Университетский учебник

А. Б. Петровский

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Прикладная математика и информатика

ACADEMA

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

СЕРИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

А. Б. ПЕТРОВСКИЙ

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Автоматизированные системы обработки информации и управления»
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2009

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73
П308

Рецензенты:
д-р техн. наук *Ф.Т.Алескеров* (зав. кафедрой Государственного университета — Высшей школы экономики);
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Д.Ногин* (Санкт-Петербургский государственный университет)

Петровский А. Б.
П308 Теория принятия решений : учебник для студ. высш. учеб. заведений / А. Б. Петровский. — М. : Издательский центр «Академия», 2009. — 400 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
ISBN 978-5-7695-5093-5

В учебнике представлены основные методологические подходы, сложившиеся в теории выбора и принятия решений как научной дисциплине; рассмотрен понятийный аппарат теории принятия решений; приведены наиболее важные методы оптимального и рационального индивидуального выбора, коллективного принятия решений. Особое внимание уделено современным методам многокритериального выбора. Большое число примеров, близких к практическим задачам принятия решения, поясняют теоретические положения.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть полезен аспирантам университетов и вузов, а также преподавателям и научным работникам.

УДК 519.816(075.8)
ББК 22.18я73

Моим школьным учителям
и университетским преподавателям

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый человек в жизни сталкивается с необходимостью принятия важных и не очень важных решений. Но не всякий задумывается, как сделать свой индивидуальный выбор наилучшим образом, получить наибольшую пользу и уменьшить возможные негативные последствия от реализованного решения.

В современных условиях резко повысилась цена, которую приходится платить обществу за недостаточно обоснованные экономические или социальные решения. Одновременно увеличилась и мера ответственности руководителей, принимающих решение. Как никогда ранее, усилилась взаимная зависимость всех лиц, участвующих в подготовке и принятии решения. Каждый руководитель, решая конкретные вопросы на своем уровне управления, должен увязывать интересы разных сторон, учитывать сложившиеся связи и последствия их нарушения.

Возрастающие требования к качеству управления в разных сферах человеческой деятельности диктуют необходимость выполнения специальной аналитической работы при формировании и принятии решения. Современный руководитель должен принимать решение не интуитивно, а используя соответствующий инструментарий для поиска лучшего варианта и обоснования сделанного выбора.

Для подготовки решения привлекаются специалисты-эксперты, консультанты, системные аналитики, а в сложных и уникальных ситуациях выбора их участие обязательно. Основная задача экспертов состоит в разработке альтернативных вариантов, выявлении достоинств и недостатков каждого из них, оценке последствий выбора того или иного варианта. Для эффективного выполнения своих функций эти специалисты должны обладать знаниями о существующих методах и средствах поддержки принятия решений, а также умением применять такой инструментарий на практике.

Теория принятия решений — комплексная научная дисциплина, направленная на разработку методов и средств, помогающих одному или нескольким лицам сделать обоснованный выбор наилучшего из имеющихся вариантов. В учебнике с единой точки зрения изложены основные методологические подходы, сложившиеся в теории выбора и принятия решений. Рассмотрен понятийный аппарат теории принятия решений. Представлены наиболее важные методы оптимального и рационального индивидуального выбора, коллективного принятия решений в различных условиях. Приведено много примеров, близких к практическим задачам принятия решений, которые иллюстрируют и поясняют теоретические положения. Автор сознательно стремился уделять больше внимания содержательным аспектам, избегая детализации математического аппарата, строгих формулировок и доказательств теорем, которые можно найти в литературе.

Книга состоит из четырех частей и приложения.

В части I приведены основные понятия теории принятия решений, даны формулировка задачи принятия решения и их классификация, раскрыто понятие предпочтения лица, принимающего решение, рассмотрены способы оценки, сравнения и выбора вариантов.

Часть II посвящена задачам и методам оптимального индивидуального выбора в условиях определенности, неопределенности и нечеткости. Рассмотрены методы решения задач с одним и многими критериями оптимальности, человеко-машинные итеративные методы многокритериальной оптимизации. Изложены методы многоэтапного оптимального выбора и динамического управления при полной, неполной и нечеткой информации.

В части III рассмотрены основные группы методов рационального индивидуального выбора, включающие эвристические методы, методы теории полезности, методы аналитической иерархии и ограниченной пороговой предпочтительности, методы вербального анализа решений и теории функций выбора.

Часть IV содержит описание различных подходов к решению задач коллективного выбора, основанных на механизмах и процедурах голосования, аксиоматических правилах агрегирования предпочтений, многокритериальных методах оптимального и рационального группового выбора.

В приложении приведены вспомогательные данные для задачи группового многокритериального выбора.

В учебнике принята единая нумерация разделов, примеров, формул, рисунков, таблиц, состоящая из двух цифр, первая из которых соответствует номеру главы, вторая — порядковому номеру раздела, примера, формулы, рисунка, таблицы. Окончание примера отмечено знаком ■.

В основу учебника положены курсы лекций, которые автор читал в течение многих лет студентам Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Московского физико-технического института (Государственного университета), Международного университета, Нового гуманитарного университета Наталии Нестеровой.

Слова самого глубокого уважения и признательности автор адресует И. А. Квасникову, одному из лучших преподавателей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, которого автор считает своим наставником и другом, чья научная эрудиция, педагогическое мастерство и широта интересов всегда служили образцом для подражания.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам книги — доктору технических наук, заведующему кафедрой Государственного университета — Высшей школы экономики Ф. Т. Алескерову, доктору физико-математических наук, профессору Санкт-Петербургского государственного университета В. Д. Ногину, а также своему коллеге по работе в Институте системного анализа РАН М. Ю. Стернину, которые взяли на себя нелегкий труд ознакомиться с рукописью и высказали много ценных советов и конструктивных замечаний, способствовавших устранению неточностей и улучшению содержания книги. Автор благодарен доктору физико-математических наук А. В. Лотову, профессору Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, предоставившему конспект своих лекций по многокритериальной оптимизации.

Особая признательность моим коллегам В. И. Вишневской, Л. С. Гнеденко, В. В. Кузнецовой, Н. В. Морозовой, Г. В. Ройзензону, А. В. Рябовой, З. Ф. Филипенковой за помощь в подготовке рукописи к изданию, а также В. М. Афанасьеву, Е. М. Фуремс, Г. И. Шепелеву, моим близким и друзьям за многолетнюю поддержку работы над книгой.

Необходимость выбора развивает человека, обостряет его творческие способности, усиливает ответственность за сделанный выбор. С повышением культуры принятия решений отдельными людьми будут возрастать и общий уровень культуры общества, и его способности предвидеть кризисы в своем развитии, и его возможности преодолевать их. Вместе с тем, по мнению автора, нельзя научить человека принимать правильные решения. Этому можно только научиться.

ЧАСТЬ I
ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ГЛАВА 1
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

1.1. Решение и выбор

Слово «*решение*» имеет в русском языке несколько значений, которые для наших целей важно различать. Во-первых, под решением понимается совокупность рассматриваемых возможностей, которые тем или иным образом выделены человеком, делающим выбор. Во-вторых, решение представляет собой процесс поиска наиболее предпочтительных вариантов, включающий в себя обдумывание, изучение какого-либо вопроса или задачи, нахождение правильного ответа. В-третьих, решением является и сам полученный в ходе поиска ответ, например один или несколько выбранных вариантов, результат анализа некоторой проблемы или математической задачи. Наконец, решениями называют указы, постановления, распоряжения, приказы, акты органов законодательной и исполнительной власти, судебные и иные решения. В других языках для этих понятий используются разные слова. Например, в английском языке в первом случае говорят alternative, decision, во втором — solving, choice, в третьем — solution, resolution, в четвертом — decree, order.

Принятие решений в профессиональном отношении представляет собой особый вид человеческой деятельности, который состоит в обоснованном выборе наилучшего в некотором смысле варианта или нескольких предпочтительных вариантов из имеющихся возможных. По-английски этот термин звучит, как decision making, т. е. буквально означает «делание» или создание решения, что более адекватно смыслу этого словосочетания. Здесь слово «решение» соответствует своему первому и третьему значениям.

Задачи принятия решений часто отождествляются с задачами выбора, являющимися одними из самых распространенных задач, с которыми человек сталкивается в своей деятельности. В повседневной жизни нам постоянно приходится делать выбор того или иного товара, покупаемого в магазине, блюда, заказываемого в кафе или ресторане, маршрута поездки или вида транспорта и т. п. В силу повторяемости, стереотипности ситуаций выбора человек принимает решение, почти не задумываясь, часто интуитивно или по аналогии. Лучший вариант обычно находится без какого-то особого анализа.

В более сложных и соответственно более редких, уникальных ситуациях, например при выборе места отдыха, учебы или работы, покупке квартиры или дорогостоящей вещи (автомобиля, мебели и т. д.), голосовании за того или иного кандидата или партию, человек более тщательно подходит к своему выбору. Прежде чем принять решение, он старается детально рассмотреть, оценить и сопоставить различные варианты, учесть разные точки зрения.

Еще более сложные задачи выбора возникают в профессиональной деятельности каждого руководителя, ученого, конструктора, врача, экономиста, финансиста, бизнесмена, военачальника. Этот список профессий нетрудно продолжить. При принятии политических, экономических, производственных, военных решений требуется учитывать различные и зачастую не совпадающие интересы действующих сторон, нужно отыскивать и анализировать разнообразную информацию. Для сравнения различных вариантов действий приходится проводить всесторонний, иногда достаточно сложный анализ проблемной ситуации, разрабатывать для этого специальные модели, привлекать к выработке вариантов решения специалистов, экспертов, консультантов, аналитиков, использовать средства вычислительной техники, строить компьютерные системы поддержки принятия решений.

Сходного рода проблемы возникают у людей, занятых управлением сложными техническими объектами (энергетическими системами и установками, самолетами, кораблями и т. п.). Но здесь ситуации осложняются еще и тем, что решение требуется принять оперативно, в реальном масштабе времени, практически не имея возможности для детального анализа всех альтернативных вариантов и возникающих последствий их реализации.

Без преувеличения можно сказать, что необходимость обоснования выбора присутствует во всех сферах человеческой деятельности. Обоснованный выбор особенно важен в управлении организационными и техническими системами.

В ситуациях принятия сложных решений всегда существует недостаток информации. Часть нужной информации нередко отсутствует, а имеющаяся информация может быть противоречивой. Опытный руководитель или специалист покрывает неполноту информации своими знаниями, умением и интуицией. Принятие верных решений в сложных ситуациях является своего рода искусством, которым владеют немногие.

Однако одного искусства в принятии решений в современных условиях мало. Возросла динамичность жизни; сократился период времени, в течение которого принятые ранее решения остаются верными; повысилась сложность вариантов принимаемых решений, их взаимозависимость и взаимосвязь; существенно увеличились возможные риски и неопределенность последствий, масштабы и размеры потерь в случае принятия недостаточно обоснованных решений. Как следствие, существенно возросла ответственность человека за принятие наилучшего, «самого правильного» решения, увеличились трудности, связанные с его нахождением, преодолеть которые невозможно без использования всего арсенала средств, накопленных современной теорией принятия решений.

1.2. Теория принятия решений

Изучением того, как человек принимает решения, и созданием методов выбора занимаются многие научные дисциплины, которые возникли и исторически развивались независимо друг от друга. К ним относятся теория принятия решений, системный анализ, исследование операций, теория статистических решений, теория игр, теория оптимального управления, экономическая кибернетика, теория организаций, информатика, искусственный интеллект, когнитивная психология, теория поведения и др. Эти дисциплины с разных точек зрения анализируют механизмы, процессы и правила выбора применительно к объектам различной природы и в различных условиях их существования. Все вместе они образуют многодисциплинарную науку, помогающую человеку сделать обоснованный выбор.

Теория принятия решений как самостоятельное научное направление стала складываться в середине XX в. в рамках методологии системного анализа, хотя самые первые работы по исследованию голосования как способа коллективного выбора появились еще в конце XVII в. Основное назначение теории принятия решений состоит в разработке методов и средств, позволяющих одному человеку или группе лиц сформулировать множество возможных вариантов решения проблемы, сравнить их между собой, найти среди них лучшие или допустимые варианты, которые удовлетворяют тем или иным требованиям (ограничениям), и при необходимости объяснить сделанный выбор.

Теория принятия решений может оказать существенную помощь в анализе и решении сложных проблем, но лишь тогда, когда ее методологические и математические средства применяются «правильно», соответственно их возможностям, не преувеличивая и не умаляя их роли в процессе нахождения решения. Поэтому теорию принятия решений правильнее было бы назвать теорией поиска и обоснованного выбора наиболее предпочтительных для человека вариантов решения проблемы.

Существуют две противоположные точки зрения на роль формальных методов при решении практических проблем выбора. Люди, профессионально не владеющие математическими методами, нередко считают, что любая проблема может быть формально переведена на язык математики и потом решена ее средствами. Другие полностью отвергают такие возможности. Действительность же гораздо сложнее этих крайних утверждений.

Любые ситуации, требующие принятия решения, содержат, как правило, большое число неопределенных факторов, которые оказывают влияние как на формальную постановку задачи, так и на средства ее решения. Эти неопределенные факторы можно в самом общем виде разбить на три группы.

Прежде всего это так называемая *неопределенность природы*, т. е. факторы людям попросту неизвестные или от них не зависящие. Затем — *неопределенность человека*, который может вести себя непоследовательно, противоречиво, допускать ошибки, зависеть от других лиц (партнеров, противников и т. д.), чьи действия он не может полностью учесть или предвидеть. И наконец, *неопределенность целей*, которые могут различаться и не совпадать друг с другом. Например, авиаконструкторы, проектируя самолет, должны учитывать его целевое назначение, заданные показатели скорости, грузоподъемности и дальности полета, условия безопасности и комфортности для экипажа и пассажиров, факторы экономичности и технологичности производства и эксплуатации самолета, экологические требования и многие другие обстоятельства.

Ясно, что полностью свести подобные задачи с неопределенностью к корректно поставленным математическим задачам нельзя в принципе. Чтобы сделать возможным их решение, надо как-то ограничить, уменьшить или, как говорят, «снять» неопределенность. Для этого проводится содержательный анализ проблемной ситуации, делаются какие-либо предположения и вводятся упрощения в постановку задачи. И именно средства, входящие в состав тех или иных методов принятия решений, очень часто позволяют получить дополнительную информацию, нужную для формализации реальной проблемной ситуации и приведения ее к виду, пригодному для использования математических методов и получения приемлемого результата.

Говоря о практической применимости методов принятия решений, следует особенно подчеркнуть, что должны существовать как объективные внешние обстоятельства, так и субъективные внутренние условия, которые побуждали бы человека — руководителя, ответственного за решение стоящей проблемы, специалиста, аналитика — искать лучшие варианты ее решения. Без такой потребности спрос на научно обоснованные методы выбора будет невелик.

1.3. Участники процесса решения

Принятие решений, как уже отмечалось, есть особый вид человеческой деятельности, направленный на нахождение наилучших из возможных вариантов. Конечный результат решения проблемы определяется многими участниками, имеющими различные функции. Главное место принадлежит человеку или группе людей, которые фактически осуществляют выбор предпочтительного решения. В теории принятия решений такого человека или группу таких людей называют *лицом, принимающим решение* (ЛПР), или *действующим лицом*, по-английски — *decision maker* (DM), *actor*. Обычно в роли ЛПР выступает руководитель или группа компетентных в своей области специалистов, обладающих соответствующими знаниями и опытом деятельности, наделенных необходимыми полномочиями для принятия решения и несущих ответственность за реализацию принятого решения.

Иногда целесообразно специально выделить *владельца проблемы* (ВП) — человека или группу лиц, имеющих основания и мотивы для постановки проблемы, осознающих необходимость ее решения, инициирующих тем или иным образом принятие и выполнение нужного решения.

В ряде случаев ВП и ЛПР могут быть одним и тем же человеком, но могут быть и разными людьми.

Важную роль в процессе принятия решений, особенно тех из них, которые затрагивают политические, социальные, экономические и другие интересы различных общественных институтов, социальных групп, крупных организаций, играют так называемые *активные группы* (АГ). Эти группы объединяют людей, которые имеют общие интересы по отношению к проблеме, требующей решения, и стремятся оказать влияние на процесс выбора с тем, чтобы добиться нужного им результата. Активные группы — окружение, в котором протекает процесс решения проблемы и действует ЛПР. Обычно владелец проблемы принадлежит к одной из основных активных групп. Очевидно, что интересы разных активных групп могут как совпадать, так и отличаться друг от друга, а также от интересов и ЛПР, и владельца проблемы.

В сложных ситуациях выбора на разных этапах процесса подготовки и принятия решения могут привлекаться *эксперты* (Э) и *консультанты по принятию решений* (К). Эксперты (от лат. *expertus* — опытный) — компетентные специалисты, профессионально разбирающиеся в решаемой проблеме, обладающие необходимой информацией о проблеме и отдельных ее аспектах, но не несущие ответственности за принятое решение и его реализацию. Консультанты по принятию решений оказывают помощь ЛПР и владельцу проблемы в организации процесса ее решения, в правильной постановке задачи принятия решения, обеспечивают сбор необходимой информации, разрабатывают модель проблемы, процедуры и методы принятия решения.

Те или иные участники имеют определяющее значение на разных этапах жизненного цикла процесса решения проблемы.

1.4. Процесс принятия решения

Теория принятия решений применима к объектам различной природы и в различных условиях их существования. Вместе с тем процессы принятия решений в разных сферах человеческой деятельности имеют много общего.

Формальные методы принятия решения могут оказаться полезными в следующих случаях:

- существует некоторая проблема или проблемная ситуация, требующая своего разрешения. Нередко желаемый результат отождествляется с одной или несколькими целями, которые должны быть достигнуты при разрешении проблемной ситуации;

• имеется несколько вариантов решения проблемы, способов достижения цели, действий, объектов, среди которых производится выбор. Эти варианты в теории принятия решений обычно называют *альтернативами.* Если существует одна возможность и выбор отсутствует, то нет и задачи принятия решения;

• присутствуют факторы, накладывающие определенные ограничения на возможные пути решения проблемы, достижения цели. Эти факторы определяются контекстом решаемой проблемы и могут иметь различную природу: физическую, техническую, экономическую, социальную, персональную и иную;

• имеется человек или группа лиц, которые заинтересованы в разрешении проблемы, имеют полномочия для выбора того или иного варианта решения и несут ответственность за выполнение принятого решения.

Приведем типовую схему процесса принятия решения, устанавливающую набор и последовательность этапов при принятии решения, и обозначим основных действующих лиц этого процесса и их роли. Жизненный цикл решения проблемы состоит из нескольких стадий (рис. 1.1) и представляет собой многоэтапную итеративную процедуру.

Необходимость принятия решения возникает при появлении проблемной ситуации (этап 0). В этом случае проводится *выявление проблемы* (этапы 1—3), т. е. дается содержательное описание проблемы, определяется желательный результат ее разрешения, оцениваются имеющиеся ограничения.

На следующей стадии осуществляется *постановка задачи* принятия решения (этапы 4—7). Для этого требуется определить совокупность возможных вариантов решения (альтернатив). В зависимости от рассматриваемой проблемы число возможных вариантов решения может составлять и несколько единиц и достигать десятков, сотен и даже тысяч. Теоретически число рассматриваемых вариантов может быть и бесконечным.

Чтобы полностью описать все возможные варианты решения, обычно приходится собирать и анализировать различную информацию, относящуюся к проблеме и альтернативным способам ее решения. Отсутствие или невозможность получения нужных сведений может сделать проблему неразрешимой. В таких случаях приходится возвращаться к исходной постановке проблемы и изменять ее описание. Подобная необходимость может возникать и на всех предыдущих этапах процесса решения. В сложных ситуациях выбора может потребоваться также разработка специальной модели проблемной ситуации (обычно ма-

Рис. 1.1. Жизненный цикл решения проблемы

тематической), с тем чтобы получить с ее помощью упрощенное модельное решение проблемы.

Вторая стадия завершается формулировкой задачи принятия решения (более подробно она будет рассмотрена в следующем разделе). Следует отметить, что детальное содержательное описание разрешаемой проблемы уже на первом этапе во многом определяет возможные подходы к ее решению и может сразу привести к постановке задачи принятия решения, минуя все или многие из последующих этапов.

Сформулировав задачу принятия решений, переходят к *поиску решения* (этапы 8—10). Эта стадия включает в себя, во-первых, подбор некоторого метода решения задачи из уже известных или разработку нового метода; во-вторых, собственно сам процесс решения, состоящий в оценке и анализе различных вариантов решения и выборе среди них наиболее предпочтительного. В ряде задач получение окончательного результата не представляет больших трудностей. Однако чаще это достаточно сложные и трудоемкие процедуры, требующие привлечения знаний и умения многих людей и возможностей современной вычислительной техники.

Вместе с тем, даже пройдя все этапы процесса решения проблемы, не всегда оказывается возможным сделать окончательный выбор. Встречаются ситуации, когда не удается найти лучшее решение. Нужного варианта может просто не быть в наличии. Тогда можно либо изменить формулировку исходной проблемы (этап 11), либо возвратиться на предыдущие этапы и собрать необходимую дополнительную информацию, внести изменения в формальную постановку задачи или модель проблемной ситуации, расширить или сузить число рассматриваемых альтернатив, сконструировать новые варианты.

