha = \dim \beta X_\alpha = n$. Рассмотрим пространство $Y = d \bigcup\limits_\alpha \beta X_\alpha$, являющееся дискретной суммой максимальных бикомпактных расширений βX_α пространств X_α; бикомпакты βX_α попарно не пересекаются и открыто-замкнуты в Y. Пространство Y, очевидно, локально бикомпактно и нормально (даже паракомпактно). Так как $\dim \beta X_\alpha = n$, то (см. § 1) и $\dim Y = n$, а в силу нормальности Y имеем и $\dim \beta Y = n$ (см. § 1). По теореме Урысона для каждого α существует гомеоморфизм f_α: $X_\alpha \to I^\infty$ пространства X_α в гильбертов кирпич I^∞. Отображение f_α можно продолжить в непрерывное отображение $\bar f_\alpha$: $\beta X_\alpha \to I^\infty$, $\alpha \in A$ (см. гл. 1, § 9, теорема 12). Отображение пространства Y в I^∞, совпадающее на каждом бикомпакте βX_α с $\bar f_\alpha$, обозначим через $\bar f$. Продолжение $\bar f$ на βY обозначим через F. Из построения отображения F: $\beta Y \to I^\infty$ следует, что оно будет топологическим на каждом множестве $X_\alpha \subseteq \beta X_\alpha \subseteq \beta Y$. По первой факторизационной теореме существуют: такой компакт $\Pi^n_{\aleph_0}$ и такие отображения g: $\beta Y \to \Pi^n_{\aleph_0}$ и h: $\Pi^n_{\aleph_0} \to I^\infty$, что $F = hg$ и $\dim \Pi^n_{\aleph_0} \leqslant n$. Отображение F является топологическим на множествах X_α, поэтому топологическим на этих множествах будет и отображение g. Итак, каждое пространство X_α гомеоморфно некоторому подмножеству компакта $\Pi^n_{\aleph_0}$ с $\dim \Pi^n_{\aleph_0} \leqslant n$. Компакт $\Pi^n_{\aleph_0}$ является, очевидно, искомым. Теорема 2 доказана.

Следствие 2 (Гуревич [1]). *Для всякого пространства X со счетной базой размерности $\dim X = n$ существует компакт cX размерности $\dim cX \leqslant n$, являющийся расширением пространства X.*

Действительно, если считать $X \subseteq \Pi^n_{\aleph_0}$, то cX получается взятием замыкания X в $\Pi^n_{\aleph_0}$.

В силу монотонности малой индуктивной размерности по любым подмножествам, из следствия 2 и из неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ для компактов (гл. 4, § 3, п. 3) вытекает

Следствие 3. *Для произвольного пространства со счетной базой X всегда*

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X.$$

§ 3. Вторая (общая) факторизационная теорема для бикомпактов

Теорема 3 (Мардешич [1]). *Для непрерывного отображения f: $X \to Z$ бикомпакта X на бикомпакт Z существуют: такой бикомпакт Y и такие непрерывные отображения*

$g\colon X \to Y$ *и* $h\colon Y \to Z$, *что* $f = hg$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$$\dim Y \leqslant \dim X, \qquad wY \leqslant wZ.$$

Лемма 1. *Если бикомпакт X является пределом спектра $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta\}$ из бикомпактов X_α, $\dim X_\alpha \leqslant r$ для любого α, то и $\dim X \leqslant r$.*

Доказательство. Как всегда, обозначаем через $\varpi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ проекцию предела X в X_α.

В силу предложения 7 § 1 Прибавления к гл. 1 и неравенств

$$\dim \varpi_\alpha X \leqslant \dim X_\alpha \leqslant r$$

можно считать, что $X_\alpha = \varpi_\alpha X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Поэтому проекции ϖ_α^β являются отображениями «на».

Возьмем теперь произвольное конечное открытое покрытие ω пространства X. В силу предложения 11 из § 1 Прибавления к гл. 1 существует такой индекс $\alpha = \alpha(\omega)$ и такое конечное открытое покрытие ν_α бикомпакта X_α, что покрытие $\pi_\alpha^{-1}\nu_\alpha$ вписано в покрытие ω.

Впишем в ν_α покрытие μ_α кратности $\leqslant r+1$. Тогда $\mu = \varpi_\alpha^{-1}\mu_\alpha$ есть покрытие кратности $\leqslant r+1$ бикомпакта X, вписанное в покрытие ω. Лемма доказана.

Следующая лемма является основной и представляет самостоятельный интерес.

Основная лемма (лемма 2). *Для отображения f бикомпакта X на бикомпакт Z существуют: такой бикомпакт Y и такие отображения $g\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ и $h\colon Y \xrightarrow{\text{на}} Z$, что $f = hg$, а Y является пределом обратного спектра $S = \{\Psi_\alpha, \varpi_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, из компактов Ψ_β размерности $\dim \Psi_\beta \leqslant \dim X$, с проекциями «на»,* мощн. $B \leqslant wZ$.

Доказательство. Бикомпакт Z будем считать подмножеством тихоновского кирпича $I^\tau = \prod\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ веса $\tau = wZ$, где $I_\alpha = [0, 1]_\alpha$.

Множество B всевозможных конечных наборов $\beta = (\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_s)$ попарно различных индексов $\alpha \in A$ имеет мощность τ и распадается в дизъюнктную сумму множеств B_i, элементами которых являются наборы в точности из i индексов α, $i = 1, 2, 3, \ldots$

В множестве B введем порядок, считая $\beta' > \beta$, если $\beta' \supset \beta$. Очевидно, относительно этого порядка множество B направлено. Естественную проекцию множества $Z \subset I^\tau$ в сомножитель I_α обозначим через π_α, $\alpha \in A$. Возьмем произвольное $\beta \equiv (\alpha) \in B_1$ и применим теорему 1 к отображению $\pi_\alpha f: X \to I_\alpha$. Тогда имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_\alpha f"] \arrow[d, "g_\beta"'] & I_\alpha \\
\Psi_\beta \arrow[ur, "h_\alpha^\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

т. е. существуют такой компакт Ψ_β, $\dim \Psi_\beta \leqslant \dim X$, и такие отображения g_β: $X \xrightarrow{\text{на}} \Psi_\beta$ и h_α^β: $\Psi_\beta \to I_\alpha$, что

(1) $$\pi_\alpha f = h_\alpha^\beta g_\beta.$$

Теперь будем строить спектр S по индукции.

Предположим, что для всех номеров $i \leqslant n-1$ уже построены такие компакты Ψ_β, $\dim \Psi_\beta \leqslant \dim X$, $\beta \in B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}$, и такие отображения g_β: $X \xrightarrow{\text{на}} \Psi_\beta$ и $\omega_\beta^{\beta'}$: $\Psi_{\beta'} \xrightarrow{\text{на}} \Psi_\beta$ (при $\beta' > \beta$), что

(2) $$g_\beta = \omega_\beta^{\beta'} g_{\beta'}$$

при $\beta' > \beta$.

Пусть $\beta_0 \in B_n$. Возьмем все $\beta < \beta_0$. Их конечное число. По следствию 1 теоремы 1, примененному к отображениям g_β: $X \to \Psi_\beta$, $\beta < \beta_0$, существуют такой компакт Ψ_{β_0}, $\dim \Psi_{\beta_0} \leqslant \dim X$, и такие отображения g_{β_0}: $X \xrightarrow{\text{на}} \Psi_{\beta_0}$ и $\omega_\beta^{\beta_0}$: $\Psi_{\beta_0} \to \Psi_\beta$, что $g_\beta = \omega_\beta^{\beta_0} g_{\beta_0}$, $\beta < \beta_0$. Так как при $\beta < \beta_0$ отображения g_β: $X \to \Psi_\beta$ являются отображениями «на», то и $\omega_\beta^{\beta_0}\Psi_{\beta_0} = \Psi_\beta$.

Продолжая описанный процесс, получим для всех $\beta \in B$ компакты Ψ_β, $\dim \Psi_\beta \leqslant \dim X$, и отображения g_β: $X \xrightarrow{\text{на}} \Psi_\beta$ и $\omega_\beta^{\beta'}$: $\Psi_{\beta'} \xrightarrow{\text{на}} \Psi_\beta$, $\beta' > \beta$, удовлетворяющие условиям (2).

Рассмотрим индексы $\beta'' > \beta' > \beta$ и покажем, что $\omega_\beta^{\beta''} = \omega_\beta^{\beta'}\omega_{\beta'}^{\beta''}$. Возьмем точку $y_{\beta''} \in \Psi_{\beta''}$. Отображение $g_{\beta''}$ является отображением «на», поэтому существует точка $x \in X$, для которой $g_{\beta''}x = y_{\beta''}$. Из (2) следует, что

$$\omega_\beta^{\beta'}\omega_{\beta'}^{\beta''} y_{\beta''} = \omega_\beta^{\beta'}\left(\omega_{\beta'}^{\beta''} g_{\beta''} x\right) = \omega_\beta^{\beta'} g_{\beta'} x = g_\beta x = \omega_\beta^{\beta''} g_{\beta''} x = \omega_\beta^{\beta''} y_{\beta''},$$

Итак, построен спектр $S=\{\Psi_\beta,\ \varpi_\beta^{\beta'}\}$, $\beta\in B$, из компактов Ψ_β с проекциями «на», причем $\dim\Psi_\beta\leqslant\dim X$ и мощн. $B=\tau=wX$. Бикомпакт, являющийся пределом спектра S, обозначим через Y. В силу соотношений (2) можно определить непрерывное отображение $g\colon X\xrightarrow{\text{на}}Y$, полагая $gx=\{g_\beta x\}$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 5). Это отображение удовлетворяет соотношениям

(3) $$g_\beta=\varpi_\beta g,\qquad \beta\in B.$$

Определим теперь отображение

$$h\colon Y\to I^\tau\equiv\prod_{\alpha\in A}I_\alpha$$

как диагональное произведение отображений $h_\alpha^\beta\varpi_\beta\colon Y\to I_\alpha$, $\beta\equiv(\alpha)\in B_1$, т. е. полагая

$$hy=\{h_\alpha^\beta\varpi_\beta y\}\in\prod_{\alpha\in A}I_\alpha,\qquad y\in Y,\ \beta\in B_1.$$

Отображение h непрерывно и удовлетворяет соотношениям

(4) $$h_\alpha^\beta\varpi_\beta=\pi_\alpha h\quad\text{для}\quad\alpha\in A,\ \beta\equiv(\alpha)\in B_1$$

(см. гл. 1, § 8, п. 2). Итак, бикомпакт Y и отображения $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to I^\tau$ построены.

Докажем равенство

(5) $$hg=f.$$

Оно означает, что для любой точки $x\in X$ точки $fx\in\prod_\alpha I_\alpha$ и $hgx\in\prod_\alpha I_\alpha$ имеют — при любом α — совпадающие α-е координаты $\pi_\alpha fx$ и $\pi_\alpha hgx$.

Итак, доказать равенство (5) — значит доказать, что

(6) $$\pi_\alpha hg=\pi_\alpha f\quad\text{для любого}\quad\alpha\in A.$$

Но из (4) и (3) следует, что

$$\pi_\alpha hg=h_\alpha^\beta\varpi_\beta g=h_\alpha^\beta g_\beta,\qquad\beta\equiv(\alpha),$$

тогда как по формуле (1) имеем

$$h_\alpha^\beta g_\beta=\pi_\alpha f,$$

значит,

$$\pi_\alpha hg=\pi_\alpha f$$

для любого α.

Формула (5) доказана. Из нее следует, что

$$hY=h(gX)=fX=Z.$$

Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 остается доказать, что из приведенного способа построения бикомпакта Y вытекают неравенства

$$\dim Y \leqslant \dim X, \tag{7}$$

$$wY \leqslant wZ. \tag{8}$$

Неравенство (7) непосредственно следует из леммы 1, так как $\dim Y_\beta \leqslant \dim X$ для всех $\beta \in B$.

Неравенство (8) вытекает из того, что $w\Psi_\beta = \aleph_0$ для всех β и мощность множества $B = \{\beta\}$ не превосходит кардинального числа wZ.

Теорема 3 доказана.

Возьмем в лемме 2 в качестве отображения f тождественный гомеоморфизм пространства X; тогда гомеоморфизмом будет и отображение g.

Таким образом, имеет место

Теорема 4 (аппроксимационная теорема, Мардешич [1]). *Произвольный бикомпакт X можно представить в виде предела обратного спектра $S = \{\Psi^\beta, \mathfrak{F}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, из компактов Ψ_β с $\dim \Psi_\beta \leqslant \dim X$.*

Замечание 1. Из леммы 1 вытекает, что n-мерный бикомпакт X нельзя представить в виде предела обратного спектра $\{\Psi_\beta, \mathfrak{F}_\beta^{\beta'}\}$ из компактов Ψ_β, размерность которых $< n$. Таким образом, имеет место

Теорема 5 (Мардешич [1]). *Для того чтобы бикомпакт X имел размерность $\dim X \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы X был пределом спектра $\{\Psi_\beta, \mathfrak{F}_\beta^{\beta'}\}$, составленного из компактов Ψ_β размерности $\leqslant n$.*

В § 5 мы увидим, что в формулировке теоремы 5 нельзя потребовать, чтобы компакты Ψ_β были полиэдрами, — теорема Фрейденталя (см. § 5) не может быть обобщена на случай бикомпактов.

Те (n-мерные) бикомпакты, которые являются пределами спектров, составленных из (n-мерных) полиэдров, заслуживают, как нам кажется, специального изучения.

§ 4. Универсальные бикомпакты данного веса и данной размерности. Теорема Скляренко

Теорема 6 (Зарелуа [4], Пасынков [9]). *Для любой мощности τ и любого целого числа $n \geqslant 0$ существует бикомпакт Π_τ^n веса τ и размерности $\dim \Pi_\tau^n = n$, содержащий топологический образ всякого нормального пространства X веса τ и* *размерности* $\dim X \leqslant n$. *Более того**), *пространство* Π^n_τ *содержит топологический образ всякого вполне регулярного пространства* X *веса* τ, *для которого* $\dim \beta X \leqslant n$.

Доказательство. Класс вполне регулярных пространств веса $\leqslant\tau$ с $\dim \beta X \leqslant n$ разбивается на подклассы $\alpha \in A$ попарно гомеоморфных между собой пространств. Выберем из каждого класса α пространство X_α и рассмотрим пространство $Y = d\bigcup\limits_\alpha \beta X_\alpha$, являющееся дискретной суммой максимальных бикомпактных расширений βX_α пространств X_α; бикомпакты βX_α попарно не пересекаются и открыто-замкнуты в Y (см. § 1). Пространство Y, очевидно, локально бикомпактно и нормально (даже паракомпактно). Так как $\dim \beta X_\alpha \leqslant n$ для любого $\alpha \in A$, то и $\dim Y \leqslant n$ (см. § 1). В силу нормальности пространства Y имеем и $\dim \beta Y \leqslant n$ (см. § 1).

Вес каждого пространства X_α не превосходит τ, поэтому для любого α существует топологическое отображение f_α: $X_\alpha \to I^\tau$. Топологическое отображение f_α: $X_\alpha \to I^\tau$ можно продолжить в непрерывное отображение $\bar{f}_\alpha$: $\beta X_\alpha \to I^\tau$, $\alpha \in A$ (см. гл. 1, § 9). Отображение пространства Y в I^τ, совпадающее на каждом бикомпакте βX_α с $\bar{f}_\alpha$, обозначим через $\bar{f}$. Продолжение $\bar{f}$ на βY обозначим через F. Из построения отображения F: $\beta Y \to I^\tau$ следует, что оно будет топологическим на каждом множестве $X_\alpha \subseteq \beta X_\alpha \subseteq \beta Y$. По теореме 3 существуют такой бикомпакт Π^n_τ и такие отображения g: $\beta Y \to \Pi^n_\tau$ и h: $\Pi^n_\tau \to I^\tau$, что $F = hg$, $\dim \Pi^n_\tau \leqslant n$ и $w\Pi^n_\tau \leqslant \tau = wI^\tau$. Отображение F является топологическим на множествах X_α, поэтому топологическим на этих множествах будет и отображение g.

Итак, пространство $X \equiv X_\alpha$ топологически отображено в бикомпакт Π^n_τ, $\dim \Pi^n_\tau \leqslant n$, $w\Pi^n_\tau \leqslant \tau$. Так как Π^n_τ содержит, например, топологический образ n-мерного куба, то $\dim \Pi^n_\tau = n$.

Теорема 6 доказана.

Непосредственным ее следствием является

Теорема 7 (Скляренко**)). *Для всякого вполне регулярного пространства* X *веса* τ *с* $\dim \beta X \leqslant n$, *в частности**) *для всякого нормального пространства* X *веса* τ *и размерности* $\dim X \leqslant n$, *существует бикомпактное расширение* bX *веса* τ *и размерности* $\dim bX \leqslant n$.

Действительно, если считать $X \subseteq \Pi^n_\tau$, то bX получается взятием замыкания X в Π^n_τ.

*) См. равенство (1) § 1.

**) Для нормальных пространств в работе [1].

§ 5. Случай компактов: теорема Фрейденталя

1. Теорема Фрейденталя. В этом параграфе прежде всего будет доказана

Теорема 8 (Фрейденталь [1]). *Любой n-мерный компакт X является пределом спектра $S=\{\tilde{K}_i, \pi_i^{i+1}\}$, $i=1, 2, 3, \ldots$, составленного из n-мерных полиэдров $\tilde{K}_i$, при этом проекция π_i^{i+1} является непрерывным отображением полиэдра $\tilde{K}_{i+1}$ на полиэдр $\tilde{K}_i$. Более того, полиэдры $\tilde{K}_i$ даны в фиксированных триангуляциях K_i и каждое π_i^{i+1} есть симплициальное отображение триангуляции K_{i+1} на некоторое многократное барицентрическое подразделение K_i^* триангуляции K_i, а каждая проекция π_i: $X \to \tilde{K}_i$ существенна относительно K_i, т. е. существенно покрывает каждый главный симплекс $T \in K_i$.*

Доказательство. Искомый спектр будем строить по индукции. Возьмем какое-нибудь неприводимое и, следовательно (см. § 1 гл. 4), $(n+1)$-кратное $\frac{1}{2}$-покрытие ω_1 компакта X; пусть f_1 является каноническим отображением X в тело $\tilde{K}_1$ нерва K_1 покрытия ω_1. Тогда, как уже было выяснено в § 1 гл. 4, отображение f_1 будет существенно покрывать главные симплексы триангуляции K_1 (и, значит, будет отображением на $\tilde{K}_1$).

Предположим, что мы для всех номеров $i<h$ уже построили

(1) n-мерные полиэдры $\tilde{K}_i$, взятые в триангуляциях K_i, являющихся нервами неприводимых покрытий ω_i;

(2) отображения f_i: $X \to \tilde{K}_i$, являющиеся $\frac{1}{2^i}$-отображениями, существенно покрывающими главные симплексы триангуляции K_i, и

(3) отображения π_{i-1}^i: $\tilde{K}_i \to \tilde{K}_{i-1}$, $1<i<h$, каждое из которых симплициально относительно триангуляции K_i и некоторого (многократного) барицентрического подразделения K_{i-1}^* триангуляции K_{i-1}, причем

(4) отображение $\pi_{i-1}^i f_i$ получается из f_{i-1} спуском относительно K_{i-1}^* (см. § 1 гл. 4).

Отображения $\pi_j^i = \pi_j^{j+1} \ldots \pi_{i-1}^i \pi_i^i$, $j<i$, удовлетворяют неравенствам

$$\rho\left(\pi_j^{i-1} f_{i-1}, \pi_j^i f_i\right) < \frac{1}{2^i}. \tag{5}$$

Пусть теперь $i=h$. Подразделим триангуляцию K_{h-1} барицентрически столько раз, чтобы и сами симплексы полученного подразделения K_{h-1}^* и их образы в полиэдрах $\tilde{K}_j$ при отображениях π_j^{h-1}, $j \leqslant i \leqslant h-2$, имели диаметр $<\frac{1}{2^h}$.

Возьмем неприводимое $\frac{1}{2^h}$-покрытие ω_h компакта X, вписанное в покрытие φ_{h-1}, состоящее из прообразов главных звезд триангуляции K^*_{h-1} при отображении f_{h-1}.

Нерв покрытия ω_h обозначим через K_h, а через f_h: $X \to \widetilde{K}_h$ обозначим какое-нибудь каноническое отображение. По второй аппроксимационной теореме (гл. 4, § 2, теорема 4) существует такое симплициальное относительно триангуляций K^*_{h-1} и K_h отображение π^h_{h-1}: $\widetilde{K}_h \to \widetilde{K}_{h-1}$, что отображение $\pi^h_{h-1}f_h$ является спуском отображения f_{h-1} относительно триангуляции K^*_h, так что точки $f_{h-1}(x)$ и $\pi^h_{h-1}f_h(x)$, $x \in X$, лежат в одном замкнутом симплексе триангуляции K^*_{h-1} и, значит,

$$(6)\quad \rho\left(f_{h-1}, \pi^h_{h-1}f_h\right) < \frac{1}{2^h}, \quad \rho\left(\pi^{h-1}_j f_{h-1}, \pi^h_j f_h\right) < \frac{1}{2^h}, \; j < h-1.$$

В силу неприводимости покрытия ω_h и предложений 3 и 4 § 1 гл. 4 отображение f_h существенно покрывает главные симплексы триангуляции K_h и $\dim \widetilde{K}_h \leqslant n$.

Продолжая построение n-мерных полиэдров $\widetilde{K}_i$ и отображений π^i_{i-1}, получим спектр $S = \{\widetilde{K}_i, \pi^i_{i-1}\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющий всем условиям теоремы. Докажем, что пределом $\widetilde{S}$ спектра S является компакт X. Это доказательство расчленим на несколько шагов.

Рассмотрим для каждого данного $i = 1, 2, 3, \ldots$ последовательность отображений

$$(7)\qquad f_i, \quad \pi^{i+1}_i f_{i+1}, \quad \pi^{i+2}_i f_{i+2}, \ldots$$

компакта X в полиэдр $\widetilde{K}_i$. Отображение f_i существенно покрывает главные симплексы триангуляции K_i (и потому, в частности, является отображением на $\widetilde{K}_i$). Покажем, что все дальнейшие отображения последовательности (7) получаются из f_i спуском относительно K_i.

Сначала докажем утверждение

A_0. Если в триангуляции K_{i+k} носитель точки y'' является (собственной или несобственной) гранью носителя точки y', то носитель точки $\pi^{i+k}_i(y'')$ также будет гранью носителя точки $\pi^{i+k}_i(y')$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, в триангуляции K_i.

Если $k = 1$, то утверждение A_0 вытекает из симплициальности проекции π^{i+1}_i относительно триангуляций K_{i+1} и K^*_i (напомним, что K^*_i является подразделением K_i). Пусть утверждение A_0 доказано для всех $k < j$. Докажем его для $k = j$.

В силу симплициальности проекции π^{i+j}_{i+j-1} (относительно триангуляций K_{i+j} и K^*_{i+j-1}) и из того, что носитель точки y''

в триангуляции K_{i+j} является гранью носителя точки y', следует, что носитель точки $\pi_{i+j-1}^{i+j}(y'')$ в триангуляции K_{i+j-1} будет гранью носителя точки $\pi_{i+j-1}^{i+j}(y')$. Но тогда, по индуктивному предположению, носитель точки $\pi_i^{i+j}(y'') = \pi_i^{i+j-1}(\pi_{i+j-1}^{i+j}(y''))$ будет гранью носителя точки $\pi_i^{i+j}(y') = \pi_i^{i+j-1}(\pi_{i+j-1}^{i+j}(y'))$. Утверждение A_0 доказано.

Переходим к доказательству утверждения

А. Для любого натурального k отображение $\pi_i^{i+k}f_{i+k}$ получается из f_i спуском относительно K_i.

Если $k=1$, то, по построению, $\pi_i^{i+1}f_{i+1}$ получается из f_i спуском относительно триангуляции K_i^*, а значит, и относительно более крупной триангуляции K_i. Предположим теперь, что для всех $k<j$ отображения $\pi_i^{i+k}f_{i+k}$ получаются из f_i спуском относительно K_i. Пусть $k=j$.

По построению, $\pi_{i+j-1}^{i+j}f_{i+j}$ получается из f_{i+j-1} спуском относительно K_{i+j-1}^* и, значит, как уже отмечалось, относительно K_{i+j-1}, т. е. для любой точки $x \in X$ точка $y'' = \pi_{i+j-1}^{i+j}f_{i+j}(x)$ лежит на грани носителя точки $y' = f_{i+j-1}(x)$ в триангуляции K_{i+j-1}. Но тогда, в силу утверждения A_0, точка $\pi_i^{i+j}f_{i+j}(x) = \pi_i^{i+j-1}\pi_{i+j-1}^{i+j}f_{i+j}(x)$ лежит на грани носителя точки $\pi_i^{i+j-1}f_{i+j-1}(x)$ в триангуляции K_i, т. е. отображение $\pi_i^{i+j}f_i$ получается из $\pi_i^{i+j-1}f_{i+j-1}$ спуском относительно K_i. Из индуктивного предположения следует, что $\pi_i^{i+j}f_{i+j}$ получается спуском уже из f_i относительно K_i. Утверждение А доказано.

Б. Построение отображений g_i: $X \to \tilde{K}_i$ и окончание доказательства теоремы 8.

По второму из неравенств (6) имеем

$$\rho(\pi_i^{h-1}f_{h-1}, \pi_i^h f_h) < \frac{1}{2^h};$$

поэтому для любой точки $x \in X$ последовательность $\{\pi_i^h f_h(x)\}$, $h = i+1, i+2, i+3, \ldots$, фундаментальна, т. е. сходится к некоторой точке $g_i(x)$. Возникающее таким образом отображение g_i: $X \to \tilde{K}_i$ непрерывно, ибо последовательность отображений $\pi_i^h f_h$, $h=i+1, i+2, i+3, \ldots$, сходится к g_i равномерно. Так как все отображения $\pi_i^h f_h$ получаются из f_i спуском относительно K_i, то этим свойством обладает и отображение g_i. Отсюда следует, что g_i существенно покрывает главные симплексы триангуляции K_i, в частности, является отображением на $\tilde{K}_i$.

Пусть $i < j$, покажем, что $g_i = \pi_i^j g_j$. Действительно,

$$g_i(x) = \lim_{h \to \infty} \pi_i^j \pi_j^h g_h(x) = \pi_i^j \lim_{h \to \infty} \pi_j^h g_h(x) = \pi_i^j g_j(x).$$

Такнм образом, каждой точке $x \in X$ соответствует нить $\{g_i(x)\}$ спектра S, т. е. точка $g(x)$ предела $\tilde{S}$ спектра S. Так как все отображения g_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, непрерывны, то непрерывно и отображение g (см. предложение 5 из § 1 Прибавления к гл. 1). Так как все отображения g_i являются отображениями «на», то пересечение любой базисной окрестности пространства $\tilde{S}$ с множеством gX непусто, т. е. множество gX всюду плотно в $\tilde{S}$ и, следовательно, в силу компактности gX, совпадает с $\tilde{S}$. Остается доказать, что отображение g взаимно однозначно (отсюда, ввиду компактности X, уже будет следовать, что g — гомеоморфизм). Рассмотрим две точки x и x' из X. Возьмем столь большой номер i, чтобы звезды точек x и x' относительно покрытий ω_i не пересекались. Тогда в силу каноничности отображения f_i не будут пересекаться и замыкания носителей точек $f_i(x)$ и $f_i(x')$ в триангуляции K_i. Так как g_i получается из f_i спуском, то $g_i(x) \neq g_i(x')$.

Для проекции π_i: $\tilde{S} \to \tilde{K}_i$ имеем

$$g_i = \pi_i g, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots;$$

поэтому, если бы точки gx и gx' совпадали между собою, то совпадали бы и точки

$$g_i x = \pi_i g x, \qquad g_i x' = \pi_i g x'$$

— вопреки только что доказанному.

Итак, отображение g: $X \to \tilde{S}$ есть топологическое отображение пространства X на $\tilde{S}$. Заметим, наконец, что при отождествлении точек $x \in X$ и $gx \in \tilde{S}$ проекции π_i отождествляются с существенно покрывающими главные симплексы триангуляций K_i отображениями g_i. Теорема 8 доказана.

2. Случай бикомпактов. В конце § 3 мы уже указывали на невозможность усилить теорему 4 в смысле замены в ее формулировке аппроксимирующих компактов полиэдрами. Сейчас мы докажем эту невозможность, и притом уже в одномерном случае.

Лемма 1. *Если бикомпакт X является пределом спектра $S = \{P_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in A$, из одномерных полиэдров P_α, то* $\operatorname{ind} X \leqslant 1$ *).

Доказательство. Достаточно показать, что в X существует база, границы элементов которой нульмерны. Такой базой будет система всевозможных множеств вида $\mathfrak{S}_\alpha^{-1} O_\alpha$, где

---

*) Можно показать, что и $\operatorname{Ind} X \leqslant 1$.

O_α — открытое в P_α множество, $\alpha \in A$. Возьмем открытое в P_α множество O_α, положим $O = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha$, $F = \operatorname{гр} O$. Для любого $\beta > \alpha$ положим $O_\beta = (\tilde{\omega}_\alpha^\beta)^{-1} O_\alpha$. Тогда $O = \tilde{\omega}_\beta^{-1} O_\beta$ и $\tilde{\omega}_\beta F \cap O_\beta = \Lambda$. В силу непрерывности проекций $\tilde{\omega}_\beta$ имеем включение $\tilde{\omega}_\beta F \subseteq [O_\beta]$. Следовательно,

$$F_\beta = \operatorname{гр} O_\beta \supseteq \tilde{\omega}_\beta F \quad \text{для любого} \quad \beta \geqslant \alpha,$$

и, таким образом,

$$F \subseteq \Phi = \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} \tilde{\omega}_\beta^{-1} F_\beta.$$

В силу предложения 7 § 1 Прибавления к гл. 1 множество Φ совпадает с пределом спектра $\{F_\beta, \tilde{\omega}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \geqslant \alpha$. Нигде не плотное подмножество отрезка, а следовательно и одномерного полиэдра, нульмерно. Следовательно, $\dim F_\beta \leqslant 0$, $\alpha \leqslant \beta$, и, по лемме 1 из § 3, имеем $\dim \Phi \leqslant 0$, откуда $\dim F \leqslant 0$. Но в этом случае и $\operatorname{ind} F \leqslant 0$ (см. гл. 2, § 3, предложение 1). Лемма доказана.

Из леммы 1 сразу же вытекает

Теорема 9 (Мардешич [1], Пасынков [1]). *Если для бикомпакта X имеем* $\dim X = 1$, *но* $\operatorname{ind} X > 1$, *например, если X — построенный в следующем* § 6 *бикомпакт Локуциевского, то X не может быть пределом обратного спектра из одномерных полиэдров.*

Можно в некотором смысле усилить теорему 7 (см. Пасынков [5]). Оказывается:

существует бикомпакт B с $\dim B = \operatorname{ind} B = \operatorname{Ind} B = 1$, *не являющийся пределом никакого обратного спектра из одномерных полиэдров. Таким бикомпактом будет «половина» B только что упомянутого бикомпакта Локуциевского L.*

Замечание 1 (Пасынков [5]). Существуют бикомпакты, не являющиеся пределами спектров из полиэдров и даже из локально связных компактов с проекциями «на».

§ 6. Бикомпакты с несовпадающими размерностями $\dim X \neq \operatorname{ind} X$

Вопрос о взаимоотношениях между основными размерностными инвариантами $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$ — один из центральных вопросов всей теории размерности. Мы слегка коснулись этого вопроса во введении к этой главе и будем заниматься им и в этом и в следующем параграфе, а также в гл. 6 и 7.

В общем случае нормальных пространств мы, кроме очевидного неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$ и неравенства Веденисова $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$, не имеем ничего. Фундаментальное равенство

Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метризуемых пространств X, как уже упоминалось, будет доказано дважды — в гл. 6 и 7. В то же время Рой [1] построил пример метрического пространства, для которого

$$\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X.$$

Большие успехи в исследовании интересующего нас вопроса получены, как и следовало ожидать, для бикомпактов. Длинный ряд относящихся сюда результатов начинается с работы Лунца (1949, [1]), впервые построившего бикомпакт X, для которого $\dim X = 1 < \operatorname{ind} X = 2$. Вскоре, также в 1949 г., Локуциевский [1] построил значительно более простой бикомпакт X, для которого не только $\dim X = 1 < \operatorname{ind} X = 2$, но который, кроме того, очень просто представляется в виде объединения бикомпактов X_1, X_2, удовлетворяющих условиям (при $i = 1, 2$)

$$\dim X_i = \operatorname{ind} X_i = \operatorname{Ind} X_i = 1.$$

Пример Локуциевского приобрел широкую известность и будет изложен в этом параграфе.

Вопенка [1] построил в 1958 г. для любых целых чисел $n \geqslant 1$ и $m > n$ бикомпакты X_{nm} и Y_{nm}, удовлетворяющие условиям

$$\dim X_{nm} = \dim Y_{nm} = n, \qquad \operatorname{ind} X_{nm} = m, \qquad \operatorname{Ind} Y_{nm} = m.$$

Бикомпакт Θ с несовпадающими размерностями $\dim \Theta \neq \operatorname{ind} \Theta$, удовлетворяющий первой аксиоме счетности, построил в 1968 г. Федорчук [2]. Этот пример имеет принципиальный интерес ввиду его применения к вопросам аксиоматики теории размерности, поэтому он изложен в этом параграфе: дело в том, что бикомпакт Θ (для которого $\dim \Theta = 2$, $3 \leqslant \operatorname{ind} \Theta \leqslant 4$) вообще не содержит никакой перегородки Φ размерности $\dim \Phi \leqslant 1$. Кроме того, бикомпакт Федорчука содержит счетное всюду плотное множество.

Дальнейшие задачи в этом круге вопросов связаны с тем, что Пасынков [2], [3], [4] доказал тождество Урысона

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$$

для всех бикомпактов X, являющихся фактор-пространствами локально бикомпактных топологических групп, поставив этим самым на очередь вопрос, будет ли это тождество иметь место для всех вообще алгебраически однородных бикомпактов X, т. е. для бикомпактов, являющихся фактор-пространствами каких бы то ни было топологических групп*). В связи с этим особенно интересно отметить, что Федорчук [4] построил бикомпакт X размерности $\dim X = 1 < \operatorname{ind} X = 2$, топологически

*) См. по этому поводу Пасынков [13].

однородный в том смысле, что любую его точку x можно топологическим отображением пространства X на себя перевести в любую другую точку $x' \in X$.

Первый бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями был построен Филипповым [1] в 1969 г.; он вскоре усилил свой результат [2], построив для каждого целого $n > 1$ бикомпакт X_n с первой аксиомой счетности, удовлетворяющий равенствам

$$\dim X_n = 1, \quad \operatorname{ind} X_n = n, \quad \operatorname{Ind} X_n = 2n - 1.$$

Остается неизвестным, существуют ли для любых целых $n > 1$ и $m > n$ бикомпакты X_{nm}, для которых

$$\operatorname{ind} X_{nm} \leqslant n, \quad \operatorname{Ind} X_{nm} \geqslant m.$$

1. Бикомпакт Локуциевского. Возьмем так называемую трансфинитную полупрямую, т. е. множество пар $x = (\alpha, t)$, где α есть произвольное конечное или счетное порядковое число, $0 \leqslant \alpha < \omega_1$ и $0 \leqslant t < 1$, причем это множество $\{x\}$ упорядочено естественно, а именно по следующему правилу:

$$\begin{cases} (\alpha, t) < (\alpha', t'), & \text{если } \alpha < \alpha' \text{ (при любых } t \text{ и } t'), \\ (\alpha, t) < (\alpha, t'), & \text{если } t < t'. \end{cases}$$

Пополним трансфинитную полупрямую еще одной точкой $\omega_1 = (\omega_1, 0)$, которую будем считать следующей за всеми $x = (\alpha, t)$.

Полученное таким образом упорядоченное множество обозначим через A. Это множество вместе с его естественной (или «порядковой») топологией *) является (связным) бикомпактом, который тоже будем обозначать через A.

Через C обозначим канторово совершенное множество (определенное, как обычно, на отрезке $[0, 1]$ числовой прямой) и рассмотрим бикомпакт $A \times C$, являющийся топологическим произведением бикомпактов A и C.

Точки бикомпакта $A \times C$ суть пары

$$(x, y), \quad x \in A, \quad y \in C.$$

Если $M \subseteq C$ и $x_0 \in A$, то через x_0M будем обозначать множество всех точек $(x_0, y) \in A \times C$, где y пробегает все множество M.

В частности, через $\omega_1 C$ обозначаем множество всех точек (ω_1, y), где y пробегает все канторово множество C. Топология в $A \times C$ есть обычная топология топологического произведения,

*) Открытая база пространства A состоит из всех интервалов (x', x''), $x' < x''$, в A и из полуинтервалов $[x_0, x)$, где $x_0 = (0, 0)$, и $(x, \omega_1]$.

имеющая своей (открытой) базой все открытые прямоугольники

$$U = \{(x, y) \mid x' < x < x'',\ y' < y < y''\},$$

соответственно для точек $(\omega_1, y) \in A \times C$ — прямоугольники вида

$$U = \{(x, y) \mid x > x',\ y' < y < y''\}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{ind} A \times C = 1$. В самом деле, пространство $A \times C$ содержит прямолинейные отрезки; поэтому достаточно убедиться, что $\operatorname{ind} A \times C \leqslant 1$, а именно что каждая точка $\xi = (x_0, y_0) \in A \times C$ имеет сколь угодно тесные прямоугольные окрестности

$$U = \{(x, y) \mid x' < x < x'',\ y' < y < y''\} \qquad (\text{при } x_0 < \omega_1),$$

соответственно при $x_0 = \omega_1$ — окрестности

$$U = \{(x, y) \mid x' < x,\ y' < y < y''\}$$

с нульмерной границей.

Чтобы получить эти окрестности, достаточно взять в качестве y' левый конец y'_i какого-либо смежного к C интервала $\Delta_i = (y'_i, y''_i)$ (лежащего слева от $y_0 \in C$), а в качестве y'' — правый конец y''_j смежного интервала $\Delta_j = (y'_j, y''_j)$ (лежащего справа от y_0). Такие окрестности мы назовем правильными. Склеим теперь пару концов y'_i, y''_i любого смежного интервала $\Delta_i = (y'_i, y''_i)$ к множеству $\omega_1 C$. Получим естественное непрерывное отображение π бикомпакта $A \times C$ на бикомпакт, который обозначим через $B = \pi(A \times C)$, причем множество $\omega_1 C$ отображается на отрезок, который будем обозначать через $\omega_1 I = \pi\omega_1 C$.

Точки бикомпакта B будем по-прежнему обозначать через (x, y), $x \in A$, $y \in C$, помня при этом, что теперь пары (ω_1, y'_i) и (ω_1, y''_i) обозначают одну и ту же точку

$$\xi = (\omega_1, y'_i) = (\omega_1, y''_i) \in B, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

При отображении π правильные окрестности точек $(x, y) \in A \times C$, где $x < \omega_1$, остаются неизменными (как и их границы); если же $x = \omega_1$, то в этих окрестностях естественно происходит отождествление точек (ω_1, y'_i) и (ω_1, y''_i) (где y'_i и y''_i, как всегда, суть концы смежного интервала Δ_i). В результате мы получаем правильные окрестности $\pi^{\#}U$ точек бикомпакта B, причем граница окрестности $B \setminus \pi(A \setminus U) = \pi^{\#}U$ точки $\xi \in \omega_1 I = \pi\omega_1 C$ отличается от границы $U = \{(x, y) \mid x > x_1,\ y'_1 < y < y''_j\}$ лишь тем, что к грU присоединились точки $\pi y'_i = \pi y''_i$ и $\pi y''_j = \pi y'_j$, так что граница $\pi^{\#}U$ во всяком случае остается нульмерным бикомпактом (даже иульмерным компактом). Отсюда следует, что $\operatorname{ind} B = 1$.

Замечание 1. Точки $\xi = (\omega_1, y'_i) = (\omega_1, y''_i) \in \omega_1 I$, получившиеся от склеивания двух концов какого-либо смежного к ωC интервала $\Delta_i = (y'_i, y''_i)$, назовем точками первого рода отрезка $\omega_1 I$; все остальные точки этого отрезка назовем точками второго рода.

Докажем теперь следующую основную лемму:

Лемма 1. *Обозначим через V окрестность точки* $(\omega_1, 0)$, *лежащую в* $V' = \left\{(x, y) \mid y < \frac{1}{2}\right\}$ *и обладающую тем свойством, что верхняя грань y_0 множества $V \cap \omega_1 I$ (на отрезке $\omega_1 I$) есть точка второго рода. Тогда* $\operatorname{ind} \text{гр} V = 1$.

Доказательство. Множество V открыто в B, поэтому для каждой точки $\xi \in V \cap \omega_1 I$ найдется правильная окрестность

$$V_\xi = \{(x, y) \mid x > \alpha_\xi,\ y'_\xi < y < y''_\xi\} \subseteq V.$$

Из покрытия множества $V \cap \omega_1 I$ окрестностями V_ξ выделяем счетное покрытие $\{V_{\xi_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots$

По определению множеств $V_{\xi_i} \equiv V_i$ каждому из них соответствует порядковое число $\alpha_{\xi_i} \equiv \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Берем трансфинитное число $\alpha_0 < \omega_1$, превосходящее все числа α_i, $i = 1, 2, \ldots$ Обозначим через W множество, состоящее из всех таких точек $(x, y) \in B$, что $x > \alpha_0$, а $(\omega_1, y) \in V$. Тогда

$$W \subseteq V,$$

причем множество

$$F = \{(x, y_0) \mid x > \alpha_0\}$$

состоит из предельных точек множества W, так что $F \subseteq [V]$. Теперь легко доказать равенство

$$\operatorname{ind} \text{гр}\, V = 1. \tag{1}$$

Оно очевидно, если какой-нибудь прямолинейный отрезок, содержащийся в F, содержится и в границе множества V. Предположим, что никакой отрезок, лежащий в F, не содержится в гр V, и докажем, что в этом случае*) в гр V содержится некоторый отрезок, лежащий на $\omega_1 I$. В самом деле, из нашего предположения следует, что в каждом лежащем на F отрезке вида

$$I_\alpha = \{(x, y_0) \mid \alpha < x < \alpha + 1\}$$

---

*) Ведь y_0 (точнее, (ω_1, y_0)) есть лишь $\sup(V \cap \omega_1 I)$; отсюда вовсе не следует, что в V нет точек (x, y), для которых $y > y_0$; поэтому некоторые точки $(x, y) \in F$ могут принадлежать самому множеству V, а не его границе.

содержится точка множества V вместе с некоторой своей прямоугольной окрестностью

$$U_\alpha = \{(x, y) \mid \alpha < x'_\alpha < x < x''_\alpha < \alpha + 1,\ y'_\alpha < y < y''_\alpha\}.$$

При этом $y'_\alpha < y_0 < y''_\alpha$ и числа y'_α и y''_α мы можем предполагать рациональными. Ввиду несчетности множества всех порядковых чисел α и счетности множества всех рациональных чисел, существует несчетное множество порядковых чисел α, для которых одновременно все y'_α совпадают с некоторым y' и все y''_α совпадают с некоторым y''. Но отсюда следует, что все точки $\xi = (\omega_1, y)$, для которых $y' < y < y''$, будут предельными для множества $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \subseteq V$, т. е. для множества V, так что, в частности, весь отрезок $[y_0, y'']$, лежащий на $\omega_1 I$, содержится в $[V]$; но ни одна точка этого отрезка не содержится в V, следовательно, весь этот отрезок содержится в гр V, чем наше утверждение, а с ним и равенство (1) доказаны.

Переходим к построению бикомпакта Локуциевского L. Множество D всех точек первого рода отрезка $\omega_1 I$, как счетное всюду плотное подмножество этого отрезка (не содержащее ни первого, ни последнего элемента), подобно всякому другому счетному всюду плотному подмножеству отрезка $\omega_1 I$ (также не содержащему ни первого, ни последнего элемента) *). Всякое подобное отображение множества D на D' при этом можно продолжить в подобное (и следовательно топологическое) отображение φ всего отрезка $\omega_1 I$ на себя *).

Выберем при этом множество D' таким образом, чтобы оно целиком состояло из точек второго рода отрезка $\omega_1 I$, и потребуем, чтобы при отображении φ концевые точки отрезка $\omega_1 I$ (т. е. точки $(\omega_1, 0)$ и $(\omega_1, 1)$) оставались неподвижными.

Возьмем теперь два дизъюнктных экземпляра B_1, B_2 бикомпакта B. Множества $\omega_1 I$, D, D', рассматриваемые на B_i, $i = 1, 2$, обозначим соответственно через $(\omega_1 I)_i$, D_i, D'_i. Склеим бикомпакты B_1 и B_2, отождествляя каждую точку $\xi \in (\omega_1 I)_1$ с точкой $\varphi\xi = (\omega_1 I)_2$. В результате этого склеивания получится бикомпакт L, который и есть искомый бикомпакт Локуциевского.

Бикомпакт L, очевидно, можно определить следующим образом: берется разбиение $\mathfrak{z}$ бикомпакта $X = B_1 \cup B_2$, являющегося дискретной суммой бикомпактов B_1 и B_2, на следующие элементы:

1) точки множества $B_1 \setminus (\omega_1 I)_1$,
2) точки множества $B_2 \setminus (\omega_1 I)_2$,
3) пары точек ξ_1, ξ_2, где $\xi_1 \in (\omega_1 I)_1$ и $\xi_2 = \varphi\xi_1 \in (\omega_1 I)_2$.

---

*) См., например, Александров [23].

Бикомпакт L и есть пространство разбиения $\mathfrak{z}$. Ставим в соответствие каждой точке ξ бикомпакта $X = B_1 \cup B_2$ элемент разбиения $\mathfrak{z}$, ее содержащий (т. е. точке $\xi = \xi_1 \in (\omega_1 I)_1 \subset B_1$, соответственно $\xi = \xi_2 \in (\omega_1 I)_2 \subset B_2$, ставим в соответствие элемент разбиения, состоящий из пары точек ξ_1, ξ_2, а точке $\xi \in B_1 \setminus (\omega_1 I)_1$ или $\xi \in B_2 \setminus (\omega_1 I)_2$ — элемент разбиения, состоящий из этой точки ξ). Получаем, таким образом, непрерывное отображение g бикомпакта $X = B_1 \cup B_2$ на бикомпакт L. Отображение g, рассматриваемое лишь на B_1 (лишь на B_2), является топологическим, так что множество $gB_i = B'_i \subset L$, $i = 1, 2$, гомеоморфно бикомпакту B_i (т. е. B) и $L = B'_1 \cup B'_2$, причем $B'_1 \cap B'_2$ есть отрезок $E = g(\omega_1 I)_1 = g(\omega_1 I)_2 \in L$. Так как $\dim B = 1$ и, значит, $\dim B'_1 = \dim B'_2 = 1$, то по теореме суммы $\dim L = 1$.

Докажем, что $\operatorname{ind} L \geqslant 2$ (доказательство неравенства $\operatorname{ind} L \leqslant 2$ может быть предоставлено читателю).

Рассмотрим точку $\xi \in L$, полученную от склеивания точек $(\omega_1, 0)_1 \in B_1$ и $(\omega_1, 0)_2 \in B_2$.

Докажем, что $\operatorname{ind}_\xi L = 2$, т. е. что граница всякой достаточно тесной окрестности $U = O\xi$ этой точки имеет размерность $\operatorname{ind} \operatorname{гр} U = 1$. При этом от окрестности U достаточно только потребовать, чтобы верхняя грань y_0 пересечения этой окрестности с отрезком $E = g(\omega_1 I)_1 = g(\omega_1 I)_2 \subset L$ была, например, $< \frac{1}{2}$. Точка y_0 есть элемент разбиения $\mathfrak{z}$, являющийся парой точек $\xi' \in (\omega_1 I)_1$, $\xi'' \in (\omega_1 I)_2$. При этом или $\xi' \notin D_1$, или $\xi' \in D_1$ и $\xi'' \in D'_2$. Следовательно, по крайней мере одна из компонент пары (ξ', ξ'') является точкой второго рода. Пусть, например, $\xi' \notin D_1$. Положим $U_1 = U \cap B'_1$. Тогда U_1 есть окрестность точки $(\omega_1, 0)_1$ бикомпакта B_1, удовлетворяющая условиям леммы 1. Следовательно, $\operatorname{ind} \operatorname{гр} U_1 = 1$.

Но $\operatorname{гр} U_1 = [U_1] \setminus U_1 \subset [U] \setminus U$ (так как если бы какая-нибудь точка $\eta \in [U_1] \setminus U_1$ лежала в U, то, содержась в B'_1, она содержалась бы и в $B'_1 \cap U = U_1$).

Итак, $\operatorname{гр} U_1 \subseteq \operatorname{гр} U$ и, значит,

$$\operatorname{ind} \operatorname{гр} U \geqslant \operatorname{ind} \operatorname{гр} U_1 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Бикомпакт L есть сумма замкнутых множеств B'_1 и B'_2, причем, как мы видели,

$$\operatorname{ind} B'_1 = \operatorname{ind} B'_2 = \operatorname{ind} B = 1,$$

а $\operatorname{ind} L = 2$; поэтому пример Локуциевского показывает, что теорема суммы для малой индуктивной размерности бикомпактов неверна даже в случае двух слагаемых. Неверна она и для большой индуктивной размерности: легко видеть, что и

$\operatorname{Ind} B = 1$, значит, и $\operatorname{Ind} B_1' = \operatorname{Ind} B_2' = 1$, тогда как $\operatorname{Ind} L \geqslant \geqslant \operatorname{ind} L = 2$.

2. Бикомпакт Федорчука. Обозначим через J полуинтервал $(0, 1]$ числовой прямой. Пусть $g: J \to C^2$ — такое непрерывное отображение полуинтервала J в тор C^2 *), что каждый полуинтервал $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ посредством отображения g отображается на всюду плотное подмножество A_n тора C^2.

Пусть теперь S^2 — сфера радиуса $\frac{1}{2}$ в трехмерном эвклидовом пространстве R^3. Центр сферы S^2 обозначим через o (начало координат в R^3). Берем какую-нибудь точку $x \in S^2$. Определим отображение $h_x: S^2 \setminus \{x\} \to C^2$ равенством $h_x(x') = g(\rho(x, x'))$ (как всегда, через $\rho(x, x')$ обозначается расстояние от точки x до точки x'). Функция ρ непрерывно отображает множество $S^2 \setminus \{x\}$ (сферу с выколотой точкой) на полуинтервал J, и отображение h_x непрерывно, как суперпозиция двух непрерывных отображений ρ и g.

Основное свойство отображения h_x. Для всякого непустого открытого множества $W \subset C^2$ и всякой окрестности U точки x множество $U \cap h_x^{-1} W$ содержит замкнутое множество F, разбивающее сферу S^2 на такие открытые множества D и E, что $x \in D \subset U$. В самом деле, прообраз любой точки $y \in A_n \cap W \subset C^2$ при отображении h_x содержит окружность радиуса $< \frac{1}{n}$, лежащую иа сфере S^2 с центром на диаметре, проходящем через точку x. Окружности эти сходятся к точке x. Поэтому в качестве множества F можно взять любую из упомянутых окружностей, попавшую в $\frac{1}{n}$-окрестность $O\left(x, \frac{1}{n}\right)$ точки x $\left(\text{при } O\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U\right)$.

Пусть $B = S^2 \times C^2$. Точки множества B будем обозначать парами (x, y), где $x \in S^2$, $y \in C^2$.

Переходим к определению топологии на множестве B; она задается посредством базы, элементы которой будем обозначать через $O(U, x, W)$, где U, соответственно W, — открытое подмножество сферы S^2, соответственно тора C^2, причем $x \in U$. Полагаем

$$O(U, x, W) = (\{x\} \times W) \cup \{(U \cap h_x^{-1} W) \times C^2\}.$$

Положим для краткости $\{x\} \times W = W^x$, $(U \cap h_x^{-1} W) \times C^2 = U(W^x)$. Тогда $O(U, x, W) = W^x \cup U(W^x)$.

*) Вместо тора C^2 можно взять любой двумерный локально связный континуум.

Проверим, что всевозможные множества $O(U, x, W)$ образуют базу некоторой топологии τ на B. Надо показать, что для любых двух элементов O_1 и O_2 базы и для любой точки $z \in O_1 \cap O_2$ существует такой элемент базы O, что $z \in O \subseteq \subseteq O_1 \cap O_2$.

Пусть $O_i = O(U_i, x_i, W_i)$ и $z = (x, y)$. Имеем

$$O_1 \cap O_2 = \{W_1^{x_1} \cup U_1(W_1^{x_1})\} \cap \{W_2^{x_2} \cup U_2(W_2^{x_2})\} =$$
$$= (W_1^{x_1} \cap W_2^{x_2}) \cup (W_1^{x_1} \cap U_2(W_2^{x_2})) \cup (U_1(W_1^{x_1}) \cap W_2^{x_2}) \cup$$
$$\cup (U_1(W_1^{x_1}) \cap U_2(W_2^{x_2})).$$

Если $z \in W_1^{x_1} \cap W_2^{x_2}$, то $x_1 = x_2 = x$ и в качестве O можно взять множество $O(U_1 \cap U_2, x, W_1 \cap W_2)$. Если $z \in W_1^{x_1} \cap U_2(W_2^{x_2})$, то $x_1 = x \neq x_2$ и в качестве O можно взять множество $O(U_1 \cap U_2 \cap h_{x_2}^{-1} W_2, x, W_1)$. Случай $z \in U_1(W_1^{x_1}) \cap W_2^{x_2}$ аналогичен предыдущему. Если же $z \in U_1(W_1^{x_1}) \cap U_2(W_2^{x_2})$, то в качестве O можно взять множество

$$O(U_1 \cap U_2 \cap h_{x_1}^{-1} W_1 \cap h_{x_2}^{-1} W_2, x, C^2).$$

Таким образом, семейство $\{O(U, x, W)\}$ является базой некоторой топологии τ.

Очевидно, что топология τ отлична от топологии прямого произведения S^2 на C^2. В то же время топология τ индуцирует на каждом слое $\{x\} \times C^2$ обычную топологию тора C^2. Пространство (B, τ), как мы сейчас увидим, и есть искомый бикомпакт Θ.

Обозначим через π проекцию произведения $B = S^2 \times C^2$ на первый сомножитель. Проекция π является непрерывным отображением пространства Θ на сферу S^2. В самом деле, для произвольного открытого множества $U \subseteq S^2$ имеем $\pi^{-1}(U) = O(U, x, C^2)$, где x — произвольная точка множества U. Обозначим, как всегда, через $\pi^\# A$ «малый образ» множества $A \subseteq B$ при отображении π, т. е. $\pi^\# A = \{x \in S^2 \mid \pi^{-1}(x) \subseteq A\}$.

1°. *Основное свойство отображения* π. Пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_n\}$ — произвольное конечное семейство открытых множеств пространства B, покрывающих прообраз $\pi^{-1}x$ некоторой точки $x \in S^2$. Тогда множество $x \cup \pi^\# O_1 \cup \ldots \cup \pi^\# O_n = O_\omega x$ содержит некоторую окрестность точки x (фактически множество $O_\omega x$ открыто и поэтому само есть окрестность точки x).

Доказательство. Без ограничения общности множества O_i можно считать базисными множествами вида $O(U_i, x, W_i)$ (этого всегда можно добиться в силу бикомпактности тора $\pi^{-1}x$, перейдя к более мелкой системе открытых множеств, покрывающих $\pi^{-1}x$). В этом случае $\pi^{\#}O_l = \pi^{\#}O(U_l, x, W_l) \supset \supset U_l \cap h_x^{-1}W_l$. Множество $U = \bigcap_{l=1}^{n} U_l$ является окрестностью точки x. В силу того, что множества $O(U_l, x, W_l)$ покрывают множество $\pi^{-1}x = \{x\} \times C^2$, система $\{W_l\}$ является покрытием тора C^2. Поэтому

$$x \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} \pi^{\#}O_l\right) \supset x \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} (U_l \cap h_x^{-1}W_l)\right) \supset x \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} (U \cap h_x^{-1}W_l)\right) =$$

$$= x \cup \left(U \cap \left(\bigcup_{l=1}^{n} h_x^{-1}W_l\right)\right) = x \cup \left\{U \cap h_x^{-1}\left(\bigcup_{l=1}^{n} W_l\right)\right\} =$$

$$= x \cup (U \cap h_x^{-1}C^2) = x \cup (U \cap (S^2 \setminus x)) = x \cup (U \setminus x) = U,$$

что и требовалось доказать.

2°. *Отображение π совершенно и неприводимо.* Для замкнутости отображения π, в силу предложения 11 из § 1 гл. 1, достаточно доказать, что для любой точки x в любой окрестности O ее прообраза $\pi^{-1}x$ найдется окрестность O_1, являющаяся прообразом некоторой окрестности U точки x. Это равносильно тому, что малый образ $\pi^{\#}O$ окрестности O содержит окрестность точки x, а последнее вытекает из основного свойства отображения π (берем систему $O_1, \ldots, O_n$, состоящую из одного множества O). Таким образом, отображение π непрерывно, замкнуто и бикомпактно (прообраз любой точки есть тор), т. е. совершенно.

Теперь покажем, что отображение π неприводимо*); для этого достаточно доказать, что малый образ $\pi^{\#}O$ любого непустого открытого подмножества $O \subseteq B$ является непустым открытым подмножеством S^2. В силу замкнутости отображения π множество $\pi^{\#}O$ открыто, как дополнение до образа $\pi(B \setminus O)$ замкнутого множества $B \setminus O$. Множество $\pi^{\#}O$ непусто, так как для всякого базисного множества $O(U, x, W)$ имеем $\pi^{\#}O(U, x, W) \supset U \cap h_x^{-1}W$ (последнее множество непусто в силу основного свойства отображения h_x).

3°. *Пространство Θ является бикомпактом.* Докажем, что Θ — хаусдорфово пространство. Пусть $z_1, z_2 \in B$ и $z_1 \neq z_2$. Если $\pi z_1 \neq \pi z_2$, то, взяв у точек πz_1 и πz_2 сферы S^2 непересекающиеся окрестности U_1 и U_2, получим непересекающиеся окрестности $\pi^{-1}U_1$ и $\pi^{-1}U_2$ точек z_1 и z_2. Если же $\pi z_1 = \pi z_2$, т. е. $z_1 = x(x, y_1)$, $z_2 = (x, y_2)$, то, взяв непересекающиеся окрестности W_1 и W_2

---

*) Отображение $f: X \to Y$ пространства X на Y называется неприводимым, если не существует собственного замкнутого подмножества $\Phi \subset X$, для которого $f\Phi = Y$. Неприводимость отображения f равносильна тому, что малый образ непустого открытого в X множества непуст (Пономарев [1]).

точек y_1 и y_2 тора C^2, получим непересекающиеся окрестности $O(S^2, x, W_1)$ и $O(S^2, x, W_2)$ точек z_1 и z_2 соответственно.

Бикомпактность пространства Θ вытекает из того, что Θ является прообразом бикомпакта S^2 при совершенном отображении π (см. гл. 1, § 7, предложение 14).

4°. *Бикомпакт Θ содержит счетное всюду плотное множество и удовлетворяет 1-й аксиоме счетности.* Счетное всюду плотное множество существует в бикомпакте Θ, так как он неприводимо отображается на сепарабельное пространство S^2. Взяв счетное всюду плотное на S^2 множество $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ и выбрав по точке z_n из каждого прообраза $\pi^{-1}x_n$, получим счетное всюду плотное в Θ множество $\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$. В самом деле, для произвольного непустого открытого множества $O \subset B$ непустое открытое множество $\pi^{\#}O$ содержит некоторую точку x_n. Тогда $z_n \in \pi^{-1}(x_n) \subset O$.

Счетной базой окрестностей в точке $z = (x, y)$ является семейство $\{O(U_m, x, W_n)\}$, где $\{U_m\}$ — счетная база в точке x, $\{W_n\}$ — счетная база в точке y.

5°. *Бикомпакт Θ нельзя разбить никаким множеством Φ размерности* $\dim \Phi \leqslant 1$. Пусть множество Φ разбивает бикомпакт Θ; тогда $\Theta \setminus \Phi = O_1 \cup O_2$, $O_1 \neq \Lambda \neq O_2$, $O_1 \cap O_2 = \Lambda$. В силу неприводимости отображения π, множества $\pi^{\#}O_1$ и $\pi^{\#}O_2$ являются непустыми непересекающимися открытыми подмножествами сферы S^2. Следовательно, множество $F = S^2 \setminus (\pi^{\#}O_1 \cup \cup \pi^{\#}O_2)$ разбивает сферу S^2, значит, $\dim F = \operatorname{ind} F \geqslant 1$, так как сфера является канторовым многообразием *).

Пусть x — произвольная точка множества F, в которой $\operatorname{ind}_x F \geqslant 1$. Покажем, что $\pi^{-1}x \subseteq \Phi$. Предположим противное: пусть $\pi^{-1}x \cap (O_1 \cup O_2) \neq \Lambda$. Например, пусть $(x, y) \in O_1$. Существует базисная окрестность $O(U, x, W)$ точки (x, y), содержащаяся в O_1. Пусть теперь U' — произвольная окрестность точки x. Тогда, в силу основного свойства отображения h_x, множество $U \cap U' \cap h_x^{-1}W$ содержит замкнутое множество F', разбивающее сферу S^2 на такие открытые множества D и E, что $x \in D \subset U \cap U'$. Тогда $\operatorname{гр} D \subseteq F' \subseteq U \cap U' \cap h_x^{-1}W \subseteq U \cap h_x^{-1}W \subseteq \subseteq \pi^{\#}O(U, x, W) \subseteq \pi^{\#}O_1$. Таким образом, в произвольной окрестности U' точки x мы нашли меньшую окрестность D, граница которой не пересекается с множеством F. Это противоречит тому, что $\operatorname{ind}_x F \geqslant 1$. Полученное противоречие показывает, что $\pi^{-1}x \subset \Phi$. Следовательно, множество Φ, содержа тор $\{x\} \times C^2$, по крайней мере двумерно, ч. и т. д.

6°. $\dim \Theta = 2$. Из предыдущего пункта следует, что $\dim \Theta \geqslant 2$. Докажем, что $\dim \Theta \leqslant 2$. Пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_n\}$ — конечное

*) Доказательство этого последнего факта читатель может уже сейчас прочесть в § 2 гл. 8.

открытое покрытие бикомпакта Θ. В силу основного свойства отображения π существует такой конечный набор точек $x_1, \ldots, x_k$ сферы S^2, что прообраз $\pi^{-1}x$ всякой точки $x \neq x_i$, $i = 1, \ldots, k$, содержится в некотором элементе покрытия ω. В самом деле, обозначим через Ux множество $x \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \pi^{\#}O_i\right)$. Множество Ux является окрестностью точки x. Из покрытия $\{Ux \mid x \in S^2\}$ сферы выберем конечное подпокрытие $\{Ux_1, \ldots, Ux_k\}$. Тогда, если $x \neq x_i$, $i = 1, \ldots, k$, имеем $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \pi^{\#}O_i$, т. е. прообраз $\pi^{-1}x$ содержится в некотором элементе покрытия ω.

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\mathfrak{R}$ на пространстве Θ: если $\pi z \neq x_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $\mathfrak{R}(z) = \pi^{-1}\pi z$; если $\pi z = x_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $\mathfrak{R}(z) = z$. Данное отношение эквивалентности $\mathfrak{R}$ определяет фактор-пространство $\Theta/\mathfrak{R}$ и факторное отображение f бикомпакта Θ на пространство $\Theta/\mathfrak{R}$ (см. гл. 1, § 1, п. 7).

Пространство $\Theta/\mathfrak{R}$ хаусдорфово. В самом деле, пусть $\mathfrak{R}(z_1) \neq \mathfrak{R}(z_2)$. Если $\pi z_1 \neq \pi z_2$, то, взяв непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек πz_1 и πz_2, видим, что множества $\pi^{-1}U_1$ и $\pi^{-1}U_2$ являются непересекающимися окрестностями множеств $\mathfrak{R}(z_1)$ и $\mathfrak{R}(z_2)$. Если же $\pi z_1 = \pi z_2$, то точка $\pi z_1 = \pi z_2$ совпадает с одной из точек x_i, $i = 1, \ldots, k$. Поэтому $\mathfrak{R}(z_1) = z_1$, $\mathfrak{R}(z_2) = z_2$. Тогда непересекающиеся базисные окрестности $O(S^2, x_i, W_1)$ и $O(S^2, x_i, W_2)$ точек z_1 и z_2 будут отмеченными относительно отображения f.

Пространство $\Theta/\mathfrak{R}$, бикомпактное в силу непрерывности отображения f, обладает естественной проекцией g на сферу $S^2: gfz = \pi z$.

Так как отображение f факторно и $\pi = gf$, то g — непрерывное отображение. Для всех точек $x \in S^2$, исключая точки $x_1, \ldots, x_k$, прообразы $g^{-1}x$ одноточечны, а прообразы $g^{-1}x_i$, $i = 1, \ldots, k$, гомеоморфны тору C^2. Таким образом, бикомпакт $\Theta/\mathfrak{R}$ представляется в виде объединения сферы S^2 с выколотыми точками $x_1, \ldots, x_k$ и конечного числа торов C^2, соответствующих прообразам $g^{-1}x_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Так как пространство $\Theta/\mathfrak{R}$ является суммой счетного числа замкнутых двумерных компактов, то $\dim \Theta/\mathfrak{R} = 2$.

В силу выбора точек $x_1, \ldots, x_k$ отображение $f: \Theta \to \Theta/\mathfrak{R}$ является ω-отображением. Таким образом, для любого конечного открытого покрытия ω пространства Θ существует ω-отображение пространства Θ на некоторый двумерный бикомпакт, откуда следует, что $\dim \Theta \leqslant 2$.

Замечание 3. Почти дословным повторением рассуждений, проведенных в п. 6°, можно доказать более общее утверждение. Для этого примем за определение основное свойство отображения π.

Определение (Федорчук [3]). Непрерывное отображение $f\colon X\to Y$ называется *вполне замкнутым*, если для любой точки $y\in Y$ и любого покрытия $\omega=\{O_1, \ldots, O_n\}$ прообраза $f^{-1}y$ точки y открытыми в X множествами множество $y\cup f^{\#}O_2\cup \ldots \cup f^{\#}O_n$ является окрестностью точки y.

Всякое вполне замкнутое отображение, очевидно, замкнуто. Имеет место

Предложение 1 (Федорчук [3]). *Пусть $f\colon X\to Y$ — вполне замкнутое отображение нормального пространства X на паракомпактное пространство Y. Тогда* $\dim X\leqslant \max\{\dim f, \dim Y\}$.

Интересно сравнить это утверждение с формулой Гуревича

$$\dim X\leqslant \dim f+\dim Y$$

(см. гл. 9, § 2).

§ 7. Анализ неравенства $\operatorname{ind} X\leqslant \dim X$; пономаревские пространства. Возвращение к пространствам со счетной базой

1. Вводные замечания. Нам понадобятся следующие усиления ранее введенных понятий.

1°. Усиление понятия измельчающейся системы покрытий.

Определение 1. Система $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ конечных покрытий пространства X называется *сильно измельчающейся*, если для любого замкнутого $F\subset X$ и любой окрестности OF найдется такое $\alpha\in\mathfrak{A}$, что $\text{Зв}_\alpha F\subseteq OF$. Система $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ называется *конфинально измельчающейся* (относительно конечных покрытий), если ко всякому (конечному) открытому покрытию ω найдется вписанное в него покрытие $\alpha\in\mathfrak{A}$.

2°. Усиление понятия следования.

Определение 2. Покрытие α' называется *правильно вписанным* в покрытие α (или правильно следующим за ним) *), если α' вписано в α и, кроме того, каждый элемент покрытия α есть сумма содержащихся в нем элементов покрытия α'.

Замечание 1. Очевидно, понятие правильного следования удовлетворяет аксиоме транзитивности: если α'' правильно следует за α', а α' за α, то α'' правильно следует за α. Мы будем применять понятие правильного следования лишь к замкнутым покрытиям.

Важно также с самого начала заметить: если покрытия α и α' суть так называемые (конечные) разбиения пространства X (гл. 1, § 6), то правильное следование покрытия α' за покрытием α, очевидно, тождественно с обычным следованием (т. е. означает просто, что α' вписано в α).

---

*) Это понятие, впервые введенное, по-видимому, Проскуряковым [1], получило многочисленные применения в работах Зайцева [2] о проекционных спектрах.

Определение 3. Семейство $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ конечных замкнутых покрытий называется *правильно направленным*, если оно направлено по отношению к правильному следованию как отношению порядка, т. е. к любым двум покрытиям α и α' существует покрытие α'', правильно следующее как за α, так и за α'.

Этот параграф посвящен найденным В. И. Пономаревым *) достаточным условиям для неравенств $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$ и $\operatorname{Ind} X \leqslant \leqslant \dim X$. Пусть $\dim X = n$. Тогда в пространстве X имеются сколь угодно мелкие замкнутые покрытия кратности $n+1$; оказывается, что для неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant \dim X = n$ достаточно, чтобы в X существовало измельчающееся правильно направленное семейство замкутых конечных покрытий кратности $\leqslant n+1$. Класс пространств, выделенный таким образом Пономаревым, весьма обширен и естествен: мы тут же докажем, что пространства со счетной базой в него входят, а так как пространства со счетной базой финально компактны, то для них и получается равенство $\dim X = \operatorname{ind} X$ и даже $\dim X = \operatorname{ind} X = = \operatorname{Ind} X$. В гл. 6 этот результат будет усилен: будет показано, что все конечномерные метризуемые пространства являются пономаревскими. Заметим, что в классе пономаревских пространств содержатся все конечномерные фактор-пространства локально бикомпактных групп (Скляренко [6]) и для них $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ (Пасынков [4]).

2. Первая теорема Пономарева. Теорема 10. *Если в пространстве X имеется измельчающаяся, соответственно сильно измельчающаяся, правильно направленная система $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ замкнутых покрытий $\alpha=\{A_1^\alpha, \ldots, A_{s_\alpha}^\alpha\}$ кратности $\leqslant n+1$, то $\operatorname{ind} X \leqslant n$, соответственно $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.*

Доказательство обоих утверждений этой теоремы (т. е. неравенств $\operatorname{ind} X \leqslant n$ в случае измельчающейся и $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ в случае сильно измельчающейся системы покрытий), по существу, одно и то же; мы будем вести его по индукции. При $n=0$ покрытия $\alpha=\{A_1^\alpha, \ldots, A_{s_\alpha}^\alpha\}$ имеют кратность 1, т. е. состоят из дизъюнктных замкнутых—очевидно (вследствие дизъюнктности), открыто-замкнутых — множеств. Поэтому, если для данной точки $x \in X$ и ее окрестности Ox (соответственно для данного замкнутого $F \subset X$ и его окрестности OF) мы возьмем такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $\text{Зв}_\alpha x \subseteq Ox$ (соответственно $\text{Зв}_\alpha F \subseteq OF$), то и получим окрестность $O_1 x = \text{Зв}_\alpha x$ (соответственно $O_1 F = \text{Зв}_\alpha F$) с пустой границей, лежащую в заданной окрестности Ox (соответственно OF). Следовательно, будем иметь $\operatorname{ind} X = 0$ (соответственно $\operatorname{Ind} X = 0$).

Итак, при $n=0$ оба утверждения теоремы верны. Предположим теперь, что утверждения нашей теоремы верны для $n-1$. Докажем их для n.

*) См. Александров и Пономарев [1] и Пономарев [3].

Будем доказывать второе неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n$: в предположении, что система $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$, состоящая из покрытий кратности $\leqslant n+1$, сильно измельчается, будем строить для каждого замкнутого $F \subset X$ и его произвольной окрестности OF меньшую окрестность O_1F, удовлетворяющую условию $\operatorname{Ind} \operatorname{rp} O_1F \leqslant n-1$.

Доказательство неравенства $\operatorname{ind} X \leqslant n$ получим, предполагая, что множество F состоит из одной лишь точки x, а система $\mathfrak{A}$ просто измельчающаяся.

Итак, возьмем такое $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $\text{Зв}_{\alpha_0}F \subseteq OF$. Так как покрытие α_0 замкнутое, то $[\text{Зв}_{\alpha_0}F] = \text{Зв}_{\alpha_0}F \subseteq OF$.

Множество $A_i^{\alpha_0} \in \alpha_0$ назовем синим, если $A_i^{\alpha_0} \cap F \neq \Lambda$, красным, если $A_i^{\alpha_0} \cap F = \Lambda$. Обозначим через Φ объединение всех красных множеств. Множество Φ замкнуто, множество $V = X \setminus \Phi$ открыто и является окрестностью множества F. Докажем, что эта окрестность искомая.

Прежде всего, очевидно, что

$$F \subseteq V \subseteq [V] \subseteq \text{Зв}_{\alpha_0}F \subseteq OF.$$

Остается доказать, что $\operatorname{Ind} \operatorname{rp} V \leqslant n-1$. Для этого — на основании индуктивного предположения — в свою очередь достаточно показать, что в $\operatorname{rp} V$ имеется сильно измельчающаяся правильно направленная система замкнутых покрытий кратности $\leqslant n$.

Заметим прежде всего, что

$$\operatorname{rp} V \subseteq X \setminus V = \Phi.$$

Пусть покрытие α правильно следует за α_0 (мы записываем это так: $\alpha \succ \alpha_0$); возьмем какую-либо точку $y \in \operatorname{rp} V$. Она содержится в некотором A_j^{α}. Так как $y \in \Phi$, то y содержится в некотором красном $A_i^{\alpha_0}$, которое — в силу правильного следования $\alpha \succ \alpha_0$ — есть сумма содержащихся в нем A_j^{α}. Итак, всякая точка $y \in \operatorname{rp} V$ содержится в некотором A_j^{α}, которое в свою очередь содержится в некотором красном $A_i^{\alpha_0}$. Поэтому, если мы (при данном $\alpha \succ \alpha_0$) рассмотрим все те A_j^{α}, которые содержатся в Φ, то, полагая для каждого из них

$$B_j^{\alpha} = A_j^{\alpha} \cap \operatorname{rp} V, \quad A_j^{\alpha} \subset \Phi, \quad \alpha \succ \alpha_0,$$

получим замкнутое покрытие $\beta_\alpha = \{B_j^{\alpha}\}$ множества $\operatorname{rp} V$. Легко видеть, что $\{\beta_\alpha\}$ — правильно направленная система покрытий.

Докажем, что $\{\beta_\alpha\}$ — сильно измельчающаяся система покрытий. Пусть даны замкнутое множество $F' \subseteq \operatorname{rp} V$ и произвольная его окрестность UF' в пространстве $X' = \operatorname{rp} V$. Тогда $UF' = OF' \cap \operatorname{rp} V$, где OF' — некоторая окрестность множества F' в пространстве X. Существует такое $\alpha_1 \in \mathfrak{A}$, что $\text{Зв}_{\alpha_1}F' \subseteq OF'$.

Возьмем α, правильно следующее и за α_0 и за α_1. Тогда

$$\text{Зв}_{\alpha} F' \subseteq \text{Зв}_{\alpha_1} F' \subseteq OF'.$$

Покрытие β_α определено, причем

$$F' \subseteq \text{Зв}_{\beta_\alpha} F' = \text{Зв}_\alpha F' \cap \text{гр}\, V \subseteq OF' \cap \text{гр}\, V = UF'.$$

Этим утверждение о сильном измельчении покрытий β_α доказано. Остается доказать, что кратность покрытия β_α не превосходит n. Пусть какая-нибудь точка $y \in \text{гр}\, V$, пусть содержащие ее элементы покрытия β_α суть $B^\alpha_{i_1}, \ldots, B^\alpha_{i_r}$. Надо доказать, что $r \leqslant n$.

Положим $\psi_\alpha = \text{Зв}_\alpha V$; множество ψ_α замкнуто в X, поэтому из очевидного включения $V \subseteq \psi_\alpha$ вытекает включение $[V] \subseteq \psi_\alpha$ и, значит, $y \in \text{гр}\, V \subseteq \psi_\alpha$. Следовательно, существует такое $A^\alpha_p \in \alpha$, что $y \in A^\alpha_p$, $V \cap A^\alpha_p \neq \Lambda$. С другой стороны, так как $y \in B^\alpha_{i_1} \cap \ldots$ $\ldots \cap B^\alpha_{i_r}$, то $y \in A^\alpha_{i_1} \cap \ldots \cap A^\alpha_{i_r}$, где все $A^\alpha_{i_1}, \ldots, A^\alpha_{i_r}$ содержатся в $\Phi = X \setminus V$ и, значит, заведомо отличны от A^α_p; итак, y содержится в $r+1$ элементах покрытия α, так что $r+1 \leqslant n+1$, $r \leqslant n$. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний по поводу доказанной теоремы.

Предложение 1. *Пусть в пространстве X имеется направленная (сильно) измельчающаяся система конечных разбиений*

$$\mathfrak{A} = \{\alpha\}, \quad \alpha = \{A^\alpha_1, \ldots, A^\alpha_{s_\alpha}\}$$

кратности $n+1$.

Тогда в каждом подпространстве $B \subset X$, являющемся пересечением каких-либо $p+1$ элементов произвольно фиксированного разбиения $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, имеется правильно направленная (сильно) измельчающаяся система замкнутых покрытий кратности $\leqslant n-p+1$ и, следовательно, $\operatorname{ind} B \leqslant n-p$, *соответственно* $\operatorname{Ind} B \leqslant n-p$.

В самом деле, пусть $\alpha_0 = \{A_0, \ldots, A_s\}$ и $B = A_0 \cap \ldots \cap A_p$. Возьмем произвольное $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\alpha > \alpha_0$, и обозначим через $A^\alpha_{i_1}, \ldots, A^\alpha_{i_{r(\alpha)}}$ все те элементы покрытия α, которые содержатся в A_0; положим

$$B^\alpha_k = A^\alpha_{i_k} \cap (A_1 \cap \ldots \cap A_p),$$

$$\beta_\alpha = \{B^\alpha_1, \ldots, B^\alpha_{r(\alpha)}\}.$$

Семейство $\mathfrak{B} = \{\beta_\alpha\}$ есть правильно направленное (сильно) измельчающееся семейство покрытий пространства B.

Докажем, что кратность каждого покрытия β_α не превосходит $n-p+1$. Действительно, пусть $x \in B^\alpha_1 \cap \ldots \cap B^\alpha_q$. Так как

$x \in A_i$ при $i = 1, 2, \ldots, p$, то для каждого из этих i можно выбрать содержащий точку x определенный элемент $A^{\alpha}_{k(i)} \subseteq A_i$ покрытия α. Так как $A_1, \ldots, A_p$ суть различные элементы разбиения α_0, то все отобранное нами $A^{\alpha}_{k(i)}$ суть различные элементы покрытия α. Кроме того, имеется q элементов $A^{\alpha_*}_k \in \alpha$, также содержащих точку x. Значит, точка x принадлежит к $p+q$ различным элементам покрытия α, кратность которого $\leqslant n+1$, так что $p+q \leqslant n+1$, $q \leqslant n-p+1$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Так как правильное следование и правильная направленность совпадают в случае разбиений с обычиым следованием и обычной направленностью, то утверждение $\operatorname{ind} X \leqslant n$, соответственно $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, имеет место во всяком пространстве X, в котором существует направленная измельчающаяся, соответственно сильно измельчающаяся, система разбиений кратности $\leqslant n+1$. Если при этом X есть n-мерный бикомпакт или хотя бы n-мерное сильно паракомпактное пространство, то будем иметь $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = n$.

Требование (правильной) направленности семейства покрытий $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ в теореме 10 совершенно существенно. В самом деле, рассмотрим бикомпакт X, для которого $\dim X = n < \operatorname{ind} X$ (например, бикомпакт Локуциевского, построенный в § 6 для $n = 1$). В любое открытое покрытие любого n-мерного бикомпакта можно вписать разбиение кратности $n+1$, так что заведомо существуют даже сильно измельчающиеся системы разбиений кратности $n+1$. Однако ни одна из таких систем не является в случае $\dim X = n < \operatorname{ind} X$ направленной. Нет ничего легче, как дополнить данную систему разбиений до направленной системы разбиений. Однако из первой теоремы Пономарева следует, что в нашем случае, какую бы измельчающуюся систему разбиений кратности $\leqslant n+1$ мы ни взяли, при любом пополнении ее до направленной неизбежно появятся разбиения кратности $> n+1$. Этот «отрицательный» результат является, может быть, самым интересным следствием первой теоремы Пономарева.

3. Случай пространств со счетной базой. Как мы знаем (гл. 1, § 6, предложение 13), во всяком пространстве X со счетной базой имеется счетная измельчающаяся последовательность конечных открытых покрытий.

Лемма 1. (Проскуряков [1]). *Во всяком n-мерном пространстве X со счетной базой существует такая счетная измельчающаяся последовательность*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{1}$$

замкнутых покрытий α_m кратности $\leqslant n+1$, что при любом m покрытие α_{m+1} вписано в покрытие α_m.

Доказательство. Пусть

(2) $$\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

— какая-нибудь измельчающаяся последовательность открытых покрытий пространства X. Берем произвольное вписанное в σ_1 замкнутое покрытие β_1 кратности $\leqslant n+1$ (такое покрытие β_1 существует потому, что $\dim X \leqslant n$). Слегка «раздуваем» покрытие β_1, превращая его в открытое покрытие $\omega_1 = \{O_1^1, \ldots, O_{\nu_1}^1\}$, элементы которого суть столь тесные окрестности элементов покрытия β_1, что покрытие $\alpha_1 = \{[O_1^1], \ldots, [O_{\nu_1}^1]\}$, имея ту же кратность, что и β_1, вписано в σ_1.

Пусть уже построены такие открытые покрытия $\omega_i = \{O_1^i, \ldots \ldots, O_{\nu_i}^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, что

1) покрытие ω_i вписано как в покрытие σ_i, так и в покрытие ω_{i-1};

2) покрытие $\alpha_i = \{[O_1^i], \ldots, [O_{\nu_i}^i]\}$ имеет кратность $\leqslant n+1$.

Берем замкнутое покрытие β_{m+1} кратности $\leqslant n+1$, вписанное в покрытие $\sigma_{m+1} \wedge \omega_m$, и раздуваем его в такое $\omega_{m+1} = \{O_1^{m+1}, \ldots, O_{\nu_{m+1}}^{m+1}\}$, чтобы $\alpha_{m+1} = \{[O_1^{m+1}], \ldots, [O_{\nu_{m+1}}^{m+1}]\}$ все еще имело кратность $\leqslant n+1$ и оставалось вписанным в $\sigma_{m+1} \wedge \omega_m$. Последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$, очевидно, есть искомая. Лемма 1 доказана.

Предложение 2 (Куратовский [2]). *Всякое n-мерное пространство X со счетной базой является образом некоторого нульмерного пространства B_0 со счетной базой при непрерывном замкнутом неприводимом отображении $f\colon B_0 \to X$, имеющем кратность $\leqslant n+1$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ — последовательность замкнутых покрытий пространства X из леммы 1, $\alpha_m = \{F_1^m, \ldots, F_{\nu_m}^m\}$. Положим еще $\alpha_0 = \{X\}$, $F_1^0 = X$, $\nu_0 = 1$ и построим счетную последовательность пространств $X = X_0, X_1, \ldots \ldots, X_m, \ldots$ со счетной базой. Каждое из пространств X_m мы следующим образом определим как множество, лежащее в произведении $X \times \{1, \ldots, \nu_m\}$ пространства X на отрезок $\{1, \ldots, \nu_m\}$ натурального ряда: мы определяем X_m равенством $X_m = \bigcup_{j=1}^{\nu_m} F_j^m \times \times \{j\}$, т. е. $(x, j) \in X_m \Leftrightarrow x \in F_j^m$. Заметим, что множества $F_j^m \times \{j\}$ открыто-замкнуты в X_m.

Построим теперь непрерывное замкнутое отображение $f_m^{m+1}\colon X_{m+1} \to X_m$ для всякого $m = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $(x, j) \in \in F_j^{m+1} \times \{j\} \subset X_{m+1}$. Через j_0 обозначим наименьшее из таких чисел, что множество F_j^{m+1} содержится в элементе $F_{j_0}^m$ покрытия α_m, наконец, положим

$$f_m^{m+1}(x, j) = (x, j_0) \in F_{j_0}^m \times \{j_0\} \subseteq X_m.$$

Построенное отображение f_m^{m+1} гомеоморфно отображает открыто-замкнутое подмножество $F_j^{m+1} \times \{j\}$ пространства X_{m+1} на замкнутое подмножество $F_j^{m+1} \times \{j_0\} \subset F_{j_0}^m \times \{j_0\}$ пространства X_m. Так как пространство X_{m+1} является дизъюнктной суммой таких открыто-замкнутых подмножеств, то отображение f_m^{m+1} замкнуто и непрерывно.

Последовательность

$$(3) \qquad X = X_0 \xleftarrow{f_0^1} X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \leftarrow \ldots \xleftarrow{f_{m-1}^m} X_m \xleftarrow{f_m^{m+1}} \ldots$$

определяет обратный спектр (см. Прибавление к гл. 1, § 1)

$$S = \{X_m, f_k^m\}, \quad \text{где} \quad f_k^m = f_k^{k+1} \ldots f_{m-2}^{m-1} f_{m-1}^m.$$

Обозначим через Z предел этого обратного спектра и через $f_m\colon Z \to X_m$ — его проекции в элементы спектра S, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Заметим, что отображение $f_m^{m+1}\colon X_{m+1} \to X_m$ не меняет первой координаты точки $(x, j) \in X_{m+1}$. Этим же свойством обладают, следовательно, и все отображения f_k^m, в частности $f_0^m\colon X_m \to X$. Таким образом, в точку $x \in X$ при отображении f_0^m отображаются лишь точки $(x, j_1), \ldots, (x, j_s) \in X_m$, где $x \in F_{j_1}^m, \ldots, x \in F_{j_s}^m$. Значит, кратность отображения $f_0^m\colon X_m \to X$ в точке $x \in X$ совпадает с кратностью покрытия α_m в этой точке и поэтому не превосходит $n+1$.

Так как все отображения f_k^m замкнуты, непрерывны и конечнократны (следовательно, совершенны), а отображения $f_0^m\colon X_m \to X$ суть отображения на X, то отображение $f_0\colon Z \to X$ также замкнуто (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 12). Кратность проекции $f_0\colon Z \to X$ также не превосходит $n+1$. Действительно, пусть для некоторой точки $x \in X$ множество $f_0^{-1}x$ содержит по крайней мере $n+2$ точек z_i, $i = 1, \ldots, n+2$. Из предложения 10 § 1 Прибавления к гл. 1 вытекает существование такого номера m, что точки $f_m z_i$, $i = 1, \ldots, n+2$, попарно различны. Так как

$$f_0^m f_m z_i = f_0 z_i = x, \qquad i = 1, \ldots, n+2,$$

то отображение f_0^m имеет кратность $\geqslant n+2$. Полученное противоречие доказывает, что кратность $f_0 \leqslant n+1$.

Таким образом, отображение f_0 — непрерывное, замкнутое и $(n+1)$-кратное отображение пространства Z на пространство X; пространство Z, как предел счетного спектра из пространств со счетной базой, имеет счетную базу. Покажем, что пространство Z нульмерно. Базу окрестностей точки $z \in Z$ образуют множества вида $f_m^{-1} O f_m z$, где $O f_m z$ — окрестность точки $f_m z$ в пространстве X_m. Пусть $f_m z \in F_j^m \times \{j\}$. Тогда существует такая окрестность U точки $x = f_0 z$ в пространстве X, что $O f_m z = (U \cap F_j^m) \times \{j\}$. Так как последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ измельчающаяся, то существует такой номер $m_0 \geqslant m$, что $\text{Зв}_x \alpha_{m_0} \subset U$. Возьмем точку $f_{m_0} z$. Существует такое множество $F_{j_0}^{m_0} \in \alpha_{m_0}$, что $f_{m_0} z \in F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\}$. Тогда $f_{m_0} z = (x, j_0)$ и $F_{j_0}^{m_0} \subset \text{Зв}_x \alpha_{m_0}$. Так как $f_m^{m_0} f_{m_0} z = f_m z \in F_j^m \times \{j\}$, то по определению отображения $f_m^{m_0}$ имеем $f_m^{m_0}(F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\}) \subset F_j^m \times \{j\}$. Сопоставляя это с включениями $F_{j_0}^{m_0} \subset \text{Зв}_x \alpha_{m_0} \subset U$, получаем

$$f_m^{m_0}(F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\}) \subset (U \cap F_j^m) \times \{j\} = O f_m z.$$

Тогда $F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\} \subset (f_m^{m_0})^{-1} O f_m z$ и тем более

$$f_{m_0}^{-1}(F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\}) \subset f_{m_0}^{-1} (f_m^{m_0})^{-1} O f_m z = f_m^{-1} O f_m z.$$

Таким образом, в базисной окрестности $f_m^{-1} O f_m z$ точки z содержится открыто-замкнутая окрестность $f_{m_0}^{-1}(F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\})$ (множество $F_{j_0}^{m_0} \times \{j_0\}$ открыто-замкнуто в X_{m_0}). Следовательно, $\operatorname{ind} Z = 0$.

Отображение $f = f_0$ может не быть неприводимым. Однако, так как всякое конечнократное отображение, очевидно, бикомпактно, то существование замкнутого $B_0 \subset Z$, которое посредством f неприводимо отображается на X, вытекает из следующей общей леммы, доказательство которой и завершает доказательство предложения 2:

Лемма о существовании неприводимых отображений. *Пусть f: $Z \to X$ — произвольное бикомпактное отображение произвольного пространства Z на пространство X. Тогда существует такое замкнутое в Z множество, которое посредством f неприводимо отображается на X.*

Доказательство леммы. Полагаем $Z_0 = Z$ и предположим, что для всех порядковых чисел $\mu < \lambda$ определено замкнутое Z_μ, так что $f Z_\mu = X$ и при $\mu'' > \mu'$ имеем $Z_{\mu''} \subset Z_{\mu'}$. Если λ — непредельное число, $\lambda = \mu + 1$, и f неприводимо на Z_μ, то построение закончено и лемма доказана.

Если же f на Z_μ не является неприводимым, то существует замкнутое $Z_{\mu+1} \subset Z_\mu$, которое посредством f отображается на все X.

Пусть λ — предельное трансфинитное число. Тогда полагаем $Z_\lambda = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} Z_\mu$ и доказываем, что Z_λ непусто. Более того, доказываем, что для любой точки $x \in X$ непусто множество $f^{-1}x \cap Z_\lambda$. Это вытекает из того, что $f^{-1}x \cap Z_\lambda = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} (f^{-1}(x) \cap Z_\mu)$, а множества $f^{-1}x \cap Z_\mu$ образуют вполне упорядоченную убывающую систему непустых замкнутых множеств бикомпакта $f^{-1}x$. Итак, Z_λ не только непусто, но отображается посредством f на все пространство X. Индукция идет дальше и заканчивается лишь на таком Z_λ, которое посредством f неприводимо отображается на X. Лемма доказана.

Из предложения 2 легко выводится, что во всяком n-мерном пространстве X со счетной базой имеется сильно измельчающаяся правильно направленная система замкнутых покрытий кратности $\leqslant n+1$, откуда в свою очередь вытекает, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n = \dim X$. Однако мы тот же результат получим из более общего предложения, доказательство которого ничуть не сложнее.

Предложение 3 (вторая теорема Пономарева). *Всякое пространство X, являющееся образом нульмерного вполне регулярного пространства*) Z при $(n+1)$-кратном замкнутом непрерывном отображении $f\colon Z \to X$, имеет сильно измельчающееся направленное множество разбиений кратности $\leqslant n+1$, и, следовательно, для него* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать отображение f неприводимым. В противном случае мы заменили бы (на основании только что доказанной леммы) пространство Z его замкнутым подпространством, на котором f неприводимо.

Берем семейство $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ всех конечных дизъюнктных разбиений

$$\alpha = \{A_1^\alpha, \ldots, A_{s_\alpha}^\alpha\}$$

пространства Z. Покрытие α состоит из открыто-замкнутых множеств A_i^α, $i = 1, 2, \ldots, s_\alpha$. Семейство $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$, направленное обычным образом (считая $\alpha' > \alpha$, если α' вписано в α), является конфинально измельчающимся (в силу нульмерности пространства Z).

Положим

$$f\alpha = \{fA_1^\alpha, \ldots, fA_{s_\alpha}^\alpha\}.$$

*) При этом мы вполне регулярное пространство Z называем нульмерным, если во всякое его конечное открытое покрытие можно вписать (конечное) дизъюнктное (открыто-замкнутое) покрытие. В этом случае пространство Z автоматически нормально.

Тогда $f\alpha$ имеет кратность $\leqslant n+1$. В самом деле, если $x \in f A^{\alpha}_{i_1} \cap \ldots \cap f A^{\alpha}_{i_r}$, то в каждом $A^{\alpha}_{i_k}$, $k=1, \ldots, r$, имеется точка $z_k \in A^{\alpha}_{i_k}$, для которой $x = fz_1 = \ldots = fz_r$, поэтому $r \leqslant n+1$.

Лемма 2 (Пономарев [3]). *Если $f\colon Z \to X$ — замкнутое неприводимое отображение и F — канонически замкнутое подмножество пространства Z, то множество fF канонически замкнуто, а множество $f^{\#}\langle F\rangle$ всюду плотно в fF и является его ядром.*

Доказательство. Предположим, что $f^{\#}\langle F\rangle$ не всюду плотно в fF. Тогда существует такое открытое в X множество U, что $f^{\#}\langle F\rangle \cap U = \Lambda$, $U \cap fF \neq \Lambda$, следовательно, и $f^{-1}U \cap F \neq \Lambda$. Но открытое множество $f^{-1}U$, пересекаясь с канонически замкнутым множеством F, пересекается также с его ядром $\langle F\rangle$. Поэтому множество $f^{\#}(\langle F\rangle \cap f^{-1}(U))$ непусто, как малый образ непустого открытого множества при неприводимом отображении. Это противоречит тому, что $f^{\#}\langle F\rangle \cap U = \Lambda$. Таким образом, открытое множество $f^{\#}\langle F\rangle$ всюду плотно в замкнутом множестве fF, которое в силу этого канонически замкнуто. Тогда малый образ канонически открытого множества канонически открыт, и поэтому канонически открытое множество $f^{\#}\langle F\rangle$, будучи плотным в fF, является его ядром. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 2 является

Лемма 3 (Пономарев [3]). *Если $f\colon Z \to X$ — неприводимое замкнутое отображение, то образ $f\alpha = \{fA^{\alpha}_1, \ldots, fA^{\alpha}_s\}$ разбиения $\alpha = \{A^{\alpha}_1, \ldots, A^{\alpha}_s\}$ пространства Z есть разбиение пространства X.*

Заканчиваем доказательство предложения 3. Если $\alpha' > \alpha$, то и $f\alpha' > f\alpha$, так что семейство $f\mathfrak{A} = \{f\alpha\}$ является направленным. Оно конфинально измельчающееся относительно конечных покрытий (следовательно, сильно измельчающееся).