В любом случае проделанный поиск лучшего варианта решения, даже если он не привел к положительному результату, не будет бесполезным. Он может натолкнуть на новое понимание рассматриваемой проблемы, обратить внимание на какие-то новые аспекты, которые необходимо учесть, указать на иные пути решения задачи.

Если приемлемый вариант найден, наступает стадия *исполнения решения* (этапы 12, 13), на которой происходит реализация принятого решения, осуществляется контроль над процессом реализации и оценивается результат разрешения проблемной ситуации. Строго говоря, эта стадия не относится к процедуре принятия решения. Однако включение исполнения решения в общую схему важно с методологической и практической точек зрения, так как эта стадия замыкает жизненный цикл процесса возникновения, разрешения и исчезновения проблемной ситуации. А кроме того, реализация принятого решения может породить новую проблему, требующую поиска своего решения.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

2.1. Постановка задачи принятия решения

Задача принятия решения состоит в формировании множества возможных вариантов, обеспечивающих разрешение проблемной ситуации при существующих ограничениях, и выделении среди этих вариантов одного лучшего или нескольких предпочтительных вариантов, удовлетворяющих предъявляемым к ним требованиям. Формально задачу принятия решения D можно записать в следующем обобщенном виде:

$$D = \langle F, A, X, G, P \rangle.$$

Здесь F — формулировка задачи принятия решения, которая включает в себя содержательное описание стоящей проблемы и при необходимости ее модельное представление, определение цели или целей, которые должны быть достигнуты, а также требования к виду окончательного результата.

A — совокупность возможных вариантов (альтернатив), из которых производится выбор. Это могут быть реально существующие варианты, в качестве которых в зависимости от контекста задачи выступают объекты, кандидаты, способы достижения цели, действия, решения и т. п., либо гипотетическое множество всех теоретически возможных вариантов, которое может быть даже бесконечным. Подчеркнем еще раз, что выбор возникает только тогда, когда имеется не менее двух возможных вариантов решения проблемы.

X — совокупность признаков (атрибутов, параметров), описывающих варианты и их отличительные особенности. В качестве признаков выступают, во-первых, объективные показатели, которые характеризуют те или иные свойства, присущие вариантам, и которые, как правило, можно измерить; во-вторых, субъективные оценки, которые обычно даются по специально отобранным или сконструированным критериям, отражающим важные для участников выбора черты вариантов. Например, состояние здоровья человека можно охарактеризовать температурой тела, величиной кровяного давления, отсутствием или наличием боли, ее локализацией.

G — совокупность условий, ограничивающих область допустимых вариантов решения задачи. Ограничения могут быть описаны как содержательным образом, так и заданы в виде некоторых формальных требований к вариантам и/или их признакам. Например, это могут быть ограничения на значения какого-либо признака или различная степень характерности (выраженности) признака для тех или иных вариантов, или невозможность одновременного сочетания определенных значений признаков для реально существующих вариантов. Так, если человек здоров, то у него ничего не должно болеть, а температура и кровяное давление должны быть нормальными. Отсутствие ограничений существенно упрощает задачу принятия решения.

P — предпочтения одного или нескольких ЛПР, которые служат основой для оценки и сравнения возможных вариантов решения проблемы, отбора допустимых вариантов и поиска наилучшего или приемлемого варианта. Достаточно часто для упрощения постановки задачи принятия решения часть информации, описывающей предпочтения ЛПР, превращается в ограничения.

Факторы, характеризующие проблемную ситуацию, условно делятся на две группы: управляемые и неуправляемые. *Управляемые факторы*, выбор которых зависит от ЛПР, — суть поставленные цели, варианты (альтернативы) их достижения, субъективные оценки вариантов и степени достижения целей. *Неуправляемые факторы* не зависят от ЛПР. Они определяют объективные признаки вариантов и отчасти устанавливают ограничения на выбор возможных вариантов.

Факторы подразделяются также:

- на *определенные*, или детерминированные, δ с известными и/или заранее заданными точными характеристиками;
- *вероятностные*, или стохастические, ξ с известными и/или заранее заданными случайными характеристиками;
- *неопределенные*, или неизвестные, ζ с нечетко определенными и/или неизвестными характеристиками, но иногда с известной областью изменения их значений.

Пример 2.1. Рассмотрим покупку товара как задачу принятия решения. Формулировка проблемы заключается в описании того, какой товар требуется купить (например, продукты повседневного спроса, костюм, автомобиль), а также следует ли выбрать самый лучший (и в каком смысле) товар, либо все товары нужно рассортировать по каким-то группам. Возможные варианты представляют собой перечни (ассортименты) продуктов, костюмов, автомобилей. Объективными признаками, описывающими товар, будут его цена, дата изготовления, производитель, жирность молока, состав ткани, мощность двигателя и т. п. Субъективными признаками могут служить оценки полезности продукта, модности фасона костюма, комфортабельности автомобиля. Область допустимых вариантов может быть ограничена, например, ценой товара («не дороже, чем») или перечнем производителей («только отечественные», какая-то конкретная фирма). Предпочтения покупателя могут выражаться в различной важности для него тех или иных признаков товара, установлении предельных значений для признаков, определении правил отбора и сравнения вариантов друг с другом и, наконец, в том, что же, собственно говоря, покупатель считает самым лучшим для себя товаром. Определенными факторами являются, например, цена и дата изготовления товара, вероятностными факторами — потребительские характеристики товара, неизвестными факторами — вкусовые или эксплуатационные качества товара. ■

2.2. Классификация задач принятия решений

Приведем классификацию задач принятия решений по различным аспектам их рассмотрения.

По *регулярности проблемной ситуации* можно указать новые, уникальные задачи, никогда ранее не возникавшие, и повторяющиеся задачи, незначительно отличающиеся друг от друга и регулярно встречающиеся на практике.

По *длительности периода реализации* принятого решения различают долгосрочные (стратегические), среднесрочные (тактические) и краткосрочные (оперативные) задачи.

По *виду окончательного результата* выделяют следующие задачи выбора, которые принято считать типовыми:

- выделить один или несколько лучших вариантов (альтернатив);
- упорядочить все варианты, как правило, от лучшего варианта к худшему;
- распределить все варианты по отличающимся по своим свойствам группам, причем эти группы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными по некоторому качеству.

Варианты решения проблемы различаются:

- по *количеству* — немного (единицы, десятки), много (сотни и тысячи), бесконечно много;

• по *наличию в процессе решения задачи* — варианты, заданные заранее при формулировке задачи; варианты, конструируемые в процессе решения задачи; варианты, появляющиеся после окончания процесса решения;

• по *степени взаимной зависимости* — независимые варианты, манипуляции с которыми не влияют на другие варианты; зависимые варианты с разными видами зависимости между ними.

По *числу лиц*, обладающих полномочиями для принятия решения, выделяются:

• индивидуальные решения (имеется единственное ЛПР);

• коллективные или групповые решения (существуют несколько ЛПР, действующих независимо друг от друга, преследующих свои цели и имеющих совпадающие или противоречивые интересы);

• организационные решения (решение принимается несколькими ЛПР, которые стремятся к достижению общей цели, могут иметь различающиеся интересы, но зависят друг от друга и вынуждены действовать согласованно). Коллектив таких ЛПР принято называть «органом, принимающим решение».

По *роли ЛПР* в процессе принятия решения можно выделить такие задачи:

• выбор производится без участия ЛПР на основе аксиоматически или эвристически определенных процедур;

• ЛПР принимает участие только на заключительном этапе выбора;

• выбор осуществляется при непосредственном участии ЛПР в основных этапах процесса решения.

В зависимости от *способа представления предпочтений ЛПР* говорят о задачах целостного и критериального выбора. По *числу критериев* различаются однокритериальные и многокритериальные задачи. Критерии, в свою очередь, по *степени зависимости* могут подразделяться на независимые и зависимые.

И наконец, задачи принятия решений можно классифицировать по особенностям используемой информации, в том числе:

• по *виду информации* — количественная (числовая), качественная (словесная или вербальная), смешанная;

• по *характеру информации* — объективная, полученная путем измерений и/или расчетов, и субъективная, полученная от человека (ЛПР, эксперта);

• по *наличию явной зависимости информации от времени* — статическая и динамическая;

- по *степени определенности информации* — детерминированная, вероятностная (стохастическая), неопределенная (в первом случае говорят о принятии решения в условиях определенности, во втором — в условиях вероятностной неопределенности или риска, в третьем — в условиях полной неопределенности).

2.3. Структуризация проблемной ситуации

Существует еще один аспект, играющий важную роль в теории принятия решений, — *степень структуризации*, или *формализации*, проблемной ситуации. Структуризация проблемы включает в себя построение набора возможных вариантов решения и перечня их характеристик, формирование модели проблемной ситуации, задание критериев оценки вариантов и их шкал, изучение и анализ возможных отношений между вариантами, обусловленных их свойствами. Структуризация позволяет глубже понять природу стоящей проблемы, а значит, и найти ее лучшее решение. Степень структуризации проблемы имеет большое значение для выбора соответствующего метода ее решения.

Понятие степени структуризации проблемы, введенное Г. Саймоном и А. Ньюэллом (1958), связано с различным сочетанием количественной и качественной, объективной и субъективной информации, описывающей проблему. *Хорошо структурируемые*, или *хорошо формализуемые*, *проблемы* допускают количественную формулировку, их наиболее существенные зависимости выражаются объективными моделями и представляются в символьной форме, где символы принимают числовые значения. *Неструктурируемые*, или *неформализуемые*, *проблемы* имеют лишь качественные, словесные описания, основанные на субъективных суждениях человека, количественные связи между важнейшими характеристиками проблемы отсутствуют или неизвестны. Промежуточное положение занимают *слабо структурируемые*, или *плохо формализуемые*, *проблемы*, сочетающие количественные и качественные компоненты и зависимости, причем преобладающую роль играют плохо определенные и недостаточно известные стороны проблемы (так называемые НЕ-факторы).

Хорошо структурируемые проблемы обычно изучаются в научной дисциплине, называемой исследованием операций. Под операцией понимается совокупность управляемых действий, объединенных единым замыслом, направленных на достижение определенных целей и имеющих повторяемый характер. В исследовании операций основные этапы решения проблемы следующие: построение математической модели операции, отражающей важнейшие черты и взаимосвязи существенных факторов операции; задание количественных показателей эффективности, или критериев оптимальности операции, которые характеризуют ее целевую направленность; вычисление оптимального решения, являющегося наилучшим по выбранным критериям. Иногда оптимальное решение проблемы единственное, чаще оно принадлежит некоторому подмножеству равноценных вариантов решения, среди которых и проводится окончательный выбор.

ЛПР, как правило, почти не участвует в построении модели операции и нахождении оптимального решения, за исключением случаев, когда требуется определить цели операции и критерии их достижения, выбрать окончательное решение, сообщить нужную дополнительную информацию. Построением модели операции и разработкой методов решения проблемы занимаются консультанты-аналитики, эксперты. Не существует общих универсальных способов построения моделей. Поэтому построение моделей операций является своего рода искусством, требующим опыта и умения разработчиков.

В то же время считается, что в силу объективности моделируемых зависимостей различные специалисты-аналитики, опираясь на одни и те же данные, должны получать одинаковые результаты. В этом состоит одна из существенных слабостей исследования операций. Примерами хорошо структурируемых проблем могут служить военные операции (отсюда, кстати, происходит и сам термин «исследование операций»), выбор маршрутов и способов транспортировки грузов, распределение различного вида работ между исполнителями, задачи массового обслуживания.

Плохо структурируемые проблемы имеют следующие особенности:

- наличие неопределенности в описании проблемы и вариантов ее решения, связанной с отсутствием необходимой объективной информации, ее нехваткой или невозможностью получения на момент постановки задачи;
- невозможность построения полностью формализованной модели проблемной ситуации и необходимость получения информации от ЛПР, экспертов, аналитиков для построения качественной вербальной модели;
- сочетание количественных и качественных характеристик, представляющих проблемную ситуацию, использование мно-

гих критериев для оценки возможных вариантов решения проблемы;

- отсутствие «объективного» способа выбора наилучшего варианта, обеспечивающего экстремум некоторого критерия (или критериев) оптимальности, и осуществление такого выбора на основе субъективных предпочтений ЛПР.

Плохо структурируемые проблемы обычно рассматриваются в теории принятия решений. К таким проблемам относят задачи стратегического выбора, конкурсный отбор инвестиционных или научно-исследовательских проектов, диагностика и выбор методов лечения заболеваний, выбор места жительства, работы, учебы, отдыха и др.

Обязательность использования субъективной информации для постановки задачи принятия решения и выбора наилучшего или приемлемого варианта является принципиальной чертой плохо структурируемых проблем.

2.4. Предпочтения ЛПР

В теории принятия решений полагается, что ЛПР оценивает и сравнивает рассматриваемые варианты (альтернативы, объекты, способы действия) и осуществляет целенаправленный выбор среди них лучшего или приемлемого варианта (вариантов), основываясь на субъективных предпочтениях.

Предпочтения ЛПР — одна из главных составляющих задачи принятия решения. Несмотря на ее важность, нет общепринятой точки зрения, что же подразумевается под предпочтениями ЛПР. Будем называть *предпочтением* ЛПР выраженное каким-либо образом его личное суждение о наличии или отсутствии преимущества одного из вариантов по отношению к другому варианту или ко всем остальным вариантам, либо в целом, либо по некоторым отдельным характеристикам.

Субъективность предпочтений не означает, что ЛПР может поступать, как ему заблагорассудится. В реальных ситуациях выбора человек обычно ведет себя достаточно разумно, его поведение и действия подчиняются некоторому внутреннему принципу рациональности (от лат. ratio — разум). При этом, конечно, разные люди могут иметь свои собственные системы ценностей, свои различные представления о предпочтительности, сообразуясь с которыми они и делают свой субъективно лучший выбор. В этом смысле нельзя утверждать, что наиболее предпочтительный вариант решения является единственным «объективно» лучшим, поскольку лучшие решения у разных ЛПР могут отличаться. Поэтому в теории принятия решений предполагается, что ЛПР — разумный человек, чьи предпочтения обеспечивают его рациональный, т. е. наиболее выгодный для данного человека, выбор.

Свои предпочтения ЛПР может выражать как непосредственно, в явной форме, так и опосредованно, неявно. Предпочтения ЛПР проявляются при выделении тех или иных свойств и характеристик сравниваемых вариантов, сравнении вариантов, оценке качества решения. При этом обычно считается, что ЛПР может либо сразу указать лучший среди всех вариант решения, либо выделить приемлемые для него варианты, либо сравнить варианты друг с другом по качеству и сказать, какие варианты лучше, а какие равноценны. Предпочтения ЛПР представляются в виде формальной модели, регламентирующей результат выбора, или в виде специальных решающих правил, определяющих процедуру выбора. Модели и правила выбора имеют как логико-математическую, так и вербальную (словесную) формулировки.

Явно выраженные предпочтения могут быть описаны и зафиксированы на каком-то языке, обоснованы и/или объяснены самим ЛПР. При неявно выраженных предпочтениях получить у ЛПР объяснение результатов сравнения и выбора вариантов решения бывает затруднительно. Большие сложности для выявления предпочтений возникают обычно и в случае нескольких ЛПР, каждый из которых может иметь собственную систему ценностей, личные интересы и различающиеся источники информации. Явное указание ЛПР своих предпочтений существенно облегчает процесс решения задачи выбора.

Вместе с тем даже при явно и ясно выраженных предпочтениях ЛПР может допускать ошибки и противоречия в своих оценках, быть непоследовательным в суждениях, особенно когда требуется рассмотреть и сравнить большое число альтернативных вариантов. Эти особенности человека должны учитываться при разработке методов принятия решений. Поэтому во многих методах предусматриваются специальные процедуры, позволяющие находить подобного рода неточности ЛПР и исправлять их.

Для реализации возможности использования предпочтений ЛПР в процессе принятия решения необходимо располагать информацией о них, т. е. описать и/или измерить предпочтения ЛПР. Описание является неформализуемым способом выражения предпочтений в отличие от измерений, которые позволяют выразить свойства варианта или совокупности вариантов и/или свойств в числовой или символьной форме.

2.5. Модели предпочтений

В теории принятия решений употребляются разные модели формализации предпочтений ЛПР.

Одним из наиболее часто применяемых инструментариев, который позволяет содержательно выразить представления ЛПР о сравнительной ценности вариантов на формальном языке, является так называемая *реляционная модель предпочтений*, основанная на бинарных отношениях.

Пример 2.2. Бинарные отношения: 1) «Илья старше Татьяны», 2) «Москва находится южнее Санкт-Петербурга, а Санкт-Петербург — южнее Архангельска», 3) «Железо тверже и тяжелее воска», 4) «Иван и Петр — братья», 5) «Слова день и ночь состоят из одинакового числа букв». ■

Первое, второе и третье высказывания указывают на определенную неравнозначность сравниваемых объектов, на различие их свойств. Четвертое и пятое высказывания, наоборот, свидетельствуют о некоторой похожести объектов, одинаковости их характеристик.

Во всех высказываниях присутствуют названия сравниваемых объектов (Илья, Татьяна, Москва, железо, воск, ...) и названия бинарных отношений между объектами (быть старше, находиться южнее, быть братом, ...). Отметим, что во втором высказывании приведено одно и то же отношение между несколькими объектами (Москва, Санкт-Петербург, Архангельск), а в третьем — упомянуто несколько разных отношений (тверже и тяжелее) между двумя объектами. Кроме того, отношение может выполняться для всех объектов: «Все братья являются детьми мужского пола своих родителей», или только для некоторых: «Некоторые слова имеют одинаковую длину».

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Если изменить названия объектов или виды отношений, поменять объекты местами, то могут возникнуть следующие ситуации:

- высказывание останется верным, т. е. отношение сохранится, например, «Москва старше Санкт-Петербурга», «Петр и Иван — братья», «Слова Иван и Петр состоят из одинакового числа букв», «Татьяна находится южнее Ильи»;

• высказывание станет неверным, т. е. отношение нарушится, например, «Татьяна старше Ильи», «Архангельск находится южнее Москвы и Санкт-Петербурга», «Слова железо и воск состоят из одинакового числа букв»;

• высказывание потеряет смысл, т. е. отношение будет невозможным, например, «Илья и Татьяна — братья», «День находится южнее ночи», «Москва тверже и тяжелее Санкт-Петербурга».

Предпочтения ЛПР, описываемые с помощью бинарных отношений, можно в широком смысле разделить на три группы: нейтральные, слабые и сильные. *Нейтральная*, или *неопределенная*, *предпочтительность* вариантов, которую будем обозначать как $A_i \approx A_j$, характеризуется симметричным отношением (сходство, эквивалентность; несходство, противоположность) и свидетельствует либо о некоторой равноценности, либо о неопределенной ценности обоих вариантов для ЛПР, например: «Варианты A_i и A_j эквивалентны», «Варианты A_i и A_j несопоставимы».

Слабая, или *нестрогая*, *предпочтительность* вариантов, которую будем обозначать как $A_i \succeq A_j$, задается либо антисимметричным, либо рефлексивным и полным отношением (нестрогое превосходство, нестрогий порядок, предпорядок) и отражает как различимость, так и одинаковость вариантов для ЛПР: «Вариант A_i не хуже, чем вариант A_j», «Вариант A_i, по крайней мере, такой же, как и вариант A_j». Первая формулировка допускает, чтобы вариант A_i был как лучше, так и равноценен варианту A_j. Вторая формулировка разрешает, чтобы оба варианта A_i и A_j были одинаково либо приемлемыми («хорошими»), либо неприемлемыми («плохими») для ЛПР.

Сильная, или *строгая*, *предпочтительность* вариантов, которую будем обозначать как $A_i \succ A_j$, выражается асимметричным отношением (строгое превосходство, строгий порядок) и интерпретируется как явно выраженное различие вариантов: «Вариант A_i лучше варианта A_j».

Таким образом, в рамках реляционной модели предпочтений при необходимости выбора из пары вариантов (A_i, A_j) в случае нейтральной предпочтительности $(A_i \approx A_j)$ выбираются оба варианта: и A_i, и A_j; в случае нестрогой предпочтительности $(A_i \succeq A_j)$ либо выбирается вариант A_i, либо выбираются или не выбираются оба варианта вместе; в случае строгой предпочтительности $(A_i \succ A_j)$ выбирается только первый вариант A_i и не выбирается второй вариант A_j.

Бинарные отношения позволяют ЛПР достаточно просто и наглядно оценить сравнительные достоинства рассматриваемых вариантов и выразить их на языке, близком к естественному. При этом ЛПР может устанавливать предпочтительность вариантов как в целом, так и по отдельным их характеристикам, например, сравнивая железо и воск по твердости и тяжести.

Рефлексивные отношения свидетельствуют о каком-то сходстве сравниваемых вариантов для ЛПР. Антирефлексивные отношения указывают на определенное различие между вариантами. Однако эти средства сравнения вариантов не достаточно выразительны для характеристики предпочтений ЛПР.

Для большей определенности выбора обычно используют отношения, обладающие свойствами симметричности и транзитивности. Транзитивные и симметричные отношения разбивают множество вариантов на неупорядоченные классы, транзитивные и рефлексивные отношения — на упорядоченные классы. Варианты, принадлежащие к одному и тому же классу, считаются эквивалентными, или идентичными. Транзитивные и асимметричные отношения обеспечивают упорядочение сравниваемых вариантов.

И наконец, могут иметься варианты, не сравнимые ни по одному из отношений. Последнее может быть обусловлено как формальной несравнимостью вариантов, так и невозможностью их сравнения, например вследствие недостатка имеющейся у ЛПР информации.

Другой достаточно популярной моделью представления предпочтений ЛПР является так называемая *функциональная модель*, в рамках которой предпочтительность варианта для ЛПР выражается значением некоторой числовой функции, зависящей от характеристик рассматриваемого варианта. Такие функции носят разные названия: целевые функции, показатели эффективности, функции ценности и полезности и т. п. Различные виды функциональных моделей, а также иные возможные модели представления предпочтений ЛПР будут подробно обсуждаться в дальнейшем при изучении задач оптимального и рационального выбора.

Все многообразие способов выявления предпочтений ЛПР можно свести к трем основным процедурам: *оценке*, *сравнению* и *выбору*. Отметим, что сами эти процедуры могут быть как объективного, так и субъективного характера.

ГЛАВА 3

ОЦЕНКА ВАРИАНТОВ

3.1. Шкалы

Рассмотрим способы выявления предпочтений ЛПР в порядке возрастания их сложности и трудоемкости для человека, увеличения объема обрабатываемой информации. Обсудим, прежде всего, два важных понятия, широко употребляемых в теории принятия решений, — шкала и критерий.

Шкала представляет собой множество чисел или символов, с помощью которого можно измерить какую-то отдельную особенность, свойство предмета или явления. Наиболее распространены следующие типы шкал.

1. Номинальная шкала (*шкала наименований*). Устанавливает взаимно-однозначное соответствие между объектами, обладающими одним и тем же свойством. Номинальная шкала основана на отношении эквивалентности. Используется для обозначения принадлежности объекта к некоторому определенному классу и дает только минимум информации о свойствах объектов. Номинальные шкалы инвариантны относительно взаимно-однозначных преобразований, например переобозначений имен классов.

Возможны следующие операции обработки данных, измеренных в номинальной шкале: проверка принадлежности объектов A_i и A_j к одному и тому же классу — вычисление показателя принадлежности e_{ij}, принимающего значения $e_{ij} = 1$, если $A_i \approx A_j$ (объекты A_i и A_j из одного и того же класса), и $e_{ij} = 0$, если $A_i \not\approx A_j$; подсчет абсолютного $m_k = \sum_{i=1}^{m} e_{ik}$ и относительного $p_k = m_k/m$ числа совпадений объектов, входящих в k-й класс, m — число объектов; поиск номера класса $k^{\max} = \arg\max\limits_k p_k$, содержащего наибольшее число объектов.

Пример 3.1. Номинальные шкалы: названия болезней; почтовые, телефонные, автомобильные индексы регионов и стран; пол человека. ■

2. Порядковая (*ранговая*) *шкала.* Устанавливает упорядочение объектов по степени выраженности какого-либо свойства.

Порядковая шкала основана на отношении строгого порядка. Она не имеет фиксированного начала отсчета и определенного масштаба измерений (расстояния между соседними значениями оценок), характеризующего величину различия свойства при переходе от одного значения к другому. Используется для обозначения различия объектов без указания, на сколько или во сколько раз один объект превосходит другой. Порядковые шкалы инвариантны относительно монотонно возрастающих преобразований.

Возможные операции обработки данных, измеренных в порядковой шкале, включают: вычисление показателей e_{ij} принадлежности объектов A_i и A_j к классу; определение целочисленных рангов объектов

$$r_i = m + 1 \sum_{j=1}^{m} r(A_i, A_j), \tag{3.1}$$

где $r(A_i, A_j) = 1$, если $A_i \succ A_j$, или $A_i \approx A_j$, и $r(A_i, A_j) = 0$, если $A_i \prec A_j$; подсчет частот $p_k = m_k/m$ числа совпадений; нахождение мод — медианы q_s, ближайшей к частоте $1/2$, квантиля q_{p^*}, ближайшего к заданной частоте p^*; вычисление коэффициентов ранговой корреляции, оценивающих степень близости различных упорядочений объектов по рангам.

Пример 3.2. Порядковые шкалы: перечень воинских званий; шкалы школьных и вузовских отметок; шкалы оценки силы землетрясения, силы ветра, твердости минералов; лингвистические шкалы оценки качества. ■

3. Шкала интервалов. Устанавливает упорядочение объектов в зависимости от величины различия какого-либо свойства. Шкала интервалов имеет определенный масштаб ($a > 0$) и некоторую произвольную начальную точку отсчета (b — любое число). Используется для измерения, насколько объект A_i превосходит объект A_j по разности $d_{ij} = x_i - x_j$ числовых оценок x_i и x_j объектов по шкале. Шкалы интервалов инвариантны относительно линейных преобразований вида $y = \varphi(x) = ax + b$. Измерения оценок x_i и y_i, выполненные в разных шкалах интервалов, сохраняют величину отношения $d_{ij}/d_{kl} = (x_i - x_j)/(x_k - x_l) = (y_i - y_j)/(y_k - y_l)$.

Возможны следующие операции обработки данных, измеренных в шкале интервалов: вычисление числа $p_k = m_k/m$ совпадений объектов, входящих в k-й класс, рангов объектов r_i, разностей оценок d_{ij} объектов A_i и A_j.

Пример 3.3. Шкалы интервалов: шкалы измерения времени с масштабами секунда, минута, час, сутки, месяц, год, век и соответствующими разными начальными точками отсчета; шкалы измерения температуры по Реомюру, Фаренгейту, Цельсию и Кельвину. ■

Частным случаем шкалы интервалов является *шкала разностей*, имеющая единичный масштаб ($a = 1$) и некоторую произвольную начальную точку отсчета (b — любое число). Шкалы разностей инвариантны относительно преобразований сдвига вида $y = \varphi(x) = x + b$.

Пример 3.4. Шкалы разностей: системы летосчисления (по старому и новому стилю, от Сотворения Мира, от Рождества Христова и т. п.); часовые пояса измерения времени; шкалы измерения температуры по Цельсию и Кельвину. ■

4. Шкала отношений. Устанавливает упорядочение объектов в зависимости от величины различия какого-либо свойства. Шкала отношений имеет определенный масштаб ($a > 0$) и нулевую точку отсчета ($b = 0$), представляет собой частный случай шкалы интервалов. Используется для измерения, во сколько раз объект A_i превосходит объект A_j по отношению $h_{ij} = x_i/x_j$ числовых оценок x_i и x_j объектов по шкале. Шкалы отношений инвариантны относительно преобразований растяжения вида $y = \varphi(x) = ax$. Измерения оценок x_i и y_i, выполненные в разных шкалах отношений, сохраняют величину отношения $h_{ij} = x_i/x_j = y_i/y_j$.

Возможные операции обработки данных, измеренных в шкале отношений, те же, что и для шкалы интервалов, а также все алгебраические операции.

Пример 3.5. Шкалы отношений: шкалы измерения длины (в метрах, милях, саженях, ...); массы (в граммах, фунтах, пудах, ...); мощности (в ваттах, лошадиных силах, ...); стоимости (в рублях, долларах, евро, юанях, ...); шкалы измерения температуры по Цельсию и Реомюру. ■

5. Абсолютная шкала. Устанавливает упорядочение объектов. Абсолютная шкала имеет единичный масштаб ($a = 1$) и нулевую точку отсчета ($b = 0$), являясь частным случаем шкал разностей и отношений, и представляет собой ряд натуральных чисел x. Применяется для измерения количества объектов. Абсолютная шкала единственна и инвариантна относительно тождественного преобразования $y = \varphi(x) = x$. В абсолютной шкале возможны все перечисленные выше операции обработки данных.

Шкалы оценок и их особенности изучаются в теории измерений, где разные типы шкал вводятся формально, исходя из следующего набора аксиом.

Аксиомы тождества.

И1. Либо $a \approx b$, либо $a \not\approx b$.

И2. Если $a \approx b$, то $b \approx a$.

И3. Если $a \approx b$ и $b \approx c$, то $a \approx c$.

Аксиомы упорядоченности.

И4. Либо $a \succ b$, либо $b \succ a$.

И5. Если $a \succ b$ и $b \succ c$, то $a \succ c$.

Аксиомы аддитивности.

И6. $a + b = b + a$.

И7. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

И8. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.

И9. Если $a = b$ и $c > 0$, то $a + c > b$.

Номинальная шкала основывается на аксиомах И1—И3, порядковая шкала и шкала интервалов — на аксиомах И1—И5, шкала отношений — на аксиомах И1—И9.

Отметим, что помимо перечисленных шкал, инвариантных относительно линейных преобразований, существуют и шкалы, инвариантные относительно нелинейных преобразований (например, степенная, экспоненциальная, логарифмическая шкалы).

В зависимости от специфики измеряемых характеристик объектов выделяют шкалы *количественные* (числовые) и *качественные* (символьные, вербальные), а также *дискретные* и *непрерывные* (табл. 3.1).

Выбор шкалы измерения должен опираться на наиболее существенные и, по возможности, независимые характеристики

Таблица 3.1

Виды шкал

Тип шкалы	Характер шкалы			
	количественная	качественная	дискретная	непрерывная
Номинальная		•	•	
Порядковая		•	•	
Интервалов	•		•	•
Отношений	•		•	•
Абсолютная	•		•	

измеряемого объекта и максимально с ними согласовываться. Использование шкал, не соответствующих специфике измеряемых свойств, сопряжено с опасностью получения значительных искажений картины из-за применения при обработке результатов измерений недопустимых операций и сделанных на их основании неверных выводов. Типичные примеры: «оцифровка» качественной шкалы, т. е. присвоение символьным оценкам по номинальной или порядковой шкале числовых значений; превращение порядковой шкалы в шкалу интервалов или отношений.

3.2. Критерии

Как уже отмечалось, проблемные ситуации, требующие своего решения, содержат различного рода неопределенности, которые можно условно свести к неопределенностям природы, человека и целей разрешения проблемы. Чтобы преодолеть неопределенность, прибегают к упрощенному представлению стоящей задачи и построению моделей, что всегда является неформальной и нерегламентированной процедурой. Один из наиболее распространенных подходов к упрощению задачи выбора состоит в получении дополнительной информации за счет описания рассматриваемых вариантов (альтернатив, объектов) на языке критериев.

Критерий (от греч. κριτήριον — мерило, средство суждения) представляет собой некоторую выделенную особенность, с помощью которой можно охарактеризовать предмет или явление. При оценке вариантов по какому-либо критерию K этой особенности приписывается определенная шкала X, а каждому варианту A_i из имеющейся совокупности $A=\{A_1, \ldots, A_m\}$ вариантов ставится в соответствие одно из значений $x_i \in X$ по шкале этого критерия: $A_i \Leftrightarrow x_i$. Значение $x_i = K(A_i)$ называется *оценкой* варианта A_i по критерию K. Иными словами, критерий задает отображение $K\colon\ A \to X$ совокупности A вариантов выбора на множество значений особенности X.

По виду шкалы выделяются количественные и качественные критерии. Шкала критерия может быть также естественной или искусственной. Естественная шкала выражает свойство, объективно присущее предмету или явлению, например температура, мощность, стоимость и т. п. Искусственная шкала конструируется специально для описания какой-то важной особенности варианта решения или объекта, например эффективность, перспективность, безопасность, управляемость, комфортность, элегантность и др.

Однако чтобы шкала могла считаться критериальной, градации оценок должны иметь ясно выраженный смысл, какие оценки считать «лучшими», какие «худшими», а какие «равноценными». Обычно это устанавливает ЛПР из содержательных соображений, отражающих его предпочтения. Тем самым на шкале критерия задается определенное направление или указывается на его отсутствие. Даже при оценке какого-то объективного свойства варианта по естественной числовой шкале в одних случаях лучшими будут меньшие числовые значения, а в других — бóльшие. Например, для отбора космонавтов и подводников лучше, когда их рост меньше, а для баскетболистов, когда рост больше. Таким образом, критерий объединяет в себе шкалу для измерения некоторого свойства варианта и предпочтения ЛПР, что можно записать как $K = \{X, P\}$.

Совокупность критериев, используемых для описания проблемной ситуации, должна удовлетворять следующим требованиям:

- *полнота* — набор критериев должен отражать все существенные аспекты рассматриваемой проблемы, качество ее решения и основные особенности вариантов; набор всех оценок по шкале каждого критерия должен исчерпывающе характеризовать соответствующее свойство;
- *разложимость* — состав критериев должен упрощать описание и анализ проблемы, позволять оценивать различные характеристики вариантов и разные аспекты качества решения проблемы;
- *неизбыточность* — число критериев должно быть минимально необходимым для решения задачи, критерии не должны дублировать друг друга по своему содержанию;
- *прозрачность* — содержание и смысл критериев, формулировки градаций оценок по шкалам критериев должны однозначно пониматься всеми участниками процесса принятия решения: ЛПР, владельцем проблемы, экспертами, членами активных групп.

3.3. Оценка вариантов в целом

Наиболее простая и сравнительно нетрудная для ЛПР процедура выявления его предпочтений — непосредственная оценка характеристик предмета или явления. Оценка характеристики

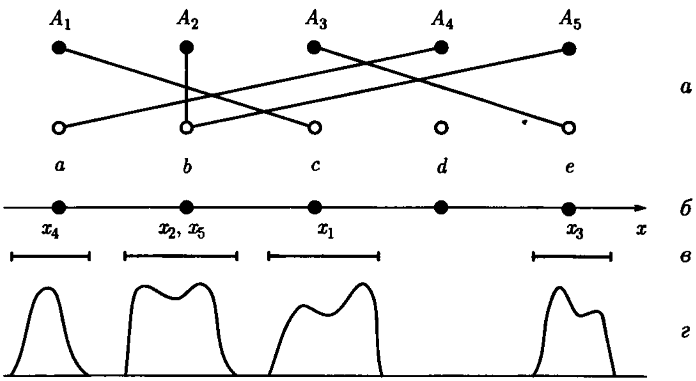


Рис. 3.1. Оценки вариантов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5:

а — оценки по дискретной шкале; *б* — точечные оценки по непрерывной шкале; *в* — интервальные оценки; *г* — вероятностные оценки

означает измерение ее значения по некоторой шкале критерия. Так, скорость может быть измерена в метрах в секунду, в километрах в час. Степень реализуемости научного или инвестиционного проекта можно оценить как высокую, среднюю или низкую.

Оцениваться может как сам вариант решения (объект, его качество) в целом, так и его отдельные свойства. Для оценки объекта как целого требуется единственная шкала измерения, для оценки нескольких характеристик — несколько шкал для каждого из измеряемых свойств.

При целостной оценке вариантов в условиях определенности каждому варианту A_i ставится в соответствие его точечная оценка $x_i = K(A_i)$, которая представляет собой некоторое число или символ из множества значений X шкалы критерия K. В условиях полной неопределенности измеряемой характеристике варианта A_i соответствует не одно точечное значение оценки x_i, а некоторый интервал возможных значений $[x_i', x_i'']$. В условиях вероятностной неопределенности варианту A_i сопоставляется некоторое распределение вероятностей на заданном числовом интервале. Примеры непосредственной оценки вариантов для разных ситуаций принятия решения изображены на рис. 3.1.

В простых случаях можно легко найти итоговое решение задачи выбора, например упорядочение (нестрогий порядок) всех вариантов.

Пример 3.6. Варианты, представленные на рис. 3.1, *а*, имеют следующие точечные оценки: $x_4 = a$, $x_2 = x_5 = b$, $x_1 = c$, $x_3 = e$. Допустим, что значения на шкале критерия упорядочены от лучших к худшим как $a \succ b \succ c \succ d \succ e$. Тогда получается следующее упорядочение вариантов: $A_4 \succ A_2 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_3$. ■

3.4. Оценка вариантов по многим критериям

Необходимость использования многих критериев для оценки вариантов обусловлена разнородностью характеристик вариантов и многообразием достигаемых при решении проблемы целей. Многокритериальность играет в теории принятия решений двоякую роль, которую будем различать с методической точки зрения.

Во-первых, рассматриваемые варианты (альтернативы, объекты) могут обладать многими свойствами и характеризоваться многими различными признаками (атрибутами, параметрами), которые выражаются критериями $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Тогда каждому варианту A_i можно сопоставить n-мерный вектор или кортеж вида $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, компонентами которого будут числовые или словесные оценки $x_{iq} = K_q(A_i)$ характеристик варианта по шкалам X_q критериев K_q, $q = 1, \ldots, n$.

Вариант A_i можно также изобразить точкой x_i, имеющей координаты x_{iq} в n-мерном пространстве шкал критериев $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ (которое, вообще говоря, не является евклидовым). Совокупность всех комбинаций оценок свойств вариантов по критериям $K_1, \ldots, K_n$ образует в пространстве X множество $X^a \subseteq X$, которое называют *множеством допустимых значений признаков*, *множеством допустимых решений*, или, короче, *допустимым множеством* (рис. 3.2, *а*). Многокритериальное описание признаков вариантов позволяет формализовать неопределенности природы и человека.

Во-вторых, разрешение проблемной ситуации может быть связано с достижением многих различных целей. В этом случае каждый вариант A_i оценивается по многим критериям, ко-

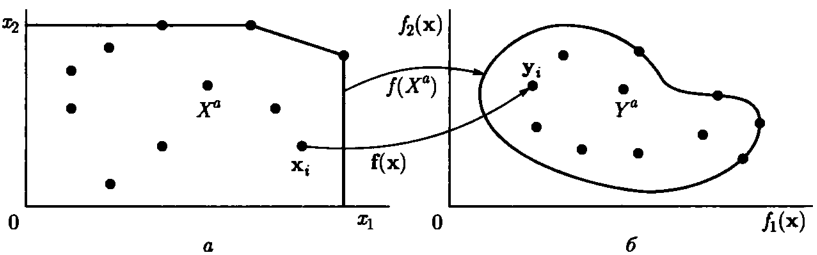


Рис. 3.2. Множества допустимых значений признаков X^a и достижимых целей $Y^a = f(X^a)$

торые называются критериями оценки качества решения, показателями эффективности, критериями оптимальности, целевыми функциями, функциями ценности. Каждый такой критерий является числовой функцией $y = f(x)$ скалярной x или векторной переменной $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Качество варианта A_i при наличии многих различных целей характеризуется h-мерным вектором $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{ih})$, координатами которого будут оценки по частным критериям качества $y_{ik} = f_k(x_i)$, принадлежащие множествам значений $Y_k \subseteq \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, h$. Иными словами, качество варианта A_i представляется векторной функцией $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i))$. Множеству допустимых значений X^a соответствует в пространстве $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_h = \mathbf{R}^h$ множество $Y^a = f(X^a) \subseteq Y$, называемое *множеством оценок качества решения*, *множеством достижимых целей*, или, короче, *множеством достижимости* (рис. 3.2, *б*). Многокритериальное представление качества решения позволяет формализовать неопределенности целей и человека.

Пример 3.7. Оценим грузовые автомобили по их свойствам, в качестве которых выберем такие конструктивные характеристики автомобиля, как мощность, тип и расположение двигателя, расход топлива, максимальная скорость, грузоподъемность, тип кузова и др. Множество автомобилей можно представить точками $\mathbf{x}$ на плоскости (x_1, x_2), образованной двумя критериями: мощность двигателя x_1 и расход топлива x_2. Лучшими оценками по оси x_1 будем считать бóльшую мощность двигателя, а по оси x_2 — меньший расход топлива. X^a — множество допустимых значений признаков (см. рис. 3.2, *а*).

Оценим теперь грузовые автомобили по их эксплуатационным качествам. Показателями эффективности (целевым функциями) могут служить эксплуатационные расходы, общий пробег без капитального ремонта, сроки окупаемости и эксплуатации и др. Каждый показатель эффективности является функцией конструктивных характеристик автомобиля. Множество автомобилей можно представить также точками $\mathbf{y}$ на плоскости (f_1, f_2), образованной двумя показателями: эксплуатационные расходы $f_1(x_1, x_2)$ и общий пробег $f_2(x_1, x_2)$. Лучшими оценками по оси f_1 будем считать меньшую стоимость эксплуатации, а по оси f_2 — бóльший пробег. Каждому автомобилю соответствует точка на плоскости (x_1, x_2) и точка на плоскости (f_1, f_2), а множеству допустимых значений признаков X^a соответствует множество достижимых целей $Y^a = f(X^a)$ (см. рис. 3.2, *б*). ■

Таким образом, применяются разные способы описания вариантов при помощи многих критериев, которые представляют собой отображения следующих видов:

$$K: A \to X_1 \times \ldots \times X_n, \quad f: A \to Y_1 \times \ldots \times Y_h,$$
$$Kf: A \to X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_h.$$

Отметим, что не всегда при изложении теории принятия решений проводится принципиальное различие между указанными выше видами многокритериальности. Зачастую все разнообразие характеристик вариантов и способов достижения целей считается просто многими критериями оценки проблемной ситуации. Такая точка зрения на роль критериев обычно присуща работам в области исследования операций и многокритериальной оптимизации, имеющим дело с числовыми показателями.