В самом деле, пусть $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Берем его прообраз $f^{-1}\omega = \{f^{-1}O_1, \ldots, f^{-1}O_s\}$. Существует вписанное в покрытие $f^{-1}\omega$ пространства Z разбиение α. Тогда $f\alpha$ вписано в ω. Предложение 3 доказано.

Вернемся к пространствам X со счетной базой. Из первой теоремы Пономарева, предложений 2 и 3 и из ранее доказанного для этих пространств неравенства $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ следует равенство $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для всех пространств со счетной базой.

Далее, мы доказали (предложение 2), что всякое n-мерное пространство со счетной базой размерности $\leqslant n$ есть образ некоторого нульмерного пространства B_0 со счетной базой при некотором непрерывном замкнутом отображении кратности $\leqslant n+1$, тогда как из предложения 3 следует, что всякое пространство X со счетной базой, являющееся $(n+1)$-кратным замкнутым образом нульмерного пространства со счетной базой, имеет размерность $\dim X \leqslant n$.

Итак, доказана

Теорема 11 (Куратовский [2], Гуревич [3]). *Размерность пространства со счетной базой X есть наименьшее такое целое $n \geqslant 0$, что X может быть представлено как образ некоторого нульмерного пространства B_0 со счетной базой (т. е. множества, лежащего в канторовом совершенном множестве) при замкнутом непрерывном отображении f кратности $n+1$.*

Из предложений 1, 2 и 3 вытекает также

Теорема 12 (Менгер [3]). *В n-мерном пространстве X со счетной базой существует измельчающаяся последовательность разбиений $\mathfrak{B} = \{\beta_m\}$, обладающих свойством (P):*

(P) Пересечение любых p элементов каждого β_m имеет размерность $\leqslant n-p+1$ (так что все β_m суть покрытия кратности $\leqslant n+1$).

Если X — компакт, то последовательность $\mathfrak{B}$ является конфинально (значит, и сильно) измельчающейся. Если же X — не компактное пространство со счетной базой, то в X имеется направленная (но необходимо несчетная) конфинально измельчающаяся система разбиений, обладающая свойством (P) и, следовательно, состоящая из покрытий кратности $\leqslant n+1$.

4. Общий случай. Теорема 13 (третья теорема Пономарева). *Если в пространстве X имеется измельчающаяся направленная система разбиений кратности $\leqslant n+1$, то X является образом тихоновского пространства Z_0, имеющего размерность $\operatorname{ind} Z_0 = 0$ и, следовательно, лежащего в некотором дисконтинууме D^τ, при некотором неприводимом непрерывном замкнутом отображении $f\colon Z_0 \to X$ кратности $\leqslant n+1$.*

Доказательство этой теоремы, по существу, аналогично доказательству предложения 2. Пусть

$$\mathfrak{A} = \{\alpha\}, \qquad \alpha = \left\{A_1^\alpha, \ldots, A_{s_\alpha}^\alpha\right\},$$

— измельчающаяся направленная система разбиений пространства X. Будем считать, что система $\mathfrak{A}$ содержит разбиение α_0, состоящее из одного элемента X. Для каждого разбиения $\alpha \in \mathfrak{A}$ следующим образом определим пространство X_α как замкнутое подмножество произведения $X \times \{1, \ldots, s_\alpha\}$ пространства X на отрезок $\{1, \ldots, s_\alpha\}$ натурального ряда:

$$X_\alpha = \bigcup_{j=1}^{s_\alpha} A_j^\alpha \times \{j\},$$

т. е. $(x, j) \in X_\alpha \Leftrightarrow x \in A_j^\alpha$. Заметим, что множества $A_j^\alpha \times \{j\}$ открыто-замкнуты в X_α.

Построим теперь непрерывные отображения $f_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \to X_\alpha$ для всех пар α, α' таких, что $\alpha < \alpha'$. Пусть $(x, j') \in A_{j'}^{\alpha'} \times \{j'\} \subseteq X_{\alpha'}$. Существует единственный элемент A_j^α разбиения α, содержащий множество $A_{j'}^{\alpha'}$. Положим

$$f_\alpha^{\alpha'}(x, j') = (x, j) \in A_j^\alpha \times \{j\} \subseteq X_\alpha.$$

Непрерывность отображения $f_\alpha^{\alpha'}$ очевидна (она доказывается так же, как в предложении 2 доказывается непрерывность отображения f_m^{m+1}). Покажем, что $f_\alpha^{\alpha''} = f_\alpha^{\alpha'} f_{\alpha'}^{\alpha''}$ для $\alpha < \alpha' < \alpha''$. Пусть $(x, j'') \in A_{j''}^{\alpha''} \times \{j''\} \subseteq X_{\alpha''}$. Тогда $f_\alpha^{\alpha''}(x, j'') = (x, j)$ и $f_\alpha^{\alpha'} f_{\alpha'}^{\alpha''}(x, j'') = f_\alpha^{\alpha'}(x, j') = (x, j)$. Таким образом, определен обратный спектр $S = \{X_\alpha, f_\alpha^{\alpha'}\}$.

Обозначим через Z предел этого обратного спектра и через $f_\alpha: Z \to X_\alpha$ — его проекцию в элемент X_α спектра S, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пространство Z вполне регулярно, как предел обратного спектра из вполне регулярных пространств (см. § 1 Прибавления к гл. 1). Доказательство того, что $\operatorname{ind} Z = 0$, и того, что $f_{\alpha_0}: Z \to X_{\alpha_0} = X$ есть не более чем $(n+1)$-кратное замкнутое отображение на X, дословно повторяет доказательство аналогичных утверждений в предложении 2. Далее так же, как и при доказательстве предложения 2, выбирается замкнутое подмножество $Z_0 \subseteq Z$, на котором отображение f_{α_0} неприводимо. Теорема 13 доказана.

Замечание 3. Если X — бикомпакт, то пространство Z_0 бикомпактно, как совершенный прообраз бикомпакта (см. предложение 14 из § 7 гл. 1). Таким образом, Z_0 нульмерно во всех смыслах ($\dim Z_0 = \operatorname{ind} Z_0 = \operatorname{Ind} Z_0 = 0$). Сопоставляя вторую и третью теоремы Пономарева, получаем следующий окончательный результат:

Теорема 14. *Если в бикомпакте X, $\dim X = n$, имеется измельчающееся множество разбиений кратности $\leqslant n+1$, то X является образом нульмерного бикомпакта Z_0 при неприводимом непрерывном отображении f кратности $\leqslant n+1$. Обратно, если бикомпакт X есть образ нульмерного бикомпакта при непрерывном отображении кратности $\leqslant n+1$, то в X имеется даже конфинально измельчающееся направленное семейство разбиений кратности $\leqslant n+1$ и, значит, $\dim X \leqslant n$, $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X \leqslant n$. Если при этом $\dim X = n$, то $n = \dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.*

Теперь читателю, вероятно, не покажется немотивированным следующее

Определение 4. Пространство X конечной размерности $\dim X = n$ называется *пономаревским пространством размерности* n (или *совершенно* n*-мерным пространством*), если в X имеется сильно измельчающаяся направленная система разбиений кратности $n+1$.

Из доказанного следует, что для всякого пономаревского сильно паракомпактного пространства имеет место равенство $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ (см. гл. 4, § 8, п. 1). Пономаревские бикомпакты размерности n характеризуются среди всех бикомпактов X размерности n тем, что они и только они являются образами нульмерных бикомпактов при непрерывных неприводимых отображениях кратности $\leqslant n+1$.

§ 8. Теорема о перегородках

Мы будем в этом параграфе обозначать через (A, B) пару непустых дизъюнктных замкнутых множеств нормального пространства X. Перегородку между множествами A и B называем перегородкой для пары (A, B).

Теорема 15 (теорема о перегородках)*). *Пусть* $\dim X = n$. *Тогда, каковы бы ни были пары*

$$(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1}),$$

перегородки $C_1, \ldots, C_{n+1}$ *для этих пар всегда можно выбрать так, чтобы* $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} C_k = \Lambda$. *В то же время всегда существует* n *таких пар*

$$(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n),$$

что при любом выборе для них перегородок $C_1, \ldots, C_n$ *пересечение* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$ *непусто.*

Пример. (A_1, B_1), (A_2, B_2) — пары противоположных сторон квадрата. При любом выборе перегородок C_1, C_2 их пересечение непусто (элементарное доказательство нетрудно, но нетривиально).

Очевидно, теорему о перегородках можно формулировать и так:

Для того чтобы было $\dim X \leqslant n$, *необходимо и достаточно следующее условие*:

*) См. Отто и Эйленберг [1] для пространств со счетной базой и Хеммингсен [1] для нормальных пространств.

(1) *для любых* $n+1$ *пар* $(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ *существуют перегородки* $C_1, \ldots, C_{n+1}$ *с пустым пересечением* $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} C_k = \Lambda$.

В этой формулировке мы и будем доказывать теорему.

Лемма 1 *). *Если для пар* (1) *существуют перегородки* $C_1, \ldots, C_{n+1}$ *с пустым пересечением, то существуют и перегородки*

$$C_i' \supseteq C_i,$$

являющиеся замкнутыми G_δ-*множествами и также имеющие пустое пересечение.*

Доказательство леммы 1. Пусть для пар (1) выбраны перегородки $C_1, \ldots, C_{n+1}$ с пустым пересечением. По теореме о раздутии (гл. 1, § 10) существуют такие окрестности $OC_1, \ldots$ $\ldots, OC_{n+1}$ этих перегородок, что система $\{OC_1, \ldots, OC_{n+1}\}$ подобна системе $\{C_1, \ldots, C_{n+1}\}$. В частности, $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} OC_i = \Lambda$. При этом всегда можно предполагать, что

$$OC_i \cap (A_i \cup B_i) = \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

В качестве множества C_i' берем произвольное замкнутое G_δ-множество, для которого $C_i \subseteq C_i' \subseteq OC_i$. Такие множества C_i' существуют в силу предложения 4 § 10 гл. 1. Очевидно, что пересечение всех множеств C_i' пусто. Остается доказать, что каждое C_i' является перегородкой для пары (A_i, B_i).

Но C_i есть перегородка, поэтому

$$X = OA_i \cup C_i \cup OB_i, \qquad OA_i \cap OB_i = \Lambda;$$

значит, так как $C_i \subseteq C_i' \subseteq X$, имеем

$$X = OA_i \cup C_i' \cup OB_i, \qquad OA_i \cap OB_i = \Lambda.$$

Так как C_i' замкнуто и не пересекается ни с A_i, ни с B_i, то множества $OA_i \setminus C_i'$ и $OB_i \setminus C_i'$ открыты и содержат соответственно A_i и B_i, т. е. являются (очевидно, дизъюнктными) окрестностями $O'A_i$ и $O'B_i$ этих множеств, так что мы имеем разбиение

$$X \setminus C_i' = O'A_i \cup O'B_i.$$

Итак, C_i' есть перегородка для пары (A_i, B_i), и лемма 1 доказана.

---

*) В случае метризуемого X эта лемма тривиальна (т. е. в метрическом пространстве X всякое замкнутое множество есть G_δ).

Переходим собственно к доказательству теоремы о перегородках.

Условие (1) достаточно. Пусть оно выполнено; докажем, что $\dim X \leqslant n$, т. е. что всякое непрерывное отображение f пространства X в $(n+1)$-мерный куб

$$Q^{n+1} = \{-1 \leqslant t_i \leqslant 1\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

несущественно.

Записываем отображение f в виде системы непрерывных функций $fx = \{f_1 x, \ldots, f_{n+1} x\}$, $-1 \leqslant f_i x \leqslant 1$, при $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Обозначаем через S^n границу куба Q^{n+1}, т. е. множество всех точек $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})$, для которых хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n+1$ имеем $t_i = \pm 1$, и полагаем $\Phi = f^{-1} S^n$, $A_i = f_i^{-1}(-1)$, $B_i = f_i^{-1}(1)$ (при $i = 1, 2, \ldots, n+1$). Тогда

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \cup B_i).$$

Согласно условию (1) мы можем найти для всех пар (A_i, B_i) такие перегородки C_i, что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \Lambda$; при этом, согласно лемме 1, мы можем предположить, что эти перегородки являются замкнутыми G_δ-множествами. Итак,

$$(2) \qquad \begin{cases} X \setminus C_i = OA_i \cup OB_i, \quad OA_i \cap OB_i = \Lambda, \\ \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \Lambda. \end{cases}$$

Так как множество $OA_i \cup C_i = X \setminus OB_i$ замкнуто в нормальном X, то оно само является нормальным пространством, в котором даны замкнутое G_δ-множество C_i и замкнутое A_i, не пересекающееся с C_i. Поэтому, по лемме Веденисова, можем построить (для всех $i = 1, 2, \ldots, n+1$) непрерывную на $OA_i \cup C_i$ функцию $g_i'(x)$, $-1 \leqslant g_i'(x) \leqslant 0$, имеющую множество C_i множеством всех своих нулей и равную -1 на A_i. Точно так же на нормальном пространстве $OB_i \cup C_i$ строим для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$ непрерывную функцию $g_i''(x)$, $0 \leqslant g_i''(x) \leqslant 1$, имеющую множество C_i множеством всех своих нулей и обращающуюся в 1 на множестве B_i.

Так как $(OA_i \cup C_i) \cap (OB_i \cup C_i) = C_i$ и на C_i функции $g_i'(x)$ и $g_i''(x)$ совпадают, то, полагая

$$\begin{cases} g_i(x) = g_i'(x) & \text{на} \quad OA_i \cup C_i, \\ g_i(x) = g_i''(x) & \text{на} \quad OB_i \cup C_i, \end{cases}$$

получаем непрерывную во всем пространстве X функцию $g_i(x)$, $-1 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$, обращающуюся в нуль во всех точках множества C_i и только в них. Функции $g_i(x)$ определены для всех $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Полагая

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_{n+1}(x)),$$

получаем непрерывное отображение g пространства X в куб Q^{n+1}. При этом отображении центр $(0, 0, \ldots, 0)$ куба не является образом никакой точки $x_0 \in X$; в самом деле, если бы было $gx_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, то для x_0 были бы

$$g_1 x_0 = 0, \ldots, g_{n+1} x_0 = 0,$$

т. е.

$$x_0 \in C_1 \cap \ldots \cap C_{n+1},$$

что невозможно, так как по предположению $C_1 \cap \ldots \cap C_{n+1} = \Lambda$. Поэтому на отображение g можно наложить проекцию π из центра куба на его границу и получить отображение

$$G = \pi g \colon X \to S^n.$$

Посмотрим, как ведут себя отображения g и G на множестве $\Phi = f^{-1} S^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} (A_i \cup B_i)$.

Если $x \in \Phi$ и, например, $x \in A_i$ (соответственно $x \in B_i$), то

$$f_i x = -1 \quad (\text{соответственно } f_i x = 1).$$

Но тогда и

$$g_i x = -1 \quad (\text{соответственно } g_i x = 1).$$

Другими словами: если $x \in \Phi$, то fx и gx принадлежат одной и той же грани куба Q^{n+1}; следовательно, отображения $f_\Phi = f \colon \Phi \to S^n$ и $g_\Phi = g \colon \Phi \to S^n$ гомотопны между собою.

Далее, при $x \in \Phi$ имеем $gx \in S^n$, так что

$$Gx = \pi g x = gx \quad \text{для всех} \quad x \in \Phi.$$

Другими словами: отображение G совпадает с g на Φ и поэтому является продолжением отображения g_Φ. Итак, отображение g_Φ допускает продолжение на все X. Поэтому и гомотопное ему отображение f_Φ, по лемме о грибе, также может быть продолжено в отображение всего пространства X в S^n. А это и значит, что отображение f (пространства X в куб Q^{n+1}) несущественно.

Первая половина теоремы о перегородках доказана.

Доказываем вторую половину: необходимость условия (1) для того, чтобы $\dim X \leqslant n$.

Итак,

$$\dim X \leqslant n.$$

Пусть даны произвольные пары

$$(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1}).$$

Требуется найти такие перегородки

$$C_1, \ldots, C_{n+1},$$

чтобы было $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} C_i = \Lambda$.

Для каждой из заданных пар (A_i, B_i) строим, по лемме Урысона, непрерывные на всем X функции $f_i x$, $-1 \leqslant f_i x \leqslant 1$:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} f_i x = -1 & \text{на } A_i, \\ f_i x = 1 & \text{на } B_i \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Этим определено непрерывное отображение

$$fx = (f_1 x, \ldots, f_{n+1} x)$$

пространства X в куб Q^{n+1}; при этом все множества A_i, B_i отображаются в границу куба (так как если, например, $x \in A_i$, то $f_i x = -1$, а если $x \in B_i$, то $f_i x = 1$).

Отображение f несущественно, так как $\dim X \leqslant n$. Поэтому существует отображение $gx = (g_1 x, \ldots, g_{n+1} x)$ пространства X в границу S^n куба Q^{n+1}, совпадающее с f на множестве $\Phi = f^{-1} S^n$. В частности, на любых A_i, B_i (которые как мы только что видели, содержатся в Φ) имеем $gx = fx$, т. е. имеем

$$g_i x = f_i x \text{ для } x \in A_i,\ x \in B_i \text{ и любого } i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Положим $C_i = g_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ (другими словами, C_i есть множество всех нулей функции g_i), множество C_i замкнуто в X. Докажем, что оно является перегородкой для пары (A_i, B_i). Так как $g_i x = \pm 1$ на A_i, соответственно на B_i, то открытые множества

$$OA_i = \{x \mid g_i x < 0\},$$
$$OB_i = \{x \mid g_i x > 0\}$$

являются — очевидно, дизъюнктными — окрестностями множеств A_i и B_i; а так как $X \setminus C_i = OA_i \cup OB_i$, то C_i действительно отделяет A_i от B_i, т. е. является для пары (A_i, B_i) перегородкой.

Остается доказать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} C_i = \Lambda$. Но если бы существовала точка

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i,$$

то, по определению множеств C_i, было бы

$$g_1 x_0 = 0, \ldots, g_{n+1} x_0 = 0,$$

т. е. точка gx_0 была бы центром $(0, \ldots, 0)$ куба Q^{n+1}, что противоречит тому, что отображение g есть отображение пространства X в границу куба Q^{n+1}.

Теорема о перегородках полностью доказана.

Доказывая теорему о перегородках, мы доказали следующие два утверждения, которые будут нам полезны в дальнейшем:

Лемма 2. *Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X \to Q^{n+1}$ пространства X в $(n+1)$-мерный куб*

$$Q^{n+1} = \{t = \{t_i\} \mid -1 \leqslant t_i \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n+1\}.$$

Если для пар множеств

$$A_j = f^{-1}\{t = \{t_i\} \mid t_j = -1\}, \ B_j = f^{-1}\{t = \{t_i\} \mid t_j = 1\}$$

можно выбрать перегородки C_j, $j = 1, \ldots, n+1$, с пустым пересечением $\bigcap\limits_{j=1}^{n+1} C_j = \Lambda$, то отображение f несущественно.

Лемма 3. *Пусть в пространстве X дана система пар (A_j, B_j), $j=1, \ldots, n+1$, и дано такое непрерывное отображение $f\colon X \to Q^{n+1}$ пространства X в $(n+1)$-мерный куб*

$$Q^{n+1} = \{t = \{t_i\} \mid -1 \leqslant t_i \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n+1\},$$

что

$$fA_j \subseteq \{t = \{t_i\} \mid t_j = -1\} \quad \text{и} \quad fB_j \subseteq \{t = \{t_i\} \mid t_j = 1\}, \qquad j = 1, \ldots, n+1$$

Если отображение f несущественно, то для пар (A_j, B_j), $j = 1, \ldots, n+1$, можно выбрать перегородки с пустым пересечением.

§ 9. Размерность произведения. Канторовы многообразия

Этот параграф состоит из трех частей. Первая посвящена доказательству неравенства *)

$$\dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y \tag{1}$$

для любых двух бикомпактов X и Y **); во второй (для любых бикомпактов) доказывается теорема Гуревича — Тумаркина:

Теорема 16 ***). *Всякий n-мерный бикомпакт содержит n-мерное канторово многообразие* ****).

Наконец, в третьей части вводится и исследуется понятие размерностной компоненты.

Эти части связаны между собою лишь тем, что доказательство теоремы 16 опирается на формулу (1) (при том лишь в частном ее случае, когда Y есть отрезок). В то же время сама эта формула настолько важна и интересна, что низводить ее в ранг простой леммы к теореме 16 нам казалось неподходящим.

1. Доказательство неравенства (1). Произведение двух данных бикомпактов X и Y будем все время обозначать через Z.

Предложение 1. *Для любого конечного открытого покрытия ω бикомпакта $Z = X \times Y$ существуют такие конечные открытые покрытия $\xi = \{U_i\}$ $i = 1, \ldots, s$, бикомпакта X, и $\eta = \{V_j\}$, $j = 1, \ldots, r$, бикомпакта Y, что покрытие $\xi \times \eta = \{U_i \times V_j\}$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$, вписано в покрытие ω.*

Доказательство. Для произвольной фиксированной точки $x \in X$ и для каждого $y \in Y$ выберем такую окрестность $O_x y$ точки y в Y и такую окрестность $O_y x$ точки x в X, что окрестность $O_y x \times O_x y$ точки (x, y) содержится в одном из элементов покрытия ω. Из покрытия $\{O_x y\}$, $y \in Y$, бикомпакта Y

*) Как известно, неравенство (1) — это все, что можно сказать о размерности произведения даже в случае компактов. В рамках гомологической теории размерности Понтрягин [1] построил пример двумерных компактов X, Y, лежащих в R^4, произведение которых $Z = (X \times Y)$ имеет размерность 3, и доказал, что для компактов X и Y, лежащих в R^3, всегда $\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

**) Неравенство (1) имеет место и в том случае, когда X—паракомпакт, а Y—локально бикомпактный паракомпакт (см. Морита [3]). В рассматриваемом случае неравенство (1) установлено Хеммингсеном [1]. Наиболее общие результаты получены недавно Филипповым [4] и Пасынковым [19].

***) Теорема 16 доказана для компактов Гуревичем и Тумаркиным, в общем случае Александровым [20].

****) Напомним (см. гл. 2, § 2, п. 3), что n-мерное канторово многообразие («континуум» U^n) может быть определено как бикомпакт X, $\dim X = n$, удовлетворяющий условию: каково бы ни было представление $X' = \Phi_1 \cap \Phi_2$ бикомпакта X в виде суммы двух непустых замкнутых множеств Φ_1 и Φ_2, всегда имеем $\dim (\Phi_1 \cap \Phi_2) > n - 2$.

выберем конечное подпокрытие $\eta_x = \{O_x y_k\}$, $k = 1, \ldots, r$. Положим

$$Ox = \bigcap_{k=1}^{r} O_{y_k} x.$$

Система $\omega_x = \{Ox \times O_x y_k\}$, $k = 1, \ldots, r$, вписана в покрытие ω, и

$$\tilde{\omega}_x = Ox \times Y.$$

Построим для каждой точки $x \in X$ окрестность Ox, получим покрытие $\{Ox\}$ бикомпакта X. Из этого покрытия выберем конечное подпокрытие $\xi = \{U_i = Ox_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Через $\eta = \{V_j\}$, $j = 1, \ldots, r$, обозначим пересечение $\eta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{x_s}$ покрытий η_{x_i}. Покрытия ξ и η будут, очевидно, искомыми. Предложение доказано.

Докажем неравенство (1). Рассмотрим произвольное конечное открытое покрытие ω бикомпакта $Z = X \times Y$.

По предложению 1 существуют такие открытые покрытия

$$\xi = \{U_i\},\ i = 1, \ldots, s, \quad \text{и} \quad \eta = \{V_j\}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

бикомпактов X и Y соответственно, что покрытие $\xi \times \eta = \{U_i \times V_j\}$ вписано в ω. По теореме об ω-отображениях существуют: ξ-отображение $f\colon X \to P_\xi$ и η-отображение $g\colon Y \to P_\eta$ пространств X и Y на полиэдры P_ξ и P_η размерности

$$\dim P_\xi \leqslant \dim X \quad \text{и} \quad \dim P_\eta \leqslant \dim Y.$$

По формуле (4) из п. 2 § 8 гл. 4

$$\dim (P_\xi \times P_\eta) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Покажем, что произведение

$$h\colon X \times Y \to P_\xi \times P_\eta$$

отображений f и g есть ω-отображение. Достаточно показать, что h есть $\xi \times \eta$-отображение.

Возьмем точку $(p, q) \in P_\xi \times P_\eta$. По построению существуют такие окрестности Op и Oq, что $f^{-1} Op \subseteq U_i$ и $g^{-1} Oq \subseteq V_j$ для некоторых i и j. Но тогда из определения произведения отображений следует, что

$$h^{-1} (Op \times Oq) \subseteq U_i \times V_j.$$

Таким образом, g есть ω-отображение. Так как покрытие ω произвольно, то из брауэровского принципа инвариантности (теорема 5′, § 3, гл. 4) следует, что $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$, ч. и т. д.

2. Доказательство теоремы 16. Это доказательство оказывается возможным провести по схеме Гуревича, если применить понятие «относительной размерности» $\mathrm{rd}_R X$, определенное в гл. 4, § 6, для подпространства X нормального пространства R как максимум размерностей $\dim A$ замкнутых в R множеств $A \subseteq X$. Если этого максимума нет, то $\mathrm{rd}_R X = \infty$.

Замечание 1. Из этого определения сразу следует, что $\mathrm{rd}_R X \leqslant \dim X$ (для нормального X). В самом деле, всякое замкнутое в R множество $A \subseteq X$ будет и подавно замкнутым в нормальном пространстве X, так что $\dim A \leqslant \dim X$, значит, и $\mathrm{rd}_R X = \max\limits_{A \subseteq X} \dim A \leqslant \dim X$.

Замечание 2. Если R — бикомпакт, то понятие замкнутого в R множества $A \subseteq X$ совпадает с понятием бикомпакта $A \subseteq X$ и $\mathrm{rd}_R X$ есть максимум размерностей лежащих в X бикомпактов.

В дальнейшем мы будем рассматривать вполне регулярные (фактически нормальные) пространства X как подпространства бикомпактов R (например, тихоновского кирпича соответствующего веса), поэтому будем писать вместо $\mathrm{rd}_R X$ просто

$$\mathrm{rd}\, X = \max \dim A,$$

где максимум взят по всем бикомпактам $A \subseteq X$.

Предложение 2. *Пусть для вполне регулярного пространства X имеем $\mathrm{rd}\, X \leqslant n$.*

Тогда для топологического произведения X' пространства X на отрезок I выполнено неравенство

$$\mathrm{rd}\, X' \leqslant n + 1.$$

В самом деле, пусть A' — какой-нибудь бикомпакт, лежащий в X', и A — его проекция из $X' = X \times I$ в X. Тогда A есть бикомпакт и бикомпакт A' есть замкнутое подмножество бикомпакта $A \times I$, так что

$$\dim A' \leqslant \dim (A \times I).$$

В силу неравенства (1) имеем

$$\dim (A \times I) \leqslant \dim A + 1.$$

Кроме того, $\dim A \leqslant \mathrm{rd}\, X \leqslant n$, так что $\dim A' \leqslant n + 1$, что и требовалось доказать.

Предложение 3. *Пусть f и g — два непрерывных отображения бикомпакта X в сферу S^{n-1} и пусть открытое множество $\Gamma \subseteq X$ всех тех точек $x \in X$, в которых $fx \neq gx$, имеет $\mathrm{rd}\, \Gamma \leqslant n - 2$. Тогда отображения f и g гомотопны между собою.*

Доказательство. В «цилиндре»

$$\Xi = X \times I, \qquad I = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

рассматриваем множество A, состоящее из обоих оснований $X_0=\{(x, t)\mid x\in X,\ t=0\}$ и $X_1=\{(x, t)\mid x\in X,\ t=1\}$ цилиндра и из всех точек (x, t), где $x\in X\setminus\Gamma$, $0\leqslant t\leqslant 1$ (цилиндр над замкнутым множеством $X\setminus\Gamma$).

Множество A, очевидно, замкнуто в бикомпакте Ξ. Определяем отображение $f_A=f(x, t)$ множества A в сферу S^{n-1} следующим образом:

$$\begin{cases} f(x, t)=f(x)=g(x) & \text{для } x\in X\setminus\Gamma,\\ f(x, 0)=f(x), \\ f(x, 1)=g(x). \end{cases}$$

Множество $\Xi\setminus A$ содержится в цилиндре $\Gamma\times I$ над множеством Γ.

Поэтому в силу предложения 2 имеем

$$\operatorname{rd}_{\Xi}(\Xi\setminus A)=\operatorname{rd}(\Xi\setminus A)\leqslant\operatorname{rd}(\Gamma\times I)\leqslant\operatorname{rd}\Gamma+1\leqslant n-2+1=n-1,$$

и в силу леммы 1 из § 6 гл. 4 отображение $f_A\colon A\to S^{n-1}$ может быть продолжено до отображения f_{Ξ} всего цилиндра Ξ в сферу S^{n-1}. Это отображение f_{Ξ} и осуществляет, очевидно, гомотопию между отображениями f и g.

Предложение 4. *Пусть бикомпакт X' есть сумма двух замкнутых множеств A_1 и A_2. Пусть даны два непрерывных отображения $f_1\colon A_1\to S^{n-1}$ и $f_2\colon A_2\to S^{n-1}$, и пусть точки $x\in A_1\cap A_2$, в которых $f_1(x)\neq f_2(x)$, образуют (открытое в $A_1\cap A_2$) множество H, для которого $\operatorname{rd}H\leqslant n-2$. Тогда отображение f_1 (а также и f_2) может быть продолжено до непрерывного отображения $f\colon X'\to S^{n-1}$.*

Доказательство. Отображения f_1 и f_2, рассматриваемые лишь на $A_1\cap A_2$, гомотопны между собою в силу предложения 3. Так как отображение $f_2\colon (A_1\cap A_2)\to S^{n-1}$ продолжаемо до отображения $f_2\colon A_2\to S^{n-1}$, то, по лемме о грибе, гомотопное ему (на $A_1\cap A_2$) отображение $f_1\colon (A_1\cap A_2)\to S^{n-1}$ продолжаемо до некоторого отображения $f_{1,2}\colon A_2\to S^{n-1}$. Полагая $f(x)=f_1(x)$ для $x\in A_1$, $f(x)=f_{1,2}(x)$ для $x\in A_2$, получаем искомое продолжение отображения $f_1\colon A_1\to S^{n-1}$ до непрерывного отображения $f\colon X'\to S^{n-1}$ (см. гл. 1, § 1, предложение 10), чем предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Пусть в бикомпакте X дано замкнутое множество A и непрерывное отображение $f\colon A\to S$, где S — сфера любой положительной размерности. Пусть, кроме того, в X дана вполне упорядоченная убывающая система замкнутых* *множеств* Φ_λ (*индексы* λ *пробегают множество всех порядковых чисел, меньших, чем некоторое порядковое число* ω) *).

Предположим, что отображение $f\colon A\to S$ *не может быть продолжено ни на одно из множеств* $A\cup\Phi_\lambda$. *Тогда оно не может быть продолжено и на множество* $A\cup\Phi_\infty$, *где* $\Phi_\infty=\bigcap\limits_{\lambda<\omega}\Phi_\lambda$.

Доказательство (от противного). Пусть f продолжаемо на $A\cup\Phi_\infty$. Тогда, по многократно цитированному следствию теоремы Брауэра — Урысона (гл. 1, § 5, предложение 8), отображение f может быть продолжено и на некоторую окрестность $O(A\cup\Phi_\infty)$ множества $A\cup\Phi_\infty$. Но в силу бикомпактности пространства X (по лемме Шуры-Буры из § 3 гл. 2) все множества Φ_λ, начиная с некоторого λ, лежат в любой заданной окрестности множества Φ_∞, значит, и в $O(A\cup\Phi_\infty)$, так что отображение f оказывается продолжаемым на $A\cup\Phi_\lambda$ при всяком достаточно большом λ — вопреки предположению.

Предложение 6. *Пусть в бикомпакте* X *дано замкнутое множество* A *и непрерывное отображение* $f\colon A\to S$ *в какую-нибудь сферу* S. *Если отображение* f *не может быть продолжено на все пространство* X, *то существует такое замкнутое множество* Φ, *что* f *не может быть продолжено на* $A\cup\Phi$, *но может быть продолжено на* $A\cup\Phi'$ *при всяком замкнутом* $\Phi'\subset\Phi$.

Доказательство предложения 6 осуществляется автоматически трансфинитной индукцией. В самом деле, положим $\Phi_0=X$. Тогда по предположению f не может быть продолжено на $A\cup\Phi_0$. Предположим, что для всех порядковых чисел $\lambda'<\lambda$ мы построили такие замкнутые $\Phi_{\lambda'}$, что f не может быть продолжено на $A\cup\Phi_{\lambda'}$ и $\Phi_{\lambda''}\subset\Phi_{\lambda'}$ при $\lambda'<\lambda''<\lambda$. Пусть сначала λ — непредельное порядковое число, тогда $\lambda=\lambda_0+1$. Возможны два случая:

1. Каково бы ни было замкнутое $\Phi'\subset\Phi_{\lambda_0}$, отображение f может быть продолжено на $A\cup\Phi'$; тогда Φ_{λ_0} есть искомое множество Φ, и предложение 6 доказано.

2. Существует такое замкнутое $\Phi'\subset\Phi_{\lambda_0}$, что f не может быть продолжено на $A\cup\Phi'$. Тогда берем какое-нибудь Φ', удовлетворяющее этому условию, и полагаем $\Phi_\lambda=\Phi'$. Индукция идет дальше.

Пусть λ — предельное трансфинитное число. Тогда полагаем $\Phi_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda'<\lambda}\Phi_{\lambda'}$. В силу предложения 5 отображение не может быть продолжено на Φ_λ, и мы идем дальше!

Итак, наш процесс индуктивного построения множеств Φ_λ может остановиться лишь при переходе от некоторого порядкового числа λ_0 к непосредственно следующему за ним $\lambda=\lambda_0+1$

*) То есть $\Phi_{\lambda''}\subseteq\Phi_{\lambda'}$ при $\lambda'<\lambda''<\omega$.

и лишь в том случае, когда Φ_{λ_0} является искомым множеством, существование которого утверждается предложение 6. Но процесс когда-нибудь (а именно при каком-то $\lambda \leqslant \omega_\tau$, где ω_τ — наименьшее порядковое число, мощность которого равна мощности всех точек пространства X) должен остановиться — и предложение 6 доказано.

Переходим собственно к доказательству теоремы 16. Пусть X — бикомпакт размерности $\dim X = n$. По теореме 14 из § 6 гл. 4 существует замкнутое множество $A \subset X$ и такое непрерывное отображение f_A: $A \to S^{n-1}$, которое не может быть продолжено ни до какого непрерывного отображения f_X: $X \to S^{n-1}$. По предложению 6 существует такое замкнутое Φ, что f_A не может быть продолжено на $A \cup \Phi$, но может быть продолжено на всякое $A \cup \Phi'$, где $\Phi' \subset \Phi$ замкнуто. Докажем, что Φ есть n-мерное канторово многообразие.

Докажем прежде всего, что $\dim \Phi = n$. В самом деле, очевидно, $\dim \Phi \leqslant n$. Пусть $\dim \Phi \leqslant n-1$. Так как $(A \cup \Phi) \setminus A \subseteq \Phi$, то

$$\operatorname{rd}(A \cup \Phi) \setminus A \leqslant \operatorname{rd} \Phi = \dim \Phi \leqslant n-1,$$

и, значит, по лемме 1 из § 6 гл. 4 отображение f_A: $A \to S^{n-1}$ может быть продолжено до отображения f: $A \cup \Phi \to S^{n-1}$, вопреки определению множества Φ.

Остается доказать, что, каково бы ни было представление множества Φ в виде суммы двух замкнутых множеств Φ_1 и Φ_2, размерность $\dim(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ пересечения этих множеств превосходит $n-2$.

Предположим противное, пусть $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $\dim(\Phi_1 \cap \Phi_2) \leqslant n-2$ и, следовательно, ни одно из множеств Φ_1, Φ_2 не совпадает со всем Φ. По определению множества Φ отображение f может быть продолжено до отображения f_1: $A \cup \Phi_1 \to S^{n-1}$, а также до отображения f_2: $A \cup \Phi_2 \to S^{n-1}$.

Положим $A_1 = A \cup \Phi_1$, $A_2 = A \cup \Phi_2$, $X' = A_1 \cup A_2 = A \cup \Phi$. Точки $x \in A_1 \cap A_2$, в которых $f_1(x) \neq f_2(x)$, все лежат в $\Phi_1 \cap \Phi_2$, и, следовательно, для множества H этих точек

$$\operatorname{rd} H \leqslant \dim(\Phi_1 \cap \Phi_2) \leqslant n-2.$$

Мы находимся в условиях предложения 4, в силу которого отображение f_1 может быть продолжено до отображения f: $X' \to S^{n-1}$, что противоречит тому, что $X' = A \cup \Phi$ (и определению множества Φ). Теорема 16 доказана.

Замечание 3. Если X — наследственно нормальное (в частности, метризуемое) пространство, то, в силу следствия 1 из § 6 гл. 4, в формулировках предложений 3 и 4 во всех условиях, налагаемых на инвариант rd (а именно

$\mathrm{rd}\,\Gamma \leqslant n-2$ в предложении 3 и $\mathrm{rd}\,H \leqslant n-2$ в предложении 4), можно rd заменить на dim.

Дополним эти предложения (восходящие к Гуревичу) еще одним предложением (также принадлежащим Гуревичу) — оно понадобится нам в гл. 8, § 2.

Предложение 7. *Пусть f и g — два непрерывных отображения компакта X в сферу S^n. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 замкнуты, и $\dim(A_1 \cap A_2) \leqslant n-2$. Если при $i=1, 2$ отображения f и g, рассматриваемые на A_i, гомотопны между собою, то они гомотопны между собою и на $X = A_1 \cup A_2$.*

Доказательство. Рассмотрим цилиндр $X \times I = Z$.

По предположению в цилиндрах $Z_i = A_i \times I$, $i = 1, 2$, определены отображения φ_i: $Z_i \to S^n$ под условиями

$$\varphi_i(x, 0) = f(x), \quad \varphi_i(x, 1) = g(x), \quad x \in A_i, \quad i = 1, 2.$$

Продолжаем отображение φ_1 на множества всех точек вида $(x, 0)$, соответственно $(x, 1)$, где $x \in A_2$, полагая

$$\varphi_1(x, 0) = f(x),$$
$$\varphi_1(x, 1) = g(x).$$

Теперь отображение φ_1 определено на замкнутом множестве Z_1', состоящем из цилиндра $Z_1 = (A_1 \times I)$ и из обоих оснований цилиндра Z, и отображение φ_2 по-прежнему определено на цилиндре $Z_2 = (A_2 \times I)$, причем $Z_1 \cap Z_2$ есть цилиндр $Z_{12} = ((A_1 \cap A_2) \times I)$ и только на нем φ_2 может отличаться от φ_1: $Z_1' \to S^n$. Так как по формуле (1) $\dim Z_{12} \leqslant n-1$, то, в силу предложения 4, в этих условиях отображение φ_1: $Z_1' \to S^n$ может быть продолжено до отображения φ: $Z \to S^n$, и мы будем иметь

$$\varphi(x, 0) = f(x), \qquad \varphi(x, 1) = g(x),$$

чем и доказано, что отображения f: $X \to S^n$ и g: $X \to S^n$ гомотопны между собою.

Следствие из предложения 7. *Пусть f — непрерывное отображение компакта X в S^n, причем $X = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 замкнуты в X, и отображения f: $A_1 \to S^n$ и f: $A_2 \to S^n$ несущественны. Если $\dim A_1 \cap A_2 \leqslant n-2$, то несущественно и отображение f: $X \to S^n$.*

В самом деле, мы получаем это следствие, если в предложении 7 возьмем в качестве g отображение всего компакта X на какую-нибудь точку сферы S^n.

В связи с утверждениями, касающимися продолжения отображений в сферы, докажем следующее утверждение:

Теорема 17 (теорема Гуревича о характеризации внутренних точек множеств, лежащих в R^n). *Пусть X — произвольное* *множество, лежащее в R^n. Для того чтобы точка $x_0 \in X$ была внутренней точкой множества X (относительно пространства R^n), необходимо и достаточно, чтобы для всякой достаточно малой окрестности Ox_0 точки x_0 (относительно X) существовало отображение f_0: $(X \setminus Ox_0) \to S^{n-1}$, не продолжаемое до отображения f всего X в S^{n-1}.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x_0 — внутренняя точка множества X. Возьмем замкнутый шар $\bar{U}^n$ с центром x_0, целиком лежащий в X. Границу шара $\bar{U}^n$ обозначим через S^{n-1}.

Докажем, что, какова бы ни была окрестность Ox_0 точки $x_0 \in X$, лежащая в открытом шаре $U^n = \bar{U}^n \setminus S^{n-1}$, существует отображение f_0: $(X \setminus Ox_0) \to S^{n-1}$, не продолжаемое на все X. В самом деле, в качестве отображения f_0 можно взять проекцию множества $X \setminus Ox_0$ на сферу S^{n-1} из ее центра x_0; если бы эту проекцию можно было продолжить до отображения f: $X \to S^{n-1}$, то отображение f, рассматриваемое на шаре $\bar{U}^n \subseteq X$, было бы отображением этого шара в его границу, продолжающим тождественное отображение границы (предложение 2 § 5 гл. 3).

Достаточность. Чтобы убедиться в достаточности условия Гуревича, надо только показать, что оно не выполнено ни в какой невнутренней точке множества X. Итак, пусть $x_0 \in X$ — граничная точка множества X. Покажем, что существует сколь угодно малая окрестность $Ox_0 \subseteq X$, обладающая тем свойством, что всякое отображение множества $X \setminus Ox_0$ может быть продолжено на все X. Окрестность Ox_0 строим следующим образом. Берем (сколь угодно) малый шар с центром x_0 и границей $S^{n-1} = \bar{U}^n \setminus U^n$. Полагаем $Ox_0 = X \cap U^n$, и пусть f_0 — произвольное отображение множества $X \setminus Ox_0$ в S^{n-1}. Нам нужно продолжить это отображение на все X. Для этого берем точку $o \in U^n \setminus X$ и обозначаем через π: $[Ox_0] \to S^{n-1}$ проекцию множества $[Ox_0]$ из o в S^{n-1} (так что для $x \in X$ точка $\pi(x)$ есть пересечение луча $\overrightarrow{ox}$ со сферой S^{n-1}). Так как $\dim S^{n-1} = n-1$, то, в силу леммы 1 § 6 гл. 4, отображение f_0: $(X \setminus Ox_0) \to S^{n-1}$ может быть продолжено до отображения f_1: $(X \setminus Ox_0) \cup S^{n-1} \to S^{n-1}$. Полагаем теперь

$$f(x) = f_1\pi(x) \quad \text{для} \quad x \in [Ox_0],$$
$$f(x) = f_0(x) \quad \text{для} \quad x \in X \setminus Ox_0.$$

Отображение f: $X \to S^{n-1}$ есть искомое продолжение отображения f_0. Теорема Гуревича доказана.

Замечание 4. Из теоремы 17, очевидно, следует второе доказательство теоремы Брауэра об инвариантности внутренних точек множеств, лежащих в R^n (или в M^n), — первое доказательство было дано в гл. 3, § 4 (теорема 4).

3. Размерностные компоненты. Пусть $\Sigma=\{\Phi_\alpha\}$ — вполне упорядоченное возрастающее семейство n-мерных канторовых многообразий, лежащих в n-мерном бикомпакте X; элементы Φ_α семейства Σ занумерованы порядковыми числами α (так что $\Phi_\alpha\subset\Phi_{\alpha'}$, если $\alpha<\alpha'$), причем предполагается, что среди чисел α нет наибольшего. Тогда

$$\Phi=\left[\bigcup_\alpha \Phi_\alpha\right]$$

также есть n-мерное канторово многообразие.

В самом деле, так как Φ замкнуто в n-мерном бикомпакте X и все Φ_α также n-мерны, то $\dim\Phi=n$.

Остается доказать, что при всяком представлении $\Phi=\Phi'\cup\Phi''$ бикомпакта Φ в виде суммы двух замкнутых множеств Φ' и Φ'', ни одно из которых не содержится в другом, имеем $\dim(\Phi'\cap\Phi'')\geqslant n-1$. Предположим противное и пусть имеем $\Phi=\Phi'\cup\Phi''$ и $\dim(\Phi'\cap\Phi'')\leqslant n-2$. Так как ни одно из двух множеств Φ', Φ'' не содержится в другом, то множества $H'=\Phi'\setminus\Phi''=\Phi\setminus\Phi''$, $H''=\Phi''\setminus\Phi'=\Phi\setminus\Phi'$ непусты и открыты в Φ. Каждое из них пересекается с некоторым элементом $\Phi_{\alpha'}$, соответственно $\Phi_{\alpha''}$, семейства Σ. Пусть α есть наибольшее из чисел α', α''. Тогда

$$\Phi_\alpha=(\Phi_\alpha\cap\Phi')\cup(\Phi_\alpha\cap\Phi''),$$

причем ни одно из слагаемых справа не пусто и не содержится в другом. Но Φ_α — канторово многообразие размерности n; значит,

$$\dim(\Phi_\alpha\cap\Phi')\cap(\Phi_\alpha\cap\Phi'')\geqslant n-1$$

и подавно $\dim(\Phi'\cap\Phi'')\geqslant n-1$.

Из только что доказанного предложения посредством очевидной трансфинитной индукции следует:

Если X есть n-мерный бикомпакт, то всякое лежащее в X канторово многообразие Φ размерности n содержится в максимальном n-мерном канторовом многообразии (т. е. в таком n-мерном канторовом многообразии $C\supseteq\Phi$, что всякое лежащее в X и содержащее бикомпакт Φ канторово многообразие C' размерности n содержится в C).

Определение. Всякое лежащее в n-мерном бикомпакте X максимальное n-мерное канторово многообразие называется *размерностной компонентой* бикомпакта X.

Легко видеть, что объединение двух n-мерных канторовых многообразий, имеющих пересечение размерности $\geqslant n-1$ (и лежащих в некотором бикомпакте X), само является n-мерным канторовым многообразием. Поэтому пересечение двух различных размерностных компонент n-мерного бикомпакта X имеет размерность $\leqslant n-2$.

Обозначим через K_X объединение всех размерностных компонент n-мерного бикомпакта X. Множество K_X совпадает с объединением всех лежащих в X канторовых многообразий размерности n. Очевидно, что множество $X \setminus K_X$ не содержит никакого n-мерного бикомпакта. Что же касается размерностей $\dim K_X$ и $\dim (X \setminus K_X)$, то в общем случае любого (наследственно нормального) бикомпакта X мы о них ничего не знаем.

Множество K_X можно назвать внутренним размерностным ядром бикомпакта X в отличие от определенного еще Урысоном индуктивного ядра, т. е. множества N_X всех тех точек $x \in X$, в которых $\operatorname{ind}_x X \geqslant n$ (мы все время предполагаем, что $\dim X = n$).

Очевидно, $K_X \subseteq N_X$; большего не скажешь, даже когда X есть n-мерный компакт и, следовательно, $\dim X = \operatorname{ind} X$.

Понятие размерностной компоненты лишь тогда можно считать вполне удовлетворительным, когда никакая размерностная компонента (произвольного данного n-мерного бикомпакта X) не содержится в сумме остальных размерностных компонент этого бикомпакта. Это верно для совершенно нормальных бикомпактов X и, как недавно показал В. В. Федорчук, может быть неверным уже для бикомпактов с первой аксиомой счетности.

Итак, докажем следующее предложение:

Теорема 18 (Александров). *Пусть X — совершенно нормальный n-мерный бикомпакт. Пусть A — какая-нибудь размерностная компонента бикомпакта X. Обозначим через B объединение всех размерностных компонент бикомпакта X, отличных от A. Тогда $A \cap B \neq A$ и*

$$\dim (A \cap B) \leqslant n-2.$$

Доказательство. Положим $\Phi_0 = X$ и предположим, что лежащие в X бикомпакты $\Phi_\beta \supseteq A$ построены для всех порядковых чисел β, меньших, чем данное порядковое число α, под условием $\Phi_{\beta+1} \subset \Phi_\beta$ и $\dim(\Phi_{\beta+1} \cap [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]) \leqslant n-2$. Построим Φ_α.

Если α — число второго рода (т. е. предельное трансфинитное число), то полагаем $\Phi_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \Phi_\beta$. Если же α — первого рода, $\alpha = \beta + 1$, то возможны два случая:

Во-первых $\Phi_\beta = A$; тогда полагаем и $\Phi_\alpha = A$.

Во-вторых, $\Phi_\beta \neq A$, $\Phi_\beta \supset A$. В этом случае, по определению множества A как размерностной компоненты, n-мерный бикомпакт Φ_β не может быть канторовым многообразием и, следовательно, представим в виде

$$\Phi_\beta = \Phi'_\beta \cup \Phi''_\beta, \quad \Phi'_\beta \setminus \Phi''_\beta \neq \Lambda, \quad \Phi''_\beta \setminus \Phi'_\beta \neq \Lambda,$$
$$\dim(\Phi'_\beta \cap \Phi''_\beta) \leqslant n-2.$$

Тогда A содержится в одном и только в одном из бикомпактов Φ'_β, Φ''_β, пусть в Φ'_β, и мы полагаем

$$\Phi_\alpha \equiv \Phi_{\beta+1} = \Phi'_\beta.$$

Процесс построения бикомпактов Φ_α обрывается на некотором (не более чем счетном) порядковом числе λ (см. замечание 3 § 7 гл. 1), для которого

$$\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda+1} = A.$$

Поэтому все пространство $X = \Phi_0$ разлагается в не более чем счетную сумму дизъюнктных слагаемых:

$$X = \bigcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} (\Phi_\alpha \setminus \Phi_{\alpha+1}),$$

причем для любого $\alpha < \lambda$ имеем $\Phi_{\alpha+1} \neq \Phi_\alpha$.

Пусть теперь x — произвольная точка множества B. Тогда существует содержащая эту точку размерностная компонента A', отличная от A. Так как A' не содержится в $A = \Phi_\lambda$, то существует и первое порядковое число $\alpha \leqslant \lambda$ такое, что A' не содержится в Φ_α. При этом α — непременно число первого рода, так что

$$\alpha = \beta + 1,$$

а $A' \subseteq \Phi_\beta$. Так как по построению $\Phi_{\beta+1} \equiv \Phi_\alpha = \Phi'_\beta$, то $\Phi''_\beta \supseteq [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]$,

$$\dim(\Phi_{\beta+1} \cap \Phi''_\beta) \leqslant n-2$$

и, значит,

$$\dim(\Phi_{\beta+1} \cap [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]) \leqslant n-2.$$

Поэтому A', содержась в Φ_β, содержится в одном из слагаемых $\Phi_{\beta+1}$, $[\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]$, а потому, в силу определения числа $\alpha = \beta+1$, имеем

$$A' \subseteq [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}].$$

Все это верно для любой точки $x \in B$. Поэтому

$$B \subseteq \bigcup_{\beta<\lambda} [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]$$

и

$$A \cap B \subseteq A \cap \bigcup_{\beta<\lambda} [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}] \subseteq A \subseteq \Phi_{\beta+1}$$

для всех $\beta < \lambda$, следовательно,

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{\beta<\lambda} (\Phi_{\beta+1} \cap [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}]).$$

По теореме суммы для множества

$$C = \bigcup_{\beta<\lambda} (\Phi_{\beta+1} \cap [\Phi_\beta \setminus \Phi_{\beta+1}])$$

имеем $\dim C \leqslant n-2$.

В силу монотонности размерности в совершенно нормальных пространствах (гл. 4, § 8, теорема 18) имеем

$$\dim A \cap B \leqslant \dim C \leqslant n-2.$$

Так как $\dim A = n$, то $A \cap B \neq A$. Теорема доказана.

Замечание 5. Приведенное доказательство теоремы 18 в основном принадлежит С. Мазуркевичу (который и доказал теорему 18 для компактов); кроме того, Мазуркевич доказал, что множество размерностных компонент конечномерного компакта или конечно, или счетно, или имеет мощность $\mathfrak{c}$.

§ 10. Аксиоматика размерности компактов

Мы будем рассматривать различные функции dX, определенные на том или ином классе $\mathfrak{X} = \{X\}$ топологических пространств и удовлетворяющие условию топологичности, заключающемуся в том, что для любых двух гомеоморфных между собою пространств

$$X_1 \in \mathfrak{X}, \qquad X_2 \in \mathfrak{X}$$

всегда $dX_1 = dX_2$.

Относительно класса $\mathfrak{X}$ мы будем всегда предполагать, что для любого замкнутого подпространства X_1 пространства $X \in \mathfrak{X}$ имеем $X_1 \in \mathfrak{X}$.

Фактически мы будем рассматривать лишь следующие классы пространств:

1) Класс $\mathfrak{B}$ всевозможных конечномерных бикомпактов (напоминаем, что пространство X называется конечномерным, если $\dim X < \infty$).

2) Класс $\mathfrak{K}$ конечномерных компактов.

3) Класс $\mathfrak{M}$ всевозможных конечномерных метризуемых пространств.

4) Класс $\mathfrak{D}$ конечномерных метризуемых пространств со счетной базой.

На этих классах $\mathfrak{X}=\{X\}=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ мы будем задавать функции $\mathrm{d}X$, удовлетворяющие всем или некоторым из следующих условий («аксиом»):

1°. Аксиома целочисленности и нормировки. Значение функции $\mathrm{d}X$ на любом $X\in\mathfrak{X}$ есть целое число $\geqslant -1$, причем $\mathrm{d}Q^n=n$, если Q^n есть n-мерный замкнутый шар (и Q^0 есть одноточечное, а Q^{-1} — пустое пространство).

2°_f. Аксиома конечной суммы. Если X_1 и X_2 — два замкнутых подпространства пространства $X\in\mathfrak{X}$ и $X=X_1\cup X_2$, то $\mathrm{d}X= =\max(\mathrm{d}X_1, \mathrm{d}X_2)$.

2°. Аксиома счетной суммы. Если X_k, $k=1, 2, \ldots$, суть замкнутые подпространства пространства $X\in\mathfrak{X}$ и $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, то $\mathrm{d}X=\sup \mathrm{d}X_k$.

3°. Аксиома Брауэра. Если $\mathrm{d}X=n$, то существует такое конечное открытое покрытие ω пространства X, что для всякого пространства X_ω, являющегося образом пространства X при каком-либо ω-отображении $f\colon X\to X_\omega$ пространства X, всегда $\mathrm{d}X_\omega\geqslant \mathrm{d}X$.

Замечание 1. Из условия 2°_f вытекает, что для любого замкнутого $X_1\subset X$ имеем $\mathrm{d}X_1\leqslant \mathrm{d}X$.

В самом деле, $X=X_1\cup[X\setminus X_1]$, $\mathrm{d}X=\max(\mathrm{d}X_1, \mathrm{d}[X\setminus X_1])$ и $\mathrm{d}X_1\leqslant \mathrm{d}X$. Из условий 1°, 2°_f следует, что для всякого n-мерного (конечного) полиэдра P^n имеем $\mathrm{d}P^n=n$. Очевидно, функция $\dim X$ на любом из классов $\mathfrak{X}=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ удовлетворяет всем перечисленным аксиомам.

Легко доказывается следующее предложение:

Предложение 1. *Функция* $\dim X$ *есть наибольшая среди всех функций, удовлетворяющих* (*на соответствующем классе* $\mathfrak{X}$) *аксиомам* 1°, 2°_f, 3°.

В самом деле, пусть дана на классе $\mathfrak{X}=\{X\}$ размерностная функция $\mathrm{d}X$.

Требуется доказать, что $\mathrm{d}X\leqslant \dim X$ для любого $X\in\mathfrak{X}$.

Пусть $\dim X=n<\infty$. Берем покрытие ω согласно условию 3° и n-мерный полиэдр P, на который пространство X может быть ω-отображено. Тогда $\mathrm{d}X\leqslant \mathrm{d}P=\dim P=\dim X$, что и требовалось доказать.

Теорема 19 (Александров [24]). *Пусть функция* $\mathrm{d}X$, *определенная на классе конечномерных компактов, удовлетворяет условиям* 1°, 2°_f, 3° *и, кроме того, еще условию* 4°:

4°. Аксиома Пуанкаре. Во всяком неодноточечном X существует замкнутое X', для которого $\mathrm{d}X' < \mathrm{d}X$ и которое разбивает пространство X (т. е. $X \setminus X'$ несвязно).

В этих предположениях $\mathrm{d}X = \dim X$ *(и, следовательно, выполнена и аксиома* 2°).

Доказательство. Пусть $\mathrm{d}X$ удовлетворяет условиям 1°, 2°_f, 3°, 4° и определена для любого конечномерного компакта X. Докажем, что тогда $\dim X \leqslant \mathrm{d}X$.

Если $\mathrm{d}X = -1$, то и $\dim X = -1$; предположим, что равенство $\mathrm{d}X = \dim X$ доказано для всех компактов X, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{d}X \leqslant k-1$. Докажем его для компактов X, для которых $\mathrm{d}X = k$. Пусть X — такой компакт, и пусть $\dim X = r > k$. Компакт X содержит r-мерное канторово многообразие X', и $\mathrm{d}X' \leqslant \mathrm{d}X = k$. В силу условия 4° существует замкнутое $X'' \subset X'$, которое разбивает пространство X' и для которого $\mathrm{d}X'' < \mathrm{d}X' \leqslant k$ и, значит, $\mathrm{d}X'' \leqslant k-1 < r-1$. В силу индукционного предположения $\dim X'' = \mathrm{d}X'' < r-1$. Но X' — канторово многообразие размерности r, а множество $X'' \subset X'$ его разбивает — получили противоречие.

Теорема доказана. Те же рассуждения доказывают и

Предложение Λ. *Если* $\mathrm{d}X$ *есть функция, удовлетворяющая условиям* 1°, 2°_f, 3°, 4° *и определенная на классе* $\mathfrak{B}$ *конечномерных бикомпактов* X, *то необходимо* $\mathrm{d}X = \dim X$. *Но на классе* $\mathfrak{B}$ *функция* $\dim X$ *не удовлетворяет условию* 4°.

В самом деле, мы видели, что бикомпакт Θ Федорчука этому условию не удовлетворяет.

Следовательно, имеет место

Теорема 20. (Александров [24]). *Не существует никакой определенной на классе конечномерных бикомпактов функции, удовлетворяющей условиям* 1°, 2°_f, 3°, 4°.

Итак, аксиомы Брауэра и Пуанкаре, кажущиеся одинаково естественными при аксиоматическом введении понятия размерности (и действительно определяющие размерность компактов), в классе бикомпактов оказываются уже несовместимыми.

Вместе с тем, в связи с только что сказанным, возникают задачи аксиоматического описания размерности $\dim X$, во-первых, на классе $\mathfrak{B}$ конечномерных бикомпактов, во-вторых, на классе $\mathfrak{M}$ всех конечномерных метризуемых или хотя бы на классе $\mathfrak{D}$ метризуемых пространств со счетной базой.

Решение первой из этих двух задач дал Локуциевский; решение второй задачи (для всего класса $\mathfrak{M}$) только что дано Е. Щепиным [1], доказавшим следующую теорему:

Общая теорема Щепина. *Функция* $\dim X$ *есть единственная определенная на классе* $\mathfrak{M}$ *всех метризуемых пространств функция, удовлетворяющая условиям* 1°, 2°, 3°, 4°.

Мы даем в Прибавлении, непосредственно следующем за этим параграфом, доказательство «специальной» теоремы Щепина, отличающейся от общей тем, что в ее формулировке класс $\mathfrak{M}$ заменен подклассом $\mathfrak{D}$ метризуемых пространств со счетной базой.

Доказательство специальной теоремы Щепина значительно проще, чем доказательство общей теоремы *), которое читатель может найти в работах Щепина, однако идея доказательства остается прежней.

ПРИБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ПЯТОЙ

Мы воспроизводим в § 1 этого прибавления доказательство следующей теоремы:

Специальная теорема Щепина. *Пусть* d — *функция, ставящая в соответствие каждому конечномерному метризуемому пространству X со счетной базой (т. е. каждому множеству X, лежащему в каком-либо эвклидовом пространстве R^m) целое число* $\mathrm{d}X$, *удовлетворяющее условиям* 1°, 2°, 3°, 4°. *Тогда для каждого такого X имеем* $\mathrm{d}X = \dim X$.

Кроме этого основного результата в § 2 данного прибавления доказывается несводимость аксиомы 2° к аксиоме 2°_f, а в § 3 излагаются примеры (также построенные Щепиным), устанавливающие независимость перечисленных выше аксиом размерности.

§ 1. Доказательство специальной теоремы Щепина

Приводимое доказательство (воспроизводящее рассуждения Щепина) существенно опирается на следующее предложение:

Вспомогательная теорема. *Для всякого пространства X существует пространство X^σ, удовлетворяющее следующим условиям:*

а) *Пространство X^σ есть объединение дизъюнктных замкнутых подпространств, каждое из которых гомеоморфно пространству X.*

б) *При* $\dim X = n$ *пространство X^σ нельзя разбить никаким замкнутым множеством, размерность которого* $< n - 1$.

Лемма **). *Пусть* $X \in \mathfrak{D}$, $\dim X = n$, *а Y — любое подпространство гильбертова кирпича* $H = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k = [0, 1]_k$. *Пусть* x_0,

*) При этом стоит заметить, что специальная теорема не является следствием общей.

**) В этой лемме мы допускаем к рассмотрению любые метризуемые пространства со счетной базой, т. е. любые множества Y, лежащие в гильбертовом кирпиче.

y_0 — *пара различных точек из* Y. *Тогда существует подмножество* $Z = Z(X, Y, H, (x_0, y_0)) \subset H \times I$ (*где* I — *единичный отрезок*), *обладающее следующими свойствами*:

1) $Z \cap H \times \{0\} = Y \times \{0\}$.

2) $Z \setminus (Y \times \{0\})$ *представимо в виде объединения счетного числа дизъюнктных замкнутых в* Z *множеств, каждое из которых гомеоморфно* X.

3) *Точки* $(x_0, 0)$, $(y_0, 0)$ *не отделимы в* Z *никакой перегородкой размерности* $< n - 1$.

Доказательство леммы. Зафиксируем два дизъюнктных множества $A \subset X$ и $B \subset X$, которые не отделимы перегородкой размерности $< n - 1$. Покажем, что для всякого натурального n найдется вложение i_n: $X \to H = \prod\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, для которого $i_n A$ содержится в окрестности радиуса $1/n$ точкн x_0, а $i_n B$ — в окрестности радиуса $1/n$ точки y_0 Действительно, пусть i: $X \to H$—какое-нибудь вложенне. Пусть f: $X \to I$—функция Урысона для пары множеств A, B, т. е. $fA = 0$, а $fB = 1$; тогда отображение $f * i$: $X \to H \times I$, определенное равенством $f * i(x) = (i(x), f(x))$, переводит множества A н B в противоположные грани куба $H \times I$. Поэтому достаточно доказать, что для всякого натурального n существует вложенне куба $H \times I$, переводящее его противоположные грани — $H \times \{0\}$ н $H \times \{1\}$ — в окрестности радиусов $1/n$ некоторых точек x_0 и y_0 соответственно.

А этот факт геометрически очевиден. Пояснить его можно так: это очевидно для пары точек x_0, y_0, у которых отличается только одна координата; например, для точек $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots\right) = x_1$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots\right) = y_1$. Любые две другне точки x, y, которые не имеют координатами ни нулей, ни единиц, топологически не отличаются от точек x_1, y_1, т. е. существует гомеоморфизм гильбертова кирпича на себя, переводящий x в x_1 и y в y_1. И наконец, случай произвольной пары точек x, y редуцируется к предыдущему случаю, ибо точки, не имеющне координатами ни нулей, ни единиц, плотны в гильбертовом кирпиче.

Зафиксируем теперь вложения i_n: $X \to H$, существование которых мы только что доказали.

Рассмотрим $H \times I$. Пусть φ_n: $H \to H \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — естественный гомеоморфизм: $\varphi_n(x) = \left(x, \frac{1}{n}\right)$ для любого $x \in H$; тогда искомое $Z = (Y \times \{0\}) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n i_n(X)$. Свойства 1) и 2) выполнены очевидимым образом. Докажем, что выполнено свойство 3). Предположим противное, т. е. что существует такое замкнутое множество $C \subset Z$, что $Z \setminus C = U_1 \cup U_2$, где U_1 и U_2 открыты в Z, $U_1 \cap U_2 = \Lambda$ и $x_0 \in U_1$, а $y_0 \in U_2$, причем $\dim C < n-1$. Но для достаточно большого n, очевидно, $\varphi_n i_n A \subset U_1$, а $\varphi_n i_n B \subset U_2$. И, как легко видеть, $\varphi_n i_n X$ открыто-замкнуто в Z; поэтому $C \cap \varphi_n i_n X$ является перегородкой между $\varphi_n i_n A$ и $\varphi_n i_n B$ и $\dim (C \cap \varphi_n i_n X) < n-1$. А так как $\varphi_n i_n$ — гомеоморфизм, то мы приходим к противоречию с предположением о выборе A и B.

Лемма доказана.

Следствие леммы. *Для всякой тройки X, Y, H, где X — пространство размерности $\dim X = n$, Y — подпространство H, H гомеоморфно произведению счетного числа отрезков, существует такое подмножество $Z = Z(X, Y, H) \subset H \times H$, которое обладает следующими свойствами:*

1) $Z \cap (H \times \{0\}) = Y \times \{0\}$ *($0 \in H$ — точка, все координаты которой — нули при некотором фиксированном гомеоморфизме φ: $H \to I^{\aleph_0}$).*

2) $Z \setminus (Y \times \{0\})$ *представимо в виде объединения счетного числа замкнутых в Z дизъюнктных множеств, каждое из которых гомеоморфно X.*

3) *Для всякой перегородки C в Z размерности $< n-1$ ($Z = C \cup U_1 \cup U_2$, C замкнуто, U_1 и U_2 открыты и все они дизъюнктны) одно из множеств $U_1 \cap (Y \times \{0\})$, $U_2 \cap (Y \times \{0\})$ пусто. То есть никакая перегородка в Z размерности $< n-1$ не разбивает $Y \times \{0\}$.*

Доказательство следствия. Выберем счетное множество пар точек $Y - \{(x_i, y_i)\}$, которое плотно в $Y \times Y \setminus \Delta$ (Δ — диагональ произведения $Y \times Y$), и применим счетное число раз построение леммы.

Первый шаг. Применим лемму к четверке X, Y, H, (x_1, y_1), получим $Z_1 = Z(X, Y, H, (x_1, y_1)) \subset H \times I$.

Будем считать, что $H \times I^n \subset H \times I^{\aleph_0}$ для $n \geqslant 0$, т. е. точка $x \in H \times I^n$ вида $(x', t_1, \ldots, t_n)$ будет отождествляться с точкой $(x', t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in H \times I^{\aleph_0}$.

n-й шаг. Применим лемму к четверке X, Z_{n-1}, $H \times I^{n-1}$, (x_n, y_n), получим

$$Z_n = Z(X, Z_{n-1}, H \times I^{n-1}, (x_n, y_n)) \subset H \times I^n.$$

Искомое $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \subset H \times I^{\aleph_0} \approx H \times H$.

Свойства 1) и 2) выполнены очевидным образом. Покажем, что выполнено свойство 3). Действительно, предположим противное: $Z = C \cup U_1 \cup U_2$, $\dim C < n-1$, C, U_1 и U_2 дизъюнктны,

U_1 и U_2 открыты, и $U_1 \cap (Y \times \{0\})$ и $U_2 \cap (Y \times \{0\})$ непусты. Тогда в силу плотности множества пар (x_i, y_i) в $Y \times Y \setminus \Delta$ для некоторого i будет $x_i \in U_1 \cap (Y \times \{0\})$, $y_i \in U_2 \cap (Y \times \{0\})$ (или наоборот), и, следовательно, $C \cap Z_i$ будет разделять x_i и y_i в Z_i и $\dim (C \cap Z_i) < n-1$, что противоречит построению Z_i.

Следствие установлено.

Доказательство вспомогательной теоремы проводится теперь выполнением счетного числа построений, проведенных при доказательстве следствия. Будем считать, что $H \subset H \times H \subset \ldots \ldots \subset H^n \subset \ldots \subset H^{\aleph_0}$, точка $(x_1, \ldots, x_n) \in H^n$ отождествляется с точкой $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in H^{\aleph_0} (0 \in H)$.

Первый шаг. Пусть Y — подмножество $H = I^{\aleph_0}$, гомеоморфное X. Применим следствие к тройке X, Y, H, получим $Z_1 = Z(X, Y, H) \subset H \times H$.

n-й шаг. Применим следствие к тройке X, Z_{n-1}, H^n, получим $Z_n = Z(X, Z_{n-1}, H^n) \subset H^{n+1}$. Искомое $X^\sigma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \subset H^{\aleph_0} \approx H$.

Доказательство специальной теоремы. В силу аксиом нормировки и суммы для n-мерного полиэдра P^n будет $\mathrm{d}P^n = n$. Но если $\dim X = n$, то для всякого конечного открытого покрытия ω пространства X, как известно, имеется ω-отображение $f\colon X \to P^n$ в полиэдр P^n размерности n. Поэтому в силу аксиомы Брауэра $\mathrm{d}X \leqslant \dim X$. Докажем теперь равенство $\mathrm{d}X = \dim X$. Доказательство проводим индукцией по $\mathrm{d}X$. Если $\mathrm{d}X = -1$, то из аксиом нормировки и Пуанкаре вытекает, что $X = \Lambda$, и, следовательно, $\dim X = \mathrm{d}X$. Пусть если $\mathrm{d}X \leqslant n$, где $n \geqslant -1$, то $\mathrm{d}X = \dim X$. Докажем это равенство для случая $\mathrm{d}X = n+1$. Предположим противное, т. е. что для некоторого пространства X будет $\mathrm{d}X = n+1$ и $\mathrm{d}X < \dim X$. Рассмотрим пространство X^σ, определенное во вспомогательной теореме; в силу аксиомы счетной суммы $\mathrm{d}X^\sigma = \mathrm{d}X$. Поэтому $\mathrm{d}X^\sigma = n+1$ и $\mathrm{d}X^\sigma < \dim X^\sigma$. В силу аксиомы Пуанкаре существует такое замкнутое множество $A \subset X^\sigma$, что $\mathrm{d}A < \mathrm{d}X^\sigma$ и $X \setminus A$ несвязно. Но по предположению индукции $\mathrm{d}A = \dim A \leqslant n$. С другой стороны, $\dim X^\sigma > \mathrm{d}X^\sigma = n+1$. Но это противоречит тому, что пространство X^σ нельзя разбить множеством размерности меньшей, чем $\dim X - 1 \geqslant n+1$.

Специальная теорема Щепина доказана.

§ 2. Несводимость аксиомы счетной суммы к аксиоме конечной суммы

Для последующего нам понадобится следующее

Определение. Топологическое пространство X назовем *π-пространством*, если всякое подпространство пространства X

обладает π-базой *) из открыто-замкнутых множеств. Тогда, каково бы ни было множество $X_0 \subseteq X$ и открытое в X_0 множество G_0, имеется открыто-замкнутое в X_0 множество U_0, лежащее в G_0.

Определим следующую размерностную функцию:

$$\mathrm{d}X = \begin{cases} \dim X, & \text{если} \quad \dim X \neq 1, \\ 0, & \text{если} \quad \dim X = 1 \text{ и } X - \pi\text{-пространство}, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждение. *Функция* d *удовлетворяет условиям* 1°, $\overset{\circ}{2}_f$, 3°, 4°, *но не удовлетворяет аксиоме счетной суммы.*

Доказательство этого утверждения естественно распадается на несколько этапов.

Лемма 1. *Если пространство X представимо в виде объединения двух замкнутых множеств $X = A \cup B$, которые являются π-пространствами, то X — тоже π-пространство.*

Доказательство. Любое подпространство $Y \subset X$ также представимо в виде объединения двух замкнутых множеств $Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$, которые являются π-пространствами. Поэтому достаточно доказать, что X имеет π-базу из открыто-замкнутых множеств. Пусть U — непустое открытое в X множество; тогда либо $U \subseteq A$, либо $U \setminus A$ непусто и содержится в B. Если $U \subseteq A$, то существует открыто-замкнутое в A непустое $F \subseteq U$; тогда, как легко видеть, F будет также открыто-замкнуто в X. Если $U \setminus A$ непусто, то существует непустое открыто-замкнутое в B множество $F \subseteq U \setminus A \subset U$, которое также будет открыто-замкнуто в X.

Лемма доказана.

Следствие. *Функция* d *удовлетворяет аксиоме конечной суммы* $\overset{\circ}{2}_f$.

Доказательство. Пусть $X = A \cup B$, где A и B замкнуты в X; очевидно, что $\mathrm{d}X \leqslant \dim X$ для любого X. Пусть $\dim X > 1$ и $\dim A \geqslant \dim B$; тогда

$$\mathrm{d}X = \dim X = \max(\dim A, \dim B) = \dim A = \mathrm{d}A.$$

Монотонность d очевидна; поэтому в этом случае $\mathrm{d}X = \max(\mathrm{d}A, \mathrm{d}B)$. Пусть теперь $\dim X < 1$; тогда $\dim X = \mathrm{d}X$, и $\dim A = \mathrm{d}A$, и $\dim B = \mathrm{d}B$, поэтому

$$\mathrm{d}X = \max(\mathrm{d}A, \mathrm{d}B).$$

*) Система $K = \{U\}$ открытых множеств пространства X называется его π-базой (Пономарев), если во всяком непустом открытом в X множестве содержится некоторое непустое $U \in K$.

Заметнм, что еслн некоторое пространство X не является π-пространством, то $\mathrm{d}X>0$, ибо всякое нульмерное пространство является π-пространством. Если $\dim X=\mathrm{d}X=1$, то в силу леммы 1 либо A, либо B не π-пространство, и поэтому либо $\mathrm{d}A$, либо $\mathrm{d}B$ равно 1. Тогда $\mathrm{d}X=\max(\mathrm{d}A, \mathrm{d}B)$. И наконец, пусть $\dim X=1$ и $\mathrm{d}X=0$, т. е. X есть π-пространство. Тогда A и B суть π-пространства размерности, не большей 1; поэтому $\mathrm{d}A=\mathrm{d}B=0$, если A и B непусты. Итак, формула $\mathrm{d}X=\max(\mathrm{d}A, \mathrm{d}B)$ верна всегда.

Лемма 2. *Функция* d *удовлетворяет аксиоме Брауэра.*

Доказательство. Так как функция dim удовлетворяет аксиоме Брауэра, достаточно доказать следующее: если пространство X для любого конечного открытого покрытия ω допускает ω-отображение в π-пространство, то X само является π-пространством. Пусть $Y\subset X$ и U — открытое в Y множество. Тогда для некоторого открытого в X множества U' будет $U'\cap Y=U$. Пусть $x\in U$.

Рассмотрим следующее покрытие пространства X: $\omega=\{U', X\setminus x\}$. По предположению существует ω-отображение $f\colon X\to Z$, где Z есть π-пространство. В силу определения ω-отображения существует окрестность $Of(x)$ точки $f(x)$, прообраз которой содержится в одном из элементов покрытия ω, а следовательно, в U', ибо в $X\setminus x$ он не содержится. Далее, существует открыто-замкнутое в fY множество F, содержащееся в $fY\cap Of(x)$. Тогда $f^{-1}F$ — искомое непустое открыто-замкнутое в Y множество, содержащееся в U. Лемма доказана.

Очевидно, что d удовлетворяет аксиоме 1°. Осталось проверить выполнение аксиомы Пуанкаре. Если $\mathrm{d}X=\dim X$, то существует замкнутое множество A, разбивающее X размерности $\dim A<\dim X$; но $\mathrm{d}A\leqslant\dim A<\dim X=\mathrm{d}X$. Следовательно, $\mathrm{d}A<\mathrm{d}X$. Если $\dim X\neq\mathrm{d}X$, то $\dim X=1$ и пространство X есть π-пространство н $\mathrm{d}X=0$. Но π-пространство несвязно, если оно состоит более чем из одной точки; поэтому пустое множество Λ разбивает X, а $\mathrm{d}\Lambda=-1<\mathrm{d}X=0$.

Итак, d удовлетворяет всем аксиомам $\mathring{1}$, $\mathring{2}_f$, $\mathring{3}$, $\mathring{4}$. Покажем, что d не удовлетворяет аксиоме 2°. Известно, что существуют одномерные пространства X, для которых равенство $\mathrm{ind}_x X=1$ выполнено лишь в счетном числе точек $x\in X$ (таково, например, пространство, известное под названием «графика Куратовского»).

Возьмем одно такое пространство X. Очевидно, что X является π-пространством, и, следовательно, $\mathrm{d}X=0$. В то же время $\dim X=1$.

Мы доказали, что аксиомы $\mathring{1}$, $\mathring{2}_f$, $\mathring{3}$, $\mathring{4}$ не определяют размерности в классе метризуемых пространств со счетной базой.

§ 3. Независимость введенной системы аксиом

1. Независимость аксиомы Брауэра от остальных аксиом размерности в классе $\mathfrak{K}$ конечномерных компактов. Пусть X — конечномерный компакт. Положим $\operatorname{imb} X = \inf\{m \mid X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, где A_i — компакты, вкладывающиеся в $R^m\}$; при этом обозначаем через R^0 одноточечное, а через R^{-1} — пустое пространство.

Таким образом, мы определили некоторый целочисленный инвариант для всякого конечномерного компакта. Покажем, что этот инвариант удовлетворяет аксиомам 1°, 2°, 4°, но не удовлетворяет аксиоме Брауэра 3°.

Аксиома нормировки, очевидно, выполнена. Далее, как легко видеть, imb удовлетворяет и аксиоме конечной суммы. Осталось проверить выполнение аксиомы Пуанкаре.

Пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i замкнуты в X и вкладываются в $R^{\operatorname{imb} X}$. Найдется такое $x \in X$, что $x \in \langle A_i \rangle$ для некоторого i. Будем считать, что A_i является подпространством $R^{\operatorname{imb} X}$; тогда некоторая ε-окрестность точки x не пересекается с $\operatorname{гр}_X A_i$ и ее граница S разбивает A_i (если A_i состоит более чем из одной точки). Отсюда легко вывести, что S разбивает и X. Но S вкладывается в сферу $S^{\operatorname{imb} X - 1}$, поэтому $\operatorname{imb} S \leqslant \operatorname{imb} X - 1$. Если A_i состоит из одной точки x, то эта точка изолирована, ибо по условию $x \in \langle A_i \rangle$, и поэтому X разбивается пустым множеством. Итак, аксиомы 1°, 2°, 4° (но не аксиома Брауэра) выполнены; в то же время равенство $\operatorname{imb} X = \dim X$ выполнено не всегда. Независимость аксиомы Брауэра доказана.

2. Нецелочисленная функция i, определенная на классе $\mathfrak{K}$ и удовлетворяющая всем аксиомам 2°, 3°, 4° и условию $\mathrm{i}Q^n = n$. Пусть X — конечномерный компакт. Положим

$$\mathrm{i}X = \begin{cases} \dim X, & \text{если } \dim X \neq 10, \\ 10, & \text{если } \dim X = 10 \text{ и } X \text{ содержит дугу}, \\ 9{,}5 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, условие $\mathrm{i}Q^n = n$ выполнено. Проверим выполнение аксиомы конечной суммы. Нам достаточно показать, что если $\mathrm{i}X = 10$, то $X \neq A_1 \cup A_2$, где $\mathrm{i}A_k = 9{,}5$ (при $k = 1, 2$), и что если $\mathrm{i}X = 9{,}5$, то не существует $A \subset X$ с $\mathrm{i}A = 10$.

Второе утверждение очевидно; первое также верно, ибо если X содержит дугу, то по крайней мере одно из множеств A_1, A_2 содержит отрезок этой дуги.

Для проверки аксиомы Пуанкаре достаточно заметить, что если $\mathrm{i}X = 10$ или $\mathrm{i}X = 9{,}5$, то X можно разбить девятимерным компактом.

Наконец, проверим выполнение аксиомы Брауэра. Достаточно убедиться, что если $\mathrm{i}X = 10$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ не существует ε-отображения X на компакт Y, для которого $\mathrm{i}Y = 9{,}5$. Но для этого достаточно взять ε меньшее, чем диаметр некоторой дуги, содержащейся в X.

Таким образом, функция i удовлетворяет всем требованиям 1°, 2°_{f}, 3°, 4°, кроме требования целочисленности.

3. Независимость остальных аксиом.

а) Аксиома нормировки. Вот тривиальный пример целочисленной функции, удовлетворяющей всем аксиомам, кроме аксиомы нормировки: $\mathrm{d}X = \dim X + 1$.

б) Независимость аксиомы Пуанкаре *). Простой пример инварианта, удовлетворяющего всем нашим аксиомам, кроме аксиомы Пуанкаре, можно получить из предыдущего примера, если положить $\mathrm{i}'X = [\mathrm{i}X]$ ($[x]$ — целая часть x).

в) Аксиома суммы. Положим

$$\mathrm{d}X = \begin{cases} \dim X, & \text{если } X \text{ связно, а также если } \dim X < 1, \\ 1, & \text{если } \dim X \geqslant 1 \text{ в то же время } X \text{ несвязно.} \end{cases}$$

Проверим аксиому Брауэра. Функция $\mathrm{d}X$ удовлетворяет аксиоме Брауэра, что вытекает из следующих соображений: во-первых, непрерывный образ связного пространства связен; во-вторых, если $X = A \cup B$, где A и B — дизъюнктные замкнутые множества, $\varepsilon < \rho(A, B)$, то при всяком ε-отображении множества fA и fB дизъюнктны.

---

*) Она общеизвестна, так как так называемая гомологическая размерность (mod 2) конечномерных компактов, удовлетворяя условиям 1°—3°, не удовлетворяет (не совпадая с $\dim X = \operatorname{ind} X$) аксиоме Пуанкаре.

Глава шестая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. III

Введение

Эта глава концентрируется вокруг небольшого числа основных теорем, имеющих довольно многочисленные и важные следствия; она объединена одной общей точкой зрения: последовательным применением нульмерных и близких к ним отображений, позволяющим свести исследование данного пространства к изучению другого, более простого, получающегося из данного с помощью того или иного варианта нульмерных отображений. Мы уже говорили во введении к четвертой главе, что эта точка зрения является особой — и притом теоретико-множественной — формой еще более общей: перехода посредством некоторого отображения f от данного пространства к более простому пространству $Y=fX$, похожему в некотором смысле на первоначальное пространство X. Весь вопрос в том, каков класс тех отображений f, которые обеспечивают это «сходство» между первоначальным пространством X и его образом fX. Раньше (в гл. 4) это сходство было непосредственно геометрическим, когда отображение f было последовательно ε-сдвигом, ε-отображением, ω-отображением. Потом мы перешли к существенным отображениям — сходство при этом перестало быть непосредственно ощущаемым, но оно продолжало существовать в более глубоком и при этом все же наглядно геометрическом смысле. Наконец, при нульмерных отображениях о каком-либо геометрическом сходстве говорить уже затруднительно (ведь любой конечномерный компакт без изолированных точек можно получить из канторова множества даже конечнократным отображением). И тем не менее при нульмерных и близких к ним отображениях $f\colon X\to Y$ многие размерностные свойства переходят от X к Y или, еще чаще, от Y к X. Демонстрацией этого удивительного факта должна отчасти служить и эта глава.

Примером могут служить:

Теорема 3. *Всякое нормальное пространство X размерности $\dim X \leqslant n$ при всяком своем локально конечном покрытии ω допускает так называемое ω-дискретное отображение* *) *на пространство Y со счетной базой, для которого также $\dim Y \leqslant n$.*

Теорема 8. *Всякое метрическое пространство X размерности $\dim X \leqslant n$ допускает вполне нульмерное отображение* **) *в пространство Y со счетной базой, также размерности $\dim Y \leqslant n$.*

Центральное место в этой главе занимает факторизационная теорема для метрических пространств (уже сформулированная в пятой главе) и ее частный случай — малая факторизационная теорема для метрических пространств (теорема 1 в § 1):

Пусть X — нормальное, Z — метризуемое пространство со счетной базой, отображение $f\colon X \to Z$ непрерывно. Тогда существует такое метризуемое со счетной базой пространство Y и такие непрерывные отображения $g\colon X \to Y$, $h\colon Y \to Z$, что

$$f = hg, \qquad \dim Y \leqslant \dim X$$

(*общую факторизационную теорему получаем, отказавшись от наличия счетной базы в пространстве Z и заменив это условие для пространства Y условием $wY \leqslant wZ$*).

Теорема 1 позволяет по-новому доказать равенство Даукера $\dim X = \dim_\infty X$ для всех нормальных пространств (исходя из его справедливости для пространств со счетной базой). Далее следует доказательство ряда других основных тождеств для размерности метрических пространств, в частности формулы Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Все это делается в §§ 1, 2, 3.

Общая факторизационная теорема доказывается в § 4. Из нее очень просто выводится теорема Нагата о существовании универсального пространства в классе всех метризуемых пространств данного веса и данной размерности, равно как и дополняющая ее теорема 18.

Наконец, — и это представляется нам особенно убедительной иллюстрацией к сказанному вначале — на основе общей факторизационной теоремы теорема Катетова получает большое и неожиданное обобщение:

Равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ верно для всех нормальных пространств X, допускающих замкнутое нульмерное ($\dim f = 0$) *отображение $f\colon X \to Y$ на метрическое пространство Y* ***).

---

*) См. определение 1 § 1 стр. 369.

**) См. определение 1 на стр. 375.

***) К числу таких пространств относятся, например, все конечномерные локально бикомпактные группы и их фактор-пространства.

§ 1. Малая факторизационная теорема для метрических пространств, ω-дискретные отображения на пространства со счетной базой

Следующая теорема (малая факторизационная теорема для метрических пространств) в некоторых случаях позволяет сводить рассмотрение общих n-мерных пространств к рассмотрению n-мерных пространств со счетной базой, теория размерности которых уже была построена в предыдущих главах.

Теорема 1 (Пасынков [11]). *Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X\to Z$ нормального пространства X в метризуемое пространство со счетной базой Z. Тогда существуют: такое метризуемое пространство со счетной базой Y и такие непрерывные отображения $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to Z$, что*

$$f=hg \quad \text{и} \quad \dim Y\leqslant\dim X.$$

Доказательство. Пространство Z можно считать множеством, лежащим в гильбертовом кирпиче Q^∞. По теореме 12 из § 9 гл. 1 отображение f можно продолжить в непрерывное отображение $\bar{f}\colon \beta X\to Q^\infty$.

По первой факторизационной теореме для бикомпактов (см. гл. 5, § 2) можно найти такой компакт Φ и такие непрерывные отображения $\bar{g}\colon \beta X\to\Phi$ и $\bar{h}\colon \Phi\to Q^\infty$, что $\bar{f}=\bar{h}\bar{g}$ и $\dim\Phi\leqslant$ $\leqslant\dim\beta X=\dim X$ (см. гл. 5, § 1).

Положим $Y=\bar{g}X$ и $g=\bar{g}\colon X\to Y$, $h=\bar{h}\colon Y\to Z$.

Очевидно, $f=hg$. По теореме 18 из § 8 гл. 4 $\dim Y\leqslant$ $\leqslant\dim\Phi\leqslant\dim X$. Теорема доказана.

В качестве первого применения малой факторизационной теоремы для метрических пространств докажем следующую теорему (Александров [17]), обобщающую теорему Нёбелинга — Понтрягина:

Для любой счетной системы конечных открытых покрытий ω_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, нормального пространства X размерности $\dim X\leqslant n$ существует непрерывное отображение в $(2n+1)$-мерный куб Q (на не более чем n-мерное множество $Y=Y(X)\subseteq Q$), являющееся ω_i-отображением для каждого $i=1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Нам потребуется следующее замечание. Пусть отображение $f\colon X\to Z$ есть суперпозиция непрерывных отображений $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to Z$ и является ω-отображением относительно покрытия ω пространства X. Тогда и g есть ω-отображение.

Действительно, пусть $y\in Y$ и $x=hy$. Возьмем окрестность Ox, прообраз $f^{-1}Ox$ которой содержится в одном из элементов покрытия ω. Но тем же свойством обладает и окрестность $h^{-1}Ox$ точки y, так как $g^{-1}h^{-1}Ox=f^{-1}Ox$. Перейдем к основной части доказательства. Для каждого ω_i построим каноническое отображение f_i: $X \to \tilde{N}_i$ в тело нерва N_i покрытия ω_i. Диагональное произведение f: $X \to Z = \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i$ отображений f_i непрерывно (гл. 1, § 8, предложение 7) и является ω_i-отображением для любого i, так как $f_i = p_i f$, где p_i — проекция Z на $\tilde{N}_i$. По малой факторизационной теореме (теорема 1) существует такое пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant \dim X \leqslant n$ и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Z$, что $f = hg$. Отображение g есть (по замечанию) ω_i-отображение для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$ По теореме Нёбелинга — Понтрягина можно считать $Y \subseteq Q$, следовательно, отображение g — искомое. Теорема доказана.

Введем теперь следующее обобщение понятия ω-отображения.

Определение 1. Пусть дано открытое покрытие ω пространства X. Отображение f: $X \to Y$ назовем *ω-дискретным отображением*, если любая точка $y \in fX$ обладает окрестностью Oy в Y, прообраз $f^{-1}Oy$ которой распадается в дискретную в X систему открытых множеств, вписанную в покрытие ω.

Теорема 2. *Нормальное пространство X для любого своего открытого локально конечного покрытия ω обладает ω-дискретным отображением в гильбертов кирпич Q^{∞}.*

В частности, имеем

Следствие 1. *Паракомпакт X для любого своего открытого покрытия ω обладает ω-дискретным отображением в гильбертов кирпич.*

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 1. *Для любого счетного открытого корректного покрытия $\omega = \{O_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, нормального пространства X существует ω-отображение f: $X \to Q^{\infty}$ на подмножество гильбертова кирпича Q^{∞}.*

Доказательство. Гильбертов кирпич Q^{∞} будем рассматривать как произведение счетной системы отрезков $Q_i = \{x_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ (см. гл. 1, § 8, п. 3). По лемме Веденисова для каждого i построим такую непрерывную функцию f_i: $X \to Q_i$, что $O_i = f_i^{-1}(0, 1]$.

Диагональное произведение (гл. 1, § 8, п. 2) f: $X \to Q^{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} Q_i$ отображений f_i удовлетворяет для каждого i условию $f_i = p_i f$, где p_i обозначает проекцию произведения Q^{∞} на сомножитель Q_i.

Для каждого i множество $V_i = p_i^{-1}(0, 1]$ открыто в Q^{∞} и

$$f^{-1}V_i = f^{-1}p_i^{-1}(0, 1] = f_i^{-1}(0, 1] = O_i.$$

Так как $fX \subseteq Q^{\infty} \setminus (0, 0, 0, \ldots) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, то лемма доказана.

Докажем теорему 2.

Рассмотрим произвольное локально конечное открытое покрытие ω пространства X. Впишем в это покрытие σ-дискретное открытое корректное покрытие ν (см. гл. 1, § 10, предложение 7).

Пусть $\nu_i = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ — дискретные системы, на которые распадается покрытие ν. Представим каждое множество O_α в виде суммы замкнутых множеств F_α^j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, при произвольных фиксированных i и j система $\lambda_{ij} = \{F_\alpha^j\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, дискретна. Следовательно, каждое множество $\tilde{\lambda}_{ij}$ замкнуто в X, а каждое открытое в X множество $\tilde{\nu}_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_{ij}$ имеет тип F_σ в X.

Таким образом, по покрытию $\nu = \bigcup_{i=1}^{\infty} \nu_i$ мы построили счетное покрытие ν' из открытых типа F_σ в X множеств $\tilde{\nu}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ По лемме 1 существует ν'-отображение $f: X \to Q^\infty$ пространства X в гильбертов кирпич Q^∞. Покажем, что f есть ω-дискретное отображение.

Возьмем произвольно точку $y \in fX$ и такую окрестность Oy этой точки, прообраз $f^{-1}Oy$ которой содержится в одном из элементов $\tilde{\nu}_{i_0}$ покрытия ν'. Тогда система $f^{-1}Oy \cap O_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{i_0}$, дискретна и вписана в систему ν_{i_0}, а следовательно, и в покрытие ω. Теорема 2 доказана.

В доказанной теореме ничего не говорится о размерности образа пространства X в Q^∞. Факторизационная теорема 1 позволяет следующим образом уточнить теорему 2.

Теорема 3. *Нормальное пространство X размерности $\dim X = n < \infty$ для любого своего открытого локально конечного покрытия ω обладает ω-дискретным отображением на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$.*

Следствие 2. *Паракомпакт X размерности $\dim X = n$ для любого своего открытого покрытия ω обладает ω-дискретным отображением на пространство Y со счетной базой размерности $\dim Y \leqslant n$.*

Теорема 3 очевидным образом вытекает из теорем 1, 2 и следующего вспомогательного утверждения:

Лемма 2. *Пусть даны такие непрерывные отображения*

$$f: X \to Z, \quad g: X \to Y \quad \text{и} \quad h: Y \to Z,$$

что $f = hg$. Если отображение f является ω-дискретным отображением относительно открытого покрытия ω пространства X, то тем же свойством обладает и отображение g.

Доказательство. Возьмем произвольным образом точку $y \in gX$. По условию точка $z = hy \in fX$ обладает такой окрестностью V, что ее прообраз $f^{-1}V$ распадается в дискретную в X систему ν открытых множеств, вписанную в покрытие ω. Но тогда и прообраз $g^{-1}(h^{-1}V) = f^{-1}V$ окрестности $h^{-1}V$ точки y распадается в дискретную в X систему ν открытых множеств, вписанную в покрытие ω.

Лемма доказана.

§ 2. Второе доказательство тождества Даукера $\dim_\infty X = \dim X$

Теорема 4 (Даукер [2]). *Для нормального пространства X всегда*

(1) $$\dim X = \dim_\infty X.$$

Другими словами, неравенство $\dim X \leqslant n$ имеет место тогда и только тогда, когда в любое открытое локально конечное покрытие пространства можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.

Следствие 1. *Для паракомпакта X тогда и только тогда имеем $\dim X \leqslant n$, когда в любое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Сначала теорему Даукера докажем в случае, когда пространство X обладает счетной базой.

Лемма 1. *Пусть дано наследственно нормальное пространство X, его подмножество A и дизъюнктные открытые в A множества H_1 и H_2. Тогда существует такая дизъюнктная пара открытых в X множеств V_1 и V_2, что*

$$V_1 \cap A = H_1 \quad \text{и} \quad V_2 \cap A = H_2.$$

Доказательство. Так как множества H_1 и H_2, очевидно, отделены по Хаусдорфу (см. гл. 1, § 1), то утверждение леммы сразу же вытекает из предложения 1 § 5 гл. 1.

Обобщим доказанную лемму.

Лемма 2. *Пусть дано наследственно нормальное пространство X и его открытое покрытие ω. Пусть еще дано дизъюнктное и вписанное в ω конечное или счетное покрытие η множества $A \subseteq X$ открытыми в A множествами H_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда существует такая конечная или счетная дизъюнктная и вписанная в покрытие ω система открытых в X множеств V_i, что*

$$V_i \cap A = H_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Обозначим через O_i какой-нибудь из элементов покрытия ω, содержащий множество H_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

По предыдущей лемме существуют такие открытые в X множества U_1 и U_2', что $U_1 \cap U_2' = \Lambda$, $U_1 \cap A = H_1$ и $U_2' \cap A = \bigcup_{i \geqslant 2} H_i$. Положим $V_1 = U_1 \cap O_1$. Очевидно, множество V_1 открыто в X, $V_1 \cap A = H_1$, $V_1 \subseteq O_1$ и $V_1 \cap U_2' = \Lambda$.

Предположим, что для всех $i < k$, $k > 1$, уже построены такие дизъюнктные открытые в X множества V_i и открытое в X множество U_k', что $U_k' \cap V_i = \Lambda$, $V_i \cap A = H_i$, $V_i \subseteq O_i$, $i < k$, и $U_k' \cap A = \bigcup_{i \geqslant k} H_i$.

Построим множества V_k и U_{k+1}'.

В силу наследственной нормальности пространства X предыдущая лемма применима к пространству U_k', его подмножеству $\bigcup_{i \geqslant k} H_i$ и покрытию $\left\{H_k, \bigcup_{i > k} H_i\right\}$ этого множества. Поэтому существуют такие открытые в U_k', а следовательно и в X, множества U_k и U_{k+1}', что $U_k \cap U_{k+1}' = \Lambda$, $H_k = U_k \cap \bigcup_{i \geqslant k} H_i = U_k \cap A$ и $\bigcup_{i > k} H_i = U_{k+1}' \cap \bigcup_{i \geqslant k} H_i = U_{k+1}' \cap A$. Положим $V_k = O_k \cap U_k$. Множество V_k открыто в X, $V_k \cap A = H_k$, $V_k \subseteq O_k$, $V_k \cap U_{k+1}' = \Lambda$ и $V_i \cap V_k \subseteq V_i \cap U_k' = \Lambda$, $i < k$.

Продолжая процесс построения множеств V_i, получим искомую систему. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть пространство X наследственно нормально, а множество $A \subseteq X$ финально компактно и* $\dim A = 0$. *Тогда для любого открытого покрытия ω пространства X существует вписанное в ω дизъюнктное открытое покрытие некоторой окрестности множества A.*

Доказательство. Каждая точка $x \in A$ обладает в A открыто-замкнутой окрестностью G_x, содержащейся в некотором элементе покрытия ω. Выделим из покрытия множества A окрестностями G_x счетное подпокрытие $\{G_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, обозначив через O_i один из элементов покрытия ω, содержащий G_i. Так как множества G_i открыто-замкнуты в A, то такими же будут и множества $H_1 = G_1$, $H_k = G_k \setminus \bigcup_{i<k} G_i$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ Множества H_i образуют дизъюнктиое открытое покрытие множества A и $H_i \subseteq O_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Утверждение леммы теперь вытекает из предыдущей леммы.

Докажем теорему 4 для произвольного пространства со счетной базой X. Пусть $\dim_\infty X \leqslant n$, т. е. в любое локально конечное (в частности, конечное) открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$. Тогда, очевидно, $\dim X \leqslant n$.

Наоборот, пусть $\dim X \leqslant n$. Тогда по теореме 17 из § 8 гл. 4 пространство X можно представить в виде суммы $r+1$ нульмерных множеств X_i, $i=0, 1, \ldots, r \leqslant n$. Если ω — произвольное открытое покрытие пространства X, то, по предыдущей лемме, для каждого i существует дизъюнктное открытое покрытие ω_i некоторой окрестности множества X_i, вписанное в покрытие ω. Система $\bigcup\limits_{i=0}^{r} \omega_i$ есть открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant r+1 \leqslant n+1$, вписанное в ω. Таким образом, $\dim_\infty X \leqslant n$. Равенство (1) для пространств со счетной базой доказано.

Докажем теорему Даукера (теорему 4) в общем случае.

Неравенство $\dim X \leqslant \dim_\infty X$ очевидно. Ясно также, что $\dim X \geqslant \dim_\infty X$, если $\dim X = \infty$. Пусть теперь $\dim X = n < \infty$.

Рассмотрим локально конечное открытое покрытие ω пространства X. По теореме 3 существует ω-дискретное отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$.

Дальнейшее вытекает из следующей леммы:

Лемма 4. *Если нормальное пространство X для своего открытого покрытия ω обладает ω-дискретным отображением f на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$, то в покрытие ω можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Доказательство. Выберем для каждой точки $y \in Y$ такую окрестность Oy, прообраз которой распадается в дискретную в X систему $\nu_y = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_y$, открытых множеств, вписанную в покрытие ω.

В покрытие $\{Oy\}$, $y \in Y$, по доказанному, можно вписать открытое покрытие $\eta = \{V_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, кратности $\leqslant n+1$. Так как каждый элемент V_β покрытия η содержится в некотором множестве $Oy = Oy(\beta)$, то его прообраз $f^{-1}V_\beta$ распадается в дискретную в X систему $\nu_\beta = \{U_\alpha \cap f^{-1}V_\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{y(\beta)}$, открытых множеств, вписанную в покрытие ω. В силу дизъюнктности систем ν_β их объединение $\nu = \bigcup\limits_{\beta \in \mathfrak{B}} \nu_\beta$ имеет кратность, равную кратности покрытия η. Следовательно, кратность $\nu \leqslant n+1$. Очевидно, система ν является открытым покрытием пространства X, вписанным в покрытие ω. Лемма 4, а с ней и теорема 4 доказаны.

Опираясь на полученные результаты, дадим еще одну характеристику размерности $\dim X$ нормального пространства X.

Теорема 5 (Остранд [1] *)). *Нормальное пространство X имеет размерность $\dim X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда*

*) Для метрических пространств.

(*) *в любое открытое локально конечное покрытие пространства X можно вписать покрытие, представимое в виде суммы не более чем $n+1$ дискретных в X систем корректных открытых множеств.*

Доказательство. Достаточность условия (*) для выполнения неравенства $\dim X \leqslant n$ очевидна. Необходимость условия (*) вытекает из теоремы 4 этого параграфа, предложений 11 и 2 из § 6 гл. 1 и предложения 8 из § 10 гл. 1.

Теорема 6. *Нормальное пространство X имеет размерность $\dim X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда*

(**) *для любого открытого локально конечного покрытия ω пространства X существует ω-дискретное отображение пространства X в n-мерный симплекс $\overline{T}^n$.*

Доказательство. Пусть $\dim X \leqslant n$. Рассмотрим открытое локально конечное покрытие ω пространства X. По теореме 5 в ω можно вписать открытое покрытие ν, распадающееся в сумму дискретных в X систем ν_i открытых множеств O_α, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 0, 1, \ldots, r \leqslant n$.

Для открытого покрытия $\nu' = \{\tilde{\nu}_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, пространства X существует (см. гл. 4, § 1, теорема 1) каноническое отображение $f\colon X \to \tilde{N}_{\nu'}$ в тело нерва покрытия ν'. Очевидно,

$$\tilde{N}_{\nu'} \subseteq \overline{T}^r \subseteq \overline{T}^n.$$

Прообраз $f^{-1}Oe_i$ звезды Oe_i вершины e_i нерва $N_{\nu'}$ содержится в $\tilde{\nu}_i$. Поэтому система

$$\{O_\alpha \cap f^{-1}Oe_i\}, \qquad \alpha \in \mathfrak{A}_i,$$

дискретна и вписана в покрытие ω.

Так как главные звезды (т. е. звезды вершин) покрывают весь полиэдр $\tilde{N}_{\nu'}$, то отображение f является ω-дискретным отображением в $\tilde{N}_{\nu'} \subseteq \overline{T}^n$. Итак, необходимость условия (**) для выполнения неравенства $\dim X \leqslant n$ доказана.

Из утверждения (**) соотношение $\dim X \leqslant n$ вытекает в силу леммы 4. Теорема доказана.

Следствие 2. *Для паракомпакта X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\dim X \leqslant n$;

(2) *в любое открытое покрытие пространства X можно вписать покрытие, являющееся суммой не более чем $n+1$ дискретных в X систем корректных открытых множеств;*

(3) *для любого открытого покрытия ω пространства X существует ω-дискретное отображение X в n-мерный симплекс.*

§ 3. Тождество Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метрического пространства X; другие характеристики размерности метрического пространства

Первоначальное катетовское доказательство равенства $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метрического пространства X основывалось на существовании для метрического пространства X размерности $\dim X \leqslant n$ равномерно нульмерного (Катетов [2]) отображения в n-мерный куб. Применение малой факторизационной теоремы для метрических пространств позволяет исходить лишь из существования вполне нульмерного (см. ниже) отображения пространства X в гильбертов кирпич, причем требование полной нульмерности отображения формально слабее требования его равномерной нульмерности.

Перейдем к определениям и доказательствам.

Определение 1. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в пространстве Y назовем *вполне нульмерным*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $y \in fX$ существует окрестность Oy в Y, прообраз $f^{-1}Oy$ которой распадается в дискретную в X систему открытых в X множеств диаметра $< \varepsilon$ *).

Теорема 7 (Катетов [3]). *Любое метрическое пространство X обладает вполне нульмерным отображением в гильбертов кирпич Q^∞.*

Доказательство. Обозначим через ω_i покрытие пространства X, состоящее из сферических окрестностей $O\left(x, \frac{1}{2^i}\right)$ всех точек из X; $i = 1, 2, 3, \ldots$ По следствию 2 § 2 для каждого i существует ω_i-дискретное отображение f_i пространства X в гильбертов кирпич Q_i^∞.

Диагональное произведение $f\colon X \to Q^\infty = \prod\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^\infty$ отображений f_i будет искомым. Действительно, фиксируем какое-нибудь $\varepsilon > 0$, точку $y_0 \in fX$ и выберем номер i, для которого $\frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Через p_i обозначим проекцию произведения Q^∞ на сомножитель Q_i^∞. Очевидно, $f_i = p_i f$. По построению точка $p_i y_0$ обладает окрестностью O, прообраз $f_i^{-1}O$ которой распадается в дискретную в X систему открытых множеств, вписанных в ω_i и имеющих поэтому диаметры $\leqslant \frac{2}{2^i} < \varepsilon$. Но тогда и прообраз $f^{-1}\left(p_i^{-1}O\right) = f_i^{-1}O$

---

*) Если пространство Y метризуемо, то вполне нульмерное отображение $f\colon X \to Y$ можно посредством надлежащей метризации пространства Y превратить в равномерно нульмерное в смысле Катетова [2] отображение.

окрестиости $p_i^{-1}O$ точки y_0 также распадается в дискретную в X систему открытых множеств диаметра $<\varepsilon$. Теорема доказана.

Для конечномерных метрических пространств теорема 7 допускает следующее усиление:

Теорема 8 (Катетов [2], [3]). *Метрическое пространство X размерности $\dim X \leqslant n$ обладает вполне нульмерным отображением в пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$.*

В самом деле, теорема 8 вытекает из теоремы 7, теоремы 1 и следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть даны такие непрерывные отображения $f: X \to Z$, $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$, что $f = hg$. Если пространство X метрическое, а отображение f вполне нульмерно, то вполне нульмерным будет и отображение g.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и точку $y \in gX$. По условию точка $z = hy$ обладает окрестностью O, прообраз $f^{-1}O$ которой распадается в дискретную в X систему открытых множеств диаметра $<\varepsilon$. Но тогда тем же свойством обладает и прообраз $g^{-1}(h^{-1}O) = f^{-1}O$ окрестности $h^{-1}O$ точки y. Лемма, а с нею и теорема 8 доказаны.

Теперь мы можем установить одно из самых фундаментальных утверждений теории размерности вообще и теории метрических пространств в частности.

Теорема 9. *Для метрического пространства X и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\dim X \leqslant n$;

(2) $\operatorname{Ind} X \leqslant n$;

(3) *пространство X является суммой не более чем $n+1$ множеств X_i размерности $\dim X_i \leqslant 0$;*

(4) *пространство X является образом метрического пространства X^0 размерности $\dim X^0 \leqslant 0$ и веса $wX^0 \leqslant wX$ при замкнутом отображении кратности $\leqslant n+1$;*

(5) *метрическое пространство X обладает вполне нульмерным отображением на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$.*

Эквивалентность пунктов (1) — (3) и (5) *) установлена Катетовым [2], [3] **), пунктов (1) и (4) — Морита [5].

Доказательство теоремы 9 опирается на несколько утверждений, имеющих и самостоятельный интерес.

Следующая лемма показывает, что вполне нульмерные отображения являются нульмерными, так что термин «вполне нульмерные отображения» оправдан.

*) С заменой в пункте (5) вполне нульмериых отображений равномерно нульмерными и пространства Y кубом Q^n.

**) См. также Морита [4].

Лемма 2. *Если метрическое пространство X для любого $\varepsilon > 0$ представляется в виде суммы дизъюнктных открытых множеств диаметра $< \varepsilon$, то* $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_i = \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ По условию для каждого i существует покрытие μ_i пространства X из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon_i$. Можно считать, что μ_{i+1} вписано в μ_i, иначе вместо μ_{i+1} можно взять произведение покрытий $\mu_1, \ldots, \mu_i, \mu_{i+1}$.

Рассмотрим произвольное замкнутое в X множество F и какую-нибудь его окрестность OF.

Обозначим через A_1 сумму тех элементов покрытия μ_1, которые содержатся в OF, а через B_1 — сумму тех элементов покрытия μ_1, которые лежат в $X \setminus F$ и в то же время не содержатся в OF. Ясно, что множества A_1, B_1 и $C_1 = X \setminus (A_1 \cup B_1)$ открыто-замкнуты, дизъюнктны и целиком состоят из элементов покрытия μ_1.

Предположим, что для всех $i < s$ дизъюнктные, открыто-замкнутые и целиком состоящие из элементов покрытия μ_i множества A_i, B_i и C_i уже построены (при этом A_i состоит из точек всех тех элементов покрытия μ_i, которые содержатся в $OF \cap C_{i-1}$; далее, B_i состоит из точек всех тех элементов покрытия μ_i, которые содержатся в $(X \setminus F) \cap C_{i-1}$, но не содержатся в $OF \cap C_{i-1}$; наконец, $C_i = C_{i-1} \setminus (A_i \cup B_i)$). Обозначим через A_s сумму тел тех элементов покрытия μ_s, которые содержатся в $OF \cap C_{s-1}$, через B_s обозначим сумму тел тех элементов покрытия μ_s, которые лежат в $(X \setminus F) \cap C_{s-1}$ и не содержатся в $OF \cap C_{s-1}$. Очевидно, множества A_s, B_s и $C_s = C_{s-1} \setminus (A_s \cup B_s)$ дизъюнктны, открыто-замкнуты и целиком состоят из элементов покрытия μ_s. (Напомним, что покрытие μ_s вписано в покрытие μ_{s-1} и поэтому множество C_{s-1} целиком состоит не только из элементов покрытия μ_{s-1}, но и из элементов покрытия μ_s.) Продолжая построение, получим последовательности множеств A_i и B_i. Из построения ясно, что множества $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ не пересекаются и открыты, причем $A \subseteq OF$.

Покажем, что $F \subseteq A$. Действительно, так как $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, то для любой точки $x \in F$ определен наименьший номер $i = i_0$, для которого элемент покрытия μ_{i_0}, содержащий точку x, содержится в OF. Ясно, что $x \in A_{i_0} \subseteq A$.

Покажем теперь, что $X = A \cup B$. Уже показано, что $F \subseteq A$. Если $x \in OF \setminus F$, то существует такой номер i_1, для которого элемент покрытия μ_{i_1}, содержащий точку x, будет лежать в OF.

Если точка x еще не попала в одно из множеств A_i или B_i для $i < i_1$, то она будет содержаться в множестве A_{i_1}. Наконец, если $x \in X \setminus OF$, то существует такой номер i_2, для которого элемент покрытия μ_{i_2}, содержащий точку x, не пересекается с F. Если точка x еще не попала в одно из множеств B_i для $i < i_2$, то она попадет в множество B_{i_2}.

Соотношение $X = A \cup B$ доказано. Из него следует, что множества A и B не только открыты, но и замкнуты, следовательно, $\operatorname{Ind} X = 0$, ч. и т. д.

Лемма 3. *Если метрическое пространство X обладает вполне нульмерным отображением f на пространство Y со счетной базой размерности* $\dim Y = 0$, *то* $\operatorname{Ind} X = 0$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $y \in Y$ выберем окрестность Oy, прообраз $f^{-1}Oy$ которой распадается в дискретную в X систему открытых в X множеств V_α, $\alpha \in \mathfrak{A}_y$, диаметра $< \varepsilon$. Впишем в покрытие пространства Y окрестностями O_y открытое, счетное, однократное покрытие множествами O_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ (возможность этого вытекает из следствия 1 § 2). Для каждого номера i фиксируем какое-нибудь из множеств $Oy = Oy(i)$, содержащее O_i. Тогда множества $f^{-1}O_i \cap V_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{y(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, дадут разложение пространства X в сумму дизъюнктных открытых множеств диаметра $< \varepsilon$, откуда, по лемме 2, $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству эквивалентности утверждений (1), (2), (3) и (5) теоремы 9.

Утверждение (5) вытекает из утверждения (1) в силу теоремы 8. Выведем теперь из утверждения (5) утверждение (3).

Пусть существует вполне нульмерное отображение $f\colon X \to Y$ пространства X на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$. По теореме 17 из § 8 гл. 4 пространство Y можно представить в виде суммы не более чем $n+1$ множеств Y_i размерности $\dim Y_i \leqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, r \leqslant n$. Так как отображения $f\colon f^{-1}Y_i \to Y_i$, очевидно, вполне нульмерны, то, по лемме 3 и по неравенству Веденисова (гл. 4, § 8, п. 3), $\dim f^{-1}Y_i \leqslant \operatorname{Ind} f^{-1}Y_i \leqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $r \leqslant n$, и $X = \bigcup_{i=0}^{r} f^{-1}Y_i$. Итак, утверждение (3) теоремы 9 следует из утверждения (5) этой теоремы.

Так как неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ справедливо для любых нормальных, в частности метрических, пространств (см. гл. 4, § 8, п. 3), то утверждение (1) вытекает из утверждения (2).

Для доказательства эквивалентности утверждений (1) — (3) и (5) достаточно теперь показать, что из утверждения (3) вытекает утверждение (2). Но это следует из эквивалентности утверждений $\dim X=0$ и $\operatorname{Ind} X=0$ для произвольных нормальных пространств (гл. 2, § 3, предложение 1) и следующего общего утверждения:

Теорема 10 (Катетов [2]). *Если наследственно нормальное пространство X представляется в виде суммы $n+1$ множеств X_i размерности $\operatorname{Ind} X_i \leqslant 0$, $i=0, 1, \ldots, n$, то $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.*

Доказательство проведем по индукции. Для $n=0$ утверждение верно. Предположим его доказанным для всех $n<k$, $k>0$, и пусть $n=k$.

Рассмотрим два замкнутых непересекающихся подмножества F_1 и F_2 пространства X. Окружим их соответственно окрестностями O_1 и O_2 с непересекающимися замыканиями $[O_1]$ и $[O_2]$. Пересечения $[O_1] \cap X_0 = \Phi_1$ и $[O_2] \cap X_0 = \Phi_2$ являются замкнутыми непересекающимися подмножествами множества X_0; поэтому существует такое представление X_0 в виде суммы двух непересекающихся открытых в X_0 множеств X_0^1 и X_0^2, что $\Phi_1 \subseteq X_0^1$ и $\Phi_2 \subseteq X_0^2$. По лемме 1 из § 2 существуют дизъюнктные открытые в X множества V_1 и V_2, дающие в пересечении с X_0 соответственно X_0^1 и X_0^2. Можно считать, что $V_1 \cap [O_2] = \Lambda$, иначе вместо V_1 мы взяли бы разность $V_1 \setminus [O_2]$. По той же причине можно считать, что $V_2 \cap [O_1] = \Lambda$. Множества $O_1 \cup V_1$ и $O_2 \cup V_2$ являются непересекающимися окрестностями множеств F_1 и F_2, а X_0 содержится в сумме этих окрестностей. Следовательно, перегородка $F = X \setminus (O_1 \cup V_1 \cup O_2 \cup V_2)$ между F_1 и F_2 содержится в сумме множеств $X_1, \ldots, X_k$ и, по индуктивному предположению, имеет размерность $\operatorname{Ind} F \leqslant k-1$. Таким образом, $\operatorname{Ind} X \leqslant k$, что и требовалось доказать.

Эквивалентность утверждений (1) — (3) и (5) теоремы 9, таким образом, установлена.

Заметим также, что доказывая теорему 10, мы получили следующее

Предложение 1. *Пусть в наследственно нормальном пространстве X дано подмножество X_0 размерности $\dim X_0 \leqslant 0$* *). *Тогда в X между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами F_1 и F_2 существует перегородка Φ, удовлетворяющая соотношению*

$$\Phi \cap X_0 = \Lambda.$$

Докажем эквивалентность утверждения (4) теоремы 9 остальным утверждениям этой теоремы.

Лемма 4. *Пусть даны непрерывные отображения $f: X \to Y$ и $\varphi: Y^0 \to Y$ метрических пространств X и Y^0 на пространство Y, причем отображение f вполне нульмерно. Тогда в веерном*

*) Напомним, что соотношения $\dim X_0 \leqslant 0$ и $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant 0$ равносильны (предложение 1, § 3, гл. 2).

произведении X^0 пространств X и Y^0 относительно отображений f и φ

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f"] & \\
X^0 \subseteq X \times Y^0 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\
 & Y^0 \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

(см. Прибавление к главе 1, § 2) *можно так ввести метрику, что проекция p: $X^0 \to Y^0$ будет вполне нульмерным отображением.*

Доказательство. Для любых двух точек $x_1^0 = (x_1, y_1^0)$ и $x_2^0 = (x_2, y_2^0)$ из $X \times Y^0$ положим

$$\rho(x_1^0, x_2^0) = [\rho_1^2(x_1, x_2) + \rho_2^2(y_1^0, y_2^0)]^{1/2},$$

где ρ_1 и ρ_2 — соответственно метрики в X и Y^0. Покажем, что относительно введенной в $X \times Y^0$, а значит и в $X^0 \subseteq X \times Y^0$, метрики проекция p: $X^0 \to Y^0$ является вполне нульмерным отображением. Возьмем $\varepsilon > 0$ и точку $y^0 \in Y^0$. По условию точка $y = \varphi y^0$ обладает такой окрестностью Oy, прообраз $V = f^{-1}Oy$ которой распадается в дискретную в X систему ν открытых множеств V_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, диаметра $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Так как φ — непрерывное отображение, то у точки y^0 существует δ-окрестность O, $2\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, для которой $\varphi O \subseteq Oy$. Проекцию X^0 на X обозначим через π.

Множество $p^{-1}O$ совпадает с множеством $p^{-1}O \cap \pi^{-1}V$. В самом деле, по лемме 1 из § 2 Прибавления к гл. 1 имеем $p^{-1}O \subseteq \pi^{-1}f^{-1}\varphi O \subseteq \pi^{-1}f^{-1}Oy = \pi^{-1}V$.

Множество $U = p^{-1}O$ распадается (в силу дискретности системы ν) в дискретную в X^0 систему открытых множеств $p^{-1}O \cap \pi^{-1}V_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Диаметр каждого множества $p^{-1}O \cap \pi^{-1}V_\alpha$ меньше ε, так как для любых двух точек $x_1^0 = (x_1, y_1^0)$ и $x_2^0 = (x_2, y_2^0)$ из множества $p^{-1}O \cap \pi^{-1}V_\alpha$ выполнено неравенство

$$\rho(x_1^0, x_2^0) \leqslant [(\operatorname{diam} O)^2 + (\operatorname{diam} V_\alpha)^2]^{1/2} <$$
$$< \left[(2\delta)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right]^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Выведем теперь из утверждения (1) теоремы 9 утверждение (4) этой теоремы.

Пусть $\dim X \leqslant n$. Тогда, по теореме 8, пространство X обладает вполне нульмерным отображением f: $X \to Y$ на пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$. По теореме 11 из § 7 гл. 5 существует непрерывное, замкнутое, кратности $\leqslant n+1$ отображение $\varphi\colon Y^0 \to Y$ пространства со счетной базой Y^0 размерности $\dim Y^0 \leqslant 0$ на пространство Y. По предыдущей лемме проекция $p\colon X^0 \to Y^0$ веерного произведения X^0 пространств X и Y^0 относительно отображений f и φ будет относительно надлежащей метрики на X^0 вполне нульмерным отображением. Следовательно, по лемме 3 имеем $\dim X^0 \leqslant \operatorname{Ind} X^0 \leqslant 0$. Так как $X^0 \subseteq X \times Y^0$, то

$$wX^0 \leqslant \max(wX, wY^0) = wX\ ^{*)}.$$

Наконец, по леммам о «параллельных» из § 2 Прибавления к гл. 1 проекция $\pi\colon X^0 \to X$ будет совершенным и, следовательно, замкнутым отображением кратности $\leqslant n+1$. Итак, из утверждения (1) теоремы 9 утверждение (4) этой теоремы следует.

Для полного доказательства теоремы 9 достаточно показать, что из ее утверждения (4) вытекает, например, ее утверждение (2). Но это так в силу следующей теоремы:

Теорема 11 (Морита [5], Нагами [3]). *Если нормальное пространство Y является образом нормального пространства X размерности $\dim X = 0$ при непрерывном, замкнутом, кратности $\leqslant n+1$ отображении $f\colon X \to Y$, то $\operatorname{Ind} Y \leqslant n$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то отображение f является гомеоморфизмом, и тогда $\operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} X = \dim X = 0$ (см. предложение 1 из § 3 гл. 2). Предположим, что утверждение теоремы имеет место для всех $n < k$, $k > 0$, и пусть $n = k$.

Рассмотрим два замкнутых непересекающихся подмножества F_1 и F_2 пространства Y и их прообразы $\Phi_1 = f^{-1}F_1$ и $\Phi_2 = f^{-1}F_2$. Так как $\operatorname{Ind} X = \dim X = 0$, то существует разбиение пространства X на два таких непересекающихся открыто-замкнутых множества O_1 и O_2, что $O_1 \supseteq \Phi_1$ и $O_2 \supseteq \Phi_2$. Образ Ψ множества O_2 замкнут в Y и не пересекается с F_1. Поэтому множество $U = Y \setminus \Psi$ является окрестностью множества F_1. Граница множества U содержится и в образе множества O_2, и в образе множества O_1 (так как образ множества O_1 замкнут в Y и содержит множество U). Но в таком случае отображение f на замкнутом в X множестве $f^{-1}\,\mathrm{гр}\, U \cap O_1$ является замкнутым и имеет кратность заведомо меньшую, чем $k+1$. По индуктивному предположению $\operatorname{Ind} \mathrm{гр}\, U < k$, откуда $\operatorname{Ind} Y \leqslant k$. Теорема 11 доказана. Доказана также и теорема 9.

Равносильность для метрических пространств неравенств $\dim X \leqslant n$ и $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, означает, что

для метрических пространств всегда

$$\dim X = \operatorname{Ind} X.$$

---

*) Считаем $wX \geqslant \aleph_0$, так как для $wX < \aleph_0$ доказываемое утверждение очевидно.

Как уже отмечалось в гл. 4, П. Рой построил пример метрического пространства R, для которого

$$\operatorname{ind} R = 0 < 1 = \dim R = \operatorname{Ind} R.$$

Из неравенств $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$ (для произвольных нормальных пространств) и $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ (для сильно паракомпактных пространств — см. гл. 4, § 8) следует

Теорема 12 (Морита [4]). *Для произвольного сильно паракомпактного метрического пространства X справедливы равенства*

$$\operatorname{ind} X = \dim X = \operatorname{Ind} X.$$

Если в сильно паракомпактном метрическом пространстве X в покрытия ν_n, состоящие из $\frac{1}{n}$-окрестностей всех точек пространства X, вписать открытые звездно конечные покрытия ω_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то элементы всех покрытий ω_n образуют, очевидно, базу пространства X.

База пространства X, распадающаяся в счетную систему звездно конечных покрытий, называется *σ-звездно конечной.* В силу метризационного критерия (гл. 1, § 11) регулярные пространства с σ-звездно конечной базой метризуемы. По доказанному выше сильно паракомпактные метрические пространства обладают σ-звездно конечной базой. Следовательно, и любые их подмножества обладают σ-звездно конечной базой. В то же время можно указать сильно паракомпактные метрические пространства, не каждое подпространство которых сильно паракомпактно. Таким образом, класс пространств с σ-зведно конечной базой (ниже они будут называться *сильно метризуемыми*) существенно шире класса сильно паракомпактных метрических пространств. Поэтому следующая теорема обобщает теорему 12:

Теорема 13 (Зарелуа [1]). *Для произвольного сильно метризуемого пространства X справедливы равенства*

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 5. *Пусть нормальное пространство X разлагается в дискретную сумму своих замкнутых подмножеств X_α размерности $\dim X_\alpha \leqslant n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда и $\dim X \leqslant n$.*

Эта лемма есть частный случай теоремы 20 из § 9 гл. 4.

Лемма 6. *Пусть в конечное открытое покрытие ω нормального пространства X можно вписать σ-дискретное покрытие μ из таких открытых множеств O_α, что $\dim \operatorname{гр} O_\alpha \leqslant n-1$ для всех α. Тогда в ω можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.*

Доказательство. Обозначим дискретные системы, на которые распадается покрытие μ, через μ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

В силу дискретности системы μ_i граница гр $\tilde{\mu}_i$ ее тела $\tilde{\mu}_i$ совпадает с суммой границ ее элементов. Но так как система границ элементов дискретной системы μ_i также дискретна, то, по предыдущей лемме, $\dim \text{гр}\, \tilde{\mu}_i \leqslant n-1$. По предложению 3 из § 5 гл. 1 множество $F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \text{гр}\, \tilde{\mu}_i$ нормально. По теореме суммы $\dim F \leqslant n-1$.

Положим $\nu_1=\mu_1$. Через ν_i, $i=2, 3, 4, \ldots$, обозначим систему открытых множеств $O_\alpha \setminus \bigcup\limits_{j<i} [\tilde{\mu}_j]$, $O_\alpha \in \mu_i$. Очевидно, система $\nu=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \nu_i$ состоит из открытых множеств, дизъюнктна и вписана в покрытие ω. Покажем, что замкнутое множество $\Phi = X \setminus \tilde{\nu}$ содержится в множестве F.

Пусть $x \in \Phi$. Тогда $x \notin \tilde{\mu}_1 = \tilde{\nu}_1$, но существует номер $i_0 > 1$ такой, что $x \in \tilde{\mu}_{i_0}$ и $x \notin \bigcup\limits_{i<i_0} \tilde{\mu}_i$. Так как $x \notin \tilde{\nu}_{i_0} = \tilde{\mu}_{i_0} \setminus \bigcup\limits_{i<i_0} [\tilde{\mu}_i] \subseteq \tilde{\nu}$, то из способа построения системы ν_{i_0} следует, что $x \in \bigcup\limits_{i<i_0} [\tilde{\mu}_i] \setminus \bigcup\limits_{i<i_0} \tilde{\mu}_i$, откуда $x \in \bigcup\limits_{i<i_0} \text{гр}\, \tilde{\mu}_i$. Таким образом, $\Phi \subseteq F$, и поэтому $\dim \Phi \leqslant n-1$. В покрытие, высекаемое на множестве F покрытием ω, можно вписать конечное замкнутое покрытие λ кратности $\leqslant n$. Систему λ можно подобно раздуть в открытое покрытие η некоторой окрестности множества F (см. гл. 1, § 10), вписанное в покрытие ω. Объединение системы ν кратности 1 и системы η кратности $\leqslant n$ дает открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant n+1$, вписанное в ω. Лемма доказана.

Лемма 7. *В любое открытое покрытие ω сильно метризуемого пространства X размерности $\operatorname{ind} X \leqslant n$ можно вписать такое σ-дискретное открытое покрытие ν, что $\operatorname{ind} \text{гр}\, W \leqslant n-1$ для любого $W \in \nu$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ возьмем окрестность Ox, содержащуюся в одном из элементов покрытия ω и удовлетворяющую условию $\operatorname{ind} \text{гр}\, Ox \leqslant n-1$.

По условию некоторая база ζ пространства X распадается в сумму звездно конечных покрытий ζ_i, $i=1, 2, 3, \ldots$ Для каждого элемента U_α системы ζ_i выберем, если это возможно, такую точку $x=x(\alpha)$, что $U_\alpha \subseteq Ox(\alpha)$. Через $W_{\alpha i}$ обозначим пересечение окрестности $Ox(\alpha)$ с телом той компоненты $\zeta_{i\tau}$ звездно конечного покрытия ζ_i (см. гл. 1, § 6, п. 3), в которую входит элемент U_α. Так как граница тела $\tilde{\zeta}_{i\tau}$ компоненты $\zeta_{i\tau}$ пуста (см. гл. 1, § 6, замечание 4), то гр $W_{\alpha i} \subseteq$ гр $Ox(\alpha)$, откуда $\operatorname{ind} \text{гр}\, W_{\alpha i} \leqslant \operatorname{ind} \text{гр}\, Ox(\alpha) \leqslant n-1$.

Тела компонент звездно конечного покрытия ζ_i открыты и дизъюнктны, а сами компоненты состоят из не более чем счетного числа элементов покрытия ζ_i (см. гл. 1, § 6, замечание 4 и предложение 3). Поэтому в теле каждой компоненты покрытия ζ_i содержится не более чем счетная система множеств $W_{\alpha i}$. Выбрав для каждой компоненты $\zeta_{i\tau}$ покрытия ζ_i по одному множеству $W_{\alpha i} \subseteq \tilde{\zeta}_{i\tau}$, получим, очевидно, дискретную систему множеств $W_{\alpha i}$. Из сказанного ясно, что при фиксированном номере i система множеств $W_{\alpha i}$ является σ-дискретной. Следовательно, система ν всех множеств $W_{\alpha i}$ также σ-дискретна.

Так как любое подпространство сильно метризуемого пространства, очевидно, сильно метризуемо, то, по индуктивному предположению, $\dim \operatorname{rp} W_{\alpha i} \leqslant \operatorname{ind} \operatorname{rp} W_{\alpha i} \leqslant n-1$ для любого множества $W_{\alpha i}$.

По построению система ν вписана в покрытие ω.

Осталось еще показать, что ν является покрытием пространства X.

Возьмем произвольную точку $x \in X$ и выбранную выше ее окрестность Ox. Существует элемент $U_\alpha \in \zeta_i$ базы ζ такой, что $x \in U_\alpha \subseteq Ox$. Тогда ясно, что $x \in U_\alpha \subseteq W_{\alpha i}$. Итак, система μ является покрытием пространства X. Лемма доказана.

Докажем теорему 13.

Достаточно доказать неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$, так как всегда $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$ и равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ уже установлено.

Если $\operatorname{ind} X = -1$, то и $\dim X = -1$. Предположим, что неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ имеет место в случае $\operatorname{ind} X < n$, и пусть $\operatorname{ind} X = n$, $n \geqslant 0$.

Рассмотрим произвольное конечное открытое покрытие ω пространства X. По лемме 7 в ω можно вписать такое открытое σ-дискретное покрытие ν, что $\operatorname{ind} \operatorname{rp} W \leqslant n-1$ для любого $W \in \nu$. По индуктивному предположению и $\dim \operatorname{rp} W \leqslant n-1$ для любого $W \in \nu$. Но тогда, по лемме 6, в покрытие ω можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$. Следовательно, $\dim X \leqslant n = \operatorname{ind} X$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если метрическое пространство X обладает σ-дискретной предбазой $\mathfrak{B}$ (т. е. предбазой, распадающейся в счетную сумму дискретных систем) из открыто-замкнутых множеств, то*

$$\dim X \leqslant 0.$$

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{ind} X \leqslant 0$. Для доказательства нужного неравенства осталось показать сильную метризуемость пространства X.

Пусть дискретные в X системы $\nu_i = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, открыто-замкнутых множеств V_α образуют в X предбазу.

Рассмотрим систему $\nu_{i_1 \dots i_s} = \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_s}$ и точку $x \in X$. Для каждого $i = 1, \dots, s$ выберем окрестность O_i точки x, пересекающуюся не более чем с одним элементом системы ν_i. Тогда окрестность $O_1 \cap \dots \cap O_s$ точки x пересекается не более чем с одним элементом системы $\nu_{i_1 \dots i_s}$. Мы доказали дискретность этой системы. Так как элементы системы $\nu_{i_1 \dots i_s}$ открыто-замкнуты, то множество $U_{i_1 \dots i_s} = X \setminus \tilde{\nu}_{i_1 \dots i_s}$ также открыто-замкнуто, а система $\mu_{i_1 \dots i_s}$, состоящая из множества $U_{i_1 \dots i_s}$ и элементов системы $\nu_{i_1 \dots i_s}$, является открытым и дизъюнктным (следовательно, и звездно конечным) покрытием пространства X. Из определения предбазы следует, что система $\nu = \bigcup_{i_1 \dots i_s} \nu_{i_1 \dots i_s}$ образует базу в X. Так как $\nu \subseteq \mu = \bigcup_{i_1 \dots i_s} \mu_{i_1 \dots i_s}$, то μ есть σ-звездно конечная база пространства X. Сильная метризуемость X, а потому неравенство $\dim X \leqslant 0$ доказано.

Теорема 9 позволяет показать, что конечномерное множество M, лежащее в метрическом пространстве X, часто можно погрузить в существенно более обширное множество $\bar{M} \subseteq X$ той же размерности $\dim \bar{M} = \dim M$.

Теорема 14 (теорема Тумаркина *)). *Пусть дано метрическое пространство X и его подмножество M. Тогда существует такое множество $\bar{M}$ типа G_δ в X, что $M \subseteq \bar{M}$ и*

$$\dim \bar{M} = \dim M.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\dim M = 0$. Для произвольного натурального числа n через $O_n x$ обозначим $\frac{1}{n}$-окрестность точки $x \in M$ в X. По следствию 1 из § 2 в покрытие $\{O_n x \cap M\}$, $x \in M$, множества M можно вписать открытое покрытие $\nu_n = \{M_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, кратности 1. Система ν_n, таким образом, дизъюнктна и состоит из открытых в M множеств. В X существуют такие открытые множества U_α, что $U_\alpha \cap M = M_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$. Можно считать $\operatorname{diam} U_\alpha \leqslant \frac{2}{n}$, так как в противном случае вместо множеств U_α можно взять множество $U_\alpha \cap O_n x$, где $O_n x \supseteq M_\alpha$.

Множество $U_n = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_n} U_\alpha$ открыто в X, и система $\mu = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, является его покрытием. По построению для любого $\alpha \in \mathfrak{A}_n$ множество M_α содержится в замкнутом в U_n множестве

*) Первоначально эта теорема была доказана Тумаркиным [3] для пространств со счетной базой. На произвольные метрические пространства ее распространили Катетов [3] и Морита [4].

$\bar{M}_\alpha = U_n \setminus \bigcup\limits_{\alpha' \neq \alpha} U_{\alpha'}$. Множество точек однократности покрытия μ множества U_n, т. е. множество $\bar{M}_n = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}_n} \bar{M}_\alpha = U_n \setminus \bigcup\limits_{\substack{\alpha \neq \alpha' \\ \alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_n}} (U_\alpha \cap U_{\alpha'})$, также замкнуто в множестве U_n и, следовательно, имеет тип G_δ в пространстве X. Множества $\bar{M}_\alpha = \bar{M}_n \cap U_\alpha$ открыты в $\bar{M}_n$, очевидно, дизъюнктны, и $\operatorname{diam} \bar{M}_\alpha \leqslant \operatorname{diam} U_\alpha \leqslant \frac{2}{n}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$.

Таким образом, для каждого натурального n мы нашли множество $\bar{M}_n$ типа G_δ в X, содержащее множество M и представимое в виде суммы дизъюнктных открытых в $\bar{M}_n$ множеств $\bar{M}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, диаметра $\leqslant \frac{2}{n}$. Очевидно, множество $\bar{M} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{M}_n$ имеет тип G_δ в X, содержит множество M и для любого натурального n представляется в виде суммы дизъюнктных открытых в $\bar{M}$ множеств $\bar{M}_\alpha \cap \bar{M}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, диаметра $\leqslant \frac{2}{n}$. По лемме 2 $\dim \bar{M} \leqslant 0$, а по теореме 18 из § 8 гл. 4 $\dim \bar{M} \geqslant \dim M = 0$, откуда $\dim \bar{M} = 0 = \dim M$.

Пусть теперь $\dim M = n < \infty$. Тогда, по теореме 9, множество M можно представить в виде суммы множеств M_i размерности $\dim M_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. По доказанному существуют множества $\bar{M}_i \supseteq M_i$ типа G_δ в X и размерности

$$\dim \bar{M}_i = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Множество $\bar{M} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} M_i$ имеет тип G_δ в X, и по теореме 9 $\dim \bar{M} \leqslant n$. Но по теореме 18 из § 8 гл. 4 $\dim \bar{M} \geqslant \dim M = n$, откуда

$$\dim \bar{M} = n = \dim M.$$

В случае $\dim M = \infty$ в качестве множества $\bar{M}$ можно взять все пространство X. Теорема доказана.

Следствие 2 (Катетов [3], Морита [4]). *На любом метризуемом пространстве X можно так ввести метрику, чтобы пополнение $\bar{X}$ пространства X по этой метрике имело размерность*

$$\dim \bar{X} = \dim X.$$

Доказательство. Возьмем пополнение $\bar{X}_1$ пространства X по какой-нибудь метрике на X. По предыдущей теореме существует такое множество $\bar{X} \supseteq X$ типа G_δ в $\bar{X}_1$, что

$\dim \bar{X} = \dim X$. Но множество $\bar{X}$, имея тип G_δ в полном метрическом пространстве, обладает метрикой ρ, относительно которой само является полным пространством *). Метрика ρ будет искомой.

Теорема 15 (Катетов [3], Морита [4]). *Для метрических пространств X и Y имеем неравенство*

$$\dim (X \times Y) \leqslant \dim X + \dim Y.$$

Доказательство. Утверждение верно, если $\dim X = \infty$ или $\dim Y = \infty$. Пусть $\dim X = n < \infty$ и $\dim Y = m < \infty$. По теореме 8 существуют вполне нульмерные отображения $f\colon X \to X'$ и $g\colon Y \to Y'$ пространств X и Y на пространства со счетной базой X' и Y' соответственно, и при этом $\dim X' \leqslant n$, $\dim Y' \leqslant m$. Через $\varphi\colon X \times Y \to X' \times Y'$ обозначим отображение, ставящее в соответствие точке $(x, y) \in X \times Y$ точку $(fx, gy) \in X' \times Y'$. В $X \times Y$ введем метрику, считая

$$\rho^2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [\rho_1^2(x_1, x_2) + \rho_2^2(y_1, y_2)],$$

где ρ_1 и ρ_2 — метрики в X и Y **). Покажем, что относительно метрики ρ отображение φ вполне нульмерно ***).

Возьмем $\varepsilon > 0$ и точку $(x_0', y_0') \in X' \times Y'$. По условию существуют такие окрестности $O = Ox_0'$ и $V = Vy_0'$ точек x_0' и y_0', что прообразы $f^{-1}O$ и $g^{-1}V$ распадаются, соответственно, в дискретные в X и в Y системы открытых множеств O_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и V_β, $\beta \in \mathfrak{B}$, диаметра $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Тогда множество $O \times V$ является окрестностью точки (x_0', y_0') и ее прообраз

$$\varphi^{-1}(O \times V) = f^{-1}O \times g^{-1}V$$

распадается в дискретную в $X \times Y$ систему открытых множеств $O_\alpha \times V_\beta$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, диаметра $< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$. Итак, отображение φ вполне нульмерно.

В силу неравенства (4) из § 8 гл. 4

$$\dim X' \times Y' \leqslant n + m,$$

а по теореме 9

$$\dim X \times Y \leqslant \dim X' \times Y' \leqslant n + m = \dim X + \dim Y,$$

что и требовалось доказать.

---

*) См. Александров [1].

**) Относительно согласованности метрики ρ с топологией произведения $X \times Y$ см. гл. 1, § 8, замечание 2.

***) Непрерывность φ вытекает из п. 2 § 8 гл. 1.

§ 4. Факторизационная теорема для метрических пространств. Универсальные метрические пространства

Факторизационная теорема для метрических пространств (Пасынков [9], [14]). *Пусть f — непрерывное отображение нормального пространства X на метрическое пространство Z* *). *Тогда существует такое метрическое пространство Y и такие непрерывные отображения $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to Z$, что*

(1) $f = hg$,
(2) $\dim Y \leqslant \dim X$,
(3) $wY \leqslant wZ$.

Доказательство. Для $\dim X = \infty$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $\dim X = n < \infty$.

По теореме 8 существует вполне нульмерное отображение $\varphi\colon Z \to T$ пространства Z на пространство со счетной базой T.

По малой факторизационной теореме 1 можно найти такое пространство со счетной базой S размерности $\dim S \leqslant \dim X \leqslant n$ и такие непрерывные отображения $\psi\colon X \to S$ и $\chi\colon S \to T$, что $\varphi f = \chi\psi$. По замечанию к лемме 3 из § 2 Прибавления к гл. 1 определено непрерывное отображение $g\colon X \to Y$ пространства X в веерное произведение Y пространств Z и S относительно отображений φ и χ по правилу $gx = (fx, \varphi x)$, $x \in X$.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "\psi"'] & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "p"] & & T \\
 & & S \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

При этом $f = hg$ и $\psi = pg$, где h и p — проекции веерного произведения Y в сомножители Z и S соответственно.

По лемме 4 из § 3 в Y можно ввести такую метрику, что проекция $p\colon Y \to S$ будет вполне нульмерным отображением. В силу теоремы 9

$$\dim Y \leqslant n = \dim X.$$

Наконец, так как $Y \subseteq Z \times S$, то вес пространства Y не превосходит наибольшего из весов Z и S, т. е. не превосходит веса Z.

Пространство Y и отображения g и h, очевидно, искомые. Теорема доказана.

Перейдем к доказательству существования универсальных метрических пространств данного веса и данной размерности.

*) Вес Z предполагаем бесконечным (в противном случае утверждение теоремы тривиально).

Теорема 16 (Нагата [4]). *Для любой мощности* τ *и любого числа* $n=0, 1, 2, \ldots$ *существует метрическое пространство* $S^{n\tau}$ *веса* τ *и размерности* $\dim S^{n\tau}=n$, *содержащее топологический образ любого метрического пространства* X, *имеющего вес* $wX \leqslant \tau$ *и размерность* $\dim X \leqslant n$.

Доказательство. Класс метрических пространств X веса $\leqslant \tau$ и размерности $\dim X \leqslant n$ можно разбить на подклассы $\alpha \in \mathfrak{A}$ попарно гомеоморфных между собой пространств. Выберем из каждого класса α некоторое пространство X_α и рассмотрим пространство X, являющееся дискретной суммой пространств X_α (см. § 1 гл. 5). Пространство X, очевидно, является метризуемым, и $\dim X = n$.

Так как вес каждого пространства X_α не превосходит τ, то для каждого α определен гомеоморфизм f_α в обобщенное гильбертово пространство R^τ веса τ (см. гл. 1, § 11, теорема 17). Отображение X в R^τ, совпадающее с f_α на каждом X_α, обозначим через f. Очевидно, отображение f непрерывно и является топологическим на каждом множестве X_α. По факторизационной теореме существует такое метрическое пространство $S^{n\tau}$ веса $\leqslant \tau$ и размерности $\dim S^{n\tau} \leqslant n$ и такие отображения $g\colon X \to S^{n\tau}$ и $h\colon S^{n\tau} \to R^\tau$, что $f=hg$. Так как отображение f является топологическим на каждом множестве X_α, то отображение g также будет топологически отображать каждое множество X_α в $S^{n\tau}$. Но это означает, что $S^{n\tau}$ является искомым универсальным пространством. Теорема доказана.

Применение факторизационной теоремы, как мы видим, позволяет дать весьма простое доказательство существования универсального метрического пространства данного веса и данной размерности, однако это доказательство мало говорит о строении самого универсального пространства.

Построение универсальных метрических пространств данного веса и данной размерности можно найти в статьях Нагата [5] и Пасынкова [10], мы же здесь опишем универсальное n-мерное пространство веса τ лишь для сильно метризуемых пространств. В этом случае универсальное пространство имеет совсем простую структуру.

Теорема 17 (Морита [4]). *Любое сильно метризуемое пространство* X *веса* $\leqslant \tau$ *можно топологически отобразить в произведение* $Q^\infty \times B(\tau)$ *гильбертова кирпича* Q^∞ *на обобщенное бэровское пространство* $B(\tau)$ *веса* τ *).

---

*) $B(\tau)$ есть произведение счетной системы пространств, состоящих из τ изолированных точек.

Теорема 18 (Нагата [2]). *Любое сильно метризуемое пространство X веса $\leqslant\tau$ и размерности $\dim X\leqslant n$ можно топологически отобразить в произведение $\Phi^n\times B(\tau)$ универсального n-мерного компакта Φ^n на $B(\tau)$.*

Доказательству теорем 17 и 18 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Сильно метризуемое пространство обладает измельчающейся счетной системой звездно конечных открытых покрытий* *).

Доказательство. Пусть элементы звездно конечных открытых покрытий $\omega_n=\{O_\alpha\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, образуют базу в X.

Через μ_{nk} обозначим систему тех элементов покрытия ω_n, диаметр которых $<\frac{1}{k}$, $k=1, 2, 3, \ldots$ Так как элементы всех покрытий ω_n образуют базу в X, то при фиксированном k множества $\tilde{\mu}_{nk}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, образуют счетное покрытие X. Из совершенной нормальности X вытекает существование таких замкнутых в X множеств F_{nki}, $i=1, 2, 3, \ldots$, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_{nki}=\tilde{\mu}_{nk}$. Обозначим через ω_{nki} покрытие пространства X, состоящее из всех элементов системы μ_{nk} и из множеств $O_\alpha\setminus F_{nki}$ при $O_\alpha\in\omega_n\setminus\mu_{nk}$. Покрытия ω_{nki} звездно конечны, и их счетное число.

Покажем, что система покрытий ω_{nki}, $n=1, 2, 3, \ldots$, $k=1, 2, 3, \ldots$, $i=1, 2, 3, \ldots$, измельчается. Пусть Ox является $\frac{1}{k}$-окрестностью точки $x\in X$. Тогда существуют такие номера n и i, что $x\in F_{nki}$. Из построения покрытий ω_{nki} следует, что $x\in \text{Зв}_{\omega_{nki}}x=\text{Зв}_{\mu_{nk}}x\subseteq Ox$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть система открытых покрытий ω_α, $\alpha\in\mathfrak{A}$, пространства X является измельчающейся, и пусть для каждого α дано непрерывное ω_α-отображение $f_\alpha\colon X\to Y_\alpha$ пространства X на подмножество пространства Y_α. Тогда диагональное произведение $f\colon X\to Y=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}Y_\alpha$ отображений f_α является топологическим отображением.*

Доказательство. Непрерывность отображения f установлена в предложении 7 из § 8 гл. 1. Докажем открытость отображения $f\colon X\to fX$. Возьмем открытое в X множество O и точку $x\in O$. Так как система покрытий ω_α измельчается, то существует такой индекс α_0, для которого $\text{Зв}_{\omega_{\alpha_0}}x\subseteq O$. Но f_{α_0} является ω_{α_0}-отображением. Следовательно, точка $f_{\alpha_0}x$ обладает окрестностью V, прообраз которой $f_{\alpha_0}^{-1}V=U$ содержится в одном из элементов покрытия ω_{α_0}. В то же время $U\ni x$, откуда

*) Верно, очевидно, и обратное утверждение.

$U \subseteq \text{Зв}_{\omega_{\alpha_0}} x \subseteq O$. Так как $f_{\alpha_0} = p_{\alpha_0} f$, где p_{α_0} обозначает проекцию Y на Y_{α_0}, то $fx \in p_{\alpha_0}^{-1} V \cap fX \subseteq fO$. Следовательно, отображение f: $X \to fX$ открыто.

Взаимная однозначность f доказывается так же, как открытость. Действительно, если точки x и x' различны, то для индекса α_0, найденного по множеству $O = X \setminus x'$ так же, как и при доказательстве открытости отображения f: $X \to fX$, будем иметь неравенство $f_{\alpha_0} x \neq f_{\alpha_0} x'$. Но тогда и $fx \neq fx'$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 17.

По лемме 1 в X можно выбрать счетную измельчающуюся систему открытых звездно конечных покрытий ω_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Каждая компонента $\omega_{n\alpha}$ покрытия ω_n является не более чем счетным открытым покрытием своего тела $\tilde{\omega}_{n\alpha}$ (см. гл. 1, § 6, п. 3). Так как пространство X метризуемо, то любое его открытое подмножество корректно. В силу леммы 1 из § 1 существует непрерывное $\omega_{n\alpha}$-отображение $f_{n\alpha}$: $\tilde{\omega}_{n\alpha} \to Q_{n\alpha}^{\infty}$ пространства $\tilde{\omega}_{n\alpha}$ в гильбертов кирпич $Q_{n\alpha}^{\infty}$. Так как при фиксированном номере n система множеств $\tilde{\omega}_{n\alpha}$ дизъюнктна, а сами множества $\tilde{\omega}_{n\alpha}$ открыты в X (см. гл. 1, § 6, п. 3), то множество $\mathfrak{A}_n$ индексов $n\alpha$ имеет мощность $\leqslant \tau = wX$. Следовательно, дискретную сумму гильбертовых кирпичей $Q_{n\alpha}^{\infty}$, $n\alpha \in \mathfrak{A}_n$, можно рассматривать как подпространство произведения $Q_n^{\infty} \times N_n$ гильбертова куба Q_n^{∞} на пространство N_n, состоящее из τ штук изолированных точек. Отображение f_n: $X \to Q_n^{\infty} \times N_n$, совпадающее с $f_{n\alpha}$ на $\tilde{\omega}_{n\alpha}$, очевидно, непрерывно и является ω_n-отображением на множество $f_n X$. Отображения f_n, по лемме 2, определяют гомеоморфизм пространства X в произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (Q_n^{\infty} \times N_n) = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n^{\infty} \times \prod_{n=1}^{\infty} N_n = Q^{\infty} \times B(\tau).$$

Теорема 17 доказана.

Из нее следует, что сильно метризуемые пространства в некотором роде близки к пространствам со счетной базой. Заметим, что произведение $Q^{\infty} \times B(\tau)$ сильно паракомпактно (см. следствие 4 § 8 гл. 1).

Докажем теорему 18.

По теореме 17 пространство X обладает гомеоморфизмом f в произведение $Q^{\infty} \times B(\tau)$. Обозначим проекции этого произведения на сомножители Q^{∞} и $B(\tau)$ через π и p соответственно. По факторизационной теореме 1 для отображения πf: $X \to Q^{\infty}$ существует такое пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \leqslant n$ и такие отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Q^{\infty}$, что $hg = \pi f$.

Отображения $pf\colon X \to B(\tau)$ и $g\colon X \to Y$ определяют непрерывное отображение (диагональное произведение pf и g) $\varphi\colon X \to Y \times B(\tau)$ по правилу $\varphi x = (gx, pfx)$. Отображение $h\colon Y \to Q^\infty$ и тождественное отображение $l\colon B(\tau) \to B(\tau)$ определяют отображение (произведение отображений h и l) $\psi\colon Y \times B(\tau) \to Q^\infty \times B(\tau)$ по правилу $\psi(y, b) = (hy, lb)$, где $y \in Y$, $b \in B(\tau)$. Ясно, что $f = \psi\varphi$. Но так как $f\colon X \to Q^\infty \times B(\tau)$ — топологическое отображение, то топологическим будет и отображение $\varphi\colon X \to Y \times B(\tau)$. Существование универсального n-мерного компакта Φ^n уже установлено в гл. 4. Поэтому можно считать, что $Y \times B(\tau) \subseteq \Phi^n \times B(\tau)$. Теорема 18 доказана.

Из теоремы Нёбелинга — Понтрягина (см. гл. 4, § 4) и из теоремы 18 вытекает

Следствие 1. *Произведение* $(2n+1)$*-мерного куба* Q^{2n+1} *на обобщенное бэровское пространство* $B(\tau)$ *веса* τ *универсально для всех сильно метризуемых пространств* X *веса* $\leqslant \tau$ *и размерности* $\dim X \leqslant n$.

Дадим еще одно применение факторизационной теоремы для метрических пространств, устанавливающее равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ в классе пространств, «похожих» в некотором роде на метрические.

Именно, имеет место

Теорема 19 (Пасынков [8]). *Если нормальное пространство* X *обладает непрерывным замкнутым отображением* $f\colon X \to Y$ *размерности* $\dim f = 0$ *на метрическое пространство* Y, *то* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Следствие 2 (Катетов [1], Зарелуа [2], Пасынков [8]). *Если бикомпакт* X *допускает непрерывное нульмерное отображение* $f\colon X \to Y$ *на компакт* Y, *то*

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Это следствие вытекает из неравенств $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$ для бикомпактов (см. гл. 4, § 8, п. 1) и замкнутости непрерывного отображения бикомпакта в нормальное пространство.

Теорему 19 мы получим как частный случай более общего утверждения, к формулировке и доказательству которого мы и приступим.

Определение 1. Пусть в пространстве X фиксирована система Ω его открытых покрытий. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ назовем *Ω-дискретным отображением*, если отображение f является ω-дискретным отображением для любого покрытия ω из системы Ω (см. определение 1 в § 1).

Очевидно, вполне нульмерные отображения, рассмотренные выше, являются разновидностью Ω-дискретных отображений $\left(\text{при } \Omega = \{\omega_i\},\ \omega_i = \left\{O\left(x, \frac{1}{i}\right) \,\middle|\, x \in X\right\},\ i = 1, 2, 3, \ldots\right)$.

Всюду ниже в этом параграфе, если специально не будет оговорено противное, через Ω мы будем обозначать систему всех конечных открытых покрытий рассматриваемого пространства.

Лемма 3. *Непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ нормального пространства X размерности* $\dim f = 0$ *является Ω-дискретным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\omega = \{O_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, пространства X и точку $y \in fX$. По условию множество $F = f^{-1}y$ имеет размерность $\dim F \leqslant 0$. Поэтому в покрытие $\{O_i \cap F\}$, $i = 1, \ldots, r$, множества F можно вписать конечное замкнутое покрытие $\lambda = \{\Phi_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, кратности $\leqslant 1$. Систему λ можно подобно раздуть до системы открытых в X множеств $U_j \supseteq \Phi_j$, $j = 1, \ldots, s$ (см. гл. 1, § 10). Таким образом, система множеств U_j дизъюнктна. Можно, очевидно, считать, что она вписана в покрытие ω. Возьмем для каждого j такое открытое в X множество V_j, что $\Phi_j \subseteq \subseteq V_j \subseteq [V_j] \subseteq U_j$. Очевидно, система $\{V_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, дискретна и вписана в покрытие ω. В силу замкнутости отображения f и включения $F = \bigcup\limits_{j=1}^{s} \Phi_j \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{s} V_j$ существует такая окрестность W точки y, прообраз $f^{-1}W$ которой содержится в $\bigcup\limits_{j=1}^{s} V_j$. Ясно, что система $\{f^{-1}W \cap V_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, дискретна и вписана в покрытие ω. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на паракомпакт Y является Ω-дискретным отображением, то*

$$\dim X \leqslant \dim Y.$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\dim Y = \infty$. В случае $\dim Y = n < \infty$ доказательство того факта, что в любое конечное открытое покрытие ω пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n + 1$, совпадает с доказательством леммы 4 из § 2 (нужно еще только вспомнить следствие 1 из § 2).

Из лемм 3 и 4 вытекает

Следствие 3. *Для непрерывного замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на паракомпакт Y размерности* $\dim f \leqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\dim X \leqslant \dim Y = \dim Y + \dim f\ ^{*)}.$$

---

*) Общее утверждение будет доказано в гл. 9, § 2.

Лемма 5. *Пусть даны такие отображения $f\colon X\to Z$, $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to Z$ нормальных пространств X и Y, что $f=hg$ и f является Ω-дискретным отображением. Тогда и g будет Ω-дискретным отображением.*

Доказательство. Возьмем покрытие $\omega\in\Omega$ и точку $y\in gX$. По условию точка $z=hy$ имеет окрестность Oz, прообраз $f^{-1}Oz$ которой распадается в дискретную в X систему открытых множеств, вписанную в покрытие ω. Но тогда тем же свойством обладает и прообраз $g^{-1}(h^{-1}Oz)=f^{-1}Oz$ окрестности $h^{-1}Oz$ точки y. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если отображение $f\colon X\to Y$ нормального пространства X является Ω-дискретным отображением, то ограничение $f|_F\colon F\to Y$ отображения f на любое замкнутое подпространство F пространства X также будет Ω-дискретным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\omega=\{O_i\}$, $i=1, 2, \ldots, s$, множества F. Система ω' открытых в X множеств $V_i=X\setminus(F\setminus O_i)$, $i=1, \ldots, s$, образует конечное открытое покрытие пространства X. По условию для любой точки $y\in fF$ существует окрестность Uy, прообраз $f^{-1}Uy$ которой распадается в дискретную в X систему открытых множеств W_α, $\alpha\in\mathfrak{A}$, вписанную в покрытие ω'. Но тогда прообраз $(f|_F)^{-1}Uy$ распадается в дискретную в F систему открытых в F множеств $W_\alpha\cap F$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, вписанную в покрытие ω. Лемма доказана.

Докажем теперь утверждение, частным случаем которого, в силу леммы 3, является теорема 19.

Теорема 19′ (Пасынков [8]). *Если нормальное пространство X обладает Ω-дискретным отображением на метрическое пространство, то*

$$\dim X=\operatorname{Ind} X.$$

Доказательство. В силу неравенства Веденисова $\dim X\leqslant\operatorname{Ind} X$ (см. § 8 гл. 4) достаточно установить неравенство $\dim X\geqslant\operatorname{Ind} X$. Если $\dim X=\infty$, то это так. Пусть $\dim X<\infty$. Если $\dim X=-1$, то и $\operatorname{Ind} X=-1$.

Предположим, что доказываемое неравенство справедливо в случае $\dim X<k$, $k>-1$, и пусть $\dim X=k$.

Рассмотрим два непересекающихся замкнутых в X множества F_0 и F_1. Через f' обозначим непрерывное отображение пространства X в отрезок $Q=[0, 1]$, равное 0 на F_0 и 1 на F_1.

По условию существует непрерывное Ω-дискретное отображение $f''\colon X\to R$ пространства X на метрическое пространство R. Диагональное произведение $f\colon X\to Q\times R$ отображений f' и f'' непрерывно (см. гл. 1, § 8), и при этом $f''=p''f$, где p'' —

проекция произведения $Q \times R$ на сомножитель R. По лемме 5 f является Ω-дискретным отображением.

Произведение $Q \times R$ метризуемо, поэтому из факторизационной теоремы для метрических пространств вытекает существование такого метрического пространства Y и таких непрерывных отображений $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to Q \times R$, что $f = hg$ и $\dim Y \leqslant \dim X = k$. Так как $f'F_0 = 0$, $f'F_1 = 1$ и $f' = p'f = p'hg$, где p' — проекция произведения $Q \times R$ на сомножитель Q, то множества gF_0 и gF_1 содержатся в непересекающихся и замкнутых в Y множествах $\Phi_0 = (p'h)^{-1}(0)$ и $\Phi_1 = (p'h)^{-1}(1)$ соответственно. По теореме 9 имеем $\operatorname{Ind} Y = \dim Y \leqslant k$. Следовательно, между множествами Φ_0 и Φ_1 существует перегородка Φ размерности $\operatorname{Ind} \Phi < k$.

По лемме 5 отображение g Ω-дискретно. Следовательно, по лемме 6 его ограничение $g|_F$ на замкнутое в X множество $F = g^{-1}\Phi$ также будет Ω-дискретным отображением. По лемме 4 $\dim F \leqslant \dim \Phi = \operatorname{Ind} \Phi < k$, и по индуктивному предположению $\operatorname{Ind} F \leqslant \dim F < k$. Так как F есть, очевидно, перегородка между F_0 и F_1 в X, то $\operatorname{Ind} X \leqslant k = \dim X$. Теорема 19′, а с ней и теорема 19 доказаны.

Из теоремы 19′ вытекает

Следствие 4. *Пусть Ω — система всех конечных открытых покрытий нормального пространства X. Если X допускает Ω-дискретное отображение на метрическое пространство, то*

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X.$$

Можно показать (Пасынков [8]), что приведенное следствие останется верным, если под системой Ω понимать произвольную измельчающуюся систему открытых покрытий пространства X *). В частности, неравенство

$$\operatorname{ind} X \leqslant \dim X$$

выполнено для нормального пространства X, обладающего непрерывным замкнутым отображением $f\colon X \to Y$ размерности $\operatorname{ind} f \leqslant 0$ на метрическое пространство Y.

*) Соответствующие отображения совпадают с введенными Зарелуа [2] разбивающими отображениями, так что указанный результат содержится и у Зарелуа [2].

Глава седьмая

НАСЛЕДСТВЕННО НОРМАЛЬНЫЕ И СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Место, занимаемое в общей теории размерности наследственно нормальными пространствами, в значительной степени определяется тем, что именно в этих пространствах и (если не делать специальных оговорок) только в них вместе с размерностью ($\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$) всего пространства X определена и размерность любого подпространства $X_0 \subseteq X$. В связи с этим мы считаем одной из самых основных среди еше не решеиных проблем общей теории размерности следующую, поставленную Э. Чехом, проблему монотонности размерности *):

Проблема. *Пусть X — наследственно нормальное пространство; можно ли утверждать, что для любого подпространства $X_0 \subseteq X$ имеет место неравенство*

$$\dim X_0 \leqslant \dim X?$$

(*Аналогичный вопрос возникает и в применении к* $\operatorname{Ind} X$, Даукер [5] **).)

В связи с этим заметим, что, как показал Даукер [6], в нормальном пространстве X может содержаться такое нормальное подпространство X_0, что $\dim X_0 > \dim X$.

*) Мы говорим, что свойство топологического пространства X, выражаемое числом $I(X)$ (числовой топологический инвариант), удовлетворяет условию полиой монотониости, соответствеино моиотониости относительио даиного класса множеств $X_0 \subseteq X$, если для всех $X_0 \subseteq X$, соответствеино для всех множеств $X_0 \subseteq X$, принадлежащих данному классу, выполиено неравенство $I(X_0) \leqslant I(X)$. Таким образом, проблема Чеха действительно есть проблема монотонности для размериости $\dim X$ в наследствеиио нормальиых пространствах. Мы видели, что малая иидуктивная размерность $\operatorname{ind} X$ обладает свойством полной монотонности, тогда как для $\operatorname{Ind} X$ и $\dim X$ мы можем утверждать лишь монотонность по замкнутым множествам.

**) В самое последиее время В. В. Филиппов доказал, что из отрицательного решения известной проблемы Суслииа (совместимого, как известно, с аксиомами теории множеств) следует отрицательиое решение проблемы Чеха.

Одним из основных результатов в теории размерности наследственно нормальных пространств является формула Урысона — Менгера

$$\dim(P \cup Q) \leqslant \dim P + \dim Q + 1,$$

доказанная Смирновым [2] для любых множеств P, Q наследственно нормального пространства X *).

Этому результату посвящен § 1 настоящей главы.

В § 2 для наследственно нормального пространства X и лежащего в нем замкнутого множества A доказывается теорема:

Если

$$\operatorname{Ind} A \leqslant n, \ \operatorname{Ind}(X \setminus A) \leqslant n, \text{ то } \operatorname{Ind} X \leqslant n.$$

Среди наследственно нормальных пространств важнейший подкласс, все еще содержащий все метризуемые пространства, образуют совершенно нормальные пространства (см. гл. 1, § 5, п. 2).

В различных отделах общей топологии, в частности в теории размерности, совершенно нормальные пространства приобрели первостепенное значение, и им посвящена обширная литература.

Мы занимаемся этими пространствами с точки зрения теории размерности, доказывая (§ 3) в применении к ним теорему монотонности и теорему суммы для большой индуктивной размерности. Результаты этого параграфа принадлежат в основном Чеху и Даукеру.

В § 4 выводятся некоторые следствия из теоремы суммы для большой индуктивной размерности в совершенно нормальных пространствах. В частности, доказывается равенство $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для совершенно нормальных финально компактных X и формула $\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \beta X$ для совершенно нормальных X.

В последнем, пятом параграфе этой главы снова доказывается теорема Катетова, утверждающая равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для всех метрических пространств. Здесь дается доказательство, принадлежащее Даукеру и Гуревичу **).

*) Для пространств со счетной базой формула Урысона — Менгера была доказана в § 7 гл. 4.

**) Доказательство того же равенства $\dim X = \operatorname{Ind} X$ (даже в более широких предположениях) было дано в гл. 6, §§ 3, 4. Однако доказательство Даукера — Гуревича представляется нам интересным потому, что оно дает еще одну очень естественную характеристику размерности метрических пространств при помощи понятия так называемой секвенциальной размерности $\operatorname{ds} X$.

§ 1. Неравенство Урысона — Менгера $\dim(P\cup Q)\leqslant\dim P+\dim Q+1$ для любых множеств P и Q, лежащих в наследственно нормальном пространстве

До конца этого параграфа пространство X предполагается наследственно нормальным.

Лемма 1. *Пусть $M\subseteq X$ и в M даны открытые множества Γ'_1 и Γ'_2, $\Gamma'_1\cap\Gamma'_2=\Lambda$. Тогда существуют такие открытые в X множества Γ_1 и Γ_2, что*

$$\Gamma_1\cap\Gamma_2=\Lambda \quad \textit{и} \quad \Gamma_k\cap M=\Gamma'_k, \qquad k=1,\ 2.$$

Доказательство. Множества Γ'_1 и Γ'_2, очевидно, отделены в X по Хаусдорфу (см. гл. 1, § 1, п. 5). Следовательно (см. гл. 1, § 5, предложение 1), существуют такие открытые в X множества O_k, что

$$O_k\supseteq\Gamma'_k,\quad k=1,\ 2,\quad \text{и}\quad O_1\cap O_2=\Lambda.$$

Берем открытые в X множества V_k под условием

$$V_1\cap M=\Gamma'_1,\qquad V_2\cap M=\Gamma'_2.$$

Множества $\Gamma_1=O_1\cap V_1$, $\Gamma_2=O_2\cap V_2$ являются, очевидно, искомыми. Лемма доказана.

Основная лемма 2 *) (Чех [2]). *Пусть $M\subseteq X$ и*

$$\gamma'=\{\Gamma'_1,\ \ldots,\ \Gamma'_s\},\qquad \Gamma'_1\subseteq M,\ \ldots,\ \Gamma'_s\subseteq M,$$

— произвольная система открытых в M множеств. Тогда система открытых в X множеств

$$\gamma=\{\Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_s\}$$

может быть выбрана так, чтобы системы γ и γ' были подобны между собою (в смысле замечания 2 из § 6 гл. 1) и что $\Gamma'_i=M\cap\Gamma_i$ для любого $i=1,\ \ldots,\ s$.

Доказательство. При $s=1$ лемма, очевидно, верна. Предполагая ее доказанной для $s<n$, докажем её для $s=n>1$. Если $\bigcap\limits_{i=1}^{s}\Gamma'_i\neq\Lambda$, то существование требуемых множеств Γ_i очевидно. Пусть $\bigcap\limits_{i=1}^{s}\Gamma'_i=\Lambda$. По индуктивному предположению

*) Эта лемма выражает не только необходимое, но и достаточное условие для наследственной нормальности пространства X; если X не является наследственно нормальным, то существуют два открыто-замкнутых в своей сумме множества M_1 и M_2, всякие две окрестности которых (в пространстве X) пересекаются

для каждого $k=1, \ldots, s$ существуют такие открытые в X множества Γ_i^k, что

$$\Gamma_i^k \cap M = \Gamma_i', \qquad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad i \neq k,$$

и система $\{\Gamma_i^k\}$ подобна системе $\{\Gamma_i'\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $i \neq k$. Положим $\Gamma' = \bigcap\limits_{i<s} \Gamma_i'$. Согласно лемме 1 существуют такие открытые в X множества G и G_s, что

$$G \cap M = \Gamma', \qquad G_s \cap M = \Gamma_s' \quad \text{и} \quad G \cap G_s = \Lambda.$$

По индуктивному предположению существуют такие открытые в $X^0 = X \setminus G$ множества G_i^0, что

$$G_i^0 \cap (M \setminus G) = \Gamma_i' \setminus G, \ i < s, \quad \text{и} \quad \bigcap_{i<s} G_i^0 = \bigcap_{i<s} (\Gamma_i' \setminus G) = \Lambda.$$

Множества $G_i = G \cup G_i^0$ открыты в X, так как разности

$$X \setminus G_i = X \setminus (G \cup G_i^0) = X^0 \setminus G_i^0$$

замкнуты в X^0, а следовательно и в X, $i < s$. Для множеств G_i имеем

$$G_i \cap M = (G \cup G_i^0) \cap M = (G \cap M) \cup (G_i^0 \cap M) = \Gamma' \cup (G_i^0 \cap (M \setminus G)) =$$
$$= \Gamma' \cup (\Gamma_i' \setminus G) = \Gamma' \cup (\Gamma_i' \setminus \Gamma') = \Gamma' \cup \Gamma_i' = \Gamma_i', \qquad i < s.$$

Кроме того,

$$\bigcap_{i \leqslant s} G_i = G_s \cap \bigcap_{i<s} (G_i^0 \cup G) = G_s \cap G \cap \bigcap_{i<s} G_i^0 = \Lambda.$$

Положим

$$\Gamma_i = G_i \cap \bigcap_{k \neq i} \Gamma_i^k, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Система $\gamma = \{\Gamma_i\}$ $i = 1, \ldots, s$, — искомая. Действительно, соотношения $\Gamma_i \cap M = \Gamma_i'$, $i = 1, \ldots, s$, выполнены. Кроме того,

$$\bigcap_{i=1}^{s} \Gamma_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} G_i = \Lambda.$$

Если же $\bigcap\limits_{j=1}^{r} \Gamma_{i_j}' = \Lambda$ и $r < s$, то существует $k \leqslant s$, отличное от всех i_j, $j = 1, \ldots, r$. Тогда по построению

$$\bigcap_{j=1}^{r} \Gamma_{i_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r} \Gamma_{i_j}^k = \Lambda.$$

Подобие между системами γ и γ' отсюда следует очевидным образом. Лемма доказана.

Из только что доказанной основной леммы вытекает следующая, представляющая и самостоятельный интерес

Теорема 1 (Смирнов [2]). *Пусть множество M лежит в наследственно нормальном пространстве X. Для того чтобы было* $\dim M \leqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы в любую конечную систему*

$$\omega = \{G_1, \ldots, G_s\} \tag{1}$$

открытых в X множеств, покрывающую множество M, можно было (комбинаторно) вписать систему $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ кратности $\leqslant n+1$ открытых в X множеств, также покрывающую множество M.

Доказательство. Необходимость. Система (1) дана. Рассматриваем систему

$$M \cap G_1, \ldots, M \cap G_s.$$

Вписываем в нее (комбинаторно) покрытие

$$\gamma' = \{\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_s\}$$

кратности $\leqslant n+1$ множества M, состоящее из открытых в M множеств $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_s$ (существование такого покрытия γ' следует из предположения $\dim M \leqslant n$ (см. гл. 2, § 2, замечание 1)). В силу основной леммы строим подобную системе γ' систему

$$\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}, \qquad M \cap \Gamma_i = \Gamma'_i,$$

открытых в X множеств; система γ имеет кратность $\leqslant n+1$. Система

$$G_1 \cap \Gamma_1, \ldots, G_s \cap \Gamma_s$$

имеет кратность $\leqslant n+1$, вписана (комбинаторно) в систему ω и покрывает множество M.

Достаточность. Пусть

$$\omega' = \{G'_1, \ldots, G'_s\}, \qquad G'_i \subseteq M,$$

— произвольное открытое покрытие множества M. Берем произвольное открытое в X множество G_i под условием $M \cap G_i = G'_i$ для любого $i = 1, \ldots, s$.

Согласно условию теоремы Смирнова вписываем в систему

$$\omega = \{G_1, \ldots, G_s\},$$

покрывающую множество M, систему $\{\Gamma_i\}$ кратности $\leqslant n+1$ открытых в X множеств. Множества $M \cap \Gamma_i$ образуют вписанное в ω' покрытие кратности $\leqslant n+1$, чем неравенство $\dim M \leqslant n$ доказано.

Доказательство неравенства Урысона — Менгера

$$\dim(P \cup Q) \leqslant \dim P + \dim Q + 1$$

проводится теперь в немногих словах.

Пусть P и Q лежат в наследственно нормальном пространстве X, причем $\dim P = p$, $\dim Q = q$. Требуется доказать, что $\dim(P \cup Q) \leqslant p + q + 1$. Без ограничения общности можно предположить $X = P \cup Q$.

Берем произвольное конечное покрытие

$$\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

пространства X.

В силу теоремы Смирнова в ω можно вписать систему

$$\beta = \{G_1, \ldots, G_k\}$$

открытых в X множеств, покрывающую множество P и имеющую кратность $\leqslant p + 1$.

Точно так же в ω можно вписать систему

$$\gamma = \{H_1, \ldots, H_r\}$$

открытых в X множеств, покрывающую множество Q и имеющую кратность $\leqslant q + 1$.

Система $\beta \cup \gamma$ покрывает все пространство X, имеет, как легко видеть, кратность $\leqslant (p+1) + (q+1) = p + q + 2$ и вписана в (произвольное) покрытие ω. Неравенство $\dim X \leqslant p + q + 1$ этим доказано *).

§ 2. Аддиционная теорема для большой индуктивной размерности

Предметом этого параграфа является доказательство аналога следствия 1 из § 6 гл. 4.

Теорема 2 (Даукер [5]). *Если A замкнуто в наследственно нормальном пространстве X и* $\operatorname{Ind} A \leqslant n$, $\operatorname{Ind}(X \setminus A) \leqslant n$, *то и* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Эта теорема легко выводится из следующего предложения:

Теорема 3 (аддиционная теорема Даукера [5]). *Пусть наследственно нормальное пространство X есть сумма счетного числа дизъюнктных множеств D_i:*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$$

*) В случае произвольных нормальных пространств неравенство Урысона — Менгера установлено Зарелуа [2].

обладающих тем свойством, что все «частные суммы» $F_i = \bigcup\limits_{k \leqslant i} D_k$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *замкнуты в* X. *Если при этом* $\operatorname{Ind} D_i \leqslant n$ *для всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$, *то и*

$$\operatorname{Ind} X \leqslant n.$$

Этой теореме равносильна

Теорема 3′. *Пусть* X_i *для всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$ — *открытые множества в наследственно нормальном пространстве* X, *причем* $X_i \supseteq X_{i+1}$, $X_1 = X$ *и* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i = \Lambda$. *Если для всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\operatorname{Ind}(X_i \setminus X_{i+1}) \leqslant n,$$

то и $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Для того чтобы перейти от теоремы 3 к теореме 3′, достаточно положить $X_i = X \setminus \bigcup\limits_{k<i} D_k$; обратно, для того чтобы перейти от теоремы 3′ к теореме 3, достаточно положить $D_i = X_i \setminus X_{i+1}$.

Итак, докажем теорему 3′. При $n = -1$ она, очевидно, верна. Предполагая ее верной для $-1, 0, 1, \ldots, n-1$, докажем теорему 3′ для n.

Нам нужно для любых двух дизъюнктных замкнутых в X множеств A и B построить перегородку C между ними, размерность которой $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$. Так как X нормально, то существуют окрестности $U_0 = OA$, $V_0 = OB$ с непересекающимися замыканиями

$$[U_0] \cap [V_0] = \Lambda.$$

Полагаем (как уже говорилось только что выше)

$$D_i = X_i \setminus X_{i+1}.$$

Построим прежде всего тройку дизъюнктных множеств (U_1, C_1, V_1), в которой U_1 и V_1 открыты (в $X_1 = X$), $C_1 \subseteq D_1$ замкнуто в D_1, $\operatorname{Ind} C_1 \leqslant n-1$ и выполнены условия

$$D_1 \subseteq U_1 \cup C_1 \cup V_1, \quad [U_0] \subseteq U_1, \quad [V_0] \subseteq V_1, \quad [U_1] \cap [V_1] \cap X_2 = \Lambda.$$

Множества $[U_0] \cap D_1$ и $[V_0] \cap D_1$ дизъюнктны и замкнуты в D_1. Так как $\operatorname{Ind} D_1 \leqslant n$, то между $[U_0] \cap D_1$ и $[V_0] \cap D_1$ существует в D_1 перегородка C_1 размерности $\operatorname{Ind} C_1 \leqslant n-1$; следовательно, существуют такие дизъюнктные открытые в D_1 множества G_1 и H_1, что

$$D_1 = G_1 \cup C_1 \cup H_1, \qquad [U_0] \cap D_1 \subseteq G_1, \qquad [V_0] \cap D_1 \subseteq H_1,$$
$$C_1 = D_1 \setminus (G_1 \cup H_1).$$

Множество C_1 замкнуто в $D_1 = X_1 \setminus X_2$, т. е. замкнуто в X_1 (так что $X_1 \setminus C_1$ открыто в $X_1 = X$).

Множества G_1 и H_1 замкнуты в $D_1 \setminus C_1$, а так как $D_1 = X_1 \setminus X_2$ замкнуто в X_1, то G_1 и H_1 замкнуты в $X_1 \setminus C_1$. Поэтому замкнутыми в $X_1 \setminus C_1$ являются и множества

$$A_1 = ([U_0] \cup G_1) \cap (X_1 \setminus C_1), \quad B_1 = ([V_0] \cup H_1) \cap (X_1 \setminus C_1).$$

Множества A_1 и B_1 дизъюнктны. В самом деле, $[U_0] \cap [V_0] = \Lambda$ по построению; так как $H_1 \subseteq D_1$, то

$$[U_0] \cap H_1 = ([U_0] \cap D_1) \cap H_1 \subseteq G_1 \cap H_1 = \Lambda.$$

По той же причине $[V_0] \cap G_1 = \Lambda$. Следовательно, и $A_1 \cap B_1 = \Lambda$. В силу наследственной нормальности пространства X пространство $X_1 \setminus C_1$ нормально; значит, замкнутые множества A_1 и B_1 пространства $X_1 \setminus C_1$ имеют в $X_1 \setminus C_1$ окрестности U_1 и V_1, замыкания которых (в $X_1 \setminus C_1$) дизъюнктны, т. е.

$$[U_1] \cap [V_1] \cap (X_1 \setminus C_1) = \Lambda, \quad \text{или} \quad [U_1]_X \cap [V_1]_X \subseteq C_1.$$

Так как $C_1 \subseteq D_1 = X_1 \setminus X_2$, то это значит, что

$$[U_1]_X \cap [V_1]_X \cap X_2 = \Lambda.$$

Множества U_1, V_1 открыты в $X_1 \setminus C_1$, значит, открыты и в X.

Далее, $D_1 = G_1 \cup C_1 \cup H_1$, $G_1 \subseteq A_1 \subseteq U_1$, $H_1 \subseteq B_1 \subseteq V_1$, так что

$$D_1 \subseteq U_1 \cup C_1 \cup V_1.$$

Докажем, наконец, что

$$[U_0] \subseteq U_1, \quad [V_0] \subseteq V_1.$$

Так как $[U_0] \cap D_1 \subseteq G_1$, то $[U_0] \cap C_1 = \Lambda$, т. е.

$$[U_0] = [U_0] \cap (X \setminus C_1) \subseteq A_1 \subseteq U_1.$$

Точно так же $[V_0] \subseteq B_1 \subseteq V_1$.

Итак, для $i = 1$ мы построили тройку дизъюнктных множеств

$$(U_i, C_i, V_i),$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1°_i. U_i и V_i лежат в X_i и открыты в X;

2°_i. C_i лежит в $D_i = X_i \setminus X_{i+1}$ и замкнуто в D_i;

3°_i. $D_i \subseteq U_i \cup C_i \cup V_i$;

4°_i. $[U_i] \cap [V_i] \cap X_{i+1} = \Lambda$;

5°_i. $[U_{i-1}] \cap X_i \subseteq U_i$, $[V_{i-1}] \cap X_i \subseteq V_i$;

6°_i. $\operatorname{Ind} C_i \leqslant n - 1$.

Предполагая, что такая тройка построена для $1, \ldots, i-1$, построим ее для i. Построение будет почти дословным повторением рассуждений, сделанных в случае $i = 1$.

Условие 4°_{i-1} гласит:

$$[U_{i-1}] \cap [V_{i-1}] \cap X_i = \Lambda;$$

так как $D_i \subseteq X_i$, то отсюда следует, что множества $[U_{i-1}] \cap D_i$ и $[V_{i-1}] \cap D_i$ дизъюнктны. Они замкнуты в D_i, и по предположению $\operatorname{Ind} D_i \leqslant n$. Значит, в D_i между $[U_{i-1}] \cap D_i$ и $[V_{i-1}] \cap D_i$ существует перегородка C_i размерности $\operatorname{Ind} C_i \leqslant n-1$. Этой перегородке соответствуют дизъюнктные множества G_i, H_i, открытые в D_i, так что

$$D_i = G_i \cup C_i \cup H_i, \quad [U_{i-1}] \cap D_i \subseteq G_i, \quad [V_{i-1}] \cap D_i \subseteq H_i.$$

Так как $C_i = D_i \setminus (G_i \cup H_i)$ замкнуто в $D_i = X_i \setminus X_{i+1}$, которое в свою очередь замкнуто в X_i, то C_i замкнуто в X_i, так что $X_i \setminus C_i$ открыто в X_i и, значит, открыто в X.

Множества G_i и H_i замкнуты в $D_i \setminus C_i$ и, следовательно, замкнуты в $X_i \setminus C_i$. Поэтому замкнутыми в $X_i \setminus C_i$ будут и множества

$$A_i = ([U_{i-1}] \cup G_i) \cap (X_i \setminus C_i) = ([U_{i-1}] \cap (X_i \setminus C_i)) \cup G_i,$$
$$B_i = ([V_{i-1}] \cup H_i) \cap (X_i \setminus C_i) = ([V_{i-1}] \cap (X_i \setminus C_i)) \cup H_i.$$

Докажем, что они дизъюнктны. Это вытекает из соотношений

$$[U_{i-1}] \cap [V_{i-1}] \cap (X_i \setminus C_i) \subseteq [U_{i-1}] \cap [V_{i-1}] \cap X_i = \Lambda$$

и

$$[U_{i-1}] \cap H_i = ([U_{i-1}] \cap D_i) \cap H_i \subseteq G_i \cap H_i = \Lambda,$$
$$[V_{i-1}] \cap G_i = ([V_{i-1}] \cap D_i) \cap G_i \subseteq H_i \cap G_i = \Lambda.$$

Дизъюнктные замкнутые в $X_i \setminus C_i$ множества A_i, B_i имеют в $X_i \setminus C_i$ окрестности U_i и V_i, которые не только сами дизъюнктны, но имеют в $X_i \setminus C_i$ непересекающиеся замыкания. Другими словами,

$$A_i \subseteq U_i, \quad B_i \subseteq V_i, \quad [U_i] \cap [V_i] \cap (X_i \setminus C_i) = \Lambda,$$

или $[U_i]_{X_i} \cap [V_i]_{X_i} \subseteq C_i$. Так как $C_i \subseteq D_i = X_i \setminus X_{i+1}$, то имеет место

$$[U_i]_X \cap [V_i]_X \cap X_{i+1} = \Lambda.$$

Кроме того, множества U_i и V_i, будучи открытыми в $X_i \setminus C_i$, будут открыты и в X, так как $X_i \setminus C_i$ открыто в X. Итак, условия 1°_i, 2°_i, 4°_i и 6°_i выполнены.

Далее,

$$D_i = G_i \cup C_i \cup H_i, \quad G_i \subseteq A_i \subseteq U_i, \quad H_i \subseteq B_i \subseteq V_i,$$

так что

$$D_i \subseteq U_i \cup C_i \cup V_i$$

— выполнено и условие 3°_i.

Остается 5_i°.

Но $[U_{i-1}]\cap D_i\subseteq G_i$, значит, $[U_{i-1}]\cap C_i=\Lambda$, т. е.

$$[U_{i-1}]\cap X_i=[U_{i-1}]\cap(X_i\setminus C_i)\subseteq A_i\subseteq U_i.$$

Аналогично $[V_{i-1}]\cap X_i\subseteq B_i\subseteq V_i$.

Итак, мы шаг за шагом строим тройки (U_i, C_i, V_i), удовлетворяющие всем условиям $1_i^\circ-6_i^\circ$.

Теперь полагаем $C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ и доказываем, что C имеет размерность $\operatorname{Ind} C\leqslant n-1$.

Полагаем для любого $i=1, 2, 3, \ldots$

$$Z_i=\bigcup_{j=i}^{\infty} C_j,$$

так что, в частности, $Z_1=C$. Так как множества D_i дизъюнктны, $X_i=\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} D_j$, $C_i\subseteq D_i$, то дизъюнктны множества $C\cap D_i=C_i$ и $C\cap X_i=Z_i$. Поэтому Z_i открыто в C; кроме того, $Z_i\supseteq Z_{i+1}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Z_i\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i=\Lambda$. Наконец,

$$C_i=Z_i\setminus Z_{i+1}\quad \text{и}\quad \operatorname{Ind}(Z_i\setminus Z_{i+1})=\operatorname{Ind} C_i\leqslant n-1.$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 3′ для $n-1$; но в этих условиях мы предполагаем ее доказанной, так что $\operatorname{Ind} C\leqslant n-1$.

Доказываем теперь, что C содержит перегородку между A и B. Для этого полагаем $U=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, $V=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$. Множества U и V, как суммы открытых в X множеств, открыты в X. Из условия 5_i° следует, что

$$A\subseteq U_0\subseteq U\quad \text{и}\quad B\subseteq V_0\subseteq V.$$

Равенство $X=U\cup C\cup V$ следует из того, что

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,\qquad D_i=U_i\cup C_i\cup V_i,\qquad U=\bigcup_i U_i,$$

$$C=\bigcup_i C_i,\qquad V=\bigcup_i V_i.$$

Докажем, что множества U и V дизъюнктны. Для этого достаточно доказать, что при $i\leqslant j$ имеем

$$U_i\cap V_j=V_i\cap U_j=\Lambda.$$

Прежде всего заметим, что при $i \leqslant j$

$$U_i \cap V_j \subseteq U_i \cap X_j \subseteq (U_i \cap X_{i+1}) \cap X_j \subseteq U_{i+1} \cap X_j$$

и, значит (пересекаем обе части неравенства с V_j),

$$U_i \cap V_j \subseteq U_{i+1} \cap V_j.$$

Продолжая это рассуждение, получим

$$U_i \cap V_j \subseteq U_j \cap V_j = \Lambda.$$

Точно так же доказываем, что $V_i \cap U_j = \Lambda$ и, значит, $U \cap V = \Lambda$. Следовательно, множество $F = X \setminus (U \cup V)$ есть перегородка в X между A и B. Так как $F \subseteq C$ и множество F замкнуто в X, а следовательно и в C, то $\operatorname{Ind} F \leqslant \operatorname{Ind} C \leqslant n-1$.

Теоремы 3 и 3′ доказаны.

Теорема 2 — простое следствие теоремы 3′. В самом деле, полагаем $X_1 = X$, $X_2 = X \setminus A$, $X_3 = X_4 = \ldots = \Lambda$. Тогда условия теоремы 3′ выполнены и $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

§ 3. Теорема монотонности и теорема суммы для большой индуктивной размерности в совершенно нормальных пространствах

Начнем со следующего усиления понятия монотонности: скажем, что *числовой инвариант $I(X)$ обладает в данном пространстве X свойством наследственной монотонности* или, короче, свойством (M), если выполнено следующее условие:

(M) Каковы бы ни были множества $X_0 \subseteq X$ и $E \subseteq X_0$, имеем

$$I(E) \leqslant I(X_0).$$

Если в формулировке этого условия ограничиться лишь открытыми в X_0 множествами E (сохраняя предположение, что X_0 — любое подпространство пространства X), то скажем, что *X обладает свойством наследственной монотонности по открытым множествам* — свойством (M_0). Очевидно, условие (M) обеспечивает полную монотонность инварианта I.