3.5. Измерение, агрегирование и нормирование оценок

Для всех задач выбора существенны два аспекта, требующие особого внимания: проблема измерения и проблема агрегирования оценок вариантов.

Проблема измерения характеристик вариантов и предпочтений ЛПР состоит в определении того, какими показателями описывать проблемную ситуацию, по каким критериям и как оценивать варианты, как получить необходимую для выбора информацию.

Проблема агрегирования оценок вариантов и предпочтений ЛПР возникает при необходимости преобразовать значения отдельных показателей, оценки по многим частным критериям в общий (интегральный) критерий качества вариантов, сформировать общее коллективное предпочтение группы лиц, исходя из их индивидуальных субъективных предпочтений.

Агрегирование частных оценок используется в задачах многокритериального выбора, а также в групповом принятии решений. Последнее будет рассматриваться при обсуждении проблемы коллективного выбора. Принципиального различия между оценками вариантов по числовым критериям $x_{iq} = K_q(A_i)$ и показателям эффективности $y_{ik} = f_k(x_i)$ при их агрегировании нет.

При измерении характеристик, описывающих варианты, и последующей обработке результатов измерения большое значение имеют вопросы сопоставимости разнородных характеристик, поскольку восприятие разнородной информации сопряжено с определенными трудностями. Поэтому во многих методах принятия решений такую информацию тем или иным образом трансформируют, приводя ее к более удобному и нормализованному виду.

Одним из распространенных приемов нормирования числовых оценок является их усреднение по множеству значений с использованием формул среднего арифметического, среднего геометрического, среднего статистического:

$$x_i = (1/N)\sum_{j=1}^{N} x_{ij}, \quad x_i = (\prod_{j=1}^{N} x_{ij})^{1/N},$$

$$x'_{ij} = x_{ij}/\sum_{j=1}^{N} x_{ij}, \quad x'_{ij} = x_{ij}/(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2)^{1/2}, \tag{3.2}$$

$$x'_{ij} = [x_{ki} - (1/N)\sum_{j=1}^{N} x_{ij}]/(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2)^{1/2},$$

где N — общее число оценок вариантов решения.

Количественные характеристики, как размер, продолжительность, скорость, мощность, стоимость и др., измеряются числами. Как правило, их числовые шкалы имеют разную размерность: м^2, с, км/ч, кВт, р. и различный «размах» шкалы от минимального до максимального значения. Если шкалы X_q частных числовых критериев K_q имеют разные единицы измерения, то оценки по критериям можно сделать безразмерными такими способами:

$$x''_q = x_q/x_q^{\max}, \quad x''_q = x_q/(x_q^{\max} - x_q^{\min}),$$

$$x''_q = (x_q - x_q^{\min})/(x_q^{\max} - x_q^{\min}),$$

где $x_q^{\max}$ и $x_q^{\min}$ — максимальное и минимальное значения оценки по q-му критерию, определяющие «размах» шкалы.

Качественные характеристики, например значимость, безопасность, комфортность, выражаются словесными (вербальными) признаками. У таких нечисловых шкал нет размерности, но они имеют разнообразное смысловое содержание. В ряде случаев частные вербальные критерии K_q, имеющие разные порядковые шкалы оценок, унифицируют, используя лингвистическую шкалу $X_q = \{x_q^{e_q}\}$ следующего вида:

x_q^1 — отличный (очень высокий, большой);

x_q^2 — хороший (высокий, большой);

x_q^3 — удовлетворительный (средний);

x_q^4 — плохой (низкий, маленький);

x_q^5 — очень плохой (очень низкий, маленький).

Применяются также шкалы с четырьмя градациями (отличный, хороший, удовлетворительный, плохой) или с семью градациями (превосходный, отличный, хороший, удовлетворительный, посредственный, плохой, очень плохой).

Достаточно часто вербальные шкалы «оцифровывают» путем присвоения порядковым градациям шкалы соответствующих числовых оценок: либо целочисленных, например $1, 3, 5, 7, 9$ (для пятибалльной шкалы) или $5, 4, 3, 2$ (для четырехбалльной шкалы), либо дробных, лежащих в пределах от 0 до 1. В методах, основанных на нечетких множествах, применяют специальные способы для вычисления числовых значений лингвистических переменных. Однако такая трансформация нечисловой информации в числовую может заметно исказить предпочтения ЛПР.

Иногда удобнее перейти от непрерывной шкалы к дискретной, например балльной, разбивая множество ее значений на несколько подмножеств и полагая значение $x_q^{\min}$ равным 0 или 1 баллу, а значение $x_q^{\max}$ — 10 или 100 баллам. Результирующая шкала будет шкалой интервалов. Гораздо реже непрерывная шкала заменяется дискретной лингвистической шкалой, сопоставляя $x_q^{\min}$ с наихудшей оценкой по порядковой шкале критерия K_q, а $x_q^{\max}$ — с наилучшей оценкой. Аналогичным образом можно преобразовывать и шкалы Y_k показателей эффективности $y_k = f_k(x)$.

ГЛАВА 4
СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ

4.1. Сравнение вариантов в целом

В реальных ситуациях выбора не всегда удается полностью описать все особенности каждого варианта. В ряде случаев возможно сопоставить вариант с другими вариантами целиком и указать, какой из вариантов предпочтительнее, не вдаваясь в их отдельные характеристики.

Сравнение вариантов в целом равнозначно их сравнению по какому-то одному признаку, выражаемому единственным критерием K, который может быть и количественным, и качественным. Смысловое содержание критерия зависит от контекста конкретной решаемой задачи. Варианты A_i и A_j считаются равноценными для ЛПР, если оценки вариантов $x_i = K(A_i)$ и $x_j = K(A_j)$ по шкале X критерия K совпадают:

$$A_i \approx A_j \Leftrightarrow x_i =_X x_j. \tag{4.1}$$

Будем говорить, что для ЛПР вариант A_i предпочтительнее варианта A_j, если оценки варианта A по критерию K не хуже или лучше оценок варианта A_j:

$$A_i \succeq A_j \Leftrightarrow x_i \succeq_X x_j \quad \text{или} \quad A_i \succ A_j \Leftrightarrow x_i \succ_X x_j. \tag{4.2}$$

Предполагается, что оценки на шкале X критерия K упорядочены от лучших к худшим. При ином порядке оценок на шкале критерия предпочтительность вариантов в левых частях (4.2) заменяется на противоположную.

Варианты можно также сравнивать по значениям единственного показателя эффективности решения (целевой функции, функции ценности, критерию качества, критерию оптимальности), выражаемого числовой функцией $y = f(x)$. ЛПР считает варианты A_i и A_j равноценными, если равны значения показателя эффективности $y_i = f(x_i)$ и $y_j = f(x_j)$ на множестве достижимых целей $Y^a = f(X^a) \subseteq Y = \mathbf{R}$:

$$A_i \approx A_j \Leftrightarrow f(x_i) =_Y f(x_j). \tag{4.3}$$

Вариант A_i будет для ЛПР предпочтительнее варианта A_j, если A_i имеет не меньшее или большее значение показателя эффективности, чем A_j:

$$A_i \succeq A_j \Leftrightarrow f(x_i) \geq_Y f(x_j) \text{ или } A_i \succ A_j \Leftrightarrow f(x_i) >_Y f(x_j). \quad (4.4)$$

ЛПР может также считать один из вариантов предпочтительнее другого, если A_i имеет не большее или меньшее значение показателя эффективности, чем A_j:

$$A_i \succeq A_j \Leftrightarrow f(x_i) \leq_Y f(x_j) \quad \text{или} \quad A_i \succ A_j \Leftrightarrow f(x_i) <_Y f(x_j).$$

Здесь x_i и x_j могут быть как скалярными, так и векторными переменными, определенными на множестве допустимых значений признаков $X^a \subseteq X$.

Такие способы выражения предпочтений ЛПР суть не что иное, как задание бинарных отношений равенства, нестрогого порядка и строгого порядка соответственно на множестве допустимых значений признаков или на множестве достижимых целей.

Выявить предпочтения ЛПР можно и непосредственно с помощью *парных сравнений* вариантов, не оценивая их по какому-либо критерию K или показателю эффективности f. ЛПР предъявляется каждая пара вариантов и предлагается указать, какой из вариантов предпочтительнее, или сказать, что варианты равноценны. Измерение выполняется по порядковой шкале. Результатом сравнения вариантов может быть строгое превосходство $A_i \succ A_j$, нестрогое превосходство $A_i \succeq A_j$, эквивалентность $A_i \approx A_j$ или равенство $A_i = A_j$ вариантов. Результаты измерений заносятся в квадратную матрицу типа «объект — объект» $\mathrm{A} = (a_{ij})$, которая называется *матрицей парных сравнений*. Элементы матрицы a_{ij} могут задаваться различным образом. Часто используются следующие числовые представления элементов матрицы парных сравнений:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i \succeq A_j, \\ 0, & \text{если } A_i \prec A_j; \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } A_i \succ A_j, \\ 1, & \text{если } A_i \approx A_j, \\ 0, & \text{если } A_i \prec A_j; \end{cases} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i \succ A_j, \\ 0, & \text{если } A_i \approx A_j, \\ -1, & \text{если } A_i \prec A_j. \end{cases}$$

Таблица 4.1

Матрица парных сравнений

A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
A_1	1	0	2	0	0	3
A_2	2	1	2	0	1	6
A_3	0	0	1	0	0	1
A_4	2	2	2	1	2	9
A_5	2	1	2	0	1	6

При единственном ЛПР и сравнении вариантов в целом выявление его предпочтений не составляет больших сложностей. Так, все варианты решения можно упорядочить по значениям строчных сумм $a_i = \sum_j a_{ij}$ элементов матрицы парных сравнений $\mathrm{A} = (a_{ij})$, которые являются, по сути, показателями эффективности вариантов для ЛПР.

Пример 4.1. Построим матрицу А парных сравнений (табл. 4.1) вариантов с оценками, приведенными на рис. 3.1. Элементы матрицы a_{ij} заданы вторым из указанных выше способов, последний столбец представляет строчные суммы a_i. Итоговым результатом является упорядочение всех вариантов $A_4 \succ A_2 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_3$, которое совпадает с полученным в примере 3.6. ■

При наличии многих критериев и/или многих ЛПР для выявления предпочтений необходимо строить отдельную матрицу парных сравнений «объект — объект» по каждому из критериев и для каждого из ЛПР. Обработка множества таких матриц может быть сопряжена с определенными трудностями. Построение итогового упорядочения вариантов с помощью парных сравнений — в целом более трудоемкая процедура, чем при непосредственной оценке вариантов.

4.2. Сравнение вариантов по свойствам

Многокритериальное описание предпочтений ЛПР позволяет провести оценку и сравнение вариантов по отдельным аспектам вместо их целостного рассмотрения. Во многих ситуациях это оказывается более удобным подходом к поиску приемлемого варианта решения проблемы, особенно в случае плохо структурируемых проблем. Использование многих критериев также расширяет возможности для интерпретации полученных результатов.

Ранее уже отмечалось, что природа многокритериальности состоит в наличии как многих характеристик у вариантов, так и многих показателей эффективности или качества результата выбора. Определение самих критериев и шкал их оценок остается во многом искусством ЛПР и консультантов по принятию решений, опирающимся на их практический опыт.

Когда различные свойства вариантов оцениваются по многим критериям $K_1, \ldots, K_n$, имеющим шкалы оценок $X_1, \ldots, X_n$, равноценность вариантов A_i и A_j для ЛПР определяется равенством соответствующих векторов или кортежей оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ и $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$ на множестве допустимых значений признаков $X^a \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$:

$$A_i \approx A_j \Leftrightarrow (x_{i1}, \ldots, x_{in}) =_X (x_{j1}, \ldots, x_{jn}). \tag{4.5}$$

Равенство векторов признаков $\mathbf{x}_i =_X \mathbf{x}_j$ выполняется при равенстве всех одноименных компонентов: $x_{iq} = x_{jq}$; $x_{iq}, x_{jq} \in X_q$, $q = 1, \ldots, n$.

Вариант A_i считается для ЛПР предпочтительнее варианта Aj, если вектор или кортеж оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ варианта A_i превосходит вектор или кортеж оценок $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$ варианта A_j, например, по векторному отношению доминирования или строгого доминирования на множестве $X_a \subseteq X$:

$$A_i \succeq A_j \Leftrightarrow (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \geq_X (x_{j1}, \ldots, x_{jn}), \tag{4.6}$$

$$A_i \succ A_j \Leftrightarrow (x_{i1}, \ldots, x_{in}) >_X (x_{j1}, \ldots, x_{jn}). \tag{4.7}$$

Первое отношение называют также отношением Парето. Оно выполняется при условии: $x_{iq} \geq x_{jq}$ для $q = 1, \ldots, n$, $x_{iq}, x_{jq} \in X_q$ и $x_{ik} > x_{jk}$ хотя бы для одного номера k. Второе отношение выполняется, если $x_{iq} > x_{jq}$ для всех $x_{iq}, x_{jq} \in X_q$, $q = 1, \ldots, n$. Множество всех доминирующих вариантов будем обозначать через $X^{\#}$. Варианты, входящие в множество $X^{\#}$, не сравнимы друг с другом по своим свойствам.

Вариант A_i может быть также предпочтительнее варианта A_j по отношению лексико-графического порядка:

$$A_i \succ A_j \Leftrightarrow (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \angle_X (x_{j1}, \ldots, x_{jk}), \tag{4.8}$$

которое выполняется, если компоненты векторов или кортежей оценок признаков удовлетворяют для любого произвольного k следующим соотношениям:

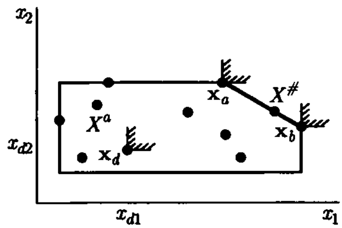


Рис. 4.1. Сравнение векторов оценок свойств вариантов по отношению доминирования на плоскости признаков (x_1, x_2)

$$x_{i1} \prec x_{j1}, \quad \text{или} \quad x_{i1} = x_{j1}, \quad x_{i2} \prec x_{j2}, \ldots, \quad \text{или}$$
$$x_{i1} = x_{j1}, \quad x_{i2} = x_{j2}, \ldots, \quad x_{i,k-1} = x_{j,k-1}, \quad x_{ik} \prec x_{jk}.$$

Пример 4.2. Сравним грузовые автомобили по их конструктивным характеристикам, приведенным в примере 3.7. Множество автомобилей представлено точками $\mathbf{x}$ на плоскости (x_1, x_2), образованной двумя критериями: мощность двигателя x_1 и расход топлива x_2. X^a — множество допустимых значений признаков (рис. 4.1).

Множество векторов оценок свойств вариантов, доминирующих вариант A_d, совпадает с заштрихованным неотрицательным квадрантом с вершиной в точке $\mathbf{x}_d = (x_{d1}, x_{d2})$. Множество $X^\#$ лучших вариантов, доминирующих все остальные варианты по мощности двигателя и расходу топлива, имеют векторы оценок, которые изображены жирной линией между точками $\mathbf{x}_a$ и $\mathbf{x}_b$. ■

4.3. Сравнение вариантов по эффективности

При наличии многих числовых показателей эффективности или целевых функций $f_1(x), \ldots, f_h(x)$, характеризующих качество решения, предпочтительность варианта для ЛПР, так же как и при сравнении вариантов A_i и A_j по их свойствам $x_i, x_j \in X^a$, $i, j = 1, \ldots, m$, можно установить различным образом.

Варианты A_i и A_j будут равноценны для ЛПР, если на множестве достижимых целей $Y^a = f(X^a) \subseteq Y = Y_1 \times \ldots \times Y_h$ равны векторы показателей эффективности вариантов $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i))$ и $\mathbf{y}_j = \mathbf{f}(x_j) = (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j))$:

$$A_i \approx A_j \Leftrightarrow (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i)) =_Y (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j)). \quad (4.9)$$

Равенство векторов целей $\mathbf{y}_i =_Y \mathbf{y}_j$ выполняется при равенстве значений всех одноименных компонент $f_k(x_i) = f_k(x_j)$, $f_k(x_i), f_k(x_j) \in Y_k = \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, h$.

Вариант A_i считается для ЛПР предпочтительнее варианта A_j, если вектор показателей эффективности $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i),$

$\ldots, f_h(x_i))$ варианта A_i доминирует вектор показателей эффективности $\mathbf{y}_j = \mathbf{f}(x_j) = (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j))$ варианта A_j на множестве достижимых целей Y^a:

$$A_i \succeq A_j \Leftrightarrow (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i)) \geq_Y (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j)), \quad (4.10)$$

т. е. если $f_k(x_i) \geq f_k(x_j)$ и $f_l(x_i) > f_l(x_j)$ хотя бы для одного номера l; $k, l = 1, \ldots, h$. В этом случае говорят, что вариант A_i *доминирует по Эджворту — Парето* вариант A_j. Такая предпочтительность означает, что, выбирая вариант A_i, ЛПР получает по каждому частному показателю эффективности не меньший выигрыш, а хотя бы по одному показателю — бóльший выигрыш, чем при выборе варианта A_j.

Вариант A_i может также предпочитаться варианту A_j, если вектор показателей эффективности $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i))$ варианта A_i строго доминирует вектор показателей эффективности $\mathbf{y}_j = \mathbf{f}(x_j) = (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j))$ варианта A_j на множестве достижимых целей Y^a:

$$A_i \succ A_j \Leftrightarrow (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i)) >_Y (f_1(x_j), \ldots, f_h(x_j)), \quad (4.11)$$

т. е. если $f_k(x_i) > f_k(x_j)$ для всех $k = 1, \ldots, h$. В таком случае говорят, что вариант A_i *доминирует по Слейтеру* вариант A_j. ЛПР получает по каждому частному показателю эффективности более предпочтительного варианта A_i бóльший выигрыш, чем при выборе менее предпочтительного варианта A_j.

Вариант A_p называют *парето-оптимальным*, *оптимальным по Эджворту — Парето*, или *эффективным*, если не существует других вариантов A_i, чьи векторы показателей эффективности $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i))$ доминируют вектор $\mathbf{y}_p = \mathbf{f}(x_p) = (f_1(x_p), \ldots, f_h(x_p))$, т. е. таких вариантов, для которых по всем частным показателям выполняется условие $f_k(x_i) \geq f_k(x_p)$ и хотя бы для одного показателя $f_l(x_i) > f_l(x_j)$, $k, l = 1, \ldots, h$. Соответственно вариант A_s называется *оптимальным по Слейтеру*, или *слабо эффективным*, если не существует других вариантов A_i, чьи векторы показателей эффективности $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_h(x_i))$ строго доминируют вектор $\mathbf{y}_s = \mathbf{f}(x_s) = (f_1(x_s), \ldots, f_h(x_s))$, т. е. таких вариантов, для которых по всем частным показателям выполняется условие $f_k(x_i) > f_k(x_s)$, $k = 1, \ldots, h$.

Множество эффективных вариантов принято обозначать через $X^* \subseteq X^a$, а множество векторов их показателей эффективности, которое называется также *паретовой границей* множества достижимости, — через $Y^* = f(X^*)$. Множество Y^*, представляющее в множестве достижимых целей Y^a парето-оптимальные

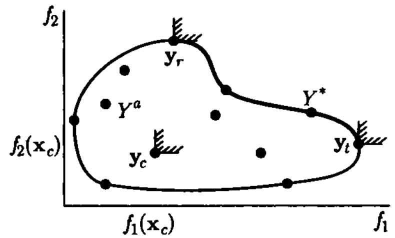


Рис. 4.2. Сравнение векторов показателей эффективности вариантов по отношению доминирования на плоскости целей (f_1, f_2)

варианты, состоит из недоминируемых векторов показателей эффективности, не сравнимых между собой. Анализ геометрических характеристик паретовой границы Y^* является весьма полезным приемом при разработке методов поиска эффективных вариантов, которые достаточно часто выбираются в качестве лучших. Отметим, однако, что на множестве допустимых значений признаков X^a множество эффективных вариантов X^*, вообще говоря, не совпадает с множеством вариантов $X^{\#}$, недоминируемых по своим свойствам. Аналогичные выводы справедливы и в отношении вариантов, оптимальных по Слейтеру.

Пример 4.3. Сравним грузовые автомобили по их эксплуатационным качествам, приведенным в примере 3.7. Множество автомобилей представлено точками $\mathbf{y}$ на плоскости (f_1, f_2), образованной двумя показателями: эксплуатационные расходы $f_1(x_1, x_2)$ и общий пробег $f_2(x_1, x_2)$. $Y^a = f(X^a)$ — множество достижимых целей (рис. 4.2).

Множество векторов показателей эффективности вариантов, доминирующих вариант A_c по Эджворту—Парето, совпадает с заштрихованным неотрицательным квадрантом с вершиной в точке $\mathbf{y}_c = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c) = (f_1(\mathbf{x}_c), f_2(\mathbf{x}_c))$, а доминирующих по Слейтеру — с неотрицательным квадрантом, у которого удалены границы и точка $\mathbf{y}_c$. Неотрицательный квадрант с вершиной в любой эффективной точке $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = (f_1(\mathbf{x}^*), f_2(\mathbf{x}^*))$ не содержит оценок других вариантов, кроме самой вершины. Множеству лучших (парето-оптимальных) вариантов X^* соответствует во множестве достижимости $Y^a = f(X^a)$ паретова граница $Y^* = f(X^*)$, которая изображена жирной линией между точками $\mathbf{y}_r$ и $\mathbf{y}_t$. Парето-оптимальные варианты, принадлежащие множеству X^*, доминируют другие варианты по эксплуатационным расходам и общему пробегу. В общем случае эффективные варианты из множества X^* не совпадают с вариантами из множества $X^{\#}$ (см. пример 4.2), доминирующими другие варианты по мощности двигателя и расходу топлива. ■

ГЛАВА 5
ВЫБОР ВАРИАНТОВ

5.1. Выделение предпочтительных вариантов

Лицо, принимающее решение, выражает свои предпочтения на разных этапах процесса выбора: формируя перечни критериев для оценки вариантов и/или их качества, задавая шкалы оценок по критериям, оценивая и сравнивая варианты по критериям, определяя решающее правило для выбора предпочтительного варианта. При этом ЛПР может руководствоваться разными стратегиями выбора.

Так, приобретая автомобиль, покупатель может считать цену одной из характеристик автомобиля, которая учитывается наряду с другими признаками, такими, как грузоподъемность, скорость, безопасность, комфортность и пр. И тогда лучшим будет автомобиль, который превосходит остальные по всему набору свойств. Если цена принимается за единственный показатель качества решения, то лучшим будет автомобиль, имеющий минимальную цену. В этом случае цена автомобиля представляет собой целевую функцию, зависящую от набора его характеристик. Наконец, цена может рассматриваться покупателем как ограничение, сужающее множество возможных вариантов выбора.

Обсудим особенности формализации предпочтений ЛПР применительно к трем типовым задачам принятия решений: выделение одного или нескольких предпочтительных вариантов, строгое и нестрогое упорядочение множества вариантов, группировка исходного множества вариантов решения в классы.

Существуют ситуации, когда ЛПР может непосредственно указать один или несколько наиболее предпочтительных вариантов, исходя из своих неявных внутренних ощущений. В этом случае ЛПР делает свой выбор интуитивно, ему бывает трудно объяснить побудительные мотивы и причины подобного выбора. Обычно от него и не требуется таких объяснений. При необходимости обосновать принятое решение ЛПР нуждается в аргументации своего выбора. В зависимости от контекста задачи это делается различным образом.

Выделение одного или нескольких предпочтительных вариантов сводится, по сути, к сокращению исходного множества возможных вариантов. Для этого разрабатываются специальные процедуры, позволяющие находить лучшие варианты, основываясь на различных способах их сравнения (как правило, по характеристикам рассматриваемых вариантов). Решающее правило выбора выглядит так:

$$\text{ЕСЛИ } \langle\text{условие}\rangle, \text{ ТО } \langle\text{решение}\rangle. \tag{5.1}$$

Здесь терм ⟨условия⟩ представляет собой требования, которым должны удовлетворять выбираемые варианты. Например, это могут быть значения признаков, описывающих варианты, или вид отношения между вариантами. Терм ⟨решение⟩ указывает имена выбираемых вариантов.

Если возможно задать единственный показатель эффективности (критерий качества) решения, то лучшими для ЛПР признаются варианты $A^* \Leftrightarrow x^*$, имеющие такое или такие значения признаков $x^* \in X^a$, при которых показатель эффективности $y = f(x)$ достигает своего экстремума

$$x^* \in \arg \operatorname*{extr}_{x \in X^a} f(x).$$

Содержательная трактовка экстремума $y^* = f(x^*)$ зависит от контекста решаемой задачи. Это может быть, например, минимальное время достижения цели, максимум грузоподъемности, минимум затрат и т. п. Такой выбор называется *экстремизационным*, или *оптимальным*, выбранный вариант — *оптимальным решением*, а показатель эффективности — *критерием оптимальности*. Очевидно, что правило экстремизационного выбора оптимальных вариантов по показателю эффективности можно формально записать в виде (5.1).

Пример 5.1. Выберем лучший вариант среди вариантов, оцененных с помощью парных сравнений в примере 4.1. В качестве критерия оптимальности возьмем строчную сумму $a_i = \sum_j a_{ij} = a(x_i)$ элементов матрицы парных сравнений. Оптимальное решение x^* — вариант A_4, для которого $a^* = \max_{x_i \in X^a} a(x_i) = 9$. ■

При наличии многих различных показателей эффективности $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ возникает задача многокритериальной оптимизации

$$x^* \in \arg \operatorname*{extr}_{x \in X^a} f_k(x), \quad k = 1, \ldots, h,$$

которая будет рассматриваться в гл. 8. Для выделения вариантов, лучших по многим критериям, используются разные процедуры построения одного или нескольких решающих правил выбора. Основные трудности связаны здесь с получением информации о предпочтениях ЛПР, согласованием предпочтений и их проверкой на непротиворечивость.

В ряде случаев показатели эффективности характеризуют «разнонаправленное» качество решения, условно подразделяясь на «положительные» и «отрицательные». Тогда при выборе оптимального решения «положительные» критерии стремятся максимизировать, при этом бóльшие значения оценок по этим критериям являются лучшими. «Отрицательные» критерии стремятся минимизировать, для них лучшими будут меньшие значения оценок.

В коллективном принятии решений широко применяются различные правила выбора (правила голосования), основанные на подсчете голосов, поданных за тот или иной имеющийся вариант. Эти правила выбора конструируются из индивидуальных предпочтений отдельных ЛПР. В таких ситуациях возможно появление парадоксов, связанных с несогласованностью предпочтений одного ЛПР или нескольких ЛПР, нетранзитивностью агрегированного предпочтения.

Когда имеется возможность тем или иным образом упорядочить все рассматриваемые варианты (альтернативы, объекты), лучшие варианты будут занимать первые места в итоговом упорядочении вариантов или принадлежать к первому классу (при разбиении вариантов на упорядоченные классы).

5.2. Упорядочение вариантов

Упорядочение вариантов является одним из наиболее распространенных видов итогового выбора и представляет собой установление между вариантами бинарных отношений строгого или нестрогого порядка, эквивалентности или несравнимости. Сравнение вариантов по признакам производится на основе их характеристик. Итоговый порядок строится либо на основе объективных свойств объектов, либо исходя из субъективных предпочтений ЛПР, либо на сочетании того и другого.

Многие задачи упорядочения вариантов часто сводятся к их *ранжированию*. Упорядочение вариантов с помощью ранжирования осуществляется по значениям рангов r_i вариантов, измеренным в порядковой шкале. Упорядочению вариантов $A_1 \succ \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m$ соответствует упорядочение их рангов $r_1 < < r_2 < \ldots < r_m$. Получаемая ранжировка вариантов может быть строгой и нестрогой. В последнем случае в ранжировке присутствуют эквивалентные варианты с равными рангами, которым обычно присваиваются одинаковые так называемые связанные ранги, равные среднему арифметическому значению их рангов.

Пример 5.2. Вычислим ранги вариантов, оцененных с помощью парных сравнений в примере 4.1. Воспользовавшись формулой (3.1), получим следующие значения рангов: $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_3 = 5$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, по которым строится нестрогая ранжировка вариантов $A_4 \succ A_2 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_3$. Так как варианты A_2 и A_5 эквивалентны, то каждому из них можно приписать связанный ранг $r_{2-5} = 2,5$. ■

В методах ранжирования, основанных на парных сравнениях, сделанных единственным ЛПР, итоговое упорядочение вариантов строится на основе сравнения всех пар вариантов. В случае сравнимости всех пар вариантов и транзитивности предпочтений ЛПР получается полное упорядочение объектов. Если некоторые из вариантов окажутся несравнимыми, то упорядочение будет частичным. Если же все варианты несравнимы, то упорядочить их не удается.

Значительные трудности может вызвать построение итогового упорядочения объектов, которые имеют много признаков и должны рассматриваться и анализироваться как единое целое, например объекты, оцененные несколькими ЛПР. Когда имеется несколько разных индивидуумов и много критериев оценки объектов, объекты сравниваются каждым человеком отдельно по каждому критерию. В результате появляется целый набор разнообразных матриц парных сравнений объектов друг с другом, обработка которых с целью окончательного выбора требует создания специальных вычислительных алгоритмов.

Применяются различные способы определения рангов вариантов. Например, варианты могут предъявляться человеку все сразу или поочередно. При небольшом числе вариантов и одном признаке (критерии оценки) ранжирование вариантов не представляет больших трудностей. При увеличении числа вариантов, критериев и экспертов, оценивающих варианты, число сопоставляемых вариантов резко возрастает. В таких случаях ранжирование вариантов существенно затрудняется.

При сравнении вариантов, особенно в трудных и сложных ситуациях, человек может быть не всегда последовательным в своих ответах, допускать ошибки и неточности, предпочтения ЛПР могут оказаться противоречивыми. Поэтому особое внимание требуется уделить выявлению и устранению возможной несогласованности высказываний ЛПР, неточностей и противоречий в его суждениях. Для этого нужно использовать специальные процедуры.

В силу ограниченных возможностей человека при обработке информации методы ранжирования являются для него достаточно трудоемкими.

5.3. Классификация вариантов

Наиболее сложная и трудная задача выбора — классификация вариантов. Понятие «класс» определяется следующим образом: *класс* — совокупность объектов, обладающих общими свойствами. Информация о свойствах объекта может быть получена путем наблюдений, измерений, оценок и представлена совокупностью признаков, имеющих числовые, символьные и/или вербальные (словесные) шкальные значения.

Каждый класс объектов характеризуется некоторым качеством, отличающим его от других классов. Входящие в один класс объекты считаются неразличимыми (эквивалентными) по качеству, а все классы вместе должны составлять исходную совокупность объектов. Сходство и различие объектов, относящихся к одному классу, широко используются при построении различных методов классификации.

Применяется два основных подхода к классификации объектов: *прямая классификация* состоит в перечислении объектов, составляющих класс; *непрямая классификация* производится на основе перечисления свойств, характеризующих класс.

Прямая классификация осуществляется путем непосредственного отнесения объекта в один из заданных классов с помощью измерения свойства объекта по порядковой шкале. При непрямой классификации классы выделяются по некоторым признакам или их сочетаниям, которые определяют особенности, общие для каждого класса, и отличают классы друг от друга. Объекты, обладающие требуемыми значениями признаков, включаются в соответствующий класс. Классом могут быть, например, объекты, имеющие желаемую комбинацию признаков; объекты, признаки которых лежат в определенных границах значений; объекты, наиболее близкие в признаковом пространстве.

Результатом прямой классификации является зачисление каждого классифицируемого объекта в заданный класс, при этом максимально возможное число классов ограничено, очевидно, числом рассматриваемых объектов. При наличии у объектов многих свойств возникает проблема поиска таких значений признаков, которые наиболее характерны для каждого класса и позволяют различать эти классы.

При непрямой классификации теоретически возможное число классов определяется мощностью прямого (декартового) произведения множеств значений шкал признаков. Когда число признаков и/или их значений достаточно велико, число потенциально возможных классов может существенно превысить число реально имеющихся объектов. Основная проблема в этом случае состоит в том, чтобы найти, какие комбинации признаков и их значений позволяют сформировать необходимое число классов, которые отличаются друг от друга по своим качествам и включают достаточное количество объектов.

Процедура классификации объектов в рамках формальной логики может быть описана как совокупность или последовательность решающих правил, схожих с правилом (5.1).

При прямой классификации терм ⟨условия⟩ включает названия объектов. При непрямой классификации один или несколько термов ⟨условия⟩ конструируются как отношения между различными признаками и/или их значениями, описывающими объекты класса. Терм ⟨решение⟩ в обоих случаях указывает имя определенного класса, к которому относятся объекты.

При одном ЛПР и достаточно небольшом числе классифицируемых вариантов и признаков, их описывающих, семейство решающих правил легко обозримо и доступно для анализа. Чем больше рассматриваемых вариантов и разнообразнее решающие правила их классификации, тем труднее анализ этих правил. При классификации вариантов ЛПР может допускать неточности, совершать ошибки, его оценки могут оказаться нетранзитивными. Поэтому в методах классификации, основанных на предпочтениях одного ЛПР, должны быть предусмотрены специальные возможности для выявления и устранения таких противоречий в его суждениях.

Принципиально иная ситуация возникает при классификации вариантов, которые оцениваются несколькими ЛПР. Неоднозначность классификации может обусловливаться различными причинами. Например, разные ЛПР могут по-разному классифицировать варианты — относить сильно различающиеся варианты в один и тот же класс, а варианты со сходными значениями признаков — в разные классы. Несогласованность индивидуальных решающих правил может быть вызвана неоднозначностью понимания ЛПР решаемой задачи, субъективным различием решающих правил, используемых разными людьми, специфичностью знаний самих ЛПР и многими другими причинами. В итоге могут появиться решающие правила, среди которых будут одинаковые, сходные, различающиеся и противоречивые правила. Все эти особенности должны не устраняться, а учитываться при построении обобщенного решающего правила, классифицирующего варианты, что представляет достаточно трудную задачу.

Одним из наиболее популярных и сравнительно простых способов прямой классификаций вариантов решения проблемы является их *сортировка* по именованным и/или упорядоченным классам. При сортировке вариантов индивидуум (ЛПР, эксперт) непосредственно относит вариант к одному из выделенных классов, измеряя свойства варианта по номинальной или порядковой шкале. В ряде методов сортировки допускается одновременное указание пары соседних оценок, если человек затрудняется с выбором одной из них.

Заметим, что сортировка является, по существу, нестрогой ранжировкой, которая состоит из небольшого числа упорядоченных групп (классов), объединяющих в себе эквивалентные варианты.

Пример 5.3. Рассортируем объекты, представленные на рис. 3.1, a, по упорядоченным классам, имена которых обозначены буквами a, b, c, d, e. Тогда вариант A_4 относится к классу a, варианты A_2 и A_5 — к классу b, вариант A_1 — к классу c, вариант A_3 — к классу e. Класс d не содержит ни одного варианта. Получим следующую классификацию вариантов: $(A_4) \succ (A_2 \approx A_5) \succ (A_1) \succ (A_3)$, которая совпадает с нестрогой ранжировкой, приведенной в примерах 3.6, 5.2. ■

Коллективная сортировка вариантов проводится на основе агрегирования индивидуальных суждений группы людей. Здесь также возможны ситуации, в которых к согласованности мнений отдельных участников предъявляются особые требования. Если согласованность оценок оказывается приемлемой, то итоговое распределение вариантов по классам может быть построено, например, путем усреднения индивидуальных оценок. Если мнения отдельных участников заметно различаются, должны использоваться другие методы сортировки, учитывающие эти различия.

5.4. Особенности способов выражения предпочтений ЛПР

Оценка, сравнение и выбор вариантов с использованием бинарных отношений и многих критериев раскрывают широкие возможности для выявления и представления предпочтений ЛПР.

Отметим основные особенности этих способов выражения предпочтений ЛПР.

Выражение предпочтений ЛПР с помощью бинарных отношений имеет следующие характерные черты:

- каждый из вариантов решения рассматривается не по отдельности, а в парах с другими вариантами;
- для каждой сравниваемой пары вариантов всегда можно либо сказать, сравнимы ли они, и указать одно из отношений — безразличие или эквивалентность вариантов, нестрогое или строгое превосходство одного из вариантов, либо считать варианты несравнимыми;
- результат сравнения любой пары вариантов не зависит от наличия или отсутствия других вариантов (*условие постоянства свойств* или *аксиома независимости* от других вариантов).

Использование бинарных отношений для выявления и представления предпочтений ЛПР обладает рядом преимуществ, обеспечивших их широкую распространенность при решении многих теоретических и практических задач — возможность формализованного описания многих содержательных понятий («лучше», «не хуже», «похожие», «одинаковые» и др.); достаточно высокая степень обобщенности, позволяющая учитывать при сравнении вариантов как объективные, так и субъективные факторы, а также различные характеристики вариантов; относительная простота процедуры получения информации о сравниваемых вариантах.

Среди недостатков языка бинарных отношений можно отметить: невозможность получения оценки одного отдельно взятого варианта; жесткость требований, предъявляемых к ЛПР, при получении от него информации о сравниваемых вариантах; ограниченность, недостаточная гибкость выражения предпочтений ЛПР; трудоемкость процедуры попарного сравнения при большом числе сравниваемых вариантов, при наличии различных предпочтений нескольких ЛПР в групповом принятии решений.

Основные особенности многокритериального подхода к выражению предпочтений ЛПР состоят в следующем:

- каждый из вариантов решения может рассматриваться по отдельности и оценивается как по признакам, описываемым одним или несколькими критериями, так и по одному или нескольким показателям эффективности решения;
- шкала оценок по каждому критерию определяется либо характером или свойством рассматриваемых вариантов, либо степенью достижения поставленной цели или качеством решения;
- оценки варианта даются отдельно и независимо по каждому критерию;
- сравнение вариантов решения сводится к попарному сравнению наборов их многокритериальных оценок. Для каждой пары сравниваемых вариантов всегда можно указать или строгое, или нестрогое превосходство одного из вариантов, или эквивалентность, или несравнимость вариантов;
- выделение лучших вариантов может осуществляться по экстремальным значениям одного или нескольких показателей эффективности, целевых функций, критериев качества решения (*принцип оптимальности* решения).

Укажем достоинства многокритериального способа выражения предпочтений ЛПР. Перечень и содержание частных критериев, вид шкал и число градаций оценок определяются как объективными свойствами вариантов, так и субъективными требованиями к качеству решения.

Разложение общего качества вариантов решения на совокупность многих составляющих качеств позволяет: дать более полную, «объемную» характеристику рассматриваемой проблемной ситуации; более гибко выражать предпочтения ЛПР, его политику в выборе решения, ослабить или усилить отдельные аспекты проблемной ситуации; полнее учесть интересы различных участников процесса принятия решения (ЛПР, владельца проблемы, активных групп); легче находить компромисс при групповом принятии решений; проще проверять согласованность получаемой информации.

Оценки по отдельным частным критериям более четко отражают различные аспекты смыслового содержания, более точны и удобны для объяснения результатов. Получаемая с их помощью информация содержит меньше противоречий.

В числе недостатков многокритериального подхода отметим следующие: многокритериальный подход не универсален, т. е. применим не ко всем проблемным ситуациям; процедуры выделения частных критериев неоднозначны и субъективны, их невозможно формализовать, набор частных критериев не единственен; сами критерии и оценки по шкалам критериев могут оказаться зависимыми и даже несовместимыми.

При единственном скалярном критерии оценки и единственном ЛПР все рассматриваемые варианты будут сравнимыми. При наличии многих критериев среди вариантов могут оказаться как сравнимые, так и несравнимые варианты. При многих критериях и нескольких ЛПР одни и те же варианты могут иметь различающиеся, в том числе и противоречивые, оценки, обработка которых для получения окончательного решения составляет значительные трудности.

Наиболее распространенными и практически важными являются задачи индивидуального выбора в случае хорошо и плохо структурируемых проблем. Все большее значение приобретают задачи группового и экспертного выбора. При этом поиск итогового решения задачи опирается, как правило, на информацию, полученную либо от одного индивидуума (ЛПР, эксперта), либо путем согласования или агрегирования различных оценок, данных разными индивидуумами. Именно таким задачам уделяется основное внимание в современной теории принятия решений.

В последнее время актуальны задачи, в которых невозможно или крайне сложно найти согласованное мнение нескольких участников, например, когда все они оценивают варианты независимо друг от друга и не могут знать оценок, данных другими. Поэтому есть потребность в создании новых методов получения и обработки информации, которые позволяли бы одновременно учитывать оценки, в том числе многокритериальные и противоречивые, всех членов группы, принимающей решения, без поиска компромисса между мнениями отдельных участников.

Основное содержание настоящего курса составляет изложение различных методов, помогающих людям находить лучшие варианты решения сложных проблем. Сначала рассматриваются задачи индивидуального выбора, когда решение принимается одним человеком, а затем задачи коллективного выбора, в которых результат решения зависит от суждений многих участвующих в выборе людей.

* * *

Рекомендуемая литература: [2], [6], [7], [9], [10], [11], [12], [13], [15], [16], [29], [32], [62], [73].

ЧАСТЬ II
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 6
ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

6.1. Понятие оптимального выбора

Большое число встречающихся на практике задач выбора сводится к нахождению лучших или наиболее предпочтительных для человека вариантов, а нередко — к поиску единственно лучшего варианта. При этом у каждого ЛПР есть собственные субъективные представления о том, что для него является предпочтительным в конкретной ситуации выбора.

Вместе с тем имеется достаточно много задач, для которых можно построить математическую модель выбора, где понятие лучшего варианта формализуется путем задания одного или нескольких числовых показателей эффективности или критериев качества решения. Эти показатели, хотя и задаются ЛПР, носят объективный характер, определяемый содержанием решаемой задачи, и выражаются какими-либо функциями, зависящими от переменных, которыми измеряются свойства вариантов. В таких случаях наиболее предпочтительным для ЛПР вариантом решения задачи выбора принято считать так называемый оптимальный вариант, который соответствует экстремальному значению одного или нескольких показателей эффективности решения при существующих условиях.