Мы скажем, далее, что *инвариант I в данном пространстве X наследственно удовлетворяет теореме суммы*, если выполнено условие:

(Σ) Каковы бы ни были подпространство $X_0 \subseteq X$ и замкнутые в X_0 множества A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, такие, что $X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, всегда

$$I(X_0) = \sup_i I(A_i).$$

В качестве примера можно напомнить, что размерность $\operatorname{ind} X$ монотонна в любом топологическом пространстве, что даже в нормальном пространстве X размерности $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ могут не быть монотонными даже по открытым множествам. С другой стороны, размерность $\dim X$ наследственно удовлетворяет теореме суммы в любом наследственно нормальном X, тогда как $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ могут не удовлетворять этой теореме даже для двух слагаемых и даже в бикомпакте X (см. гл. 5, § 6).

В основе всех результатов этого параграфа лежит

Теорема 4 (редукционная теорема Даукера [5]). *Если в данном наследственно нормальном пространстве X размерность $\operatorname{Ind} X$ наследственно монотонна по открытым множествам, то она обладает свойством наследственной монотонности и наследственно удовлетворяет теореме суммы. В этом случае оказывается выполненным еще и следующее условие*:

(C^n) *Если X_0 — какое-нибудь подпространство пространства X, причем $X_0 = A \cup B$, A замкнуто в X_0 и $\operatorname{Ind} A \leqslant n$, $\operatorname{Ind} B \leqslant n$, то и $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$.*

Доказательство. Наряду с условиями (M), (M_0) для $I(X) = \operatorname{Ind} X$ и (C^n) введем еще условия:

(M^n) для любого $X_0 \subseteq X$ размерности $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$ и любого $E \subseteq X_0$ имеем $\operatorname{Ind} E \leqslant n$;

(M_0^n) для любого $X_0 \subseteq X$ размерности $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$ и любого открытого в X_0 множества E имеем $\operatorname{Ind} E \leqslant n$;

(Σ^n) если какое-нибудь $X_0 \subseteq X$ представлено в виде $X_0 = \bigcup_i A_i$, где все A_i замкнуты в X_0 и $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$ для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$, то и $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$.

Так как условие (M_0^n), по предположению теоремы, выполнено для любого $n = -1, 0, 1, \ldots$, а при $n = -1$ условия (M^n), (Σ^n), (C^n) также, очевидно, выполнены, то теорема 4 будет доказана, если мы докажем следующие предложения:

I. Если в пространстве X выполнены условия (M_0^n) и (M^{n-1}), то выполнено и условие (M^n).

II. Из условия (M_0^n) следует как условие (Σ^n), так и условие (C^n), $n = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство предложения I. Итак, условия (M^{n-1}) и (M_0^n) выполнены в пространстве X. Докажем, что выполнено и условие (M^n).

Берем произвольное $X_0 \subseteq X$ размерности $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$ и в пространстве X_0 произвольное $E \subseteq X_0$.

Требуется доказать, что и $\operatorname{Ind} E \leqslant n$. Пусть $A \subset E$ — произвольное множество, замкнутое в E; берем какую-нибудь окрестность G этого множества в E; требуется найти окрестность U

множества A в E, лежащую в G и имеющую в E границу размерности $\operatorname{Ind} \mathrm{гр}_E U \leqslant n-1$. Берем в X_0 замкнутое A_1 и открытое G_1 под условием

$$E \cap A_1 = A, \qquad E \cap G_1 = G.$$

Полагаем

$$H = (X_0 \setminus A_1) \cup G_1.$$

Очевидно, H открыто в X_0 и

$$H \supseteq H \cap E = (E \setminus A) \cup G = E.$$

Так как по предположению $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$, множество $H \subseteq X_0$ открыто в X_0 и условие (M_0^n) выполнено, то

$$\operatorname{Ind} H \leqslant n.$$

Множество $H \cap A_1$ замкнуто в H; множество G_1 открыто в H, так как оно открыто в X_0. Поэтому существует окрестность $U_1 \subseteq G_1$ множества $H \cap A_1$ в H, для которой

$$\operatorname{Ind} \mathrm{гр}_H U_1 \leqslant n-1.$$

Полагаем $U = E \cap U_1$. Тогда $A = E \cap A_1 \subseteq H \cap A_1 \subseteq U_1$, $A \subseteq E$; значит, $A \subseteq E \cap U_1 = U \subseteq E \cap G_1 = G$ и

$$\mathrm{гр}_E U = [U]_E \cap (E \setminus U) = ([U]_E \cap E) \setminus (U_1 \cap E) \subseteq$$
$$\subseteq ([U_1]_H \cap E) \setminus (U_1 \cap E) = ([U_1]_H \setminus U_1) \cap E = \mathrm{гр}_H U_1 \cap E,$$

т. е. $\mathrm{гр}_E U \subseteq \mathrm{гр}_H U_1$. Значит (так как условие (M^{n-1}) предположено выполненным и $\operatorname{Ind} \mathrm{гр}_H U_1 \leqslant n-1$), $\operatorname{Ind} \mathrm{гр}_E U \leqslant n-1$, чем предложение I доказано.

Переходим к доказательству предложения II. Итак, наследственно нормальное пространство X удовлетворяет условию (M_0^n); доказываем, что оно удовлетворяет и условию (Σ^n).

Итак, пусть $X_0 \subseteq X$, $X_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, причем все A_i замкнуты в X_0 и $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$ для всех $i = 1, 2, 3, \ldots$ Надо доказать, что $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$.

Полагаем $D_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} A_j$.

Множества D_i дизъюнктны, их частичные суммы $\bigcup\limits_{i \leqslant j} D_i = \bigcup\limits_{i \leqslant j} A_i$ замкнуты в X_0, и $X_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Так как множество D_i открыто в A_i, то в силу условия (M_0^n) имеем $\operatorname{Ind} D_i \leqslant n$, и мы находимся в условиях аддиционной теоремы Даукера, так что $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$, чем первое утверждение предложения II доказано.

Доказываем второе утверждение предложения II. Наследственно нормальное X удовлетворяет условию (M_0^n). Дано $X_0 \subseteq X$, $X_0 = A \cup B$, $\operatorname{Ind} A \leqslant n$, $\operatorname{Ind} B \leqslant n$, причем A замкнуто в X_0, значит, $X_0 \setminus A$ открыто в X_0 и тем более открыто в B. В силу условия (M_0^n) имеем $\operatorname{Ind}(X_0 \setminus A) \leqslant \operatorname{Ind} B \leqslant n$. Мы находимся в условиях следствия даукеровской аддиционной теоремы, откуда и вытекает, что $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$.

Редукционная теорема полностью доказана.

Переходим к доказательству основных результатов этого параграфа.

Теорема 5 (теорема монотонности, Чех [1]). *Если X — совершенно нормальное пространство и $E \subseteq X$ — произвольное множество, лежащее в X, то* $\operatorname{Ind} E \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Теорема 6 (теорема суммы, Чех [1]). *Если X — совершенно нормальное пространство и* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *где A_i — замкнутые множества,* $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$, *то и* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Наконец,

Теорема 7 (Чех [1]). *Если совершенно нормальное пространство X есть сумма двух множеств A и B, из которых одно замкнуто и* $\operatorname{Ind} A \leqslant n$, $\operatorname{Ind} B \leqslant n$, *то и* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Прежде всего будет доказана

Основная лемма Даукера. *Пусть X — нормальное пространство, удовлетворяющее условию (Σ^{n-1}). Пусть в X даны две последовательности замкнутых множеств: A_i и Φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, такие, что* $\Phi_i \subseteq \langle A_i \rangle$, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$, $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$ *для всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда и* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Доказательство. Пусть F — произвольное замкнутое множество в X, OF — его произвольная окрестность. Требуется найти лежащую в OF окрестность U множества F, для которой $\operatorname{Ind} \operatorname{rp} U \leqslant n - 1$.

Так как X нормально, то существует замкнутое G_δ-множество C, содержащее множество F и лежащее в OF, так что

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i,$$

где W_i — открытые множества, которые можно выбрать так, что $[W_{i+1}] \subseteq W_i \subseteq OF$ при любом i.

Множества $\Phi_i \cap C$ замкнуты, причем

$$\Phi_i \cap C \subseteq \langle A_i \rangle \cap W_i \subseteq A_i.$$

Так как $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$, то существует такая окрестность U_i множества $\Phi_i \cap C$ в A_i, что

$$(\Phi_i \cap C) \subseteq U_i \subseteq \langle A_i \rangle \cap W_i, \quad \operatorname{Ind} \operatorname{гр}_{A_i} U_i \leqslant n-1.$$

Так как множество U_i лежит в $\langle A_i \rangle$ и открыто в A_i, то оно открыто в X и его граница в (замкнутом) A_i совпадает с его границей в X. Итак,

$$\operatorname{Ind} \operatorname{гр}_X U_i \leqslant n-1.$$

Положим

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Очевидно, U открыто в X и

$$F \subseteq C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Phi_i \cap C) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = U \subseteq OF,$$

так что U есть окрестность множества F в пространстве X, лежащая в OF. Остается доказать, что $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} U \leqslant n-1$. Докажем сначала, что

$$\operatorname{гр} U \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} U_i.$$

Так как $C \subseteq U$, то точка $x_0 \in \operatorname{гр} U$ не может принадлежать множеству C и, следовательно, может принадлежать лишь конечному числу убывающих замкнутых множеств $[W_i]$ (пересечение которых есть C). Пусть k таково, что $x_0 \in X \setminus [W_k]$. В произвольной окрестности $Ox_0 \subseteq X \setminus [W_k]$ точки x_0 лежат точки U, и эти точки могут принадлежать лишь множествам U_i с $i < k$; отсюда сразу следует, что $x_0 \in [U_i]$ для некоторого $i < k$, и, значит (так как $x_0 \notin U_i$), непременно $x_0 \in \operatorname{гр} [U_i]$.

Итак, $\operatorname{гр} U \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} U_i$.

Но $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} U_i \leqslant n-1$ для всех i и условие (Σ^{n-1}) выполнено, значит, $\operatorname{Ind} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} U_i \leqslant n-1$. Множество $\operatorname{гр} U$ лежит в $\bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} U_i$ и замкнуто, значит, и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} U \leqslant n-1$, чем основная лемма доказана.

Так как условие (Σ^{-1}) выполнено во всяком пространстве, то, в силу редукционной теоремы Даукера, для доказательства теорем 5, 6, 7 достаточно доказать, что во всяком совершенно нормальном пространстве X из условия (Σ^{n-1}) следует условие (M_0^n) для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть X — совершенно нормальное (значит, и наследственно нормальное) пространство, удовлетворяющее условию (Σ^{n-1}). Пусть X_0 — произвольное подпространство пространства X, для которого $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$ и Γ открыто в X_0. Требуется доказать, что $\operatorname{Ind} \Gamma \leqslant n$.

Так как X_0 совершенно нормально (см. гл. 1, § 5, предложение 4), то $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i$, где все $\Phi_i \subseteq \Gamma$ замкнуты в X_0 (значит, тем более в Γ). Так как X_0 нормально, то существуют такие открытые V_i, что

$$\Phi_i \subseteq V_i \subseteq [V_i]_{X_0} = A_i \subseteq \Gamma.$$

Так как A_i замкнуто в X_0 и $\operatorname{Ind} X_0 \leqslant n$, то и $\operatorname{Ind} A_i \leqslant n$ и, очевидно, $\Phi_i \subseteq \langle A_i \rangle_{X_0}$.

Мы находимся в условиях основной леммы (в которой надо положить $X = \Gamma$), откуда $\operatorname{Ind} \Gamma \leqslant n$, чем все доказано.

Замечание 1. Теоремы 5, 6, 7 имеют место, в частности, для всех метризуемых пространств; это обстоятельство (точнее, теорема суммы для размерности Ind метризуемых пространств) существенно понадобится нам в следующем параграфе при доказательстве равенства $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метризуемых пространств.

Замечание 2. Теоремы 5, 6, 7 доказаны Даукером [5] для более широкого класса пространств, чем совершенно нормальные, а именно для всех нормальных пространств X, удовлетворяющих следующему условию:

(TN) Каждое открытое множество $\Gamma \subseteq X$ имеет локально конечное покрытие, элементами которого являются корректные открытые множества (пространства X) *).

§ 4. Некоторые следствия из теоремы суммы для большой индуктивной размерности в совершенно нормальных пространствах

Теорема 8 (Веденисов [1]). *Если пространство X совершенно нормально и финально компактно, то*

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Доказательство. Утверждение верно для $\operatorname{ind} X = -1$. Пусть оно верно в случае $\operatorname{ind} X < n$, и пусть $\operatorname{ind} X = n$. Так как всегда $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$, то надо показать только, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

---

*) Условию (TN) удовлетворяют, в частности, все наследственно паракомпактные пространства.

Рассмотрим в X дизъюнктную пару замкнутых множеств F_1 и F_2. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую окрестность Ox, что ее замыкание $[Ox]$ пересекается не более чем с одним из множеств F_1, F_2 и $\operatorname{ind}\operatorname{гр} Ox < n$.

Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in X$, пространства X выделим счетное подпокрытие $\{O_i = Ox_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ По индуктивному предположению

$$\operatorname{Ind}\operatorname{гр} O_i = \operatorname{ind}\operatorname{гр} O_i < n, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

В силу нормализующей леммы и добавления к ней (гл. 1, § 5, лемма 2) между F_1 и F_2 существует перегородка

$$\Phi \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} O_i.$$

По теореме суммы (теорема 6 из § 3)

$$\operatorname{Ind} \Phi \leqslant \operatorname{Ind} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{гр} O_i < n.$$

Следовательно, $\operatorname{Ind} X \leqslant n$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ совершенно нормального бикомпакта X на бикомпакт Y нульмерно* (*т. е.* $\dim f \leqslant 0$), *то*

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} Y.$$

Так как замкнутый образ совершенно нормального пространства совершенно нормален (гл. 1, § 5, предложение 5), то утверждение теоремы 9 вытекает из теоремы 8 и следующего предложения:

Предложение 1. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ бикомпакта X в бикомпакт Y нульмерно* (*т. е.* $\dim f \leqslant 0$ *или, что то же,* $\operatorname{ind} f \leqslant 0$ *)), *то*

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{ind} Y.$$

Доказательство. Утверждение очевидно в случае $\operatorname{ind} Y = -1$. Предположим, что оно верно в случае $\operatorname{ind} Y < k$, и пусть $\operatorname{ind} Y = k$, $k \geqslant 0$.

Возьмем точку $x \in X$ и ее окрестность Ox. По условию для бикомпакта $F = f^{-1}fx$ справедливо соотношение

$$\operatorname{ind} F = \dim F \leqslant 0.$$

Выберем такую открыто-замкнутую в F окрестность V_1' точки x в F, что

$$V_1' \subseteq Ox.$$

*) См. гл. 2, § 3, теорема 3.

Множества V_1' и $V_2' = F \setminus V_1'$ замкнуты в X и дизъюнктны. Поэтому они обладают в X дизъюнктными окрестностями $V_1 \supseteq V_1'$ и $V_2 \supseteq V_2'$. Можно, очевидно, считать

$$V_1 \subseteq Ox.$$

Множество $V = V_1 \cup V_2$ является окрестностью множества $F = f^{-1}fx$, поэтому (см. гл. 1, § 1, предложение 11) существует такая окрестность U точки fx в Y, что

$$f^{-1}U \subseteq V.$$

В силу равенства $\operatorname{ind} Y = k$ можно считать

$$\operatorname{ind} \operatorname{rp} U < k.$$

Из непрерывности f следует, что

$$f \operatorname{rp} f^{-1}U \subseteq \operatorname{rp} U.$$

Но тогда из индуктивного предположения вытекает неравенство

$$\operatorname{ind} \operatorname{rp} f^{-1}U \leqslant \operatorname{ind} \operatorname{rp} U < k.$$

Множества $W_i = f^{-1}U \cap V_i$, $i = 1, 2$, открыты, дизъюнктны и

$$f^{-1}U = W_1 \cup W_2.$$

Поэтому

$$\operatorname{rp} W_1 \subseteq \operatorname{rp} f^{-1}U \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} \operatorname{rp} W_1 \leqslant \operatorname{ind} \operatorname{rp} f^{-1}U < k.$$

Так как, очевидно, $x \in W_1 \subseteq V_1 \subseteq Ox$, то

$$\operatorname{ind} X \leqslant k = \operatorname{ind} Y.$$

Предложение доказано.

Как и в случае размерности $\dim X$, понятие размерности $\operatorname{Ind} X$ можно локализовать следующим образом.

Будем писать для точки $x \in X$

$$\operatorname{Ind}_x X \leqslant n,$$

если точка x обладает такой окрестностью Ox, для которой

$$\operatorname{Ind}[Ox] \leqslant n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

Полагаем

$$\operatorname{loc} \operatorname{Ind} X = \sup_{x \in X} \operatorname{Ind}_x X.$$

Теорема 10 (Даукер [6]). *Если паракомпакт X совершенно нормален, то*

$$\operatorname{Ind} X = \operatorname{loc} \operatorname{Ind} X.$$

Доказательство. Неравенство

$$\operatorname{Ind} X \geqslant \operatorname{loc} \operatorname{Ind} X$$

очевидно. Установим неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{loc} \operatorname{Ind} X$. Его достаточно доказать лишь в случае $\operatorname{loc} \operatorname{Ind} X < \infty$. Итак, пусть $\operatorname{loc} \operatorname{Ind} X = n < \infty$.

Для каждой точки $x \in X$ выберем окрестность Ox так, что

$$\operatorname{Ind} [Ox] \leqslant n.$$

В покрытие $\{Ox\}$, $x \in X$, паракомпакта X впишем (см. гл. 1, § 10, п. 4, предложение 9) замкнутое σ-дискретное покрытие ν, распадающееся в сумму дискретных систем $\nu_i = \{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как каждое множество F_α содержится в одном из замыканий $[Ox]$, то $\operatorname{Ind} F_\alpha \leqslant n$, а так как каждая система ν_i дискретна, то и $\operatorname{Ind} \tilde{\nu}_i \leqslant n$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Но тогда, по теореме 6 из § 3,

$$\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\nu}_i = \sup_i \operatorname{Ind} \tilde{\nu}_i \leqslant n.$$

Теорема доказана.

Введем понятие относительной большой индуктивной размерности.

Для подмножества A нормального пространства X будем считать $\operatorname{rI}_X A = \sup \{\operatorname{Ind} F \mid F \subseteq A,\ F \text{ замкнуто в } X\}$. Из теоремы 10 вытекает следующее утверждение, аналогичное теореме 15 из § 6 гл. 4:

Теорема 11 (Чех [1]). *Если пространство X совершенно нормально, F — его замкнутое подпространство и* $\operatorname{Ind} F \leqslant n$, $\operatorname{rI}_X (X \setminus F) \leqslant n$, *то*

$$\operatorname{Ind} X \leqslant n.$$

Доказательство. Представим разность $X \setminus F$ в виде счетной суммы замкнутых в X множеств Φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда, по условию,

$$\operatorname{Ind} \Phi_i \leqslant n, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Из теоремы 6 § 3 следует, что

$$\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \left(F \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i \right) = \max \{\operatorname{Ind} F, \sup_i \operatorname{Ind} \Phi_i\} \leqslant n,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем равенство

$$\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} \beta X$$

для совершенно нормальных X (Смирнов [2]).

Так как $\operatorname{Ind}\beta X = \operatorname{Ind} X$ даже для всех нормальных X и $\operatorname{ind}\beta X \leqslant \operatorname{Ind}\beta X$, то достаточно для совершенно нормальных X доказать неравенство

$$\operatorname{ind}\beta X \geqslant \operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind}\beta X. \tag{1}$$

Доказательство. Если $\operatorname{ind}\beta X = -1$, то и $\operatorname{Ind} X = -1$. Предположим, что неравенство (1) справедливо при $\operatorname{ind}\beta X < n$, и пусть $\operatorname{ind}\beta X = n$. Докажем, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.

Рассмотрим дизъюнктную пару замкнутых в X множеств F_1 и F_2 и положим

$$\overline{F}_i = [F_i]_{\beta X}, \qquad i = 1, 2.$$

Множества $\overline{F}_i$, $i = 1, 2$, не пересекаются (см. гл. 1, § 9, предложение 2); поэтому для каждой точки $x \in \overline{F}_1$ существует такая окрестность Ox, что

$$\operatorname{ind}\operatorname{гр} Ox < n \quad \text{и} \quad [Ox] \cap \overline{F}_2 = \Lambda.$$

Из покрытия $\{Ox\}$, $x \in \overline{F}_1$, бикомпакта $\overline{F}_1$ выделим конечное подпокрытие $\{\overline{O}_i = Ox_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Для каждого множества

$$O_i = \overline{O}_i \cap X$$

имеет место включение $\operatorname{гр}_X O_i \subseteq \operatorname{гр} \overline{O}_i$, поэтому

$$\beta \operatorname{гр}_X O_i = {}^{*)} [\operatorname{гр}_X O_i]_{\beta X} \subseteq \operatorname{гр} \overline{O}_i.$$

Значит,

$$\operatorname{ind}\beta \operatorname{гр}_X O_i = \operatorname{ind}[\operatorname{гр}_X O_i]_{\beta X} \leqslant \operatorname{ind}\operatorname{гр} \overline{O}_i < n.$$

Из индуктивного предположения следует, что

$$\operatorname{Ind}\operatorname{гр}_X O_i \leqslant \operatorname{ind}\beta\operatorname{гр}_X O_i < n.$$

Из совершенной нормальности X и теоремы 6 § 3 следует, что

$$\operatorname{Ind}\bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{гр}_X O_i < n.$$

Сумма

$$O = \bigcup_{i=1}^{s} O_i = X \cap \bigcup_{i=1}^{s} \overline{O}_i \supseteq X \cap \overline{F}_1 = F_1$$

есть окрестность множества F_1, и

$$[O]_X \cap F_2 \subseteq [O]_{\beta X} \cap \overline{F}_2 = \bigcup_{i=1}^{s} [O_i]_{\beta X} \cap \overline{F}_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} [\overline{O}_i]_{\beta X} \cap \overline{F}_2 = \Lambda.$$

---

*) См. гл. 1, § 9, предложение 1.

Поэтому $\text{гр}_X O$ есть перегородка между F_1 и F_2 в X. Так как

$$\text{гр}_X O \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \text{гр}_X O_i,$$

то

$$\operatorname{Ind} \text{гр}_X O \leqslant \operatorname{Ind} \bigcup_{i=1}^{s} \text{гр}_X O_i < n,$$

т. е.

$$\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X \leqslant n,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Теорема Катетова: равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для метрических пространств (доказательство Даукера—Гуревича)

Равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ выражает одно из самых глубоких и замечательных топологических свойств метрических пространств; оно было доказано впервые Катетовым [2] в 1951 г. и затем (другим методом) Морита [4] в 1954 г. В 1956 г. Даукером и Гуревичем [1] было дано еще одно доказательство, которое и будет сейчас воспроизведено.

В нем показывается, что и $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ в случае метрического пространства X совпадают с так называемой секвенциальной размерностью $\operatorname{ds} X$, причем Даукер и Гуревич называют *секвенциальной размерностью метрического пространства* X наименьшее целое число n, удовлетворяющее следующему условию:

Существует метрически измельчающаяся *) последовательность

(1) $$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots$$

локально конечных открытых покрытий ω_i кратности $\leqslant n+1$, обладающих тем свойством, что замыкание каждого элемента покрытия ω_{i+1} содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω_i (и это для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$) **).

---

*) Пусть α — какое-нибудь покрытие метрического пространства X. Назовем мерой мелкости покрытия α верхнюю грань $\mu(\alpha)$ диаметров элементов покрытия α. Последовательность покрытий $\{\alpha_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называется метрически измельчающейся, если мера мелкости покрытия α_n стремится к 0 при $n \to \infty$. Аналогично метрическое измельчение определяется и для произвольного направленного множества покрытий $\{\alpha_\lambda\}$: требуется, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой индекс λ_ε, чтобы для всех $\lambda > \lambda_\varepsilon$ было $\mu(\alpha_\lambda) < \varepsilon$.

**) Покрытие, элементами которого являются замыкания элементов покрытия ω, обозначается через $\bar{\omega}$. Мы требуем, таким образом, чтобы для каждого i покрытие $\bar{\omega}_{i+1}$ было вписано в ω_i. П. Вопенка [2] показал, что при определении ds можно отказаться от требования вписанности $\bar{\omega}_{i+1}$ в ω_i, заменив его более слабым требованием, чтобы ω_{i+1} было вписано в ω_i.

Следуя работе Даукера и Гуревича, мы докажем для любого метрического пространства X равенство

$$\dim X = \operatorname{ds} X = \operatorname{Ind} X.$$

Это равенство содержится в совокупности следующих утверждений:

1°. $\operatorname{ds} X \leqslant \dim X$,

2°. $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{ds} X$,

3°. $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$,

из которых третье доказано в гл. 4 даже для любого нормального пространства (неравенство Веденисова).

Первое из этих неравенств доказывается очень просто. Пусть $\dim X \leqslant n$; надо доказать, что и $\operatorname{ds} X \leqslant n$, т. е. построить метрически измельчающуюся последовательность

$$(1) \qquad \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots$$

локально конечных покрытий кратности $\leqslant n+1$, удовлетворяющих условию вписанности: $\bar{\omega}_{i+1}$ вписано в ω_i.

Пусть ω_0 — какое-нибудь локально конечное открытое покрытие мелкости $\leqslant 1$ и кратности $\leqslant n+1$. По теореме Даукера из § 11 гл. 4 (или гл. 6, § 2) такое покрытие существует, так как $\dim X \leqslant n$. Предполагая, что первые i элементов последовательности (1), т. е. покрытия ω_j, $j=0, \ldots, i-1$, кратности $\leqslant n+1$ построены, так что $\mu(\omega_j) \leqslant \frac{1}{2^j}$ и $\bar{\omega}_j$ вписано в ω_{j-1}, построим покрытие ω_i следующим образом. Для каждой точки $x \in X$ возьмем окрестность $O_{\varepsilon(x)}$, $\varepsilon(x) < \frac{1}{2^i}$, с замыканием содержащуюся в одном из элементов покрытия ω_{i-1}.

По теореме Даукера (гл. 4, § 11) существует открытое локально конечное покрытие ω_i кратности $\leqslant n+1$, вписанное в покрытие $\{O_{\varepsilon(x)}\}$, $x \in X$; наша цель достигнута: ω_i и есть нужный нам $(i+1)$-й элемент последовательности (1).

Переходим к последнему и основному шагу доказательства — неравенству 2°.

Надо из

$$(2) \qquad \operatorname{ds} X \leqslant n$$

вывести

$$(3) \qquad \operatorname{Ind} X \leqslant n.$$

При $n=-1$ эквивалентность обоих неравенств очевидна, так как каждое из них означает, что X пусто.

Предположим доказанным, что из $\operatorname{ds} X \leqslant n-1$ вытекает $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$; докажем, что из (2) вытекает (3).

Итак, пусть $\operatorname{ds} X \leqslant n$; надо доказать, что между любыми двумя дизъюнктными множествами Φ_1 и Φ_2 в X существует перегородка C размерности $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$, так что

$$X = O\Phi_1 \cup C \cup O\Phi_2, \quad C = X \setminus (O\Phi_1 \cup O\Phi_2)$$

и окрестности $O\Phi_1$ и $O\Phi_2$ множеств Φ_1 и Φ_2 дизъюнктны.

Так как по предположению $\operatorname{ds} X \leqslant n$, то существует последовательность локально конечных открытых покрытий (1), удовлетворяющая условиям вписанности ($\bar{\omega}_{i+1}$ вписано в ω_i) и метрического измельчения. Мы будем теперь по индукции строить дизъюнктные тройки множеств A_i, B_i, C_i, так что $X = A_i \cup C_i \cup B_i$, причем A_i и B_i замкнуты (значит, C_i открыто) и $A_i \subseteq \langle A_{i+1} \rangle$, $B_i \subseteq \langle B_{i+1} \rangle$ при любом $i = 1, 2, 3, \ldots$; таким образом, множества $\bigcup_i A_i$ и $\bigcup_i B_i$ дизъюнктны и открыты, и мы увидим, что они содержат соответственно множества Φ_1 и Φ_2. Поэтому $O\Phi_1 = \bigcup_i A_i$ и $O\Phi_2 = \bigcup_i B_i$ будут дизъюнктными окрестностями множеств Φ_1 и Φ_2, а замкнутое множество $C = X \setminus (O\Phi_1 \cup O\Phi_2) = \bigcap_i C_i$ будет перегородкой между ними. После этого мы докажем, что $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$.

Приступаем к выполнению намеченного плана. Для начала индукции полагаем $A_0 = B_0 = \Lambda$, $C_0 = X$.

Предположим теперь, что дизъюнктные замкнутые множества A_{i-1} и B_{i-1} уже построены и $C_{i-1} = X \setminus (A_{i-1} \cup B_{i-1})$.

Множество всех элементов покрытия ω_i разобьем на три подмножества без общих элементов:

ω_i' состоит из всех $V \in \omega_i$, замыкания которых не пересекаются с $\Phi_2 \cup B_{i-1}$;

ω_i'' состоит из всех $V \in \omega_i$, замыкания которых пересекаются с $\Phi_2 \cup B_{i-1}$, но не пересекаются с $\Phi_1 \cup A_{i-1}$;

ω_i^0 состоит из всех $V \in \omega_i$, замыкания которых пересекаются и с $\Phi_1 \cup A_{i-1}$ и с $\Phi_2 \cup B_{i-1}$.

Полагаем

$$A_i = X \setminus (\tilde{\omega}_i'' \cup \tilde{\omega}_i^0), \quad B_i = X \setminus (\tilde{\omega}_i' \cup \tilde{\omega}_i^0), \quad C_i = X \setminus (A_i \cup B_i).$$

Очевидно, A_i и B_i замкнуты, следовательно, C_i открыто, причем $A_i \cap C_i = B_i \cap C_i = \Lambda$. Кроме того, $A_i \cap B_i = \Lambda$, так как $A_i \cap B_i = X \setminus (\tilde{\omega}_i'' \cup \tilde{\omega}_i^0 \cup \tilde{\omega}_i') = X \setminus \tilde{\omega}_i = \Lambda$. Заметим еще, что $X \setminus A_i = \tilde{\omega}_i'' \cup \tilde{\omega}_i^0$, $X \setminus B_i = \tilde{\omega}_i' \cup \tilde{\omega}_i^0$, так что

$$C_i = (X \setminus A_i) \cap (X \setminus B_i) = (\tilde{\omega}_i' \cap \tilde{\omega}_i'') \cup \tilde{\omega}_i^0. \tag{4}$$

Пусть теперь U — какой-нибудь элемент покрытия ω_{i+1}, а $V \in \omega_i$ выбрано так, что $[U] \subseteq V$.

Докажем следующие утверждения:

(а) Если $V \in \omega'_i$, то $[U] \cap B_i = \Lambda$ и $[U] \cap \Phi_2 = \Lambda$.

(б) Если $V \in \omega''_i$, то $[U] \cap A_i = \Lambda$ и $[U] \cap \Phi_1 = \Lambda$.

(в) Если $V \in \omega^0_i$, то $[U] \cap A_i = \Lambda$, $[U] \cap B_i = \Lambda$.

Начнем с (в): если $V \in \omega^0_i$, то $V \subseteq \tilde{\omega}^0_i$ и по определению A_i и B_i имеем $V \cap A_i = \Lambda$, $V \cap B_i = \Lambda$, а так как $[U] \subseteq V$, то $[U] \cap A_i = \Lambda$, $[U] \cap B_i = \Lambda$. Утверждения (а) и (б) доказываются совершенно одинаково; докажем, например, (а). Если $V \in \omega'_i$, то $V \subseteq \tilde{\omega}'_i$ и, значит, $V \cap B_i = \Lambda$; и подавно $[U] \cap B_i = \Lambda$. Далее, так как $V \in \omega'_i$, то даже $[V] \cap (\Phi_2 \cup B_{i-1}) = \Lambda$, значит, $[V] \cap \Phi_2 = \Lambda$, и подавно $[U] \cap \Phi_2 = \Lambda$.

Из доказанных утверждений следует, что если $[U] \cap B_i \neq \Lambda$, то непременно $V \in \omega''_i$, и, значит, в силу (б) имеем $[U] \cap A_i = \Lambda$, $[U] \cap \Phi_1 = \Lambda$. Аналогично, если $[U] \cap A_i \neq \Lambda$, то $V \in \omega'_i$ и $[U] \cap B_i = \Lambda$, $[U] \cap \Phi_2 = \Lambda$.

Пусть теперь $U \in \omega^0_{i+1}$. Тогда по определению имеем прежде всего $[U] \cap (\Phi_1 \cup A_i) \neq \Lambda$, $[U] \cap (\Phi_2 \cup B_i) \neq \Lambda$. Докажем, что тогда непременно $[U] \cap A_i = \Lambda$ и $[U] \cap B_i = \Lambda$ и, следовательно, $[U] \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, $[U] \cap \Phi_2 \neq \Lambda$. В самом деле, если бы было $[U] \cap A_i \neq \Lambda$, то, как мы только что видели, $V \in \omega'_i$ и, следовательно, в силу (б)

$$[U] \cap (\Phi_2 \cup B_i) = \Lambda,$$

вопреки тому, что $U \in \omega^0_{i+1}$. Аналогично доказывается и что $[U] \cap B_i = \Lambda$. Итак, утверждения (а), (б), (в) можно дополнить еще утверждением:

(г) Если $U \in \omega^0_{i+1}$, то $[U] \cap B_i = \Lambda$, $[U] \cap A_i = \Lambda$, $[U] \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, $[U] \cap \Phi_2 \neq \Lambda$.

Из локальной конечности покрытия ω_{i+1} следует, что сумма замыканий элементов множества ω^0_{i+1}, соответственно ω'_{i+1}, ω''_{i+1}, есть замыкание множества $\tilde{\omega}^0_{i+1}$, соответственно $\tilde{\omega}'_{i+1}$, $\tilde{\omega}''_{i+1}$. Поэтому из (г) вытекает, что $[\tilde{\omega}^0_{i+1}] \cap A_i = \Lambda$ и $[\tilde{\omega}^0_{i+1}] \cap B_i = \Lambda$.

Далее, замыкание каждого из элементов системы ω'_{i+1} по самому определению этой системы не пересекается с B_i; поэтому $[\tilde{\omega}'_{i+1}] \cap B_i = \Lambda$. Аналогично $[\tilde{\omega}''_{i+1}] \cap A_i = \Lambda$. Итак,

$$A_i \subseteq X \setminus ([\tilde{\omega}''_{i+1}] \cup [\tilde{\omega}^0_{i+1}]), \qquad B_i = X \setminus ([\tilde{\omega}'_{i+1}] \cup [\tilde{\omega}^0_{i+1}]),$$

т. е.

$$A_i \subseteq \langle A_{i+1} \rangle, \qquad B_i \subseteq \langle B_{i+1} \rangle.$$

Поэтому множества

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle A_i \rangle \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle B_i \rangle$$

открыты; они дизъюнктны, так как если бы существовала точка $x \in \left(\bigcup_i A_i\right) \cap \left(\bigcup_i B_i\right)$, то при некоторых i и j было бы $x \in A_i \cap B_j$, и если бы, например, $j \leqslant i$, то было бы $x \in A_i \cap B_i$, что противоречит дизъюнктности множеств A_i и B_i.

Докажем, что $\Phi_1 \subseteq \bigcup_i A_i$, $\Phi_2 \subseteq \bigcup_i B_i$.

Докажем, например, первое из этих включений. Если $x \in \Phi_1$, то $\rho(x, \Phi_2) > 0$, значит, при некотором i будет $\rho(x, \Phi_2) > \mu(\omega_i)$. Для любого $U \in \omega_i$, содержащего точку x, мы тогда имеем $[U] \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, $[U] \cap \Phi_2 = \Lambda$; так как $[U] \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, то $U \notin \omega_i''$; так как $[U] \cap \Phi_2 = \Lambda$, то (см. (г)) $U \notin \omega_i^0$. Итак, каков бы ни был элемент $U \in \omega_i$, содержащий точку x, он не может содержаться ни в ω_i'', ни в ω_i^0. Поэтому x не может содержаться ни в $\tilde{\omega}_i''$, ни в $\tilde{\omega}_i^0$, т. е. $x \in A_i$. Итак, всякая точка $x \in \Phi_1$ содержится в некотором A_i, значит, $\Phi_1 \subseteq \bigcup_i A_i$. Аналогично $\Phi_2 \subseteq \bigcup_i B_i$.

Итак, $\bigcup_i A_i = O\Phi_1$, $\bigcup_i B_i = O\Phi_2$ суть дизъюнктные окрестности соответственно множеств Φ_1 и Φ_2. Следовательно,

$$C = \bigcap_i C_i = X \setminus (O\Phi_1 \cup O\Phi_2)$$

есть замкнутое множество, являющееся перегородкой между Φ_1 и Φ_2.

Остается доказать, что $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$.

Начнем с доказательства включения $\tilde{\omega}_i^0 \supseteq \tilde{\omega}_{i+1}^0$. Возьмем какое-нибудь $U \in \omega_{i+1}^0$ и $V \in \omega_i$, $V \supseteq [U]$. Из (г) следует, что $[U] \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, $[U] \cap \Phi_2 \neq \Lambda$, тем более $V \cap \Phi_1 \neq \Lambda$, $V \cap \Phi_2 \neq \Lambda$, так что $V \in \omega_i^0$. Итак, всякое $U \in \omega_{i+1}^0$ содержится в некотором $V \in \omega_i^0$, и включение $\tilde{\omega}_{i+1}^0 \subseteq \tilde{\omega}_i^0$ доказано.

Докажем теперь, что $\bigcap_i \tilde{\omega}_i^0 = \Lambda$. Пусть x — произвольная точка пространства X. Из двух чисел $\rho(x, \Phi_1)$, $\rho(x, \Phi_2)$ по крайней мере одно положительно и превосходит меру мелкости некоторого ω_i. Если U — произвольный, содержащий точку x элемент этого ω_i, то по крайней мере одно из двух пересечений $[U] \cap \Phi_1$, $[U] \cap \Phi_2$ пусто, и, значит, в силу (г) множество U не может принадлежать системе $\tilde{\omega}_i^0$. Так как U — произвольный элемент ω_i, содержащий точку x, то $x \notin \tilde{\omega}_i^0$ — и равенство $\bigcap\limits_i \tilde{\omega}_i^0 = \Lambda$ доказано.

Положим теперь $D_i = C \setminus \tilde{\omega}_i^0$. Так как $\{\tilde{\omega}_i^0\}$ есть убывающая последовательность открытых множеств с пустым пересечением, то $\{D_i\}$ есть возрастающая последовательность замкнутых подмножеств множества C с суммой, равной C:

$$C = \bigcup_i D_i.$$

Если мы докажем, что $\operatorname{Ind} D_i \leqslant n-1$ для любого i, то, по теореме суммы для большой индуктивной размерности (§ 3, теорема 6), будет доказано и неравенство $\operatorname{Ind} C \leqslant n-1$.

Но так как по индукционному предположению из $\operatorname{ds} D_i \leqslant \leqslant n-1$ следовало бы $\operatorname{Ind} D_i \leqslant n-1$, то достаточно доказать неравенство $\operatorname{ds} D_i \leqslant n-1$ для любого i.

Переходим к этому доказательству.

Обозначим через δ_j систему множеств, элементами которой являются пересечения с множеством D_i элементов системы ω''_{i+j}. Так как $D_i \subseteq C \subseteq C_{i+j} = (\tilde{\omega}'_{i+j} \cap \tilde{\omega}''_{i+j}) \cup \tilde{\omega}^0_{i+j}$ и $D_i \subseteq D_{i+j} = C \setminus \tilde{\omega}^0_{i+j}$, то $D_i \subseteq \tilde{\omega}'_{i+j} \cap \tilde{\omega}''_{i+j}$.

Другими словами, каждая точка $x \in D_i$ содержится по крайней мере в одном $U' \in \omega'_{i+j}$ и по крайней мере в одном $U'' \in \omega''_{i+j}$ и, следовательно, по крайней мере в одном элементе системы δ_j. Другими словами, система δ_j есть открытое покрытие множества D_i. Оно локально конечно, так как локально конечным является ω_{i+j}. Так как кратность покрытия ω_{i+j} не превосходит $n+1$, а точка x, кроме элементов ω''_{i+j}, содержится по крайней мере в одном элементе ω'_{i+j}, то кратность покрытия δ_j не превосходит n. Так как последовательность $\{\delta_j\}$, очевидно, метрически измельчается, то для доказательства неравенства $\operatorname{ds} D_i \leqslant \leqslant n-1$ остается убедиться в том, что $\bar{\delta}_{j+1}$ вписано в δ_j. Для достижения этой последней цели возьмем какое-нибудь $U \in \omega''_{i+j+1}$, $U \cap D_i \neq \Lambda$, так что $U \cap D_i \in \delta_{j+1}$. Тогда в покрытии ω_{i+j} имеется элемент $V \supseteq [U]$. Докажем, что $V \in \omega''_{i+j}$. Но если бы было $V \in \omega^0_{i+j}$, то было бы $V \subseteq \tilde{\omega}^0_{i+j}$ и, значит, $V \cap D_i \subseteq V \cap \cap D_{i+j} = \Lambda$ (см. определение множеств D_{i+j}), тогда как $V \cap D_i \supseteq U \cap D_i \neq \Lambda$. Если бы было $V \in \omega'_{i+j}$, то в силу (а) мы имели бы $[U] \cap (\Phi_2 \cup B_{i+j}) = \Lambda$, а тогда было бы $U \in \omega'_{i+j+1}$, вопреки предположеиию. Итак, $V \in \omega''_{i+j}$ и $[U \cap D_i] \subseteq [U] \cap D_i \subseteq \subseteq V \cap D_i \in \delta_i$, так что условие вписанности, а вместе с ним и неравенство $\operatorname{ds} D_i \leqslant n-1$ доказаны.

Задача, поставлеииая перед нами в этом параграфе, решена.

Глава восьмая

НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О МНОЖЕСТВАХ, ЛЕЖАЩИХ В R^m

Введение

1. Мы знаем (гл. 4, § 4), что множества, лежащие в эвклидовых пространствах, топологически тождественны с конечномерными пространствами со счетной базой. Поэтому, занимаясь множествами, лежащими в R^m, мы, по существу, занимаемся дальнейшим изучением конечномерных пространств — правда, с несколько особой точки зрения: мы изучаем множества, лежащие в данном R^m, т. е. сортируем конечномерные пространства по числу измерений тех эвклидовых пространств, в которых они лежат.

В § 1 мы докажем (теорема 1), что множество $M \subseteq R^m$ тогда и только тогда m-мерно, когда оно содержит внутренние точки (относительно пространства R^m).

К сожалению, этой теоремой исчерпывается все, что мы можем сказать в нашей книге по поводу поставленной еще Урысоном общей задачи характеризации любых n-мерных множеств, $n \leqslant m$, свойствами их расположения в пространстве R^m. Сам Урысон дал решение этой проблемы лишь для замкнутых множеств, лежащих в плоскости. Полное решение проблемы Урысона для замкнутых множеств любого пространства R^m читатель найдет во второй части этого сочинения; оно дается так называемой «теоремой о препятствиях», являющейся одной из основных теорем гомологической теории размерности. Отметим (без доказательства) уже сейчас следующий частный случай теоремы о препятствиях: компакт $\Phi \subset R^m$ тогда и только тогда имеет размерность $m-1$, когда он, не содержа внутренних точек, разбивает некоторый шар $U^m \subset R^m$.

Решение общей проблемы Урысона (для любых, а не только для замкнутых множеств) требует еще гораздо более сложного аппарата гомологической теории размерности незамкнутых множеств, построенного К. А. Ситниковым в его работе [2]. Мы не в состоянии изложить здесь эту теорию.

2. Продолжаем обзор содержания этой главы.

Второй параграф в основном посвящен решению некоторых классических задач, связанных с разбиением пространства R^m лежащими в нем множествами. Речь идет в первую очередь о теоремах 3 и 4; первая из них утверждает, что компакт тогда и только тогда разбивает пространство R^m, когда он может быть существенно отображен на $(m-1)$-мерную сферу *); теорема 4 доказывает гипотезу Урысона: всякий компакт, являющийся совместной границей двух или более областей в R^m, есть $(m-1)$-мерное канторово многообразие. Кроме того, в начале § 2 сообщаются некоторые элементарные предложения из того же круга вопросов.

В § 3 доказывается теорема Куратовского [4] **) о том, что пространство R^m не только не разбивается, но даже не разрезается никаким множеством размерности $\leqslant m-2$ ***).

С другой стороны, Ситников [3] построил замечательный пример двумерного множества $M \subset R^3$, не разрезающего никакой области $G \subseteq R^3$. Эти результаты дополняются построенным Витушкиным [1] примером одномерного множества $M \subset R^3$, обладающего тем свойством, что в $R^3 \setminus M$ имеются две точки, которые не могут быть соединены в $R^3 \setminus M$ никакой простой дугой, т. е. континуумом, гомеоморфным отрезку ****).

---

*) Эта теорема впервые доказана Александровым в работе [12], стр. 226 (королларий 2 к основной теореме 5), в рамках гомологической размерности; в работе [1] Борсук дал другое доказательство этой теоремы, в слегка измененном виде взятое Гуревичем в книгу: Гуревич, Волмэн [1]. Здесь воспроизводится доказательство Борсука, как не опирающееся явно на теорию гомологий.

**) См. также Куратовский [6], т. 1, стр. 321, теорема 8.

***) Множество $M \subset R^m$ разбивает область $G \subseteq R^m$, если $G \setminus M$ несвязно; множество M разрезает область G, если $G \setminus M$ не является семиконтинуумом (пространство X называется семиконтинуумом, если любые две его точки принадлежат некоторому содержащемуся в X континууму). Всякое множество M, разбивающее область G, подавно разрезает ее; обратное, вообще говоря, неверно. Однако если M — компакт, то оба свойства (разбивать и разрезать данную область пространства R^m) эквивалентны между собою. Доказательство может быть предоставлено читателю; оно основано лишь на свойстве локальной связности пространства R^m (так что утверждение остается верным, если заменить в нем пространство R^m любым локально связным пространством).

****) Таким образом, в рамках теоретико-множественной топологии не представляется возможным характеризовать $(m-1)$-мерные множества пространства R^m какими бы то ни было свойствами типа разбиения или разрезания пространства. В то же время доказанная Ситниковым общая гомологическая теорема о препятствиях позволяет полностью охарактеризовать (для любых m и $n<m$) любые n-мерные множества $M \subset R^m$. Для $n=m-1$ эта теорема означает, что шар U^m может быть выбран так, чтобы (при $\dim M = m-1$) в $U^m \setminus M$ лежал нульмерный цикл (в смысле Ситникова), не гомологичный нулю в $U^m \setminus M$. При обрисованном выше положении вещей этот результат является подлинным триумфом гомологических методов в теории размерности и в теоретико множественной топологии вообще.

Теорема Куратовского применяется (в том же § 3) к исследованию построенного Ситниковым [2], [4] примера двумерного множества $M \subset R^3$, которое при любом $\varepsilon > 0$ допускает ε-сдвиг в одномерный полиэдр и, следовательно, имеет ε-покрытие кратности 2. Таким образом, оказывается поставленным на очередь определение и исследование нового метрического инварианта, введенного Александровым (см. Смирнов [4]) под названием метрической размерности.

Определение 1. Метрической размерностью $\mu \dim X$ метрического пространства X называется наименьшее из целых чисел $n \geqslant 0$, обладающих тем свойством, что в пространстве X при любом $\varepsilon > 0$ имеется открытое локально конечное ε-покрытие кратности $n+1$. Если такого числа n нет, то метрическая размерность $\mu \dim X$ по определению равна ∞.

Замечание 1. Как доказал В. И. Егоров, для вполне ограниченного метрического пространства X (в частности, для пространства X, определенного как ограниченное множество, лежащее в эвклидовом пространстве R^m) получим то же значение числа $\mu \dim X$, если в определении 1 будем допускать лишь конечные покрытия.

Легко доказывается (Смирнов [4]), что метрическая размерность множества X, лежащего в R^m, может быть определена как наименьшее целое n, обладающее тем свойством, что множество X может быть при любом ε посредством ε-сдвига отображено в n-мерный полиэдр *) (конечный для ограниченных M и бесконечный для неограниченных **)). Поэтому упомянутый выше пример Ситникова является примером двумерного множества (лежащего в R^3), метрическая размерность которого равна 1. Из следствия 1 в § 11 гл. 4 вытекает, что для любого метрического пространства X имеем

$$\mu \dim X \leqslant \dim X.$$

Катетов [4] дополнил это неравенство до замечательной формулы

$$\mu \dim X \leqslant \dim X \leqslant 2\mu \dim X.$$

Мы доказываем ее в § 4.

Внимания заслуживает и следующая теорема Ситникова [4], которую приводим без доказательства: если $M \subset R^m$ и $\dim M = \dim [M]$, то и $\mu \dim M = \dim M$.

---

*) Это свойство было первоначальным (предложенным Александровым) определением метрической размерности.

**) Под бесконечным полиэдром (лежащим в R^m) мы понимаем здесь тело бесконечного полного геометрического комплекса, т. е. локально конечной системы K симплексов T, удовлетворяющей обычному условию полноты: из $T \in K$, $T' < T$ следует $T' \in K$.

Ю. М. Смирнов и В. И. Егоров построили довольно далеко продвинутую теорию метрической размерности.

В частности, в ней доказываются аналоги таких фундаментальных предложений, как формула Урысона—Менгера, теоремы о перегородках и о существенных отображениях, а на этой основе осуществляется и гомологический подход к метрической размерности. Мы не можем в этой книге излагать теорию метрической размерности; читатель может ознакомиться с ней по работам В. И. Егорова и Ю. М. Смирнова.

3. Размерность $\dim M$ множеств $M \subset R^m$ допускает интересные и разнообразные метрические характеристики; им посвящены многочисленные работы, принадлежащие Гуревичу, Нагата, Ситникову и др. В частности, интересны результаты Нагата, подробно изложенные в его книге [6], к которой и отсылаем читателя. Большого внимания заслуживает, как нам кажется, теорема Ситникова, изложенная в § 5 этой главы.

§ 1. Множества размерности m в R^m

Теорема 1 (Урысон, Менгер). *Множество $M \subseteq R^m$ тогда и только тогда имеет размерность m, когда M содержит внутренние точки (относительно R^m).*

Доказательство. Равенство $\dim M = m$ для всех множеств $M \subseteq R^m$, содержащих внутренние точки, вытекает из того, что во всяком таком M лежит некоторый замкнутый симплекс $\overline{T}^m$ и, следовательно,

$$m = \dim \overline{T}^m \leqslant \dim M \leqslant \dim R^m = m.$$

Остается доказать, что всякое множество $M \subset R^m$, не содержащее внутренних точек, т. е. обладающее всюду плотным дополнением $R^m \setminus M$, имеет размерность $\dim M \leqslant m - 1$. При этом (в силу теоремы суммы) достаточно рассмотреть случай ограниченного множества M (всякое неограниченное M есть сумма счетного числа своих ограниченных замкнутых подмножеств). Итак, для доказательства теоремы 1 достаточно (см. гл. 4, § 3, теорема 5′) доказать следующее предложение:

Пусть M — множество, лежащее в m-мерном кубе Q^m и имеющее всюду плотное дополнение; тогда при любом открытом покрытии $\omega = \{u_1, \ldots, u_s\}$ множества M существует ω-отображение f множества M в $(m-1)$-мерное множество $P \subset R^m$.

Доказательство. Для каждого $u_i \in \omega$ берем открытое и ограниченное в R^m множество U_i, удовлетворяющее условию $M \cap U_i = u_i$.

Положим

$$U = U_1 \cup \ldots \cup U_s$$

и

$$V_k=\left\{x\in U \mid \rho(x,\ R^m\setminus U)>\frac{1}{k}\right\}.$$

Множества $[V_k]$ замкнуты и ограничены и поэтому являются компактами. Они содержатся в U, следовательно, определены лебеговы числа $\varepsilon_k>0$ покрытий $\omega_k=\{U_1\cap[V_k],\ \ldots,\ U_s\cap[V_k]\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Очевидно, можно считать, что $\varepsilon_{k+1}\leqslant\varepsilon_k$. Ясно также, что $[V_k]\subseteq V_{k+1}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Кубом ранга $h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ назовем куб вида

$$Q=\left\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_m) \mid \frac{p_i}{10^h}\leqslant x_i\leqslant\frac{p_i+1}{10^h},\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\right\},$$

где p_i — целые числа.

Диаметр d_h куба ранга h равен $\frac{\sqrt{m}}{10^h}$, поэтому $d_h\to 0$ при $h\to\infty$.

Выберем h_1 так, что

$$d_{h_1}<\min\left(\frac{\varepsilon_3}{2},\ \frac{1}{2}\rho\left([V_1],\ R^m\setminus V_2\right)\right),$$

и через λ_1 обозначим (очевидно, конечную в силу ограниченности множества M) систему всех кубов ранга h_1, пересечение которых с $[V_1]$ непусто.

По индукции для каждого $k=2,\ 3,\ \ldots$ строим такие максимальные конечные системы λ_k попарно различных кубов Q ранга h_k, что

(1) $$h_k\geqslant h_{k-1},$$

(2) $$d_{h_k}<\min\left(\frac{\varepsilon_{k+2}}{2},\ \frac{1}{2}\rho\left([V_k],\ R^m\setminus V_{k+1}\right)\right),$$

(3) $$Q\cap[V_k]\neq\Lambda,$$

(4) $$Q\not\subseteq\bigcup_{k'<k}\tilde{\lambda}_{k'}\ ^{*)}.$$

Из построения систем λ_k вытекают следующие включения:

(5) $$[V_k]\subseteq\left\langle\bigcup_{k'\leqslant k}\tilde{\lambda}_{k'}\right\rangle\subseteq\bigcup_{k'\leqslant k}\tilde{\lambda}_{k'}\subseteq V_{k+1}.$$

Положим $\lambda=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$. Тогда

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}[V_k]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\ \bigcup_{k'\leqslant k}\tilde{\lambda}_{k'}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\tilde{\lambda}_k=\tilde{\lambda},$$

т. е. система λ покрывает множество U.

---

*) $\tilde{\lambda}_{k'}$ обозначает, как всегда, тело системы $\lambda_{k'}$.

Покажем, что система λ локально конечна в U.

По построению (см. условие (4))

$$\left\langle \bigcup_{k' \leqslant k} \tilde{\lambda}_{k'} \right\rangle \cap \tilde{\lambda}_{k+1} = \Lambda, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Следовательно, и

$$\left\langle \bigcup_{k' \leqslant k} \tilde{\lambda}_{k'} \right\rangle \cap \bigcup_{k' > k} \tilde{\lambda}_{k'} = \Lambda. \tag{6}$$

Для произвольно выбранной точки $x \in U$ найдется такой номер $k = k(x)$, что (см. (5))

$$x \in [V_k] \subseteq \left\langle \bigcup_{k' \leqslant k} \tilde{\lambda}_{k'} \right\rangle.$$

Поэтому множество $\left\langle \bigcup_{k' \leqslant k} \tilde{\lambda}_{k'} \right\rangle$ есть окрестность точки x, пересекающаяся лишь с кубами конечной подсистемы $\bigcup_{k' \leqslant k} \lambda_{k'}$ системы λ. Локальная конечность системы λ в U установлена.

Через P обозначим сумму границ кубов $Q \in \lambda$. По теореме суммы $\dim P \leqslant m - 1$.

Покажем, что множество M обладает ω-отображением в P.

Так как множество $R^m \setminus M$ всюду плотно в R^m, то внутри каждого куба $Q \in \lambda$ найдется точка $x_Q \in R^m \setminus M$. Через f_Q: $M \cap Q \to \text{гр}\, Q$ обозначим проекцию из точки x_Q множества $M \cap Q$ в $\text{гр}\, Q$. Отображение f_Q является тождественным на множестве $M \cap \text{гр}\, Q$. Для любых двух различных кубов Q и Q' из λ справедливо, по построению (см. (4)), включение

$$Q \cap Q' \subseteq \text{гр}\, Q \cap \text{гр}\, Q',$$

так что определено однозначное отображение

$$f\colon M \to P = \bigcup_{Q \in \lambda} \text{гр}\, Q,$$

совпадающее на $M \cap Q$ с f_Q для каждого $Q \in \lambda$.

Покажем, что отображение f непрерывно, для чего достаточно показать его непрерывность в некоторой окрестности произвольной точки $x \in M$. Итак, пусть $x \in M$.

По доказанному существует окрестность $Ox \subseteq U$, пересекающая лишь кубы конечной подсистемы λ' системы λ. Для каждого куба $Q \in \lambda'$ отображение

$$f = f_Q\colon Q \cap M \to P$$

непрерывно и множества $(Q \cap M) \cap Ox$ замкнуты в $M \cap Ox$.

Непрерывность отображения $f\colon M \cap Ox \to P$ следует теперь из предложения 10 § 1 гл. 1. Непрерывность отображения f доказана.

Покажем, наконец, что f есть ω-отображение.

Возьмем точку $x \in fM \subseteq P$. Через λ_x обозначим систему тех кубов $Q \in \lambda$, которые содержат точку x. В силу локальной конечности системы λ множество $\widetilde{\lambda \setminus \lambda_x}$ замкнуто в U и

$$Wx = \tilde{\lambda} \setminus \widetilde{\lambda \setminus \lambda_x}$$

есть окрестность точки x в U (а значит, и в R^m), пересекающая лишь те кубы системы λ, которые входят в систему λ_x.

Из определения отображения f сразу же следует, что

$$f^{-1}Wx \subseteq \tilde{\lambda}_x. \tag{7}$$

Предположим, что $x \in [V_k] \setminus [V_{k-1}]$ (считая $[V_0] = \Lambda$); тогда (см. (5) и (6))

$$\lambda_x \subseteq \lambda_k \cup \lambda_{k-1}$$

(при этом система λ_0 пуста).

Следовательно (см. (7) и (2)),

$$\operatorname{diam} f^{-1}Wx \leqslant \operatorname{diam} \tilde{\lambda}_x \leqslant 2d_{h_{k-1}}{}^{*)} < \varepsilon_{k+1}.$$

Из включений (5) следует, что

$$f^{-1}Wx \subseteq \tilde{\lambda}_x \subseteq \bigcup_{k' \leqslant k} \tilde{\lambda}_{k'} \subseteq V_{k+1} \subseteq [V_{k+1}].$$

Но ε_{k+1} есть лебегово число покрытия ω_{k+1}; поэтому найдется такой элемент $U_i \cap [V_{k+1}]$ этого покрытия, что

$$f^{-1}Wx \subseteq U_i \cap [V_{k+1}] \cap M \subseteq u_i,$$

т. е. f есть ω-отображение, ч. и т. д.

§ 2. О разбиении пространства R^n лежащими в нем замкнутыми множествами

1. Несколько элементарных фактов. Начнем со следующего предложения, принадлежащего к самым первым результатам теории размерности, доказанным (при индуктивном определении размерности) еще Урысоном и Менгером:

Теорема 2. *Топологическое n-мерное многообразие **) V^n, в частности пространство R^n, не разбивается никаким лежащим в нем множеством M размерности $\leqslant n-2$.*

---

*) Для любой точки $y \in \tilde{\lambda}_x$ имеем $\rho(x, y) \leqslant d_{h_{k-1}}$.

**) То есть связное пространство со счетной базой, все элементы которой гомеоморфны пространству R^n.

Так как всякое множество, разбивающее какое-нибудь наследственно нормальное пространство, в силу предложения 1 из § 1 гл. 2, содержит замкнутое множество, также разбивающее это пространство, то с самого начала можно предположить, что множество M замкнуто.

Лемма 1. *Пространство R^n не разбивается никаким компактом размерности $\leqslant n-2$.*

В самом деле, пусть компакт $\Phi \subset R^n$, $\dim \Phi \leqslant n-2$, разбивает пространство R^n. Обозначим через Γ ограниченную компоненту множества $R^n \setminus \Phi$ (такая всегда имеется)*) и возьмем вокруг какой-нибудь точки $p \in \Gamma$ шар $\bar{U}^n$ столь большого радиуса, чтобы множество $\Phi \cup \Gamma$ лежало внутри этого шара. Возьмем, с другой стороны, произвольное $\varepsilon > 0$ и шар $\bar{u}^n$ диаметра $< \varepsilon$ с центром в начале координат o. Подобным преобразованием отобразим шар $\bar{U}^n$ на шар $\bar{u}^n$. Тогда область Γ перейдет в некоторую область $\gamma \subset u^n$, точка p пойдет в точку o, компакт Φ — в компакт φ, лежащий в u^n. Область γ является окрестностью диаметра $< \varepsilon$ точки o в R^n, граница которой лежит в φ и, следовательно, имеет размерность $\leqslant n-2$, что противоречит тому, что $\dim R^n = \operatorname{ind} R^n = n$.

Лемма 2. *Замкнутый n-мерный шар $\bar{U}^n$ не разбивается никаким компактом размерности $\leqslant n-2$.*

Предположим, что компакт Φ, $\dim \Phi \leqslant n-2$, разбивает шар $\bar{U}^n$. Можно с самого начала предположить, что Φ не содержит центр o шара $\bar{U}^n$. (Это следует из того, что Φ нигде не плотно в R^n и что существует топологическое отображение шара $\bar{U}^n$ на себя, переводящее любую точку $p \in U^n \setminus \Phi$ в центр o шара $\bar{U}^n$.)

В силу наших предположений имеем

$$\bar{U}^n = G \cup \Phi \cup H,$$

где G, Φ и H дизъюнктны, G и H — непустые открытые в $\bar{U}^n$ множества. Пусть для определенности $o \in G$. Инверсия пространства R^n относительно сферы $S^{n-1} = \bar{U}^n \setminus U^n$ оставляет все точки сферы S^{n-1} неподвижными и отображает открытые множества $G \setminus o$ и H соответственно в множества G_1 и H_1, открытые в $R^n \setminus U^n$.

---

*) В самом деле, множество $R^n \setminus \Phi$, будучи несвязным, содержит более одной компоненты; докажем, что все они, кроме одной, ограничены. Действительно, компакт Φ есть ограниченное множество и, следовательно, лежит в некотором шаре U^n. Множество $R^n \setminus U^n$ (как легко видеть) связно, значит, лежит в одной компоненте множества $R^n \setminus \Phi$; все остальные компоненты ограничены.

Компакт Φ переходит при этом в компакт $\Phi_1 \subset R^n \setminus U^n$, и

$$R^n = (G \cup G_1) \cup (\Phi \cup \Phi_1) \cup (H \cup H_1).$$

Легко видеть, что множества $G \cup G_1$, $\Phi \cup \Phi_1$, $H \cup H_1$ дизъюнктны. При этом $G \cup G_1$ и $H \cup H_1$ открыты в R^n, так что компакт $\Phi \cup \Phi_1$ разбивает пространство R^n, что противоречит лемме 1, так как (по теореме суммы) размерность множества $\Phi \cup \Phi_1$ не превосходит $n-2$ *).

Переходим собственно к доказательству теоремы 2.

Для каждой точки $x \in V^n$ берем окрестность Ox, замыкание которой $[Ox]$ в V^n гомеоморфно замкнутому шару. Счетное множество этих окрестностей

$$O_1 \equiv Ox_1, \quad O_2 \equiv Ox_2, \quad \ldots, \quad O_k \equiv Ox_k, \quad \ldots$$

покрывает все V^n. Пусть F — замкнутое в V^n множество размерности $\leqslant n-2$, разбивающее пространство V^n. Тогда $F \cap [O_k] = F_k$ есть компакт размерности $\leqslant n-2$ и, по лемме 2, множества $H_k = [O_k] \setminus F_k$ связны ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Так как V^n связно, то система множеств $\sigma = \{O_1, O_2, \ldots, O_k, \ldots\}$ является сцепленной (в противном случае было бы $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где системы σ_1 и σ_2 непусты и таковы, что никакой элемент одной из этих систем не пересекается ни с каким элементом другой; значит, $\tilde{\sigma}_1 \cap \tilde{\sigma}_2 = \Lambda$, что противоречит связности V^n). Так как F нигде не плотно в V^n, то сцепленной является и система всех $H_k = O_k \setminus F$ и тем более система всех $[O_k] \setminus F$. Множество $V^n \setminus F$, как тело сцепленной системы связных множеств $[O_k] \setminus F$, связно (по предложению 9 из § 4 гл. 1) — множество F не разбивает многообразие V^n, и теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Всякое замкнутое n-мерное многообразие* **) *есть и n-мерное канторово многообразие.*

К этому же кругу элементарных предложений относится и

Теорема 2′. *Конечный полиэдр Φ является канторовым многообразием тогда и только тогда, когда одна какая-нибудь (и тогда — любая) его триангуляция есть сильно связный комплекс.*

Доказательство. Пусть полиэдр $\Phi = \tilde{K}$ имеет сильно связную n-мерную триангуляцию K; докажем, что Φ — канторово многообразие размерности n.

Пусть $T_1^n, \ldots, T_s^n$ — все n-мерные симплексы триангуляции K. Тогда $\tilde{K} = \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_s$, где $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_s$ — соответствующие замкнутые симплексы (замыкания симплексов T_i).

*) Это утверждение — в форме $\operatorname{ind}(\Phi \cup \Phi_1) \leqslant n-2$ — легко доказать и непосредственно, не опираясь на теорему суммы.

**) Всякое многообразие, очевидно, локально бикомпактно; бикомпактное многообразие называется «замкнутым».

Пусть F — компакт размерности $\leqslant n-2$, лежащий в $\Phi\equiv\tilde{K}$. Требуется доказать, что множество $\Phi\setminus F$ связно. Для этого заметим, что, каков бы ни был $(n-1)$-мерный симплекс $T^{n-1}\in K$, множество $\bar{T}^{n-1}\setminus F$ непусто. Отсюда и из сильной связности комплекса K следует, что система множеств

$$\bar{T}_1^n\setminus F,\quad \bar{T}_2^n\setminus F,\quad \ldots,\quad \bar{T}_s^n\setminus F$$

является сцепленной, а так как множества $\bar{T}_i^n\setminus F$ связны (по лемме 2), то связной является и их сумма $\tilde{K}\setminus F$, откуда следует, что множество F не разбивает полиэдра $\Phi=\tilde{K}$.

Обратное утверждение теоремы 2′ очевидно: если Φ — полиэдр, являющийся n-мерным канторовым многообразием, то всякая его триангуляция K есть сильно связный комплекс; в противном случае мы имели бы равенство $K=K_1\cup K_2$, где K_1 и K_2 — замкнутые n-мерные подкомплексы комплекса K с пересечением $K_1\cap K_2=K'$, являющимся комплексом размерности $\leqslant n-2$. Переходя к телам этих комплексов, получим равенства

$$\tilde{K}=\tilde{K}_1\cup\tilde{K}_2,\qquad \tilde{K}_1\cap\tilde{K}_2=\tilde{K}'$$

— невозможные, если $\tilde{K}$ — канторово многообразие размерности n.

Теорема 2′ доказана.

2. Основные результаты. Переходим к основным результатам этого параграфа.

Теорема 3 (Александров [12], Борсук [1]). *Для того чтобы компакт $\Phi\subset R^n$ разбивал пространство R^n, необходимо и достаточно, чтобы этот компакт можно было существенно отобразить на сферу S^{n-1}.*

Доказательство. Пусть p — произвольная точка пространства R^n. Обозначим через π_p: $R^n\setminus p\to S^{n-1}$ «сдвинутую» центральную проекцию множества $R^n\setminus p$ на единичную сферу S^{n-1} (с центром в начале координат o), состоящую в том, что каждой точке $x\in R^n\setminus p$ ставится в соответствие точка пересечения единичной сферы S^{n-1} с исходящим из ее центра o лучом, несущим вектор, равный вектору $\overrightarrow{px}$. Если $p=o$, то π_o есть, очевидно, просто проекция множества $R^n\setminus o$ на сферу S^{n-1} из центра этой сферы.

Лемма 3. *Пусть Γ — ограниченное открытое множество пространства R^n и $p\in\Gamma$. Отображение π_p, рассматриваемое на границе $[\Gamma]\setminus\Gamma$ множества Γ, не может быть продолжено на множество $[\Gamma]$.*

Доказываем лемму 3. Возьмем систему координат с началом $o=p$. Без ограничения общности можно считать, что все [Г] содержится в единичном шаре $\overline{U}^n$. Отображеиие π_o определено в $R^n\setminus o \supset R^n\setminus \Gamma$; если бы его можно было продолжить на [Г], то продолженное отображение, рассматриваемое на $\overline{U}^n$, было бы отображением шара $\overline{U}^n$ в его границу S^{n-1}, тождественным на S^{n-1}, что невозможно (гл. 3, § 5, предложение 2).

Лемма 4. *Компакт $\Phi\subset R^n$ тогда и только тогда разделяет точки p и q (лежащие в $R^n\setminus\Phi$)* *), *когда отображения π_p: $\Phi\to S^{n-1}$ и π_q: $\Phi\to S^{n-1}$ не гомотопны между собою.*

Доказываем лемму 4. Пусть компакт Φ разделяет точки p и q, так что $p\in P$, $q\in Q$, где P и Q суть различные компоненты открытого множества $R^n\setminus\Phi$. По крайней мере одна из областей P, Q, например P, ограиичена. Отображение π_q: $\Phi\to S^{n-1}$ можно продолжить на $R^n\setminus q\supset\Phi\cup P$; если бы отображения π_q и π_p компакта Φ в S^{n-1} были гомотопны между собою, то по лемме о грибе отображение π_p: $\Phi\to S^{n-1}$ тоже можно было бы продолжить в отображение компакта $\Phi\cup P$, что невозможно в силу леммы 3.

Пусть компакт Φ не разделяет точки p и q. Тогда их можно соединить простой ломаной $\overline{pq}$, лежащей вне компакта Φ. Если точка t скользит по этой ломаной, пробегая ее от конца $t_0=p$ до конца $t_1=q$, то семейство отображений π_t: $\Phi\to S^{n-1}$ непрерывно переводит отображение π_p: $\Phi\to S^{n-1}$ в отображение π_q: $\Phi\to S^{n-1}$, и эти отображения оказываются гомотопными.

Из доказанного уже следует одна половина теоремы 3: если компакт Φ разбивает пространство R^n, то он разделяет некоторые две точки p и q (принадлежащие к различным компонентам P и Q множества $R^n\setminus\Phi$); тогда отображения π_p: $\Phi\to S^{n-1}$ и π_q: $\Phi\to S^{n-1}$ не гомотопны между собою, значит, по крайней мере одно из них существенно (все несущественные отображения f: $\Phi\to S^{n-1}$ гомотопны между собою).

Остается доказать вторую половину теоремы 3: если имеется существенное отображение компакта $\Phi\subset R^n$ в S^{n-1}, то компакт Φ разбивает пространство R^n или, что то же, разделяет некоторые две его точки p и q.

Возьмем шар $\overline{U}^n$ с границей S^{n-1}, содержащий внутри себя компакт Φ, и пусть f_0: $\Phi\to S^{n-1}$ — существенное отображение.

*) То есть точки p и q тогда и только тогда принадлежат к разным компонентам множества $R^n\setminus\Phi$.

Отображение f_0 не может быть продолжено до отображения всего замкнутого шара $\bar{U}^n$ в S^{n-1} (см. предложения 1 и 2 из § 1 Прибавления к гл. 3). Чтобы провести доказательство теоремы до конца, остается доказать лишь следующую лемму:

Лемма 5. *Пусть в R^n даны компакты Φ и Ψ:*

$$\Phi \subset \Psi \subset R^n,$$

и пусть дано отображение f_0: $\Phi \to S^{n-1}$, не продолжаемое на Ψ. Тогда существует открытое в R^n множество $\Gamma \subset \Psi \setminus \Phi$ с границей, лежащей в Φ.

Действительно, если лемма 5 доказана, то, взяв точку p в Γ, а точку q в $R^n \setminus \Psi$, получим, очевидно, две точки, разделенные компактом Φ.

Итак, доказываем лемму 5.

Раз отображение f_0: $\Phi \to S^{n-1}$ не может быть продолжено на $\Psi \equiv \Phi \cup \Psi$, то, в силу предложения 6 § 9 гл. 5, существует такой компакт Ψ_0, что f_0 не может быть продолжено на $\Phi \cup \Psi_0$, но может быть продолжено на всякое $\Phi \cup \Psi'$, где компакт Ψ' есть собственное подмножество компакта Ψ_0.

Докажем, что множество $\Psi_0 \setminus \Phi$ (очевидно, непустое) открыто в R^n. Для этого, в силу теоремы 17 гл. 5, достаточно показать, что для каждой точки $x \in \Psi_0 \setminus \Phi$ и для каждой достаточно малой окрестности $Ox \subseteq \Psi_0 \setminus \Phi$ (относительно Ψ_0), а именно для каждой окрестности Ox, удовлетворяющей условию $[Ox] \subseteq \Psi_0 \setminus \Phi$, существует непрерывное отображение

$$g\colon ((\Psi_0 \setminus \Phi) \setminus Ox) \to S^{n-1},$$

не продолжаемое на все $\Psi_0 \setminus \Phi$.

Чтобы построить такое g, вспомним, что из самого определения Ψ_0 следует, что данное нам отображение f_0: $\Phi \to S^{n-1}$ может быть продолжено на $\Phi \cup (\Psi_0 \setminus Ox)$ до отображения f: $(\Phi \cup \Psi_0 \setminus Ox) \to S^{n-1}$. Если бы отображение f можно было продолжить на $\Psi_0 \setminus \Phi$, то тем самым отображение f_0: $\Phi \to S^{n-1}$ оказалось бы продолженным на все $\Phi \cup \Psi_0$. Итак, отображение f, рассматриваемое на $(\Psi_0 \setminus \Phi) \setminus Ox$, не может быть продолжено на $\Psi_0 \setminus \Phi$, чем и доказано, что каждая точка $x \in \Psi_0 \setminus \Phi$ есть внутренняя точка (относительно R^n), т. е. что $\Psi_0 \setminus \Phi$ открыто в R^n и тем более открыто в Ψ_0; его граничные точки относительно R^n, очевидно, лежат в Ψ_0, но не могут лежать в $\Psi_0 \setminus \Phi$, значит, $\operatorname{гр}(\Psi_0 \setminus \Phi) \subseteq \Phi$, и лемма 5 доказана.

Вместе с нею доказана и основная теорема 3.

Доказываем следующее предложение:

Теорема 4 (Александров [9], [12]). *Если множество $\Phi \subset R^n$ есть совместная граница по крайней мере двух областей Γ_1 и Γ_2 в R^n, из которых по крайней мере одна — пусть*

Γ_1 — *ограничена, то* Φ *есть* $(n-1)$*-мерное канторово многообразие.*

Эквивалентная формулировка:

Теорема 4′. *Если компакт* $\Phi \subset R^n$ *неприводимо разделяет*) две точки* p *и* q, $p \in R^n \setminus \Phi$, $q \in R^n \setminus \Phi$, *то он есть* $(n-1)$*-мерное канторово многообразие.*

Из предпосылок теоремы следует, что компакт Φ не содержит внутренних точек и поэтому $\dim \Phi \leqslant n-1$, в то время как из теоремы 3 вытекает, что $\dim \Phi \geqslant n-1$.

Поэтому теорема 4 будет доказана, если мы докажем следующее предложение:

Теорема 4″. *Пусть компакт* $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ *разделяет точки* $p \in R^n \setminus \Phi$ *и* $q \in R^n \setminus \Phi$, *причем ни один из компактов* Φ_1, Φ_2 *этих точек не разделяет. Тогда*

$$\dim(\Phi_1 \cap \Phi_2) \geqslant n-2.$$

Доказательство. Из леммы 4 следует, что отображения

$$\pi_p\colon \Phi_i \to S^{n-1}, \qquad \pi_q\colon \Phi_i \to S^{n-1}, \qquad i = 1, 2,$$

гомотопны между собою. Если бы было $\dim(\Phi_1 \cap \Phi_2) \leqslant n-3$, то, в силу предложения 7 из § 9 гл. 5, были бы между собою гомотопны и отображения

$$\pi_p\colon \Phi_1 \cup \Phi_2 \to S^{n-1}, \qquad \pi_q\colon \Phi_1 \cup \Phi_2 \to S^{n-1},$$

что противоречит (вследствие леммы 4) тому, что $\Phi_1 \cup \Phi_2$ разделяет точки p и q.

§ 3. Теорема Куратовского и пример Ситникова

1. Теорема Куратовского. Повторяем формулировку теоремы Куратовского.

Теорема 5. *Если* $M \subset R^m$, $\dim M \leqslant m-2$ *и* U^m — *какой-нибудь* m*-мерный шар пространства* R^m, *то всякие две точки* $a \in U^m \setminus M$, $b \in U^m \setminus M$ *содержатся в некотором континууме, лежащем в* $U^m \setminus M$.

Лемма 1. *Пусть в* m*-мерном замкнутом симплексе* $\overline{T}^m = e_0 \ldots e_m$ *даны открытые (в* $\overline{T}^m$*) множества* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, *причем множество* Γ_i *(при* $i = 1, \ldots, m$*) не имеет общих точек с гранью* $\overline{T}_i^{m-1}$, *противоположной вершине* e_i. *Пусть, кроме того, открытое (в* $\overline{T}^m$*) множество* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ *отделяет*

*) Компакт $\Phi \subset R^n$, разделяющий точки p и q, по определению неприводимо разделяет их, если никакой собственный подкомпакт Φ' точек p и q не разделяет.

вершину e_0 *от грани* $\overline{T}_0^{m-1} = \overline{e_1 \ldots e_m}$ *(противоположной этой вершине), т. е. пусть* $\overline{T}^m \setminus \Gamma = A \cup B$, *где* A *и* B — *компакты,*

$$e_0 \in A, \qquad \overline{T}_0^{m-1} \subseteq B, \qquad A \cap B = \Lambda.$$

Тогда $\Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_m \neq \Lambda$.

Доказательство леммы 1. Обозначим через H_0 такое открытое в $\overline{T}^m$ множество, что

$$A \subset H_0, \qquad [H_0] \subseteq \overline{T}^m \setminus B.$$

Положим при $i = 1, \ldots, m$

$$H_i = \Gamma_i \cup ((\overline{T}^m \setminus [H_0]) \setminus \overline{T}_i^{m-1}).$$

Тогда $H_i \cap \overline{T}_i^{m-1} = \Lambda$ и

$$H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_m = H_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m \cup$$

$$\cup \left((\overline{T}^m \setminus [H_0]) \setminus \bigcap_{i=1}^{m} \overline{T}_i^{m-1}\right) = H_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m \cup ((\overline{T}^m \setminus [H_0]) \setminus e_0).$$

Но $e_0 \in A \subseteq H_0$, $B \subseteq \overline{T}^m \setminus [H_0]$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, поэтому

$$\overline{T}^m = A \cup \Gamma \cup B \subseteq H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_m.$$

Итак, $\gamma = \{H_0, H_1, \ldots, H_m\}$ есть открытое покрытие симплекса $\overline{T}^m$.

Возьмем замкнутое покрытие

$$\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\},$$

комбинаторно вписанное в γ.

Так как $A_i \cap \overline{T}_i^{m-1} = \Lambda$ при $i = 0, 1, \ldots, m$, то выполнены условия второй леммы Шпернера и существует точка

$$x \in \bigcap_{i=0}^{m} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{m} H_i.$$

Так как $x \in H_0$, то $x \notin \overline{T}^m \setminus [H_0]$; поэтому из $x \in H_i$, $i = 1, \ldots, m$, вытекает $x \in \Gamma_i$ и $x \in \Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_m \neq \Lambda$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть по-прежнему* $\overline{T}^m = \overline{e_0 e_1 \ldots e_m}$. *Обозначим через* $\overline{T}_i^{m-1}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *замкнутую грань, противоположную вершине* e_i. *Дано множество*

$$M \subset \overline{T}^m \setminus (e_0 \cup \overline{T}_0^{m-1}), \qquad \dim M \leqslant m - 2.$$

Тогда в $\overline{T}^m \setminus M$ *существует континуум* C, *содержащий точку* e_0 *и имеющий общие точки с* $\overline{T}_0^{m-1}$ *(континуум, «связывающий» в* $\overline{T}^m \setminus M$ *вершину* e_0 *с противоположной ей гранью* $\overline{T}_0^{m-1}$*).*

Доказательство. Положим

$$U_i = \overline{T}^m \setminus (\overline{T}_i^{m-1} \cup \overline{T}_0^{m-1}), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, $M \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$. Поэтому существует комбинаторно вписанное в покрытие

$$\omega = \{U_1, \ldots, U_m\}$$

множества M покрытие $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ открытыми в $\overline{T}^m$ множествами кратности $\leqslant (m-2)+1 = m-1$. Следовательно, $\Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_m = \Lambda$.

Так как $\Gamma_i \cap \overline{T}_i^{m-1} = \Lambda$, то из леммы 1 следует, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ не может отделять точку e_0 от множества $\overline{T}_0^{m-1}$; следовательно, e_0 и $\overline{T}_0^{m-1}$ принадлежат одной и той же компоненте C компакта $\overline{T}^m \setminus \Gamma \subset \overline{T}^m \setminus M$. Континуум C является искомым континуумом, связывающим в $\overline{T}^m \setminus M$ вершину e_0 с гранью $\overline{T}_0^{m-1}$.

Лемма 2 доказана.

Переходим, наконец, к доказательству теоремы 5.

(а) Предположим сначала, что множество $M \subset R^m$ ограничено.

Берем две произвольные точки p и q множества $R^m \setminus M$ и симплекс T^m, содержащий внутри себя все множество M и обе точки p и q. Обозначим через T^{m-1} какую-нибудь $(m-1)$-мерную грань симплекса T^m и возьмем два симплекса $T_p^m = |pT^{m-1}|$ и $T_q^m = |qT^{m-1}|$. В замкнутых симплексах $\overline{T}_p^m$ и $\overline{T}_q^m$ существуют континуумы C_p и C_q, связывающие в $\overline{T}_p^m \setminus M$, соответственно в $\overline{T}_q^m \setminus M$, вершину p, соответственно q, с гранью T^{m-1}. Тогда континуум $C = C_p \cup \overline{T}^{m-1} \cup C_q$ лежит в $R^m \setminus M$ и содержит обе точки p и q.

(б) Предположим теперь, что множество M не ограничено, но не является всюду плотным в R^m. Тогда существует такая точка $x_0 \in R^m$ и такое $\varepsilon > 0$, что

$$O(x_0, \varepsilon) \subseteq R^m \setminus M. \tag{1}$$

Граница шара $O(x_0, \varepsilon)$ есть $(m-1)$-мерная сфера. Пусть

$$f\colon (R^m \setminus x_0) \to (R^m \setminus x_0)$$

— инверсия относительно этой сферы. Мы положим

$$p' = fp, \quad q' = fq, \quad M' = fM \tag{2}$$

и, наконец,

$$M^* = fM' \cup x_0.$$

Из (1) следует включение

$$M^* \subset [O(x_0, \varepsilon)].$$

Кроме того, $\dim M^* \leqslant m-2$. Поэтому, согласно (а), существует такой континуум C^*, что

$$p' \in C^*, \quad q' \in C^*, \quad M^* \cap C^* = \Lambda.$$

Этот континуум не содержит точки x_0 (так как $x_0 \in M^*$). Следовательно, определен континуум

$$C = f^{-1}C^*.$$

Из (2) вытекает, что

$$p \in C, \quad q \in C, \quad M \cap C = \Lambda.$$

(в) Пусть, наконец, множество $M \subset R^m$ — произвольное множество размерности $\leqslant m-2$. Обозначим через x_0 произвольную точку пространства R^m, отличную от точек p и q и не принадлежащую множеству M:

$$x_0 \in R^m \setminus (M \cup p \cup q).$$

Рассмотрим шары

$$G = O(x_0, 1)$$

и

$$H = O(x_0, 2).$$

Гомеоморфное отображение

$$g\colon (R^m \setminus x_0) \to R^m \setminus [G]$$

определим следующим образом:

$$\text{если } x \in R^m \setminus H, \quad \text{то} \quad gx = x;$$

в противном случае gx определяется как точка, лежащая на луче $[x_0, x)$ и находящаяся от точки x_0 на расстоянии, равном $1 + \frac{1}{2}\rho(x_0, x)$.

Имеем

$$M^* = gM \subset R^m \setminus [G], \ \dim M^* \leqslant m-2,$$
$$p^* = gp \in R^m \setminus [G],$$
$$q^* = gq \in R^m \setminus [G].$$

Поэтому из пункта (б) следует существование континуума $C^* \subset R^m \setminus M^*$, содержащего точки p^* и q^*.

Определим отображение $h\colon R^m \to R^m$ следующим образом:

$$hx = g^{-1}x, \quad \text{если} \quad x \in R^m \setminus [G];$$
$$hx = x_0, \quad \text{если} \quad x \in [G].$$

Легко видеть, что это отображение непрерывно. Ясно также, что

$$hp^* = p, \quad hq^* = q, \quad hM^* = M$$

и что

$$C = hC^*$$

есть континуум, лежащий в $R^m \setminus M$ и содержащий точки p и q.

Теорема 5 доказана; из нее вытекает

Следствие 1. *Открытый шар U^m пространства R^m не разрезается никаким множеством $M \subseteq R^m$ размерности* $\dim M \leqslant \leqslant m-2$.

В самом деле, предположим, что шар U^m разрезается множеством M размерности $\leqslant m-2$. Тогда он разрезается и лежащим в этом шаре множеством $U^m \cap M$. При топологическом отображении шара U на все пространство R^m множество $U^m \cap M$ перейдет в некоторое множество M^*, $\dim M^* \leqslant m-2$, разрезающее пространство R^m, — вопреки теореме 5.

И наконец, основное

Следствие 2. *Множество $M \subset R^m$,* $\dim M \leqslant m-2$, *не разрезает никакую область $G \subseteq R^m$.*

В самом деле, пусть p и q — две точки множества $G \setminus M$. Область G есть объединение счетной системы Σ открытых m-мерных шаров. Так как G — связное множество, то система Σ есть сцепленная система. Пусть

$$p \in U^m_{(p)} \in \Sigma, \quad q \in U^m_{(q)} \in \Sigma.$$

Существует конечная цепочка шаров

$$U^m_{(p)} \equiv U_1, U_2, \ldots, U_s \equiv U^m_{(q)}, \quad U_i \in \Sigma \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

в которой любые два соседних элемента U_i, U_{i+1} суть пересекающиеся шары. Берем точки

$$p_0 \equiv p \in U_1, \quad p_1 \in U_1 \cap U_2, \ldots, p_s \in U_{s-1} \cap U_s, \; p_{s+1} \equiv q \in U_s$$

и соединяем их последовательно континуумами

$$C_1 \supset p_0 \cup p_1, \; C_2 \supset p_1 \cup p_2, \; \ldots, \; C_{s+1} \supset p_s \cup p_{s+1}$$

(по только что доказанному такие континуумы существуют). Тогда

$$C = C_1 \cup \ldots \cup C_{s+1}$$

есть лежащий в G континуум, содержащий точки $p \equiv p_0$ и $q \equiv p_{s+1}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Утверждение следствия 2 остается верным, если под G понимать любое m-мерное топологическое многообразие. Очевидно, что в доказанном таким образом предложении содержится теорема 2 этой главы (§ 2).

2. Пример Ситникова. В качестве приложения только что доказанной теоремы сейчас построим (следуя Ситникову) множество M типа G_δ, лежащее в R^3 и обладающее следующими двумя свойствами:

1°. Оно имеет размерность 2.

2°. При любом $\varepsilon > 0$ оно может быть переведено посредством ε-сдвига в одномерный полиэдр.

Переходим к построению множества M.

Возьмем в трехмерном пространстве R^3 систему прямоугольных координат и рассмотрим для $k=1, 2, 3, \ldots$ кубильяж с ребром длины $\frac{1}{k}$, т. е. совокупность кубов, на которые пространство R^3 разбивается плоскостями $x=\frac{p}{k}$, $y=\frac{q}{k}$, $z=\frac{r}{k}$, где p, q, r пробегают независимо друг от друга все целые значения. Сумму всех ребер и вершин этих кубов обозначим через K_k. Положим теперь $Q_1=K_1$ и сдвинем бесконечный одномерный полиэдр K_2 (как твердое тело) так, чтобы он стал в общее положение к Q_1, т. е. чтобы сдвинутый полиэдр K_2 — обозначим его через Q_2 — не имел общих точек с Q_1. Точно так же сдвинем полиэдр K_3 как твердое тело в полиэдр Q_3, не пересекающийся с $Q_1 \cup Q_2$, и т. д. Получим последовательность дизъюнктных одномерных полиэдров $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots$, причем сумма этих полиэдров есть всюду плотное в пространстве R^3 множество типа F_σ, которое обозначим через B.

Дополнительное множество $M=R^3 \setminus B$ есть множество типа G_δ. Докажем, что оно обладает свойствами 1° и 2°.

Докажем сначала свойство 2°. Для этого рассмотрим одномерный полиэдр Q_k^*, «взаимный» к Q_k, — он получается из Q_k, если сдвинуть весь одномерный полиэдр Q_k на вектор, идущий из какой-либо вершины $a \in Q_k$ в центр произвольного, но раз и навсегда выбранного куба (нашего кубильяжа Q_k), инцидентного вершине a.

Утверждение 2° следует из того, что множество $M_k = R^3 \setminus Q_k \supset M$ можно перевести в Q_k^* посредством $\frac{2}{k}$-деформации. Для того чтобы построить эту деформацию, заметим, что Q_k^* определяет разбиение пространства R^3 на замкнутые кубы с ребрами длины $\frac{1}{k}$. Пусть F — один из этих кубов. Ясно, что отрезки, соединяющие центры его противоположных граней, не пересекаются с M_k. Тем более центр o куба F не принадлежит M_k. Пусть a — произвольная точка множества $M_k \cap F$. Обозначим через a_0 ту точку пересечения прямой oa с границей куба F, которая лежит по ту же сторону от точки o, что и a. Заставим точку a равномерно двигаться (в течение единицы времени) вдоль отрезка $[a, a_0]$ в точку a_0. Осуществив такое движение применительно ко всем точкам множества M_k одновременно, получим $\frac{1}{k}$-деформацию множества M_k в двумерный остов кубильяжа Π^*, определяемого одномерным полиэдром Q_k^*. Пусть $\tilde{M}_k$ — образ множества M_k, полученный в результате этой деформации. Легко видеть, что центры двумерных граней кубильяжа Π^* не принадлежат множеству $\tilde{M}_k$. Поэтому в течение следующей единицы времени мы можем осуществить $\frac{1}{k}$-деформацию множества $\tilde{M}_k$ в полиэдр Q_k^* вполне аналогично тому, что мы делали применительно к множеству M_k. В результате получим $\frac{2}{k}$-деформацию множества M_k в одномерный полиэдр Q_k^*.

Свойство 1° вытекает из следующего предложения, представляющего и некоторый самостоятельный интерес:

Предложение 1. *Пусть в n-мерном пространстве R^n дана счетная совокупность непустых дизъюнктных замкнутых множеств $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$, сумма которых есть всюду плотное множество D. Тогда дополнительное множество $C = R^n \setminus D$ имеет размерность $n-1$.*

В самом деле, так как D всюду плотно, то C не содержит внутренних точек и, значит, $\dim C \leqslant n-1$. Если бы было $\dim C \leqslant n-2$, то, в силу теоремы 5, всякие две точки d_1, d_2 в D принадлежали бы лежащему в D континууму $\overline{d_1 d_2} \subset D$. Взяв теперь, например, $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, мы представим континуум $\overline{d_1 d_2}$ в виде суммы попарно непересекающихся замкнутых множеств:

$$\overline{d_1 d_2} \cap D_1, \quad \overline{d_1 d_2} \cap D_2, \quad \ldots, \quad \overline{d_1 d_2} \cap D_k, \ \ldots,$$

из которых по крайней мере два непусты и общее число которых счетно. Но это противоречит известной теореме Серпинского, в силу которой никакой континуум не может быть представлен в виде суммы (конечного или) счетного числа дизъюнктных непустых замкнутых множеств *).

Замечание 2. Взяв пересечение построенного выше множества M, например, с единичным кубом пространства R^3, получим ограниченное множество размерности 2, допускающее сколь угодно малые сдвиги в конечные одномерные полиэдры, чем поставленная цель достигнута.

Замечание 3. Аналогичное построение, проведенное в n-мерном пространстве R^n, приводит к такому $(n-1)$-мерному

*) Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Куратовский [6], т. 2, § 47, III, теорема 6 (стр. 182).

множеству M, для которого $\mu \dim M = \left[\frac{n}{2}\right]$. Из формулы Катетова следует, что дальнейшее понижение числа $\mu \dim M$ невозможно.

Замечание 4. Своеобразным аналогом теоремы об ε-сдвигах (гл. 4, § 3, теорема 6) для любых множеств, лежащих в данном R^n, является следующая очень глубокая

Теорема Ситникова [4]. *Пусть в пространстве R^n дано произвольное множество A размерности r. Тогда, каково бы ни было открытое множество $U \subset R^n$, множество $U \cap A$ можно внутри U продеформировать в бесконечный r-мерный полиэдр так, что эта деформация затухает при приближении к границе*) множества U. С другой стороны, существует такое открытое $U_0 \subset R^n$ (за которое можно даже взять некоторый открытый шар), что множество $U_0 \cap A$ нельзя внутри U_0 продеформировать в полиэдр размерности $< r$ таким образом, чтобы эта деформация затухала при приближении к границе U_0.*

Доказательство теоремы выходит за пределы нашей книги.

§ 4. Формула Катетова $\mu \dim X \leqslant \dim X \leqslant 2\mu \dim X$

Пусть $\mu \dim X = n$. Надо доказать, что $\dim X \leqslant 2n$, т. е. что во всякое конечное открытое покрытие $\omega = \{G_1, \ldots, G_s\}$ пространства X можно вписать покрытие кратности $\leqslant 2n+1$.

В силу условия $\mu \dim X = n$ при любом натуральном k существует открытое $\frac{1}{3^k}$-покрытие α_k кратности $n+1$.