Пример 6.1. Требуется найти наилучший маршрут перевозки определенных грузов между заданными пунктами. Известны объемы отправляемых и получаемых грузов, расстояния между пунктами отправления и назначения, стоимость перевозки единицы груза между двумя пунктами. В качестве лучшего может быть принят вариант перевозки грузов, который характеризуется наименьшей стоимостью всех перевозок или минимальным временем транспортировки грузов, или кратчайшими маршрутами между пунктами отправления и назначения, или одновременным выполнением всех этих требований. ■

Задание того или иного перечня критериев, их числа и функциональных зависимостей может и значительно облегчить или, напротив, затруднить нахождение лучшего варианта, для чего нередко приходится выполнять довольно сложные вычисления. Весьма часто оказывается, что предпочтительный вариант не единственен, а имеется несколько различных, но, по сути, равноценных вариантов, например множество парето-оптимальных вариантов. Чтобы выделить среди них один наилучший («самый лучший») вариант, нужна какая-то дополнительная информация о предпочтениях ЛПР. Таким образом, поиск оптимального варианта не означает полного исключения ЛПР из процесса выбора.

Оптимальный вариант решения и возможности его нахождения во многом зависят от содержательной интерпретации критериев оптимальности. А это определяется интересами ЛПР и может быть указано только им. Итак, даже оптимальный (экстремальный в математическом смысле) выбор в той или иной степени опирается на субъективные предпочтения человека.

Еще раз подчеркнем, что непременным условием для постановки задачи оптимального выбора, как и любой задачи принятия решения, является наличие нескольких возможных вариантов, среди которых производится выбор лучшего в каком-то смысле варианта. Если имеется только один исходный вариант решения, то нет и возможности для выбора.

6.2. Задача оптимального выбора

Принципиальным моментом для формулировки задачи оптимального выбора является возможность описания проблемной ситуации и предпочтений ЛПР в количественной форме.

Это означает, что, во-первых, возможные варианты решения (альтернативы, объекты, способы действия) определяются количественными признаками (переменными, параметрами, атрибутами), измеряемыми с помощью числовых шкал. Во-вторых, должны быть заданы количественные же показатели (критерии оптимальности, показатели эффективности, целевые функции, функции ценности), по величине которых оценивается качество выбранного варианта. Такого рода ситуации характерны для хорошо структурируемых проблем и повторяющихся ситуаций выбора, типичных для исследования операций и оптимального управления.

Для анализа возможных вариантов решения проблемы (способов достижения цели) и выбора среди них одного или нескольких лучших вариантов строятся формальные модели оптимального выбора. Модель дает упрощенное представление реальной проблемы и должна отражать наиболее важные и объективно существующие зависимости и связи между вариантами, описывающими их признаками и ограничениями, которые задаются управляемыми и неуправляемыми факторами. Построение такой модели — задача консультантов-аналитиков и экспертов при участии ЛПР. При построении модели выбора нужно соизмерять (а это — уже искусство!) адекватность и детальность модели с точностью требуемого решения реальной задачи выбора, а также с объемом необходимой для поиска решения информации — как имеющейся в наличии, так и получаемой дополнительно.

Математическая модель оптимального выбора включает в себя следующие основные элементы:

- совокупность возможных вариантов решения $A_1, \dots, A_m$, число которых может быть и конечным, и бесконечным;
- скалярный признак x или n-мерный вектор признаков $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, описывающий характерные особенности каждого варианта при помощи числовых шкал X_j критериев K_j, $j = 1, \dots, n$;
- ограничения на множество возможных вариантов, которые задаются равенствами или неравенствами $g_q(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta) \le b_q$, включающими действительные функции многих переменных $g_q(\mathbf{x}_i, \xi, \delta, \xi, \zeta) \in \mathbf{R}$, $q = 1, \dots, p$, где δ — детерминированные, ξ — стохастические, ζ — неопределенные факторы;
- один или несколько критериев оптимальности (показателей эффективности, целевых функций) $y_1, \dots, y_h$, которые являются действительными функциями многих переменных $y_k = f_k(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta)$, $f_k(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta) \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, h$.

Детерминированные факторы δ характеризуются известными или заранее заданными числовыми значениями. Неопределенные факторы ξ представляют собой случайные величины, точные числовые значения которых хотя и неизвестны, но могут быть заданы функциями распределения плотности вероятностей. Неопределенные и нечеткие факторы ζ могут принимать отдельные числовые значения, но функции распределения вероятностей для них либо не известны, либо не могут быть определены.

Ограничения определяют в пространстве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ признаков вариантов *множество допустимых значений признаков*, или *область допустимых решений* $X^a \subseteq X$. Множеству допустимых значений X^a соответствует в пространстве показателей эффективности $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_h = \mathbf{R}^h$ *множество достижимых целей* $Y^a = f(X^a) \subseteq Y$. Каждому варианту решения A_i можно сопоставить некоторую точку x_i или вектор $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $x_{ij} \in X_j$ из множества допустимых значений X^a, характеризующую(ий) свойства варианта, и точку $y_i = f(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta)$ или вектор $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{ih})$, $y_{ik} = f_k(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta) \in \mathbf{R}$ из множества достижимых целей Y^a, оценивающую(ий) эффективность решения.

Задача оптимального выбора (выделения лучшего варианта) формулируется следующим образом: найти вектор признаков варианта $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, который обеспечивает экстремальные (например, максимальные) значения частных целевых функций на множестве допустимых значений X^a, т. е.

$$f_k(\mathbf{x}, \delta, \xi, \zeta) \to \max_{x \in X^a}, \qquad (6.1)$$

и удовлетворяет заданным ограничениям $g_q(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta) \leq b_q$, $q = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, h$. Такой вариант $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ называют *оптимальным решением* задачи выбора, а целевые функции — *критериями оптимальности*. В задачах оптимального выбора варианты сравниваются друг с другом по значениям критериев оптимальности в пространстве целей, где и ищется оптимальный вариант или варианты, которые отождествляются с наиболее предпочтительным для ЛПР результатом.

Следует помнить, что получаемые с помощью различных методов оптимальные варианты всегда нужно рассматривать только как некоторые рекомендации для ЛПР по выбору предпочтительного варианта решения, а не как окончательные и безоговорочные «научно обоснованные» результаты.

6.3. Классификация задач и методов оптимального выбора

Оптимальный выбор может осуществляться при разных внешних условиях или, как еще говорят, в различной окружающей среде. В зависимости от присутствия тех или иных факторов δ, ξ, ζ, характеризующих информированность ЛПР, возможны следующие задачи оптимального выбора:

- *в условиях определенности* — имеется полная и исчерпывающая информация о состоянии среды, необходимая для принятия решения;
- *в условиях вероятностной неопределенности и риска* — информация о состоянии среды неполная, но с известными вероятностными характеристиками случайных факторов;
- *в условиях полной неопределенности* — имеется отрывочная, недостаточная, нечеткая и/или приблизительная информация о некоторых характеристиках состояния среды.

В задаче оптимального выбора могут одновременно присутствовать и факторы различных типов.

Пример 6.2. Требуется подобрать для магазина ассортимент товаров, которые обеспечивают получение максимальной прибыли. Условия определенности: товары повседневного спроса, имеющие устойчивую продажу со стабильным спросом на товар и известным числом покупателей. Условия неопределенности: сезонные товары, имеющие известные вероятностные показатели спроса (осенью всегда нужны зонты и непромокаемая обувь), и ожидаемое (прогнозируемое) число покупателей; модные товары, распродажа которых характеризуется неизвестным числом покупателей и плохо прогнозируемым спросом (трудно предугадать, какая одежда станет модной через год). ■

По числу целевых функций будем различать *однокритериальные* и *многокритериальные* задачи. Множественность критериев оптимальности, как уже отмечалось, обусловливается разнообразием способов оценки качества вариантов. По наличию или отсутствию зависимости процедуры принятия решения от времени выделяют *статические* и *динамические* задачи. В таких случаях говорят об одно- или многоэтапном оптимальном выборе.

Сложность решения задачи оптимального выбора во многом зависит от специфичности множеств, ограничений и функций, используемых в математической модели проблемной ситуации. Поиск оптимального решения облегчается в случае ограниченных, конечных и выпуклых множеств, непрерывных функций, затрудняется на невыпуклых множествах.

В условиях определенности при небольшом числе вариантов $\mathbf{x}_i$ и одном критерии можно найти оптимальное решение $\mathbf{x}^*$, вычисляя экстремальное значение функции $y^* = f(\mathbf{x}^*)$. При большом числе переменных и ограничений поиск оптимального решения в случае скалярной целевой функции осуществляется методами математического программирования, некоторые из них описаны в гл. 7, 10. Оптимальный выбор при многих целевых функциях осложняется тем обстоятельством, что критерии оптимальности обычно достигают своих экстремальных значений в различных точках множества допустимых решений. В таком случае для нахождения оптимального варианта необходимы дополнительная информацию о предпочтениях ЛПР и специальные методы многокритериальной оптимизации, представленные в гл. 8, 9.

Задачи оптимального выбора в условиях неопределенности и нечеткости рассматриваются в гл. 11, 12. Для нахождения оптимальных решений при заданных функциях распределения значений случайных факторов используются статистические методы. При наличии неизвестных или нечетко определенных факторов применяются методы и алгоритмы теории нечетких множеств, теории игр, теории адаптивного управления, эвристические методы.

ГЛАВА 7
СКАЛЯРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

7.1. Выбор в условиях определенности

Для принятия решений в условиях определенности характерна полная информированность ЛПР о закономерностях поведения рассматриваемой системы, объекта или процесса при известном состоянии окружающей среды. Это означает, что между выбираемыми вариантами решения задачи и результатом выбора имеется детерминированная взаимная связь, заданная функциями и отношениями.

Задача оптимального детерминированного выбора записывается так:

$$\begin{aligned} &f_k(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a}, \quad k = 1, \ldots, h, \\ &g_q(\mathbf{x}, \delta) \le b_q, \quad q = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор признаков варианта; $f_k(\mathbf{x})$ — целевые функции, или критерии оптимальности; $g_q(\mathbf{x}, \delta)$ — заданные функции, образующие систему ограничений из равенств и/или неравенств; X^a — множество допустимых значений; δ — детерминированные факторы. Эквивалентная форма записи задачи оптимального выбора имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^* \in \arg\max_{x \in X^a} f_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, \ldots, h, \\ &g_q(\mathbf{x}, \delta) \le b_q, \quad q = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Задачи оптимального детерминированного выбора можно условно разделить на вариационные задачи и задачи математического программирования.

Для решения *вариационных задач оптимизации* применяются методы вариационного исчисления и математического анализа, позволяющие находить экстремумы критериев оптимальности. Критерии $y_k = f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, h$, и ограничения $g_q = g_q(\mathbf{x})$, $q = 1, \ldots, p$, предполагаются дифференцируемыми функциями многих переменных $x_1, \ldots, x_n$. Множество допустимых значений X^a может также являться подмножеством некоторого функционального пространства.

Классические методы оптимизации подразделяются на методы отыскания безусловного экстремума функции многих переменных при отсутствии ограничений и отыскания условного экстремума функции многих переменных при наличии ограничений в виде равенств и неравенств.

Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции задаются уравнениями $\partial f_k(\mathbf{x})/\partial x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Широко известен метод множителей Лагранжа для нахождения экстремума скалярной функции $y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n)$ при ограничениях $g_q(x_1, \ldots, x_n) = b_q$, $q = 1, \ldots, p$, основанный на использовании функции Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f_k(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^{p} \lambda_q [b_q - g_q(\mathbf{x})].$$

Оптимальный вариант $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ принадлежит множеству решений системы $n + p$ уравнений, которые получаются приравниванием к нулю частных производных функции $L(\mathbf{x}, \lambda)$ по x_i и λ_q. Для выделения лучшего варианта используют некоторые достаточные условия экстремума. Существуют и другие так называемые неклассические методы решения задач оптимизации в бесконечномерном пространстве.

Задача математического программирования формулируется обычно как задача максимизации (или минимизации) целевой функции $y = f(\mathbf{x})$ на множестве допустимых решений X^a, которое задается системой равенств и/или неравенств:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a}, \\ g_q(\mathbf{x}) \le b_q, \quad q = 1, \ldots, p. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Критерий оптимальности $f(\mathbf{x})$ и входящие в ограничения функции $g_q(\mathbf{x})$ являются скалярными функциями векторного аргумента $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $f\colon X \to \mathbf{R}$, $g_q\colon X \to \mathbf{R}$. Задачи и методы математического программирования различаются по виду критерия оптимальности, характеру ограничений, особенностям множества допустимых решений, зависимости процедуры выбора от времени.

7.2. Задача управления запасами

Рассмотрим в качестве примера классической задачи скалярной оптимизации задачу управления запасами. Такая задача возникает при необходимости создать оптимальный запас материальных ресурсов, сырья, готовой продукции, предметов потребления и тому подобного в целях удовлетворения спроса на протяжении заданного промежутка времени.

Модель управления запасами предназначена для расчета моментов времени и объемов каждого очередного пополнения запасов, т. е. сроков размещения и величины заказа. Обычно эти характеристики ищутся из условия минимизации удельных (в единицу времени) суммарных расходов $z = f(x)$, связанных с управлением запасами, как функции величины запаса x. В общем случае удельные суммарные расходы складываются из следующих составляющих:

$$z = z_{\text{экспл}} + z_{\text{непроизв}} + z_{\text{дефиц}}.$$

Удельные эксплуатационные расходы $z_{\text{экспл}}$ связаны с расходами на хранение запасов, содержанием складских помещений и оборудования, амортизационными отчислениями, убытками от порчи запасенных ресурсов и т. п. Эксплуатационные расходы возрастают с увеличением объема запасов.

Непроизводственные расходы определяются главным образом расходами на содержание управленческого аппарата, оформление заказов и предполагаются условно постоянными, практически не зависящими от размера заказа. Поэтому удельные непроизводственные расходы $z_{\text{непроизв}}$ уменьшаются при увеличении промежутков времени между очередными заказами.

Дополнительные издержки $z_{\text{дефиц}}$ представляют собой расходы, вызванные дефицитом (неудовлетворенным спросом) из-за отсутствия нужных запасов. Обычно такие финансовые потери оценить труднее всего, поскольку они могут быть вызваны плохо формализуемыми и неизмеряемыми факторами.

Величина и срок размещения заказа определяются различными обстоятельствами и, в первую очередь, ожидаемыми потребностями в запасах. По своему характеру эти потребности могут быть известными или прогнозируемыми; определенными (детерминированный спрос) или неопределенными (вероятностный спрос); стационарными (не зависящими от времени) или нестационарными (меняющимися во времени).

Влияние на формулировку модели управления запасами оказывают также многие другие факторы, в их числе:

- условия пополнения запаса (в определенный момент времени или при определенном уровне оставшегося запаса);

- кратность пополнения запаса (однократное пополнение в течение заданного периода времени — избыточный запас, или многократное в некоторые моменты времени — недостаточный запас);
- способы пополнения запаса (одномоментное или равномерно распределенное во времени);
- период управления запасами (конечный или бесконечный);
- сроки выполнения заказа (фиксированные или случайные);
- имеющиеся виды запасов (ограничения на количества и вид пунктов хранения, производства или потребления запасов).

Сложность модели управления запасами возрастает при переходе от определенного и стационарного спроса к неопределенному и нестационарному.

Наиболее простыми задачами управления запасами являются детерминированные задачи, описываемые однопродуктовой стационарной моделью с постоянным спросом. Примером таких задач могут служить потребление основных продуктов питания (хлеб, молоко, масло, сахар, соль), использование расходных материалов (бумага, канцелярские товары, строительные материалы, крепежные изделия — гайки, болты и т. п.).

В однопродуктовой стационарной модели с постоянным спросом уровень запаса x является функцией времени, имеющей пилообразную форму (рис. 7.1). Минимальный уровень x_0, при котором запас должен быть пополнен, называется *точкой заказа*. *Длительность цикла заказа* — промежуток времени T между соседними точками заказа — определяется имеющимся запасом x и интенсивностью спроса d в единицу времени $T = x/d$. При одной и той же интенсивностью спроса высота пика функции пропорциональна длительности цикла.

Рассмотрим некоторые детерминированные задачи управления однопродуктовым запасом, отличающиеся условиями.

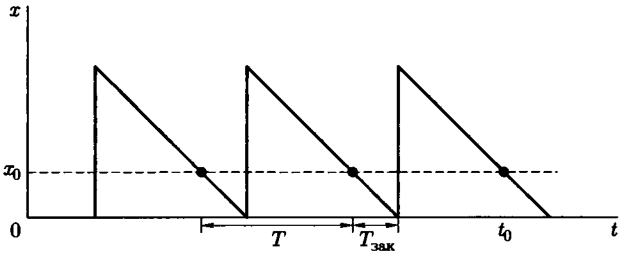


Рис. 7.1. Зависимость уровня запаса от времени (однопродуктовая стационарная модель с постоянным спросом), • — точка заказа

А. Отсутствие дефицита, единовременное пополнение запаса. Суммарные расходы в единицу времени состоят из удельных эксплуатационных $z_{\text{экспл}}$ и непроизводственных $z_{\text{непроизв}}$ расходов. Положим для простоты, что эксплуатационные расходы по определению пропорциональны уровню среднего запаса $z_{\text{экспл}} = hx_{\text{ср}} = hx/2$, где h — эксплуатационные расходы в единицу времени, связанные с хранением единицы запаса, а непроизводственные расходы обратно пропорциональны длительности цикла заказа $z_{\text{непроизв}} = k/T = kd/x$, где k — общие непроизводственные расходы. Тогда удельные общие расходы равны

$$z_{\text{А}} = \frac{hx}{2} + \frac{kd}{x}.$$

Оптимальный уровень запаса x^* находится из условия минимизации функции

$$z = f(x) \to \min.$$

Из уравнения $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{h}{2} - \dfrac{kd}{x^2} = 0$ получаем величину так называемого экономичного размера заказа $x^*_{\text{А}} = \sqrt{2kd/h}$ (формула Уилсона) и оптимальное значение удельных суммарных расходов $z^*_{\text{А}} = z_{\text{А}}(x^*) = 2kd/x^*_{\text{А}} = \sqrt{2kdh}$. (Читателю рекомендуется самостоятельно убедиться, что в точке $x^*_{\text{А}}$ выполняется достаточное условие $d^2z/dx^2 > 0$ минимальности функции z.)

Б. Отсутствие дефицита, равномерное пополнение запаса. Предположим, что запас пополняется за счет выпускаемой продукции с интенсивностью производства в единицу времени r, которая превосходит интенсивность спроса $d (r > d)$. Тогда для удельных суммарных расходов имеем

$$z_{\text{Б}} = \frac{hx(1 - d/r)}{2} + \frac{kd}{x}.$$

Отсюда получаем выражения для экономичного размера заказа $x^*_{\text{Б}} = \sqrt{2kd/h(1 - d/r)}$ и оптимальных расходов $z^*_{\text{Б}} = z_{\text{Б}}(x^*) = 2kd/x^*_{\text{Б}} = \sqrt{2kdh(1 - d/r)}$.

В. Наличие дефицита, единовременное пополнение запаса. В этом случае в суммарные расходы дополнительно включаются издержки $z_{\text{дефиц}}$, обусловленные отсутствием необходимого уровня запасов, и удельные общие расходы определяются выражением

$$z_{\text{В}} = \frac{h(x - v)^2 + bv^2}{2x} + \frac{kd}{x},$$

где v — величина дефицита (неудовлетворенного спроса); b — удельные потери от дефицита в единицу времени.

Экономичный размер заказа $x^*_{\text{В}} = \sqrt{2kd(h+b)/hb}$, оптимальная величина дефицита $v^*_{\text{В}} = \sqrt{2kdh/b(h+b)}$, тогда оптимальные общие расходы составляют $z^*_{\text{В}} = z_{\text{В}}(x^*, v^*) = 2kd/x^*_{\text{В}} = \sqrt{2kdhb/(h+b)}$.

Г. Наличие дефицита, равномерное пополнение запаса. Удельные общие расходы в единицу времени определяются выражением

$$z_{\text{Г}} = \frac{h[x(1-d/r)-v]^2 + bv^2}{2x(1-d/r)} + \frac{kd}{x}.$$

Экономичный размер заказа $x^*_{\text{Г}} = \sqrt{2kd(h+b)/hb(1-d/r)}$, оптимальная величина дефицита $v^*_{\text{Г}} = \sqrt{2kdh(1-d/r)/b(h+b)}$, тогда оптимальные общие расходы составляют $z^*_{\text{Г}} = z_{\text{Г}}(x^*, v^*) = 2kd/x_{\text{Г}^*} = \sqrt{2kdhb(1-d/r)/(h+b)}$.

Оптимальная стратегия управления запасами состоит в заказе x^* единиц ресурсов через каждые $T^* = x^*/d$ единиц времени. В реальных условиях существует некоторый промежуток времени $T_{\text{зак}}$ между моментом размещения заказа и его фактическим выполнением. Момент заказа определяется тогда условием $t_0 = |T^* - T_{\text{зак}}|$ (см. рис. 7.1). Фактически точка размещения заказа определяет уровень запаса $x_0 = dt_0$, соответствующий моменту t_0. Заметим, что в приведенных моделях управления запасами в любой момент времени имеется более одного размещенного, но не выполненного заказа.