Обозначим теперь через β_k совокупность (быть может, пустую) тех элементов $U \in \alpha_k$, для которых $\left[O\left(U, \frac{1}{3^k}\right)\right]$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω.

Очевидно, система β_k вписана в ω.

Докажем о счетной системе $\gamma = \{\bar{\beta}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, два утверждения.

1°. Система γ есть (очевидно, открытое) покрытие пространства X. В самом деле, берем произвольно $x \in X$ и какое-нибудь $G_i \in \omega$, содержащее точку x. Так как $\rho(x, X \setminus G_i) > 0$, то существует такое k, что $\rho(x, X \setminus G_i) > \frac{1}{3^{k-1}}$. Выбрав это k, находим такое $U \in \alpha_k$, чтобы было $x \in U$. Докажем, что тогда $U \in \beta_k$.

---

*) Это значит, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и точка a границы U, существует такое $\delta > 0$, что все точки множества $U \cap A$, отстоящие от точки a на расстояние $< \delta$, сдвигаются во все время деформации меньше, чем на ε

В самом деле, для всякой точки $y \in \left[O\left(U, \frac{1}{3^k}\right)\right]$ имеем (так как $x \in U$, $\operatorname{diam} U < \frac{1}{3^k}$)

$$\rho(x, y) < \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3^k} < \frac{1}{3^{k-1}} < \rho(x, X \setminus G_l),$$

так что $\left[O\left(U, \frac{1}{3^k}\right)\right] \subseteq G_l$ и $U \in \beta_k$. Значит, $x \in \tilde{\beta}_k$, что и требовалось доказать.

2°. Для всякого k имеем

$$[\tilde{\beta}_k] \subseteq \tilde{\beta}_{k+1}.$$

В самом деле, предположим, что имеется точка $x \in [\tilde{\beta}_k]$, не содержащаяся в $\tilde{\beta}_{k+1}$. Берем содержащее точку x множество $U \in \alpha_{k+1}$. Так как по предположению $x \notin \tilde{\beta}_{k+1}$, то $U \notin \beta_{k+1}$ и, значит, для любого $G_l \in \omega$

$$\left[O\left(U, \frac{1}{3^{k+1}}\right)\right] \cap (X \setminus G_l) \neq \Lambda,$$

следовательно,

$$\rho(U, X \setminus G_l) \leqslant \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Так как $x \in [\tilde{\beta}_k]$, то $U \cap \tilde{\beta}_k \neq \Lambda$. Берем точку $y \in U \cap \tilde{\beta}_k$. Так как $\operatorname{diam} U < \frac{1}{3^{k+1}}$, то

$$\rho(y, X \setminus G_l) < \frac{2}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^k} \quad \text{для любого} \quad G_l \in \omega. \tag{1}$$

С другой стороны, $y \in \tilde{\beta}_k$, и, значит, точка y содержится в некотором $U_1 \in \beta_k \subseteq \alpha_k$, причем для некоторого $G_{l_0} \in \omega$ имеем $\rho(U_1, X \setminus G_{l_0}) \geqslant \frac{1}{3^k}$; следовательно,

$$\rho(y, X \setminus G_{l_0}) \geqslant \frac{1}{3^k}. \tag{2}$$

Противоречие между неравенствами (1) и (2) доказывает утверждение 2°.

Обозначим теперь через C_k множество всех точек $x \in X$, содержащихся в $n+1$ элементах системы β_k, и положим

$$F_0 = \Lambda, \qquad F_1 = [C_1].$$

Для $k \geqslant 2$ положим

$$F_k = [C_k] \cup [\tilde{\beta}_{k-1}].$$

Обозначим через σ_k совокупность всех (открытых) множеств вида $U \setminus F_{k-1}$, где $U \in \beta_k$. Очевидно, $\sigma_1 = \beta_1$ и σ_k вписано в ω при любом k. Положим, наконец,

$$\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k.$$

Наша цель — доказательство формулы Катетова — будет достигнута, если мы покажем, что система σ есть (открытое) покрытие пространства X, вписанное в ω и имеющее кратность $\leqslant 2n+1$.

Для этого докажем прежде всего включение

$$[C_k] \subseteq \tilde{\beta}_k. \tag{3}$$

Пусть $x \in [C_k]$. Приведем к противоречию предположение, что $x \notin \tilde{\beta}_k$.

Берем множество $U \in \alpha_k$, содержащее точку x. Из нашего предположения следует, что $U \notin \beta_k$.

Так как $x \in [C_k]$ и α_k — открытое покрытие, то

$$U \cap C_k \neq \Lambda.$$

Берем точку $y \in U \cap C_k$. Так как $y \in C_k$, то точка y принадлежит каким-то $n+1$ элементам системы β_k. Кроме того, y принадлежит множеству $U \in \alpha_k$, заведомо не являющемуся элементом системы β_k. Значит, число элементов покрытия α_k, содержащих точку y, по меньшей мере равно $n+2$, чего не может быть, так как покрытие α_{k+1} имеет кратность $n+1$.

Формула (3) доказана.

Доказываем теперь, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_k = X$, — этим будет доказано, что система $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ есть покрытие пространства X.

Имеем

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\beta}_k \setminus F_{k-1}$$

(мы помним, что при $k \geqslant 2$ было положено $F_k = [C_k] \cup [\tilde{\beta}_{k-1}]$), причем по формуле (3) имеем $[C_k] \subseteq \tilde{\beta}_k$, а согласно 2°

$$[\tilde{\beta}_{k-1}] \subseteq \tilde{\beta}_k.$$

Значит, $F_k \subseteq \tilde{\beta}_k$, $F_{k-1} \subseteq \tilde{\beta}_{k-1}$ и $\tilde{\sigma}_k \supseteq \tilde{\beta}_k \setminus \tilde{\beta}_{k-1}$ при $k = 2, 3, \ldots$ Кроме того, $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\beta}_1$. Значит,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_k \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_k = X.$$

Итак, $\sigma = \bigcup \sigma_k$ есть покрытие пространства X. Так как каждый элемент системы σ_k содержится в некотором множестве $U \in \beta_k$, а β_k вписано в ω, то покрытие σ вписано в ω.

Остается доказать, что кратность покрытия σ не превосходит $2n+1$.

Берем произвольную точку $x \in X$ и наименьшее такое q, что $x \in \tilde{\sigma}_q$. По самому определению открытых множеств $\tilde{\sigma}_k$ и замкнутых множеств F_k имеем $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\beta}_k \setminus F_{k-1}$ и $F_{k-1} \supseteq [\tilde{\beta}_{k-2}]$, $k = 3, 4, \ldots$; значит,

$$\tilde{\sigma}_k \subseteq \tilde{\beta}_k, \qquad \tilde{\sigma}_k \cap [\tilde{\beta}_{k-2}] = \Lambda.$$

Поэтому (см. 2°) при $k \geqslant q+2$ имеем

$$\tilde{\sigma}_k \cap \tilde{\sigma}_q = \Lambda,$$

и, следовательно, $x \notin \tilde{\sigma}_k$. Таким образом, точка x, содержась в каких-то элементах системы σ_q, может еще содержаться в некоторых элементах системы σ_{q+1}, но не может содержаться ни в одном элементе какого-либо σ_k, где $k \geqslant q+2$ или $k \leqslant q-1$ (последнее — в силу выбора q).

Итак, пусть x содержится в каких-то элементах

$$U_i \setminus F_{q-1} \in \sigma_q, \qquad U_i \in \beta_q \subseteq \alpha_q \tag{4}$$

и, может быть, еще в элементах

$$U_j \setminus F_q \in \sigma_{q+1}, \quad U_j \in \beta_{q+1} \subseteq \alpha_{q+1}. \tag{5}$$

Но так как покрытие α_q имеет кратность $n+1$, то число множеств вида (4) не превосходит $n+1$; значит, если множества вида (5) отсутствуют, то общее число элементов покрытия σ, содержащих точку x, не превосходит $n+1$.

Пусть теперь имеются множества вида (5), содержащие точку x. Так как покрытие α_{q+1} имеет кратность $n+1$, то число содержащих точку x множеств вида (5) не превосходит $n+1$. Сосчитаем, сколько множеств вида (4) могут в этом случае содержать точку x. Так как точка x, принадлежа хотя бы одному множеству $U_j \setminus F_q \in \sigma_{q+1}$, не может лежать в

$$F_q = [C_q] \cup [\tilde{\beta}_{q-1}],$$

то она и подавно не может принадлежать множеству C_q, т. е. она содержится не более чем в n элементах $U_i \in \beta_q$, значит, не более чем в n множествах вида (4). Таким образом, общее число элементов систем σ_q и σ_{q+1}, т. е. элементов покрытия σ, в которых может лежать точка x, в любом случае не больше, чем $(n+1)+n$. Следовательно, кратность покрытия σ не больше, чем $2n+1$, и формула Катетова доказана.

§ 5. Теорема Ситникова о метрических свойствах n-мерных замкнутых множеств в R^m

1. Определения и предварительные предложения. Без дальнейших оговорок будем рассматривать лишь компакты X, расположенные в том или ином эвклидовом пространстве R^m.

Пусть $A=\{a_1, \ldots, a_s\}$ — конечное множество, лежащее в X. *Порядком точки* $x \in X$ *относительно множества* A называем число ближайших к точке x точек множества A, т. е. число тех $a_i \in A$, для которых $\rho(x, a_i)=\rho(x, A)$. Говорим, что *пространство* X *имеет относительно множества* A *порядок* n, если существует точка $x \in X$, порядок которой относительно A равен n, и нет точки x, порядок которой относительно A больше n. Это понятие было введено в работе П. С. Александрова [9] (стр. 123—125), где было замечено, что n-мерный компакт X имеет при достаточно малом $\varepsilon > 0$ относительно любой своей ε-сети A порядок $\geqslant n+1$. Докажем это утверждение. Пусть $A=\{a_1, \ldots, a_s\}$ есть ε-сеть компакта X, и пусть порядок X относительно A есть $r+1$. Обозначим через A_i множество всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, a_i)=\rho(x, A)$. Тогда $\alpha=\{A_1, \ldots, A_s\}$ есть замкнутое 2ε-покрытие кратности $r+1$ компакта X — и наше утверждение доказано. В той же работе [9] был поставлен вопрос, существует ли во всяком n-мерном компакте при любом $\varepsilon > 0$ ε-сеть порядка $n+1$. Сейчас будет дано решение этого вопроса.

Назовем, прежде всего, n-мерный компакт X *метрически правильным* или, для краткости, просто правильным, если при любом $\varepsilon > 0$ он имеет порядок $n+1$ относительно некоторой своей ε-сети. Мы покажем, что все полиэдры суть правильные компакты и что всякий компакт гомеоморфен некоторому правильному компакту. В то же время даже в R^3 существуют нульмерные компакты, не являющиеся правильными.

Предложение 1. *Всякий полиэдр есть правильный компакт.*

Это предложение, очевидно, вытекает из следующего:

Предложение 1′. *Всякая ε-сеть n-мерного полиэдра $P \subset R^m$, не содержащего изолированных точек, сколь угодно малым сдвигом может быть переведена в ε-сеть того же полиэдра P, относительно которой P имеет порядок $\leqslant n+1$.*

Докажем предложение 1′. В основе доказательства лежит

Лемма 1. *Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ — какие-нибудь точки n-мерного полиэдра P, а T^p — произвольный симплекс раз навсегда выбранной триангуляции этого полиэдра.*

Тогда сколь угодно малым сдвигом можно точки $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1}$ перевести соответственно в точки $a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n+1}$ полиэдра P, обладающие тем свойством, что в T^p нет ни одной точки, отстоящей от всех точек a'_i на одно и то же расстояние.

Доказательство леммы 1 начнем со следующего замечания: сколь угодно малым сдвигом можно точку a_i перевести в точку $a'_i \in P$ таким образом, чтобы данный q-мерный выпуклый многогранник Θ содержал точку x, для которой $\rho(x, a'_i) \neq \rho(x, a_0)$: достаточно выбрать произвольно точку $x \in \Theta$, а точку a'_i, произвольно близкую к точке a_i, взять вне нигде не плотного в P пересечения этого полиэдра с $(m-1)$-мерной сферой с центром x и радиусом $\rho(x, a_0)$. При этом пересечение многогранника Θ с плоскостью L'^{m-1}, проходящей перпендикулярно к отрезку $\overline{a_0a'_i}$ через его середину, будет выпуклым многогранником размерности $\leqslant q-1$ *).

Через $L_i'^{m-1}$ обозначим $(m-1)$-мерную плоскость, проходящую через середину отрезка $\overline{a_0a'_i}$ перпендикулярно к этому отрезку: предположим, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ уже переведены произвольно малым сдвигом в такие точки $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$, что $T^p \cap L_1'^{m-1} \cap \ldots \cap L_k'^{m-1}$ имеет размерность $\leqslant p-k$. Сдвинем (если это нужно) произвольно мало точку a_{k+1} в точку a'_{k+1} таким образом, чтобы в выпуклом многограннике $(T^p \cap L_1'^{m-1} \cap \ldots \ldots \cap L_k'^{m-1})$ существовала точка, имеющая неравные расстояния от a_0 и от a'_{k+1}. Тогда пересечение $(T^p \cap L_1'^{m-1} \cap \ldots \cap L_k'^{m-1}) \cap L_{k+1}'^{m-1}$ будет иметь размерность $\leqslant p-k-1$. При $k=n+1$ получим, что пересечение $T^p \cap L_1'^{m-1} \cap \ldots \cap L_{n+1}'^{m-1}$ пусто. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если точки $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ полиэдра P размерности n таковы, что в замкнутых симплексах $T_1, \ldots, T_s$ фиксированной триангуляции полиэдра P нет точки, отстоящей от всех a_i на одно и то же расстояние, то таковы же точки $a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n+1}$, полученные любым достаточно малым сдвигом точек $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$.*

В самом деле, для $x \in \bigcup_{j=1}^{s} T_j$ обозначим через σ_x наибольшее из положительных чисел $|\rho(x, a_i) - \rho(x, a_k)|$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n+1$; нижняя грань σ всех σ_x положительна, откуда лемма 2 и вытекает $\left(\text{годится любой } \frac{\sigma}{4}\text{-сдвиг}\right)$.

Если теперь дана какая-нибудь конечная ε-сеть A полиэдра P, то, перебирая по очереди все замкнутые симплексы фиксированной триангуляции полиэдра P и все подмножества A,

*) Так как это пересечение содержит все точки из Θ, одинаково удаленные от a_0 и a'_i.

содержащие по $n+2$ точек, и применяя к ним леммы 1 и 2, можно сколь угодно малым сдвигом перевести множество A в множество $A' \subset P$, также являющееся ε-сетью нашего полиэдра и имеющее по отношению к нему порядок $\leqslant n+1$. Предложение 1′, а значит, и предложение 1 этим доказаны.

2. Доказательство теоремы Ситникова.

Теорема 6 (Ситников [1]). *Всякий компакт $X \subseteq R^m$ гомеоморфен метрически правильному компакту. Более того, если $\dim X = n$ и $m \geqslant 2n+1$, то существует топологическое отображение $f\colon X \to R^m$, сколь угодно мало отличающееся от тождественного и переводящее X в метрически правильный компакт.*

Теорема 6 содержится в более сильном предложении:

Теорема 6′. *В полном метрическом пространстве C всех непрерывных отображений n-мерного компакта X в пространство R^m, $m \geqslant 2n+1$, множество всех топологических отображений на метрически правильные компакты есть всюду плотное в C множество типа G_δ.*

Теорема 6′ легко вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon > 0$ дано произвольно и $m \geqslant 2n+1$, $n = \dim X$. Обозначим через C_ε множество всех ε-отображений компакта X на компакты $Y \subset R^m$, содержащие ε-сети порядка $\leqslant n+1$ в Y. Множество C_ε открыто и всюду плотно в C.*

Предположим, что лемма 3 доказана. Тогда множество $C_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, есть всюду плотное в C множество типа G_δ, состоящее из топологических отображений компакта X на правильные компакты, лежащие в R^m.

Итак, остается доказать лемму 3. Эта лемма вытекает из следующих двух утверждений, из которых первое, в силу предложения 1, гарантирует, что C_ε всюду плотно в C, а второе — что C_ε открыто в C.

Утверждение 1°. *Всякое непрерывное отображение n-мерного компакта X в пространство R^m, $m \geqslant 2n+1$, можно как угодно хорошо аппроксимировать ε-отображением на некоторый не более чем n-мерный полиэдр.*

Утверждение 2°. *Если компакт $X \subset R^m$ содержит ε-сеть A порядка $\leqslant n+1$, то такую же сеть содержит и всякий компакт $X' \subset R^m$, отклонение *) $h(X', X)$ которого от компакта X достаточно мало.*

---

*) Если X_1 и X_2 — два компакта, являющиеся множествами, лежащими в метрическом пространстве R, то отклонением одного из этих компактов от другого (или «хаусдорфовым расстоянием» между ними) называется нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon \geqslant 0$, одновременно удовлетворяющих условиям $O(X_1, \varepsilon) \supseteq X_2$, $O(X_2, \varepsilon) \supseteq X_1$.

Утверждение 1° доказано в гл. 4 (§ 2, теорема 2), поэтому все сводится к доказательству утверждения 2°.

Для достижения этой последней цели сначала доказываем (автоматическим рассуждением от противного), что при достаточно малом $\delta > 0$ множество A сохраняет порядок $\leqslant n+1$ и в $[O(X, \delta)]$. Выбрав δ, удовлетворяющее этому условию, находим такое $\delta' > 0$, что всякое множество $A' \subset O(X, \delta)$, полученное из A посредством δ'-сдвига, также имеет в $[O(X, \delta)]$ порядок $\leqslant n+1$ (существование такого δ' в свою очередь легко доказывается от противного). Если теперь отклонение $h(X, X')$ достаточно мало, то X' не только лежит в $O(X, \delta)$, но и содержит ε-сеть A', получающуюся из A посредством δ'-сдвига, и эта сеть имеет в $O(X, \delta)$, значит и подавно в X', порядок $\leqslant n+1$.

Теоремы 6 и 6′ полностью доказаны.

3. Существование метрически неправильных компактов. Даже в трехмерном пространстве R^3 существуют компакты, не являющиеся метрически правильными. Примером такого компакта может служить нульмерное замкнутое множество Φ Антуана — Урысона (см. Урысон [5], т. 1, стр. 121), обладающее тем свойством, что всякий достаточно малый по диаметру выпуклый многогранник, содержащий внутри себя точки множества Φ, содержит их и на границе. Покажем, что с этим последним свойством не совместима метрическая правильность компакта Φ. Действительно, предположим, что для данного произвольно малого ε в Φ существует ε-сеть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, имеющая в Φ порядок 1 (ведь $\dim \Phi = 0$). Обозначим через $B_{i,k}$ множество всех точек $x \in R^3$, для которых $\rho(x, a_i) \leqslant \rho(x, a_k)$. Множество $B_{i,k}$ есть, очевидно, полупространство; поэтому множество B_i, состоящее из всех точек $x \in R^3$, удовлетворяющих неравенствам $\rho(x, a_i) \leqslant \rho(x, a_k)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, s$, есть пересечение конечного числа полупространств, т. е. выпуклый многогранник (в собственном смысле слова или в обобщенном, когда допускаются бесконечные многогранники). Так как граница каждого B_i состоит из точек x, для которых имеются по крайней мере две ближайшие точки множества A, и A по предположению имеет в Φ порядок 1, то ни одна точка Φ не лежит на границе какого-либо B_i. Далее, все точки множества $\Phi \cap B_i$ отстоят от точки a_i на расстояние $< \varepsilon$; поэтому куб Q_i стороны 2ε с центром в a_i и ребрами, параллельными осям координат, не содержит на своей границе ни одной точки множества $\Phi \cap B_i$. Положим $D_i = B_i \cap Q_i$. На границах выпуклых (собственных) многогранников D_i не лежит ни одной точки множества Φ, вопреки основному свойству множества Антуана — Урысона.

Глава девятая

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОВЫШАЮЩИЕ И ПОНИЖАЮЩИЕ РАЗМЕРНОСТЬ

Введение

В §§ 1 и 2 соответственно доказываются в достаточно широких (хотя и не в самых широких) предположениях классические теоремы В. Гуревича о повышении и понижении размерности при замкнутых отображениях.

Два остальных параграфа посвящены открытым отображениям. В § 3 изучаются счетнократные открытые отображения: доказывается в общем случае (локально) бикомпактных пространств X и Y, что при названных отображениях $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ всегда $\dim Y = \dim X$ и отображение f имеет всюду плотное в X множество точек локальной топологичности.

В § 4 доказывается, что всякий бикомпакт Y положительной размерности (конечной или бесконечной) является образом некоторого одномерного бикомпакта X при некотором открытом нульмерном непрерывном отображении; для случая, когда Y — квадрат, этот факт был впервые доказан Л. В. Келдыш; этот частный случай вынесен в Прибавление к этой главе.

§ 1. Замкнутые отображения, повышающие размерность

В этом параграфе будут доказаны следующие две теоремы, являющиеся обобщением классической теоремы Гуревича [3], доказанной им для пространств со счетной базой:

Теорема 1 (Морита [6]). *Если непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ нормального пространства на нормальное пространство Y имеет кратность $\leqslant k+1$, то*

$$\dim Y \leqslant \operatorname{Ind} X + k.$$

Теорема 2 (Морита [6] *)). *Если непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на нор-*

*) Для совершенно нормального X.

мальное пространство Y имеет кратность $\leqslant k+1$ и хотя бы одно из пространств X или Y совершенно нормально, то $\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X+k$.

Из теоремы 2, в силу совершенной нормальности метрического пространства X и равенства $\dim X = \operatorname{Ind} X$ (теорема 9 из § 3 гл. 6), вытекает

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 пространство X метризуемо, то*

$$\dim Y \leqslant \operatorname{Ind} Y \leqslant \dim X + k.$$

Замечание. Зарелуа [5] показал, что в условиях теоремы 1 верно более точное неравенство

$$\dim Y \leqslant \dim X + k.$$

Лемма 1. *Пусть X и Y—нормальные пространства и $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — непрерывное замкнутое отображение кратности $\leqslant k+1$, $k \geqslant 0$. Рассмотрим непересекающиеся замкнутые в Y множества F_1 и F_2 и перегородку C между множествами $f^{-1}F_i$, $i=1, 2$, в X. Если замкнутые в X множества Φ_i таковы, что*

$$f^{-1}F_i \subseteq \Phi_i,\quad i=1,2,\qquad \Phi_1 \cap \Phi_2 = C \ \text{и}\ \Phi_1 \cup \Phi_2 = X,$$

то

(а) *множество $D = f\Phi_1 \cap f\Phi_2$ является перегородкой между F_1 и F_2 в Y;*

(б) $D \setminus fC \subseteq f(\Phi_i \setminus C)$, $i=1, 2$;

(в) *на множестве $f^{-1}(D \setminus fC) \cap \Phi_i$, $i=1,2$, отображение f имеет кратность $\leqslant k$.*

Доказательство. Утверждение (а) следует из того, что множества $Y \setminus f\Phi_2$ и $Y \setminus f\Phi_1$ открыты, дизъюнктны и содержат соответственно F_1 и F_2. Утверждение (б) следует из того, что

$$D \setminus fC = (f\Phi_1 \cap f\Phi_2) \setminus fC \subseteq f\Phi_i \setminus fC, \qquad i=1,2.$$

Утверждение (в) непосредственно следует из утверждения (б).

Предложение 1. *Если в нормальном пространстве X для произвольной дизъюнктной пары замкнутых множеств A и B существует перегородка C размерности $\dim C \leqslant n$, то*

$$\dim X \leqslant n+1, \qquad n=-1, 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ пространства X. Возьмем замкнутое покрытие $\lambda = \{F_1, \ldots, F_s\}$ пространства X, комбинаторно вписанное в ω. По условию для каждого i между F_i и $X \setminus O_i$ существует перегородка C_i размерности $\dim C_i \leqslant n$. Для каждого i множество $X \setminus C_i$, по определению перегородки, представимо в виде суммы открытых в X дизъюнктных множеств $U_i \supseteq F_i$ и $U_i' \supseteq X \setminus O_i$. Ясно, что $U_i \subseteq O_i$, $i=1, \ldots, s$.

Положим $V_1 = U_1$ и $V_i = U_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} [U_j]$ для $i > 1$.

Система ν' открытых множеств V_i дизъюнктна, т. е. однократна, и вписана в покрытие ω. Нетрудно видеть, что

$$\Phi = X \setminus \bigcup_{i=1}^{s} V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{гр} U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} C_i.$$

Следовательно, $\dim \Phi \leqslant \dim \bigcup\limits_{i=1}^{s} C_i \leqslant n$. Впишем в покрытие $\{\Phi \cap O_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, конечное замкнутое кратности $\leqslant n+1$ покрытие μ множества Φ.

Систему μ подобно раздуем до открытой в X системы ν'', все еще вписанной в ω (см. гл. 1, § 10). Тогда кратность $\nu'' \leqslant \leqslant n+1$.

Система $\nu = \nu' \cup \nu''$ является открытым покрытием пространства X кратности $\leqslant n+2$, вписанным в ω.

Следовательно, $\dim X \leqslant n+1$, ч. и т. д.

Докажем теорему 1. Утверждение теоремы очевидно для $k = 0$. Случай любого $k \geqslant 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$ уже был рассмотрен в теореме 11 § 3 гл. 6.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо, если $\operatorname{Ind} X + k \leqslant n - 1$, и пусть

$$\operatorname{Ind} X + k = n, \qquad \operatorname{Ind} X \geqslant 0, \qquad k \geqslant 0.$$

Для $\operatorname{Ind} X = 0$ доказываемая формула, как уже отмечалось, верна. Пусть она верна при $\operatorname{Ind} X \leqslant r - 1$, $r \geqslant 1$, и пусть $\operatorname{Ind} X = r$ (т. е. $r + k = n$).

В пространстве Y рассмотрим дизъюнктную пару замкнутых множеств F_1 и F_2. Между множествами $f^{-1}F_i$, $i = 1, 2$, в X возьмем перегородку C размерности $\operatorname{Ind} C \leqslant r - 1$. Выберем замкнутые в X множества $\Phi_i \supseteq f^{-1}F_i$, $i = 1, 2$, так, чтобы $\Phi_1 \cap \Phi_2 = C$ и $\Phi_1 \cup \Phi_2 = X$. Тогда, по лемме 1, множество $D = f\Phi_1 \cap f\Phi_2$ является перегородкой в Y между F_1 и F_2.

Так как $\operatorname{Ind} C + k \leqslant r - 1 + k < n$, то, по индуктивному предположению,

$$\dim fC \leqslant \operatorname{Ind} C + k \leqslant n - 1.$$

Докажем, что

$$\operatorname{rd}_D D \setminus fC \leqslant n - 1.$$

Рассмотрим замкнутое в D множество $\Psi \subseteq D \setminus fC$. Множество $\mathrm{X} = f^{-1}\Psi \cap (\Phi_1 \setminus C) = f^{-1}\Psi \cap \Phi_1$ замкнуто в X. Поэтому отображение $f\colon \mathrm{X} \to \Psi$ замкнуто и, в силу утверждения (в) леммы 1, имеет кратность $\leqslant k$. Так как $\operatorname{Ind} \mathrm{X} + (k-1) \leqslant \leqslant \operatorname{Ind} X + k - 1 \leqslant n - 1$, то, по индуктивному предположению,

$$\dim \Psi \leqslant \operatorname{Ind} X + k - 1 \leqslant n - 1.$$

По теореме 15 из § 6 гл. 4 $\dim D \leqslant n-1$. Следовательно, по предложению 1

$$\dim Y \leqslant n = \operatorname{Ind} X + k.$$

Таким образом, теорема верна при $\operatorname{Ind} X + k \leqslant n$, а следовательно, верна и вообще. Теорема доказана.

Теорема 2 доказывается дословно так же, как теорема 1, только в конце вместо теоремы 15 из § 6 гл. 4 надо применить теорему 11 из § 3 гл 7. Кроме того, напомним, что замкнутый образ совершенно нормального пространства есть совершенно нормальное пространство (гл. 1, § 5, предложение 5).

§ 2. Замкнутые отображеиия, понижающие размерность

В этом параграфе доказывается формула Гуревича *)

$$\dim X \leqslant \dim f + \dim Y,$$

полученная им для замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ пространства со счетной базой X на пространство со счетной базой Y.

Теорема 3 (Морита [6]). *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на паракомпакт Y замкнуто, то*

$$\dim X \leqslant \dim f + \operatorname{Ind} Y. \tag{1}$$

Из равенства $\dim Y = \operatorname{Ind} Y$ для метрического пространства Y (гл. 6), его паракомпактности (гл. 1, § 11) и из сформулированной теоремы вытекает

Следствие 1. *Для замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на метрическое пространство Y имеет место неравенство*

$$\dim X \leqslant \dim f + \dim Y. \tag{2}$$

Замечание. Скляренко [5] доказал неравенство (2) для паракомпактных X и Y. Затем Пасынков [12] показал, что пространство X можно предположить нормальным (оставляя Y паракомпактным). Филиппов [3] построил пример замкнутого отображения $f\colon X \to Y$ нормального пространства X на нормальное пространство Y, для которого

$$1 = \dim X > (\dim Y = 0) + (\dim f = 0).$$

Относительно близких и, в частности, более общих результатов см. также работы Вайнштейна [2], Скляренко [5], Федорчука [3] (см. замечание 3 из § 6 гл. 5), Пасынкова [18], Филиппова [3].

*) См. Гуревич и Волмэн [1].

Доказательству теоремы 3 предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего докажем аналог предложения 4 из § 9 гл. 5 для случая произвольных нормальных пространств.

Лемма 1. *Пусть нормальное пространство X является суммой двух замкнутых множеств F_1 и F_2. Пусть непрерывные отображения*

$$f_1\colon F_1 \to S^n \quad \textit{и} \quad f_2\colon F_2 \to S^n$$

таковы, что множество H тех точек $x \in F = F_1 \cap F_2$, в которых $f_1 x \neq f_2 x$, имеет относительную размерность $\operatorname{rd}_F H \leqslant n-1$ (гл. 4, § 6). Тогда каждое из отображений f_1 и f_2 может быть продолжено до непрерывного отображения X в S^n.

Доказательство. Рассмотрим максимальное бикомпактное расширение βX пространства X.

Замыкания $[F_1]_{\beta X}$, $[F_2]_{\beta X}$ и $[F]_{\beta X}$ отождествим соответственно с βF_1, βF_2 и βF (см. гл. 1, § 9, предложение 1). По предложению 3 из § 9 гл. 1 $\beta F = \beta F_1 \cap \beta F_2$. Кроме того, очевидно, $\beta X = \beta F_1 \cup \beta F_2$.

Непрерывное продолжение отображения f_i с F_i на βF_i обозначим через f'_i, $i = 1, 2$. Множество тех точек $x \in \beta X$, в которых $f'_1 x \neq f'_2 x$, обозначим через H'. Оно, очевидно, содержится в пересечении $\beta F_1 \cap \beta F_2 = \beta F$. Покажем, что множество H' открыто в βF и имеет в βF тип F_σ. Действительно, функция $gx = \rho(f'_1 x, f'_2 x)$ непрерывна на βF и $H' = g^{-1}(0, +\infty) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$.

Множества $H'_k = g^{-1}\left(\frac{1}{k},\ +\infty\right)$, очевидно, удовлетворяют условиям

$$H'_k \subseteq [H'_k] \subseteq H'_{k+1} \subseteq \ldots, \qquad k = 1, 2, 3, \ \ldots, \ \text{и} \ \bigcup_{k=1}^{\infty} H'_k = H'.$$

Точки множества H'_k являются точками прикосновения множества $H_k = H'_k \cap F$. Действительно, точки x из H'_k являются точками прикосновения множества F и в окрестности H'_k этих точек x содержатся лишь те точки из F, которые содержатся в H_k. Поэтому $H'_k \subseteq [H_k]_{\beta F} = [[H_k]_F]_{\beta F}$, откуда $[H'_k] = [[H_k]_F]_{\beta F}$. Следовательно, в силу нормальности пространства F множество $[H'_k]$ гомеоморфно максимальному бикомпактному расширению $\beta [H_k]_F$ замкнутого в F множества $[H_k]_F$. По равенству (1) из п. 1 § 1 гл. 5 $\dim [H'_k] = \dim [H_k]_F$. Но так как $H = H' \cap F$ и $[H_k]_F \subseteq [H'_k] \subseteq H'$, то $[H_k]_F \subseteq H$. По условию

$\mathrm{rd}_F H \leqslant n-1$, откуда $\dim [H_k]_F \leqslant n-1$, следовательно, и $\dim [H'_k] \leqslant n-1$.

Множество H', имея тип F_σ в бикомпакте βF, нормально (см. гл. 1, § 5, предложение 3). По теореме суммы $\dim H' \leqslant \leqslant \sup\limits_k \dim [H'_k] \leqslant n-1$, откуда и $\mathrm{rd}\, H' \leqslant n-1$.

Предложение 4 из § 9 гл. 5 позволяет непрерывно продолжить отображения f'_1 и f'_2 с βF_1 и βF_2 на βX. Но тогда отображения f_1 и f_2 с F_1 и F_2 будут непрерывно продолжены на X. Лемма 1 доказана.

Нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 2. *Пусть дано непрерывное отображение g замкнутого подмножества F нормального пространства X в n-мерную сферу S^n. Предположим, что существует такая счетная система открытых в X множеств V_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, что*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = X \quad \text{и} \quad \dim \mathrm{rp}\, V_i \leqslant n-1, \qquad i=1, 2, \ldots,$$

а отображение g может быть непрерывно продолжено на каждое из множеств $F \cup [V_i]$. Тогда отображение g может быть непрерывно продолжено на все пространство X.

Доказательство. Продолжение отображения g с F на $F \cup [V_1]$ обозначим через g_1. Предположим, что для всех $i < k$, $k > 1$, уже построены такие непрерывные отображения $g_i\colon F \cup \bigcup\limits_{j \leqslant i} [V_j] \to S^n$, что g_{i+1} является продолжением g_i.

Нормальное пространство $F \cup \bigcup\limits_{i \leqslant k} [V_i]$ разлагается в сумму двух замкнутых множеств $F \cup \bigcup\limits_{i<k} [V_i] = F_1$ и $(F \cup [V_k]) \setminus \bigcup\limits_{i<k} V_i = F_2$. По условию существует продолжение g' отображения g на F_2. Множество H тех точек x, для которых $g_{k-1} x \neq g' x$, принадлежит множеству $(F_1 \cap F_2) \setminus F \subseteq \mathrm{rp} \bigcup\limits_{i<k} V_i \subseteq \bigcup\limits_{i<k} \mathrm{rp}\, V_i$. Следовательно, любое подмножество множества H, замкнутое в $F_1 \cap F_2$, также принадлежит множеству $\bigcup\limits_{i<k} \mathrm{rp}\, V_i$. По теореме суммы $\dim \bigcup\limits_{i<k} \mathrm{rp}\, V_i \leqslant n-1$. Поэтому

$$\mathrm{rd}_{F_1 \cap F_2} H \leqslant \dim \bigcup_{i<k} \mathrm{rp}\; V_i \leqslant n-1.$$

Лемма 1 позволяет теперь построить продолжение g_k отображения g_{k-1} на множество $F_1 \cup F_2 = F \cup \bigcup\limits_{i \leqslant k} [V_i]$. Отображения g_k можно, таким образом, построить для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$

Для произвольной точки $x \in X$ через $k(x)$ обозначим такой наименьший номер k, что $x \in V_k$. Положим $G(x) = g_{k(x)}\, x = g_{k(x)+1} x = g_{k(x)+2} x = \ldots$ Отображение G является, очевидно, продолжением отображения g на все пространство X. Так как отображение G совпадает на V_k с непрерывным отображением g_k, а множества V_k образуют открытое покрытие пространства X, то отображение G непрерывно (см. гл. 1, § 1, предложение 10′). Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 3. В случае $\dim f = \infty$ неравенство (1) очевидно.

Пусть $\dim f = n$. Сначала докажем неравенство (1) в случае $\operatorname{Ind} Y = 0$. Заметим, что в этом случае и $\dim Y = 0$ (см. гл. 2, § 3).

Возьмем произвольное конечное открытое покрытие ω пространства X. Так как $\dim f^{-1} y \leqslant n$ для каждого $y \in Y$, то в покрытие ω для каждого $y \in Y$ можно вписать конечное замкнутое покрытие λ_y множества $f^{-1} y$ кратности $\leqslant n+1$. Систему λ_y можно подобно раздуть с сохранением вписанности в ω до открытой системы ν_y (гл. 1, § 10). Таким образом, каждая система ν_y имеет кратность $\leqslant n+1$. Множество $\tilde{\nu}_y$ является окрестностью прообраза $f^{-1} y$. Поэтому (см. гл. 1, § 1, предложение 11) существует такая окрестность Oy точки y, что $f^{-1} Oy \subseteq \tilde{\nu}_y$. В покрытие $\{Oy\}$ пространства Y впишем однократное покрытие $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ (см. гл. 4, § 11 или гл. 6, § 2, теорема 4). Для каждого α фиксируем такую точку $y = y(\alpha)$, что $U_\alpha \subseteq Oy(\alpha)$, и, следовательно,

$$f^{-1} U_\alpha \subseteq \tilde{\nu}_{y(\alpha)}.$$

Через η_α обозначим систему пересечений множества $f^{-1} U_\alpha$ с элементами системы $\nu_{y(\alpha)}$. Ясно, что $\tilde{\eta}_\alpha = f^{-1} U_\alpha$. Поэтому система $\eta = \bigcup\limits_\alpha \eta_\alpha$ является открытым покрытием пространства X. Так как система η_α комбинаторно вписана в систему $\nu_{y(\alpha)}$, то $\operatorname{кр} \eta_\alpha \leqslant n+1$ и система η_α вписана в ω. Следовательно, и покрытие η вписано в ω. Наконец, так как множества $f^{-1} U_\alpha$ дизъюнктны, то элементы систем η_α для различных α дизъюнктны. Поэтому кратность η не превосходит верхней грани кратностей систем η_α, следовательно, $\operatorname{кр} \eta \leqslant n+1$. Таким образом,

$$\dim X \leqslant n = \dim f = \dim f + \operatorname{Ind} Y.$$

Неравенство (1) в случае $\operatorname{Ind} Y = 0$ установлено.

Предположим, что неравенство (1) верно в случае $\operatorname{Ind} Y < m$, $m > 0$, и пусть $\operatorname{Ind} Y = m$.

Рассмотрим в X произвольное замкнутое подмножество F и непрерывное отображение g: $F \to S^{n+m}$. Для доказательства соотношения $\dim X \leqslant n+m$ достаточно доказать, что g можно непрерывно продолжить на все пространство X (см. гл. 4, § 6, теорема 14'). Так как $\dim f^{-1}y \leqslant n < n+m$ для любой точки $y \in Y$, то отображение g можно непрерывно продолжить на каждое множество $F \cup f^{-1}y$ и даже на некоторую окрестность U_y множества $F \cup f^{-1}y$, $y \in Y$, до отображения g_y (см. гл. 4, § 6, лемма 1 и гл. 1, § 5, предложение 8). Из замкнутости отображения f вытекает существование у каждой точки y такой окрестности Oy, что $f^{-1}Oy \subseteq U_y$. Так как Y — паракомпакт, то в покрытие $\{Oy\}$ можно вписать σ-дискретное замкнутое покрытие ν, распадающееся в сумму дискретных систем $\nu_i = \{\Phi_{\alpha i}\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ (см. гл. 1, § 10, предложение 9). Системы ν_i^{-1} замкнутых множеств $f^{-1}\Phi_{\alpha i}$ также дискретны, и каждое множество $f^{-1}\Phi_{\alpha i}$ содержится в одном из множеств U_y. Следовательно, отображение g непрерывно продолжается на каждое множество $F \cup \tilde{\nu}_i^{-1}$ (до отображения g_i, равного на $f^{-1}\Phi_{\alpha i}$ одному из таких отображений g_y, для которых $f^{-1}\Phi_{\alpha i} \subseteq U_y$). Но тогда отображение g продолжается и на некоторые окрестности U_i множеств $F \cup \tilde{\nu}_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Отображение f замкнуто, и $\tilde{\nu}_i^{-1} = f^{-1}\tilde{\nu}_i$; поэтому множества $\tilde{\nu}_i$ обладают такими окрестностями O_i, что $f^{-1}O_i \subseteq U_i$. Так как $\operatorname{Ind} Y = m$, то можно взять такие окрестности W_i множеств $\tilde{\nu}_i$, что $[W_i] \subseteq O_i$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} W_i \leqslant m-1$. Тогда $f^{-1}[W_i] \subseteq U_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Мы получили систему открытых в X множеств $V_i = f^{-1}W_i \supseteq \tilde{\nu}_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, являющуюся покрытием пространства X; отображение g непрерывно продолжается на замыкание $[V_i] \subseteq f^{-1}[W_i] \subseteq U_i$ каждого из этих множеств; наконец, в силу непрерывности f имеем $f \operatorname{гр} V_i \subseteq \operatorname{гр} W_i$; отсюда, по индуктивному предположению, следует, что

$$\dim \operatorname{гр} V_i \leqslant \dim f + \operatorname{Ind} \operatorname{гр} W_i \leqslant n+m-1.$$

Из леммы 2 следует, что отображение g можно продолжить на X. Поэтому $\dim X \leqslant n+m$. Теорема 3 доказана.

§ 3. Счетнократные открытые отображения

Напомним, что отображение f: $X \to Y$ называется счетнократным, если прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ не более чем счетен.

Точка x пространства X называется точкой локальной топологичности отображения f: $X \to Y$, если существует такая окрестность Ox точки x, на которой отображение $f\colon Ox \to fOx$ является гомеоморфизмом. Очевидно, множество точек локальной топологичности отображения f открыто в X.

Теорема 4 *). *Множество точек локальной топологичности непрерывного, открытого и счетнократного отображения $f\colon X \to Y$ локально бикомпактного пространства X всюду плотно в X* **).

Лемма 1. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ пространства X в пространство Y непрерывно и открыто. Пусть еще в X дана дизъюнктная система открытых множеств O_i^{n-1}, $i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, не содержащих точек локальной топологичности отображения f и $fO_i^{n-1}=V^{n-1}$ для любого i. Тогда существуют такие открытые в X множества O_j^n, $j=1, \ldots, 2^n$, и такое открытое в Y множество V^n, что*

(1) $[O_{2i-1}^n \cup O_{2i}^n] \subseteq O_i^{n-1}, \quad i=1, \ldots, 2^{n-1};$

(2) $[O_j^n] \cap [O_{j'}^n] = \Lambda, \quad j \neq j';$

(3) $fO_j^n = V^n, \quad j=1, \ldots, 2^n, \ V^n \subseteq V^{n-1};$

(4) *множества O_j^n не содержат точек локальной топологичности отображения f, $j=1, \ldots, 2^n$.*

Доказательство. Положим $V_0^n = V^{n-1}$. Так как открытое множество O_1^{n-1} не содержит точек локальной топологичности отображения f, то в O_1^{n-1} найдутся две такие различные точки x_1 и x_2, что $fx_1 = fx_2$. Возьмем окрестности O_1' и O_2' точек x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям $[O_1' \cup O_2'] \subseteq O_1^{n-1}$, $[O_1'] \cap [O_2'] = \Lambda$, и положим $V_1^n = fO_1' \cap fO_2' \cap V_0^n$.

Предположим, что для любого $i < k$ уже построены такие открытые множества O_{2i-1}' и O_{2i}', что

$$[O_{2i-1}' \cup O_{2i}'] \subseteq O_i^{n-1}, \qquad [O_{2i-1}'] \cap [O_{2i}'] = \Lambda,$$

и множество $V_i^n = fO_{2i-1}' \cap fO_{2i}' \cap V_{i-1}^n$ непусто. Пусть $i=k$.

Множество $f^{-1}V_{k-1}^n \cap O_k^{n-1}$, очевидно, непусто и не содержит точек локальной топологичности отображения f. Поэтому в нем можно выбрать такие различные точки x_{2k-1} и x_{2k}, что $fx_{2k-1} = fx_{2k}$. Возьмем окрестности O_{2k-1}' и O_{2k}' точек x_{2k-1} и x_{2k},

---

*) Доказана Колмогоровым [2] для компактов и Пасынковым [15] в общем случае.

**) Сформулированное утверждение имеет место и при замене локальной бикомпактности пространства X на его полноту в смысле Чеха (см. Пасынков [15]).

удовлетворяющие соотношениям $[O'_{2k-1} \cup O'_{2k}] \subseteq O_k^{n-1}$, $[O'_{2k-1}] \cap \cap [O'_{2k}] = \Lambda$, и положим

$$V_k^n = fO'_{2k-1} \cap fO'_{2k} \cap V_{k-1}^n.$$

Продолжая описанный процесс, получим множества O'_{2i-1}, O'_{2i} и V_i^n для всех $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$.

Ясно, что множества $O_j = O'_j \cap f^{-1} V^n_{2^{n-1}}$, $j = 1, \ldots, 2^n$, и $V^n = V^n_{2^{n-1}}$ являются искомыми.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что множество точек локальной топологичности отображения f не является всюду плотным в X. Тогда в X существует открытое множество O, не содержащее точек локальной топологичности отображения f. В силу локальной бикомпактности пространства X можно считать, что замыкание $[O]$ бикомпактно.

Положим $O_1^0 = O$ и $V^0 = fO$. Применяя предыдущую лемму, по индукции можно для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ построить систему открытых в X множеств O_j^n, $j = 1, \ldots, 2^n$, и открытое в Y множество V_n, удовлетворяющие условиям (1) — (4) леммы 1.

Из непрерывности отображения f и бикомпактности множеств $[O_j^n]$ вытекают равенства

$$(5) \qquad [V^n] = f[O_j^n], \quad j = 1, \ldots, 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из соотношения (3) леммы 1 вытекают включения

$$[V^n] \subseteq [V^{n-1}], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Из бикомпактности множества $[V^0] = f[O]$ вытекает непустота множества

$$\Phi = \bigcap_{n=0}^{\infty} [V^n].$$

Для каждого набора $\theta = (j_0, j_1, \ldots, j_n, \ldots)$, где $j_0 = 1$ и j_{n+1} равно или $2j_n - 1$, или $2j_n$, определено (в силу бикомпактности замыкания $[O]$ и соотношения (1) леммы 1) непустое замкнутое множество

$$F(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} [O_{j_n}^n].$$

Из соотношения (2) леммы 1 следует соотношение

$$F(\theta) \cap F(\theta') = \Lambda \quad \text{при} \quad \theta \neq \theta'.$$

Фиксируем набор $\theta = (j_0, j_1, \ldots, j_n, \ldots)$ и точку $y \in \Phi$. Покажем, что

$$f^{-1}(y) \cap F(\theta) \neq \Lambda,$$

Из соотношения (5) вытекает непустота пересечения $f^{-1}y \cap [O^n_{l_n}]$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ Но

$$f^{-1}y \cap [O^{n+1}_{l_{n+1}}] \subseteq f^{-1}y \cap [O^n_{l_n}], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(см. соотношение (1) леммы 1), и множества $[O^n_{l_n}]$ бикомпактны, поэтому

$$f^{-1}y \cap F(\theta) = f^{-1}y \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} [O^n_{l_n}] = \bigcap_{n=0}^{\infty} (f^{-1}y \cap [O^n_{l_n}]) \neq \Lambda.$$

Таким образом, прообраз $f^{-1}y$ точки y пересекается с любым множеством $F(\theta)$. Но система множеств $F(\theta)$ дизъюнктна и имеет мощность $\mathfrak{c}$. Поэтому мощность $f^{-1}y \geqslant \mathfrak{c}$. Полученное соотношение противоречит счетнократности отображения f, следовательно, множество точек локальной топологичности f всюду плотно в X. Теорема доказана.

Теорема 5 *). *Если непрерывное и открытое отображение $f\colon X \to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y счетнократно, то*

$$\dim Y = \dim X.$$

При дополнительном требовании совершенной нормальности хотя бы одного из бикомпактов X или Y справедливо равенство

$$\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y.$$

Лемма 2. *Если в локально бикомпактном пространстве X существует такое замкнутое подмножество F, что* $\operatorname{loc}\dim F \leqslant n$ *и* $\operatorname{loc}\dim X \setminus F \leqslant n$, *то и* $\operatorname{loc}\dim X \leqslant n$.

Доказательство. Очевидно,

$$\operatorname{loc}\dim_x X \leqslant n$$

для любой точки $x \in X \setminus F$.

Пусть $x \in F$. Возьмем такую окрестность O точки x, что ее замыкание $[O]$ в пространстве X бикомпактно и $\dim F \cap [O] \leqslant n$. Любое замкнутое в $[O]$ множество Φ, содержащееся в $[O] \setminus (F \cap [O]) = [O] \setminus F$, является бикомпактом и содержится в $X \setminus F$. По теореме 21 из § 9 гл. 4

$$\dim \Phi = \operatorname{loc}\dim \Phi \leqslant \operatorname{loc}\dim X \setminus F \leqslant n,$$

т. е. $\operatorname{rd}_{[O]}([O] \setminus F) \leqslant n$. Неравенство вытекает теперь из теоремы 15 § 6 гл. 4. Итак,

$$\operatorname{loc}\dim X \leqslant n.$$

Лемма доказана.

---

*) Доказана Александровым [16] для компактов и Пасынковым [15] в общем случае.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех порядковых чисел α мощности τ, где $\tau = \text{мощн.}\, Y$ *). Для каждого α построим такое открытое в Y множество O_α, что

(а) $\operatorname{loc}\dim O_\alpha \leqslant \dim X$;

(б) $O_\alpha \subseteq O_{\alpha+1}$;

(в) $O_{\alpha+1} \setminus O_\alpha \neq \Lambda$, если $Y \setminus O_\alpha \neq \Lambda$.

Через V_1 обозначим множество точек локальной топологичности отображения f. По теореме 4 это множество всюду плотно и открыто в X. В силу непрерывности и открытости отображения f множество $O_1 = fV_1$ открыто и всюду плотно (в частности, непусто) в пространстве Y и

$$\operatorname{loc}\dim O_1 = \operatorname{loc}\dim V_1 \leqslant \dim X.$$

Предположим, что для всех порядковых чисел $\alpha < \beta$, $\beta \in \mathfrak{A}$, множества O_α уже построены.

Построим множество O_β. Если β — предельное число, то положим

$$O_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} O_\alpha.$$

Так как

$$\operatorname{loc}\dim O_\beta \leqslant \sup_{\alpha<\beta} \operatorname{loc}\dim O_\alpha \leqslant \dim X,$$

то условия (а) — (в) для множеств O_α, $\alpha \leqslant \beta$, очевидно, выполняются.

Если число β не предельное, то существует предшествующее число $\beta - 1$. Множество $X_\beta = X \setminus f^{-1}O_{\beta-1}$ замкнуто в X и, следовательно, бикомпактно, а отображение $f_\beta = f\colon X_\beta \to Y \setminus O_{\beta-1}$ счетнократно и открыто (см. гл. 1, § 1, утверждение 1). По теореме 4 множество V_β точек локальной топологичности отображения f_β всюду плотно и открыто в X_β. Множество V_β непусто, если непусто множество X_β. Положим

$$O_\beta = O_{\beta-1} \cup fV_\beta.$$

Ясно, что множество O_β открыто в Y, $O_{\beta-1} \subseteq O_\beta$ и

$$O_\beta \setminus O_{\beta-1} = fV_\beta.$$

Следовательно, разность $O_\beta \setminus O_{\beta-1}$ непуста, если непусто множество X_β.

*) Считаем $\tau \geqslant \aleph_0$.

По индуктивному предположению $\operatorname{loc}\dim O_{\beta-1} \leqslant \dim X$. Кроме того, в силу локальной топологичности и открытости на V_β отображения f_β, имеем неравенство

$$\operatorname{loc}\dim fV_\beta = \operatorname{loc}\dim V_\beta \leqslant \dim X_\beta \leqslant \dim X.$$

Лемма 2 позволяет заключить, что

$$\operatorname{loc}\dim O_\beta \leqslant \dim X.$$

Таким образом, и для непредельного числа β множества O_α, $\alpha \leqslant \beta$, удовлетворяют условиям (а) — (в).

Продолжая описанный процесс, получим множества O_α, удовлетворяющие условиям (а) — (в) для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Так как мощность множества $\mathfrak{A}$ больше мощности множества Y, то существует по крайней мере один такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $O_{\alpha_0+1} \setminus O_{\alpha_0} = \Lambda$. Но в силу условия (в) это означает, что $Y = O_{\alpha_0}$. Так как Y — бикомпакт, то (см. теорему 21 из § 9 гл. 4)

$$\dim Y = \operatorname{loc}\dim Y = \operatorname{loc}\dim O_{\alpha_0} \leqslant \dim X.$$

Из нульмерности отображения f следует (см. следствие 3 из § 4 гл. 6), что

$$\dim X \leqslant \dim Y,$$

откуда

$$\dim X = \dim Y.$$

Первое утверждение теоремы 5 доказано.

Перейдем ко второму утверждению.

Лемма 2′. *Пусть в локально бикомпактном совершенно нормальном пространстве X дано такое замкнутое множество F, что*

$$\operatorname{loc}\operatorname{Ind} F \leqslant n, \qquad \operatorname{loc}\operatorname{Ind}(X \setminus F) \leqslant n;$$

тогда и

$$\operatorname{loc}\operatorname{Ind} X \leqslant n\ ^{*}).$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что

$$\operatorname{loc}\operatorname{Ind}_x X \leqslant n$$

для $x \in F$. Возьмем такую окрестность O точки x в X, что замыкание $[O]$ бикомпактно и

$$\operatorname{Ind}([O] \cap F) \leqslant n.$$

Открытое в $[O]$ множество $[O] \setminus F$ имеет тип F_σ, следовательно, множество $[O] \setminus F$ является счетной суммой бикомпактов Φ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как $\Phi_i \subseteq X \setminus F$, то

$$\operatorname{loc}\operatorname{Ind}\Phi_i \leqslant \operatorname{loc}\operatorname{Ind}(X \setminus F) \leqslant n.$$

*) Определение $\operatorname{loc}\operatorname{Ind} X$ см. в § 4 гл. 7.

По теореме 10 из § 4 гл. 7

$$\operatorname{Ind}\Phi_i = \operatorname{loc}\operatorname{Ind}\Phi_i \leqslant n, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

По теореме суммы (см. гл. 7, § 3, теорема 6)

$$\operatorname{Ind}[O] = \max(\operatorname{Ind}([O] \cap F), \sup_i \operatorname{Ind}\Phi_i) \leqslant n.$$

Лемма доказана.

Докажем второе утверждение теоремы 5.

Так как бикомпакт Y, являющийся непрерывным образом совершенно нормального бикомпакта X, сам будет совершенно нормальным, то второе утверждение теоремы 5 достаточно установить лишь в случае совершенной нормальности бикомпакта Y. Дословно так же, как при доказательстве первого утверждения этой теоремы, можно установить неравенство

$$\operatorname{loc}\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X.$$

Но по теореме 10 из § 4 гл. 7 для совершенно нормального бикомпакта Y имеем равенство

$$\operatorname{Ind} Y = \operatorname{loc}\operatorname{Ind} Y,$$

откуда

$$\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X.$$

Отображение f нульмерно. Поэтому (см. гл. 7, § 4, теорема 9)

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} Y.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y.$$

Теорема 5 доказана.

§ 4. Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность

В предыдущем параграфе было показано, что открытые счетнократные отображения не повышают размерность бикомпакта. Укажем еще один случай, когда при открытом отображении $f\colon X \to Y$ имеем неравенство $\dim Y \leqslant \dim X$.

Предложение 1. *Если отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ индуктивно нульмерного пространства X непрерывно, открыто и замкнуто, то и пространство Y индуктивно нульмерно. В частности, если X и Y — бикомпакты, $\dim X = 0$ и отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ непрерывно и открыто, то и $\dim Y = 0$.*

Доказательство. Возьмем точку $y \in Y$ и ее окрестность Oy. Для произвольной точки $x \in f^{-1}y$ выберем так окрестность Ox, чтобы $fOx \subseteq Oy$. Из индуктивной нульмерности X вытекает существование открыто-замкнутой окрестности $Vx \subseteq Ox$. Тогда образ $fVx \subseteq Oy$ будет открыто-замкнутой окрестностью точки y. Таким образом, $\operatorname{ind} Y = 0$.

В случае бикомпактов X и Y отображение f автоматически замкнуто и соотношения $\dim X = 0$ и $\operatorname{ind} X = 0$ равносильны. Предложение доказано.

Первый пример открытого, более того, открытого и нульмерного, отображения компакта X на компакт Y размерности $\dim Y > \dim X$ был построен Колмогоровым [1] в 1936 г. В этом примере одномерный компакт отображается на двумерную (но в некотором смысле «размерно неполноценную») поверхность Понтрягина [1].

Затем было получено много различных примеров открытых отображений, повышающих размерность (в частности, Келдыш [1], [2] построила замечательный пример открытого монотонного отображения трехмерного куба на куб любой размерности $n > 3$, а Локуциевский [2] открыто отобразил одномерный компакт на гильбертов кирпич). Однако все эти отображения не были нульмерными, за исключением построенного Келдыш [3] примера открытого и нульмерного отображения одномерного компакта на квадрат. Оказывается, имеет место следующая общая

Теорема 6 (Пасынков [10], [7]). *Любой ненульмерный бикомпакт Y веса τ является образом бикомпакта $X = X(Y)$ размерности $\dim X = 1$ и веса $\leqslant \tau$ при непрерывном, открытом и нульмерном отображении $f\colon X \to Y$.*

Из теоремы 6 легко получаем следующие утверждения:

Теорема 6′ (Пасынков [7]). *Сильно паракомпактное (соответственно финально компактное) пространство Y веса τ и размерности $\dim Y > 0$ является образом сильно паракомпактного (соответственно финально компактного) пространства X веса τ и размерности $\dim X = 1$ при непрерывном, совершенном, открытом и нульмерном отображении $f\colon X \to Y$.*

Теорема 6″ (Пасынков [7]). *Любое вполне регулярное пространство Y веса τ является образом вполне регулярного пространства X, содержащегося в бикомпакте bX веса $\leqslant \tau$ и размерности $\dim bX = 1$, при непрерывном, совершенном, открытом и нульмерном отображении $f\colon X \to Y$.*

Приводимое ниже доказательство теоремы 6 опирается на следующий факт (впервые, как уже отмечалось, установленный Келдыш [3]):

Квадрат является открытым и нульмерным образом некоторого одномерного компакта.

Доказательство этого факта дается в Прибавлении к этой главе.

Переходим теперь к доказательству частного случая теоремы 6, а именно:

Теорема 6_0. *Всякий компакт Φ, имеющий конечную положительную размерность, есть образ некоторого одномерного компакта при некотором нульмерном, непрерывном, открытом отображении.*

Доказательство теоремы 6_0. Пусть сначала $\dim\Phi = 2$.

По теореме Гуревича из § 3 гл. 4 существует непрерывное нульмерное отображение $g\colon \Phi \to Q^2$ компакта Φ в квадрат Q^2.

По теореме Келдыш существует также открытое, нульмерное (и непрерывиое) отображение $f\colon N \to Q^2$ одномерного компакта N на Q^2.

Пусть Ψ является веерным произведением *) компактов Φ и N относительно отображений g и f, и пусть

$$p\colon \Psi \to \Phi, \qquad \pi\colon \Psi \to N$$

— проекции произведения Ψ в сомножители Φ и N. По леммам «о параллельных» (см. Прибавление к гл. 1, § 2) отображение p открыто и нульмерно (и иепрерывно), а отображение π нульмерно (и непрерывно). По следствию 3 из § 4 гл. 6

$$\dim\Psi \leqslant \dim N \leqslant 1.$$

Так как f есть отображение «на», то и p есть отображение «на». Так как открытые отображения не повышают размерности нульмерных компактов (см. предложение 1), а $\dim\Phi=2$, то $\dim\Psi \geqslant 1$. Таким образом, отображение $p\colon \Psi \to \Phi$ является искомым.

Предположим, что утверждение теоремы 6_0 доказано для всех кубов Q^k размерности k, $2 \leqslant k < n$, и пусть $k = n$.

Куб Q^n разлагается в произведение отрезка Q^1 и куба Q^{n-1}. По индуктивному предположению существует открытое, нульмерное и непрерывное отображение

$$h\colon X \to Q^{n-1}$$

одномерного компакта X на Q^{n-1}. Отображение

$$h'\colon X \times Q^1 \to Q^{n-1} \times Q^1 = Q^n,$$

ставящее в соответствие точке $(x,t) \in X \times Q^1$, $x \in X$, $t \in Q^1$, точку $(hx, t) \in Q^{n-1} \times Q^1$ непрерывно, открыто и нульмерно (см. предложеиие 7′ § 8 гл. 1). Так как $1 \leqslant \dim X \times Q^1 \leqslant 2$ (см. неравенство (1) из § 9 гл. 5), то, по доказанному, существует открытое, нульмерное и непрерывное отображение

$$p\colon \Psi \to X \times Q^1$$

---

*) См. прибавление к гл. 1, § 2.

одномерного компакта Ψ на компакт $X \times Q^1$. Суперпозиция нульмерных замкнутых отображений нульмерна (см. следствие 3 из § 4 гл. 6), а суперпозиция открытых отображений открыта; поэтому отображение

$$q = h'p\colon\ \Psi \to Q^n$$

нульмерно, открыто и непрерывно.

Итак, любой k-мерный куб Q^k является образом одномерного компакта Ψ_k при открытом, нульмерном и непрерывном отображении

$$q_k\colon\ \Psi_k \to Q^k, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Пусть теперь Φ — произвольный k-мерный компакт, $k \geqslant 1$. По теореме Нёбелинга — Понтрягина можно считать $\Phi \subseteq Q^{2k+1}$. Тогда отображение

$$q_{2k+1}\colon\ q_{2k+1}^{-1}\Phi \to \Phi$$

будет, очевидно, открытым, нульмерным и непрерывным и

$$\dim q_{2k+1}^{-1}\Phi \leqslant \dim \Psi_{2k+1} \leqslant 1.$$

По предложению 1 имеем $\dim q_{2k+1}^{-1}\Phi \geqslant 1$.

Теорема 6_0 доказана.

При доказательстве теоремы 6 нам потребуется несколько вспомогательных предложений.

Определение. Пусть даны такие отображения $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$, $\pi_1^2\colon X_2 \to X_1$ и $\varpi_1^2\colon Y_2 \to Y_1$, что

$$\varpi_1^2 f_2 = f_1 \pi_1^2,$$

т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\pi_1^2"'] & Y_2 \arrow[d, "\varpi_1^2"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Будем говорить, что отображение f_2 заполняет отображение f_1 (или что отображение f_1 заполняется отображением f_2), если

$$f_2 (\pi_1^2)^{-1} x_1 = (\varpi_1^2)^{-1} f_1 x_1$$

для любой точки $x_1 \in X_1$.

Лемма 1. *Пусть X и Y являются соответственно пределами спектров*

$$S_1 = \{X_\alpha,\ \pi_\alpha^\beta\} \quad \textit{и} \quad S_2 = \{Y_\alpha,\ \varpi_\alpha^\beta\}, \qquad \alpha \in \mathfrak{A},$$

причем пространства X_α и Y_α суть бикомпакты, а проекции π_α^β и ϖ_α^β непрерывны и являются отображениями «на». Пусть для каждого α дано такое непрерывное отображение $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ пространства X_α на пространство Y_α, что при любом $\beta > \alpha$ выполнено соотношение

$$\varpi_\alpha^\beta f_\beta = f_\alpha \pi_\alpha^\beta.$$

Пусть, кроме того, отображение $f\colon X \to Y$ является пределом отображений f_α (см. Прибавление к гл. 1, § 1) и, следовательно, удовлетворяет соотношениям $\varpi_\alpha f = f_\alpha \pi_\alpha$ для любого α, где ϖ_α и π_α суть соответственно проекции пределов X и Y.

Тогда:

(а) *если для любых β и $\alpha < \beta$ отображение f_β заполняет отображение f_α, то отображение f заполняет любое отображение f_α;*

(б) *если, кроме того, все отображения f_α открыты, то открыто и отображение f.*

Доказательство. (а) Возьмем точки $x_\alpha \in X_\alpha$, $y_\alpha = f_\alpha x_\alpha$ и $y \in \varpi_\alpha^{-1} y_\alpha$. Для любого $\beta > \alpha$ отображение f_β заполняет, по условию, отображение f_α и $\varpi_\beta y \in (\varpi_\alpha^\beta)^{-1} \varpi_\alpha y$. Поэтому при $\beta \geqslant \alpha$ бикомпакт

$$(\pi_\alpha^\beta)^{-1} x_\alpha \cap f_\beta^{-1} \varpi_\beta y$$

непуст. Так как проекции $\pi_\beta\colon X \to X_\beta$ являются отображениями «на» (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 9), то бикомпакты

$$F_\beta = \pi_\beta^{-1}\left((\pi_\alpha^\beta)^{-1} x_\alpha \cap f_\beta^{-1} \varpi_\beta y\right) = \pi_\beta^{-1} (\pi_\alpha^\beta)^{-1} x_\alpha \cap \pi_\beta^{-1} f_\beta^{-1} \varpi_\beta y = \\ = \pi_\alpha^{-1} x_\alpha \cap f^{-1} \varpi_\beta^{-1} \varpi_\beta y$$

непусты. Далее, при $\beta' > \beta$ имеем включение

$$F_{\beta'} = \pi_\alpha^{-1} x_\alpha \cap f^{-1} \varpi_{\beta'}^{-1} \varpi_{\beta'} y \subseteq \pi_\alpha^{-1} x_\alpha \cap f^{-1} \varpi_{\beta'}^{-1} (\varpi_\beta^{\beta'})^{-1} \varpi_\beta^{\beta'} \varpi_{\beta'} y = \\ = \pi_\alpha^{-1} x_\alpha \cap f^{-1} \varpi_\beta^{-1} \varpi_\beta y = F_\beta,$$

а множество $\mathfrak{A}$ направлено, поэтому система $\{F_\beta\}$, $\beta \geqslant \alpha$, центрирована и имеет, следовательно, непустое пересечение. Ясно, что $f\left(\bigcap\limits_{\beta \geqslant \alpha} F_\beta\right) = y$. Утверждение (а) доказано.

(б) Предположим теперь, что все отображения f_α открыты. Возьмем открытое в X_α множество V_α; тогда множество $f_\alpha V_\alpha$ открыто в Y_α. В силу непрерывности проекции ϖ_α множество $\varpi_\alpha^{-1} f_\alpha V_\alpha$ открыто в Y. Но отображение f заполняет отображение f_α. Поэтому

$$f \pi_\alpha^{-1} V_\alpha = \varpi_\alpha^{-1} f_\alpha V_\alpha.$$

Так как множества вида $\pi_\alpha^{-1}V_\alpha$ образуют базу в X, а их образы $f\pi_\alpha^{-1}V_\alpha$, как установлено, открыты в Y, то отображение f открыто.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть даны непрерывные отображения $\varpi_1^2\colon Y_2\to Y_1$, $f_1\colon X_1\to Y_1$ и $f_2'\colon X_2'\to Y_2$ бикомпактов Y_2, X_1, X_2' на бикомпакты Y_1 и Y_2. Тогда существует такой бикомпакт X_2 веса $wX_2\leqslant\max(wX_1, wX_2')$ и такие его отображения $p_2\colon X_2\to X_2'$ и $\pi_1^2\colon X_2\to X_1$ на X_2' и X_1, что при $f_2=f_2'p_2$ имеем $f_1\pi_1^2=\varpi_1^2 f_2$ и отображение f_2 заполняет отображение f_1.*

Если отображения f_1 и f_2' являются (а) *открытыми,* (б) *нульмерными, то соответственно таким же является отображение f_2. Если отображения f_1 и f_2' нульмерны, то нульмерно и отображение p_2.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f_{12}\colon X_1\times X_2'\to Y_1\times Y_2$, ставящее в соответствие точке (x_1, x_2') точку $(f_1x_1, f_2'x_2')$. Это отображение, очевидно, непрерывно. Прообраз $f_{12}^{-1}F$ графика F отображения ϖ_1^2 обозначим через X_2. Ясно, что $wX_2\leqslant\max(wX_1, wX_2')$. Проекции произведений $X_1\times X_2'$, $Y_1\times Y_2$ на сомножители X_i, Y_i обозначим через p_i и q_i, $i=1, 2$, соответственно. Ограничение проекции p_1 на X_2 обозначим через π_1^2.

Пусть $(x_1, x_2')\in X_2$. Так как $X_2=f_{12}^{-1}F$, то $f_1x_1=\varpi_1^2 f_2'x_2'$. Поэтому

$$\varpi_1^2 f_2(x_1, x_2')=\varpi_1^2 f_2'p_2(x_1, x_2')=\varpi_1^2 f_2'x_2'=f_1x_1=f_1p_1(x_1, x_2')=f_1\pi_1^2(x_1, x_2').$$

Соотношение

$$f_1\pi_1^2=\varpi_1^2 f_2$$

установлено:

$$\begin{tikzcd}
& X_1\times X_2'\supseteq X_2 \arrow[r, dashed, "f_2"] \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[d, shift left=2, "\pi_1^2"] & Y_2 \arrow[d, "\varpi_1^2"] \\
X_2' \arrow[urr, "f_2'"'] & X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y_1
\end{tikzcd}$$

Покажем, что f_2 заполняет f_1.

Возьмем точки $x_1\in X_1$, $y_1\in f_1x_1$ и $y_2\in(\varpi_1^2)^{-1}y_1$. Тогда $(y_1, y_2)\in F$. Так как f_2' является отображением «на», то существует точка $x_2'\in X_2'$, для которой $f_2'x_2'=y_2$. Ясно, что $(x_1, x_2')\in X_2$ и

$$f_2(x_1, x_2')=f_2'p_2(x_1, x_2')=f_2'x_2'=y_2.$$

Так как $\pi_1^2(x_1, x_2')=p_1(x_1, x_2')=x_1$, то $(x_1, x_2')\in(\pi_1^2)^{-1}x_1$. Следовательно, f_2 заполняет f_1.

Пусть теперь отображения f_1 и f_2' являются (а) открытыми, (б) нульмерными. Тогда (см. гл. 1, § 8, предложение 7') открытым и нульмерным будет и f_{12}: $X_1\times X_2'\to Y_1\times Y_2$, а следовательно, и отображение g: $X_2\to F$, являющееся ограничением f_{12} на $X_2=f_{12}^{-1}F$.

Так как для любой точки $(x_1, x_2')\in X_1\times X_2'$ выполнено соотношение

$$q_2f_{12}(x_1, x_2')=f_2'p_2(x_1, x_2'),$$

то для любой точки $(x_1, x_2')\in X_2$ имеем соотиошение

$$q_2g(x_1, x_2')=q_2f_{12}(x_1, x_2')=f_2'p_2(x_1, x_2')=f_2(x_1, x_2').$$

Но проекция q_2 гомеоморфно отображает график F на Y_2, а отображение g (а) открыто, (б) нульмерно; поэтому и f_2 будет открытым и нульмерным отображением. Из нульмерности отображения $f_2=f_2'p_2$, очевидно, следует нульмерность отображения p_2.

Лемма 2 доказана.

Из нульмерности отображеиия p_2: $X_2\to X_2'$ и следствия 3 из § 4 гл. 6 вытекает

Следствие 1. *В условиях леммы* 2

$$\dim X_2\leqslant\dim X_2'.$$

Лемма 3. *Пусть дан обратный спектр* $S=\{Y_\alpha, \mathfrak{G}_{\alpha'}^{\alpha}\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, *составленный из бикомпактов* Y_α *с непрерывными проекциями, являющимися отображениями «на», причем множество* $\mathfrak{A}$ *состоит из всех порядковых чисел, меньших некоторого числа* θ *мощности* τ. *Пусть, кроме того, для любого предельного числа* $\beta<\theta$ *пространство* Y_β *является пределом спектра*

$$S^\beta=\{Y_\alpha, \mathfrak{G}_{\alpha'}^{\alpha}\},\qquad \alpha<\beta,$$

а проекция $\mathfrak{G}_\alpha^\beta$ *совпадает с проекцией предела спектра* S^β *в элемент* Y_α *этого спектра. Если для каждого непредельного числа* $\alpha\in\mathfrak{A}$ *существует бикомпакт* X_α' *размерности* $\dim X_\alpha'\leqslant 1$ *и веса* $wX_\alpha'\leqslant\tau$, *обладающий непрерывным открытым и нульмерным отображением* f_α: $X_\alpha'\to Y_\alpha$ *на* Y_α, *то предел* Y *спектра* S *является непрерывным, открытым и нульмерным образом бикомпакта* X *размерности* $\dim X\leqslant 1$ *и веса* $wX\leqslant\tau$.

Доказательство. Построим новый спектр S_1, «параллельный спектру S».

Положим $X_1 = X'_1$ и $f_1 = f'_1$. Предположим, что для всех чисел $\alpha' < \alpha < \beta \leqslant \theta$ уже построены бикомпакты X_α размерности $\dim X_\alpha \leqslant 1$ и веса $wX_\alpha \leqslant \tau$, а также непрерывные отображения f_α: $X_\alpha \to Y_\alpha$, $\pi^\alpha_{\alpha'}$: $X_\alpha \to X_{\alpha'}$, удовлетворяющие условиям: (а) отображения f_α открыты и нульмерны; (б) $\varpi^\alpha_{\alpha'} f_\alpha = f_{\alpha'} \pi^\alpha_{\alpha'}$; (в) $\pi^\alpha_{\alpha''} = \pi^{\alpha'}_{\alpha''} \pi^\alpha_{\alpha'}$ (при $\alpha > \alpha' > \alpha''$); (г) отображение f_α заполняет отображения $f_{\alpha'}$ (для любого $\alpha' < \alpha$).

Пусть сначала число β не предельное, $\beta = \beta' + 1$. Тогда из леммы 2 и следствия из нее вытекает существование бикомпакта X_β размерности $\dim X_\beta \leqslant \dim X'_\beta \leqslant 1$ и веса $wX_\beta \leqslant \tau$ и существование таких непрерывных отображений

$$f_\beta\colon X_\beta \xrightarrow{\text{на}} Y_\beta \quad \text{и} \quad \pi^\beta_{\beta'}\colon X_\beta \xrightarrow{\text{на}} X_{\beta'},$$

что отображение f_β открыто и нульмерно,

$$\varpi^\beta_{\beta'} f_\beta = f_{\beta'} \pi^\beta_{\beta'}$$

и отображение f_β заполняет отображение $f_{\beta'}$. Для $\alpha < \beta'$ положим $\pi^\beta_\alpha = \pi^{\beta'}_\alpha \pi^\beta_{\beta'}$. Тогда по индуктивному предположению, во-первых, при $\alpha' < \alpha < \beta$ имеем

$$\pi^\beta_{\alpha'} = \pi^{\beta'}_{\alpha'} \pi^\beta_{\beta'} = \pi^\alpha_{\alpha'} \pi^{\beta'}_\alpha \pi^\beta_{\beta'} = \pi^\alpha_{\alpha'} \pi^\beta_\alpha$$

и, во-вторых,

$$\varpi^\beta_\alpha f_\beta = \varpi^{\beta'}_\alpha \varpi^\beta_{\beta'} f_\beta = \varpi^{\beta'}_\alpha f_{\beta'} \pi^\beta_{\beta'} = f_\alpha \pi^{\beta'}_\alpha \pi^\beta_{\beta'} = f_\alpha \pi^\beta_\alpha.$$

Возьмем точки $x_\alpha \in X_\alpha$, $y_\alpha \in f_\alpha x_\alpha$ и $y_\beta \in (\varpi^\beta_\alpha)^{-1} y_\alpha$. Пусть $y_{\beta'} = \varpi^\beta_{\beta'} y_\beta$. По индуктивному предположению отображение $f_{\beta'}$ заполняет отображение f_α; поэтому существует такая точка $x_{\beta'} \in (\pi^{\beta'}_\alpha)^{-1} x_\alpha$, что $f_{\beta'} x_{\beta'} = y_{\beta'}$. Но отображение f_β заполняет отображение f_α. Поэтому существует такая точка $x_\beta \in (\pi^\beta_{\beta'})^{-1} x_{\beta'} \subseteq$ $\subseteq (\pi^\beta_\alpha)^{-1} x_\alpha$, что $f_\beta x_\beta = y_\beta$.

Следовательно, отображение f_β заполняет отображение f_α.

Пусть теперь число β предельное. Спектры

$$S^\beta = \{Y_\alpha, \varpi^\alpha_{\alpha'}\}, \qquad S^\beta_1 = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}, \qquad \alpha < \beta,$$

и отображения f_α удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому предел f_β отображений f_α, $\alpha < \beta$, отображает предел X_β спектра S^β_1 на предел Y_β спектра S^β открыто и для любого $\alpha < \beta$ выполняются соотношения

$$\varpi^\beta_\alpha f_\beta = f_\alpha \pi^\beta_\alpha,$$

где π_α^β обозначает проекцию предела X_β спектра S_1^β на его элемент X_α, причем отображение f_β заполняет все отображения f_α.

Выполнение соотношений $\pi_{\alpha'}^\alpha \pi_\alpha^\beta = \pi_{\alpha'}^\beta$ при $\alpha' < \alpha < \beta$ очевидно.

Из леммы 1 § 3 гл. 5 следует, что

$$\dim X_\beta \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$wX_\beta \leqslant w\left(\prod_{\alpha<\beta} X_\alpha\right) \leqslant \max\left(\tau, \sup_{\alpha<\beta} wX_\alpha\right) = \tau.$$

Покажем нульмерность отображения f_β. Пусть $y_\beta \in Y_\beta$ и $y_\alpha = \varpi_\alpha^\beta y_\beta$. Из соотношений $\varpi_\alpha^\beta f_\beta = f_\alpha \pi_\alpha^\beta$, $\alpha < \beta$, следует, что

$$f_\beta^{-1} y_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} \left(\pi_\alpha^\beta\right)^{-1} f_\alpha^{-1} y_\alpha.$$

Но множество $F = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \left(\pi_\alpha^\beta\right)^{-1} f_\alpha^{-1} y_\alpha$ гомеоморфно пределу спектра $\{f_\alpha^{-1} y_\alpha, \pi_{\alpha'}^\alpha\}$, $\alpha < \beta$ (см. равенство (5) из § 1 Прибавления к гл. 1). Так как бикомпакты $f_\alpha^{-1} y_\alpha$, по индуктивному предположению, нульмерны, то нульмерен и бикомпакт F (см. лемму 1 из гл. 5, § 3). Нульмерность отображения f_β установлена.

При $\beta = \theta$ получаем утверждение леммы 3, которая, таким образом, доказана.

В § 1 Прибавления к гл. 1 было доказано (предложение 13), что гильбертов кирпич Q^∞ является пределом обратного спектра $\{Q^n, \varpi_n^{n+1}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, из n-мерных кубов с проекциями ϖ_n^{n+1}: $Q^{n+1} \xrightarrow{\text{на}} Q^n$. В теореме 6_0 мы показали существование компактов Ψ_n размерности $\dim \Psi_n = 1$, обладающих непрерывными открытыми отображениями g_n: $\Psi_n \to Q^n$ на кубы Q^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Из леммы 3 сразу же вытекает

Теорема $6_{\aleph_0}$. *Гильбертов кирпич Q^∞ является образом компакта $\Psi_{\aleph_0}$ размерности $\dim \Psi_{\aleph_0} = 1$ при непрерывном открытом и нульмерном отображении $f_{\aleph_0}$: $\Psi_{\aleph_0} \to Q^\infty$.*

Действительно, в силу предложения 1 не может быть $\dim \Psi_{\aleph_0} < 1$, поэтому $\dim \Psi_{\aleph_0} = 1$.

Теорема $6_{\aleph_0}$ и теорема Урысона о вложении любого пространства со счетной базой, в частности компакта, в Q^∞ позволяют доказать следующие утверждения:

Теорема $6'_{\aleph_0}$. *Любой компакт Φ положительной размерности является образом компакта Ψ_Φ размерности $\dim \Psi_\Phi = 1$ при непрерывном открытом нульмерном отображении g: $\Psi_\Phi \to \Phi$.*

Теорема $7_{\aleph_0}$. *Любое пространство со счетной базой Y размерности $\dim Y \geqslant 1$ является образом некоторого (зависящего от Y) одномерного пространства X со счетной базой при непрерывном, совершенном, открытом и нульмерном отображении g: $X \to Y$.*

Доказательства теорем $6'_{\aleph_0}$ и $7_{\aleph_0}$ протекают одинаково. Поэтому докажем лишь теорему $7_{\aleph_0}$. Будем считать $Y \subseteq Q^\infty$. Ограничение f_Y: $f_{\aleph_0}^{-1}Y \to Y$ отображения $f_{\aleph_0}$ из теоремы $6_{\aleph_0}$ является непрерывным, совершенным, открытым и нульмерным. Из предложения 1 для $X = f_{\aleph_0}^{-1}Y$ следует неравенство $\dim X = \operatorname{ind} X \geqslant 1$. А из монотонности размерности (гл. 4, § 8, п. 4) получаем $\dim X \leqslant \dim \Psi_{\aleph_0} = 1$. Следовательно, $\dim X = 1$.

Теорема $7_{\aleph_0}$ (и теорема $6'_{\aleph_0}$) доказана.

Докажем, наконец, следующее предложение, легким следствием которого будет основная теорема 6.

Теорема 6_τ. *Тихоновский кирпич I^τ, $\tau \geqslant \aleph_0$, является образом бикомпакта Ψ_τ размерности $\dim \Psi_\tau = 1$ и веса τ при непрерывном, открытом и нульмерном отображении f_τ: $\Psi_\tau \to I^\tau$.*

Доказательство. Для $\tau = \aleph_0$ теорема доказана. Предположим, что теорема верна для всех $\tau < \tau_0$, и пусть $\tau = \tau_0$. Через θ обозначим первое порядковое число мощности τ_0. Через $\mathfrak{A}$ обозначим множество всех непредельных чисел $\alpha < \theta$. Для каждого α в качестве X_α возьмем отрезок. Тогда предел спектра $S = S(X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A})$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, следствие 1 из предложения 14) гомеоморфен тихоновскому кубу I^{τ_0}, а элементы P_β этого спектра для предельных $\beta < \theta$ гомеоморфны $I^\varkappa$, где $\varkappa =$ мощн. $\beta < \tau_0$. Но тогда и вообще для всех бесконечных $\beta < \theta$ элементы P_β спектра S (по построению этого спектра) гомеоморфны тихоновским кубам $I^\varkappa$, где $\varkappa =$ мощн. $\beta < \tau_0$.

В силу теоремы 6_0 и индуктивного предположения каждый элемент P_β спектра S является открытым, нульмерным и непрерывным образом бикомпакта Ψ_β размерности $\dim \Psi_\beta = 1$ и веса $w\Psi_\beta \leqslant wP_\beta < \tau$. В силу леммы 3 куб I^{τ_0} является открытым, нульмерным и непрерывным образом бикомпакта Ψ_{τ_0} размерности $\dim \Psi_{\tau_0} \leqslant 1$ и веса $w\Psi_{\tau_0} \leqslant \tau_0$. Из предложения 1 следует, что $\dim \Psi_{\tau_0} = 1$. Теорема 6_τ доказана.

Теперь легко доказать и теоремы 6, 6′ и 6″.

По теореме Тихонова любое вполне регулярное пространство Y веса τ, в частности любой бикомпакт Y веса τ, является подпространством тихоновского кирпича I^τ. Если непрерывное отображение f_τ: $\Psi_\tau \to I^\tau$ открыто и нульмерно и $\dim \Psi_\tau = 1$,

$\varpi\Psi_\tau \leqslant \tau$, то непрерывное отображение

$$f_\tau\colon f_\tau^{-1}Y \to Y$$

также открыто, нульмерно и совершенно, кроме того, $\varpi f_\tau^{-1}Y \leqslant \tau$.

Если $\operatorname{ind} Y > 0$, то и $\operatorname{ind} f_\tau^{-1}Y > 0$ (см. предложение 1). Если Y является бикомпактом, то $f_\tau^{-1}Y$ — также бикомпакт, и тогда $\dim f_\tau^{-1}Y \leqslant \dim \Psi_\tau$. Таким образом, если Y — бикомпакт и $\dim Y > 0$, то $\dim f_\tau^{-1}X = 1$. Заметим еще, что из сильной паракомпактности (соответственно финальной компактности) Y вытекает сильная паракомпактность (соответственно финальная компактность) $f_\tau^{-1}Y$ (см. п. 6 § 7 гл. 1) и, следовательно (см. теоремы 19 и 19′ из § 8 гл. 4), соотношение

$$\dim f_\tau^{-1}Y \leqslant \dim \Psi_\tau = 1.$$

Если $\dim Y > 0$, то $\operatorname{ind} Y \geqslant \dim Y > 0$ (см. п. 1 и п. 2 из § 8 гл. 4), откуда (см. предложение 1 § 3 гл. 2) $\dim f_\tau^{-1}Y = 1$.

Теорема 6, а также теоремы 6′ и 6″ доказаны.

Полученная в процессе доказательства теоремы 6 теорема $7_{\aleph_0}$ позволяет при помощи веерных произведений получить следующее общее утверждение:

Теорема 7 (Пасынков [10], [7]). *Любое метрическое пространство S веса τ и размерности $\dim S > 0$ является непрерывным, совершенным, открытым и нульмерным образом метрического пространства $R = R(S)$ веса $\leqslant \tau$ и размерности $\dim R \leqslant 1$.*

Доказательство. Возьмем какое-нибудь вполне нульмерное отображение $f\colon S \to S_0$ пространства S на пространство со счетной базой S_0 (см. гл. 6, § 3, теорема 7). Тогда $\dim S_0 > 0$ (см. теорему 9 из § 3 гл. 6). По теореме $7_{\aleph_0}$ существует непрерывное, открытое, совершенное и нульмерное отображение $g\colon R_0 \to S_0$ пространства со счетной базой R_0 размерности $\dim R_0 = 1$ на S_0. В веерном произведении R пространств S и R_0 относительно отображений f и g можно так выбрать метрику, что проекция $p\colon R \to R_0$ будет вполне нульмерным отображением (см. гл. 6, § 3, лемма 4). По теореме 9 из § 3 гл. 6

$$\dim R \leqslant \dim R_0 = 1.$$

По леммам «о параллельных» из § 2 Прибавления к гл. 1 проекция $\pi\colon R \to S$ непрерывна, открыта, совершенна и нульмерна. Так как $\varpi R \leqslant \varpi(S \times R_0) = \varpi S$, то теорема доказана.

ПРИБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ДЕВЯТОЙ

Теорема (Келдыш [3]). *Существует непрерывное открытое и нульмерное отображение некоторого одномерного компакта на квадрат.*

Для того чтобы в дальнейшем не отвлекаться непосредственно от доказательства теоремы, докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть дано факторное отображение $f\colon X \to Y$ бикомпакта X на пространство Y и $X = \bigcup_{i=1}^{s} X_i$, где X_i замкнуты в X и на каждом из них отображение f является гомеоморфизмом. Если множества fX_i замкнуты в Y, то пространство Y является бикомпактом.*

Доказательство. В силу факторности и, следовательно, непрерывности отображения f пространство Y бикомпактно.

В силу факторности и конечнократности отображения f пространство Y является T_1-пространством.

Докажем замкнутость отображения f. Пусть множество F замкнуто в X. Тогда $F = \bigcup_{i=1}^{s} F_i$, где $F_i = X_i \cap F$, и множества fF_i замкнуты в fX_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, а следовательно, и в Y. Поэтому множество $fF = \bigcup_{i=1}^{s} fF_i$ замкнуто в Y. Замкнутость отображения f доказана. Из нормальности X и замкнутости f вытекает нормальность Y. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ компакта X на компакт Y является гомеоморфизмом на замкнутых множествах $F_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, s$, и $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{s} F_i$. Если сумма $\bigcup_{i=1}^{s} fF_i$ содержит окрестность U точки $y_0 = fx_0$, то отображение f открыто в точке x_0, т. е. образ fO любой окрестности O точки x_0 содержит окрестность точки y_0.*

Действительно, множество $U \setminus \bigcup_{i=1}^{s} f(F_i \setminus O)$ содержит точку y_0, открыто в Y и содержится в fO.

Лемма 3. *Пусть дан счетный спектр $S = \{X_n, \tilde\omega_n^{n+1}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и в каждом его элементе X_n выделено такое множество L_n, что $\tilde\omega_n^{n+1} L_{n+1} \supseteq L_n$ и отображение $\Psi_n = \tilde\omega_0^n\colon L_n \to X_0$ открыто, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда и проекция $\tilde\omega_0$ предела X спектра S в элемент X_0 этого спектра, рассматриваемая лишь на множестве $L_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \tilde\omega_k^{-1} L_k$, является открытым отображением.*

Доказательство. Возьмем точку $x^0 \in L_\infty$ и ее окрестность V относительно L_∞. В силу определения L_∞ и топологии в пределе спектра, существует такой номер $n \geqslant 1$ и такая окрестность O_n в X_n точки $x_n^0 = \tilde\omega_n x^0$, что $x_n^0 \in L_n$ и $\tilde\omega_n^{-1} O_n \cap L_\infty \subseteq V$. Тогда для $V_n = L_n \cap O_n$ также $\tilde\omega_n^{-1} V_n \cap L_\infty \subseteq V$. Покажем, что $\tilde\omega_n V \supseteq V_n$. Действительно, пусть $x_n \in V_n$. Так как $\tilde\omega_n^{n+1} L_{n+1} \supseteq L_n$, то в L_{n+1} существует такая точка x_{n+1}, что $\tilde\omega_n^{n+1} x_{n+1} = x_n$.

По индукции для любого $k=1, 2, 3, \ldots$ можно построить такую точку $x_{n+k} \in L_{n+k}$, что $\varpi_{n+k}^{n+k+1} x_{n+k+1} = x_{n+k}$.

Пополнив множество $\{x_{n+k}\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, проекциями точки x_n в пространства X_l, $l<n$, получим нить x спектра S. Ясно, что $x \in \varpi_n^{-1} x_n \cap L_\infty \subseteq V$. Итак, $\varpi_n V \supseteq V_n$. По условию множество $\varpi_0^n V_n$ открыто и поэтому содержит окрестность точки $x_0^0 = \varpi_0^n x_n^0 = \varpi_0 x^0$. Следовательно, и множество $\varpi_0 V = \varpi_0^n \varpi_n V \supseteq \varpi_0^n V_n$ содержит окрестность точки x_0^0. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Следствие 1 (Локуциевский [2]). *Если в счетном спектре $S = \{X_n, \varpi_n^{n+1}\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, все проекции ϖ_n^{n+1} являются отображениями «на», а все проекции ϖ_0^n открыты, то и проекция $\varpi_0 \colon X \to X_0$ предела X спектра S также открыта.*

Лемма 4. *Пусть непрерывные отображения $f_\alpha \colon X_\alpha \to X_0$ бикомпактов X_α на бикомпакт X_0 нульмерны, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и X есть веерное произведение пространств X_α относительно отображений f_α. Пусть еще для любой точки $x \in X$ и любой окрестности O_0 точки $x_0 = \varpi_0 x$* *) *существует такой индекс α_0 и такая окрестность O_{α_0} точки $x_{\alpha_0} = \varpi_{\alpha_0} x$, что $O_{\alpha_0} \subseteq f_{\alpha_0}^{-1} O_0$ и $\operatorname{ind} \operatorname{гр} O_{\alpha_0} \leqslant 0$. Тогда*

$$\operatorname{ind} X \leqslant 1.$$

Доказательство. Возьмем точку $x \in X$ и ее окрестность O. По лемме 3 из § 2 Прибавления к гл. 1 бикомпакт $F = \varpi_0^{-1} x_0$ нульмерен. Следовательно, существует такое разложение F в дизъюнктную сумму двух открыто-замкнутых в F множеств F_1 и F_2, что $x \in F_1 \subseteq O$. Систему замкнутых в X множеств F_1 и F_2 так раздуем до открытых в X множеств $O_l \supseteq F_l$, $l=1, 2$, что $O_1 \cap O_2 = \Lambda$ и $O_1 \subseteq O$ (см. гл. 1, § 10). Так как отображение ϖ_0 замкнуто и так как $F = F_1 \cup F_2 \subseteq O_1 \cup O_2$, то существует окрестность O_0 точки x_0, удовлетворяющая соотношению $\varpi_0^{-1} O_0 \subseteq O_1 \cup O_2$.

По условию существует такой индекс α_0 и такая окрестность O_{α_0} точки $x_{\alpha_0} = \varpi_{\alpha_0} x$, что

$$O_{\alpha_0} \subseteq f_{\alpha_0}^{-1} O_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} \operatorname{гр} O_{\alpha_0} \leqslant 0.$$

Положим $V = \varpi_{\alpha_0}^{-1} O_{\alpha_0}$. Тогда

$$x \in V \subseteq \varpi_{\alpha_0}^{-1} f_{\alpha_0}^{-1} O_0 = \varpi_0^{-1} O_0 \subseteq O_1 \cup O_2.$$

Так как отображение ϖ_{α_0} нульмерно по лемме 2 из § 2 Прибавления к гл. 1, то (см. гл. 7, § 4, предложение 1) $\operatorname{ind} \varpi_{\alpha_0}^{-1} \operatorname{гр} O_{\alpha_0} \leqslant 0$. Но $\operatorname{гр} V \subseteq \varpi_{\alpha_0}^{-1} \operatorname{гр} O_{\alpha_0}$, следовательно, $\operatorname{ind} \operatorname{гр} V \leqslant 0$.

Положим $V_l = O_l \cap V$, $l=1, 2$. Ясно, что $x \in V_1 \subseteq O_1 \subseteq O$. Так как $V_1 \cap V_2 = \Lambda$, то $\operatorname{гр} V_1 \subseteq \operatorname{гр} V$, откуда $\operatorname{ind} \operatorname{гр} V_1 \leqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{ind} X \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

I. Рассмотрим единичный квадрат

$$T = \{(t^1, t^2) \mid 0 \leqslant t^l \leqslant 1, \ l=1, 2\}$$

на плоскости переменных t^1 и t^2. Открытые квадраты вида

$$\left\{(t^1, t^2) \mid \frac{r}{4^k} < t^1 < \frac{r+1}{4^k}, \ \frac{s}{4^k} < t^2 < \frac{s+1}{4^k}\right\},$$

*) ϖ_0 и ϖ_α — проекции веерного произведения X.