В практических ситуациях уровень спроса, величина дефицита, сроки выполнения заказа и другие показатели могут иметь не детерминированный, а вероятностный характер, число видов ресурса не единственно. Такие ситуации описываются более сложными многопродуктовыми моделями, для решения которых применяются методы линейного и динамического программирования, методы оптимального выбора в условиях неопределенности.

7.3. Математическое программирование

Задачи математического программирования возникли из потребностей решения практических проблем в области экономики, промышленности, техники, военного дела, связанных с построением наилучшей программы действий, и являются математическими моделями таких проблем выбора. Общая постановка задачи математического программирования представлена соотношениями (7.3). К числу основных относятся следующие задачи математического программирования:

- задача *линейного программирования* с линейным критерием и линейными ограничениями

$$
\begin{gathered}
y = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max_{x \in X^a}, \\
\sum_{i=1}^{n} a_{qi} x_i \le b_q, \quad q = 1, \dots, p, \\
x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, n,
\end{gathered} \tag{7.4}
$$

где a_{qi}, b_q, c_i — заданные постоянные; множество допустимых решений X^a — выпуклый многогранник;

- задача *квадратичного программирования* с квадратичным критерием

$$
y = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \to \max_{x \in X^a}
$$

и линейными ограничениями, аналогичными приведенным выше, где a_{qi}, b_q, c_i, d_{ij} — заданные постоянные; множество X^a — выпуклый многогранник;

- задача *выпуклого программирования*, где критерии и ограничения — нелинейные выпуклые функции векторного аргумента, в частности квадратичные функции; множество X^a — выпуклый многогранник;
- задача *дискретного программирования*, где все переменные x_i принимают дискретные, в частности целочисленные, значения.

Существуют и другие специализированные задачи математического программирования — динамическое программирование, стохастическое программирование, задачи с сепарабельными критериями оптимальности: аддитивным $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_k f_k(\mathbf{x})$, мультипликативным $f(\mathbf{x}) = \prod\limits_k f_k(\mathbf{x})$.

Общий метод решения задачи линейного программирования разработал выдающийся математик и экономист, лауреат Нобелевской премии Л. В. Канторович (СССР, 1938). Теория выпуклого программирования опирается на теорему Куна — Таккера о существовании седловой точки функции Лагранжа. В основе ряда методов программирования лежит принцип оптимальности Беллмана (США, 1957). Универсальные методы решения задач дискретного программирования отсутствуют. Для отдельных видов дискретных задач созданы специальные методы поиска экстремума целевых функций.

Одно из главных мест в решении задач математического программирования занимают вычислительные методы, использующие ЭВМ. Широкое распространение получили методы возможных направлений, метод штрафных функций и др. Вычислительные методы подразделяют на *точные*, которые гарантируют нахождение экстремума целевой функции $y = f(\mathbf{x})$, и *приближенные*, приводящие к экстремуму целевой функции $y = f(\mathbf{x})$ с заданной точностью. Методы можно также подразделить на *конечные*, дающие итоговый результат решения задачи за конечное число шагов, и *асимптотические*, состоящие из бесконечного числа шагов. В *итеративных* методах процесс поиска результата решения задачи разбивается на последовательно выполняемые циклические шаги (итерации).

7.4. Задача линейного программирования

Задачи линейного программирования (7.4) относятся к числу наиболее простых и хорошо изученных задач математического программирования. Основная их особенность состоит в том, что скалярный критерий оптимальности $y = f(\mathbf{x})$ является линейной функцией n переменных $x_1, \ldots, x_n$, составляющих в совокупности вариант $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ решения задачи оптимального выбора, а все ограничения $g_q(\mathbf{x}) \leq b_q$, $q = 1, \ldots, p$, представляют собой систему линейных уравнений и неравенств. Рассмотрим в качестве примера задачи оптимального планирования производства, имеющие одинаковую математическую постановку, но разное содержание.

Пример 7.1. На предприятии выпускается n различных видов изделий и используется p разных видов ресурсов. Обозначим: x_i — количество выпускаемых изделий i-го вида, c_i — цена i-го вида изделий, a_{qi} — затраты q-го вида ресурсов на выпуск единицы i-го вида изделий, b_q — запасы q-го вида ресурсов. Вариантом планирования производства является распределение $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ объемов выпуска различных видов изделий, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ определяет общий доход от продажи выпущенной продукции, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi} x_i$ — общие затраты q-го вида ресурсов. Требуется найти такие оптимальные объемы $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ выпуска каждого вида продукции, чтобы общий доход от ее продажи был максимальным. ■

Пример 7.2. На предприятии, выпускающем однородную продукцию, применяется n различных технологических способов производства. Для выпуска изделий используются p разных видов ресурсов: рабочая сила, оборудование, сырье, электроэнергия и т. п. Обозначим через x_i — время работы по i-му технологическому способу, c_i — количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по i-му технологическому способу, a_{qi} — затраты q-го вида ресурсов в единицу времени при работе по i-му технологическому способу, b_q — запасы q-го вида ресурсов. Вариантом планирования производства является распределение $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ времени работы по технологическим способам, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ определяет общий объем выпускаемой продукции, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi} x_i$ — общие затраты q-го вида ресурсов. Требуется найти такое оптимальное распределение $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ времени работы по каждому технологическому способу, чтобы общий объем выпускаемой продукции был максимальным. ■

Можно усложнить постановку задачи оптимального планирования, если ввести дополнительные ограничения. Например, ограничения на объемы выпуска i-го вида изделий $x_i^{\min} \leq x_i \leq$ $\leq x_i^{\max}$. Здесь $x_i^{\min}$ и $x_i^{\max}$ — минимальный и максимальный объемы продукции, которые характеризуют план выпуска и величину спроса на соответствующее изделие.

Любая задача линейного программирования может быть приведена к следующей *стандартной*, или *канонической*, *форме*. Требуется максимизировать значение линейной функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

на множестве всех неотрицательных решений системы линейных алгебраических уравнений $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ p < n)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n &= b_p, \end{aligned} \qquad (7.5)$$

которое определяет множество допустимых значений X^a.

Для записи задачи линейного программирования в стандартной форме могут понадобиться дополнительные преобразования. Нередко из содержательных соображений может потребоваться минимизация критерия оптимальности. Например, в задаче оптимального планирования производства необходимо минимизировать расходы на выпуск определенных видов продукции. В таком случае достаточно заменить критерий оптимальности $f(\mathbf{x})$ на противоположный по знаку критерий $-f(\mathbf{x})$. Очевидно, что при этом будет выполняться равенство $\min\limits_{x\in X^a} f(\mathbf{x}) = -\max\limits_{x\in X^a}(-f(\mathbf{x}))$. Отметим, что подобное сведение задачи минимизации к задаче максимизации справедливо для произвольной (необязательно линейной) целевой функции и произвольного допустимого множества X^a.

Если среди ограничений задачи присутствуют ограничения в виде неравенств $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi}x_i \leq b_q$, то в этом случае, вводя дополнительные неотрицательные переменные $v_q \geq 0$, ограничения можно записать как равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi}x_i + v_q = b_q$. Аналогичным образом неравенства вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi}x_i \geq b_q$ приводятся к равенствам $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{qi}x_i - v_q = b_q$. Заметим, что ограничения, заданные в стандартной форме задачи как равенства, всегда можно превратить в ограничения-неравенства.

Из курса линейной алгебры известно, что неотрицательное решение системы алгебраических уравнений (7.5) существует не всегда и возможны следующие ситуации:

- система несовместна, т. е. не имеет ни одного, в том числе неотрицательного, решения (число переменных n меньше числа уравнений p);
- система совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение (число переменных n больше числа уравнений p), но среди ее решений нет ни одного неотрицательного;
- система имеет неотрицательные решения, но целевая функция $f(\mathbf{x})$ не достигает максимума на множестве неотрицательных решений, так как она не ограничена сверху на этом множестве;
- система имеет неотрицательные решения, среди которых существует такое (или такие), при котором функция $f(\mathbf{x})$ достигает максимума на этом множестве решений.

Совместную систему r линейных уравнений с n переменными, среди коэффициентов которой хотя бы один отличен от нуля, при $r \leq p < n$ всегда можно разрешить относительно r переменных. Эти переменные называют *базисными*, или *главными*, а остальные $s = n - r$ переменных, через которые выражаются базисные переменные, — *свободными*. В таком случае критерий оптимальности $f(\mathbf{x})$ также можно выразить через свободные переменные. Число переменных уменьшается на r. Все оставшиеся s переменных удовлетворяют ограничениям-неравенствам. Заметим, что выбор базисных и свободных переменных в общем случае не является однозначным. Поэтому неоднозначен и переход от стандартной формы к форме (7.4) записи задачи линейного программирования.

7.5. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме. Известен так называемый *геометрический* метод решения задачи линейного программирования. Поясним существо этого метода для имеющего наглядное представление случая двух свободных и любого числа базисных переменных.

Будем считать переменные x_1 и x_2 свободными, а остальные переменные — базисными. Разрешим систему $p = n - 2$ линейных алгебраических уравнений (7.5) относительно переменных $x_3, x_4, \ldots, x_n$, т. е. выразим базисные переменные $x_3, x_4, \ldots, x_n$ через свободные переменные x_1 и x_2. Получим новую систему, состоящую из p линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3, \\ x_4 &= \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где каждая базисная переменная $x_i \geq 0$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$.

Рассмотрим плоскость, заданную осями координат x_1 и x_2 (рис. 7.2, *а*), и изобразим на ней область допустимых решений X^a. Поскольку каждая переменная x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ неотрицательна, допустимые решения должны лежать в неотрицательном квадранте плоскости (x_1, x_2), образованном двумя осями координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Положим $x_3 = 0$. Из первого уравнения системы линейных уравнений (7.6) получаем уравнение прямой

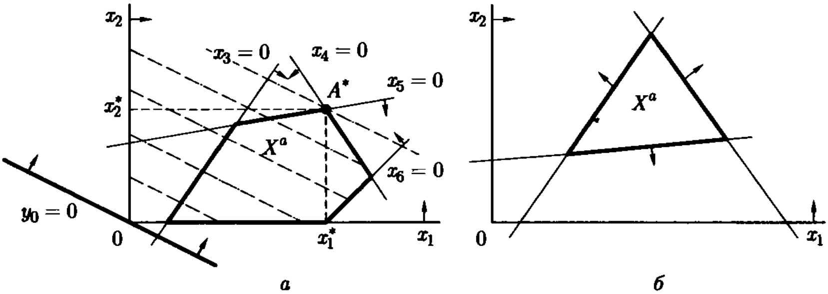


Рис. 7.2. Область допустимых решений:

а — имеется единственное оптимальное решение; *б* — допустимых решений нет

линии $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$. Допустимые решения должны лежать не ниже этой прямой линии в полуплоскости $x_3 \geq 0$. Положительное направление в каждой полуплоскости обозначено на рис. 7.2, *а* стрелкой.

Выполним то же самое для остальных базисных переменных $x_4, \ldots, x_n$. В результате будут построены $n - 2$ прямые линии $x_3 = 0, x_4 = 0, \ldots, x_n = 0$, каждая из которых определяет допустимую полуплоскость $x_i \geq 0$, где может лежать решение задачи линейного программирования. Таким образом, область допустимых решений X^a представляет собой многоугольник, являющийся общей частью всех допустимых полуплоскостей $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В зависимости от того, как пересекаются друг с другом допустимые полуплоскости, может получиться много разнообразных форм области допустимых решений, где будет иметься единственное оптимальное решение (см. рис. 7.2, *а*) или много оптимальных решений. Может оказаться, что допустимое множество X^a пусто (см. рис. 7.2, *б*). Это означает, что система линейных уравнений (7.5) несовместна при неотрицательных значениях переменных x_i.

Перейдем к поиску оптимального решения задачи линейного программирования, считая, что оно существует. Выразим критерий оптимальности $y = f(\mathbf{x})$ через свободные переменные x_1 и x_2:

$$y = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0 \to \max$$

или в более простой форме

$$y_0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \to \max,$$

отбросив постоянное слагаемое γ_0, не влияющее на оптимальные значения переменных. Построим на плоскости (x_1, x_2) так называемую опорную прямую

$$y_0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0.$$

При параллельном перемещении опорной прямой величина y_0 будет изменяться (возрастать или убывать). Величина этого изменения зависит от коэффициентов γ_1 и γ_2 при переменных x_1 и x_2.

Будем перемещать опорную прямую в сторону увеличения значения y_0. В некоторой точке A^* функция y_0 может достичь своего максимального значения (см. рис. 7.2, *а*). Назовем эту точку *опорной*. Координаты опорной точки определяют оптимальные значения переменных x_1^* и x_2^*, по которым из уравнений (7.6) можно найти оптимальные значения остальных переменных $x_3^*, \ldots, x_n^*$, задающих оптимальное решение

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

исходной задачи линейного программирования, и оптимальное значение целевой функции

$$y^* = f(x_1^*, \ldots, x_n^*).$$

Пример 7.3. Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме, где требуется максимизировать значение целевой функции

$$y = f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - x_4 \to \max,$$

при наличии ограничений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - x_2 - x_4 &= 1, \\ x_1 - 4x_2 - x_5 &= -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_6 &= 4, \\ x_i \geq 0, \quad i &= 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

1. Выберем переменные x_1 и x_2 в качестве свободных. Выразим через них критерий оптимальности y и все остальные базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

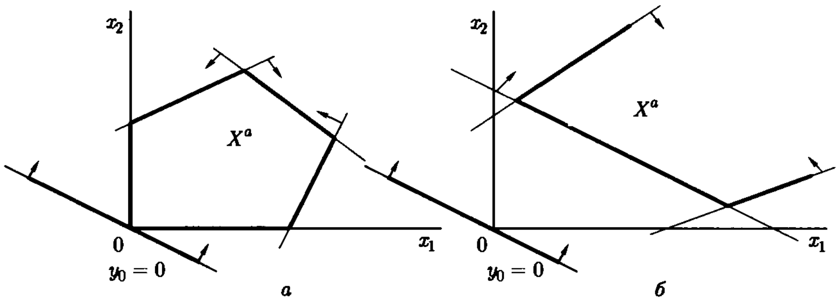


Рис. 7.3. Оптимальные решения:

а — бесконечно много оптимальных решений; *б* — оптимальных решений нет

$$
\begin{aligned}
y = f(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2 + 1 \to \max,\\
x_3 &= -x_1 - x_2 + 6,\\
x_4 &= x_1 - x_2 - 1,\\
x_5 &= x_1 - 4x_2 + 4,\\
x_6 &= -x_1 + 2x_2 + 4.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

2. Положим все базисные переменные равными нулю и построим на плоскости (x_1, x_2) прямые линии: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ (см. рис. 7.2, *а*). Построим множество допустимых значений X^a, которое составляет общую часть шести неотрицательных полуплоскостей $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$.

3. Построим на плоскости (x_1, x_2) опорную прямую $y_0 = x_1 + 2x_2 = 0$ и станем перемещать ее параллельно самой себе в направлении увеличения y_0. Линии уровня функции $y_0 = x_1 + 2x_2$ показаны на рис. 7.2, *а* штрихпунктиром.

4. Функция y_0 достигает максимального значения $y_0^* = 8$ в опорной точке A^* с координатами $x_1^* = 4$ и $x_2^* = 2$. Из уравнений (7.7) получаем итоговое оптимальное решение задачи: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 1$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 4$, $y^* = 9$. ■

В изображенном на рис. 7.2, *а* случае оптимальный вариант решения $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ единственен, причем оптимальные значения переменных $x_3^* = 0$, $x_5^* = 0$. В общем случае оптимальных вариантов решения может быть бесконечно много, если максимум критерия оптимальности достигается не в одной опорной точке, а на отрезке, параллельном опорной прямой (рис. 7.3, *а*), на прямой или на луче. Оптимальный вариант решения может и не существовать даже тогда, когда имеется бесконечно много допустимых решений (рис. 7.3, *б*).

Итак, оптимальное решение общей задачи линейного программирования (если оно существует) достигается при такой совокупности значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где, по крайней мере, две переменные равны нулю (являются координатами точки пересечения двух допустимых полуплоскостей), а остальные неотрицательны. Область допустимых решений образует в n-мерном пространстве выпуклый многогранник, называемый симплексом.

7.6. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Еще одним общим методом решения задач линейного программирования является *симплексный* метод (*симплекс-метод*), или метод *последовательного улучшения оценок*, разработанный Дж. Данцигом (США, 1947).

Геометрическая идея этого метода проста и состоит в следующем. Пусть имеется n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $p < n$ ограничений. Область допустимых решений, задаваемая ограничениями, представляет собой выпуклый многогранник. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\mathbf{x}^*$, то оно совпадает с опорной точкой, являющейся одной из вершин многогранника, где, по крайней мере, $k = n - p$ переменных равны нулю. Симплекс-метод заключается в таком направленном переборе вершин многогранника, при котором значение целевой функции возрастает от одной вершины к другой. Переходя последовательно из одной опорной точки в другую (изменяя переменные) и постепенно улучшая решение, находим оптимальное. Каждой вершине соответствует система уравнений, выбираемых специальным образом из ограничений.

Поясним идею симплекс-метода на примере.

Пример 7.4. Требуется минимизировать значение линейной функции

$$y = f(\mathbf{x}) = 5x_1 - 2x_3 \to \min$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq -2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 &\leq 5, \\ -3x_1 + 5x_4 &\leq 7, \\ x_i \geq 0 \quad (i &= 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

1. Приведем задачу линейного программирования к стандартной форме. Заменим критерий оптимальности y на $y' = -y$ и введем дополнительные переменные

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2,\\
v_2 &= x_1 - x_3 - x_4 + 5,\\
v_3 &= 3x_1 - 5x_4 + 7.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Получаем задачу линейного программирования

$$
\begin{aligned}
y' = -5x_1 + 2x_3 &\to \max,\\
-5x_1 - x_2 + 2x_3 + v_1 &= 2,\\
-x_1 + x_3 + x_4 + v_2 &= 5,\\
-3x_1 + 5x_4 + v_3 &= 7,
\end{aligned}
$$

в которой имеется $n = 7$ неотрицательных переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, v_1, v_2, v_3$ и $p = 3$ уравнений-ограничений (7.8). Число свободных переменных $k = n - p = 4$. Переменные x_2, x_4, v_1, v_2, v_3 входят в функцию y' с нулевыми коэффициентами.

2. Выберем переменные x_1, x_2, x_3, x_4 в качестве свободных и выразим все остальные переменные через них. Эти уравнения (7.8) для переменных v_1, v_2, v_3 записаны выше.

3. Положим все свободные переменные равными нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Тогда из уравнений (7.8) имеем $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$. Получаем опорное решение, для которого $y' = 0$. Проверим, является ли это значение y' оптимальным.

Если бы в выражении для критерия оптимальности y' все коэффициенты при переменных x_i были отрицательными, то увеличить значение y', повышая значения переменных x_i, было бы нельзя. И сразу получили бы оптимальное значение y'^*. Однако в выражении для функции y' коэффициент при переменной x_3 положителен. Поэтому, повышая значение x_3 и переходя к другому опорному решению, можно увеличить и значение y'.

4. Попробуем увеличить значение переменной x_3. Но для переменных v_1 и v_2 этого делать не следует. Как видно из уравнений (7.8), в выражениях для v_1 и v_2 коэффициенты при переменной x_3 отрицательны. Поэтому с увеличением значения переменной x_3 переменные v_1 и v_2 тоже могут стать отрицательными, что противоречит условию неотрицательности всех переменных.

Если в выражениях для v_1 и v_2 коэффициенты при переменной x_3 не были бы отрицательными, то значения переменной x_3 можно было бы увеличивать беспредельно. В этом случае оптимальное решение не существует.

Выясним, какую из переменных можно сделать свободной, считая по-прежнему, что $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Из уравнений (7.8) следует, что $v_1 = 0$ при $x_3 = 1$, а $v_2 = 0$ при $x_3 = 5$. Таким образом, переменная v_1 обращается в нуль при меньшем значении x_3. Переменная v_1 и будет наиболее подходящим кандидатом на роль свободной переменной.

5. Сделаем v_1 новой свободной переменной, а переменную x_3 — базисной. Выразим критерий оптимальности y' и новые базисные переменные x_3, v_2, v_3 через новые свободные переменные x_1, x_2, v_1, x_4:

$$
\begin{aligned}
&x_3 = 2{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5v_1 + 1,\\
&v_2 = -1{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}5v_1 - x_4 + 4,\\
&v_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Получим задачу линейного программирования в виде

$$
\begin{aligned}
y' = x_2 - v_1 + 2 \to \max,\\
x_3 - 2{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}5v_1 = 1,\\
v_2 + 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5v_1 + x_4 = 4,\\
v_3 - 3x_1 + 5x_4 = 7.
\end{aligned}
$$

Если бы в выражении для критерия оптимальности y' все коэффициенты при переменных были отрицательными, то имели бы оптимальное значение y'^*. Но это не так.