где r и s целые и $0 \leqslant r \leqslant 4^k - 1$, $0 \leqslant s \leqslant 4^k - 1$, будем называть квадратами ранга k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Очевидно, любые два квадрата ранга k или совпадают, или дизъюнктны. В последнем случае пересечение замыканий этих квадратов или пусто, или состоит из их общей вершины, или состоит из их общей стороны. Если теперь квадрат Q_1 имеет ранг k, а квадрат Q_2 имеет ранг $k+i$, $i \geqslant 0$, то рассматривая единственный квадрат Q_2' ранга k, содержащий Q_2, легко доказать следующее

Утверждение 1. *Если квадрат Q_1 имеет ранг k, а квадрат Q_2 имеет ранг $k+i$, $i \geqslant 0$, то или $Q_1 \supseteq Q_2$, или $Q_1 \cap Q_2 = \Lambda$. Если $Q_1 \cap Q_2 = \Lambda$, то или*

(а) $[Q_1] \cap [Q_2] = \Lambda$, *и тогда Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от горизонтальной или вертикальной полосы ширины $\frac{1}{4^{k+i}}$, или*

(б) *пересечение $[Q_1] \cap [Q_2]$ состоит из общей вершины квадратов Q_1 и Q_2, или*

(в) *это пересечение состоит из стороны квадрата Q_2 (т. е. одна из сторон Q_2 лежит на одной из сторон Q_1).*

При этом в случае (б), *соответственно в случае* (в) *и $i > 0$, замыкание $[Q_2]$ содержит не более одной вершины квадрата Q_1 и расстояние от Q_2 до вершин Q_1, не содержащихся в $[Q_2]$, не меньше, чем $\frac{1}{4^{k+i}}$.*

Для квадрата Q ранга k (с длиной стороны d) обозначим через Q^* открытый квадрат, центр которого совпадает с центром Q, а стороны параллельны сторонам Q и имеют длину $\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{4^k} = \left(1+\frac{2}{3}\right)d$. (Если $Q^* \setminus T \neq \Lambda$, то под Q^* будем понимать прямоугольник $Q^* \cap T$.) Из утверждения 1 непосредственно вытекает

Утверждение 2. *Если квадраты Q_1 и Q_2 имеют ранг k и $[Q_1] \cap [Q_2] = \Lambda$, то $[Q_1^*] \cap [Q_2^*] = \Lambda$. Если квадрат Q_1 имеет ранг k, а квадрат Q_2 имеет ранг $k+i$, $i \geqslant 0$, и $[Q_1] \cap [Q_2] = \Lambda$, то $[Q_1] \cap [Q_2^*] = \Lambda$.*

II. Система $\lambda^\infty(Q)$.

Фиксируем какой-нибудь квадрат Q ранга k. Для чисел $i = 0, 1, 2, \ldots$ построим системы $\lambda^i = \lambda^i(Q)$ квадратов ранга $k+i$, удовлетворяющие следующим условиям:

(0) Система λ^0 состоит из одного квадрата Q.

(1) Для любого квадрата $Q_1 \in \lambda^i$, $i > 0$, и любого j, $0 \leqslant j < i$, определен единственный квадрат $Q_2 > Q_1$, $Q_2 \in \lambda^j$. Если при этом $Q_3 > Q_2$ и $Q_2 > Q_1$, то $Q_3 > Q_1$.

(2, а) Если $Q_2 > Q_1$, то $Q_2 \cap Q_1 = \Lambda$.

(2, б) Если $Q_2 \in \lambda^{i-1}$, $Q_1 \in \lambda^i$, $Q_1' \in \lambda^i$, $Q_2 > Q_1$, $Q_2 > Q_1'$ и $Q_1 \neq Q_1'$, то $Q_1 \cap Q_1' = \Lambda$.

(3, а) Если $Q_2 > Q_1$, $Q_2 \in \lambda^{i-1}$, $Q_1 \in \lambda^i$, $i > 0$, то одна из сторон Q_1 лежит на одной из сторон Q_2.

(3, б) Если сторона квадрата Q_1' ранга $k+i$ лежит на стороне квадрата $Q_2 \in \lambda^{i-1}$ и $Q_1' \subseteq T \setminus \bigcup\limits_{Q_3 \geqslant Q_2} Q_3$, то в λ^i существует квадрат $Q_1 < Q_2$, совпадающий с Q_1' как множество.

Систему λ^0 положим состоящей из одного квадрата Q. Предположим, что для всех $i \leqslant n$, $n \geqslant 0$, системы λ^i, удовлетворяющие условиям (1)—(3, б), уже построены. Построим систему λ^{n+1}.

Пусть $Q_1 \in \lambda^n$. Через $\lambda(Q_1, Q)$ обозначим систему всех таких квадратов Q' ранга $k+n+1$, что

$$Q' \subseteq T \setminus \bigcup_{Q_2 \geqslant Q_1} Q_2$$

и одна из сторон Q' лежит на одной из сторон Q_1.

Положим

$$\lambda^{n+1} = \bigcup_{Q_1 \in \lambda^n} \lambda(Q_1, Q),$$

где системы $\lambda(Q_1, Q)$ для различных Q_1 считаются состоящими из «обозначенных множеств» и потому *дизъюнктны* *).

Положим $Q_2 > Q'$, $Q' \in \lambda^{n+1}$, если $Q' \in \lambda(Q_1, Q)$ и $Q_2 \geqslant Q_1$.

Условия (1) — (3, б) для систем λ^i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, очевидно, выполнены. Положим

$$\lambda^\infty = \lambda^\infty(Q) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \lambda^i.$$

Установим некоторые свойства системы λ^∞.

Из условия (3, а) и из равенства $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^i} = \dfrac{1}{3}$ вытекает свойство

(4) $Q' \subseteq Q_1^*$, если $Q_1 \geqslant Q'$.

Сторону квадрата $Q_1 \in \lambda^\infty$ будем называть закрепленной, если она лежит на стороне какого-нибудь квадрата $Q_2 > Q_1$ или на стороне квадрата T. Сторона Q_1, не являющаяся закрепленной, будет называться свободной.

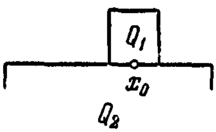

Рис. 1.

Из определения закрепленной стороны сразу же вытекает следующее утверждение:

(5, а) Если x_0 является неконцевой точкой закрепленной стороны AB квадрата Q_1 и сторона AB содержится в стороне EF квадрата $Q_2 > Q_1$, то в сумме окрестностей точки x_0 относительно $[Q_1]$ и $[Q_2]$ содержится окрестность точки x_0 относительно квадрата T (см. рис. 1) **).

Перейдем к случаю свободной стороны квадрата Q_1.

(6) Пусть сторона AB квадрата Q_1 ранга r является свободной. Через Q_1' обозначим квадрат ранга r, имеющий с Q_1 общую сторону AB. Тогда

$$Q_1' \subseteq T \setminus \bigcup_{Q_2 \geqslant Q_1} Q_2.$$

Действительно, если $Q_1' \cap Q_2 \neq \Lambda$, $Q_2 > Q_1$, то $Q_1' \subseteq Q_2$ (см. утверждение 1). Так как $Q_1 \cap Q_2 = \Lambda$ (см. условие (2, а)), то сторона AB квадрата Q_1 лежит на стороне Q_2 и, следовательно, вопреки условию, является закрепленной. Утверждение (6) доказано.

Из условия (3, б) и утверждения (6) вытекают следующие два утверждения:

*) См. гл. 1, § 6, замечание 3.

**) В этом прибавлении нумерация рисунков дается независимо от общей нумерации.

(5, б) Неконцевая точка x_0 свободной стороны AB квадрата Q_1 ранга r является или неконцевой точкой стороны $A'B'$ квадрата $Q' < Q_1$ ранга $r+1$, или общим концом C лежащих на AB сторон $A'C$ и CB' двух различных квадратов $Q' < Q_1$ и $Q'' < Q_1$ ранга $r+1$.

При этом сумма любых окрестностей точки x_0 относительно $[Q_1]$ и $[Q']$, соответственно относительно $[Q_1]$, $[Q']$ и $[Q'']$, содержит некоторую окрестность точки x_0 относительно T (см. рис. 2).

Рис. 2.

(7) Концевая точка свободной стороны AB квадрата Q_1 ранга r является вершиной квадрата $Q' < Q_1$ ранга $r+1$, одна из сторон которого лежит на AB.

Точку A, являющуюся вершиной хотя бы одного из квадратов системы λ^∞, назовем вершиной ранга r, если A является вершиной квадрата $Q_1 \in \lambda^\infty$ ранга r и не является вершиной никакого квадрата $Q_2 \in \lambda^\infty$ ранга $< r$.

(8) Если вершина A ранга r является вершиной квадрата $Q_1 \in \lambda^\infty$ ранга $s > r$, то A является также вершиной некоторого квадрата $Q_2 > Q_1$ ранга r.

Действительно, так как A есть вершина некоторого квадрата ранга r, то $\rho(A, Q_3) \geqslant \frac{1}{4^r}$ для любого квадрата Q_3 ранга r, не имеющего среди своих вершин точку A. Но тогда, очевидно, $\rho(Q_1, Q_3^*) \geqslant \frac{1}{4^r} - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^r} + \frac{1}{4^s}\right) > 0$. В силу утверждения (4), если $Q_3 > Q_1$ и Q_3 имеет ранг r, то A является вершиной Q_3. Утверждение (8) доказано.

Вершину A ранга r квадрата $Q_1 \in \lambda^\infty$ ранга r назовем закрепленной, если A является концом закрепленной стороны квадрата Q_1, и назовем свободной в противном случае.

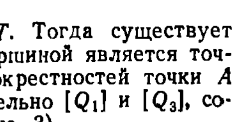

Рис. 3.

(5, в) Пусть вершина A ранга r квадрата Q_1 ранга r является закрепленной и сторона AB квадрата Q_1 лежит на стороне EF квадрата $Q_2 > Q_1$ или квадрата T. Тогда существует такой квадрат $Q_3 < Q_1$ ранга $r+1$, что одной его вершиной является точка A, одна из сторон лежит на стороне EF и сумма окрестностей точки A относительно $[Q_1]$, $[Q_3]$ и $[Q_2]$, соответственно относительно $[Q_1]$ и $[Q_3]$, содержит окрестность этой точки относительно T (см. рис. 3).

Доказательство. Так как A есть вершина ранга r, то A не является концом стороны EF. Сторона AC квадрата Q_1 (перпендикулярная к стороне AB и примыкающая к вершине A) не может быть закрепленной.

Действительно, если AC лежит на стороне квадрата $Q_4 > Q_1$, то или $Q_4 > Q_2$, или $Q_2 > Q_4$ (см. свойство (1)), и, следовательно, $Q_2 \cap Q_4 = \Lambda$ (по свойству (2, а)). Но тогда A есть вершина Q_4, что противоречит тому, что A — вершина ранга r.

Из незакрепленности стороны AC и утверждения (6) вытекает существование нужного квадрата Q_3.

(5, г) Пусть вершина A ранга $k+n$ квадрата $Q_1 \in \lambda^n$ является свободной, а AB и AC — стороны квадрата Q_1, примыкающие к A. Тогда существуют такие квадраты $Q_i \in \lambda^{n+i-1}$, $i = 2, 3, 4$, $Q_1 > Q_2 > Q_3 > Q_4$, что A

является их общей вершиной, одна из сторон Q_2 лежит на AB, одна из сторон Q_4 лежит на AC и сумма окрестностей точки A относительно $[Q_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, содержит ее окрестность относительно T (см. рис. 4).

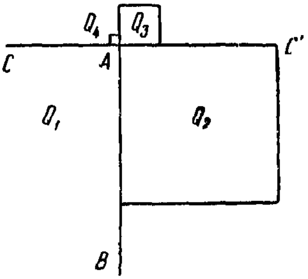

Рис. 4.

Доказательство. На основании утверждения (7) в λ^{n+1} существует квадрат $Q_2 < Q_1$, одна из сторон которого лежит на AB, а одна из вершин совпадает с точкой A. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \Lambda$, то вторая сторона Q_2, примыкающая к вершине A (обозначим ее через AC'), является продолжением стороны AC квадрата Q_1.

Сторона AC' квадрата Q_2 является свободной.

Предположим, что это не так. Тогда она лежит на стороне EF квадрата $Q' > Q_2$. В силу свойства (1) $Q' > Q_1$. Вершина A имеет ранг $k+n$ и поэтому не является концом стороны EF. Из утверждения 1 следует, что сторона AC квадрата Q_1 обязана лежать на стороне EF. Но это противоречит тому, что вершина A свободна. Итак, сторона AC' свободна. Существование нужных квадратов Q_3 и Q_4 доказывается так же, как существование Q_2.

III. Множество $\Gamma' = \Gamma'(Q)$.

Для квадрата $Q_1 \in \lambda^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, через $\Gamma'(Q_1)$ обозначим множество тех точек $x \in T$, любая окрестность которых пересекается с квадратами $Q' < Q_1$, $Q' \in \lambda^{n+p}$ для сколь угодно больших p. Ясно, что $\Gamma'(Q_1) \subseteq \subseteq [Q_1^*]$.

(9, а) Если вершина A квадрата Q_1 ранга r принадлежит замыканию $[Q_2]$ квадрата $Q_2 > Q_1$, то A является концом закрепленной стороны квадрата Q_1.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда (см. утверждение 1) $[Q_1] \cap [Q_2] = A$. Следовательно (см. свойство (3, а)), ранг $Q_2 \leqslant \leqslant r-2$. Если Q_3 — квадрат ранга $r-1$ и $Q_3 > Q_1$, то на сторонах Q_3 могут лежать лишь стороны Q_1, не являющиеся свободными, следовательно, не примыкающие к вершине A, а тогда $0 < \rho(Q_3, Q_2) \leqslant \frac{1}{4^r}$, что противоречит утверждению 1 (а). Аналогичным образом доказывается и следующее утверждение:

(9, б) Квадрат $Q_1 \in \lambda^\infty$ ранга r не может иметь двух противоположных закрепленных сторон.

(9, в) Пусть сторона AC квадрата Q_0 ранга r лежит на стороне EF квадрата $Q_1 > Q_0$ ранга $r-1$ и точки A и C не являются концами стороны EF. Тогда у Q_0 нет закрепленных сторон, отличных от AC.

Доказательство. Через AB и CD обозначим стороны Q_0, перпендикулярные стороне AC. Предположим, что сторона AB закреплена, т. е. лежит на стороне квадрата $Q_2 > Q_0$. Из условия (1) следует, что $Q_2 > Q_1$. Так как $Q_2 \cap Q_1 = \Lambda$ (см. условие (2, а)), то точка A есть вершина квадрата Q_2. Поэтому сторона EF квадрата Q_1 лишь частично лежит на стороне квадрата Q_2, что противоречит утверждению 1. Итак, сторона AB свободна. Аналогично доказывается, что свободна и сторона CD. Наконец, из утверждения (9, б) следует, что и сторона BD квадрата Q_0 свободна. Утверждение (9, в) доказано.

Нам понадобится еще несколько утверждений относительно множества

$$\gamma(Q_0) = \Gamma'(Q_0) \cap \left(\operatorname{гр} T \cup \bigcup_{Q' > Q_0} [Q']\right), \quad Q_0 \in \lambda^\infty.$$

(10) Пусть сторона AB квадрата Q_0 ранга r свободна и сторона AC этого квадрата перпендикулярна стороне AB. Через Q_0' обозначим квадрат ранга r, имеющий с Q_0 общую сторону AB. Через AC' обозначим сторону Q_0', являющуюся продолжением AC. Тогда множеству $\Gamma'(Q_0)$ принадлежит точка A', лежащая на AC' на расстоянии $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^r}$ от точки A. Ни одна точка полуинтервала $[C', A')$ *) не принадлежит $\Gamma'(Q_0)$. Если отрезок $[A, C']$ содержится в стороне квадрата $Q' > Q_0$ (или в стороне квадрата T), то $\Gamma'(Q_0) \cap [A, C'] = A'$ (см. рис. 5).

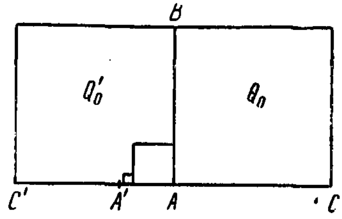

Рис. 5.

Доказательство. Из утверждения (6) и условий (3, а) и (3, б) сразу же следует существование таких квадратов $Q_i \subseteq Q_0'$ ранга $r + i$, $Q_i < Q_0$, что одна их сторона $A_{i-1}A_i$ лежит на AC', $A_0 = A$ и $\rho(A_i, A) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{4^{r+j}}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^r \cdot 4^j} = \frac{1}{4^r}\cdot\frac{1}{3}$, то точка A' действительно содержится в $\Gamma'(Q_0)$. Так как $\Gamma'(Q_0) \subseteq [Q_0^*]$, то точки полуинтервала $[C', A')$ не содержатся в $\Gamma'(Q_0)$.

Пусть теперь отрезок $[C', A]$ содержится в стороне EF квадрата $Q' > Q_0$ (см. рис. 5а).

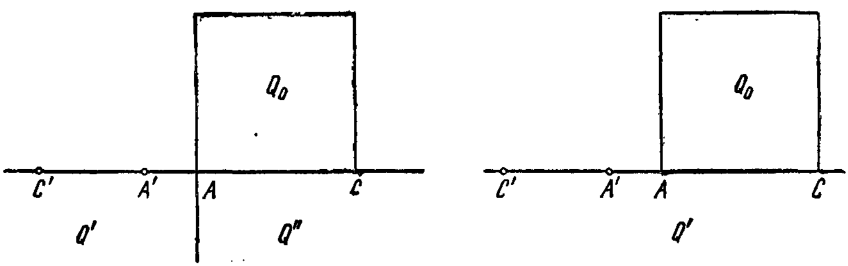

Рис. 5а.

Рассмотрим сначала случай, когда A является вершиной Q'. В силу утверждения (9, а) существует квадрат $Q'' > Q_0$, на стороне которого лежит сторона AC.

Из свойств (2, а) и (2, б) следует, что ни один из двух прямоугольников, основанием которых служит отрезок $[C', C]$, а высота равна $\frac{1}{4^{r+1}}$, не пересекается с отличными от Q_1 элементами $Q_1' < Q_0$ ранга $r+1$ системы λ^∞. Отсюда следует, что

$$\Gamma'(Q_1') \cap [C', A] \subseteq [(Q_1')^*] \cap [C', A] = \Lambda$$

*) Для точек A и B квадрата T через $[A, B]$ обозначается соединяющий их отрезок; $(A, B] = [A, B] \setminus A$; $[A, B) = [A, B] \setminus B$; $(A, B) = [A, B) \setminus A$.

для любого $Q_1' < Q_0$ ранга $r+1$, $Q_1' \neq Q_1$. Но так как $Q_2 \cap (Q_1 \cup Q_0 \cup Q' \cup Q'') = \Lambda$ для любого $Q_2 < Q_1$ (см. свойство (2, а)), то полуинтервал $(A_1, A_0]$ не содержит точек из $\Gamma'(Q_0)$.

Индукцией доказывается также, что

$$\Gamma'(Q_0) \cap (A_i, A_{i-1}] = \Lambda, \qquad i > 1.$$

Следовательно, и

$$\Gamma'(Q_0) \cap (A', A_0] = \Gamma'(Q_0) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i, A_{i-1}] = \Lambda.$$

В случае, когда точка A не есть вершина Q', сторона AC квадрата Q_0 лежит на той же стороне квадрата Q', что и AC' (см. утверждение 1). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения, проведенные выше.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда отрезок $[C', A]$ содержится в стороне квадрата T.

(11) Пусть сторона AC квадрата Q_0 ранга r лежит на стороне EF квадрата $Q_1 > Q_0$ ранга $r-1$ и точки A и C не являются концами стороны EF. Тогда множество $\gamma(Q_0)$ состоит из двух точек A_γ и C_γ, лежащих на стороне EF вне отрезка $[AC]$, и

$$\rho(A_\gamma, A) = \rho(C_\gamma, C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}.$$

Доказательство. На основании условия (2, а) и утверждений (9, в), (9, а) и 1 заключаем, что $\rho\left(Q_0, \bigcup_{Q' > Q_1} Q'\right) > 0$. Тогда в силу утверждения 2 имеем $[Q_0^\bullet] \cap \bigcup_{Q' > Q_1} [Q'] = \Lambda$.

Следовательно,

$$[Q_0^\bullet] \cap \bigcup_{Q' > Q_0} [Q'] = [Q_0^\bullet] \cap [Q_1] \text{ и } \Gamma'(Q_0) \subseteq \text{гр}\, Q_1.$$

Через AB и CD обозначим стороны Q_0, перпендикулярные стороне AC. Из утверждения 1 следует, что одна из сторон квадрата, симметричного квадрату Q_0 относительно его стороны AB, соответственно CD, лежит на EF. Нужное утверждение вытекает теперь из утверждения (10).

(12) Пусть сторона AC квадрата Q_0 ранга r лежит на стороне AF квадрата $Q_1 > Q_0$ ранга $r-1$, точка A является общей вершиной Q_0 и Q_1, перпендикулярная стороне AC сторона AB квадрата Q_0 является незакрепленной и или (а) A является вершиной квадрата $Q_2 > Q_1$, или (б) A не является вершиной никакого квадрата $Q_2 > Q_1$. Тогда множество $\gamma(Q_0)$ состоит из двух точек A_γ и C_γ. Точка C_γ лежит на стороне AF вне отрезка $[A, C]$, и $\rho(C_\gamma, C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$. Точка A_γ в случае (а) лежит на стороне AC' квадрата Q_2, являющейся продолжением стороны AC квадрата Q_0, и $\rho(A_\gamma, A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$. В случае (б) точка A_γ лежит на стороне AB' квадрата Q_1, являющейся продолжением стороны AB квадрата Q_0, и $\rho(A_\gamma, A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{r+1}}$ (см. рис. 6).

Доказательство. Рассмотрим случай (а). Через Q_0' обозначим квадрат ранга r, имеющий с Q_0 общую сторону AB. На основании утверждения (6) заключаем, что $Q_0' \cap Q' = \Lambda$ для любого квадрата $Q' > Q_0$. В частности, $Q_2 \cap Q_0' = \Lambda$.

Через AC'' обозначим сторону Q_2, лежащую на продолжении стороны AC. Из утверждения 1 следует, что сторона AC' квадрата Q_0', лежащая на продолжении AC, лежит на AC''.

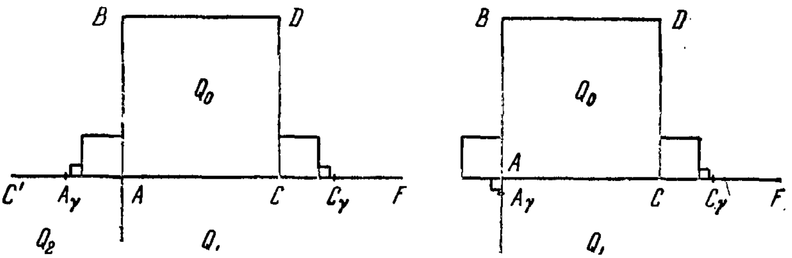

Рис. 6.

На основании утверждения (10) заключаем, что пересечение $\Gamma'(Q_0) \cap [Q_2]$ состоит из одной точки A_γ, лежащей на AC', и $\rho(A_\gamma, A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$.

Покажем, что сторона CD квадрата Q_0, противоположная стороне AB, не является закрепленной.

Действительно, если бы CD содержалась в стороне квадрата $Q' > Q_0$, то тогда точка C была бы вершиной ранга $< r-1$ и для вершин A и C ранга $\leqslant r-1$ выполнялось бы невозможное соотношение $\rho(A, B) = \frac{1}{4^r} < \frac{1}{4^{r-1}}$. На основании утверждения (10) заключаем, что пересечение $\Gamma'(Q_0) \cap [Q_1]$ состоит из одной точки C_γ, лежащей на AF, и $\rho(C_\gamma, C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$. Так как Q_0 имеет только одну закрепленную сторону (см. (9, б)), то для любого $Q' > Q_0$, $Q' \neq Q_1$, $Q' \neq Q_2$, в силу утверждения (9, а) и свойства (2, а), имеем $[Q_0] \cap [Q'] = \Lambda$ и, следовательно, $[Q_0^*] \cap [Q'] = \Lambda$ (см. утверждение 2). Таким образом, $\gamma(Q_0) = A_\gamma \cup C_\gamma$.

Рассмотрим случай (б). Через Q_3 обозначим квадрат ранга $r+1$, имеющий среди своих вершин точку A и удовлетворяющий соотношению $Q_3 < Q_0$. Через AC' обозначим сторону Q_3, являющуюся продолжением стороны AC квадрата Q_0. Так как A не является вершиной квадратов $Q' > Q_0$ ранга $< r-1$, то сторона AC' квадрата Q_3 является свободной. Через AB' обозначим сторону Q_1, являющуюся продолжением AB.

На основании утверждения (10) заключаем, что на AB' содержится единственная точка A_γ из $\Gamma'(Q_3)$ и $\rho(A, A_\gamma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{r+1}}$. Как и выше, можно показать, что сторона CD квадрата Q_0, противоположная его стороне AB, является незакрепленной, на AF лежит единственная точка C_γ из $\Gamma'(Q_0)$ и $\rho(C, C_\gamma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$. Так как расстояние от отрезка $[A, B']$

до любого квадрата $Q_3' < Q_0$ ранга $r+1$, $Q_3' \neq Q_3$, достаточно велико $\left(\geqslant \frac{1}{4^{r+1}}\right)$, то $[A, B'] \cap \Gamma'(Q_3') = \Lambda$. Но так как $\Gamma'(Q_0) = \bigcup \{\Gamma'(Q'') \mid Q'' < Q_0$, ранг $Q'' = r+1\}$, то $\Gamma'(Q_0) \cap [Q_1] = A_\gamma \cup C_\gamma$. Как и в случае (а), можно показать, что $[Q_0^*] \cap [Q'] = \Lambda$ для любого $Q' > Q_0$, $Q' \neq Q_1$.

Следовательно, $\gamma(Q_0) = A_\gamma \cup C_\gamma$. Утверждение (12) доказано.

(13) Пусть сторона AC квадрата Q_0 ранга r лежит на стороне AF квадрата $Q_1 > Q_0$ ранга $r-1$, точка A является общей вершиной Q_0 и Q_1 и перпендикулярная AC сторона AB квадрата Q_0 является закрепленной, т. е. лежит на стороне GH или квадрата $Q_2 > Q_0$, или квадрата T. Тогда

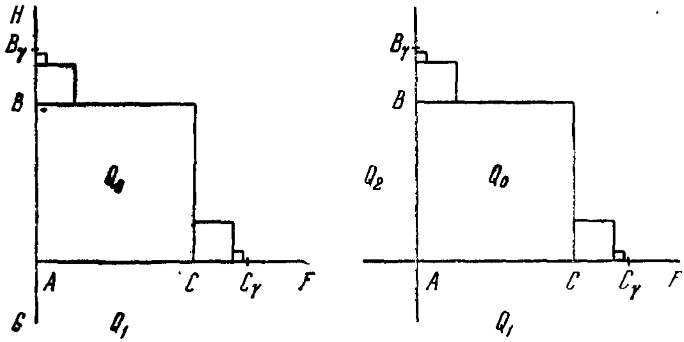

Рис. 7.

множество $\gamma(Q_0)$ состоит из двух точек B_γ и C_γ. Точка B_γ лежит на GH вне отрезка $[A, B]$, точка C_γ лежит на AF вне отрезка $[A, C]$, и $\rho(B_\gamma, B) = \rho(C_\gamma, C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^r}$ (см. рис. 7).

Доказательство утверждения (13) опирается на утверждение (10) и проводится аналогично доказательствам утверждений (11) и (12)

(14) Если квадраты Q_1 и $Q_2 \neq Q_1$ имеют ранг $r+1$ и $Q_1 < Q_0$, $Q_2 < Q_0$ для квадрата Q_0 ранга r, $r = 1, 2, 3, \ldots$, то $\gamma(Q_1) \cap \gamma(Q_2) = \Lambda$ (см., например, рис. 8).

Доказательство. Если $[Q_1] \cap [Q_2] = \Lambda$, то

$$\gamma(Q_1) \cap \gamma(Q_2) \subseteq \Gamma'(Q_1) \cap \Gamma'(Q_2) \subseteq [Q_1^*] \cap [Q_2^*] = \Lambda$$

(см. утверждение 2).

Пусть $[Q_1] \cap [Q_2] \neq \Lambda$.

Рассмотрим сначала случай, когда Q_1 и Q_2 имеют общую сторону AA'. Ясно, что один из концов отрезка $[A, A']$ лежит на стороне EF квадрата Q_0 и стороны BA и AC квадратов Q_1 и Q_2, соответственно, также лежат на EF. Из утверждений (11) — (13) следует, что одна из точек множества $\gamma(Q_1)$ лежит на интервале (A, C), а другая расположена вне множества $[Q_2^*]$. И, аналогичным образом, одна из точек множества $\gamma(Q_2)$ лежит на интервале (B, A), а вторая — вне множества $[Q_1^*]$. Следовательно, $\gamma(Q_1) \cap \gamma(Q_2) = \Lambda$.

Рассмотрим случай, когда пересечение $[Q_1] \cap [Q_2]$ состоит из общей вершины квадратов Q_1 и Q_2. Это возможно в случае, когда стороны AE и AF квадрата Q_0, исходящие из вершины A, свободны и сторона AB квадрата Q_1 лежит на AE, а сторона AC квадрата Q_2 лежит на AF. Стороны

AF' и AE' квадратов Q_1 и Q_2, являющиеся продолжением сторон AF и AE квадрата Q_0 соответственно, не могут быть закрепленными в силу утверждения (9, а). Утверждение (12) (случай (б)) позволяет заключить, что одна из точек множества $\gamma(Q_1)$ лежит на интервале (A, C), а другая — на стороне AE вне множества $[Q_2^*]$. Аналогичным образом, одна из точек

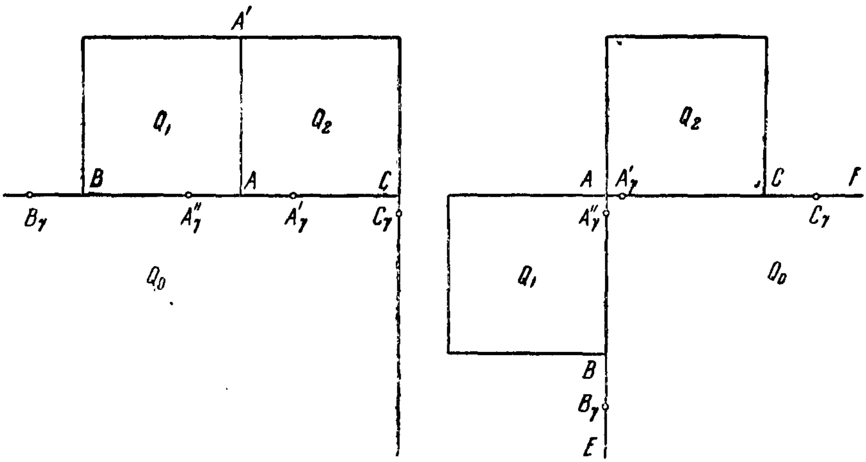

Рис. 8.

множества $\gamma(Q_2)$ лежит на (A, B), а другая — на стороне AF вне множества $[Q_1^*]$. Следовательно, $\gamma(Q_1) \cap \gamma(Q_2) = \Lambda$.

Утверждение (14) доказано.

Из утверждения (14) вытекает утверждение

(15) Если квадраты Q_1 и $Q_2 \neq Q_1$ имеют ранг $r+1$ и $Q_1 < Q_0$, $Q_2 < Q_0$ для квадрата Q_0 ранга r, $r = 1, 2, 3, \ldots$, то

$$\Gamma'(Q_1) \cap \Gamma'(Q_2) \subseteq T \setminus \Big(\text{гр}\, T \cup \bigcup_{Q' \geqslant Q_0} [Q']\Big).$$

IV. Спектр $S(Q)$, его предел $K(Q)$ и множества $L(Q)$ и $\Gamma(Q)$.

Поставим в соответствие каждому элементу Q_1 системы λ^∞ экземпляр $T(Q_1)$ квадрата T и через $\pi(Q_1)$ обозначим тождественное отображение $T(Q_1)$ на T. Через $X'_n = X'_n(Q)$ обозначим дискретную сумму квадратов $T(Q_1)$, $Q_1 \in \bigcup_{i=0}^{n} \lambda^i$. Будем считать $X'_0 \equiv T(Q) \equiv T$. Через π_0^n обозначим отображение компакта X'_n на $T \equiv X'_0$, совпадающее на $T(Q_1)$ с $\pi(Q_1)$. Через ω_n обозначим следующее разбиение пространства X'_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Пусть $x_j \in T(Q^j)$, $Q^j \in \lambda^\infty$, $j = 1, 2$. Пусть, кроме того, выполняются условия:

$$Q = Q_0^j > Q_1^j > \ldots > Q_{s_j}^j = Q^j,$$

(•) $Q_i^j \in \lambda^i$, $i = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, 2$, $Q_i^1 = Q_i^2$ для $i = 0, 1, \ldots, i_0$, $i_0 \leqslant \min(s_1, s_2)$ и если $i_0 < \min(s_1, s_2)$, то $Q_{i_0+1}^1 \neq Q_{i_0+1}^2$.

Точки x_1 и x_2 тогда и только тогда входят в один элемент разбиения ω_n, когда

$$(**)\qquad \pi_0^n x_1 = \pi_0^n x_2 \in \bigcup_{l=0}^{l_0} [Q_l^!] \cup \operatorname{гр} T.$$

Через $X_n = X_n(Q)$ обозначим пространство разбиения ω_n. Естественное отображение X'_n на X_n обозначим, как и соответствующее разбиенне, через ω_n. Очевидно, существует непрерывное отображение ϖ_0^n: $X_n \to T \equiv X'_0 \equiv X_0$, удовлетворяющее соотношению

$$(16)\qquad \pi_0^n = \varpi_0^n \omega_n.$$

Отображение ϖ_0^n открыто, так как открыто отображенне π_0^n.

Для квадрата $Q_1 \in \bigcup\limits_{l=0}^{n} \lambda^l$ положим

$$T_n(Q_1) = \omega_n T(Q_1).$$

В силу соотношения (16) и топологичности отображения π_0^n на $T(Q_1)$, имеет место утверждение

(17) Отображения

$$\omega_n\colon T(Q_1) \to T_n(Q_1)$$

и

$$\varpi_0^n\colon T_n(Q_1) \to T \equiv X_0, \quad Q_1 \in \bigcup_{l=0}^{n} \lambda^l,$$

являются гомеоморфизмами «на».

Из определения разбиения ω_n ясна справедливость такого утверждения:

(18) Пусть квадраты Q_1 и $Q_2 \neq Q_1$ принадлежат системе λ^n н существует такой квадрат $Q_0 \in \lambda^{n-1}$, что $Q_0 > Q_1$, $Q_0 > Q_2$. Тогда

$$T_n(Q_1) \cap T_n(Q_2) = T_n(Q_l) \cap \left(\varpi_0^n\right)^{-1} \left(\operatorname{гр} T \cup \bigcup_{Q' \geqslant Q_0} [Q']\right), \qquad l = 1, 2.$$

Из леммы 1 следует, что пространство X_n является компактом.

Через π_n^m, $n = 0, 1, \ldots, m$, обозначим отображение X'_m на X'_n, ставящее в соответствие точке $x \in T(Q') \subseteq X'_m$, $Q' \in \lambda^l$, эту же точку, если $l \leqslant n$, и точку $\left(\pi_0^n\right)^{-1} \pi_0^m x \cap T(Q'')$, где $Q'' \in \lambda^n$, $Q'' > Q'$, если $l > n$. Ясно, что при $l > m > n \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$(19)\qquad \pi_n^l = \pi_n^m \pi_m^l.$$

Покажем, что для любого $n \geqslant 0$ и любого $m \geqslant n$ существует отображение ϖ_n^m: $X_m \to X_n$, удовлетворяющее соотношению

$$(20)\qquad \varpi_n^m \omega_m = \omega_n \pi_n^m,$$

т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X'_m \arrow[r, "\omega_m"] \arrow[d, "\pi^m_n"'] & X_m \arrow[d, "\varpi^m_n"] \\ X'_n \arrow[r, "\omega_n"'] & X_n \end{tikzcd}$$

Покажем сначала, что для любой точки $x \in X_m$ множество $\omega_n \pi^m_n \omega^{-1}_m x$ одноточечно.

Пусть x_1 и $x_2 \in \omega^{-1}_m x$. Пусть еще $x_j \in T(Q^j)$ и выполняются условия (*), $j = 1, 2$. Из определения разбиения ω_m следует, что выполняется и условие (**) (с заменой n на m).

Если $l_0 \geqslant n$, то уже $\pi^m_n x_1 = \pi^m_n x_2$ и тем более $\omega_n \pi^m_n x_1 = \omega_n \pi^m_n x_2$.

Пусть $l_0 < n$. Рассмотрим лишь случай $s_1 > n$ и $s_2 \leqslant n$ (остальные случаи рассматриваются аналогичным образом). Тогда (по определению проекции π^m_n) $x'_1 = \pi^m_n x_1 \in T(Q^1_n) \subseteq X'_n$ и $x'_2 = \pi^m_n x_2 \in T(Q^2_{s_2}) \subseteq X'_n$. Так как $l_0 \leqslant \min(s_1, s_2) = s_2 = \min(n, s_2)$, то для точек x'_1 и x'_2 выполняется условие (*). Но так как еще (см. соотношение (19)) $\pi^n_0 x'_1 = \pi^n_0 \pi^m_n x_1 = \pi^m_0 x_1 = \pi^m_0 x_2 = \pi^n_0 \pi^m_n x_2 = \pi^n_0 x'_2$ и $\pi^n_0 x'_1 = \pi^n_0 x'_2 = \pi^m_0 x_1 \in \bigcup\limits_{l=0}^{l_0} [Q^l_l] \cup \operatorname{гр} T$, то для точек x'_1 и x'_2 выполняется и условие (**). Следовательно, $\omega_n x'_1 = \omega_n x'_2$.

Таким образом, множество $\omega_n \pi^m_n \omega^{-1}_m x$ одноточечно и отображение

$$\varpi^m_n = \omega_n \pi^m_n \omega^{-1}_m \colon X_m \to X_n$$

однозначно.

Справедливость соотношения (20) сразу же следует из определения отображения ϖ^m_n.

Непрерывность отображения ϖ^m_n вытекает из факторности отображения ω_m, непрерывности отображений ω_n и π^m_n и соотношения (20). Действительно, если множество O открыто в X_n, то множество $\omega^{-1}_m (\varpi^m_n)^{-1} O = (\pi^m_n)^{-1} \omega^{-1}_n O$ открыто в X'_m и, следовательно, множество $(\varpi^m_n)^{-1} O$ открыто в X_m.

Докажем справедливость соотношения

$$\varpi^l_n = \varpi^m_n \varpi^l_m \tag{21}$$

для $l > m > n \geqslant 0$.

Действительно,

$$\varpi^l_n = \omega_n \pi^l_n \omega^{-1}_l = \omega_n \pi^m_n \pi^l_m \omega^{-1}_l = (\omega_n \pi^m_n \omega^{-1}_m)(\omega_m \pi^l_m \omega^{-1}_l) = \varpi^m_n \varpi^l_m.$$

Обратный спектр $\{X_n, \varpi^m_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим через $S = S(Q)$. Предел спектра S обозначим через $K = K(Q)$.

Выясним некоторые свойства спектра S. Так как проекции ϖ_0^n открыты, $n=1, 2, 3, \ldots$, то проекция

$$\varpi_0 = \varpi(Q)\colon K \to T = X_0$$

также открыта (см. следствие 1).

Рассмотрим квадрат $Q_1 \in \lambda^l$, $l \leqslant n$. Квадрат $T(Q_1)$ входит и в пространство X'_n и в пространства X'_m, $m>n$. Очевидно, π_n^m отображает $T(Q_1) \subseteq X'_m$ на $T(Q_1) \subseteq X'_n$ гомеоморфно. Отсюда и из утверждений (17) и (20) следует, что

(22) проекция ϖ_n^m гомеоморфно отображает $T_m(Q_1)$ на $T_n(Q_1)$.

Если для квадрата Q_1 положить

$$Q_1(n) = T_n(Q_1) \cap \left(\varpi_0^n\right)^{-1} Q_1,$$

то из (22) следует, что

(23) проекция ϖ_n^m гомеоморфно отображает множества $Q_1(m)$ и $[Q_1(m)]$ на множества $Q_1(n)$ и $[Q_1(n)]$ соответственно.

В частности, гомеоморфизмами являются отображения

$$\varpi_0^n\colon Q_1(n) \to Q_1 \quad \text{и} \quad \varpi_0^n\colon [Q_1(n)] \to [Q_1].$$

Множество $Q_1(n)$ можно, таким образом, отождествить с квадратом Q_1 и также называть квадратом надлежащего ранга.

Из определения разбиения ω_n заключаем, что

$$(24) \qquad \left(\varpi_0^n\right)^{-1}[Q] = [Q(n)], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Через $L^l(n)$ обозначим сумму квадратов $Q_1(n)$, $Q_1 \in \bigcup\limits_{j=0}^{l} \lambda^j$, $l=0, 1, \ldots, n$.

Разбиения ω_m и ω_n, $0 \leqslant n < m$, на множестве X'_l как подмножестве пространств X'_m и X'_n индуцируют одно и то же разбиение, совпадающее с разбиением ω_l. Из соотношения (20) и из того, что π_n^m гомеоморфно отображает $X'_l \subseteq X'_m$ на $X'_l \subseteq X'_n$, следует, что отображение

$$\varpi_n^m\colon \omega_m X'_l \to \omega_n X'_l$$

является гомеоморфизмом «на». Так как $\varpi_n^m[L^l(m)] \subseteq [L^l(n)]$ (см. (23)) и $[L^l(m)] \subseteq \omega_m X'_l$, то

(25) проекция ϖ_n^m гомеоморфно отображает множество $[L^l(m)]$ на множество $[L^l(n)]$, $l=0, 1, \ldots, n$, $n<m$.

Таким образом, можно считать, что множество $[L^{n+1}(n+1)]$ получается из множества $[L^n(n)] \equiv [L^n(n+1)]$ «подклеиванием» замыканий квадратов системы λ^{n+1}.

Через ψ_n обозначим отображение

$$\varpi_0^n\colon [L^n(n)] \to T.$$

(26) Отображение ψ_n открыто в точках множества $[L^{n-3}(n)]$, $n=3, 4, 5, \ldots$

Достаточно доказать открытость ψ_n в точках замыкания $[Q_1(n)]$ для любого элемента $Q_1 \in \lambda^\infty$ ранга $r \leqslant k+n-3$.

Так как $\tilde{\omega}_0^n$ гомеоморфно отображает $[Q_1(n)]$ на $[Q_1]$, то открытость отображения ψ_n в точках множества $Q_1(n)$ очевидна.

Пусть $x \in [Q_1(n)] \setminus Q_1(n)$ и $x_0 = \tilde{\omega}_0^n x$.

(а) Рассмотрим случай, когда x_0 является неконцевой точкой закрепленной стороны AB квадрата Q_1 и $r \leqslant k+n$. Пусть сторона AB лежит на стороне EF некоторого квадрата $Q_2 > Q_1$. Из определения разбиения ω_n следует, что $x \in [Q_1(n)] \cap [Q_2(n)]$. Так как $\tilde{\omega}_0^n$ гомеоморфно отображает $[Q_l(n)]$ на $[Q_l]$, $l=1, 2$, то, в силу леммы 2 и утверждения (5, а), отображение ψ_n открыто в точке x.

Если сторона AB лежит на стороне квадрата T, то открытость ψ_n в точке x следует из того, что $\left(\tilde{\omega}_0^n\right)^{-1} x_0 = x$, и из гомеоморфности отображения ψ_n на $[Q_1(n)]$.

(б) Пусть теперь x_0 является неконцевой точкой свободной стороны AB квадрата Q_1 и $r \leqslant k+n-1$.

Если точка x_0 лежит на стороне $A'B'$ квадрата $Q' < Q_1$ ранга $r+1$ и не является концевой точкой стороны $A'B'$, то мы находимся в условиях предыдущего пункта (а) и, следовательно, отображение ψ_n в точке x открыто.

Если точка x_0 является вершиной A' квадрата $Q' < Q_1$ ранга $r+1$, то (см. (5, б)) она является вершиной еще одного квадрата $Q'' < Q_1$ ранга $r+1$. Из определения разбиения ω_n следует, что $x \in [Q_1(n)] \cap [Q'(n)] \cap [Q''(n)]$. Открытость отображения ψ_n в точке x вытекает теперь (так же как и в пункте (а)) из леммы 2 и утверждения (5, б).

(в) Пусть x_0 является закрепленной ранга r вершиной квадрата Q_1, $r \leqslant k+n-1$. Возьмем такие, как в пункте (5, в), квадраты Q_2 и Q_3 (соответственно Q_3). Тогда, в силу определения разбиения ω_n, справедливо включение $x \in \bigcap_{l=1}^{3} [Q_l(n)]$ (соответственно $x \in [Q_1(n)] \cap [Q_3(n)]$).

Открытость ψ_n в точке x доказывается теперь так же, как в пунктах (а) и (б).

(г) Пусть x_0 является свободной ранга r вершиной квадрата Q_1, $r \leqslant k+n-3$. Рассмотрим такие, как в утверждении (5, г), квадраты. Открытость ψ_n в точке x доказывается так же, как и в предыдущих пунктах (а) — (в).

(д) Пусть, наконец, точка x_0 является вершиной ранга $q < r$ квадрата Q_1 (ранг которого, напомним, равен r).

Тогда (см. (8)) существует квадрат $Q_2 > Q_1$ ранга q, для которого x_0 является вершиной. Из определения разбиения ω_n следует, что $x \in [Q_2(n)]$.

Открытость ψ_n в точке x следует теперь из пунктов (в) и (г).

Утверждение (26) доказано.

Положим

$$[L^n(\infty, Q)] = [L^n(\infty)] = \bigcap_{m \geqslant n} \tilde{\omega}_m^{-1} [L^n(m)], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

По соотношению (5) из § 1 Прибавления к гл. 1 множество $[L^n(\infty)]$ гомеоморфно пределу спектра $\left\{[L^n(m)], \tilde{\omega}_m^l\right\}$, $l > m \geqslant n$.

В силу утверждения (25) верно утверждение

(27) Отображения

$$\tilde{\omega}_m\colon [L^n(\infty)] \to [L^n(m)], \qquad m \geqslant n,$$

являются гомеоморфизмами.

Положим

$$L(Q) = L = \bigcup_{n=0}^{\infty} [L^n(\infty)].$$

Из утверждений (26) и (27) следует, что

(28) отображение

$$\mathfrak{S}(Q) = \mathfrak{S}_0\colon L(Q) \to T$$

открыто.

Так как $L^0(n) = Q(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то из (24) следует соотношение

(29) $$[L^0(\infty)] = \mathfrak{S}_0^{-1}[Q].$$

Для квадрата $Q_1 \in \lambda^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, положим

$$Q_1(\infty) = \mathfrak{S}_n^{-1} Q_1(n) \cap [L^n(\infty)].$$

Из (27) следует, что $\mathfrak{S}_n$ гомеоморфно отображает $Q_1(\infty)$ и $[Q_1(\infty)]$ соответственно на $Q_1(n)$ и $[Q_1(n)]$. Из (23) заключаем, что

(30) проекция $\mathfrak{S}_0$ гомеоморфно отображает $Q_1(\infty)$ и $[Q_1(\infty)]$ соответственно на Q_1 и $[Q_1]$.

Поэтому можно считать (см. (27) и (25)), что множество $[L^{n+1}(\infty)] = [L^{n+1}(n+1)]$ получается из множества $[L^n(\infty)] = [L^n(n)] = [L^n(n+1)]$ «подклеиванием» замыканий квадратов системы λ^{n+1}.

Покажем, что множество $[L^n(\infty)]$ является суммой множеств $[Q_1(\infty)]$ для $Q_1 \in \bigcup_{i=0}^{n} \lambda^i$.

Действительно, утверждение справедливо при $n = 0$ (см. (29)). Предположим, что оно справедливо при $n < m+1$, и пусть $n = m+1$. В силу утверждения (27) проекция гомеоморфно отображает $[L^{m+1}(\infty)]$ на $[L^{m+1}(m+1)]$ и $[L^m(\infty)]$ на $[L^m(m+1)]$. Нужное утверждение следует теперь из того, что $L^{m+1}(m+1) = L^m(m+1) \cup \bigcup_{Q_1 \in \lambda^{m+1}} Q_1(m+1)$.

Из доказанного утверждения можно заключить, что

(31) $$L(Q) = \bigcup_{Q_1 \in \lambda^{\infty}} [Q_1(\infty)].$$

Через $\Gamma(Q_1)$, $Q_1 \in \lambda^{\infty}$, обозначим множество тех точек из K, любая окрестность которых пересекается с квадратами $[Q'(\infty)]$ ранга r, $Q' < Q_1$ для сколь угодно больших r.

Ясно, что множества $\Gamma(Q_1)$ замкнуты. Докажем, что

(32) $$\dim \Gamma(Q) \leqslant 0.$$

Достаточно показать, что компакт $\Gamma(Q)$ вполне несвязен, т. е. что все его компоненты одноточечны (см. гл. 2, § 3, теорема 5).

Прежде всего, ясно, что

$$\Gamma(Q) = \bigcup_{Q_l \in \lambda^n} \Gamma(Q_l), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ и } \Gamma(Q_1) \subseteq \Gamma(Q_2) \text{ при } Q_1 < Q_2.$$

Покажем, что множества $\Gamma(Q_1)$ и $\Gamma(Q_2)$ не пересекаются, если квадраты Q_1 и Q_2 имеют одинаковый ранг $k+r$ и $Q_1 \neq Q_2$.

Для $r=0$ утверждение очевидно (в этом случае всегда $Q_1=Q_2$).

Предположим, что оно верно для всех $r\leqslant n-1$, $n-1\geqslant 0$, и пусть $r=n$. Если $Q_i<Q_i'$, $Q_i'\in\lambda^{n-1}$, $i=1, 2$, и $Q_1'\neq Q_2'$, то, по индуктивному предположению, $\Gamma(Q_1)\cap\Gamma(Q_2)\subseteq\Gamma(Q_1')\cap\Gamma(Q_2')=\Lambda$.

Пусть теперь $Q_i<Q_0$, $i=1, 2$, $Q_0\in\lambda^{n-1}$. Так как (см. 30)) $\varpi_0\Gamma(Q_i)\subseteq\subseteq\Gamma'(Q_i)$, $i=1, 2$, то, в силу утверждения (15),

$$\varpi_0(\Gamma(Q_1)\cap\Gamma(Q_2))\subseteq\varpi_0\Gamma(Q_1)\cap\varpi_0\Gamma(Q_2)\subseteq\Gamma'(Q_1)\cap\Gamma'(Q_2)\subseteq$$
$$\subseteq T\setminus\Big(\text{гр }T\cup\bigcup_{Q'\geqslant Q_0}[Q']\Big).$$

Следовательно, множество $\varpi_n(\Gamma(Q_1)\cap\Gamma(Q_2))$ содержится в открытом множестве

$$U=X_n\setminus(\varpi_0^n)^{-1}\Big(\text{гр }T\cup\bigcup_{Q'\geqslant Q_0}[Q']\Big).$$

Так как при $Q_i'\in\lambda^m$, $Q_i'<Q_i$, имеем $\pi_n^mT(Q_i')=T(Q_i)$, то (см. (20))

$$\varpi_n^mT_m(Q_i')=T_n(Q_i),\qquad i=1, 2.$$

Следовательно, $\varpi_n\Gamma(Q_i)\subseteq T_n(Q_i)$, $i=1, 2$. Из утверждения (18) выводим, что $\varpi_n(\Gamma(Q_1)\cap\Gamma(Q_2))\subseteq U\cap T_n(Q_1)\cap T_n(Q_2)=\Lambda$, откуда $\Gamma(Q_1)\cap\Gamma(Q_2)=\Lambda$.

Итак, для любого $n=0, 1, 2, \ldots$ множество $\Gamma(Q)$ представимо в виде дизъюнктной суммы замкнутых, а следовательно и открытых, в $\Gamma(Q)$ множеств $\Gamma(Q_i)$, $Q_i\in\lambda^n$.

Таким образом, любая компонента множества $\Gamma(Q)$ содержится в одном из множеств вида $\gamma=\bigcap_{n=0}^{\infty}\Gamma(Q_n)$, $Q_n\in\lambda^n$, $Q_{n+1}<Q_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, являющемся пересечением открыто-замкнутых в $\Gamma(Q)$ множеств. Так как $\varpi_0\gamma\subseteq\subseteq\bigcap_{n=0}^{\infty}\Gamma'(Q_n)\subseteq\bigcap_{n=0}^{\infty}[Q_n^*]$ и $\operatorname{diam}[Q_n^*]\to 0$ при $n\to\infty$, то множество $\varpi_0\gamma$ одноточечно.

Все проекции ϖ_n^{n+p} спектра S конечнократны, следовательно (см. Прибавление к гл. 1, § 1, равенство (5) и гл. 5, § 3, лемму 1),

(33) проекция $\varpi(Q)=\varpi_0$: $K\to T$ нульмерна.

Таким образом, множество $\gamma\subseteq\varpi_0^{-1}\varpi_0\gamma$ нульмерно, и уже отсюда можно заключить, что все компоненты компакта $\Gamma(Q)$ одноточечны.

Однако можно показать, что множество γ не только нульмерно, но даже одноточечно.

Действительно, множество $\varpi_n\gamma$ содержится в множестве $T_n(Q_n)$, которое проекцией ϖ_0^n гомеоморфно отображается на T (см. (17)). Следовательно, множество $\varpi_n\gamma=T_n(Q_n)\cap(\varpi_0^n)^{-1}\varpi_0\gamma$, $n=1, 2, 3, \ldots$, одноточечно. Но тогда одноточечно и множество $\gamma=\varprojlim\{\varpi_n\gamma, \varpi_n^m\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 7).

Итак, $\dim\Gamma(Q)=0$.

V. Пространства $K(n)$ и $N(n)$.

Рассмотрим систему $\mu(n)$ всех квадратов ранга n. Для каждого квадрата $Q\in\mu(n)$ возьмем предел $K(Q)$ спектра $S(Q)$. Проекции $\varpi(Q)$: $K(Q)\to T$ являются, как уже отмечалось, открытыми нульмерными (и непрерывными) отображениями.

Через $K(n)$ обозначим веерное произведение пространств $K(Q)$ относительно отображений $\mho(Q)$, $Q \in \mu(n)$. Проекции произведения $K(n)$ на T и $K(Q)$ обозначим соответственно через p_n и p_Q.

Из леммы 2 § 2 Прибавления к гл. 1 следует, что

(34) проекции p_n и p_Q, $Q \in \mu(n)$, открыты и нульмерны.

Положим
$$M(Q) = p_Q^{-1} L(Q), \quad Q \in \mu(n).$$
Из открытости проекций p_Q вытекает открытость отображений
$$p_Q\colon M(Q) \to L(Q).$$
Но тогда из утверждения (28) вытекает справедливость утверждения

(35) Отображение $p_n = \mho(Q)\, p_Q\colon M(Q) \to T$, $Q \in \mu(n)$, открыто.

Покажем, что

(36) $K(n) = \bigcup\limits_{Q \in \mu(n)} M(Q)$.

Действительно, если $p_n x = x_0 \in [Q]$, $Q \in \mu(n)$, то (см. (29))
$$p_Q x = x_Q \in (\mho(Q))^{-1}[Q] = [L^0(\infty)] \subseteq L(Q).$$

Заметим еще, что из утверждений (32), (33), леммы 2 из § 2 Прибавления к гл. 1 и следствия 3 из § 4 гл. 6 вытекает утверждение

(37) Компакты $\beta(Q) = p_Q^{-1}\Gamma(Q)$ нульмерны.

Построим пространства $N(n)$ и отображения $f_n\colon N(n) \to T$. Так как множество $L(Q) \cup \Gamma(Q) = [L(Q)]$ замкнуто в $K(Q)$, то множество $P(Q) = M(Q) \cup \beta(Q)$ замкнуто в $K(n)$.

Пространство $N'(n)$ положим равным дискретной сумме компактов $P(Q)$, $Q \in \mu(n)$. Через g'_n обозначим, очевидно, непрерывное отображение $N'(n)$ на $K(n)$, ставящее в соответствие точке $x \in P(Q) \subseteq N'(n)$ эту же точку множества $P(Q) \subseteq K(n)$. Ясно, что g'_n есть гомеоморфизм на каждом множестве $P(Q) \subseteq N'(n)$.

Через $N(n)$ обозначим пространство следующего разбиения ν_n пространства $N'(n)$.

Будем считать точки x_1 и x_2 из $N'(n)$ входящими в один элемент разбиения ν_n тогда и только тогда, когда
$$g'_n(x_1) = g'_n(x_2) \in \beta(n) = \bigcup_{Q \in \mu(n)} \beta(Q).$$

Естественное отображение $N'(n)$ на $N(n)$ обозначим, как и соответствующее разбиение, через ν_n.

Очевидно, определено отображение $g_n\colon N(n) \to K(n)$, удовлетворяющее соотношению $g'_n = g_n \nu_n$. Из этого соотношения, из непрерывности отображения g'_n и из факторности отображения ν_n следует непрерывность отображения g_n. Из гомеоморфности отображения g'_n на множествах $P(Q) \subseteq N'(n)$ следует, что ν_n гомеоморфно отображает множество $P(Q) \subseteq N'(n)$ на множество $\nu_n(P(Q)) = P(Q) \subseteq N(n)$, а g_n гомеоморфно отображает множество $P(Q) \subseteq N(n)$ на множество $P(Q) \subseteq K(n)$.

Из леммы 1 следует, что пространство $N(n)$ является компактом.

Так как отображение g_n конечнократно, а отображение p_n нульмерно, то (см. § 4 гл. 6, следствие 3)

(38) отображение $f_n = p_n g_n$: $N(n) \to T$ нульмерно.

Покажем, что

(39) отображение f_n: $N(n) \to T$ открыто.

Рассмотрим точку $x \in N(n)$ и ее окрестность Ox. Из соотношения (36) следует, что $g_n x \in M(Q)$ для некоторого $Q \in \mu(n)$.

Так как g_n гомеоморфно отображает множество $P(Q) \subseteq N(n)$ на множество $P(Q) \subseteq K(n)$, то множество $g_n Ox$ содержит окрестность точки $g_n x$ относительно множества $M(Q) \subseteq P(Q)$. Но тогда (см. (35)) множество $f_n Ox = p_n g_n Ox$ содержит окрестность точки $f_n x$ относительно T. Утверждение (39) доказано.

VI. Через N обозначим веерное произведение компактов $N(n)$ относительно отображений f_n: $N(n) \to T$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Проекции N на T и на $N(n)$ обозначим соответственно через f и h_n.

Из утверждений (38), (39) и леммы 2 из § 2 Прибавления к гл. 1 следует, что

отображение f: $N \to T$ открыто и нульмерно.

Покажем, что $\dim N \leqslant 1$. Для этого достаточно установить выполнение условий леммы 4.

Возьмем точку $x \in N$, точку $x_0 = fx$ и окрестность O точки x_0.

Через $\zeta'(n)$ обозначим систему всех квадратов ранга n, замыкания которых содержат точку x_0. Через $\zeta(n)$ обозначим систему тех квадратов ранга n, замыкания которых пересекают замыкание хотя бы одного квадрата из системы $\zeta'(n)$. Ясно, что

(40) $[Q^*] \not\ni x_0$ для любого квадрата $Q \in \mu(n) \setminus \zeta(n)$.

Очевидно. существует такой номер m, что

(41) $$\bigcup_{Q \in \zeta(m)} [Q^*] \subseteq O.$$

Пусть $x_m = h_m x$. Фиксируем произвольно выбранный квадрат $Q \in \mu(m)$. Из соотношений (30) и (31) получаем $(\mho(Q))[L(Q)] \subseteq [Q^*]$. Следовательно, для множества $P(Q) \subseteq K(m)$ справедливо включение

$$p_m P(Q) = (\mho(Q) \cdot p_Q)\, P(Q) = (\mho(Q))\, [L(Q)] \subseteq [Q^*].$$

Так как при отображении g_m: $N(m) \to K(m)$ множество $P(Q) \subseteq N(m)$ переходит в множество $P(Q) \subseteq K(m)$ и $f_m = p_m g_m$, то $f_m P(Q) \subseteq [Q^*]$. Отсюда и из соотношений (41) и (40) следует, что

$$F = \bigcup_{Q \in \zeta(m)} P(Q) \subseteq f_m^{-1} O$$

и что

$$x_m \in V = N(m) \setminus \bigcup_{Q \in \mu(m) \setminus \zeta(m)} P(Q).$$

Так как $N(m)$ является суммой множеств $P(Q)$, $Q \in \mu(m)$, то $V \subseteq F \subseteq f_m^{-1} O$. Из определения разбиения ν_m следует, что любые два множества $P(Q)$ пересекаются лишь по точкам из множества $g_m^{-1}\beta(m)$. Поэтому $\operatorname{гр} V \subseteq g_m^{-1}\beta(m)$. Так как (по теореме суммы и (37)) множество $\beta(m)$ нульмерно, а отображение g_m конечнократно, то (см. § 4 гл. 6, следствие 3) $\dim \operatorname{гр} V \leqslant$

$\leqslant \dim g_m^{-1}\beta(m) \leqslant 0$, т. е. в $\operatorname{ind} \operatorname{гр} V \leqslant 0$.

Условия леммы 4 выполнены, следовательно, $\dim N = \operatorname{ind} N \leqslant 1$. Так как открытым отображением размерность нульмерного бикомпакта повысить нельзя (см. гл. 9, § 4, предложение 1), то $\dim N \geqslant 1$.

Итак, мы построили открытое нульмерное (и непрерывное) отображение f: $N \to T$ одномерного компакта N на квадрат T.

Глава десятая

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Возникновение и быстрое развитие теории бесконечномерных пространств принадлежат к числу значительных событий в топологии последних лет. Первые понятия, лежащие в основе этой увлекательной главы теории размерности, и некоторые основные относящиеся к ней проблемы были известны еще Урысону. В частности, в первой главе его «Мемуара о канторовых многообразиях» ([1], стр. 269) читаем:

« Замечание. Вместо бесконечной размерности можно было бы ввести трансфинитные размерности для всех чисел второго класса и, может быть, даже дальше, потому что размерность (согласно ее определению) есть порядковое число. Впрочем, это распространение, по крайней мере в данный момент, кажется мне лишенным интереса, тем более, что даже в этом случае останутся, по-видимому, множества, не укладывающиеся в классификацию (области гильбертова пространства)».

Это было написано летом 1922 г. В последний год своей жизни (1924) Урысон владел понятиями счетномерного пространства (т. е. пространства, являющегося суммой счетного числа конечномерных, значит и нульмерных, множеств), равно как и понятием слабо счетномерного пространства (т. е. пространства, представимого как сумма счетного числа своих конечномерных замкнутых множеств). Он ставил вопрос о связи этих понятий с трансфинитной размерностью, а также интересовался доказательством несчетномерности гильбертова кирпича (в которой был твердо уверен). Урысон не успел доказать ни одной из своих гипотез, относящихся к бесконечномерным пространствам, и он ничего не опубликовал о них (даже доказанного им факта, что трансфинитная размерность есть порядковое число второго класса).

В настоящее время положение существенно изменилось. Мы имеем достаточно далеко продвинутую теорию счетномерных пространств, равно как пространств, допускающих трансфинитную размерность (§§ 1—4). На основе теоремы о перегородках дано, по-видимому, окончательное положительное определение сильно бесконечномерных компактов.

Это определение может быть сформулировано и посредством аналога теоремы о существенных отображениях. Исследуются вопросы о непрерывных отображениях слабо бесконечномерных (т. е. не сильно бесконечномерных) пространств на сильно бесконечномерные и вопросы существования универсальных пространств для различных классов бесконечномерных пространств.

Определяется понятие бесконечномерного канторова многообразия, и доказывается теорема о существовании бесконечномерного канторова многообразия во всяком сильно бесконечномерном компакте.

Однако остается нерешенной следующая центральная проблема: совпадает ли класс слабо бесконечномерных компактов с классом счетномерных?

Большой интерес в теории бесконечномерных пространств вызывала проблема, поставленная Тумаркиным еще в 1925 г., а именно:

Существует ли бесконечномерный компакт, размерность всякого непустого замкнутого подмножества которого или равна нулю, или бесконечна?

Эта проблема решена лишь в последние годы Хендерсоном [1], [2]: он построил компакт с только что сформулированными свойствами и даже показал, что эти «тумаркинские компакты» составляют в некотором смысле «большинство» среди бесконечномерных компактов, а именно — всюду плотное G_δ-множество в пространстве всех бесконечномерных компактов (рассматриваемом как подпространство пространства замкнутых подмножеств гильбертова кирпича).

К сожалению, эти сенсационные результаты должны были остаться за пределами нашей книги, равно как и не менее интересные результаты Андерсона (R. D. Anderson) и других авторов по вопросам, связанным с понятием бесконечномерного многообразия и примыкающими к нему понятиями.

Ниже через $\bigcup Q^n$ будет обозначаться пространство, являющееся дискретной суммой n-мерных кубов Q^n, гильбертов кирпич Q^∞ будет рассматриваться как произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ отрезков $Q_i = \{x_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$. Через Q^ω будет обозначаться множество тех точек гильбертова кирпича, лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Ясно, что множество Q^ω является суммой n-мерных кубов $Q^n = \{x = \{x_i\} \mid x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

§ 1. Трансфинитные индуктивные размерности

Размерности $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$ пространства X были при помощи индукции определены в гл. 2 для всех чисел $n=-1, 0, 1, 2, \ldots$ Продолжим эти определения на трансфинитные числа.

Определение 1. Для пустого множества Λ и только для него считается $\operatorname{ind} \Lambda = -1$. Предположим, что для порядкового числа β (быть может, бесконечного) уже определен класс регулярных пространств X, каждое из которых удовлетворяет неравенству $\operatorname{ind} X \leqslant \alpha$ хотя бы для одного порядкового числа $\alpha < \beta$, $\alpha = \alpha(X)$. Для регулярного пространства X будем считать $\operatorname{ind} X \leqslant \beta$, если

(а) для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого в X множества $F \not\ni x$ между x и F в X существует перегородка Φ, удовлетворяющая неравенству $\operatorname{ind} \Phi \leqslant \alpha$ для некоторого $\alpha = \alpha(\Phi) < \beta$.

Как и в конечномерном случае, условие (а) равносильно следующему условию:

(б) для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox существует такая окрестность $Vx \subseteq [Vx] \subseteq Ox$, что $\operatorname{ind} \operatorname{гр} Vx \leqslant \alpha$ для некоторого $\alpha = \alpha(Vx) < \beta$.

Считаем $\operatorname{ind} X = \alpha$, если $\alpha = \min\{\alpha' \mid \operatorname{ind} X \leqslant \alpha'\}$. Соотношение $\operatorname{ind} X < \beta$ означает, что существует α, для которого $\operatorname{ind} X \leqslant \alpha < \beta$. Не для всякого регулярного пространства X размерность $\operatorname{ind} X$ определена. Например, как будет показано ниже, она не определена для гильбертова кирпича Q^∞.

Автоматически трансфинитной индукцией доказывается следующее утверждение:

(1) если для регулярного пространства X определена размерность $\operatorname{ind} X$, то для любого его подпространства A также определена размерность $\operatorname{ind} A$ и

$$\operatorname{ind} A \leqslant \operatorname{ind} X.$$

Перейдем к большой индуктивной трансфинитной размерности. Впервые она была рассмотрена Смирновым в [5].

Определение 2. Для пустого множества Λ и только для него считается $\operatorname{Ind} \Lambda = -1$. Пусть для порядкового числа β (возможно, бесконечного) уже определен класс нормальных пространств X, каждое из которых удовлетворяет неравенству $\operatorname{Ind} X \leqslant \alpha$ хотя бы для одного порядкового числа $\alpha < \beta$, $\alpha = \alpha(X)$. Для нормального пространства X полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta$, если

(в) для любой дизъюнктной пары замкнутых в X множеств F_1 и F_2 между F_1 и F_2 в X существует перегородка Φ, удовлетворяющая неравенству $\operatorname{Ind} \Phi \leqslant \alpha$ для некоторого $\alpha = \alpha(\Phi) < \beta$.

Очевидно, условие (в) определения 2 равносильно условию

(г) для любого замкнутого в X множества F и любой его окрестности OF найдется такая окрестность $VF \subseteq [VF] \subseteq OF$, что $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} VF \leqslant \alpha$ для некоторого $\alpha = \alpha(VF) < \beta$.

Считаем $\operatorname{Ind} X = \alpha$, если $\alpha = \min\{\alpha' \mid \operatorname{Ind} X \leqslant \alpha'\}$. Соотношение $\operatorname{Ind} X < \beta$ означает, что существует α, для которого $\operatorname{Ind} X \leqslant \alpha < \beta$.

Как и $\operatorname{ind} X$, размерность $\operatorname{Ind} X$ определена не для любого нормального пространства X (см. ниже).

При помощи трансфинитной индукции читатель легко докажет следующие два утверждения:

(2) если для нормального пространства X определена размерность $\operatorname{Ind} X$, то для любого замкнутого в X множества F также определена размерность $\operatorname{Ind} F$, причем

$$\operatorname{Ind} F \leqslant \operatorname{Ind} X;$$

(3) если для нормального пространства X определена размерность $\operatorname{Ind} X$, то определена также и размерность $\operatorname{ind} X$ и

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X.$$

Заметим, что для пространства $\bigcup Q^n$ размерность $\operatorname{ind} \bigcup Q^n$ определена и равна, очевидно, ω_0, в то время как размерность $\operatorname{Ind} \bigcup Q^n$ не определена (это будет показано несколько позже).

Оценим значения $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$ сверху (в зависимости от мощностных характеристик пространства X).

Система $\mathfrak{B}$ открытых множеств пространства X называется *большой базой* пространства X, если для любого замкнутого в X множества F и любой его окрестности OF найдется такой элемент V системы $\mathfrak{B}$, что $F \subseteq V \subseteq OF$. Наименьшую мощность больших баз пространства X обозначим через WX. Как и ранее, через wX обозначаем вес пространства X. Очевидно, всегда $wX \leqslant WX$.

Легко видеть также, что для замкнутого подпространства F пространства X пересечения элементов большой базы пространства X с множеством F образуют большую базу в F. Поэтому

$$WF \leqslant WX.$$

Теорема 1 (Гуревич и Волмэн [1], Тулмин [1], Смирнов [5]). *Если для нормального, соответственно регулярного, пространства X определена размерность* $\operatorname{Ind} X$, *соответственно* $\operatorname{ind} X$, *и* $WX \leqslant \aleph_\alpha$, *соответственно* $wX \leqslant \aleph_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, *то*

$$\operatorname{Ind} X < \omega_{\alpha+1},$$

соответственно

$$\operatorname{ind} X < \omega_{\alpha+1}.$$

Доказательство обоих неравенств протекает одинаково, поэтому докажем лишь первое неравенство. Фиксируем какое-нибудь α, Если размерность $\operatorname{Ind} X$ конечна, то $\operatorname{Ind} X < \omega_0 < \omega_{\alpha+1}$. Предположим, что для всех порядковых чисел $\beta < \gamma$ соотношение $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta$ влечет соотношение $\operatorname{Ind} X < \omega_{\alpha+1}$.

Пусть $\operatorname{Ind} X \leqslant \gamma$. Возьмем произвольную большую базу $\mathfrak{B} = \{U\}$ пространства X мощности $\leqslant \aleph_\alpha$. Пару $\lambda = \{U', U''\}$ элементов этой базы назовем отмеченной, если существует хотя бы одно такое открытое в X множество V, что $[U'] \subseteq \subseteq V \subseteq [V] \subseteq U''$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V \leqslant \beta < \gamma$. Для каждой отмеченной пары $\lambda = \{U', U''\}$ выберем одно такое открытое в X множество V_λ, что

$$[U'] \subseteq V_\lambda \subseteq [V_\lambda] \subseteq U'' \quad \text{и} \quad \operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_\lambda \leqslant \beta = \beta(\lambda) < \gamma.$$

Так как система отмеченных пар имеет, очевидно, мощность $\leqslant \aleph_\alpha$, то и мощность системы ν множеств V_λ также $\leqslant \aleph_\alpha$. Множества $\operatorname{гр} V_\lambda$ замкнуты в пространстве X, поэтому $W \operatorname{гр} V_\lambda \leqslant \leqslant WX \leqslant \aleph_\alpha$. По индуктивному предположению имеем $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_\lambda < < \omega_{\alpha+1}$ для любого λ. Так как мощность системы ν не превосходит $\aleph_\alpha$, то существует такое число $\beta_0 < \omega_{\alpha+1}$, что $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_\lambda \leqslant \leqslant \beta_0$ для любого λ.

Покажем, что $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta_0 + 1$. Рассмотрим произвольное замкнутое в X множество F и его окрестность OF. Существует элемент U'' большой базы $\mathfrak{B}$, содержащий множество F и содержащийся в OF. Так как $\operatorname{Ind} X \leqslant \gamma$, то существует такое открытое в X множество V, что $[V] \leqslant U''$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V \leqslant \beta < \gamma$. Так как пространство X нормально и $\mathfrak{B}$ — его большая база, то существует такой ее элемент U', что $F \subseteq U' \subseteq [U'] \subseteq V$. Пара $\lambda = \{U', U''\}$, таким образом, отмеченная. Ясно, что $F \subseteq V_\lambda \subseteq [V_\lambda] \subseteq U'' \subseteq OF$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_\lambda \leqslant \beta_0$. Итак, $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta_0 + 1$. Но тогда $\operatorname{Ind} X < \omega_{\alpha+1}$. Таким образом, для любого порядкового числа γ соотношение $\operatorname{Ind} X \leqslant \gamma$ влечет соотношение $\operatorname{Ind} X < \omega_{\alpha+1}$. Следовательно, не существует пространства X с $WX \leqslant \aleph_\alpha$ и $\operatorname{Ind} X \geqslant \omega_{\alpha+1}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если для пространства X со счетной базой определена размерность* $\operatorname{ind} X$, *то*

$$\operatorname{ind} X < \omega_1.$$

Предложение 1. *Для бесконечного бикомпакта X справедливо равенство*

$$wX = WX.$$

Доказательство. Выберем в X базу $\mathfrak{B}' = \{O_\alpha\}$ мощности $\tau = wX$. В силу бесконечности бикомпакта X число τ бесконечно, поэтому система $\mathfrak{B} = \{O_{\alpha_1} \cup \ldots \cup O_{\alpha_s}\}$ всевозможных конечных сумм элементов базы $\mathfrak{B}'$ имеет мощность τ. Система $\mathfrak{B}$ является большой базой в X. Действительно, возьмем замкнутое в X множество F и его окрестность OF. Для каждой точки $x \in F$ выберем такой элемент $O_{\alpha(x)}$ базы $\mathfrak{B}'$, что $x \in O_{\alpha(x)} \subseteq OF$. Из покрытия $\{O_{\alpha(x)}\}, x \in F$, множества F выберем конечное подпокрытие $\{O_i = O_{\alpha(x_i)}\}$, $i = 1, \ldots, s$. Ясно, что

$$F = \bigcup_{i=1}^{s} O_i \subseteq OF.$$

Итак, $WX = wX$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает

Следствие 2. *Если для бесконечного бикомпакта X веса $\leqslant \aleph_\alpha$ определена размерность* $\operatorname{Ind} X$, *то*

$$\operatorname{Ind} X < \omega_{\alpha+1}.$$

В частности, если для компакта X определена размерность $\operatorname{Ind} X$, *то*

$$\operatorname{Ind} X < \omega_1 \text{ *)}.$$

Легко указать класс пространств X, для которых определена размерность $\operatorname{ind} X$ и не определена размерность $\operatorname{Ind} X$. Таким классом является, например, класс σ пространств X со счетной базой, представимых в виде дизъюнктной суммы открытых в X множеств X_n размерности $\operatorname{ind} X_n = \operatorname{Ind} X_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ясно, что $\operatorname{ind} X = \omega_0$ для любого такого пространства X. Предположим, что для некоторых пространств X указанного класса σ определена размерность $\operatorname{Ind} X$. Среди этих пространств можно найти такое пространство X^0, для которого значение $\operatorname{Ind} X^0$ будет минимальным. Пусть $\operatorname{Ind} X^0 = \beta$. Так как $X^0 \in \sigma$, то X^0 является дискретной суммой открытых множеств X_n размерности $\operatorname{Ind} X_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В каждом слагаемом X_n возьмем такую дизъюнктную пару замкнутых множеств A_n и B_n, чтобы любая перегородка C_n между ними в X_n имела размерность $\operatorname{Ind} C_n \geqslant n - 1$.

Множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ замкнуты в X^0 и не пересекаются. Возьмем между A и B перегородку C размерности $\operatorname{Ind} C = \alpha < \beta$. Замкнутое в X^0 множество C является дизъюнктной суммой открытых в C множеств $C_n = C \cap X_n$. Множества C_n являются перегородками между A_n и B_n в X_n, поэтому $n - 1 \leqslant \operatorname{Ind} C_n \leqslant n$. В каждом C_n можно выбрать замкнутое подмножество D_n размерности $\operatorname{Ind} D_n = n - 1$. Множество

*) В § 4 будет доказано следующее общее утверждение: если для метрического пространства X определена размерность $\operatorname{Ind} X$, то $\operatorname{Ind} X < \omega_1$.

$D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ замкнуто в C, следовательно, $\operatorname{Ind} D \leqslant \operatorname{Ind} C=\alpha<\beta$. Но пространство C принадлежит классу σ, поэтому (в силу выбора пространства X^0) имеем $\operatorname{Ind} C \geqslant \operatorname{Ind} X^0=\beta$. Полученное противоречие показывает, что ни для одного пространства X класса σ, в частности для $\bigcup Q^n$, размерность $\operatorname{Ind} X$ не определена.

Оказывается, имеется тесная связь между следующими двумя свойствами пространства X:

А. Для пространства X определена размерность $\operatorname{ind} X$ или $\operatorname{Ind} X$.

Б. Пространство X можно разложить в счетную сумму нульмерных подпространств.

Определение 3. Нормальное пространство X называется *счетномерным,* если оно представимо в виде счетной суммы $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ своих подпространств X_i размерности $\dim X_i \leqslant 0$, $i=1, 2, 3, \ldots$

Теорема 2 (Гуревич и Волмэн [1]). *Если полное метрическое пространство X счетномерно, то для него определена размерность* $\operatorname{ind} X$.

Доказательство (от противного). Считаем $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, $\dim X_i \leqslant 0$. Положим $Y_1=X$ и предположим, что размерность $\operatorname{ind} X$ не определена. Это означает существование такой точки $y_1 \in Y_1$ и такой ее окрестности O_1, что для любой окрестности V_1 этой точки, удовлетворяющей соотношениям

$$V_1 \subseteq [V_1] \subseteq O_1,$$

размерность $\operatorname{ind} \operatorname{гр} V_1$ не определена. Очевидно, можно считать $\operatorname{diam} O_1<\frac{1}{2}$. По предложению 1 из § 3 гл. 6 существует такая окрестность U_1 точки y_1, что $U_1 \subseteq [U_1] \subseteq O_1$ и $\operatorname{гр} U_1 \cap X_1=\Lambda$. В силу выбора окрестности O_1, для пространства $Y_2=\operatorname{гр} U_1$ не определена размерность $\operatorname{ind} Y_2$ и $\operatorname{diam} Y_2<\frac{1}{2}$.

По индукции можно, очевидно, построить систему замкнутых в X множеств Y_i, для которых не определена размерность $\operatorname{ind} Y_i$,

$$Y_{i+1} \subseteq Y_i, \quad Y_{i+1} \cap X_i=\Lambda \quad \text{и} \quad \operatorname{diam} Y_{i+1}<\frac{1}{2^i}, \quad i=1,2,3, \ldots .$$

В силу полноты пространства X пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ непусто, но в то же время $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Y_i \subseteq X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i = \Lambda$. Противоречие! Теорема доказана.

В теореме 2 размерность $\operatorname{ind} X$ нельзя заменить размерностью $\operatorname{Ind} X$. Действительно, пространство $\bigcup Q^n$ обладает, очевидно, полной метрикой, разлагается в счетную сумму нульмерных множеств, но, как показано выше, для него не определена размерность $\operatorname{Ind} \bigcup Q^n$.

Теорема 3 (Гуревич и Волмэн [1]*), Смирнов [6]). *Если для сильно метризуемого пространства X определена размерность* $\operatorname{ind} X$, *то пространство X счетномерно.*

Доказательство. В случае $\operatorname{ind} X = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 13 § 3 гл. 6. Предположим, что утверждение теоремы верно в случае $\operatorname{ind} X < \alpha$ для любого $\alpha < \beta$. Пусть $\operatorname{ind} X \leqslant \beta$. Возьмем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Дословно так же, как в лемме 7 из § 3 гл. 6, можно показать следующее: в покрытие пространства X, составленное из $\frac{1}{n}$-окрестностей всех точек пространства X, можно вписать такое σ-дискретное открытое покрытие $\nu_n = \bigcup\limits_i \nu_{ni}$, что

$$\nu_{ni} = \{V_\theta,\ \theta \in \Theta_{ni}\}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

где все ν_{ni} дискретны и $\operatorname{ind} \operatorname{гр} V_\theta \leqslant \alpha = \alpha(\theta) < \beta$ для всех $V_\theta \in \nu_n$. Система $\nu = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$ образует базу пространства X. Множество $X_0 = X \setminus \bigcup\limits_{V_\theta \in \nu} \operatorname{гр} V_\theta$ обладает базой из открыто-замкнутых в X_0 множеств $V_\theta \cap X_0$, $V_\theta \in \nu$. Поэтому $\operatorname{ind} X_0 \leqslant 0$. Но пространство X_0 сильно метризуемо, следовательно (см. гл. 6, § 3, теорема 13), и $\dim X_0 \leqslant 0$.

Так как система ν_{ni} дискретна, то дискретна и система $\{\operatorname{гр} V_\theta\}$, $V_\theta \in \nu_{ni}$, для каждой пары значений n и i (см. гл. 1, § 6, предложение 7). По индуктивному предположению каждое множество $\operatorname{гр} V_\theta$ разлагается в сумму множеств $A_{\theta j}$ размерности $\dim A_{\theta j} \leqslant 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Но тогда и $\dim \bigcup\limits_{\theta \in \Theta_{ni}} A_{\theta j} \leqslant 0$. Таким образом, множество $\bigcup\limits_{\theta \in \Theta_{ni}} \operatorname{гр} V_\theta$ разлагается в счетную сумму

*) Для пространств со счетной базой.

нульмерных множеств $\bigcup\limits_{\theta \in \Theta_{ni}} A_{\theta j}$. Следовательно, множество $\bigcup\limits_{V_\theta \in \nu} \operatorname{гр} V_\theta = \bigcup\limits_{n,i} \bigcup\limits_{\theta \in \Theta_{ni}} \operatorname{гр} V_\theta$, а значит и все пространство $X = X_0 \cup \bigcup\limits_{V_\theta \in \nu} \operatorname{гр} V_\theta$, разлагается в счетную сумму нульмерных множеств. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 3. *Для полного метрического пространства X со счетной базой тогда и только тогда определена размерность* $\operatorname{ind} X$, *когда пространство X счетномерно.*

Перейдем к большой индуктивной трансфинитной размерности.

Теорема 4 (Смирнов [6]). *Если для метрического пространства X определена размерность* $\operatorname{Ind} X$, *то пространство X счетномерно.*

Доказательство. Если $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$, то $\dim X \leqslant 0$ (по предложению 1 из § 3 гл. 2) и утверждение теоремы выполняется. Предположим, что утверждение теоремы имеет место для всех чисел $\alpha < \beta$ в случае $\operatorname{Ind} X \leqslant \alpha$. Пусть $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta$. Возьмем базу пространства X, распадающуюся в счетную сумму дискретных в X систем ω_i открытых в X множеств O_θ, $\theta \in \Theta_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Каждое множество O_θ представим в виде счетной суммы замкнутых в X множеств $F_{\theta j}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

В силу дискретности системы ω_i дискретной будет и каждая система $\lambda_{ij} = \{F_{\theta j}, \theta \in \Theta_i\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, тела $\tilde{\lambda}_{ij}$ систем λ_{ij} будут замкнуты в пространстве X. Тело $\tilde{\omega}_i$ системы ω_i является окрестностью множества $\tilde{\lambda}_{ij}$. Поэтому существует такая окрестность V_{ij} множества $\tilde{\lambda}_{ij}$, что $V_{ij} \subseteq \tilde{\omega}_i$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} V_{ij} \leqslant \alpha = \alpha(i, j) < \beta$.

Множества $V_{\theta j} = V_{ij} \cap O_\theta$ открыты и являются окрестностями множеств $F_{\theta j}$, $\theta \in \Theta_i$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Докажем, что система ν всех множеств $V_{\theta j}$, $\theta \in \Theta_i$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, есть база пространства X.

Действительно, возьмем точку $x \in X$ и ее окрестность Ox. Тогда существует такое множество O_θ, $\theta \in \Theta_i$, что $x \in O_\theta \subseteq Ox$. Но так как $O_\theta = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_{\theta j}$, то $x \in F_{\theta j}$ для некоторого номера j, откуда $x \in F_{\theta j} \subseteq V_{\theta j} \subseteq O_\theta \subseteq Ox$. Итак, система ν является базой пространства X. В силу включений $V_{\theta j} \subseteq O_\theta$, $\theta \in \Theta_i$ и дискретности системы ω_i дискретной будет и система $\nu_{ij} = \{V_{\theta j}, \theta \in \Theta_i\}$

для каждой пары значений i и j. Отсюда следует, что подпространство

$$X_0 = X \setminus \bigcup_{i,j} \bigcup_{\theta \in \Theta_i} \text{гр}\, V_{\theta j}$$

пространства X обладает σ-дискретной базой из открыто-замкнутых в X_0 множеств $X_0 \cap V_{\theta j}$. По следствию 1 из § 3 гл. 6 отсюда вытекает, что $\dim X_0 \leqslant 0$.

В силу дискретности систем ν_{ij} имеем равенства

$$\text{гр}\, V_{ij} = \bigcup_{\theta \in \Theta_i} \text{гр}\, V_{\theta j}.$$

Поэтому

$$X \setminus X_0 = \bigcup_{i,j} \bigcup_{\theta \in \Theta_i} \text{гр}\, V_{\theta j} = \bigcup_{i,j} \text{гр}\, V_{ij}.$$

Но по индуктивному предположению каждое множество гр V_{ij} представимо в виде счетной суммы нульмерных множеств, следовательно, и все пространство X представимо в виде счетной суммы нульмерных множеств. Теорема доказана.

Докажем следующее частичное обращение теоремы 4:

Теорема 5 (Смирнов [5]). *Для счетномерного компакта X определена размерность* $\operatorname{Ind} X$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и проводится от противного. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $\dim X_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Предположим, что для компакта X не определена размерность $\operatorname{Ind} X$. Тогда в пространстве X существует такое замкнутое множество F_1 и такая его окрестность O_1, что для границы гр V_1 любой окрестности $V_1 \subseteq [V_1] \subseteq O_1$ множества F_1 также не определена размерность Ind гр V_1. По предложению 1 из § 3 гл. 6 существует такая окрестность U_1 множества F_1, что $U_1 \subseteq [U_1] \subseteq O_1$ и гр $U_1 \cap X_1 = \Lambda$. Тогда, в силу выбора окрестности V_1, для компакта $Y_2 =$ гр U_1 не определена размерность $\operatorname{Ind} Y_2$. По индукции можно построить систему компактов $Y_i \subseteq X$, для которых не определена размерность $\operatorname{Ind} Y_i$, $Y_{i+1} \subseteq Y_i$ и $Y_{i+1} \cap X_i = \Lambda$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ В силу компактности пространства X пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$ непусто, но в то же время $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \Lambda$. Противоречие!

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и следствия 3 вытекает

Следствие 4. *Для компакта X следующие утверждения равносильны:*

(1) *определена размерность* $\operatorname{ind} X$;

(2) *определена размерность* $\operatorname{Ind} X$;

(3) *компакт X счетномерен.*

Замечание 1. Существуют компакты любой конечной размерности (например, n-мерные кубы). Аналогичным образом обстоит дело и в случае трансфинитных индуктивных размерностей. Оказывается (Смирнов [5], Левшенко [3]):

Для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ существуют компакты S^α и L^α размерности

(1) $$\operatorname{Ind} S^\alpha = \alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} L^\alpha = \alpha\ ^{*)}.$$

Компакты S^α строятся по индукции: S^0 есть точка. Предположим, что для всех чисел $\alpha < \beta$ ($\beta < \omega_1$) компакты S^α уже построены. Тогда:

(а) $S^\beta = S^{\alpha_0} \times Q$, если $\beta = \alpha_0 + 1$, где $Q = [0, 1]$, и

(б) S^β есть одноточечная компактификация дискретной суммы всех компактов S^α для $\alpha < \beta$, если β — предельное число.

Доказательство равенств (1) мы приводить не будем.

Замечание 2. Левшенко [2] показал, что компакт S^{ω_0+1} можно представить в виде суммы двух гомеоморфных компактов Φ_1 и Φ_2 размерности

$$\operatorname{ind} \Phi_i = \operatorname{Ind} \Phi_i = \omega_0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, уже конечная теорема суммы для трансфинитных размерностей неверна даже в классе компактов **).

Замечание 3. В классе пространств со счетной базой X, для которых определена размерность $\operatorname{ind} X$, не существует универсального пространства U.

В самом деле, если бы такое пространство U существовало, то оно обладало бы двумя противоречащими друг другу свойствами:

1) $\operatorname{ind} U < \omega_1$ (по теореме 1) и

2) $\operatorname{ind} U \geqslant \alpha$ для любого $\alpha < \omega_1$ (так как $L^\alpha \subseteq U$ для любого $\alpha < \omega_1$).

По той же причине не существует универсального пространства в классе пространств X со счетной базой, для которых определена размерность $\operatorname{Ind} X$.

---

*) Недавно Л. Люксембург построил компакт Φ размерности $\operatorname{ind} \Phi = \omega_0 + 1 < \operatorname{Ind} \Phi = \omega_0 + 2$.

**) См. также Тулмин [1].

§ 2. Счетномерные пространства

В предыдущем параграфе мы уже фактически начали изучение счетномерных пространств. Как было показано в § 3 гл. 6, соотношение $\dim X \leqslant n$ для метрического пространства X равносильно возможности представления X в виде суммы не более чем $n+1$ нульмерных множеств. Таким образом, по крайней мере в классе метрических пространств понятие счетномерного пространства обобщает понятие конечномерного пространства.

Сделаем несколько очевидных замечаний:

1) подпространство счетномерного совершенно нормального пространства счетномерно (см. теорему 18 из § 8 гл. 4);

2) если пространство X представлено в виде счетной суммы $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ счетномерных подпространств X_i, то пространство X счетномерно, в частности, счетномерно пространство, являющееся счетной суммой конечномерных метрических пространств;

3) если пространство X представлено в виде дизъюнктной суммы своих открытых счетномерных множеств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то пространство X счетномерно.

Действительно, если $X_\alpha = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_\alpha^i$, $\dim X_\alpha^i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\dim \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha^i \leqslant 0$ и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha^i \right)$.

Некоторые свойства счетномерных пространств аналогичны соответствующим свойствам конечномерных пространств.

В § 3 гл. 6 было показано, что для метрического пространства X соотношение $\dim X \leqslant n$ равносильно тому, что X является образом нульмерного метрического пространства при непрерывном замкнутом отображении кратности $\leqslant n+1$. Подобным образом можно охарактеризовать и счетномерные метрические пространства (см. теорему 6 и следствие 1 теоремы 7 этого параграфа).

Теорема 6 (Нагата [3]). *Для метрического пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *пространство X счетномерно;*

(б) *пространство X обладает такой σ-дискретной базой $\{V_\alpha\}$, что кратность системы $\{\operatorname{гр} V_\alpha\}$ конечна в каждой точке пространства X;*

(в) *существует непрерывное замкнутое конечнократное отображение метрического пространства X^0 размерности $\dim X^0 \leqslant 0$ на пространство X* *).

---

*) Отображение $f\colon X \to Y$ конечнократно, если множество $f^{-1}y$ конечно для любой точки $y \in Y$.

Докажем сначала, что из утверждения (а) следует утверждение (б).

Лемма 1. *Пусть в метрическом пространстве X даны: система множеств X_n размерности* $\dim X_n \leqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *система открытых множеств O_i и система замкнутых множеств* $F_i \subseteq O_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Тогда существует такая система открытых множеств V_i, что

(1) $F_i \subseteq V_i \subseteq O_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$;

(2) $\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots\} \leqslant n - 1$ *в любой точке x множества X_n*, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Множества X_n можно считать дизъюнктными, иначе достаточно рассмотреть множества X_1, $X_2 \setminus X_1, \ldots$
$\ldots, X_n \setminus \bigcup\limits_{r<n} X_r, \ldots$

В силу наследственной нормальности пространства X существует (см. гл. 6, § 3, предложение 1) такое открытое множество V_1, что $F_1 \subseteq V_1 \subseteq O_1$ и $\text{гр}\, V_1 \cap X_1 = \Lambda$. Таким образом, множество V_1 удовлетворяет условию (1) и для $j = 1$ система $\{V_i\}$ удовлетворяет условию

$(2)_j$ $\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_i \mid i = 1, \ldots, j\} \leqslant n - 1$ в любой точке множества X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Предположим, что для номеров $i \leqslant k$ уже построены открытые множества V_i, удовлетворяющие условиям (1) и $(2)_k$. Построим так множество V_{k+1}, чтобы удовлетворялись условия (1) и $(2)_{k+1}$. Положим

$$A_1 = X_1 \quad \text{и} \quad A_n = \bigcup_{i_1 \leqslant k, \ldots, i_{n-1} \leqslant k} (\text{гр}\, V_{i_1} \cap \ldots \cap \text{гр}\, V_{i_{n-1}} \cap X_n)\,^{*)}$$

для $n = 2, \ldots, k, k+1$, так что множества A_n дизъюнктны, так как дизъюнктны множества X_n. Пусть

$$B_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{k+1} A_n.$$

Покажем, что множества $\bigcup\limits_{n=1}^{p} A_n$, $p = 1, \ldots, k$, открыты в B_{k+1}.

Заметим, прежде всего, что

$$(3)\quad \bigcup_{n=p+1}^{k+1} A_n \subseteq F \equiv \bigcup_{n=p+1}^{k+1} \bigcup_{i_1 \leqslant k, \ldots, i_{n-1} \leqslant k} (\text{гр}\, V_{i_1} \cap \ldots \cap \text{гр}\, V_{i_{n-1}}),$$

кроме того,

$$(3')\quad \bigcup_{n=1}^{p} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{p} X_n.$$

*) Индексы $i_1, \ldots, i_{n-1}$ попарно различны.

Множество F замкнуто (как сумма конечного числа замкнутых множеств) и состоит из точек $x \in X$, в которых

$$\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_i \mid i = 1, \ldots, k\} \geqslant p.$$

Дополнительное к F множество $X \setminus F$ открыто и состоит из точек пространства X, в которых

$$\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_i \mid i = 1, \ldots, k\} < p.$$

Из условия $(2)_k$ вытекает включение

$$(4) \quad \bigcup_{n=1}^{p} X_n \subseteq X \setminus F.$$

Из включений (3), (3′), (4) и из дизъюнктности множеств A_n следует равенство

$$\bigcup_{n=1}^{p} A_n = B_{k+1} \cap (X \setminus F),$$

т. е. открытость множества $\bigcup\limits_{n=1}^{p} A_n$ в B_{k+1} установлена.

Но тогда множества A_1 и $A_{p+1} = \bigcup\limits_{n=1}^{p+1} A_n \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{p} A_n$, $p = 1, \ldots, k$, имеют тип F_σ в B_{k+1}. Так как $\dim A_n \leqslant \dim X_n \leqslant 0$, $n = 1, \ldots$ $\ldots, k+1$, то по теореме суммы и $\dim B_{k+1} \leqslant 0$.

Возьмем теперь, как и выше, такое открытое в X множество V_{k+1}, что $F_{k+1} \subseteq V_{k+1} \subseteq O_{k+1}$ и $\text{гр}\, V_{k+1} \cap B_{k+1} = \Lambda$. Очевидно, система $\{\text{гр}\, V_i \mid i = 1, \ldots, k+1\}$ удовлетворяет условиям (1) и $(2)_{k+1}$.

Продолжая это построение, получим искомую систему множеств V_i. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть метрическое пространство X представляется в виде суммы множеств X_n размерности* $\dim X_n \leqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда существует такая σ-дискретная база* $\{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *пространства X, что*

$$\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} \leqslant n-1 \quad \textit{для} \quad x \in X_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ возьмем σ-дискретное $\frac{1}{k}$-покрытие ω_k пространства X. Пусть $\omega_{kj} = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, — дискретные системы, в сумму которых распадается покрытие ω_k. Тела $\tilde{\omega}_{kj}$ систем ω_{kj} при фиксированном k образуют счетное открытое покрытие Ω_k. По предложению 7 из § 10 гл. 1 в покрытие Ω_k можно вписать такое замкнутое покрытие $\mu_k = \{F_{kj}\}$, что $F_{kj} \subseteq \tilde{\omega}_{kj}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ По предыдущей лемме существует система таких открытых множеств V_{kj}, что

(1') $F_{kj} \subseteq V_{kj} \subseteq \tilde{\omega}_{kj}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,

(2') $\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_{kj} \mid j = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots\} \leqslant n - 1$

для любой точки $x \in X_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

В силу дискретности системы ω_{kj} система множеств $V_\alpha = V_{kj} \cap O_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$, также дискретна для каждой пары значений k и j. Таким образом, система ν всех множеств V_α является σ-дискретной.

Покажем, что система ν является базой пространства X. Возьмем точку $x \in X$ и ее $\frac{1}{k}$-окрестность Ox. Существует элемент F_{kj} покрытия μ_k, содержащий точку x. Так как $F_{kj} \subseteq V_{kj} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}} V_\alpha$, то для некоторого индекса $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$ точка x содержится в множестве $V_\alpha = O_\alpha \cap V_{kj}$. Но $\operatorname{diam} O_\alpha < 1/k$, так как O_α является элементом $\frac{1}{k}$-покрытия ω_k. Следовательно, $\operatorname{diam} V_\alpha < 1/k$, откуда $V_\alpha \subseteq Ox$. Итак, система ν является σ-дискретной базой пространства X.

Осталось показать, что для любой точки $x \in X_n$

(2'') $\text{кр}_x \{\text{гр}\, V_\alpha \mid V_\alpha \in \nu\} \leqslant n - 1$.

В силу дискретности системы $\{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$, дискретной будет и система $\{\text{гр}\, V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$. Поэтому

$$\text{гр}\, V_{kj} = \text{гр} \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}} \text{гр}\, V_\alpha.$$

Таким образом, если точка $x \in X_n$ содержится в $\text{гр}\, V_{kj}$, то она содержится ровно в одном элементе системы $\{\text{гр}\, V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_{kj}$. Отсюда и из утверждения (2') следует утверждение (2''). Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что утверждение (б) теоремы 6 вытекает из утверждения (а) этой теоремы.

Покажем, что из утверждения (б) теоремы 6 вытекает утверждение (в) этой теоремы. Пусть база $\mathfrak{B}$ метрического пространства X распадается в счетную сумму дискретных систем $\mathfrak{B}_i = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и кратность системы $\{\text{гр}\, V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$, в каждой точке пространства X конечна.

Через F_i обозначим разность $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} V_\alpha$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Для каждого номера i возьмем произведение $X \times D_i$ пространства X на пару изолированных точек $D_i = \{0, 1\}$. Подпространство произведения $X \times D_i$, состоящее из точек множества $F_i' = F_i \times 1$ и множеств $[V_\alpha]' = [V_\alpha] \times 0$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, обозначим через X_i.

Естественную проекцию пространства X_l на X обозначим через p_l. В силу дискретности в $X \times D_l$ системы $\{V_\alpha \times 0\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_l$, а следовательно и системы $\{[V_\alpha]'\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_l$, множество X_l замкнуто в $X \times D_l$. Так как проекция произведения $X \times D_l$ на сомножитель X замкнута, то и проекция p_l: $X_l \to X$ является замкнутым отображением. Она, очевидно, осуществляет гомеоморфизм F'_l на F_l и $[V_\alpha]'$ на $[V_\alpha]$, $\alpha \in \mathfrak{A}_l$. По построению проекция p_l не более чем двукратна. Ясно, что прообраз $p_l^{-1}x$ состоит из двух точек тогда и только тогда, когда $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}_l} \operatorname{гр} V_\alpha$.

Через X^0 обозначим веерное произведение пространств X_l относительно отображений p_l: $X_l \to X$. Проекции X^0 на X и на X_l обозначим соответственно через π и π_l, $l = 1, 2, 3, \ldots$

Пространство X^0, очевидно, метризуемо, а отображение π: $X^0 \to X$ является отображением на все пространство X. Так как для точки $x \in X$ прообраз $\pi^{-1}x$ гомеоморфен произведению $\prod\limits_{l=1}^{\infty} p_l^{-1}x$ (см. Прибавление к гл. 1, § 2) и так как включение $x \in \operatorname{гр} V_\alpha$ осуществляется лишь для конечного набора индексов α, то лишь для конечного набора номеров $i_1, \ldots, i_s$ прообразы $p_{i_k}^{-1}x$, $k = 1, \ldots, s$, состоят из двух точек. Для остальных l прообразы $p_l^{-1}x$ одноточечны. Поэтому множество $\pi^{-1}x$ конечно для любой точки $x \in X$. Итак, отображение π: $X^0 \to X$ конечнократно. Докажем совершенность проекции π. Пространство X^0 естественным образом отождествляется с замкнутым подмножеством произведения $X \times \prod\limits_{l=1}^{\infty} D_l$. При этом проекция π отождествится с проектированием произведения $X \times \prod\limits_{l=1}^{\infty} D_l$ на сомножитель X, которое совершенно (гл. 1, § 8, предложение 11). Отсюда следует совершенность π.

Осталось показать, что $\dim X^0 \leqslant 0$. Для этого достаточно показать, что пространство X обладает σ-дискретной предбазой из открыто-замкнутых множеств (см. гл. 6, § 3, следствие 1).

Система $\{F'_l, [V_\alpha]'\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_l$, является, очевидно, дискретным, открытым и замкнутым покрытием пространства X_l. Следовательно, система $\omega_l = \{\pi_l^{-1}F'_l, \pi_l^{-1}[V_\alpha]'\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_l$, является дискретным, открытым и замкнутым покрытием пространства X^0. Покажем, что система $\omega = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \omega_l$ является предбазой пространства X^0. Возьмем точку $x^0 \in X^0$ и ее базисную окрестность $O =$

$=\pi_{i_1}^{-1}O_{i_1}\cap\ldots\cap\pi_{i_k}^{-1}O_{i_k}$, где O_{i_j} — окрестность координаты $x_{i_j}=\pi_{i_j}x^0$ точки x^0, $j=1,\ldots,k$.

Можно, очевидно, считать *), что $p_{i_j}^{-1}p_{i_j}x_{i_j}=x_{i_j}$ для $j=1,\ldots$ $\ldots, r$ и $p_{i_j}^{-1}p_{i_j}x_{i_j}=x_{i_j}\cup x'_{i_j}$, $x'_{i_j}\neq x_{i_j}$, для $j=r+1,\ldots,k$, где $r\leqslant k$.

Через Φ_j обозначим множество $[V_\alpha]'$, если $x_{i_j}\in[V_\alpha]'$, и множество F'_{i_j}, если $x_{i_j}\in F'_{i_j}$, $j=1,\ldots,k$.

Множество Φ_j открыто-замкнуто в X_{i_j}, поэтому можно, не ограничивая общности, считать $O_{i_j}\subseteq\Phi_j$, $j=1,\ldots,k$. Так как $x'_{i_j}\notin\Phi_j$, то можно взять окрестность O'_{i_j} точки x'_{i_j}, не пересекающуюся с Φ_j, $j=r+1,\ldots,k$. Таким образом, $p_{i_j}^{-1}p_{i_j}x_{i_j}=$ $=x_{i_j}\cup x'_{i_j}\subseteq O_{i_j}\cup O'_{i_j}$, $j=r+1,\ldots,k$.

В силу замкнутости отображений p_i существует такой элемент V_{α_0}, $\alpha_0\in\mathfrak{A}_{i_0}$, базы $\mathfrak{B}$, что $\pi x^0\in V_{\alpha_0}$ и $p_{i_j}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]\subseteq O_{i_j}$ для $j=1,\ldots,r$, $p_{i_j}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]\subseteq O_{i_j}\cup O'_{i_j}$ для $j=r+1,\ldots,k$. Ясно, что $p_{i_j}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]\cap\Phi_j\subseteq O_{i_j}$ для всех $j=1,\ldots,k$. Поэтому открыто-замкнутое в X^0 множество

$$V=\pi_{i_0}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{i_j}^{-1}\Phi_j=$$

$$=\pi_{i_0}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{i_j}^{-1}\left(p_{i_j}^{-1}p_{i_0}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap\Phi_j\right)=$$

$$=\pi_{i_0}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{i_j}^{-1}\left(p_{i_j}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]\cap\Phi_j\right)\subseteq$$

$$\subseteq\pi_{i_0}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{i_j}^{-1}O_{i_j}=\pi_{i_0}^{-1}\left[V_{\alpha_0}\right]'\cap O$$

содержится в окрестности O точки x^0. Так как множество V является окрестностью точки x^0, то система ω является предбазой пространства X. Неравенство $\dim X^0\leqslant 0$ установлено.

Итак, из утверждения (б) теоремы 6 вытекает утверждение (в) этой теоремы.

Теорема 6 будет доказана, если мы докажем, что из утверждения (в) этой теоремы вытекает утверждение (а).

Пусть метрическое пространство X является образом метрического пространства X^0 размерности $\dim X^0=0$ при замкнутом конечнократном отображении $f\colon X^0\to X$.

---

*) В силу двукратности p_i.

Через X_n обозначим множество тех точек пространства X, прообраз которых состоит ровно из $n+1$ точек пространства X^0. Так как отображение f конечнократно, то $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$.

Из замкнутости отображения $f\colon X^0 \to X$ вытекает замкнутость отображений $f\colon f^{-1}X_n \to X_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Так как $\dim f^{-1}X_n \leqslant \dim X^0 = 0$, то, по теореме 9 из гл. 6, множество X_n можно представить в виде суммы множеств X_{nj} размерности $\dim X_{nj} \leqslant 0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. Но тогда пространство $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{j=0}^{n} X_{nj}$ счетномерно. Теорема 6 доказана.

Можно дать еще и следующую характеристику метризуемых счетномерных пространств:

Теорема 7. *Метрическое пространство X тогда и только тогда счетномерно, когда*

(г) *существует такое непрерывное замкнутое отображение $f\colon X^0 \to X$ метрического пространства X^0 размерности* $\dim X^0 \leqslant 0$ *на пространство X, что для любой точки $x \in X$ мощность множества $f^{-1}x$ меньше* $\mathfrak{c}$ *).

Доказательство. Утверждение (г) следует из счетномерности пространства X в силу эквивалентности утверждений (а) и (в) теоремы 6.

Пусть теперь выполнено утверждение (г). Покажем, что тогда пространство X счетномерно.

По теореме Вайнштейна из § 7 гл. 1 отображение периферически компактно. Выбросив из X^0 для каждого $x \in X$ внутренность множества $f^{-1}x$, получим замкнутое в X^0 множество X'. Отображение $f\colon X' \to X$, очевидно, совершенно, а $\dim X' \leqslant 0$. Таким образом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать отображение $f\colon X^0 \to X$ совершенным. Так как компакт мощности $<\mathfrak{c}$ не более чем счетен (гл. 1, § 7, теорема 5), то отображение f можно считать счетнократным.

Возьмем базу $\mathfrak{B}$ пространства X^0, распадающуюся в сумму локально конечных систем $\mathfrak{B}_i = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Для каждого α через A_α обозначим множество тех точек $x \in X$, для которых пересечение $f^{-1}x \cap [V_\alpha]$ одноточечно. Так как на множестве $[V_\alpha]$ отображение f замкнуто, а на множестве $B_\alpha = f^{-1}A_\alpha \cap [V_\alpha]$ оно взаимно однозначно, то множество B_α гомеоморфно отображается на множество A_α. Для каждого $i=1, 2, 3, \ldots$

*) Тот факт, что из утверждения (г) вытекает счетномерность пространства X, впервые для компактного X установил Скляренко [2], затем для полного X — Смирнов [6], в общем случае — Архангельский [2] и Нагами [2].

система $\lambda_i = \{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, локально конечна. Действительно, возьмем точку $x \in X$. Ее прообраз $f^{-1}x$ является компактом и поэтому пересекается лишь с конечным набором $[V_{\alpha_1}], \ldots, [V_{\alpha_s}]$ элементов локально конечной системы $\overline{\mathfrak{B}}_i = \{[V_\alpha]\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_i$.

В силу локальной конечности системы $\overline{\mathfrak{B}}_i$ и замкнутости ее элементов, сумма F тех элементов системы $\overline{\mathfrak{B}}_i$, которые не пересекаются с $f^{-1}x$, замкнута и не пересекается с $f^{-1}x$. Разность $X \setminus F$ является окрестностью множества $f^{-1}x$ и содержится в сумме $\bigcup_{k=1}^{s} [V_{\alpha_k}]$. Из замкнутости отображения f вытекает существование такой окрестности Ox точки x, что $f^{-1}Ox \subseteq X \setminus F$. Ясно, что окрестность Ox может пересекаться лишь с элементами $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_s}$ системы λ_i. Локальная конечность системы λ_i установлена.

Покажем, что σ-локально конечная система $\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ является покрытием пространства X.

Возьмем произвольную точку $x \in X$. Ее прообраз $f^{-1}x$ является счетным компактом и поэтому содержит по крайней мере одну изолированную точку x^0. Так как множество $f^{-1}x \setminus x^0$ является замкнутым в $f^{-1}x$, то найдется такой элемент V_α базы $\mathfrak{B}$, что $x^0 \in V_\alpha$ и $[V_\alpha] \cap f^{-1}x = x^0$, откуда $x \in A_\alpha$. Итак, тело $\tilde{\lambda}$ системы λ совпадает со всем пространством X.

Докажем счетномерность пространства X. Так как $\tilde{\lambda} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i$, то для доказательства счетномерности пространства X достаточно доказать счетномерность каждого множества $\tilde{\lambda}_i$. При любом $\alpha \in \mathfrak{A}_i$ элемент A_α системы λ_i гомеоморфен множеству B_α, поэтому $\dim A_\alpha = \dim B_\alpha \leqslant \dim X^0 \leqslant 0$.

В силу локальной конечности системы λ_i и теоремы 9 из § 3 гл. 6 пространство $\tilde{\lambda}_i$ локально конечномерно.

Возьмем для каждой точки $x \in \tilde{\lambda}_i$ конечномерную окрестность Ox. В покрытие $\{Ox\}$ пространства $\tilde{\lambda}_i$ впишем покрытие ω, распадающееся в счетную сумму дискретных систем $\omega_j = \{O_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Так как $O_\gamma \subseteq Ox$ для некоторого $x \in \tilde{\lambda}_i$, то все элементы O_γ дискретной системы ω_j конечномерны, тем более счетномерны. Следовательно, тело $\tilde{\omega}_j$ этой системы ω_j счетномерно. Так как $\tilde{\lambda}_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{\omega}_j$, то пространство $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, также счетномерно, а потому счетномерно и пространство $X = \tilde{\lambda} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Метрическое пространство X счетномерно тогда и только тогда, когда оно является образом метрического пространства X^0 размерности* $\dim X^0 \leqslant 0$ *при непрерывном замкнутом счетнократном отображении.*

Из характеристики счетномерных метрических пространств, содержащейся в теореме 7, вытекает следующее утверждение:

Теорема 8 (Архангельский [2], Нагами [2]). *Пусть дано непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ счетномерного метрического пространства X на несчетномерное метрическое пространство Y. Тогда несчетномерно и множество Y_1 тех точек $y \in Y$, прообраз $f^{-1}y$ которых имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $Y_2 = Y \setminus Y_1$ и $X_2 = f^{-1}Y_2$. Отображение $f\colon X_2 \to Y_2$ замкнуто, и мощность каждого множества $f^{-1}y$, $y \in Y_2$, меньше $\mathfrak{c}$. По теореме 6, в силу счетномерности пространства X_2, существует непрерывное замкнутое и конечнократное отображение $g\colon X^0 \to X_2$ метрического пространства X^0 размерности $\dim X^0 \leqslant 0$ на пространство X_2. Очевидно, отображение $fg\colon X^0 \to Y_2$ является замкнутым. Кроме того, в силу конечнократности отображения g, мощность любого множества $(fg)^{-1}y$, $y \in Y_2$, меньше $\mathfrak{c}$. По теореме 7 пространство Y_2 счетномерно. Отсюда следует, что множество Y_1 не может быть счетномерным, иначе счетномерным было бы все пространство $Y = Y_1 \cup Y_2$. Теорема доказана.

Как и в классе n-мерных метрических пространств веса $\leqslant \tau$, в классе счетномерных метрических пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное пространство. Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая факторизационная теорема:

Теорема 9 (Пасынков [18]). *Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ совершенно нормального пространства X в метрическое пространство Z. Пусть, кроме того, в пространстве X дана счетная система подпространств A_i размерности* $\dim A_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда существует такое метрическое пространство Y, такие его подпространства B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и такие непрерывные отображения $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to Z$, что*

(1) $f = hg$;

(2) $gA_i \subseteq B_i$, $\dim B_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$;

(3) $wY \leqslant wZ$ *).

*) Вес пространства Z предполагается бесконечным (для конечного Z утверждение теоремы очевидно).

Пусть в нормальном пространстве X дана конечная дизъюнктная система ω открытых F_σ-множеств $O_1, \ldots, O_s$. По лемме Веденисова существуют такие непрерывные отображения f_i пространства X в отрезки $Q_i=[0, 1]$, что $f_i^{-1}\Gamma_i=O_i$, где Γ_i обозначает полуинтервал $(0, 1]$ отрезка Q_i, $i=1, \ldots, s$.

Пусть отображение f: $X \to Q^s$ в куб $Q^s=\prod\limits_{i=1}^{s} Q_i$ есть диагональное произведение отображений f_i. Проекцию куба Q^s на сомножитель Q_i обозначим через p_i. Отождествим при помощи проекции p_i отрезок Q_i с ребром

$$\{(y_i) \mid y_1=\ldots=y_{i-1}=y_{i+1}=\ldots=y_s=0,\ 0 \leqslant y_i \leqslant 1\}$$

куба Q^s. Через K^s обозначим подпространство $\bigcup\limits_{i=1}^{s} Q_i$ куба Q^s, т. е. сумму всех ребер куба Q^s, выходящих из точки $(0, \ldots, 0)$. Ясно, что $fX \subseteq K^s$ и $f^{-1}\Gamma_i=O_i$, $i=1, \ldots, s$.

Непрерывное отображение f: $X \to K^s$, удовлетворяющее условию

$$f_i^{-1}\Gamma_i=O_i, \qquad i=1, \ldots, s,$$

назовем стандартным относительно системы ω отображением пространства X в K^s. Теперь докажем следующую факторизационную лемму:

Лемма 3. *Пусть дано непрерывное отображение f: $X \to Z$ совершенно нормального пространства X в пространство со счетной базой Z и в пространстве X дано подпространство A размерности* $\dim A \leqslant 0$. *Тогда существует такое пространство со счетной базой Y, такое его подпространство B и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Z$, что*

(1) $f=hg$;

(2) $gA \subseteq B$, $\dim B \leqslant 0$.

Доказательство аналогично доказательству первой факторизационной теоремы из § 2 гл. 5.

Метрику пространства Z предполагаем вполне ограниченной (например, можно считать $Z \subseteq Q^\infty$) *).

Для каждого номера n возьмем конечное открытое $\frac{1}{2^n}$-покрытие ν_n пространства Z и его прообраз $\nu_n'=f^{-1}\nu_n$.

Пусть система ν_1'' состоит из пересечений элементов покрытия ν_1' с множеством A. Так как множество A нульмерно, то

*) См. гл. 1, § 7, п. 4.

существует конечное дизъюнктное открытое покрытие $\omega_1' = \{O_1', \ldots, O_{s_1}'\}$ множества A, вписанное в покрытие ν_1'' этого множества. В силу наследственной нормальности пространства X существует (см. гл. 7, § 1, лемма 2) такое дизъюнктное открытое покрытие $\omega_1 = \{O_1, \ldots, O_{s_1}\}$ некоторой окрестности множества A в X, что $O_i \cap A = O_i'$, $i = 1, \ldots, s_1$. Можно, очевидно, считать, что система ω_1 вписана в покрытие ν_1'. Через g_1 обозначим стандартное относительно системы ω_1 отображение пространства X в компакт K^{s_1}.

Предположим, что для любого $n \leqslant j-1$ уже построены: дизъюнктное покрытие $\omega_n = \{O_1, \ldots, O_{s_n}\}$ некоторой окрестности множества A в X и стандартное относительно системы ω_n отображение g_n: $X \to K^{s_n}$.

Пусть $n = j$. Для каждого $k < j$ возьмем конечное открытое $\frac{1}{2^j}$-покрытие μ_{kj} компакта K^{s_k} и положим $\mu_{kj}' = g_k^{-1}\mu_{kj}$.

Через ν_j'' обозначим покрытие множества A, состоящее из пересечений множества A с элементами произведения покрытий $\nu_j' \wedge \mu_{1j}' \wedge \ldots \wedge \mu_{j-1,j}'$. В покрытие ν_j'' впишем конечное открытое дизъюнктное покрытие ω_j' множества A и затем, как и выше, продолжим систему ω_j' в конечное дизъюнктное открытое покрытие $\omega_j = \{O_1, \ldots, O_{s_j}\}$ некоторой окрестности множества A в X. Можно, очевидно, считать систему ω_j вписанной в покрытие $\nu_j' \wedge \mu_{1j}' \wedge \ldots \wedge \mu_{j-1,j}'$. Через g_j: $X \to K^{s_j}$ обозначим стандартное относительно системы ω_j отображение X в K^{s_j}.

Компакты K^{s_n} и отображения g_n построим для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Положим $K^{s_0} = Z$ и $g_0 = f$. В произведении $Y = \prod_{n=0}^{\infty} K^{s_n}$ введем метрику ρ, полагая для произвольных двух точек

$$y = \{y_n\} \quad \text{и} \quad y' = \{y_n'\} \text{ из } Y$$

расстояние

$$\rho(y, y') = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n^2(y_n, y_n')\right]^{1/2},$$

где ρ_n — метрика в K^{s_n}.

Пространство Y обладает счетной базой (см. гл. 1, § 8, предложение 4).

Диагональное произведение отображений g_n обозначим через g: $X \to Y$ и положим $B = gA$.

Проектирование произведения Y на сомножитель K^{s_n} обозначим через π_n. Очевидно, $g_n = \pi_n g$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ В частности, $f = g_0 = \pi_0 g$. Обозначив π_0 через h, получим соотношение $f = hg$.

Для доказательства соотношения $\dim B \leqslant 0$ достаточно доказать неравенство $\operatorname{ind} B \leqslant 0$ (см. гл. 2, § 3, предложение 3), т. е. достаточно доказать существование в B базы из открыто-замкнутых множеств.

Возьмем компакт K^{s_n}, $n = 2, 3, 4, \ldots$, и в нем открытые дизъюнктные множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_n}$ (см. стр. 512). По построению отображения g_n имеем равенства $O_l = g_n^{-1}\Gamma_l$, $l = 1, \ldots, s_n$. Так как тело $\tilde{\omega}_n$ системы $\omega_n = \{O_1, \ldots, O_{s_n}\}$ является окрестностью множества A и так как $g_n = \pi_n g$, то множество $g\tilde{\omega}_n = gX \cap \pi_n^{-1} \bigcup\limits_{l=1}^{s_n} \Gamma_l$ является окрестностью множества B в gX. Система открытых множеств Γ_l дизъюнктна, поэтому дизъюнктна и система открытых в gX множеств $V_l = gO_l = gX \cap \pi_n^{-1}\Gamma_l$, $l = 1, \ldots, s_n$. Ясно, что $B \subseteq \bigcup\limits_{l=1}^{s_n} V_l = g\tilde{\omega}_n$. Оценим сверху диаметр множеств V_l.

По построению система ω_n вписана в произведение покрытий $\nu_n' \wedge \mu_{1n}' \wedge \ldots \wedge \mu_{n-1,n}'$. Так как $g_n O_l = \pi_n g O_l = \pi_n V_l$, то образ каждого множества V_l при проектировании π_0, соответственно π_k, $k = 1, \ldots, n-1$, содержится в некотором элементе покрытия ν_n, соответственно μ_{kn}, $k = 1, \ldots, n-1$, и поэтому имеет диаметр $< \frac{1}{2^n}$; диаметр каждого компакта K^{s_n} равен $\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, поэтому

$$\operatorname{diam} V_l \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sqrt{2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{2^n} + \sqrt{2}\,\frac{2}{2^n}\right)^{1/2} < \left(\frac{3}{2^{n-1}}\right)^{1/2}.$$

Ясно, что с ростом n диаметр множеств V_l становится сколь угодно малым. Итак, для любого $n = 2, 3, 4, \ldots$ множество B обладает конечными открытыми дизъюнктными покрытиями $\lambda_n = \{V_l \cap B\}$, $l = 1, \ldots, s_n$, диаметр элементов которых стремится к нулю с ростом n. Таким образом, существование базы из открыто-замкнутых множеств в пространстве B доказано. Следовательно, $\dim B = \operatorname{ind} B \leqslant 0$. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 9 в случае $wZ = \aleph_0$.

Положим $Y_0 = Z$ и $g_0 = f$. По предыдущей лемме существует такое пространство со счетной базой Y_1, такое его подпространство B_1^1 размерности $\dim B_1^1 \leqslant 0$ и такие непрерывные отображения $g_1\colon X \to Y_1$ и $h_1\colon Y_1 \to Y_0$, что $g_0 = h_1 g_1$ и $g_1 A_1 \subseteq B_1^1$.

Предположим, что для всех номеров $j \leqslant n-1$, $n > 1$, уже построены такие пространства со счетной базой Y_j и непрерывные отображения $g_j\colon X \to Y_j$ и $h_j\colon Y_j \to Y_{j-1}$, что $g_{j-1} = h_j g_j$. Пусть $j = n$. Число n единственным образом представляется в виде $n = \frac{k(k+1)}{2} + i$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ и $0 < i \leqslant k+1$ *). По лемме 3 существует такое пространство со счетной базой Y_n, его подпространство B_i^n и такие непрерывные отображения $g_n\colon X \to Y_n$ и $h_n\colon Y_n \to Y_{n-1}$, что

$$g_{n-1} = h_n g_n, \quad g_n A_i \subseteq B_i^n \quad \text{и} \quad \dim B_i^n \leqslant 0.$$

Построив для каждого номера $n = 1, 2, 3, \ldots$ пространство со счетной базой Y_n и непрерывные отображения g_n, h_n, получим счетный обратный спектр

$$S = \{Y_n, h_n\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Предел спектра S обозначим через Y. Так как $Y \subseteq \prod\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1), то пространство Y обладает счетной базой. Через π_n обозначим проекцию предела Y в элемент Y_n спектра S.

Отображения g_n определяют (см. Прибавление к гл. 1, § 1) такое непрерывное отображение $g\colon X \to Y$, что

$$g_n = \pi_n g, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В частности, положив $\pi_0 = h$, получим

$$f = g_0 = \pi_0 g = hg.$$

Покажем, что $\dim gA_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Действительно, множество gA_i является подмножеством предела $B_i = \bigcap \pi_n^{-1} g_n A_i$ спектра $S_i = \{g_n A_i = \pi_n g A_i, h_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, равенство (5)).

Рассмотрим только номера

$$n_k = \frac{k(k+1)}{2} + i, \qquad k = i-1, i, i+1, \ldots$$

Спектр $S_i' = \left\{g_{n_k} A_i, h_{n_k}^{n_{k+1}} = h_{n_k+1} \ldots h_{n_{k+1}}\right\}$ является конфинальной частью спектра S_i, поэтому пространство B_i является

---

*) Напомним, что $\frac{k(k+1)}{2}$ есть сумма первых k натуральных чисел.

пределом спектра S_i' (см. Прибавление к гл. 1, § 1). По построению $g_{n_k}A_i \subseteq B_i^{n_k}$, поэтому

$$\operatorname{ind} g_{n_k}A_i = \dim g_{n_k}A_i \leqslant \dim B_i^{n_k} \leqslant 0.$$

Так как предел спектра из индуктивно нульмерных пространств индуктивно нульмерен (см. Прибавление к гл. 1, § 1), то $\operatorname{ind} B_i \leqslant 0$. Так как B_i обладает счетной базой, то $\dim B_i = \operatorname{ind} B_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Теорема 9 в случае $wZ = \aleph_0$ доказана.

Докажем теперь теорему 9 полностью*). По теореме 8 из гл. 6 существует вполне нульмерное отображение $\varphi\colon Z \to T$ пространства Z на пространство со счетной базой T. По только что доказанному можно найти такое пространство со счетной базой S, такие его подпространства C_i размерности $\dim C_i \leqslant 0$ и такие непрерывные отображения $\psi\colon X \to S$ и $\chi\colon S \to T$, что $\varphi f = \chi\psi$ и $\psi A_i \subseteq C_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

По замечанию к лемме 3 из § 2 Прибавления к гл. 1 определено непрерывное отображение $g\colon X \to Y$ пространства X в веерное произведение Y пространств Z и S относительно отображений φ и χ по правилу $gx = (fx, \psi x)$, $x \in X$. При этом $f = hg$ и $\psi = pg$, где h и p — проекции веерного произведения Y на сомножители Z и S соответственно:

$$\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "\psi"'] & Y \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "p"] & & T \\
& & S \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

По лемме 4 из § 3 гл. 6 в Y можно ввести такую метрику, что проекция p будет вполне нульмерным отображением. Положим $B_i = p^{-1}C_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ В силу эквивалентности утверждения (1) теоремы 9 из § 3 гл. 6 утверждению (5) из § 3 гл. 6 справедливы неравенства

$$\dim B_i \leqslant \dim C_i \leqslant 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Так как $\psi = pg$, то $gA_i \subseteq B_i = p^{-1}C_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Соотношение $wY \leqslant wZ$ следует из включения $Y \subseteq Z \times S$ и неравенства $wS \leqslant \aleph_0$**). Теорема 9 доказана; она позволяет получить факторизационную теорему для счетномерных пространств:

Теорема 9′ (Пасынков [18]). *Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ счетномерного совершенно нормального*

*) Приводимое ниже доказательство копирует доказательство факторизационной теоремы для метрических пространств из гл. 6.

**) Напомним, что $wZ \geqslant \aleph_0$.

пространства X в метрическое пространство Z. Тогда существует такое счетномерное метрическое пространство Y и такие непрерывные отображения $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$, что $f = hg$ и $wY \leqslant wZ$.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\dim A_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ По предыдущей теореме существуют: такое метрическое пространство Y', такие его подмножества B_i размерности $\dim B_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и такие непрерывные отображения $g: X \to Y'$ и $h: Y' \to Z$, что $f = hg$, $gA_i \subseteq B_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и $wY' \leqslant wZ$.

Очевидно, пространство $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq Y'$ и отображения $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$ — искомые.

Из теоремы 9′ выводится

Теорема 10 (Нагата [5]). *В классе счетномерных метрических пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное пространство $S^{\aleph_0 \tau}$.*

Доказательство теоремы 10 полностью повторяет доказательство теоремы 16 из § 4 гл. 6, поэтому его проведение мы предоставим читателю.

Укажем на следующую специализацию теоремы 10:

Теорема 11 (Нагата [3]). *Произведение $B(\tau) \times S^{\aleph_0 \aleph_0}$ обобщенного бэровского пространства $B(\tau)$ веса τ на универсальное счетномерное со счетной базой пространство $S^{\aleph_0 \aleph_0}$ является универсальным пространством в классе счетномерных сильно метризуемых пространств веса $\leqslant \tau$.*

Доказательство теоремы 11 мы также предоставим читателю, так как оно вполне аналогично доказательству теоремы 18 из § 4 гл. 6.

§ 3. Слабо счетномерные пространства

Естественным сужением класса счетномерных пространств (в классе метрических пространств) является класс слабо счетномерных пространств.

Определение 1. Нормальное пространство X называется *слабо счетномерным*, если оно представимо в виде счетной суммы своих замкнутых подпространств X_i размерности $\dim X_i < \infty$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Если в определении 1 пространство X метризуемо, то каждое подпространство X_i можно представить в виде конечной суммы нульмерных множеств (см. гл. 6, § 3, теорема 9). Поэтому все пространство X представляется в виде счетной суммы нульмерных множеств, т. е. оно счетномерно.

Итак, *слабо счетномерное метрическое пространство счетномерно.*

Однако существуют даже компакты, которые счетномерны, но не слабо счетномерны.

Приведем пример счетномерного, но не слабо счетномерного компакта *). Интервал $\left(\frac{1}{3}=\frac{0}{3}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2}{3^j},\ \frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{0}{3^j}\right)$ назовем интервалом первого ранга. Интервал с концами в точках

$$\frac{p_1}{3}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{0}{3^n}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^j}$$

и

$$\frac{p_1}{3}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{0}{2^j},$$

где числа $p_1, \ldots, p_{n-1}$ (независимо друг от друга) принимают значения 0 или 2, назовем интервалом ранга n, $n=2, 3, 4, \ldots$ Всего интервалов ранга n, очевидно, 2^{n-1}, $n=1, 2, 3, \ldots$

Если из отрезка $[0, 1]$ вычесть сумму всех интервалов всевозможных рангов $n=1, 2, 3, \ldots$, то остаток, очевидно, совпадет с канторовым совершенным множеством C. Любая точка $x\in C$ может быть единственным образом представлена в виде $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j}{3^j}$, где p_j (независимо друг от друга) принимают значения 0 или 2. Точку $x\in C$, не являющуюся концом никакого интервала ранга n, $n=1, 2, 3, \ldots$, назовем двусторонней. Двусторонние точки $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j}{3^j}$, очевидно, характеризуются тем, что среди чисел p_j сколь угодно далеко встречаются и 0 и 2.

Отображение

$$f\colon C\to Q=[0, 1]$$

определим, положив

$$f\left(x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j}{3^j}\right)=y=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j}{2^{j+1}}.$$

Читатель может самостоятельно проверить, что отображение f непрерывно и обладает следующими свойствами:

*) Первый пример такого рода построил Смирнов [5].

$fC = Q$, т. е. f есть отображение «на»; отображение f двукратно; концы k-го (если считать слева) интервала ранга n отображение f переводит в точку $\frac{k}{2^n}$, $k = 1, 3, \ldots, 2^n - 1$; двусторонние точки $x \in C$ являются точками однократности отображения f, т. е. $f^{-1}fx = x$; функция f монотонно возрастает.

Рассмотрим произведение $C^\infty = \prod_{l=1}^{\infty} C_l$ счетной системы канторовых совершенных множеств $C_l = \{x_l\}$. Назовем m-й гранью произведения C^∞ его подмножество

$$C^m = \{x = (x_l) \colon x_l = 0, \ l > m\}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Положим $C^\omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} C^m$. Естественную проекцию произведения C^∞ на сомножитель C_l обозначим через p_l. Искомый компакт Φ строится как пространство следующего разбиения τ произведения C^∞.

Во-первых, элементами разбиения τ считаем отдельные точки множества $C^\infty \setminus C^\omega$.

Во-вторых, каждое множество $C^m \setminus C^{m-1}$, где $C^0 = \Lambda$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, является суммой элементов разбиения τ. А именно, точки $x' = (x'_l)$ и $x'' = (x''_l)$ из $C^m \setminus C^{m-1}$ считаем принадлежащими одному элементу разбиения τ тогда и только тогда, когда

(а) $f(x'_l) = f(x''_l)$, $l = 1, \ldots, m$,

и

(б) (при $m > 1$) $f(x'_l) = f(x''_l) \neq \frac{k}{2^n}$, $k = 1, 3, \ldots, 2^n - 1$, $n = 1, \ldots, m-1$, для $x'_l \neq x''_l$, $l = 1, \ldots, m-1$.

Из двукратности отображения f следует, что каждый элемент разбиения τ, содержащийся в $C^m \setminus C^{m-1}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, состоит из конечного числа точек. Следовательно, конечным (и, значит, замкнутым в C^∞) множеством является вообще каждый элемент разбиения τ.

Как непрерывный образ компакта, пространство Φ бикомпактно. Докажем его хаусдорфовость.

Естественное отображение C^∞ на Φ обозначим, как и соответствующее разбиение, через τ.

Рассмотрим точки y_1 и $y_2 \neq y_1$ из Φ. Пусть сначала

(1) $y_1 \in \tau C^m$, $y_2 \notin \tau C^m$.

Тогда $\tau^{-1} y_1 \subseteq C^m$ и $\tau^{-1} y_2 \cap C^m = \Lambda$. Следовательно, существует такая двусторонняя точка $t \in C$, $t > 0$, что множества

$$O_1 = \{x = (x_l) \mid x_{m+1} < t\} \quad \text{и} \quad O_2 = \{x = (x_l) \mid x_{m+1} > t\}$$

являются непересекающимися окрестностями множеств $\tau^{-1}y_1$ и $\tau^{-1}y_2$ соответственно. Из определения разбиения τ следует, что $\tau^{-1}\tau O_k = O_k$, $k = 1, 2$. Следовательно, множества τO_1 и τO_2 являются непересекающимися окрестностями точек y_1 и y_2.

Пусть

(2) y_1 и $y_2 \in \tau(C^m \setminus C^{m-1})$.

Тогда $\tau^{-1}y_1 \cup \tau^{-1}y_2 \subseteq C^m \setminus C^{m-1}$. Выберем точки $x' = (x'_i) \in \tau^{-1}y_1$ и $x'' = (x''_i) \in \tau^{-1}y_2$. Так как $y_1 \neq y_2$, то или не выполняется условие (а), т. е.

($\bar{\text{а}}$) существует такой номер i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, что

$$f(x'_{i_0}) \neq f(x''_{i_0}),$$

или выполняется условие (а), но не выполняется условие (б), т. е.

($\bar{\text{б}}$) $f(x'_i) = f(x''_i)$, $i = 1, \ldots, m$, но (при $m > 1$) существует такой номер i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m - 1$, что

$$x'_{i_0} \neq x''_{i_0}, \qquad f(x'_{i_0}) = f(x''_{i_0}) = \frac{k}{2^n}$$

для некоторого $n = 1, \ldots, m-1$ и некоторого $k = 1, 3, \ldots, 2^{n-1}$.

Для определенности будем считать $x'_{i_0} < x''_{i_0}$.

Рассмотрим случай ($\bar{\text{а}}$). Из определения отображения f вытекает существование такой двусторонней точки $t \in C$, что $x'_{i_0} < t < x''_{i_0}$. Как и в случае (1), можно показать, что множества $\tau\{x = (x_i) \mid x_{i_0} < t\}$ и $\tau\{x = (x_i) \mid x_{i_0} > t\}$ являются непересекающимися окрестностями точек y_1 и y_2.

Рассмотрим случай ($\bar{\text{б}}$). Множества

$$O_1 = \{x = (x_i) \mid x_{i_0} \leqslant x'_{i_0}\} \setminus C^{i_0}$$

и

$$O_2 = \{x = (x_i) \mid x_{i_0} \geqslant x''_{i_0}\} \setminus C^{i_0}$$

открыты и не пересекаются. Из определения разбиения τ вытекают равенства $\tau^{-1}\tau O_k = O_k$, $k = 1, 2$. Таким образом, τO_1 и τO_2 являются непересекающимися окрестностями точек y_1 и y_2.

Пусть, наконец,

(3) y_1 и $y_2 \in \tau(C^\infty \setminus C^\omega)$, т. е. $x' = (x'_i) = \tau^{-1}y_1$ и $x'' = (x''_i) = \tau^{-1}y_2 \in C^\infty \setminus C^\omega$.

Из определения отображения f и неравенства $x' \neq x''$ следует, что или

(в) существует номер i_0 такой, что $f(x'_{i_0}) \neq f(x''_{i_0})$, или

($\overline{\text{в}}$) $f(x'_l)=f(x''_l)$, $l=1, 2, 3, \ldots$, но существует такой номер l_0, что $x'_{l_0}\neq x''_{l_0}$, $f(x'_{l_0})=f(x''_{l_0})=\frac{k}{2^n}$ для некоторого $n=1, 2, 3, \ldots$ и некоторого $k=1, 3, \ldots, 2^n-1$.

Доказательство существования непересекающнхся окрестностей у точек y_1 н y_2 проводнтся так же, как в пункте (2).

Хаусдорфовость пространства Φ установлена. Следовательно, Φ — бикомпакт, а по следствию 3 из § 8 гл. 1 Φ — компакт.

Конечность элементов разбиения τ означает, что отображенне τ: $C^\infty\to\Phi$ конечнократно. Следовательно, компакт Φ счетномерен. Покажем, что он не слабо счетномерен.

Из определения разбиения τ следует, что множества

$$\tau\left\{x=(x_i)\in C^m \,\middle|\, \frac{k_i}{2^{m-1}}\leqslant x_i\leqslant\frac{k_i+1}{2^{m-1}},\quad i=1, \ldots, m-1,\right.$$
$$\left. 0\leqslant x_m\leqslant 1\right\},$$

где $k_i=0, 1, \ldots, 2^{m-1}-1$, гомеоморфны m-мерным параллелепипедам. При этом любая точка из множества τC^{m-1} будет лежать на грани одного из этих параллелепипедов, $m=1, 2, 3, \ldots$ Из сказанного следует, что любая окрестность любой точкн множества $\Phi^\omega=\tau C^\omega$ пересекается с m-мерными параллелепипедами для сколь угодно больших m. Таким образом, никакое конечномерное подмножество пространства Φ^ω не содержит открытого в Φ^ω подмножества. Так как множество C^ω плотно в C^∞, то множество Φ^ω плотно в Φ. Покажем, что всякое конечномерное замкнутое в Φ множество F нигде не плотно в Φ. Действнтельно, если бы множество F содержало открытое в Φ множество O, то множество $O\cap\Phi^\omega$ было бы непустым, открытым и конечномерным подмножеством пространства Φ^ω, но этого, как мы видели, быть не может. Так как никакой компакт нельзя представить в виде счетной суммы нигде не плотных в нем замкнутых множеств, то компакт Φ не является слабо счетномерным. Итак, компакт Φ обладает искомымн свойствами.

Перейдем к вопросу о существованни универсальных слабо счетномерных пространств.

Теорема 12 (Зарелуа [3]). *Пусть дано непрерывное отображение f: $X\to Z$ бикомпакта X на бикомпакт Z, и пусть в бикомпакте X выделена счетная система замкнутых множеств X_i, $i=1, 2, 3, \ldots$ Тогда существует такой бикомпакт Y и такие непрерывные отображения g: $X\to Y$ и h: $Y\to Z$, что*

(1) $f=hg$;

(2) $\dim gX_i \leqslant \dim X_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$;
(3) $wY \leqslant wZ$ *).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9. Положим $Y_0 = Z$ и $g_0 = f$. Предположим, что уже построены бикомпакты Y_j и непрерывные отображения g_j: $X \to Y_j$ для $0 \leqslant j \leqslant n-1$, а также непрерывные отображения π^j_{j-1}: $Y_j \to Y_{j-1}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-1$, удовлетворяющие соотношениям

$$g_{j-1} = \pi^j_{j-1} g_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Построим бикомпакт Y_n и отображения g_n: $X \to Y_n$ и π^n_{n-1}: $Y_n \to Y_{n-1}$. Число n единственным образом представляется в виде $n = \frac{k(k+1)}{2} + i$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ и $0 < i \leqslant k+1$. По теореме 3 из § 3 гл. 5 для отображения $g'_{n-1} = g_{n-1}$: $X_i \to Y_{n-1}$ существует такой бикомпакт Y^n_i и такие непрерывные отображения φ'_n: $X_i \xrightarrow{\text{на}} Y^n_i$ и ψ_n: $Y^n_i \to Y_{n-1}$, что $g'_{n-1} = \psi_n \cdot \varphi'_n$, $\dim Y^n_i \leqslant \leqslant \dim X_i$ и $wY^n_i \leqslant wY_{n-1}$. Бикомпакт Y^n_i можно считать подпространством тихоновского Q^τ, где $\tau = wY_{n-1}$. Тогда отображение φ'_n: $X_i \to Q^\tau$ можно (см. гл. 1, § 8, предложение 8) продолжить в непрерывное отображение φ_n: $X \to Q^\tau$. Диагональное произведение отображений g_{n-1} и φ_n обозначим через g_n. Если естественные проекции произведения $Y_{n-1} \times Q^\tau$ на сомножители Y_{n-1} и Q^τ обозначить соответственно через π^n_{n-1} и p_n и положить $Y_n = Y_{n-1} \times Q^\tau$, то, очевидно, $wY_n \leqslant \tau = wY_{n-1}$ и $g_{n-1} = \pi^n_{n-1} g_n$. Кроме того, нетрудно заметить, что множество $g_n X_i$ посредством проекции p_n отображается на множество $Y^n_i \subseteq Q^\tau$ гомеоморфно. Поэтому $\dim g_n X_i \leqslant \dim X_i$.

Построив указанным образом для каждого номера n бикомпакт Y_n и непрерывные отображения g_n: $X \to Y_n$ и π^n_{n-1}: $Y_n \to Y_{n-1}$, получим счетный обратный спектр

$$S = \{Y_n, \pi^{n+1}_n\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а также непрерывное отображение

$$g: X \to Y$$

бикомпакта X в предел Y спектра S, удовлетворяющее соотношениям

$$g_n = \pi_n g, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где π_n — проекция предела спектра S в элемент Y_n этого спектра (см. Прибавление к гл. 1, § 1). В частности, $f = g_0 = \pi_0 g$. Положив $h = \pi_0$, получим соотношение $f = hg$.

*) Зарелуа [3] доказал и более общее утверждение.

Пространство Y является бикомпактом (см. Прибавление к гл 1, § 1), и $wY \leqslant w\prod_{n=0}^{\infty} Y_n$. Но по построению

$$wY_n \leqslant wY_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant wY_0 = wZ,$$

откуда $wY \leqslant wZ$.

Покажем, что $gX_i \leqslant \dim X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Действительно, множество gX_i является пределом спектра

$$S_i = \{\pi_n gX_i = g_n X_i, \pi_n^{n+1}\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(см. Прибавление к гл. 1, § 1).

Рассмотрим только номера $n_k = \frac{k(k+1)}{2} + i$, $k = i-1, i, i+1, \ldots$ Спектр

$$S'_i = \left\{\pi_{n_k} gX_i = g_{n_k} X_i, \pi_{n_k}^{n_{k+1}}\right\}, \qquad k = i-1, i, i+1, \ldots,$$

является конфинальной частью спектра S_i, поэтому бикомпакт gX_i является пределом спектра S'_i (см. Прибавление к гл. 1, § 1). Так как по построению $\dim g_{n_k} X_i \leqslant \dim X_i$, то из леммы 1 § 3 гл. 5 следует, что и $\dim gX_i \leqslant \dim X_i$. Теорема 12 доказана.

Т е о р е м а 13 (П а с ы н к о в [18]). *В классе слабо счетномерных нормальных пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное пространство Π_τ^ω, являющееся счетной суммой бикомпактов Π^n размерности $\dim \Pi^n \leqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 6 из § 4 гл. 5.

Класс нормальных слабо счетномерных пространств веса $\leqslant \tau$ разбивается на подклассы $\alpha \in A$ попарно гомеоморфных между собой пространств. Выберем из каждого класса α пространство X_α и рассмотрим пространство $Y = \bigcup_\alpha X_\alpha$, являющееся дискретной суммой пространств X_α (т. е. пространства X_α попарно не пересекаются и открыто-замкнуты в Y). Пространство Y, очевидно, нормально. Каждое пространство X_α представляется в виде суммы своих замкнутых подпространств X_α^n размерности $\dim X_\alpha^n \leqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда пространство Y представляется в виде счетной суммы своих замкнутых подпространств $Y^n = \bigcup_\alpha Y_\alpha^n$ размерности $\dim Y^n \leqslant n$. Замыкания $B^n = [Y^n]$ множеств Y^n в максимальном бикомпактном расширении βY пространства Y имеют размерность $\dim B^n \leqslant n$ (см. гл. 5, § 1 и гл. 1, § 9, предложение 1).

Для каждого α фиксируем какой-нибудь гомеоморфизм f_α: $X_\alpha \to Q^\tau$ пространства X_α в тихоновский куб Q^τ. Через f обозначим непрерывное отображение пространства Y в Q^τ, совпадающее на каждом пространстве X_α с f_α.

Продолжение отображения f на бикомпакт βY обозначим через F. Из построения отображения F следует, что оно является топологическим на каждом множестве $X_\alpha \subseteq \beta Y$. По теореме 10 существует такой бикомпакт Z и такие непрерывные отображения g: $\beta Y \to Z$ и h: $Z \to Q^\tau$, что $F = hg$, $wZ \leqslant wQ^\tau = \tau$ и $\dim gB^n \leqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Положим $gB^n = \Pi^n$ и $\Pi^\omega_\tau = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Pi^n$.

Пространство Π^ω_τ является искомым, так как из топологичности отображения F на множествах X_α следует топологичность отображения g на этих множествах и

$$gX_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} gX^n_\alpha \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} gB^n = \Pi^\omega_\tau.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *В классе слабо счетномерных пространств со счетной базой существует универсальное пространство* $\Pi^\omega_{\aleph_0}$, *являющееся счетной суммой n-мерных компактов* Π^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Нагата [3] и Смирнов [5] доказали следующий более сильный результат:

Теорема 14. *Любое слабо счетномерное пространство со счетной базой вкладывается в* Q^ω.

Лемма 1. *Пусть в компакте* Φ *дана система замкнутых подмножеств* F_n, $F_n \subseteq F_{n+1}$, *размерности* $\dim F_n = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда существует такое непрерывное отображение* λ: $\Phi \to Q^\infty$ *компакта* Φ *в гильбертов кирпич* Q^∞, *что на множестве* $F^\omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ *отображение* λ *является гомеоморфизмом и*

$$\lambda F^\omega \subseteq Q^\omega, \quad \lambda(\Phi \setminus F^\omega) \subseteq Q^\infty \setminus Q^\omega.$$

Доказательство. Через F_{-1} обозначим какую-нибудь точку из F_0. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим разбиение τ_n компакта Φ, элементами которого являются отдельные точки множества $\Phi \setminus F_{n-1}$ и компакт F_{n-1}. Компакт, являющийся пространством разбиения τ_n, обозначим через Φ_n; естественное отображение Φ на Φ_n—через f_n; компакт f_nF_n—через Ψ_n; точку f_nF_{n-1} — через a_{n-1}. Так как множество $F_n \setminus F_{n-1}$ гомеоморфно отображается на множество $\Psi_n \setminus a_{n-1}$, то $\dim(\Psi_n \setminus a_{n-1}) \leqslant n$, следовательно (см. гл. 4, § 6, следствие 1),

$\dim \Psi_n \leqslant n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ По теореме Нёбелинга — Понтрягина для каждого n компакт Ψ_n обладает гомеоморфным отображением в открытый куб Q^{2n+1}, которое можно продолжить в непрерывное отображение g_n всего компакта Φ_n в Q^{2n+1}. Определим на Φ_n непрерывную функцию g'_n: $\Phi_n \to \overline{Q}^1 = [0, 1]$, равную 0 в точках Ψ и только в них и принимающую значения <1. Диагональное произведение h_n: $\Phi_n \to \overline{Q}^{2n+2} = \overline{Q}^{2n+1} \times \overline{Q}^1$ отображений g_n и g'_n переводит множество Ψ_n гомеоморфно в сферу $S^{2n+1} = \overline{Q}^{2n+2} \setminus Q^{2n+2}$, а множество $\Phi_n \setminus \Psi_n$ в множество $\overline{Q}^{2n+2} \setminus S^{2n+1}$. Таким образом,

$$h_n f_n (\Phi \setminus F^{\omega}) \subseteq h_n f_n (\Phi \setminus F_n) \subseteq \overline{Q}^{2n+2} \setminus S^{2n+1}.$$

Можно считать, что $h_n a_{n-1} = (0, \ldots, 0)$. В противном случае топологическим отображением куба Q^{2n+2} на себя точку $h_n a_{n-1}$ можно перевести в точку $(0, \ldots, 0)$.

Отрезки $\overline{Q}$, дающие в произведении куб $\overline{Q}^{2n+2}$, занумеруем числами $j = n(n+1)+1, n(n+1)+2, \ldots, (n+1)(n+2)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Проекцию куба $\overline{Q}^{2n+2}$ на сомножитель $\overline{Q}_j$ обозначим через p_j. Очевидно, функция $\lambda_j = p_j h_n f_n$, $j = n(n+1)+1, \ldots$ $\ldots, (n+1)(n+2)$, равна 0 на множестве $F_{n-1} \supseteq F_{n-2} \supseteq \ldots \supseteq F_{-1}$. Пусть λ: $\Phi \to Q^{\infty} = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \overline{Q}_j$ есть диагональное произведение отображений λ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Отображение λ является искомым.

Действительно, если $x \in F_n$, то для любого $j > (n+1)(n+2)$ существует такое $n' > n$, что $n'(n'+1)+1 \leqslant j \leqslant (n'+1)(n'+2)$, и тогда, как отмечалось выше,

$$\lambda_j(x) = p_j h_{n'} f_{n'} x = p_j h_{n'} f_{n'} F_n = p_j h_{n'} a_{n'-1} = 0.$$

Таким образом, $\lambda F^{\omega} \subseteq Q^{\omega}$. Если $x \in \Phi \setminus F^{\omega}$, то для любого $j = 1, 2, 3, \ldots$ и надлежащим образом выбранного n имеем

$$\lambda_j x = p_j h_n f_n x \in p_j h_n f_n (\Phi \setminus F^{\omega}) \subseteq p_j (\overline{Q}^{2n+2} \setminus S^{2n+1}) \subseteq (0, 1) \not\ni 0.$$

Таким образом, $\lambda_j x \neq 0$ для всех j, следовательно, $\lambda(\Phi \setminus F^{\omega}) \subseteq \subseteq Q^{\infty} \setminus Q^{\omega}$. В силу доказанного включения и в силу замкнутости отображения λ: $\Phi \to Q^{\infty}$ замкнутым будет и отображение λ: $F^{\omega} \to Q^{\omega}$. Для доказательства того, что отображение λ: $F^{\omega} \to Q^{\omega}$ является топологическим, осталось доказать лишь взаимную однозначность этого отображения. Пусть $x' \in F_{n'} \setminus F_{n'-1}$, $x'' \in F_{n''} \setminus F_{n''-1}$ и $x' \neq x''$, где $F_{n'-1} = \Lambda$, соответственно $F_{n''-1} = \Lambda$, если $n' = -1$, соответственно $n'' = -1$.

Пусть сначала $n' \neq n''$. Можно считать $n' < n''$. Тогда $x' \in F_{n'}$ и $x'' \in \Phi \setminus F_{n'}$. По построению

$$h_{n'}f_{n'}x' \in h_{n'}f_{n'}F_{n'} \subseteq S^{2n'+1}$$

и

$$h_{n'}f_{n'}x'' \in h_{n'}f_{n'}(\Phi \setminus F_{n'}) \subseteq \bar{Q}^{2n'+2} \setminus S^{2n'+1}.$$

Следовательно, $\lambda_j x' \neq \lambda_j x''$ хотя бы для одного $j = n'(n'+1)+1, \ldots$ $\ldots, (n'+1)(n'+2)$, откуда $\lambda x' \neq \lambda x''$.

Пусть теперь $n' = n'' = n$. Тогда $n \neq -1$. По построению $f_n x' \neq f_n x''$ и $f_n x' \in \Psi_n$, $f_n x'' \in \Psi_n$. В силу топологичности отображения h_n на Ψ_n имеет место неравенство $h_n f_n x' \neq h_n f_n x''$. Следовательно, $\lambda_j x' \neq \lambda_j x''$ хотя бы для одного $j = n(n+1)+1, \ldots$ $\ldots, (n+1)(n+2)$, откуда $\lambda x' \neq \lambda x''$.

Взаимная однозначность, а следовательно и топологичность отображения λ: $F^{\omega} \to Q^{\omega}$, значит, и лемма 1 доказаны.

Если теперь считать $\Pi^{\omega}_{\aleph_0} \subseteq Q^{\infty}$, то, по лемме 1, существует непрерывное отображение λ: $Q^{\infty} \to Q^{\infty}$, являющееся гомеоморфизмом на множестве $\Pi^{\omega}_{\aleph_0}$ и для которого $\lambda \Pi^{\omega}_{\aleph_0} \subseteq Q^{\omega}$. Так как пространство $\Pi^{\omega}_{\aleph_0}$ содержит топологический образ любого слабо счетномерного пространства со счетной базой, то тем же свойством обладает и пространство Q^{ω}. Теорема 14 доказана.

Установим существование универсального слабо счетномерного метрического пространства произвольного веса τ. Схема доказательства этого утверждения вполне аналогична схеме доказательства существования универсального n-мерного метрического пространства веса τ. Сначала докажем соответствующую факторизационную теорему.

Теорема 15 (Пасынков [16]). *Пусть дано непрерывное отображение f: $X \to Z$ нормального пространства X на метрическое пространство Z, и пусть в пространстве X выделена счетная система замкнутых подпространств X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда существуют: такое метрическое пространство Y, такие его замкнутые подпространства Y_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Z$, что*

(1) $f = hg$;

(2) $gX_i \subseteq Y_i$, $\dim Y_i \leqslant \dim X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$;

(3) $wY \leqslant wZ$ *).

Доказательство. Пусть сначала $wZ = \aleph_0$. Тогда пространство Z можно считать всюду плотным подмножеством

*) Считаем $wZ \geqslant \aleph_0$.

компакта cZ. Отображение f можно продолжить в непрерывное отображение $\tilde{f}$: $\beta X \to cZ$, где βX, как всегда, обозначает максимальное бикомпактное расширение пространства X. Так как $\dim [X_i]_{\beta X} = \dim \beta X_i = \dim X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ (см. гл. 5, § 1), то, по теореме 12, существуют такой компакт Φ и такие непрерывные отображения g: $\beta X \to \Phi$ и h: $\Phi \to cZ$, что $f = hg$ и $\dim g[X_i]_{\beta X} \leqslant \dim X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Ясно, что пространство $Y = gX$, отображения g: $X \to Y$, h: $Y \to Z$ и множества $Y_i = Y \cap g[X_i]_{\beta X}$ будут искомыми. Итак, в случае $wZ = \aleph_0$ теорема 15 доказана.

Пусть теперь $wZ = \tau \geqslant \aleph_0$ *).

По теореме 7 из гл. 6 существует вполне нульмерное отображение φ: $Z \to T$ пространства Z на пространство со счетной базой T. По доказанному выше можно найти такое пространство со счетной базой S, такие его замкнутые подпространства S_i размерности $\dim S_i \leqslant \dim X_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и такие непрерывные отображения ψ: $X \to S$ и χ: $S \to T$, что $\varphi f = \chi \psi$ и $\psi X_i \subseteq S_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

По замечанию к лемме 3 из § 2 Прибавления к гл. 1 определено непрерывное отображение g: $X \to Y$ пространства X в веерное произведение Y пространств Z и S относительно отображений φ и χ по формуле $gx = (fx, \psi x)$. При этом $f = hg$ и $\psi = pg$, где h и p — проекции веерного произведения на сомножители Z и S соответственно. По лемме 4 из § 3 гл. 6 в Y можно ввести такую метрику, что проекция p будет вполне нульмерным отображением. Положим $Y_i = p^{-1} S_i$. Тогда (см. теорему 9 из § 3 гл. 6)

$$\dim Y_i \leqslant \dim S_i \leqslant \dim X_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Так как $\psi = pg$, то $gX_i \subseteq Y_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Кроме того, $wY \leqslant \max(wZ, wS) = wZ$. Теорема 15 доказана. Из доказанной теоремы очевидным образом вытекает

Следствие 2 (Пасынков [16]). *Пусть дано непрерывное отображение f: $X \to Z$ слабо счетномерного нормального пространства X на метрическое пространство Z. Тогда существует такое слабо счетномерное метрическое пространство Y и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Z$, что $f = hg$ и $wY \leqslant wZ$.*

Доказательства следующих теорем вполне аналогичны доказательствам теорем 16 и 18 из § 4 гл. 6, поэтому проведение этих доказательств предоставляется читателю.

*) Проводимое ниже доказательство является почти дословным повторением последней части доказательства теоремы 9.

Теорема 16 (Архангельский [3])*). *В классе слабо счетномерных метрических пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное пространство.*

Теорема 17 (Нагата [3]). *В классе сильно метризуемых слабо счетномерных пространств веса $\leqslant \tau$ универсальным будет произведение $B(\tau) \times Q^{\omega}$.*

§ 4. Определение слабо и сильно бесконечномерных пространств, их характеристика при помощи отображений в гильбертов кирпич

К изучению бесконечномерных пространств можно подойти с других точек зрения, чем в предыдущих параграфах, а именно исходя из определения размерности $\dim X$ при помощи перегородок.

Определение 1 (Александров). Пространство X называется *слабо бесконечномерным*, если для любой счетной (бесконечной!) системы пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \quad A_i \cap B_i = \Lambda, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

найдутся перегородки C_i (между A_i и B_i) такие, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \Lambda$. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, называется *сильно бесконечномерным*. Другими словами, пространство X является сильно бесконечномерным, если в нем можно найти такую счетную систему дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

что для любых перегородок C_i (между A_i и B_i) всегда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \neq \Lambda$.

В дальнейшем, пространства слабо (соответственно сильно) бесконечномерные в этом смысле будем называть *A-слабо* (соответственно *A-сильно*) *бесконечномерными*.

Смирнов предложил следующее видоизменение определения 1:

Определение 2. Пространство X называем *S-слабо бесконечномерным*, если для любой счетной (бесконечной) системы дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

*) См. также Пасынков [16], подстрочное примечание на стр. 268.

найдутся такие перегородки C_i (между A_i и B_i) и такой номер N, что $\bigcap\limits_{i=1}^{N} C_i = \Lambda$. Другими словами, для любой счетной системы дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

можно найти нецентрированную систему перегородок C_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Пространство, не являющееся S-слабо бесконечномерным, называем *S-сильно бесконечномерным.* S-сильная бесконечномерность пространства X означает, что в X можно найти такую счетную систему дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, что для любой системы перегородок C_i и любого номера N всегда $\bigcap\limits_{i=1}^{N} C_i \neq \Lambda$. Так как любая счетная центрированная система замкнутых подмножеств бикомпакта имеет непустое пересечение, то класс A-слабо (соответственно A-сильно) бесконечномерных бикомпактов совпадает с классом S-слабо (соответственно S-сильно) бесконечномерных бикомпактов. Поэтому в случае бикомпактов будем говорить просто о слабой и сильной бесконечномерности, опуская аттрибуты A- и S-.

Перейдем к характеристике S- и A-сильно бесконечномерных пространств при помощи отображений в гильбертов кирпич.

Проекцию гильбертова кирпича Q^∞ на n-мерную «грань» $Q^n = \{(y_i)\colon\ y_i = 0 \text{ при } i > n\}$ обозначим через π_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Непрерывное отображение $f\colon X \to Q^\infty$ называется *существенным* (см. Левшенко [1]), если существенно каждое отображение

$$\pi_n f\colon X \to Q^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Через Q^∞_{jk} будем обозначать подмножество $\{(y_i) \mid y_j = k\}$, $k = 0, 1$, гильбертова кирпича Q^∞.

Теорема 18 (Левшенко [1]). *Нормальное пространство X является S-сильно бесконечномерным тогда и только тогда, когда оно обладает существенным отображением в гильбертов кирпич.*

Доказательство. а) Пусть X есть S-сильно бесконечномерное пространство. Выберем в X такую счетную систему дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

что любая система перегородок C_i (между A_i и B_i) центрирована. Для каждого i рассмотрим непрерывную на X функцию f_i, принимающую значения между 0 и 1 и равную 0 на A_i

и 1 на B_i. Функции f_i определяют отображение $f\colon X \to Q^\infty$ по правилу $fx = (f_i x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in X$. Так как $\pi_n f x = (f_i x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то, по лемме 3 из § 8 гл. 5, отображение $\pi_n f\colon X \to Q^n$ существенно для любого n. Существенность отображения f доказана.

б) Пусть пространство X обладает существенным отображением f в гильбертов кирпич Q^∞. Множества $A_j = f^{-1}Q_{j0}^\infty$ и $B_j = f^{-1}Q_{j1}^\infty$ замкнуты и не пересекаются, $j = 1, 2, 3, \ldots$

Рассмотрим номера $j \leqslant n$. Множества

$$Q_{j0}^{n-1} = \{(y_i) \in Q^\infty \mid y_i = 0 \quad \text{при} \quad i = j \quad \text{и} \quad i > n\}$$

и

$$Q_{j1}^{n-1} = \{(y_i) \in Q^\infty \mid y_j = 1 \quad \text{и} \quad y_i = 0 \quad \text{при} \quad i > n\}$$

являются противоположными $(n-1)$-мерными гранями куба Q^n, $j = 1, \ldots, n$. Очевидно, $Q_{jk}^\infty = \pi_n^{-1} Q_{jk}^n$, $k = 0, 1$, откуда $A_j = f^{-1}\pi_n^{-1}Q_{j0}^n$ и $B_j = f^{-1}\pi_n^{-1}Q_{j1}^n$. Так как отображение $\pi_n f$ существенно, то, по лемме 2 из § 8 гл. 5, любая система перегородок C_j между A_j и B_j, $j = 1, \ldots, n$, имеет непустое пересечение. Таким образом, любая система перегородок C_j между A_j и B_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, центрирована, т. е. пространство X является S-сильно бесконечномерным. Теорема доказана.

Охарактеризуем теперь при помощи отображений в гильбертов кирпич A-сильно бесконечномерные пространства.

Непрерывное отображение $g\colon X \to Q^\infty$ назовем *допустимым* изменением непрерывного отображения $f\colon X \to Q^\infty$, если

$$g^{-1}Q_{j0}^\infty \supseteq f^{-1}Q_{j0}^\infty \quad \text{и} \quad g^{-1}Q_{j1}^\infty \supseteq f^{-1}Q_{j1}^\infty$$

для любого $j = 1, 2, 3, \ldots$

Точки разности $G^\infty = Q^\infty \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (Q_{j0}^\infty \cup Q_{j1}^\infty)$, т. е. точки, у которых все координаты отличны от 0 и 1, назовем некраевыми точками *). Очевидно, множество G^∞ имеет тип G_δ и всюду плотно в Q^∞.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Q^\infty$ назовем *A-существенным*, если для любого допустимого изменения g отображения f множество gX содержит все некраевые точки гильбертова кирпича, т. е. $gX \supseteq G^\infty$.

Легко показать, что A-существенное отображение является существенным.

---

*) Это определение вводим как временное, рабочее определение: оно не обладает свойством топологической инвариантности.

Действительно, пусть отображение $f\colon X \to Q^\infty$ несущественно. Тогда для некоторого n несущественно отображение $\pi_n f\colon X \to Q^n$, т. е. определено непрерывное отображение $g_n\colon X \to S^{n-1}$, совпадающее с $\pi_n f$ на прообразе $(\pi_n f)^{-1} S^{n-1}$ границы S^{n-1} куба Q^n. Через π_i^n обозначим проекцию куба Q^n на сомножитель Q_i. Тогда отображение $g\colon X \to Q^\infty = Q^n \times \prod\limits_{i>n} Q_i$, ставящее в соответствие точке $x \in X$ точку $y \in Q^\infty$ с координатами $\pi_i^n g_n x$, $i = 1, \ldots, n$, и $p_i f x$, $i > n$ (где p_i обозначает проекцию Q^∞ на i-й сомножитель Q_i), есть допустимое изменение отображения f и $gX \cap G^\infty = \Lambda$. Следовательно, отображение f не является A-существенным, ч. и т. д.

Ниже под *счетно нормальным* пространством будет пониматься T_1-пространство X, в котором для любой конечной или счетной системы замкнутых множеств F_i, имеющих пустое пересечение: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \Lambda$, найдется система открытых множеств $O_i \supseteq F_i$, также имеющих пустое пересечение: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} O_i = \Lambda$ *).

Очевидно, всякое счетно нормальное пространство нормально.

Лемма 1. *Любой паракомпакт счетно нормален.*

Рассмотрим в паракомпакте X счетную систему замкнутых множеств C_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, с пустым пересечением. Тогда система $\omega = \{O_i = X \setminus C_i\}$ является открытым покрытием пространства X. Впишем в ω замкнутое локально конечное покрытие λ. После укрупнения покрытия λ относительно покрытия ω (см. гл. 1, § 6) получим локально конечное, замкнутое, комбинаторно вписанное в ω покрытие $\mu = \{\Phi_i\}$. Тогда система открытых множеств $V_i = X \setminus \Phi_i$ имеет пустое пересечение и $C_i \subseteq V_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, ч. и т. д.

Теорема 19. а) *A-сильно бесконечномерное пространство обладает A-существенным отображением в гильбертов кирпич;*

б) *счетно нормальное пространство, обладающее A-существенным отображением в гильбертов кирпич, A-сильно бесконечномерно.*

Доказательство. а) Предположим, что пространство X является A-сильно бесконечномерным. Выберем в X такую счетную систему дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

что для любой системы перегородок C_i между A_i и B_i пере-

*) Класс счетно нормальных пространств совпадает с классом нормальных счетно паракомпактных пространств. См. Даукер [4].

сечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ непусто. Для каждого i рассмотрим непрерывную на X функцию f_i, принимающую значения между 0 и 1 и равную 0 на A_i и 1 на B_i. Покажем, что диагональное произведение $f\colon X \to Q^\infty = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [0, 1]$ отображений f_i является A-существенным. Предположим, что существует такое допустимое изменение g отображения f и такая некраевая точка $y^0 = (y_i^0) \in Q^\infty$, что $gX \not\ni y^0$. Пусть $Q_i^\infty = \{(y_i) \in Q^\infty \mid y_i = y_i^0\}$ и $C_i = g^{-1}Q_i^\infty$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Пересечение множеств Q_i^∞ состоит из одной точки y^0, следовательно, пересечение множеств C_i пусто. Множества C_i являются перегородками между множествами $g^{-1}Q_{i0}^\infty$ и $g^{-1}Q_{i1}^\infty$. Но так как отображение g является допустимым изменением отображения f, то множества C_i являются перегородками и между множествами A_i и B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Полученное противоречие доказывает, что отображение f является A-существенным.

Доказательству пункта б) предпошлем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть в нормальном пространстве X дана система дизъюнктных пар замкнутых множеств*

$$(A_i, B_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Если система перегородок C_i между множествами A_i и B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, такова, что, соответственно,

(1) $\bigcap\limits_{i \leqslant N} C_i = \Lambda$ *для некоторого номера N;*

(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \Lambda$ *и пространство X счетно нормально,*

то можно всегда предполагать, что перегородки C_i, $i = 1, 2, \ldots$, имеют тип G_δ в X.

Доказательство. (1) В силу нормальности X существуют такие окрестности $OC_i \subseteq X \setminus (A_i \cup B_i)$ множеств C_i, $i = 1, \ldots, N$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{N} OC_i = \Lambda$ (см. гл. 1, § 10). Для $i > N$ считаем $OC_i = X \setminus (A_i \cup B_i)$.

(2) В силу счетной нормальности X существуют такие окрестности $OC_i \subseteq X \setminus (A_i \cup B_i)$ множеств C_i, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} OC_i = \Lambda$.

Если рассмотреть теперь для каждого i непрерывную функцию f_i, равную 0 на C_i и 1 на $X \setminus OC_i$, то множества $D_i = f_i^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ являются перегородками между A_i и B_i и имеют тип G_δ в X, причем $\bigcap\limits_{i\leqslant N} D_i \subseteq \bigcap\limits_{i\leqslant N} OC_i = \Lambda$ в случае (1) и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} OC_i = \Lambda$ в случае (2). Заменив перегородки C_i на перегородки D_i, получим нужное утверждение.

Приступим к доказательству пункта б) теоремы 19.

б) Пусть пространство X обладает A-существенным отображением f в гильбертов кирпич. Множества $A_i = f^{-1}Q_{i0}^{\infty}$ и $B_i = f^{-1}Q_{i1}$ замкнуты и не пересекаются, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Предположим, что в X можно найти перегородки C_i между A_i и B_i, пересечение которых пусто. В силу предыдущей леммы можно считать, что перегородки C_i имеют тип G_δ в X. Поэтому, в силу нормальности X, на X существуют непрерывные функции g_i, принимающие значения между 0 и 1, равные 0 на A_i, 1 на B_i и равные $^1/_2$ в точках C_i и только в них. Функции g_i определяют непрерывное отображение $g\colon X \to Q^{\infty}$ по правилу $gx = (g_i x)$. Очевидно, отображение g является допустимым изменением f, но gX не содержит некраевую точку, все координаты которой равны $^1/_2$, так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \Lambda$. Полученное противоречие доказывает A-сильную бесконечномерность пространства X. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для бикомпакта X существенное отображение $f\colon X \to Q^{\infty}$ является A-существенным отображением на Q^{∞}.*

(Таким образом, для бикомпактов понятия существенного и A-существенного отображения на Q^{∞} совпадают между собой.)

Доказательство. Как в пункте б) доказательства теоремы 18, можно показать, что любая система перегородок C_i между множествами $A_i = f^{-1}Q_{i0}^{\infty}$ и $B_i = f^{-1}Q_{i1}^{\infty}$ центрирована. Следовательно (в силу бикомпактности X), $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \neq \Lambda$. Но тогда, как в пункте а) доказательства теоремы 19, можно показать, что отображение f является A-существенным. Так как множество некраевых точек всюду плотно в Q^{∞} и содержится в fX, а X — бикомпакт, то $fX = Q^{\infty}$. Следствие доказано.

Скляренко [4] показал, что следствие 1 можно усилить следующим образом:

Теорема 20. *Если отображение f бикомпакта X в гильбертов кирпич Q^{∞} существенно, то для любой грани Q^n гильбертова кирпича отображение $f\colon f^{-1}Q^n \to Q^n$ также существенно.*

Доказательство. Отображение X в отрезок Q_i, являющееся суперпозицией отображения f и проектирования $p_i\colon Q^{\infty} \to Q_i$, обозначим через f_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Предположим, что для некоторого n на множестве $F=f^{-1}Q^n$ отображение $f\colon F\to Q^n=\prod_{i\leq n} Q_i$ несущественно. Тогда существует отображение $\varphi\colon F\to Q^n$, совпадающее с f на прообразе Φ границы S куба Q^n и переводящее F в S. Отображение φ задается набором n функций $\varphi_i\colon F\to Q_i$ по правилу $\varphi x=(\varphi_i x)$, $i=1, \ldots, n$. Очевидно, на множестве Φ функции φ_i совпадают с функциями f_i. Поэтому функция φ_i равна 0 на $\Phi\cap f^{-1}Q^\infty_{i0}$ и равна 1 на $\Phi\cap f^{-1}Q^\infty_{i1}$, $i=1, \ldots, n$. Следовательно, каждую функцию φ_i можно продолжить с F на X в функцию g_i, принимающую значения между 0 и 1 и равную 0 на $f^{-1}Q^\infty_{i0}$ и 1 на $f^{-1}Q^\infty_{i1}$, $i=1, \ldots, n$. Положим $g_i=f_i$ при $i>n$. Диагональное произведение $g\colon X\to Q^\infty$ отображений g_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, является, очевидно, допустимым изменением f. Следовательно, множество gX содержит все некраевые, а значит (в силу бикомпактности X), и все вообще точки гильбертова кирпича Q^∞. Но в то же время множество gX не содержит внутренних точек куба Q^n (т. е. точек множества $Q^n\setminus S$). Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 5. Теоремы монотонности, сложения и суммы для слабо бесконечномерных пространств

Прежде всего сделаем следующее очевидное замечание:

Замкнутое подпространство S-слабо бесконечномерного, соответственно A-слабо бесконечномерного, пространства является S-слабо бесконечномерным, соответственно A-слабо бесконечномерным.

Следующая теорема получена Левшенко [1]:

Теорема 21 (теорема сложения для A-слабо бесконечномерных пространств). *Наследственно нормальное пространство X, являющееся суммой счетной (или конечной) системы A-слабо бесконечномерных множеств X_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, является A-слабо бесконечномерным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную счетную систему ω дизъюнктных пар замкнутых множеств пространства X.

Систему ω представим в виде дизъюнктной суммы бесконечных подсистем ω_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_{in}, B_{in}), $i=1, 2, 3, \ldots$ Для каждого n и каждого i рассмотрим такие окрестности U_{in} и V_{in} множеств A_{in} и B_{in}, замыкания $A'_{in}=[U_{in}]$ и $B'_{in}=[V_{in}]$ которых не пересекаются. Для системы пар $(A'_{in}\cap X_n, B'_{in}\cap X_n)$ в X_n, по условию, можно найти систему перегородок D_{in}, $i=1, 2, 3, \ldots$, с пустым пересечением. Дополнение в X_n к каждой перегородке D_{in} распадается в дизъюнктную сумму открытых в X_n

множеств $H'_{in} \supseteq A'_{in} \cap X_n$ и $G'_{in} \supseteq B'_{in} \cap X_n$. В силу наследственной нормальности X (см. гл. 6, § 2, лемма 1) существуют такие открытые в X множества H_{in} и G_{in}, что

$$H_{in} \cap X_n = H'_{in}, \quad G_{in} \cap X_n = G'_{in},$$
$$H_{in} \cap G_{in} = \Lambda, \quad H_{in} \cap V_{in} \subseteq H_{in} \cap B'_{in} = \Lambda,$$
$$G_{in} \cap U_{in} \subseteq G_{in} \cap A'_{in} = \Lambda.$$

Множества $C_{in} = X \setminus (U_{in} \cup H_{in} \cup G_{in} \cup V_{in})$ являются перегородками между множествами A_{in} и B_{in}, и пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{in}$ пусто, так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{in} \subseteq X \setminus X_n$ для каждого n. Теорема доказана.

Следствие 1. *Наследственно нормальное, в частности метризуемое, счетномерное пространство является A-слабо бесконечномерным.*

Так как тождественное отображение гильбертова кирпича является существенным (см. гл. 3, § 5, предложение 2), то гильбертов кирпич является сильно бесконечномерным *) пространством. Поэтому имеем предположенное еще П. С. Урысоном и установленное Гуревичем и Волмэном в [1]

Следствие 2. *Гильбертов кирпич не является счетномерным.*

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется

Лемма 1. *Пусть в пространстве X дана система дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть, соответственно,*

(1) *замкнутое в X множество F является S-слабо бесконечномерным;*

(2) *замкнутое в X множество F является A-слабо бесконечномерным и счетно нормальным.*

Тогда существуют такие перегородки C_i между A_i и B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, что, соответственно,

(1) $F \cap \bigcap\limits_{i \leqslant N} C_i = \Lambda$ *для некоторого* N;

(2) $F \cap \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \Lambda$.

Доказательство. Для системы пар замкнутых в F множеств $A_i \cap F$, $B_i \cap F$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, в F существуют такие перегородки D_i, что, соответственно,

*) Напомним, что для бикомпактов S-сильная бесконечномерность эквивалентна A-сильной бесконечномерности.

(1) $\bigcap\limits_{i\leqslant N} D_i = \Lambda$ для некоторого N;

(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i = \Lambda$.

По лемме 2 из § 4 множества D_i можно считать имеющими тип G_δ в F. Поэтому на F существуют такие непрерывные функции g_i, что g_i равна $\frac{1}{2}$ в точках множества D_i и только в них, g_i равна 0 на $A_i \cap F$ и 1 на $B_i \cap F$. Каждую функцию g_i продолжим на X в непрерывную функцию f_i так, чтобы f_i равнялась 0 на A_i и 1 на B_i. Множества $f_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = C_i$ будут перегородками между множествами A_i и B_i, и, соответственно,

(1) $F \cap \bigcap\limits_{i\leqslant N} C_i = \bigcap\limits_{i\leqslant N} (F \cap C_i) = \bigcap\limits_{i\leqslant N} D_i = \Lambda$;

(2) $F \cap \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i = \Lambda$.

Лемма доказана.

Следующая теорема доказана Левшенко [1];

Теорема 22 (теорема суммы для A-слабо бесконечномерных пространств). *Если в счетно нормальном пространстве X' множество X можно представить в виде суммы счетной системы замкнутых в X' и A-слабо бесконечномерных подпространств X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то множество X является A-слабо бесконечномерным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную счетную систему дизъюнктных пар замкнутых в X множеств

$$(A_{in}, B_{in}), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Множества X_n замкнуты в X' и поэтому счетно нормальны. Подпространство X, имея тип F_σ в нормальном пространстве X', само нормально. По лемме 1 для каждого n существуют такие перегородки C_{in} между множествами A_{in} и B_{in} в X, что $X_n \cap \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{in} = \Lambda$. Так как $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{in} = \Lambda$. Теорема доказана.

Следствие 3 (Левшенко [1]). *Если счетно нормальное, в частности паракомпактное, пространство X является A-слабо бесконечномерным, то A-слабо бесконечномерным будет и любое его подмножество типа F_σ.*

Следствие 4. *Слабо счетномерный паракомпакт является A-слабо бесконечномерным.*

Для S-слабо бесконечномерных пространств утверждения, аналогичные теореме 22 (счетная теорема суммы) и следствию 3 (монотонность по подмножествам типа F_σ), уже, вообще говоря, не имеют места.

Рассмотрим пространство $\bigcup Q^n$. Оно является счетной суммой даже конечномерных замкнутых множеств Q^n, однако, как показывает следующая лемма, пространство $\bigcup Q^n$ является S-сильно бесконечномерным.

Лемма 2. *Пространство X, являющееся дискретной суммой замкнутых в X множеств F_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, с $\dim F_n \geqslant n$, всегда S-сильно бесконечномерно.*

Доказательство. Для каждого n возьмем какое-нибудь существенное отображение f_n множества F_n на грань Q^n гильбертова кирпича Q^∞. Отображение $f: X \to Q^n$, совпадающее с f_n на F_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, будет, очевидно, существенным. По теореме 18 пространство S-сильно бесконечномерно. Лемма доказана.

Таким образом, пространство $\bigcup Q^n$ является S-сильно бесконечномерным и в то же время, по теореме 22, оно A-слабо бесконечномерно. Одноточечная компактификация пространства $\bigcup Q^n$ (по той же теореме 22) A-слабо бесконечномерна, т. е., в силу ее бикомпактности, S-слабо бесконечномерна. Таким образом, S-слабая бесконечномерность не монотонна по подмножествам типа F_σ (даже в классе пространств со счетной базой).

Однако конечная теорема суммы для слабо бесконечномерных пространств все же имеет место.

Теорема 23 (Скляренко [3]). *Пространство X, являющееся суммой конечного числа замкнутых и S-слабо бесконечномерных множеств, само S-слабо бесконечномерно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 22. Рассмотрим произвольную счетную систему дизъюнктных пар замкнутых множеств

$$(A_{in}, B_{in}), \qquad i=1, 2, 3, \ldots, \quad n=1, \ldots, s.$$

По лемме 1 для каждого n существуют такие перегородки C_{in} между множествами A_{in} и B_{in}, $i=1, 2, 3, \ldots$, что $X_n \cap \bigcap\limits_{i \leqslant k_n} C_{in} = \Lambda$.

Так как $X = \bigcup\limits_{n=1}^{s} X_n$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{s} \bigcap\limits_{i \leqslant k_n} C_{in} = \Lambda$. Теорема доказана.

Выведем из леммы 1 еще следующие два утверждения, аналогичные соответствующему утверждению в конечномерном случае (теорема 15 из § 6 гл. 4).

Предложение 1. *Пусть пространство X счетно нормально, замкнутое в X множество Φ является A-слабо бесконечномерным* *и любое замкнутое в X множество $F \subseteq X \setminus \Phi$ также является A-слабо бесконечномерным. Тогда A-слабо бесконечномерным является все пространство X.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную счетную систему дизъюнктных пар замкнутых в X множеств (A_{in}, B_{in}), $i=1, 2$, $n=1, 2, 3, \ldots$

По лемме 1 существуют такие перегородки C_{1n} между множествами A_{1n} и B_{1n}, $n=1, 2, 3, \ldots$, что $\Phi \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{1n} = \Lambda$. Множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{1n}$ лежит в дополнении к множеству Φ и, следовательно, A-слабо бесконечномерно. По той же лемме 1 существуют такие перегородки C_{2n} между множествами A_{2n} и B_{2n} в X, что $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{1n}\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{2n}\right) = \Lambda$. Предложение доказано.

Предложение 2 (Скляренко [3]). *Пусть в пространстве X дано такое замкнутое S-слабо бесконечномерное множество Φ, что любое замкнутое в X и лежащее в $X \setminus \Phi$ множество F также S-слабо бесконечномерно. Тогда S-слабо бесконечномерно все пространство X.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную счетную систему дизъюнктных пар замкнутых в X множеств

$$(A_{in}, B_{in}), \qquad i=1, 2, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

По лемме 1 существуют такие перегородки C_{1n} между множествами A_{1n} и B_{1n} в X, $n=1, 2, 3, \ldots$, что $\Phi \cap \bigcap_{n \leq N} C_{1n} = \Lambda$ для некоторого N. Множество $\bigcap_{n \leq N} C_{1n}$ лежит в дополнении к множеству Φ и, следовательно, S-слабо бесконечномерно. По лемме 1 существуют такие перегородки C_{2n} между множествами A_{2n} и B_{2n}, $n=1, 2, 3, \ldots$, что $\left(\bigcap_{n \leq N} C_{1n}\right) \cap \left(\bigcap_{n \leq M} C_{2n}\right) = \Lambda$ для некоторого M. Предложение доказано.

§ 6. Строение S-слабо бесконечномерных пространств

Следующие ниже теоремы показывают, что изучение произвольных S-слабо бесконечномерных пространств сводится, в определенном смысле, к изучению счетно компактных S-слабо бесконечномерных пространств.

Счетная система открытых множеств Γ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, пространства X называется *сходящейся*, если для любой дискретной в X последовательности точек x_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, существует номер (зависящий от последовательности), начиная с которого все точки x_i содержатся в одном из множеств Γ_n. Если система открытых множеств Γ_n сходится, то множество $\Phi = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ называется *пределом* этой системы.

Теорема 24 (Скляренко [3]). *Во всяком S-слабо бесконечномерном нормальном пространстве X существует сходящаяся система открытых множеств* Γ_n, *удовлетворяющих соотношениям* $\operatorname{loc}\dim \Gamma_n \leqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *со счетно компактным S-слабо бесконечномерным пределом* Φ.

Теорема 25 (Скляренко [4]). *Если в пространстве X существует сходящаяся система S-слабо бесконечномерных открытых множеств* Γ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *с S-слабо бесконечномерным пределом* Φ, *то пространство X является S-слабо бесконечномерным.*

Для доказательства сформулированных теорем нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любой дискретной в нормальном пространстве X последовательности точек* x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *существует дискретная в X система окрестностей* O_i *точек* x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Функция $fx_i = i$ непрерывна на замкнутом в X множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i$. Если F — непрерывное продолжение f на X, то система окрестностей $O_i = F^{-1}\left(i - \frac{1}{3},\ i + \frac{1}{3}\right)$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ — искомая. Лемма доказана.

Множество тех точек x нормального пространства X, в которых $\operatorname{loc}\dim_x X \leqslant n$ *), обозначим через L_n. Каждое множество L_n, очевидно, открыто.

Лемма 2. *Система открытых множеств* L_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *S-слабо бесконечномерного нормального пространства X сходится.*

Доказательство. Предположим, что система множеств L_n не является сходящейся. Тогда существует такая дискретная в X последовательность точек x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, что множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i \setminus L_n$ бесконечны для каждого n. Из последовательности точек x_i можно выбрать подпоследовательность таких точек x_{i_n}, что $x_{i_n} \notin L_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Система точек x_{i_n} дискретна в X. По лемме 1 возьмем дискретную в X систему окрестностей O_n точек x_{i_n}. Тогда дискретной в X будет и система замыканий $[O_n]$, причем $\dim [O_n] \geqslant n$, так как $x_{i_n} \notin L_n$.

*) То есть точек $x \in X$, обладающих окрестностями Ox с $\dim Ox \leqslant n$.

По лемме 2 из § 5 замкнутое в X множество $\bigcup_{n=1}^{\infty}[O_n]$ является S-сильно бесконечномерным. Следовательно, S-сильно бесконечномерным должно быть и пространство X, вопреки условию леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 24 заканчивает

Лемма 3. *Предел Φ сходящейся системы открытых множеств Γ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, является замкнутым счетно компактным (например, пустым) множеством*), S-слабо бесконечномерным, если S-слабо бесконечномерно пространство X.*

Доказательство. Замкнутость множества Φ очевидна. Рассмотрим последовательность точек $x_i \in \Phi$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Эта последовательность не может быть дискретной, так как ни одна ее точка не содержится ни в одном L_n. Если же последовательность точек x_i не дискретна, то она имеет в X хотя бы одну предельную точку, эта точка обязана содержаться в Φ в силу замкнутости Φ. Счетная компактность Φ установлена. S-слабая бесконечномерность Φ следует из S-слабой бесконечномерности X и замкнутости Φ. Лемма доказана.

Теорема 24 также доказана. Перейдем к теореме 25.

Прежде всего, из леммы об ужатии (гл. 1, § 10) и из теоремы 23 вытекает

Лемма 4. *Нормальное пространство, являющееся конечной суммой открытых S-слабо бесконечномерных множеств, само S-слабо бесконечномерно.*

Лемма 5. *Если система открытых в пространстве X множеств Γ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, сходится и замкнутое в X множество F содержится в сумме всех множеств Γ_n, то множество F содержится в сумме конечного числа множеств Γ_n.*

Доказательство. Предположим, что F не содержится ни в одной конечной сумме множеств Γ_n. Тогда можно взять последовательность точек $x_i \in F \setminus \bigcup_{n \leq i} \Gamma_n$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Из сходимости системы множеств Γ_n следует, что последовательность точек x_i не может быть дискретной в X, т. е. имеет в X хотя бы одну предельную точку x_0. Точка x_0 содержится в $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ в силу замкнутости F. В то же время точка x_0 не может содержаться ни в одном множестве Γ_n в силу выбора точек x_i и открытости множеств Γ_n. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 25. В силу предложения 2 § 5 достаточно доказать, что любое замкнутое в X множество

*) Напомним, что пространство X счетно компактно, если любая последовательность его точек имеет в X хотя бы одну предельную точку.

$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ S-слабо бесконечномерно. Но это так в силу лемм 4 и 5. Теорема 25 доказана *).

Из доказанной теоремы, из лемм 2, 5 и теоремы 21 из § 9 гл. 4 вытекает

Следствие 1. *Если система множеств L_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, покрывает все S-слабо бесконечномерное пространство X, то* $\operatorname{loc}\dim X < \infty$. *Если еще X — паракомпакт, то и* $\dim X < \infty$.

Теоремы 24 и 25 позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема 26 (Скляренко [3]). *Наследственно паракомпактное (в частности, метризуемое) пространство X тогда и только тогда S-слабо бесконечномерно, когда в нем существует сходящаяся система открытых конечномерных множеств Γ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, со слабо бесконечномерным бикомпактным пределом Φ.*

Эта теорема вытекает из теорем 24 и 25, из соотношения $\operatorname{loc}\dim \Gamma_n = \dim \Gamma_n$ (см. теорему 21 из § 9 гл. 4) и из того факта, что счетно компактный паракомпакт является бикомпактом **).

Применим теорему 26 к доказательству следующего факта:

Теорема 27 (Смирнов [6]). *Если для метрического пространства X определена размерность* $\operatorname{Ind} X$, *то*

$$\operatorname{Ind} X < \omega_1.$$

Предварительно докажем еще несколько утверждений.

Теорема 28 (Смирнов [6]). *Если для метрического пространства X определена размерность* $\operatorname{Ind} X$, *то пространство X является S-слабо бесконечномерным.*

Доказательство. Если $\operatorname{Ind} X = -1$, то утверждение теоремы выполняется. Пусть оно выполняется в случае $\operatorname{Ind} X \leqslant \alpha$ для всех $\alpha < \beta$, и пусть $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta$.

---

*) Совершенно аналогичным образом можно доказать теорему, получаемую из теоремы 25 заменой S-слабой бесконечномерности на A-слабую бесконечномерность.

**) Заметим прежде всего, что любая дискретная система открытых в счетно компактном пространстве X множеств O_α конечна. (Действительно, если это не так, то, выбрав в каждом множестве O_α по точке x_α, можно получить бесконечное дискретное в X множество.) Если ω — произвольное покрытие паракомпакта X, то в ω можно вписать открытое σ-дискретное локально конечное покрытие ω_1 (см. гл. 4, § 11, лемма 4) которое, в силу сделанного замечания, будет счетным. Если из покрытия $\omega_1 = \{V_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, нельзя выбрать конечное подпокрытие, то можно считать, что из каждого элемента V_i можно так выбрать точку x_i, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Из локальной конечности ω_1 вытекает локальная конечность, а следовательно, дискретность системы $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Но это противоречит счетной компактности X. Итак, из покрытия ω_1 можно выбрать конечное подпокрытие. Бикомпактность X доказана.

В пространстве X рассмотрим систему дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta$, то между множествами A_1 и B_1 существует перегородка C_1 размерности $\operatorname{Ind} C_1 \leqslant \alpha < \beta$. По индуктивному предположению множество C_1 является S-слабо бесконечномерным. По лемме 1 из § 5 существуют такие перегородки C_i между множествами A_i и B_i, $i \geqslant 2$, и такой номер N, что $\bigcap\limits_{i \leqslant N} C_i = C_1 \cap \bigcap\limits_{i=2}^{N} C_i = \Lambda$. Таким образом, пространство X является S-слабо бесконечномерным. Теорема доказана.

На множестве порядковых чисел $\alpha < \omega_1$ определим функцию $\beta(\alpha)$, значениями которой являются также порядковые числа.

Положим $\beta(-1) = \omega_0$. Если числа $\beta(\alpha)$ уже определены для всех чисел $\alpha < \alpha'$ $(\alpha' < \omega_1)$, то

$$\beta(\alpha') = \sup_{\alpha < \alpha'} \beta(\alpha) + 1.$$

Очевидны следующие свойства функции $\beta(\alpha)$:

(1) если $\alpha < \alpha'$, то и $\beta(\alpha) < \beta(\alpha')$;

(2) $\beta(\alpha) < \omega_1$ для всех $\alpha < \omega_1$;

(3) $\alpha \leqslant \beta(\alpha)$ для всех $\alpha < \omega_1$.

Приступим к доказательству теоремы 27. Пусть для пространства X определена размерность $\operatorname{Ind} X$. Тогда, по теореме 28, пространство X является S-слабо бесконечномерным, а по теореме 26, в пространстве X существует сходящаяся система открытых множеств L_n размерности $\dim L_n \leqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, с компактным пределом Φ. Компакт Φ является замкнутым подмножеством пространства X, поэтому для него также определена размерность $\operatorname{Ind} \Phi$. Теорема будет доказана (см. § 1, следствие 2), если мы докажем следующую формулу:

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \beta(\operatorname{Ind} \Phi).$$

Если $\operatorname{Ind} \Phi = -1$, т. е. компакт Φ пуст, то, по следствию 1, $\operatorname{Ind} X \leqslant \omega_0 = \beta(\operatorname{Ind} \Phi)$. Предположим, что доказываемая формула справедлива в случае $\operatorname{Ind} \Phi \leqslant \alpha$ для всех $\alpha < \alpha'$, и пусть $\operatorname{Ind} \Phi \leqslant \alpha'$.

Рассмотрим дизъюнктную пару замкнутых в пространстве X множеств A и B. Тогда в компакте Φ между множествами $A \cap \Phi$ и $B \cap \Phi$ существует перегородка C' размерности $\operatorname{Ind} C' \leqslant \alpha < \alpha'$. В силу наследственной нормальности пространства X существует такая перегородка C между множествами A и B в X, что $C \cap \Phi = C'$. По индуктивному предположению

$$\operatorname{Ind} C \leqslant \beta(\operatorname{Ind} C') \leqslant \beta(\alpha) < \beta(\alpha').$$

Следовательно, $\operatorname{Ind} X \leqslant \beta(\alpha')$. Теорема 27 доказана.

§ 7. Бикомпактные расширения слабо бесконечномерных пространств

По теореме Скляренко из § 4 гл. 5 нормальное n-мерное пространство X обладает n-мерным бикомпактным расширением того же веса, что и X. Оказывается, аналогичным образом обстоит дело и в случае S-слабо бесконечномерных нормальных пространств.

Сначала покажем, что любое S-слабо бесконечномерное нормальное пространство обладает некоторым слабо бесконечномерным бикомпактным расширением.

Более точно, имеет место

Предложение 1 (Левшенко [1], Скляренко). *Максимальное бикомпактное расширение βX нормального S-слабо бесконечномерного пространства X слабо бесконечномерно.*

Доказательство. Рассмотрим счетную систему дизъюнктных пар (A_i, B_i), $i=1, 2, 3, \ldots$, замкнутых в βX множеств. Возьмем такие окрестности OA_i и OB_i, что $[OA_i]\cap[OB_i]=\Lambda$. Множества $A_i'=X\cap[OA_i]$, $B_i'=X\cap[OB_i]$ непусты, и $[A_i']_{\beta X}=[OA_i]$, $[B_i']_{\beta X}=[OB_i]$ (см. гл. 5, § 1, лемма 2), $i=1, 2, 3, \ldots$ Выберем такие перегородки C_i' между A_i' и B_i', что $\bigcap\limits_{i\leqslant N} C_i'=\Lambda$ для некоторого номера N. Тогда множества $C_i=[C_i']_{\beta X}$ будут перегородками между $[A_i']_{\beta X}=[OA_i]\supseteq A_i$ и $[B_i']_{\beta X}=[OB_i]\supseteq B_i$ (см. гл. 5, § 1, лемма 1) и

$$\bigcap_{i\leqslant N} C_i=\bigcap_{i\leqslant N}[C_i']_{\beta X}=\Big[\bigcap_{i\leqslant N} C_i'\Big]_{\beta X}=\Lambda$$

(см. гл. 1, § 9, предложение 3). Предложение 1 доказано.

Скляренко, исходя из установленной им в теореме 26 структуры S-слабо бесконечномерных метрических пространств, показал [3], что S-слабо бесконечномерное метрическое пространство веса $\leqslant\tau$ обладает слабо бесконечномерным бикомпактным расширением веса $\leqslant\tau$. Имеет место следующее общее утверждение:

Теорема 29 (Пасынков [17]). *Для любого вполне регулярного пространства X веса $\leqslant\tau$, максимальное бикомпактное расширение βX которого слабо бесконечномерно, существует слабо бесконечномерное бикомпактное расширение bX веса $\leqslant\tau$.*

В частности, любое S-слабо бесконечномерное нормальное пространство X веса $\leqslant\tau$ обладает (S-) слабо бесконечномерным бикомпактным расширением веса $\leqslant\tau$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые дополнительные рассмотрения.

Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X\to Z$ бикомпакта X на бесконечный бикомпакт Z, и пусть в бикомпакте Z выбрана система λ дизъюнктных пар замкнутых в Z множеств (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}$, причем мощн. $\mathfrak{A} \leqslant wZ$.

Через $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(f\colon X \to Z, \lambda)$ обозначим систему таких конечных наборов $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ индексов $\alpha_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, s$, что в X между множествами $f^{-1}A_{\alpha_i}$ и $f^{-1}B_{\alpha_i}$ можно выбрать перегородки $C_{\alpha_i}(\beta)$ с пустым пересечением: $\bigcap\limits_{i=1}^{s} C_{\alpha_i}(\beta) = \Lambda$. Через $Y = Y(f\colon X \to Z, \lambda)$, $g = g(f\colon X \to Y, \lambda)$ и $h = h(f\colon X \to Y, \lambda)$ обозначим соответственно такой бикомпакт и такие непрерывные отображения X на Y и Y на Z, что $f = hg$, $wY \leqslant wZ$ и для любого $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{B}$ в Y между множествами $h^{-1}A_{\alpha_i}$ и $h^{-1}B_{\alpha_i}$ существуют перегородки D_i, $\alpha_i \in \beta$, $i = 1, \ldots, s$, с пустым пересечением: $\bigcap\limits_{i=1}^{s} D_i = \Lambda$.

Имеет место

Лемма 1. *Если бикомпакт X слабо бесконечномерен, то бикомпакт $Y = Y(f\colon X \to Y, \lambda)$ и отображения $g = g(f\colon X \to Y, \lambda)$, $h = h(f\colon X \to Y, \lambda)$ существуют.*

Доказательство. Возьмем произвольный набор $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ из $\mathfrak{B}$. Выберем перегородки $C_i = C_{\alpha_i}(\beta)$ между $f^{-1}A_{\alpha_i}$ и $f^{-1}B_{\alpha_i}$ так, что $\bigcap\limits_{i=1}^{s} C_i = \Lambda$.

По лемме 1 из § 4 можно считать, что перегородки C_i имеют в X тип G_δ. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ строим непрерывную на X функцию $\varphi_i\colon X \to Q_i = [0, 1]$, равную 0 на $f^{-1}A_{\alpha_i}$, 1 на $f^{-1}B_{\alpha_i}$ и $\frac{1}{2}$ в точках множества C_i и только в них. Диагональное произведение

$$g_\beta\colon X \to Q_\beta = \prod_{i=1}^{s} Q_i$$

отображений φ_i, как мы знаем (см. гл. 1, § 8), непрерывно. Через p_i обозначим проекцию произведения Q_β на сомножитель Q_i. Очевидно, $\varphi_i = p_i g_\beta$, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому

$$g_\beta f^{-1}A_{\alpha_i} \subseteq p_i^{-1}(0), \qquad g_\beta f^{-1}B_{\alpha_i} \subseteq p_i^{-1}(1)$$

и

$$\bigcap_{i=1}^{s}\left(g_\beta X \cap p_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = g_\beta X \cap \bigcap_{i=1}^{s} p_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= g_\beta X \cap \left\{\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\} = g_\beta X \cap g_\beta\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) = \Lambda.$$

Таким образом, между множествами $g_\beta f^{-1}A_{\alpha_i}$ и $g_\beta f^{-1}B_{\alpha_i}$ в $g_\beta X$ существуют перегородки $D_{\alpha_i}(\beta)=g_\beta X\cap p_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $i=1, \ldots, s$, с пустым пересечением.

Рассмотрим теперь диагональное произведение

$$g\colon X\to Z\times\prod_{\beta\in\mathfrak{B}}Q_\beta$$

отображений f и g_β. Положим $Y=gX$ и через $h\colon Y\to Z$, $p_\beta\colon Y\to Q_\beta$ обозначим проектирования бикомпакта Y в сомножители Z и Q_β произведения $Z\times\prod\limits_{\beta\in\mathfrak{B}}Q_\beta$. Ясно, что $g_\beta=p_\beta g$, $\beta\in\mathfrak{B}$, и

$$f=hg.$$

Так как бикомпакт Z бесконечен, т. е. $wZ\geqslant\aleph_0$, и $wQ_\beta=\aleph_0$, $\beta\in\mathfrak{B}$, то

$$wY\leqslant w\left(Z\times\prod_{\beta\in\mathfrak{B}}Q_\beta\right)\leqslant\max(wZ,\text{ мощн. }\mathfrak{B})=wZ.$$

Рассмотрим произвольно выбранный индекс $\beta=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\in\mathfrak{L}$ и пары $\left(h^{-1}A_{\alpha_i}, h^{-1}B_{\alpha_i}\right)$, $i=1, \ldots, s$.

Так как $h^{-1}A_{\alpha_i}=g\left(g^{-1}h^{-1}A_{\alpha_i}\right)=gf^{-1}A_{\alpha_i}$, то $p_\beta h^{-1}A_{\alpha_i}=$ $=p_\beta gf^{-1}A_{\alpha_i}=g_\beta f^{-1}A_{\alpha_i}$. Аналогично и

$$p_\beta h^{-1}B_{\alpha_i}=g_\beta f^{-1}B_{\alpha_i}.$$

Поэтому в $g_\beta X$ между множествами $p_\beta h^{-1}A_{\alpha_i}$ и $p_\beta h^{-1}B_{\alpha_i}$ существуют перегородки $D_{\alpha_i}(\beta)$ с пустым пересечением: $\bigcap\limits_{i=1}^{s}D_{\alpha_i}(\beta)=\Lambda$. Но тогда множества $D_i=p_\beta^{-1}D_{\alpha_i}(\beta)$ будут перегородками в Y между $h^{-1}A_{\alpha_i}\subseteq p_\beta^{-1}p_\beta h^{-1}A_{\alpha_i}$ и $h^{-1}B_{\alpha_i}\subseteq p_\beta^{-1}p_\beta h^{-1}B_{\alpha_i}$ с пустым пересечением: $\bigcap\limits_{i=1}^{s}D_i=p_\beta^{-1}\bigcap\limits_{i=1}^{s}D_{\alpha_i}(\beta)=\Lambda$. Требуемые бикомпакт и отображения построены. Лемма доказана.

Докажем теперь факторизационную теорему для слабо бесконечномерных бикомпактов.

Теорема 30 (Пасынков [17]). *Для непрерывного отображения $f\colon X\to Z$ слабо бесконечномерного бикомпакта X на бикомпакт Z веса $wZ=\tau\geqslant\aleph_0$ существует такой слабо бесконечномерный бикомпакт Y и такие непрерывные отображения $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to Z$, что*

(1) $f=hg$;

(2) $wY\leqslant wZ$.

Лемма 2. *В бесконечном бикомпакте Z веса τ существует такая система дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}$, что* мощн. $\mathfrak{A} \leqslant \tau$ *и*

(*) *для любой дизъюнктной пары замкнутых в Z множеств (A, B) найдется такой индекс $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $A \subseteq A_\alpha$, $B \subseteq B_\alpha$.*

Доказательство. Выберем в Z большую базу $\Theta = \{O_\theta\}$ мощности τ (см. § 1, предложение 1). Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$ таких пар $\alpha = (O_{\theta_1}, O_{\theta_2})$ элементов базы Θ, что $O_{\theta_1} \supseteq [O_{\theta_2}]$, и положим $A_\alpha = X \setminus O_{\theta_1}$, $B_\alpha = [O_{\theta_2}]$. Ясно, что мощн. $\mathfrak{A} \leqslant \tau$. Пусть пара (A, B) замкнутых в Z множеств дизъюнктна. Из определения большой базы вытекает существование таких элементов $O_{\theta'}$ и $O_{\theta''}$ базы Θ, что

$$X \setminus A \supseteq O_{\theta'} \supseteq [O_{\theta''}] \supseteq O_{\theta''} \supseteq B.$$

Ясно, что $A \subseteq A_\alpha$, $B \subseteq B_\alpha$ для $\alpha = (O_{\theta'}, O_{\theta''})$. Требуемая система пар (A_α, B_α) построена. Лемма доказана.

Систему дизъюнктных пар (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}$, замкнутых подмножеств пространства Z, удовлетворяющих условию (*), будем называть разделяющей.

Доказательство теоремы 30. Положим $Y_0 = Z$ и $g_0 = f$. По лемме 2 в бикомпакте Y_0 существует разделяющая система λ_0 пар (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, мощн. $\mathfrak{A}_0 \leqslant \tau$. Построим систему $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(g_0\colon X \to Y_0)$, бикомпакт $Y_1 = Y(g_0\colon X \to Y_0, \lambda_0)$ и отображения

$$g_1 = g(g_0\colon X \to Y_0, \lambda_0)\colon X \to Y_1, \qquad h_0^1 = h(g_0\colon X \to Y_0, \lambda_0)\colon Y_1 \to Y_0.$$

Для всех номеров i по индукции построим бикомпакты Y_i веса $wY_i \leqslant \tau$ с разделяющими системами λ_i пар (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, мощн. $\mathfrak{A}_i \leqslant \tau$ и непрерывные отображения $g_i\colon X \to Y_i$, $h_{i-1}^i\colon Y_i \to Y_{i-1}$, положив

(а) $Y_i = Y(g_{i-1}\colon X \to Y_{i-1}, \lambda_{i-1})$;

(б) $g_i = g(g_{i-1}\colon X \to Y_{i-1}, \lambda_{i-1})$,
$h_{i-1}^i = h(g_{i-1}\colon X \to Y_{i-1}, \lambda_{i-1})$

и выбрав систему λ_i так, чтобы выполнялось условие

(в) для любой пары (A_α, B_α), $\alpha \in \mathfrak{A}_{i-1}$, пара $\left((h_{i-1}^i)^{-1} A_\alpha, (h_{i-1}^i)^{-1} B_\alpha\right)$ входит в систему λ_i.

Последнего можно достичь, взяв в Y_i какую-нибудь разделяющую систему пар λ_i' мощности wY_i и пополнив ее системой

$$\lambda_{i-1}^{-1} = \left\{\left((h_{i-1}^i)^{-1} A_\alpha, (h_{i-1}^i)^{-1} B_\alpha\right)\right\}, \qquad \alpha \in \mathfrak{A}_{i-1}.$$

Так как мощн. $\lambda_{i-1} \leqslant \tau$, то и мощн. $\lambda_{i-1}^{-1} \leqslant \tau$. Но в силу определения пространства $Y_i = Y(g_{i-1}\colon X \to Y_{i-1}, \lambda_{i-1})$ справедливо соотношение $wY_i \leqslant wY_{i-1} \leqslant \tau$. Следовательно, мощн. $\lambda_i \leqslant$ $\leqslant$ мощн. $(\lambda_i' \cup \lambda_{i-1}^{-1}) \leqslant \tau$. Предел спектра $S = \{Y_i, h_{i-1}^i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим через Y. Это бикомпакт веса $wY \leqslant \tau$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1). Так как $g_{i-1} = h^i_{i-1} g_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то (см. Прибавление к гл. 1, § 1) определено непрерывное отображение $g\colon X \to Y$, удовлетворяющее соотношениям $g_i = h_i g$, где h_i обозначает проекцию предела Y спектра S в элемент Y_i этого спектра, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Положив $h = h_0\colon Y \to Z = Y_0$, получим соотношение

$$f = hg.$$

Осталось показать слабую бесконечномерность бикомпакта Y.

Рассмотрим счетную систему дизъюнктных пар (A_k, B_k), $k = 1, 2, 3, \ldots$, замкнутых в Y множеств. В силу предложения 10 из § 1 Прибавления к гл. 1 находим такие номера $i(k)$, что $h_{i(k)} A_k \cap h_{i(k)} B_k = \Lambda$. Так как система $\lambda_{i(k)}$ разделяющая, то можно найти такой индекс $\alpha(k) \in \mathfrak{A}_{i(k)}$, что $h_{i(k)} A_{(k)} \subseteq A_{\alpha(k)}$ и $h_{i(k)} B_k \subseteq B_{\alpha(k)}$, следовательно, и $A_k \subseteq A'_k = h^{-1}_{i(k)} A_{\alpha(k)}$, $B_k \subseteq B'_k = h^{-1}_{i(k)} B_{\alpha(k)}$. В силу слабой бесконечномерности X существуют такие перегородки C_k между $g^{-1}A'_k$ и $g^{-1}B'_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и существует такой номер k_0, что $\bigcap\limits_{k \leqslant k_0} C_k = \Lambda$. Пусть $n = \max\limits_{k \leqslant k_0} i(k)$. Положим $A_{\alpha_k} = \left(h^n_{i(k)}\right)^{-1} A_{\alpha(k)}$, $B_{\alpha_k} = \left(h^n_{i(k)}\right)^{-1} B_{\alpha(k)}$ (если $i(k) = n$, то h^n_n есть тождественное отображение Y_n), $k = 1, \ldots, k_0$. В силу условия (в) пары $(A_{\alpha_k}, B_{\alpha_k})$, $k \leqslant k_0$, входят в систему λ_n. Так как

$$g_n^{-1} A_{\alpha_k} = g^{-1} h_n^{-1} A_{\alpha_k} = g^{-1} h_n^{-1} \left(h^n_{i(k)}\right)^{-1} A_{\alpha(k)} = g^{-1} h^{-1}_{i(k)} A_{\alpha(k)} = g^{-1} A'_k$$

и аналогично

$$g_n^{-1} B_{\alpha_k} = g^{-1} B'_k,$$

то множества C_k являются перегородками между $g_n^{-1} A_{\alpha_k}$ и $g_n^{-1} B_{\alpha_k}$, $k \leqslant k_0$, и $\bigcap\limits_{k \leqslant k_0} C_k = \Lambda$, т. е. набор $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_0})$ входит в $\mathfrak{B}(g_n\colon X \to Y_n, \lambda_n)$. Но тогда, в силу определения пространства $Y_{n+1} = Y(g_n\colon X \to Y_n, \lambda_n)$, в бикомпакте Y_{n+1} между множествами $\left(h^{n+1}_n\right)^{-1} A_{\alpha_k}$ и $\left(h^{n+1}_n\right)^{-1} B_{\alpha_k}$ существуют перегородки D'_k, $k \leqslant k_0$, с пустым пересечением: $\bigcap\limits_{k \leqslant k_0} D'_k = \Lambda$. Множества $D_k = h^{-1}_{n+1} D'_k$ будут перегородками в Y между множествами

$$h^{-1}_{n+1} \left(h^{n+1}_n\right)^{-1} A_{\alpha_k} = h_n^{-1} \left(h^n_{i(k)}\right)^{-1} A_{\alpha(k)} = h^{-1}_{i(k)} A_{\alpha(k)} = A'_k \supseteq A_k$$

и

$$h_{n+1}^{-1}\left(h_n^{n+1}\right)^{-1} B_{\alpha_k} = B'_k \supseteq B_k, \qquad k \leqslant k_0.$$

Пересечение

$$\bigcap_{k \leqslant k_0} D_k = \bigcap_{k \leqslant k_0} h_{n+1}^{-1} D'_k \subseteq h_{n+1}^{-1}\left(\bigcap_{k \leqslant k_0} D'_k\right)$$

этих перегородок пусто. Взяв какие-нибудь перегородки D_k между множествами A_k и B_k при $k > k_0$, получим систему перегородок D_k между A_k и B_k для всех k с пустым пересечением. Слабая бесконечномерность бикомпакта Y установлена. Теорема 30 доказана.

Докажем теорему 29.

Пусть вполне регулярное пространство X имеет вес $\tau \geqslant \aleph_0$ и его максимальное бикомпактное расширение βX слабо бесконечномерно. По теореме Тихонова существует топологическое отображение f': $X \to I^\tau$ пространства X в тихоновский куб веса τ. По теореме 12 из § 9 гл. 1 существует продолжение f: $\beta X \to I^\tau$ отображения f'. По теореме 30 существует слабо бесконечномерный бикомпакт Y веса $wY \leqslant \tau$ и такие отображения g: $\beta X \to Y$ и h: $Y \to I^\tau$, что $f = hg$. Отображение g, как и f, на множестве X является топологическим, поэтому можно считать $X \equiv gX$. Ясно, что бикомпакт $[gX]_Y$ является искомым бикомпактным расширением пространства X. В случае нормального пространства утверждение теоремы вытекает из предложения 1. Теорема 29 доказана.

Как показывает следующее ниже утверждение, в формулировке теоремы 29 нельзя, вообще говоря, S-слабо бесконечномерные пространства заменить A-слабо бесконечномерными.

Рассмотрим пространство Q^ω. Его тождественное вложение в гильбертов кирпич Q^∞ является существенным отображением, поэтому пространство Q^ω является S-сильно бесконечномерным. В то же время, являясь слабо счетномерным, пространство Q^ω является A-слабо бесконечномерным (см. следствие 4 из § 5). Однако, как утверждает следующая теорема, пространство Q^ω не имеет слабо бесконечномерных бикомпактных расширений.

Теорема 31 (Скляренко [3]). *Все бикомпактные расширения пространства Q^ω сильно бесконечномерны.*

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь бикомпактное расширение B пространства Q^ω. Нульмерные параллелепипеды $a_1 = \{(0, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$ и $b_1 = \{(1, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$ имеют в B окрестности Oa_1 и Ob_1, замыкания которых не пересекаются. Положим $\varepsilon_1 = 1$. Натуральное число k_1 и число $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, можно выбрать так, чтобы осуществлялись включения

$$A_1 = \left\{(x_i) \in Q^\omega \mid x_1 = 0,\ x_i \leqslant \varepsilon_2 \text{ при } 1 < i \leqslant k_1\right\} \subseteq Oa_1$$

и

$$B_1 = \{(x_i) \in Q^\omega \mid x_1 = \varepsilon_1 = 1,\ x_i \leqslant \varepsilon_2 \text{ при } 1 < i \leqslant k_1\} \subseteq Ob_1.$$

Предположим, что для всех номеров $j < n$ уже построены такие числа k_j, ε_{j+1} и замкнутые в Q^ω множества A_j, B_j, что $k_j < k_{j'}$ и $\varepsilon_{j+1} > \varepsilon_{j'+1}$ при $j < j'$,

$$(1)\ \begin{cases} A_j = \{(x_i) \in Q^\omega \mid x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < j,\ x_j = 0,\ x_i \leqslant \varepsilon_{j+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } j < i \leqslant k_j\}, \\ B_j = \{(x_i) \in Q^\omega \mid x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < j,\ x_j = \varepsilon_j,\ x_i \leqslant \varepsilon_{j+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } j < i \leqslant k_j\} \end{cases}$$

и

$$[A_j]_B \cap [B_j]_B = \Lambda.$$

Найдем числа k_n, ε_{n+1} и множества A_n и B_n, удовлетворяющие аналогичным условиям. Заметим, что $(n-1)$-мерные параллелепипеды

$$a_n = \{(x_i) \in Q^\omega\colon x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_i = 0 \text{ при } i \geqslant n\},$$
$$b_n = \{(x_i) \in Q^\omega\colon x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_n = \varepsilon_n,\ x_i = 0 \text{ при } i > n\}$$

не пересекаются. Поэтому они обладают в B окрестностями Oa_n и Ob_n, замыкания которых не пересекаются.

Каждая точка $x \in a_n$ содержится в $Oa_n \cap Q^\omega$ вместе с некоторой окрестностью вида

$$Ox = \{(x_i) \in O^\omega\colon \lambda_i < x_i < \mu_i \text{ при } i < n,\ x_i < \varepsilon(x) < \varepsilon_n \\ \text{при } n \leqslant i \leqslant k(x)\}.$$

Из покрытия $\{Ox\}$ компакта a_n можно выделить конечное подпокрытие $\{Ox_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, и положить

$$\varepsilon(a_n) = \frac{1}{2} \min_j \varepsilon(x_j), \quad k(a_n) = 1 + \max(k_{n-1}, k(x_1), \ldots, k(x_s)).$$

Аналогичным образом находятся числа $\varepsilon(b_n)$ и $k(b_n)$. Если положить $\varepsilon_{n+1} = \min(\varepsilon(a_n), \varepsilon(b_n))$ и $k_n = \max(k(a_n), k(b_n))$, то множества A_n и B_n, получаемые по формулам (1) при $j = n$, будут содержаться соответственно в Oa_n и Ob_n. Следовательно, $[A_n]_B \cap [B_n]_B = \Lambda$.

Продолжая построение, получим числа k_n, ε_n и множества A_n, B_n для всех n.

Предположим, что существуют такие перегородки C_n между множествами A_n и B_n и номер N, что $\bigcap\limits_{n \leqslant N} C_n = \Lambda$. Тогда в N-мерном параллелепипеде

$$Q^N = \{(x_i) \in Q^\omega \mid x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i \leqslant N,\ x_i = 0 \text{ при } i > N\}$$

множества $C_n \cap Q^n$ являются перегородками между множествами $A_n \cap Q^N$ и $B_n \cap Q^N$, $n \leqslant N$, с пустым пересечением: $\bigcap_{n \leqslant N}(C_n \cap Q^N) = \Lambda$. Но множества $A_n \cap Q^N$ и $B_n \cap Q^N$ являются, очевидно, $(N-1)$-мерными противоположными гранями параллелепипеда Q^N, и, следовательно, пересечение $\bigcap_{n \leqslant N}(C_n \cap Q^N)$ пустым быть не может (см. гл. 5, § 8). Полученное противоречие доказывает, что любая система перегородок между множествами $[A_n]_B$ и $[B_n]_B$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, центрирована.

Следовательно, бикомпакт B сильно бесконечномерен.

§ 8. Бесконечномерные канторовы многообразия

Бикомпакт X называется *бесконечномерным канторовым многообразием*, если его нельзя разбить никаким слабо бесконечномерным замкнутым подмножеством (П. С. Александров).

Следующая теорема аналогична теореме Гуревича — Тумаркина (гл. 5, § 9):

Теорема 32 (Скляренко [3]). *Во всяком сильно бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное канторово многообразие.*

Сформулированная теорема является следствием доказываемых ниже лемм.

Лемма 1. *Пусть пространство Φ представлено в виде суммы двух замкнутых множеств Φ_1 и Φ_2. Пусть замкнутые в Φ множества A и B не пересекаются и C_j — перегородка между $A \cap \Phi_j$ и $B \cap \Phi_j$ в Φ_j, $j = 1, 2$. Тогда существует такая перегородка C между A и B в Φ, что $C \setminus \Phi_2 = C_1 \setminus \Phi_2$ и $C \setminus \Phi_1 = C_2 \setminus \Phi_1$, другими словами, перегородка C совпадает вне пересечения $\Phi_1 \cap \Phi_2$ с C_1 и C_2 соответственно.*

Доказательство. Дополнение к C_j в Φ_j разлагается в сумму двух открытых в Φ_j и непересекающихся множеств $G_j^1 \supseteq A \cap \Phi_j$ и $G_j^2 \supseteq B \cap \Phi_j$, $j = 1, 2$. Множество $[G_1^1] \cup [G_2^1] \cup C_1 \cup C_2 = F_1$, замкнутое в Φ, содержит множество A и не пересекается с B, так как $[G_j^1] \subseteq G_j^1 \cup C_j$, а $B \cap (G_j^1 \cup C_j) = (B \cap \Phi_j) \cap (G_j^1 \cup C_j) \subseteq G_j^2 \cap (G_j^1 \cup C_j) = \Lambda$, $j = 1, 2$. Следовательно, множество $O_2 = \Phi \setminus F_1$ является окрестностью множества B в Φ.

Аналогичным образом, окрестностью множества A является множество $O_1 = \Phi \setminus ([G_1^2] \cup [G_2^2] \cup C_1 \cup C_2)$. Множества O_1 и O_2

не пересекаются, так как

$$O_1 \cap O_2 = \Phi \setminus \Big(C_1 \cup C_2 \cup \bigcup_{j=1,2} ([G_j^1] \cup [G_j^2])\Big) \subseteq$$
$$\subseteq \Phi \setminus ((G_1^1 \cup C_1 \cup G_1^2) \cup (G_2^1 \cup C_2 \cup G_2^2)) = \Phi \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2) = \Lambda.$$

Кроме того,

$$\Phi \setminus (O_1 \cup O_2) = (C_1 \cup C_2 \cup [G_1^1] \cup [G_2^1]) \cap (C_1 \cup C_2 \cup [G_1^2] \cup [G_2^2]) =$$
$$= ((C_1 \cup G_1^1) \cup (C_2 \cup G_2^1)) \cap ((C_1 \cup G_1^2) \cup (C_2 \cup G_2^2)) =$$
$$= ((C_1 \cup G_1^1) \cap (C_1 \cup G_1^2)) \cup ((C_1 \cup G_1^1) \cap (C_2 \cup G_2^2)) \cup$$
$$\cup ((C_2 \cup G_2^1) \cap (C_1 \cup G_1^2)) \cup ((C_2 \cup G_2^1) \cap (C_2 \cup G_2^2)) \subseteq$$
$$\subseteq C_1 \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2) \cup (\Phi_2 \cap \Phi_1) \cup C_2 \subseteq C_1 \cup C_2 \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2).$$

Множество $C = \Phi \setminus (O_1 \cup O_2)$ является искомой перегородкой, так как $C_1 \cup C_2 \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2) \supseteq C \supseteq C_1 \supseteq C_2$, откуда $C \setminus \Phi_1 = C_2 \setminus \Phi_1$ и $C \setminus \Phi_2 = C_1 \setminus \Phi_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в бикомпакте Φ существует такая счетная система пар дизъюнктных замкнутых множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, что для любой системы перегородок C_i между A_i и B_i всегда $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \Lambda$, но в то же время в любом собственном замкнутом подмножестве Φ' бикомпакта Φ существуют перегородки C'_i между множествами $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$ с пустым пересечением: $\bigcap_{i=1}^{\infty} C'_i = \Lambda$. Тогда бикомпакт Φ является бесконечномерным канторовым многообразием.*

Доказательство. Предположим, что Φ не является бесконечномерным канторовым многообразием. Тогда Φ можно разбить слабо бесконечномерным бикомпактом C, т. е. разность $\Phi \setminus C$ можно представить в виде суммы двух непустых открытых непересекающихся множеств O_1 и O_2. Бикомпакты $\Phi_1 = \Phi \setminus O_2$ и $\Phi_2 = \Phi \setminus O_1$ являются собственными подмножествами Φ, и $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = C$. По условию в бикомпактах Φ_j существуют такие перегородки C_{ji} между множествами $A_i \cap \Phi_j$ и $B_i \cap \Phi_j$, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{ji} = \Lambda$, $j = 1, 2$. В силу бикомпактности множеств Φ_1 и Φ_2 существует такой номер N, что $\bigcap_{i \leq N} C_{ji} = \Lambda$, $j = 1, 2$. В соответствии с леммой 1 существуют такие перегородки C_i между множествами A_i и B_i, что $C_i \setminus \Phi_2 =$

$= C_{1i} \setminus \Phi_2$ и $C_i \setminus \Phi_1 = C_{2i} \setminus \Phi_1$, $i = 1, \ldots, N$. Но тогда

$$\bigcap_{i \leqslant N} C_i = \bigcap_{i \leqslant N} (C_i \cap \Phi_1) \cup \bigcap_{i \leqslant N} (C_i \cap \Phi_2) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{i \leqslant N} ((C_i \setminus \Phi_2) \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2)) \cup \bigcap_{i \leqslant N} ((C_i \setminus \Phi_1) \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2)) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{i \leqslant N} (C_{1i} \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2)) \cup \bigcap_{i \leqslant N} (C_{2i} \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2)) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{i \leqslant N} C_{1i} \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2) \cup \bigcap_{i \leqslant N} C_{2i} = \Phi_1 \cap \Phi_2 = C.$$

По лемме 1 § 5 существуют такие перегородки C_i между множествами A_i и B_i, $i > N$, что $C \cap \bigcap_{i > N} C_i = \Lambda$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcap_{i \leqslant N} C_i \cap \bigcap_{i > N} C_i \subseteq C \cap \bigcap_{i > N} C_i = \Lambda,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 32 осталось доказать следующую лемму:

Лемма 3. *В любом сильно бесконечномерном бикомпакте X содержится замкнутое множество Φ, удовлетворяющее условиям леммы* 2.

Доказательство. Если бикомпакт X удовлетворяет условиям леммы 2, то он и является искомым. Предположим, что X не удовлетворяет условиям леммы 2, и возьмем такую систему пар дизъюнктных замкнутых в X множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \Lambda$ для любой системы перегородок C_i между A_i и B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Положим $\Phi_1 = X$. Предположим, что для всех порядковых чисел $\lambda' < \lambda$ мы построили такие бикомпакты $\Phi_{\lambda'}$, что

(а) $\Phi_{\lambda''} \subseteq \Phi_{\lambda'}$ и $\Phi_{\lambda'} \setminus \Phi_{\lambda''} \neq \Lambda$ при $\lambda' < \lambda''$,

(б) для любой системы перегородок $C_{i\lambda'}$ в $\Phi_{\lambda'}$ между множествами $A_i \cap \Phi_{\lambda'}$ и $B_i \cap \Phi_{\lambda'}$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{i\lambda'}$ непусто.

Пусть сначала λ — непредельное порядковое число, т. е. $\lambda = \lambda_0 + 1$. Тогда возможны два случая:

1. В любом собственном замкнутом подмножестве Φ' множества Φ_{λ_0} существуют такие перегородки D_i в Φ' между множествами $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \Lambda$. Тогда множество Φ_{λ_0} является искомым.

2. Существует такое собственное замкнутое подмножество $\Phi' \subset \Phi$, что для любой системы перегородок D_i в Φ' между множествами $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$ имеем $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i \neq \Lambda$. Тогда полагаем $\Phi_\lambda = \Phi'$.

Предположим, что число λ предельное. Тогда полагаем $\Phi_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda' < \lambda} \Phi_{\lambda'}$. Очевидно, бикомпакт Φ_λ удовлетворяет условию (а). Покажем, что он удовлетворяет и условию (б). Предположим, что существуют такие перегородки $C_{i\lambda}$ между множествами $A_i \cap \Phi_\lambda$ и $B_i \cap \Phi_\lambda$ в Φ_λ, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{i\lambda} = \Lambda$. В силу счетной нормальности X можно считать, что перегородки $C_{i\lambda}$ имеют тип G_δ в Φ_λ (см. лемму 2 § 4). На Φ_λ для каждого i определим функции g_i, равные 0 на $A_i \cap \Phi_\lambda$, 1 на $B_i \cap \Phi_\lambda$ и $\frac{1}{2}$ в точках $C_{i\lambda}$ и только в них. Функции g_i продолжим в функции f_i, определенные на всем пространстве X и равные 0 на A_i и 1 на B_i. Множества $C_i = f_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ являются перегородками в X между A_i и B_i. Бикомпакт $\Psi = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ не пересекается с бикомпактом Φ_λ, так как $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \cap \Phi_\lambda = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{i\lambda} = \Lambda$. Поэтому множество $O = X \setminus \Psi$ является окрестностью множества Φ_λ. В силу включений (а) и бикомпактности пространства X все множества $\Phi_{\lambda'}$, начиная с некоторого $\Phi_{\lambda_0'}$, лежат в O. Но тогда множества $C_{i\lambda_0'} = C_i \cap \Phi_{\lambda_0'}$ являются перегородками в $\Phi_{\lambda_0'}$ между множествами $A_i \cap \Phi_{\lambda_0'}$ и $B_i \cap \Phi_{\lambda_0'}$ с пустым пересечением:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{i\lambda_0'} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} (C_i \cap O) \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) \cap O = \Psi \cap (X \setminus \Psi) = \Lambda.$$

Полученное противоречие индуктивному предположению показывает, что множество Φ_λ удовлетворяет условию (б).

Итак, процесс получения бикомпактов Φ_λ может прерваться лишь при переходе от некоторого порядкового числа λ_0 к числу $\lambda_0 + 1$, причем в этом случае бикомпакт Φ_{λ_0} является искомым. Но процесс должен прерваться при некотором $\lambda < \omega_\tau$, где ω_τ — наименьшее порядковое число, мощность которого больше мощности множества X. Лемма доказана.

Доказана также и теорема 32.

Приложение

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БОЛЬШОЙ ИНДУКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ. ТЕОРЕМЫ ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ БИКОМПАКТЕ И БИКОМПАКТНОМ РАСШИРЕНИИ ДАННОГО ВЕСА И ДАННОЙ БОЛЬШОЙ ИНДУКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Будут доказаны следующие аналоги соответствующих теорем для размерности $\dim X$ (гл. 5, § 4):

Теорема 1 (Пасынков [17]). *Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и любой мощности τ существует бикомпакт $\Psi^{n\tau}$ веса $w\Psi^{n\tau} = \tau$ и размерности $\operatorname{Ind} \Psi^{n\tau} = n$, содержащий топологический образ любого вполне регулярного пространства X веса $wX \leqslant \tau$, удовлетворяющего соотношению $\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n$. В частности, $\Psi^{n\tau}$ содержит топологический образ любого нормального пространства X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности $\operatorname{Ind} X \leqslant n$.*

Теорема 2 (Пасынков [17]). *Если максимальное бикомпактное расширение βX вполне регулярного пространства X удовлетворяет соотношению*

$$\operatorname{Ind} \beta X \leqslant n,$$

то существует такое бикомпактное расширение bX пространства X, для которого

$$wbX = wX, \quad \operatorname{Ind} bX \leqslant n.$$

*В частности, для нормального пространства X веса $wX = \tau$ и размерности $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ существует бикомпактное расширение bX веса $wbX = \tau$ и размерности $\operatorname{Ind} bX \leqslant n$**).

Так как для бикомпактов $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$ и для n-мерных кубов Q^n имеем $\dim Q^n = \operatorname{Ind} Q^n = n$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Бикомпакт $\Psi^{n\tau}$ является универсальным в классе бикомпактов X веса $wX \leqslant \tau$ и размерности*

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = n.$$

---

*) Можно показать, что теорема 2 справедлива и для трансфинитных значений $\operatorname{Ind} \beta X$.

Так как размерность $\dim X$ монотонна по сильно паракомпактным подпространствам (см. гл. 4, § 8, п. 4), то из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если для сильно паракомпактного пространства X справедливо равенство*

$$\dim X = \operatorname{Ind} X = n,$$

то существует бикомпактное расширение bX пространства X, удовлетворяющее равенствам

$$wbX = wX \quad \text{и} \quad \dim bX = \operatorname{ind} bX = \operatorname{Ind} bX = n.$$

В гл. 6 показано, что $\dim X = \operatorname{Ind} X$ для любого метрического пространства. Поэтому из следствия 2 можно вывести

Следствие 3. *Для сильно паракомпактного метрического пространства X существует такое бикомпактное расширение bX, что*

$$wbX = wX \quad \text{и} \quad \dim bX = \operatorname{ind} bX = \operatorname{Ind} bX = \dim X.$$

Сформулированные теоремы 1 и 2 вытекают из следующей факторизационной теоремы для большой индуктивной размерности:

Теорема 3 (Пасынков [17]). *Пусть дано непрерывное отображение $f: X \to Z$ бикомпакта X в бикомпакт Z и в X дано замкнутое подмножество F размерности $\operatorname{Ind} F = \eta$. Тогда существует такой бикомпакт Y и такие непрерывные отображения $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$, что*

(1) $f = hg$;

(2) $wY \leqslant wZ$;

(3) $\operatorname{Ind} fF \leqslant \eta = \operatorname{Ind} F$.

Доказательство теоремы требует некоторых предварительных рассмотрений.

Лемма 1. *Пусть дано непрерывное отображение $f: X \to Z$ нормального пространства X в топологическое пространство Z веса $wZ \leqslant \tau$, $\tau \geqslant \aleph_0$. Пусть еще для замкнутого в X множества F дано такое вполне регулярное пространство Φ веса $\leqslant \tau$ и такие непрерывные отображения $g': F \to \Phi$ и $h': \Phi \to Z$, что g' является отображением «на» и $h'g' = f: F \to Z$. Тогда существует такое вполне регулярное пространство $Y \supseteq \Phi$ веса $\leqslant \tau$ и такие непрерывные отображения $g: X \to Y$ и $h: Y \to Z$, что $f = hg$ и отображение g является продолжением отображения g', а отображение h является продолжением отображения h'.*

Доказательство. По теореме Тихонова пространство Φ можно считать подмножеством тихоновского куба I^τ. Тогда отображение $g': F \to \Phi \subseteq I^\tau$ можно продолжить в непрерывное отображение $g_1: X \to I^\tau$ (см. гл. 1, § 8, предложение 8). Через g

обозначим отображение X в $I^\tau \times Z$, ставящее в соответствие точке $x \in X$ точку $(g_1 x, fx)$. Отображение g непрерывно (см. гл. 1, § 8, предложение 7). Положим $Y = gX$.

Рассмотрим график $\Gamma = \{(t, h't)\colon t \in \Phi\} \subseteq \Phi \times Z \subseteq I^\tau \times Z$ отображения h'. Так как по условию $g'F = \Phi$, то для любой точки $t \in \Phi$ существует хотя бы одна точка $x \in F$ такая, что $g'x = t$. Тогда $(t, h't) = (g'x, h'g'x) = (g_1 x, fx) \in Y$. Следовательно, $\Gamma \subseteq gF \subseteq Y$. Если же $x \in F$, то $(g_1 x, fx) = (g'x, h'g'x) = (t, h't) \in \Gamma$, где $t = g'x \in \Phi$, следовательно,

$$\Gamma = gF.$$

Через p и h обозначим, соответственно, проекции пространства Y в сомножители I^τ и Z произведения $I^\tau \times Z$. Так как отображение $p\colon \Gamma \to \Phi$ является гомеоморфизмом (см. гл. 1, § 8, предложение 1), то график $\Gamma = gF$ можно отождествить с пространством Φ при помощи гомеоморфизма $p\colon \Gamma \to \Phi$. Так как $pg|_F = g_1|_F = g'$, то после отождествления Γ с Φ отображение g' отождествится с отображением $g|_F$ и g будет продолжением g'.

Соотношение $f = hg$ сразу же следует из определения отображения g. Возьмем точку $y = (t, h't) \equiv t \in gF = \Gamma \equiv \Phi$. Тогда $hy = h't$, т. е. при $\Gamma \equiv \Phi$ отображение h является продолжением отображения h'.

Наконец, $wY \leqslant w(I^\tau \times Z) \leqslant \tau$. Лемма доказана.

Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ топологического пространства X в топологическое пространство Z, и пусть в пространстве X фиксированы: дизъюнктная пара замкнутых множеств (A^1, A^2); замкнутое множество F; перегородка Φ в F между множествами $F \cap A^k$, $k = 1, 2$; такие открытые в F множества O^k, $k = 1, 2$, что $O^1 \cap O^2 = \Lambda$, $F \setminus \Phi = O^1 \cup O^2$, $F \cap A^k \subseteq O^k$, $k = 1, 2$. Тройку (Y, g, h), состоящую из пространства Y и непрерывных отображений $g\colon X \to Y$ и $h\colon Y \to Z$, назовем $(F, O^k, A^k, k = 1, 2)$-факторизацией отображения f, если

(а) $f = hg$;

(б) $wY \leqslant wZ$;

(в) $gF \setminus g\Phi = V^1 \cup V^2$, множества V^k, $k = 1, 2$, открыты в $gF \setminus g\Phi$ и $F \cap A_k \subseteq F \cap g^{-1}V^k \subseteq O^k$, $k = 1, 2$.

Лемма 2. *Если X и Z — бикомпакты и $wZ \geqslant \aleph_0$, то $(F, O^k, A^k, k = 1, 2)$-факторизация отображения f существует.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $f\Phi \cap f(A^1 \cup A^2) = \Lambda$. (В противном случае нужно построить непрерывную функцию $f'\colon X \to I = [0, 1]$, равную 0 на Φ и 1 на $A^1 \cup A^2$, а затем вместо отображения f рассмотреть диагональное произведение $f''\colon X \to Z \times I$ отображений f и f'.) Множества $F_k = O^k \cup \Phi$ являются бикомпактами, и $fF = fF_1 \cup fF_2$.

Через Ω обозначим дискретную сумму бикомпактов $\Psi_1 = fF_1$ и $\Psi_2 = fF_2$, а через p — естественное отображение Ω на fF. Через ω обозначим разбиение Ω на двуточечные множества вида $p^{-1}y$, $y \in f\Phi$, и отдельные точки множества $\Omega \setminus p^{-1}f\Phi$. Пространство разбиения ω обозначим через Ψ, а естественное отображение Ω на Ψ обозначим, как и соответствующее разбиение, через ω. Очевидно, существует такое непрерывное отображение h': $\Psi \to fF$, что $p = h'\omega$. Ясно, что пространство Ψ есть бикомпакт веса

$$w\Psi \leqslant wZ.$$

Определим отображение g': $F \to \Psi$, положив $g'x = (h')^{-1} fx \cap \omega\Psi_k$ при $x \in F_k$, $k = 1, 2$. Ясно, что

$$h'g' = f\colon F \to fF.$$

Следовательно (см. предположение в начале доказательства),

$$(*) \qquad g'\Phi \cap g'((A^1 \cup A^2) \cap F) = \Lambda.$$

Очевидно, $g'F_k = \omega\Psi_k$, $k = 1, 2$, поэтому

$$(**) \qquad g'F = \Psi \quad \text{и} \quad g'\Phi = \omega\Psi_1 \cap \omega\Psi_2 = g'F_1 \cap g'F_2.$$

Отображение g' непрерывно, так как оно непрерывно на множествах F_k, $k = 1, 2$ (см. гл. 1, § 1, предложение 10). Множества $V^1 = g'F \setminus g'F_2$ и $V^2 = g'F \setminus g'F_1$ открыты в $g'F$, не пересекаются и (см. соотношение (**))

$$g'F \setminus g'\Phi = g'F \setminus (g'F_1 \cap g'F_2) = V^1 \cup V^2.$$

Из соотношений (*) и (**) следует, что

$$g'(F \cap A^1) \cap g'F_2 \subseteq (g'(F \cap A^1) \cap g'F_1) \cap g'F_2 = g'(F \cap A^1) \cap g'\Phi = \Lambda.$$

Следовательно, $g'(F \cap A^1) \subseteq V^1$ и, аналогично, $g'(F \cap A^2) \subseteq V^2$, откуда

$$F \cap A^k \subseteq F \cap (g')^{-1} V^k, \qquad k = 1, 2.$$

Так как

$$g'F = g'F_1 \cup g'F_2 = g'O^1 \cup g'\Phi \cup g'O^2 = g'O^1 \cup g'F_2,$$

то $V^1 \subseteq g'O^1$ и, аналогично, $V^2 \subseteq g'O^2$, откуда

$$F \cap (g')^{-1} V^k \subseteq O^k, \qquad k = 1, 2.$$

В соответствии с леммой 1 строим вполне регулярное пространство $Y' \supseteq \Psi$ веса $\leqslant \tau$ и непрерывные отображения g: $X \to Y'$ и h: $Y' \to Z$, являющиеся продолжениями отображений g' и h'. Бикомпакт $Y = gX$ и отображения g: $X \to Y$, h: $Y \to Z$ будут, очевидно, искомыми. Лемма доказана.

Система $\mathfrak{A}$ дизъюнктных пар (A^1_α, A^2_α), $\alpha \in \mathfrak{A}$, замкнутых в топологическом пространстве X множеств называется разделяющей, если для любой дизъюнктной пары (A^1, A^2) замкнутых в X множеств найдется такой индекс α, что $A^k \subseteq A^k_\alpha$, $k = 1, 2$.

Лемма 3. *В бикомпакте X бесконечного веса τ существует разделяющая система пар мощности $\leqslant \tau$.*

Сформулированное утверждение, очевидно, совпадает с леммой 2 из § 7 гл. 10.

Лемма 4. *Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde\omega^\beta_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из бикомпактов X_α и в каждом X_α выбрана разделяющая система $\varkappa_\alpha$ пар (A^1_β, A^2_β), $\beta \in \mathfrak{B}_\alpha$. Тогда система пар $(\tilde\omega^{-1}_\alpha A^1_\beta, \tilde\omega^{-1}_\alpha A^2_\beta)$, $\beta \in \mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, будет разделяющей в пределе X спектра S.*

Доказательство. В X рассмотрим дизъюнктную пару замкнутых множеств (A^1, A^2). Существует такой индекс α, что $\tilde\omega_\alpha A^1 \cap \tilde\omega_\alpha A^2 = \Lambda$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 10). Выберем такой индекс $\beta \in \mathfrak{B}_\alpha$, что $\tilde\omega_\alpha A^k \subseteq A^k_\beta$, $k = 1, 2$. Ясно, что $\tilde\omega^{-1}_\alpha A^k_\beta \supseteq A^k$, $k = 1, 2$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть дан обратный спектр $S = \{X_n, \tilde\omega^{n+1}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, из бикомпактов X_n. Пусть в пределе X спектра S даны замкнутые множества Φ, $\Psi \subseteq \Phi$, A^1 и A^2. Если для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ существует такой бикомпакт T_n и такие непрерывные отображения $g_n\colon X_{n+1} \to T_n$ и $h_n\colon T_n \to X_n$, что*

(а) $\tilde\omega^{n+1}_n = h_n g_n$;

(б) $g_n \tilde\omega_{n+1} \Phi \setminus g_n \tilde\omega_{n+1} \Psi = V^1_n \cup V^2_n$ *и множества* V^k_n, $k = 1, 2$, *открыты в* $g_n \tilde\omega_{n+1} F$;

(в) $\left(\Phi \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde\omega^{-1}_{n+1} g^{-1}_n V^1_n\right) \cap \left(\Phi \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde\omega^{-1}_{n+1} g^{-1}_n V^2_n\right) = \Lambda$;

(г) $\Phi \cap A^k \subseteq \tilde\omega^{-1}_{n+1} g^{-1}_n V^k_n$, $\quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$

то множество Ψ является перегородкой в Φ между множествами A^k, $k = 1, 2$ *).

Доказательство. Множества $O^k = \Phi \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde\omega^{-1}_{n+1} g^{-1}_n V^k_n$, $k = 1, 2$, открыты в Φ и, по условию (в), не пересекаются. Из условия (г) следует, что $\Phi \cap A^k \subseteq O^k$. Таким образом, разность $\Phi \setminus (O^1 \cup O^2)$ есть перегородка в Φ между A^1 и A^2. Покажем, что эта разность совпадает с Ψ.

---

*) То есть Ψ есть перегородка в Φ между множествами $A^k \cap \Phi$, $k = 1, 2$.

Пусть $x \in \Phi \setminus \Psi$. Тогда существует номер n такой, что $\mathfrak{O}_n x \notin \mathfrak{O}_n \Psi$ (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 10). Из условий (а) и (б) следует что $g_n \mathfrak{O}_{n+1} x \in V_n^1 \cup V_n^2$, откуда $x \in \in O^1 \cup O^2$. Лемма доказана.

1. Пусть дано топологическое пространство X, его замкнутое подмножество F и непустая система $\varkappa$ дизъюнктных пар замкнутых в X множеств (A_α^1, A_α^2), $\alpha \in \mathfrak{A}$. Через $\psi = \psi(\varkappa, F)$ будем обозначать любую такую систему замкнутых в X множеств $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \equiv F_{\varkappa\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, s$ *), что

(1) $F_{\alpha_0} \equiv F_\varkappa = F$;

(2) если множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \equiv F_{\varkappa\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ определено и $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \cap A^k_{\alpha_{s+1}} \neq \Lambda$, $k = 1, 2$ **), то множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}} \equiv \equiv F_{\varkappa\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}}$ определено и является перегородкой в $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ между множествами $A^k_{\alpha_{s+1}}$, $k = 1, 2$, размерности

$$\operatorname{Ind} F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}} < \operatorname{Ind} F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s};$$

(3) если множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ не определено или $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \cap \cap A^k_{\alpha_{s+1}} = \Lambda$ хотя бы для одного из $k = 1, 2$, то множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}}$ не определено ***).

Если размерность $\operatorname{Ind} F$ определена, то система $\psi(\varkappa, F)$ легко строится (индукцией по s).

Для системы $\psi = \psi(\varkappa, F)$ через $\lambda = \lambda(\psi)$ обозначим любую такую систему множеств $O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}}$, $k = 1, 2$, открытых в $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ (определенных всякий раз, когда определено множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s\alpha_{s+1}}$), $s = 0, 1, 2, \ldots$, что

(4) $O^1_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} \cap O^2_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} = \Lambda$;

(5) $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \setminus \bigcup\limits_{k=1, 2} O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}} = F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}}$;

(6) $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \cap A^k_{\alpha_{s+1}} \subseteq O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1}}$, $k = 1, 2$.

Для систем ψ и λ через $\psi_{\alpha_1^0}$ и $\lambda_{\alpha_1^0}$, $\alpha_1^0 \in \mathfrak{A}$, будем обозначать их подсистемы $\left\{F_{\alpha_0\alpha_1^0\alpha_2 \ldots \alpha_s}\right\}$, $s \geqslant 1$, и $\left\{O^k_{\alpha_0\alpha_1^0\alpha_2 \ldots \alpha_s}\right\}$, $k = 1, 2$, $s \geqslant 2$, соответственно. Ясно, что

---

*) Индекс α_0 не есть элемент множества $\mathfrak{A}$ и пишется для удобства (заменяя $\varkappa$).

**) Следовательно, $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \neq \Lambda$ и $\operatorname{Ind} F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \geqslant 0$.

***) Таким образом, если множество $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, $s > 0$, определено, то индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ попарно различны.

(7) $\psi_{\alpha_1^0} = \psi\left(F_{\alpha_0\alpha_1^0}, \varkappa\right)$ и $\lambda_{\alpha_1^0} = \lambda\left(\psi_{\alpha_1^0}\right)$.

Пусть система $\varkappa$ является подсистемой системы θ пар (B_β^1, B_β^2), $\beta \in \mathfrak{B}$ (следовательно, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$).

Систему $\psi(F, \theta)$, соответственно $\lambda(\psi(F, \theta))$, будем называть продолжением системы $\psi(F, \varkappa)$, соответственно, $\lambda(\psi(F, \varkappa))$, если

(8) $(F_{\theta\beta_1 \ldots \beta_s} \equiv F_{\beta_0\beta_1 \ldots \beta_s}) = (F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \equiv F_{\varkappa\alpha_1 \ldots \alpha_s})$,

соответственно

(9) $O^k_{\beta_0\beta_1 \ldots \beta_s} = O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, $k = 1, 2$, $s \geqslant 1$,

для любого набора индексов $\beta_i = \alpha_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, s$ (всякий раз, когда хотя бы одно из участвующих в равенстве (8), соответственно (9), множеств определено).

Очевидно, при $\varkappa \subseteq \theta$ любую систему вида $\psi(F, \varkappa)$, соответственно $\lambda(\psi(F, \varkappa))$, можно достроить до продолжения $\psi(F, \theta)$, соответственно $\lambda(\psi(F, \theta))$ (индукцией по s).

2. Пусть дано непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ и в Z дана система $\varkappa$ дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_α^1, A_α^2), $\alpha \in \mathfrak{A}$. Через $f^{-1}\varkappa$ будем обозначать систему пар $(f^{-1}A_\alpha^1, f^{-1}A_\alpha^2)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть для замкнутого в X множества F определена размерность $\operatorname{Ind} F$ и построены системы $\psi = \psi(F, f^{-1}\varkappa) = \{F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}\}$ и $\lambda = \lambda(\psi) = \{O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}, k = 1, 2\}$. Пространство Y веса $wY \leqslant \max(wZ, \text{мощн.}\,\varkappa)$ и непрерывные отображения $g\colon X \to Y$, $h\colon Y \to Z$ назовем (ψ, λ)-факторизацией отображения f, если

(10) $f = hg$

и для каждого множества $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \psi$, $s \geqslant 1$ *), существует такое пространство $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ и такие непрерывные отображения

$$p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\colon Y \to Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \text{ и } h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\colon Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \to Z,$$

что

(11) $h = h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$;

(12) тройка $\left(Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}, p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} g, h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\right)$ есть

$$\left(F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}}, O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}, f^{-1}A^k_{\alpha_s},\right.$$
$$\left. k = 1, 2\right)\text{-факторизация отображения } f.$$

Очевидно (см. (7)), что

(13) для любого $\alpha_1^0 \in \mathfrak{A}$, если множество $F_{\alpha_0\alpha_1^0}$ определено, пространство Y и отображения h и g, являющиеся (ψ, λ)-фак-

*) Если таковое имеется.

торизацией отображения f, будут и $\left(\psi_{\alpha_1^0}, \lambda_{\alpha_1^0}\right)$-факторизацией отображения f.

Покажем, что (ψ, λ)-факторизация отображения f всегда существует.

Если $\psi = \{F_{\alpha_0} \equiv F\}$, то положим $Y \equiv Z$, $g \equiv f$ и пусть h—тождественное отображение пространства Z.

Пусть система ψ состоит не из одного элемента $F_{\alpha_0} \equiv F$.

По лемме 2 для каждого множества $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \psi = \psi(F, f^{-1}\varkappa)$, $s \geqslant 1$, существует $\left(F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}}, O^k_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s}, f^{-1}A^k_{\alpha_s}, \quad k=1, 2\right)$-факторизация отображения f, состоящая из пространства $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ веса $wY_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \leqslant wZ$ и непрерывных отображений

$$g_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\colon X \to Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \quad \text{и} \quad h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\colon Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \to Z.$$

Следовательно,

(14) $f = h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} g_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$.

Через g обозначим диагональное произведение отображений $g_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ и положим

$$Y = gX \subseteq \Pi = \prod_{F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \psi} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}.$$

Через $p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ обозначим проекцию пространства Y в сомножитель $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ произведения Π. Так как

(15) $g_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \cdot g$ для любого $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \psi$,

то (см. (14)) отображение

(11′) $h = h_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \cdot p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}\colon Y \to Z$ не зависит от выбора набора $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ и

(10′) $f = hg$.

Заметим, что мощность $\psi \leqslant$ мощности $\varkappa$ и $wY_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \leqslant wZ$ для любого $F_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \psi$. Поэтому

(16) $wY \leqslant \max(\text{мощн.}\, \varkappa,\ wZ)$.

Существование (ψ, λ)-факторизации (Y, g, h) отображения f установлено.

3. Пусть дан обратный спектр $S = \{Y_n, \mathfrak{S}_n^{n+1}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, из бикомпактов Y_n с непрерывными проекциями. Пусть непрерывные отображения $f_n\colon X \to Y_n$ бикомпакта X удовлетворяют соотношениям

(17) $f_n = \mathfrak{S}_n^{n+1} f_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Следовательно (см. Прибавление к гл. 1, § 1, предложение 5), определено непрерывное отображение $g\colon X \to Y$ бикомпакта X в предел Y спектра S, удовлетворяющее соотношениям

(18) $f_n = \mathfrak{S}_n g$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\mathfrak{S}_n$ — проекция предела Y в элемент Y_n спектра S.

Пусть в каждом Y_n выбрана разделяющая система $\varkappa_n$ пар (A_α^1, A_α^2), $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, и

(19) $\varkappa_{n+1} \supseteq (\mathfrak{S}_n^{n+1})^{-1} \varkappa_n$.

Тогда из соотношений (17) и (19) следует, что

$$f_{n+1}^{-1}\varkappa_{n+1} \supseteq f_n^{-1}\varkappa_n.$$

Пусть в X фиксировано замкнутое множество F размерности $\operatorname{Ind} F = \eta$. Пусть системы

$$\psi_n = \psi(F, f_n^{-1}\varkappa_n) = \{F_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_s}\}$$

и

$$\lambda(\psi_n) = \{O^k_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_s}, k = 1, 2\}, \qquad \alpha_i \in \mathfrak{A}_n, \quad i = 1, \ldots, s,$$

таковы, что

(20) ψ_{n+1} и λ_{n+1} суть продолжения ψ_n и λ_n соответственно, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

пусть еще

(21) тройка $(Y_{n+1}, f_{n+1}, \mathfrak{S}_n^{n+1})$ есть (ψ_n, λ_n)-факторизация отображения f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Тогда

(***) $$\operatorname{Ind} gF \leqslant \eta.$$

Доказательство. Если $\eta = -1$, то $\operatorname{Ind} gF \leqslant -1 = \eta$. Предположим, что утверждение справедливо для всех порядковых чисел $\eta < \xi$, и пусть $\operatorname{Ind} F = \xi$, $\xi \geqslant 0$.

Если множество gF одноточечно, то $\operatorname{Ind} gF = 0 \leqslant \xi$.

Пусть множество gF не одноточечно.

Рассмотрим в gF дизъюнктную пару непустых замкнутых множеств Φ^1 и Φ^2.

По лемме 4 система пар $(\mathfrak{S}_n^{-1}A_\alpha^1, \mathfrak{S}_n^{-1}A_\alpha^2)$, $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, является для Y разделяющей. Поэтому существует такой номер $n = p$ и такой индекс $\alpha^p \in \mathfrak{A}_p$, что $\Phi^k \subseteq \mathfrak{S}_p^{-1} A^k_{\alpha^p}$, $k = 1, 2$.

Множество $F_{\alpha_0\alpha^p}$ из системы ψ_p определено, так как

$$F \cap f_p^{-1} A^k_{\alpha^p} = F \cap g^{-1}\mathfrak{S}_p^{-1} A^k_{\alpha^p} \supseteq F \cap g^{-1}\Phi^k \neq \Lambda, \qquad k = 1, 2.$$

По построению (см. (2))

$$\operatorname{Ind} F_{\alpha_0\alpha^p} = \xi' < \xi = \operatorname{Ind} F.$$

Из (7), (20), (21), (13) и из индуктивного предположения следует неравенство

$$\operatorname{Ind} gF_{\alpha_0\alpha^p} \leqslant \xi' < \xi.$$

Осталось показать, что $gF_{\alpha_0\alpha^p}$ есть перегородка в $gF \equiv gF_{\alpha_0}$ между множествами $\mathfrak{S}_p^{-1}A_{\alpha^p}^k$, $k=1,2$.

Для индекса α^p через α^n, $n>p$, обозначим тот индекс α из $\mathfrak{A}_n$, для которого $A_\alpha^k = \left(\mathfrak{S}_p^n\right)^{-1} A_{\alpha^p}^k$, $k=1, 2$. Существование такого индекса вытекает из условия (19). Из соотношения (20) следует, что

(22) $\left(F_{\alpha_0\alpha^n} \equiv F_{\left(f_n^{-1}x_n\right)\alpha^n}\right) = \left(F_{\alpha_0\alpha^p} \equiv F_{\left(f_p^{-1}x_p\right)\alpha^p}\right)$ и $O_{\alpha_0\alpha^n}^k = O_{\alpha_0\alpha^p}^k$,

$k=1, 2, n \geqslant p$.

Из условия (21) вытекает существование таких пространств T_n и таких непрерывных отображений

$$g_n\colon Y_{n+1} \to T_n, \quad h_n\colon T_n \to Y_n,$$

что

(23) $\mathfrak{S}_n^{n+1} = h_n g_n$, $n \geqslant p$;

(24) $g_n f_{n+1} F \setminus g_n f_{n+1} F_{\alpha_0\alpha^p} = g_n f_{n+1} F_{\alpha_0} \setminus g_n f_{n+1} F_{\alpha_0\alpha^n} = V_n^1 \cup V_n^2$,

множества V_n^1 и V_n^2 открыты в $g_n f_{n+1} F$;

(25) $F \cap f_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k \subseteq O_{\alpha_0\alpha^n}^k = O_{\alpha_0\alpha^p}^k$, $\qquad k=1, 2$;

(26) $F \cap f_p^{-1} A_{\alpha^p}^k = F_{\alpha_0} \cap f_n^{-1} A_{\alpha^n}^k \subseteq f_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k$, $k=1, 2, n \geqslant p$.

Из условий (18) и (24) следует, что множества $\Phi = gF$ и $\Psi = gF_{\alpha_0\alpha^p}$ удовлетворяют условию (б) леммы 5.

Положим

$$U^k \doteq \bigcup_{n \geqslant p} \mathfrak{S}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k, \qquad k=1, 2.$$

Из условий (18) и (25) следует, что

$$F \cap g^{-1}U^k = F \cap \bigcup_{n \geqslant p} g^{-1}\mathfrak{S}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k = F \cap \bigcup_{n \geqslant p} f_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k \subseteq O_{\alpha_0\alpha^p}^k,$$
$$k=1, 2.$$

Так как множества $O_{\alpha_0\alpha^p}^1$ и $O_{\alpha_0\alpha^p}^2$ не пересекаются (см. (4)), то и

$$F \cap g^{-1}(U^1 \cap U^2) = F \cap g^{-1}U^1 \cap g^{-1}U^2 = \Lambda.$$

Но тогда

$$\Phi \cap (U^1 \cap U^2) = g\left(F \cap g^{-1}(U^1 \cap U^2)\right) = \Lambda,$$

т. е. выполнено условие (в) леммы 5.

Наконец, из соотношения (26) вытекает включение

$$\Phi \cap \mathfrak{S}_p^{-1} A_{\alpha^p}^k \subseteq \Phi \cap \mathfrak{S}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k, \qquad k=1, 2, \quad n \geqslant p.$$

В самом деле,

$$\Phi \cap \tilde{\omega}_p^{-1} A_{\alpha^p}^k = gF \cap gg^{-1}\tilde{\omega}_p^{-1} A_{\alpha^p}^k = g\left(F \cap g^{-1}\tilde{\omega}_p^{-1} A_{\alpha^p}^k\right) =$$
$$= g\left(F \cap f_p^{-1} A_{\alpha^p}^k\right) \subseteq g\left(F \cap f_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k\right) = g\left(F \cap g^{-1}\tilde{\omega}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k\right) =$$
$$= gF \cap \tilde{\omega}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k = \Phi \cap \tilde{\omega}_{n+1}^{-1} g_n^{-1} V_n^k.$$

Следовательно, выполнено условие (г) леммы 5.

Так как условие (а) этой леммы также выполнено (см. (23)), то мы доказали, что $gF_{\alpha_0\alpha^p}$ есть перегородка в gF между множествами $\tilde{\omega}_p^{-1} A_{\alpha^p}^k$, $k = 1, 2$. Таким образом, $\operatorname{Ind} gF = \operatorname{Ind} gF_{\alpha_0} \leqslant \xi$. Следовательно, неравенство (***) доказано для любых η.

4. Докажем теорему 3. Положим $Y_1 = Z$ и $f_1 = f$. В Y_1 выберем какую-нибудь разделяющую систему $\varkappa_1$ мощности $\leqslant wY_1 = wZ$ (см. лемму 3). Построим системы

$$\psi_1 = \psi\left(F, f_1^{-1}\varkappa_1\right) \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \lambda(\psi_1).$$

По доказанному в п. 2 существует бикомпакт Y_2 и непрерывные отображения $f_2\colon X \to Y_2$, $\tilde{\omega}_1^2\colon Y_2 \to Y_1$, являющиеся (ψ_1, λ_1)-факторизацией отображения f_1. При этом (см. (16)) $wY_2 \leqslant \max(\text{мощн. } \varkappa_1,\ wY_1) = wY_1$.

В Y_2 выберем разделяющую систему $\varkappa_2$ мощности $\leqslant wY_2$ и содержащую систему $(\tilde{\omega}_1^2)^{-1}\varkappa_1$. В X построим системы $\psi_2 = \psi\left(F, f_2^{-1}\varkappa_2\right)$ и $\lambda_2 = \lambda(\psi_2)$, являющиеся продолжениями систем ψ_1 и λ_1 соответственно.

Аналогичным образом по индукции можно построить обратный спектр $S = \{Y_n, \tilde{\omega}_n^{n+1}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющий условиям (17), (19), (20), (21) и условию

$$wY_n \leqslant wY_1 = wZ, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Если Y — предел спектра S, то предел $g\colon X \to Y$ отображений f_n удовлетворяет соотношениям (18). Следовательно, если проекцию $\tilde{\omega}_1\colon Y \to Y_1$ обозначить через h, то

$$f = f_1 = \tilde{\omega}_1 g = hg.$$

По доказанному в п. 3

$$\operatorname{Ind} gF \leqslant \operatorname{Ind} F.$$

Кроме того,

$$wY \leqslant w \prod_{n=1}^{\infty} Y_n \leqslant wZ.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теорем 1 и 2 полностью повторяет доказательство теорем 6 и 7 из § 4 гл. 5.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С.

[1] Sur les espaces de la première classe et les espaces abstraits, C. r. Acad. Sci. Paris 178 (1924), 185—187.

[2] Ueber die Metrisation der im Kleinen kompakten Räume, Math. Ann. 92 (1924), 294—301.

[3] Ueber stetige Abbildungen kompakter Räume, Proc. Koninkl. Acad. Amsterdam 28 (1925), 997—999; Math. Ann. 96 (1927), 555—571.

[4] Zur Begründung der n-dimensionale mengentheoretischen Topologie, Math. Ann. 94 (1925), 296—308.

[5] Sur la dimension des ensembles fermés, C. r. Acad. Sci. Paris 183 (1926), 640—643.

[6] Sur les multiplicités cantoriennes et le théorème de Phragmén — Brouwer géneralisé, там же, 722—724.

[7] Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque, там же 184 (1927), 317—319.

[8] Zum allgemeine Dimensionsproblem, Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen, 1928, 25—44.

[9] Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, Ann. Math. 30 (1928—1929), 101—187.

[10] Analyse géométrique de la dimension des ensembles fermé, C. r. Acad. Sci. Paris 190 (1930), 475—477.

[11] Sur la théorie de la dimension, там же, 1102—1104.

[12] Dimensionstheorie, Math. Ann. 106 (1932), 161—238.

[13] Ueber die Urysohnschen Konstanten, Fundam. Math. 20 (1933), 140—150.

[14] Sur les suites des espaces topologiques, C. r. Acad. Sci. Paris 200 (1935), 1708—1711.

[15] К теории топологических пространств, ДАН СССР 2 (1936), 51—54.

[16] О счетнократных открытых отображеииях, там же 4, № 7 (1936), 283—286.

[17] О размерности бикомпактиых пространств, там же 26 (1940), 627—630.

[18] Теорема сложения в теории размерности бикомпактных пространств, Сообщ. Груз. филиала АН СССР 2 (1941), 1—6.

[19] О понятии пространства в топологии, УМН 2, № 1 (1947), 5—57.

[20] On the dimension of normal spaces, Proc. Roy. Soc. London, A, 189 (1947), 11—39.

[21] Комбинаторная топология, Гостехиздат, 1947.

[22] Предисловие к книге Гуревича и Волмэна «Теория размерности», ИЛ, 1948.

[23] Введение в общую теорию множеств и фуикций, Гостехиздат, 1948.

[24] О некоторых старых задачах гомологической теории размерности, Труды международного симпозиума по топологии и ее применениям, Херцег-Нови (Югославия), 1968, 38—42.

Александров П. С. и Пономарев В. И.

[1] О некоторых классах n-мерных пространств, Сиб. матем. ж. 1, № 1 (1960), 3—13.

Александров П. С. и Урысон П. С.
[1] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D), C. r. Acad. Sci. Paris **177** (1923), 1274—1276.
[2] Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verh. Koninkl. Akad. Wetensh. Amsterdam **14** (1929), 1—96. [Русский перевод: Александров П. С. и Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, «Наука», 1971.]
Александров П. С. и Хопф Х. (Alexandroff P., Hopf H.)
[1] Topologie, I, Berlin, Springer, 1935.
Архангельский А. В.
[1] Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах, ДАН СССР **126**, № 2 (1959), 239—241.
[2] О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова, Матем. сб. **69**, № 1 (1966), 13—34.
[3] О факторизации отображений по весу и размерности, ДАН СССР **174**, № 6 (1967), 1243—1246.
Бинг (Bing R. H.)
[1] Metrisation of topological spaces, Canad. Math. J. **3** (1951), 175—186.
Борсук (Borsuk K.)
[1] Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume, Math. Ann. **106** (1932), 239—248.
[2] Sur le prolongement des transformations continues, Fundam. Math. **28** (1937), 99—110.
Брауэр (Brouwer L. E. J.)
[1] Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann. **70** (1911), 161—165.
[2] Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, там же **71** (1912), 97.
[3] Sur la notion de classe de transformations d'une multiplicité, Proc. Intern. Congress of Math., Cambridge, 1912, 2—9.
[4] Über den natürlichen Dimensionsbegriff, J. reine angew. Math. **142** (1913), 146—152.
Вайнштейн И. А.
[1] О замкнутых отображениях, Уч. зап. МГУ **155**, матем. № 5 (1952), 3—53.
[2] Об одномерных отображениях, ДАН СССР **83**, № 2 (1952), 175—178.
Веденисов Н. Б.
[1] Замечания о размерности топологических пространств, Уч. зап. МГУ, сер. матем. **30** (1939), 131—140.
[2] О размерности в смысле Чеха, ИАН СССР, сер. матем. **5** (1941), 211—216.
Витушкин А. Г.
[1] Замечания к данному К. Ситниковым решению одной задачи Урысона, ДАН СССР **100** (1955), 5—8.
Волмэн (Wallman H.)
[1] Lattices and topological spaces, Ann. Math. **39** (1938), 112—126.
Вопенка (Vopěnka P.)
[1] О размерности компактных пространств, Czechoslov. Math. J. **8**, № 3 (1958), 319—327.
[2] Замечание о размерности метрических пространств, там же **9**, № 4 (1959), 519—522.
Гуревич (Hurewicz W.)
[1] Über das Verhältniss separabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Koninkl. Akad. Amsterdam, Ser. **A**, **30**, № 1 (1927), 425—430.
[2] Normalbereiche und Dimensionstheorie, Math. Ann. **96** (1927).
[3] Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen, J. reine angew. Math. **169** (1932), 71—78.
[4] Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **34** (1933), 754—765.

[5] Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre, Fundam. Math. **24** (1935), 144—150.
Гуревич и Волмэн (Hurewicz W., Wallman H.)
[1] Теория размерности, ИЛ, 1948.
Даукер (Dowker C. H.)
[1] An imbedding theorem for paracompact metric spaces, Duke Math. J. **14**, № 3 (1947), 639—645.
[2] Mapping theorem for non-compact spaces, Amer. J. Math. **69**, № 2 (1947), 200—242.
[3] An extension of Alexandroff's mapping theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, № 4 (1948), 386—391.
[4] On countably paracompact spaces, Canad. J. Math. **3**, № 2 (1951), 219—224.
[5] Inductive dimension of completely normal spaces, Quart. J. Math., ser. 2, **4**, № 16 (1953), 267—281.
[6] Local dimension of normal spaces, там же **6**, № 22 (1955), 101—120.
Даукер и Гуревич (Dowker C. H., Hurewicz W.)
[1] Dimension of metric spaces, Fundam. Math. **43** (1956), 83—88.
Дьедонне (Dieudonné J.)
[1] Une généralisation des espaces compacts, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 65—76.
Зайцев В. И.
[1] К теории тихоновских пространств, Вести. МГУ, сер. матем. 3 (1967), 48—57.
[2] Проекционные спектры, Тр. Моск. матем. о-ва **27** (1972), 129—193.
Зарелуа А. В.
[1] О теореме Гуревича, Матем. сб. **60**, № 1 (1963), 18—28.
[2] О равенстве размерностей, там же **62**, № 3 (1963), 295—319.
[3] О продолжении отображений на расширения, обладающие некоторыми специальными свойствами, Сиб. матем. ж. **5**, № 3 (1964), 532—548.
[4] Универсальный бикомпакт данного веса и данной размерности, ДАН СССР **154**, № 5 (1964).
[5] Конечнократные отображения топологических пространств и когомологических многообразий, Сиб. матем. ж. **10**, № 1 (1969), 64—92.
Катетов (Katětov M.)
[1] A theorem on the Lebesgue dimension, Časopis pro pěst. mat. fys. **75**, № 2 (1950), 79—87.
[2] О размерности метрических пространств, ДАН СССР **79**, № 2 (1951), 189—191.
[3] О размерности несепарабельных пространств, I, Чехослов. матем. ж. **2**, № 4 (1952), 333—368.
[4] О соотношении между метрической и топологической размерностью, Czechoslov. Math. J. **8**, № 2 (1958), 163—166.
Келдыш Л. В.
[1] Монотонное отображение куба на куб большей размерности, Матем. сб. **41**, № 2 (1957), 129—158.
[2] Преобразование монотонно-неприводимого отображения в монотонно-открытое и монотонно-открытые отображения куба, повышающие размерность, там же **43**, № 2 (1957), 187—226.
[3] Нульмерные открытые отображения, ИАН СССР, сер. матем. **23** (1959), 165—184.
Кнастер и Куратовский (Knaster B., Kuratowski K.)
[1] Sur les ensembles convexes, Fundam. Math. **2** (1921), 206—256.
Кнастер, Куратовский и Мазуркевич (Knaster B., Kuratowski K., Mazurkiewicz S.)
[1] Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fundam. Math. **14** (1929), 132—137.

Колмогоров А. Н.
[1] Über offene Abbildungen, Ann. Math. 38, № 1 (1937), 36—38.
[2] Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов, ДАН СССР 30, № 6 (1941), 477—479.
Куратовский (Kuratowski K.)
[1] Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs, Fundam. Math. 3 (1922), 182—199.
[2] Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension, там же 18 (1931), 285—292.
[3] Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles, там же 20 (1933), 191—196.
[4] Ann. Soc. Pol. Math. 16 (1937), 220.
[5] Sur les théorèmes du «plongement» dans la théorie de la dimension, Fundam. Math. 28 (1937), 336—342.
[6] Топология, т. 1, «Мир», 1966, т. 2, «Мир», 1969.
Курош А. Г.
[1] Kombinatorischer Aufbau der bikompacten topologischen Räumen, Compositio Math. 2 (1935), 471—476.
Лебег (Lebesgue H.)
[1] Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant à deux espaces de n et $n+p$ dimensions, Math. Ann. 70 (1911), 166—168.
[2] Sur les correspondances entre les points de deux espaces, Fundam. Math. 2 (1921), 256—285.
Левшенко Б. Т.
[1] О сильно-бесконечномерных пространствах, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5 (1959), 219—228.
[2] О бесконечномерных пространствах, ДАН СССР 139, № 2 (1961), 286—289.
[3] Пространства трансфинитной размерности, Матем. сб. 67, № 2 (1965), 255—266.
Лефшец (Lefschetz S.)
[1] Алгебраическая топология, ИЛ, 1949.
Лифанов И. К., Пасынков Б. А.
[1] О двух классах пространств и размерности, Вестн. МГУ, сер. матем., № 3 (1970), 33—37.
Локуциевский О. В.
[1] О размерности бикомпактов, ДАН СССР 67, № 2 (1949), 217—219.
[2] Пример открытого отображения одномерного компакта на гильбертов параллелепипед, Уч. зап. МГУ 165, матем. № 7 (1954), 118—130.
Лунц А. Л.
[1] Бикомпакт, индуктивная размерность которого больше, чем размерность, определенная с помощью покрытий, ДАН СССР 66, № 5 (1949), 801—803.
Майкл (Michael E.)
[1] A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831—838.
Мардешич (Mardešić S.)
[1] On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Ill. J. Math. 4, № 2 (1960), 278—291.
Менгер (Menger K.)
[1] Über die Dimensionalität von Punktmengen, I, Monatsh. Math. Phys. 23 (1923), 148—160.
[2] Über unfassendste n-dimensionale Mengen, Proc. Koninkl. Akad. Amsterdam 29 (1926), 1125.
[3] Dimensionstheorie, Berlin — Leipzig, B. G. Teubner, 1928.
Морита (Morita K.)
[1] On the dimension of normal spaces, I, Japanese J. Math. 20 (1950), 5—36.

[2] On the dimension of normal spaces, II, J. Math. Soc. Japan 2, № 1—2 (1950), 16—33.
[3] On the dimension of product spaces, Amer. J. Math. 75, № 2 (1953), 205—223.
[4] Normal families and dimension theory in metric spaces, Math. Ann. **128**, № 4 (1954), 350—362.
[5] A condition for the metrizability of topological spaces and for n-dimensionality, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daiyaku, Sec. A, **5** (1955), 33—36.
[6] On closed mappings and dimension, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 161—165.

Нагами (Nagami K.)
[1] On the dimension of paracompact Hausdorff spaces, Nagoya Math. J. **8** (1955), 69—70.
[2] Closed images of countable-dimensional spaces, J. Math. Soc. Japan **19**, № 4 (1967), 457—459.
[3] Mappings defined on 0-dimensional spaces and dimension theory, там же **14**, № 1 (1962), 101—118.

Нагата (Nagata J.)
[1] On a necessary and sufficient condition of metrisability, J. Inst. Polytechn., Osaca City University **1** (1950), 93—100.
[2] Note on dimension theory for metric spaces, Fundam. Math. **45**, № 2 (1958), 143—181.
[3] On the countable sum of zero-dimensional metric spaces, там же **48**, № 1 (1959), 1—14.
[4] On universal n-dimensional set for metric spaces, J. reine angew. Math. **204**, № 1—4 (1960), 132—138.
[5] A remark on general imbedding theorems in dimension theory, Proc. Japan Acad. **39**, № 4 (1963), 197—199.
[6] Modern dimension theory, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1965.

Натансон И. П.
[1] Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.

Нёбелинг (Nöbeling G.)
[1] Über eine n-dimensionale Universalmenge im R^{2n+1}, Math. Ann. **104** (1930), 71—80.

Немыцкий В. В., Тихонов А. Н.
[1] Beweis des Satzes, dass ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompact ist, wenn er in jeder Metrik vollständig ist, Fundam. Math. **12** (1928), 118—120.

Остранд (Ostrand P. A.)
[1] Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 619—622.

Отто и Эйленберг (Otto E., Eilenberg S.)
[1] Quelques propriétés caractéristiques de la dimension, Fundam. Math. **31** (1938), 149—153.

Пасынков Б. А.
[1] О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности бикомпактных групп, ДАН СССР **121**, № 1 (1958), 45—48.
[2] О совпадении различных определений размерности для локально бикомпактных групп, там же **132**, № 5 (1960), 1035—1037.
[3] Об обратных спектрах и размерности, там же **138**, № 5 (1961), 1013—1015.
[4] О совпадении различных определений размерности для фактор-пространств локально бикомпактных групп, УМН **17**, № 5 (1962), 129—135.
[5] О спектрах и размерности топологических пространств, Матем. сб. **57**, № 4 (1962), 449—476.

[6] Об ω-отображениях и обратных спектрах, ДАН СССР **150**, № 3 (1963), 488—491.
[7] Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность, УМН **18**, № 5 (1963), 183—190.
[8] Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств, Сиб. матем. ж. **5**, № 2 (1964), 356—376.
[9] Об универсальных бикомпактах данного веса и данной размерности, ДАН СССР **154**, № 5 (1964), 1042—1043.
[10] Частичные топологические произведения, Тр. Моск. матем. о-ва **13** (1965), 136—245.
[11] О спектральной разложимости топологических пространств, Матем. сб. **66**, № 1 (1965), 35—79.
[12] О формуле В. Гуревича, Вестн. МГУ, сер. матем., № 4 (1965), 3—5.
[13] Почти метризуемые топологические группы, ДАН СССР **161**, № 2 (1965), 281—284.
[14] Об универсальных бикомпактных и метрических пространствах данной размерности, Fundam. Math. **60** (1967), 285—308.
[15] Об открытых отображениях, ДАН СССР **175**, № 2 (1967), 292—295.
[16] Факторизация отображений на метрические пространства, там же **182**, № 2 (1968), 268—271.
[17] О размерности нормальных пространств, там же **201**, № 5 (1971), 1049—1052.
[18] Факторизационная теорема для незамкнутых множеств, там же **202**, № 6 (1972), 1274—1276.
[19] О размерности произведений нормальных пространств, там же **209**, № 4 (1973), 792—794.

Пономарев В. И.
[1] Новое пространство замкнутых множеств и непрерывные многозначные отображения бикомпактов, Матем. сб. **48** (1959), 191—212.
[2] Аксиомы счетности и непрерывные отображения, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. **8**, № 3 (1960), 127—133.
[3] Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения, Матем. сб. **60**, № 1 (1963), 89—119.

Понтрягин Л. С.
[1] Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension, C. r. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 1105—1107.
[2] Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, 1947.

Понтрягин Л. С., Толстова Г. В.
[1] Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, Math. Ann. **105** (1931), 734—747.

Проскуряков И. В.
[1] К теории размерности топологических пространств, Уч. зап. МГУ **148**, матем. № 4 (1951), 219—223.

Пуанкаре (Poincaré H.)
[1] Pourquoi l'espace a trois dimensions, Revue de Métaphysique et de Morale **20** (1912), 484 (перепечатано: Dernières pensees, Paris, 1926, стр. 65).

Рой (Roy P.)
[1] Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **134**, № 1 (1968), 117—132.

Ситников К. А.
[1] О некоторых метрических свойствах замкнутых множеств, ДАН СССР **67** (1949), 229—232.
[2] Пример двумерного множества в трехмерном пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, там же **88** (1953), 21—24.
[3] Пример двумерного множества в трехмерном пространстве, не разрезающего никакой области этого пространства, там же **94** (1954), 1007—1010.

[4] Комбинаторная топология незамкнутых множеств, II, Размерность, Матем. сб. **37** (1955), 385—434.

Скляренко Е. Г.

[1] О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности, ДАН СССР **123**, № 1 (1958), 36—39.

[2] Несколько замечаний о бесконечномерных пространствах, там же **126**, № 6 (1959), 1203—1206.

[3] О размерностных свойствах бесконечномерных пространств, ИАН СССР, сер. матем. **23** (1959), 197—212.

[4] Две теоремы о бесконечномерных пространствах, ДАН СССР **143**, № 5 (1962), 1053—1056.

[5] Теорема об отображениях, понижающих размерность, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math. **10**, № 8 (1962), 429—432.

[6] О топологическом строении локально бикомпактных групп и их факторпространств, Матем. сб. **60**, № 1 (1963), 64—88.

Смирнов Ю. М.

[1] О метризации топологических пространств, УМН **6**, № 6 (1951), 100—111.

[2] Некоторые соотношения в теории размерности, Матем. сб. **29** (1951), 157—172.

[3] О нормально расположенных множествах нормальных пространств, там же, 173—176.

[4] О метрической размерности в смысле П. С. Александрова, ИАН СССР, сер. матем. **20**, № 5 (1956), 679—684.

[5] Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств, там же **23** (1959), 185—196.

[6] О трансфинитной размерности, Матем. сб. **58**, № 4 (1962), 415—422.

Стинрод (Steenrod N. E.)

[1] Universal Homology Groups, Amer. J. Math. **48** (1936), 661—701.

Стоун А. (Stone A. H.)

[1] Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977—982.

Стоун М. (Stone M. H.)

[1] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375—481.

Тихонов А. Н.

[1] Ueber einen Metrisationssatz von P. Urysohn, Math. Ann. **95** (1925), 139—142.

[2] Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1930), 544—561.

Тулмин (Toulmin C. H.)

[1] Shuffling ordinals and transfinite dimension, Proc. London Math. Soc. **4**, № 4 (1954), 177—196.

Тумаркин Л. А.

[1] Zur allgemeinen Dimensionstheorie, Proc. Koninkl. Akad. Amsterdam **28**, № 10 (1925).

[2] Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie, Матем. сб. **33** (1926), 57—86.

[3] Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, Math. Ann. **98** (1928), 637—656.

[4] Sur la strukture dimensionelle des ensembles fermés, C. r. Acad. Sci. Paris **186** (1929), 420—422.

Уоллес (Wallace A. D.)

[1] Dimensional types, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 679—681.

Урысон П. С.

[1] Les multiplicités cantoriennes, C. r. Acad. Sci. Paris **175** (1922), 440—442.

[2] Zum Metrisationsproblem, Math. Ann. **94** (1925), 309—315.

[3] Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, там же, 262—295.

[4] Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, Fundam. Math. 7 (1925), 30—139; 8 (1926), 225—359.
[5] Труды по топологии и другим областям математики, тт. 1 и 2, Гостехиздат, 1951.

Федорчук В. В.
[1] Об ω-отображениях паракомпактных пространств, Вестн. МГУ, сер. матем. 2 (1963), 20—24.
[2] О бикомпактах с несовпадающими размерностями, ДАН СССР 182, № 2 (1968), 275—277.
[3] Об отображениях, не понижающих размерность, там же 185, № 1 (1969), 54—57.
[4] Пример однородного бикомпакта с несовпадающими размерностями, там же 198, № 6 (1971), 1283—1286.

Филиппов В. В.
[1] Бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями, ДАН СССР 184, № 5 (1969), 1050—1053.
[2] О бикомпактах с несовпадающими индуктивными размерностями, там же 192, № 2 (1970), 284—292.
[3] О размерности замкнутых отображений, там же 205, № 1 (1972), 40—43.
[4] О размерности нормальных пространств, там же 209, № 4 (1973), 805—807.

Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1] Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Compositio Math. 4 (1937), 154—234.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
[1] Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.
[2] Теория множеств, ОНТИ, 1934.

Хеммингсен (Hemmingsen E.)
[1] Some theorems on dimension theory for normal Hausdorff spaces, Duke Math. J. 13 (1946), 495—504.

Хендерсон (Henderson D. W.)
[1] An infinite-dimensional compactum with no positive-dimensional compact subsets — a simpler construction, Amer. J. Math. 89, № 1 (1967), 105—121.
[2] Each strongly infinite-dimensional compactum contains a hereditarily infinite-dimensional compact subset, Amer. J. Math. 89, № 1 (1967), 122—123.

Чех (Čech E.)
[1] Sur la dimension des espaces parfaitement normaux, Bull. Int. Acad. Sci. de Bohême 33 (1932), 38—55.
[2] Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, Fundam. Math. 19 (1932), 149—183.
[3] Příspěvek k theorii dimense, Čas. pro pěst. mat. fys. 62 (1933), 277—292.
[4] On bicompact spaces, Ann. Math. 38 (1937), 823—844.

Чогошвили Г. С.
[1] On a theorem in theory of dimensionality, Compositio Math. 5 (1937), 292—298.

Шпернер (Sperner E.)
[1] Abh. Math. Seminar Hamburg 6 (1928), 265—272.

Щепин Е.
[1] Аксиоматика размерности метрических пространств, ДАН СССР 206, № 1 (1972), 31—32.

Энгелькинг (Engelking R.)
[1] Outline of general topology, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, PWN — Polish Sci. Publ., 1968.

Эрдёш (Erdös P.)
[1] The dimension of the rational points in Hilbert space, Ann. Math. 41 (1940), 734—736.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Павел Сергеевич Александров,
Борис Алексеевич Пасынков

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАЗМЕРНОСТИ

М., 1973 г., 576 стр. с илл.

Редакторы *В. В. Федорчук, В. В. Донченко.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Н. Б. Румянцева.*

Сдано в набор 17/I 1973 г. Подписано к печати 28/VI 1973 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$, тип. № 1. Физ. печ. л. 36. Условн. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 37,34. Тираж 7700 экз. Т-11109. Цена книги 2 р. 59 к. Заказ № 483

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29