6. Поэтому положим все свободные переменные равными нулю: $x_1 = x_2 = v_1 = x_4 = 0$. Тогда из уравнений (7.9) имеем $x_3 = 1, v_2 = 4, v_3 = 7$. Получаем новое опорное решение, для которого $y' = 2$. Значение критерия оптимальности ($y' = 2$) стало уже больше, чем было ($y' = 0$). Но это еще не оптимальное значение y'^*, так как в выражении для функции y' коэффициент при переменной x_2 положителен. Если увеличивать значение x_2, то будет повышаться и значение y'.

7. Начнем увеличивать значение переменной x_2. Получаем новый цикл. Выясним, какую из переменных можно сделать свободной, считая, что $x_1 = v_1 = x_4 = 0$. Наиболее подходящим кандидатом на роль свободной переменной является только одна переменная v_2, так как в уравнениях (7.9) переменная x_2 входит с отрицательным коэффициентом только в выражение для v_2. Поэтому переменная v_2 может стать отрицательной при увеличении значения переменной x_2. Из уравнений (7.9) следует, что $v_2 = 0$ при $x_2 = 8$.

8. Сделаем v_2 новой свободной переменной, а переменную x_2 — базисной. Выразим критерий оптимальности y' и новые базисные переменные x_3, x_2, v_3 через новые свободные переменные x_1, v_2, v_1, x_4:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_1 - v_2 - x_4 + 5, \\
x_2 &= -3x_1 - 2v_2 + v_1 - 2x_4 + 8, \qquad (7.10)\\
v_3 &= 3x_1 - 5x_4 + 7.
\end{aligned}
$$

Получим задачу линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
y' = -3x_1 - 2v_2 - 2x_4 + 10 &\to \max, \\
x_3 - x_1 + v_2 + x_4 &= 5, \\
x_2 + 3x_1 + 2v_2 - v_1 + 2x_4 &= 8, \\
v_3 - 3x_1 + 5x_4 &= 7.
\end{aligned}
$$

9. Положим все свободные переменные равными нулю: $x_1 = v_1 = v_2 = x_4 = 0$. Тогда из уравнений (7.10) имеем $x_3 = 5$, $x_2 = 8$, $v_3 = 7$. Получаем новое опорное решение, для которого $y' = 10$. Это решение уже является оптимальным, так как в выражении для критерия оптимальности y' все коэффициенты при переменных отрицательны, а значит, нельзя увеличить значение функции y', повышая значения свободных переменных. Итак, получено следующее оптимальное решение: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 8$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 0$, $y^* = -y'^* = -10$. ■

Вычислительная процедура симплекс-метода носит итеративный характер и состоит в последовательном решении однотипных систем линейных алгебраических уравнений. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Метод позволяет также определить число оптимальных вариантов решения и провести анализ чувствительности результата к изменению коэффициентов целевой функции.

Симплекс-метод является вычислительным методом решения задачи линейного программирования, обеспечивающим нахождение оптимального решения за конечное число шагов при произвольном числе свободных переменных. Простота алгоритма делает симплекс-метод удобным для реализации на ЭВМ. Симплекс-метод входит во многие современные пакеты прикладных программ.

7.7. Двойственная задача линейного программирования

Изучение свойств задач линейного программирования опирается на теорию двойственности. Напомним, что задачей линейного программирования, которую также называют *прямой*, является максимизация значения функции (7.4):

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max,$$

которая удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} a_{qi} x_i \le b_q, \quad q = 1, \dots, p,$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где a_{qi}, b_q, c_i — заданные постоянные. *Двойственной* по отношению к прямой задаче линейного программирования (7.4) называется задача минимизации значения функции

$$z = \sum_{q=1}^{p} b_p u_q \to \min \tag{7.11}$$

при ограничениях

$$\sum_{q=1}^{p} a_{qi} u_q \ge c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u_q \ge 0, \quad q = 1, \dots, p,$$

где a_{qi}, b_q, c_i — те же самые постоянные, что и в прямой задаче.

Пример 7.5. Обратимся к задаче оптимального планирования производства из примера 7.1. В прямой задаче (7.4) требовалось определить, какой объем x_i каждого вида изделий надо произвести, чтобы при заданных ограничениях на величину b_q затрат ресурсов и цене c_i единицы i-го вида продукции получить максимальный доход $y^* = \max y$ от продажи выпущенной продукции. Двойственная задача имеет следующий смысл. В выражении (7.11) переменная $u_q \ge 0$, $q = 1, \dots, p$, обозначает цену единицы используемого q-го вида ресурсов, b_q — имеющиеся запасы q-го вида ресурсов, a_{qi} — затраты q-го вида ресурсов на выпуск единицы i-го вида изделий, c_i — цену i-го вида изделий. Вариантом планирования производства является распределение $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_q)$ цен используемых видов ресурсов. Стоимость ресурсов, затраченных на производство i-го изделия $\sum\limits_{q=1}^{p} a_{qi} u_q$, не может быть меньше цены c_i изделия. Общие расходы на выпуск продукции составляют $\sum\limits_{q=i}^{p} b_q u_q$. Требуется найти такие оптимальные цены u_q^* различных видов ресурсов, чтобы при заданных ограничениях на величины b_q имеющихся запасов ресурсов и цены c_i изделий общие расходы на выпуск продукции были минимальны $z^* = \min z$. ■

Связь прямой и двойственной задач состоит в том, что решение одной из них может быть получено из решения другой. Как видно из соотношений (7.4) и (7.11), в прямой и двойственной задачах линейного программирования используется одна и та же матрица затрат $\mathrm{A} = (a_{qi})_{p \times n}$. Коэффициенты c_i целевой функции y в исходной задаче являются свободными членами ограничений в двойственной задаче, а свободные члены b_q ограничений в исходной задаче являются коэффициентами целевой функции z в двойственной задаче. Теоретически доказано, что прямая и двойственная задачи линейного программирования либо обе неразрешимы, либо обе имеют решение, причем значения целевых функций для оптимальных решений совпадают: $\max y = y^* = z* = \min z$. Если целевая функция одной из задач линейного программирования не ограничена, то другая задача не имеет решения.

Для задач линейного программирования разработано большое количество методов решения. Часто используется двойственный симплексный метод, с помощью которого решение прямой задачи получают при решении двойственной задачи. Для решения задач большой размерности, возникающих при моделировании реальных ситуаций, применяются методы декомпозиции, где система ограничений разбивается на ряд подсистем и для каждой из подсистем решается подзадача линейного программирования меньшей размерности. В итеративных асимптотических методах решение ищется путем последовательных приближений к оптимальному.

В реальных задачах исходная информация обычно известна лишь с некоторой точностью. Поэтому даже небольшие погрешности в исходных данных могут вызывать неустойчивость результатов. Кроме того, при численном решении задач большой размерности возникают ошибки округления данных, накопление которых также может приводить к заметным отклонениям в результатах. Для обеспечения устойчивости результатов в методах решения задач линейного программирования используют специальные процедуры регуляризации.

ГЛАВА 8

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

8.1. Оптимальный выбор по многим критериям

Во многих задачах выбора, представляющих практический интерес, бывает трудно, а порой и невозможно свести поиск наилучшего варианта к нахождению оптимума только какого-то единственного критерия качества решения (целевой функции, показателя эффективности, критерия оптимальности).

Действительно, определяя наилучший план выпуска продукции, желательно обеспечить не только максимальный доход от ее реализации, но также максимальную производительность труда, минимальную себестоимость продукции и т. д. Составляя оптимальный план перевозок грузов, стремятся не только минимизировать расходы на транспортировку, но и принять во внимание другие возможные критерии: регулярность перевозок, равномерность загрузки транспорта, обязательность перевозки отдельных видов грузов и т. п. Множественность критериев выбора обусловлена необходимостью учета разнородных характеристик сравниваемых вариантов, разнообразием достигаемых целей.

Будем характеризовать каждый вариант A_i одной или несколькими переменными $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, представляющими его свойства, значения которых принадлежат множеству $X^a \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$ допустимых значений. В дальнейшем, если специально не оговаривается, не станем делать различия между скаляром x и вектором $\mathbf{x}$. Пусть имеется нескольких частных или локальных целевых функций (критериев) $y_k = f_k(\mathbf{x}_i) \in$ $\in Y_k \subseteq \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, h$, численно оценивающих качество решения. Весьма заманчиво сформулировать задачу многокритериальной оптимизации в условиях определенности (7.1) следующим внешне «простым» образом: найти значения переменных $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, которые обеспечивают максимизацию значений всех частных целевых функций, т. е.

$$f_1(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in X^a},$$
$$\ldots$$
$$f_h(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in X^a}$$

на множестве $X^a \subseteq X$ допустимых значений, ограниченном системой уравнений и/или неравенств $g_q(\mathbf{x}, \delta) \leq b_q$, $q = 1, \ldots, p$.

Однако такая постановка задачи многокритериальной оптимизации не имеет особого смысла, поскольку в общем случае все частные критерии $y_k = f_k(\mathbf{x})$ достигают своего максимума не в одной и той же, а в различных точках области допустимых значений X^a. Поэтому обычно задача многокритериальной оптимизации переформулируется на основе некоторой дополнительной информации о том, что же все-таки следует считать оптимальным решением.

Для уменьшения неопределенности, связанной с многокритериальностью выбора, и нахождения оптимального варианта $\mathbf{x}^* = (x_1*, \ldots, x_n^*)$, удовлетворяющего требованиям ЛПР, используются специальные приемы, которые в самом общем виде можно подразделить на процедуры исключения и компенсации.

Процедуры исключения состоят в последовательном сужении множества допустимых вариантов и/или множества достижимых целей, исходя из каких-то дополнительных требований. Например, при покупке автомобиля устанавливается сравнительная важность частных критериев качества решения (цена, грузоподъемность, мощность двигателя и т. д.), по которым последовательно уменьшается число рассматриваемых автомобилей.

Процедуры компенсации или *замещения* опираются на принцип справедливого компромисса или справедливой уступки, при котором снижение качества решения по одним частным критериям должно компенсироваться повышением качества решения по другим частным критериям. Например, при выборе автомобиля более высокая стоимость эксплуатации может компенсироваться бóльшим общим пробегом без капитального ремонта.

8.2. Построение множества эффективных вариантов

Достаточно часто в качестве лучших выбирают эффективные или парето-оптимальные варианты, множество X^* которых есть подмножество множества допустимых значений X^a. Обычно поиск парето-оптимальных вариантов осуществляется одновременно с построением паретовой границы $Y^* = f(X^*)$, которая, напомним, представляет собой подмножество недоминируемых векторов оценок качества (показателей эффективности) решения во множестве достижимых целей $Y^a = f(X^a) \subseteq Y$, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_h$. В ряде случаев поиск парето-оптимальных вариантов непосредственно приводит и к нахождению оптимальных вариантов. Однако построение паретовой границы множества достижимости служит, как правило, лишь начальным этапом выбора наилучшего варианта решения.

Укажем один из наиболее простых методов построения множества эффективных вариантов, реализующих процедуру исключения. Метод основан на непосредственном попарном сравнении векторов оценок вариантов по частным критериям эффективности и применим, когда множество достижимых целей Y^a состоит из конечного числа векторов $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{ih})$, $y_{ik} = f_k(A_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, h$.

Выбирается произвольный вектор $\mathbf{y}_i$, который последовательно сравнивается со всеми другими векторами $\mathbf{y}_j$ из множества Y^a по векторному отношению доминирования $\mathbf{y}_i \geq \mathbf{y}_j$, где $y_{ik} \geq y_{jk}$ и $y_{il} > y_{jl}$ хотя бы для одного l. Доминируемые векторы исключаются из дальнейшего рассмотрения, несравнимые оставляются. Вектор, оказавшийся в числе несравнимых, запоминается как эффективный. После чего переходят к рассмотрению следующего вектора из множества Y^a. Оставшиеся векторы составляют суженное множество $Y^1 \subset Y^a$.

Любой из оставшихся векторов попарно сравнивается по отношению доминирования $\geq$ со всеми остальными векторами из множества Y^1, которое аналогичным образом сужается до множества $Y^2 \subset Y^1$. Процедура попарного сравнения векторов оканчивается, когда будут сравнены все векторы. Полученное в итоге множество векторных оценок будет паретовой границей Y^*.

Пример 8.1. Требуется выбрать лучший проект строительства предприятия из пяти предложенных вариантов $A_1 — A_5$. Качество проекта предварительно оценивается по четырем частным показателям эффективности:

f_1 — величине ожидаемой прибыли, которую будет давать предприятие;

f_2 — стоимости строительства предприятия;

f_3 — величине экологического ущерба от строительства;

f_4 — заинтересованности жителей района в строительстве.

Для простоты будем считать, что оценки по каждому из четырех критериев даются по шкале: 5, 4, 3, 2, 1, 0 баллов. Поскольку оценки по второму и третьему критериям необходимо минимизировать, а не максимизировать, как по остальным, то вместо них введем критерии $f_2' = 5 - f_2$ и $f_3' = 5 - f_3$. По результатам экспертизы были получены следующие векторные оценки качества проектов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= (4,3,4,3),\\
\mathbf{y}_2 &= (5,3,3,3),\\
\mathbf{y}_3 &= (2,4,2,4),\\
\mathbf{y}_4 &= (5,3,2,3),\\
\mathbf{y}_5 &= (4,4,3,4).
\end{aligned}$$

Сравним вектор $\mathbf{y}_1$ с остальными векторами по отношению доминирования $\geq$ на множестве достижимости Y^a. В данном случае пары векторов $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_4$, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_5$ несравнимы по отношению доминирования. Вектор $\mathbf{y}_1$ запоминается как эффективный. Далее сравнивается вектор $\mathbf{y}_2$ с векторами $\mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_4$, $\mathbf{y}_5$. Пары векторов $\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_5$ несравнимы. Так как $\mathbf{y}_2 \geq \mathbf{y}_4$, вектор $\mathbf{y}_4$ удаляется из рассмотрения как доминируемый, а вектор $\mathbf{y}_2$ запоминается как эффективный. Для сравнения остаются векторы $\mathbf{y}_3$ и $\mathbf{y}_5$. Поскольку $\mathbf{y}_5 \geq \mathbf{y}_3$, то вектор $\mathbf{y}_3$ удаляется из рассмотрения как доминируемый. В итоге остаются три вектора $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_5$, образующие паретову границу $Y^* \subset Y^a$ и соответствующие эффективным вариантам A_1, A_2, A_5, среди которых и следует сделать окончательный выбор. ■

Чтобы еще больше сузить паретово множество Y^* и выделить единственный наилучший вариант решения, необходима еще какая-то дополнительная информация, которую может дать только ЛПР.

8.3. Важность критериев

Одним из основных видов дополнительной информации, часто используемым при решении различных многокритериальных задач, является информация о сравнительной важности частных критериев для ЛПР. Обычно такая информация задается в виде числовых коэффициентов важности критериев $w_k \geq 0$, характеризующих весомость, значимость частных критериев f_k. Коэффициенты важности составляют в совокупности весовой вектор $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_h)$, компоненты которого принято нормировать условием $\sum\limits_k w_k = 1$. Рассмотрим некоторые из наиболее известных способов вычисления коэффициентов важности критериев.

1. Последовательное сравнение критериев по важности. ЛПР упорядочивает все критерии по предпочтительности, допустим, $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_h$, и каждому критерию f_k приписы-

Таблица 8.1

Матрица парных сравнений критериев по абсолютной важности

A	f_1	f_2	...	f_h	a_k
f_1	1	1	...	1	a_1
f_2	0	1	...	0	a_2
...	...	...	1	...	...
f_h	0	1	...	1	a_h

вает некоторую числовую значимость $s_k > 0$. Например, самому важному критерию f_1 дается 100 баллов, а остальным критериям — меньшие баллы в зависимости от их предпочтительности. Важность k-го критерия f_k определяется среднеарифметическим значением $w_k = s_k / \sum\limits_{j=1}^{h} s_j$.

2. Последовательное сравнение критериев по суммарной важности — метод У. Черчмена — Л. Акоффа (США). ЛПР упорядочивает все критерии по предпочтительности, допустим, $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_h$, и каждому критерию f_k приписывает некоторую числовую значимость $s_k > 0$. ЛПР сравнивает значимость критерия f_1 с суммарной значимостью остальных критериев $f_2, \ldots, f_h$. Если неравенство $s_1 > \sum\limits_{j=2}^{h} s_j$ не выполняется, то значимость остальных критериев корректируется. После этого критерий f_1 исключается из рассмотрения, и процедура повторяется для критерия f_2, т. е. проверяется справедливость условия $s_2 > \sum\limits_{j=3}^{h} s_j$, и т. д. Важность k-го критерия f_k задается выражением $w_k = s_k / \sum\limits_{j=1}^{h} s_j$.

3. Попарное сравнение критериев по абсолютной важности. Строится матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})_{h \times h}$ парных сравнений критериев $f_1, \ldots, f_h$ по их важности, в которой ЛПР указывает предпочтительность одного из критериев, задавая элементы матрицы, например, условиями $a_{ij} = 1$, если $f_i \succeq f_j$; $a_{ij} = 0$, если $f_i \prec f_j$. Пример матрицы парных сравнений критериев по абсолютной важности приведен в табл. 8.1. Важность k-го критерия f_k определяется формулой $w_k = a_k / h$, $a_k = \sum\limits_{j=1}^{h} a_{kj}$.

Таблица 8.2

Матрица парных сравнений критериев по относительной важности

A	f_1	f_2	...	f_h
f_1	1	s_1/s_2	...	s_1/s_h
f_2	s_2/s_1	1	...	s_2/s_h
...	...	...	1	...
f_h	s_h/s_1	s_h/s_2	...	1

Разновидностью данного подхода является многократное попарное сравнение критериев по важности, при котором значимость критерия определяется числом раз, когда ЛПР предпочел данный критерий другим критериям. В этом случае важность k-го критерия f_k рассчитывается по формуле $w_k = a_k / \sum_{j=1}^{h} a_j$.

4. Попарное сравнение критериев по относительной важности — метод Т. Саати (США). Строится матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})_{h \times h}$ парных сравнений критериев $f_1, \ldots, f_h$ по их относительной важности, элементы которой ЛПР задает в виде $a_{ij} = s_i/s_j$, где $s_i > 0$ — некоторая числовая значимость критерия, выраженная баллами от 1 до 9 (табл. 8.2). Предпочтительность критериев определяется условиями $f_i \succ f_j$, если $a_{ij} > 1$; $f_i \approx f_j$, если $a_{ij} = 1$; $f_i \prec f_j$, если $a_{ij} < 1$. Важность k-го критерия f_k определяется формулами:

$$w_k = c_k / \sum_{j=1}^{h} c_j, \quad c_k = (\prod_{j=1}^{h} a_{kj})^{1/h}. \tag{8.1}$$

Важность критериев может задаваться и иными способами.

8.4. Компенсация критериев по относительной важности

Воспользовавшись дополнительной информацией о структуре множества достижимых целей Y^a, можно сузить множество Y^*, представляющее паретову границу. Опишем один из таких подходов, который основан на учете относительной важности частных критериев качества для ЛПР и предложен В. Д. Ногиным (Россия, 2002).

Рассмотрим два произвольных варианта $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, \ldots, y_{1h})$ и $\mathbf{y}_2 = (y_{21}, \ldots, y_{2h})$ из множества достижимости Y^a, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$y_{1p} > y_{2p}, \quad y_{1q} < y_{2q}, \quad y_{1k} = y_{2k} \quad \text{для всех} \quad k \neq p, q.$$

Формально эти варианты несравнимы по отношению доминирования. Однако при сравнении этих векторов ЛПР может сказать, что для него первый вариант субъективно предпочтительнее, чем второй вариант, т. е. $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2$. В подобной ситуации будем говорить, что p-й частный критерий важнее q-го частного критерия с параметрами $r_p = y_{1p} - y_{2p} > 0$, $r_q = y_{2q} - y_{1q} > 0$. Иными словами, p-й критерий важнее q-го критерия, если при выборе одного из двух указанных векторов ЛПР согласно потерять величину r_q по менее важному критерию, чтобы получить дополнительный выигрыш r_p по более важному критерию.

Число $t_{pq} = r_q/(r_p + r_q)$ назовем долевым коэффициентом относительной важности для p-го и q-го критериев. Этот коэффициент характеризует долю потерь, на которую ЛПР готово пойти по менее важному критерию, отнесенную к суммарной величине потерь и приобретений по более важному критерию. При $t_{pq} = 0{,}5$ величины потерь и приобретений совпадают. Аналогичным образом можно установить относительную важность для двух групп критериев с заданными наборами долевых коэффициентов относительной важности.

При выполнении определенных аксиом согласованности предпочтений ЛПР множество Y^s выбираемых векторов оценок качества вариантов содержится в суженной паретовой границе Y', состоящей из векторов $\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_h'(x))$, компоненты которых определяются выражениями:

$$f_q'(x) = t_{pq} f_p(x) + (1 - t_{pq}) f_q(x); \quad f_k'(x) = f_k(x), \ \forall k \neq q.$$

«Новый» векторный критерий оценки качества получается из «старого» заменой менее важного критерия $f_q(x)$ на выпуклую комбинацию критериев $f_p(x)$ и $f_q(x)$ при сохранении всех остальных частных критериев. При этом исходное множество достижимых целей Y может быть как конечным, так и бесконечным, а функции $f_k(x)$, $k = 1, \ldots, h$, не обязаны удовлетворять каким-либо специальным требованиям типа непрерывности, монотонности, выпуклости и пр. Таким образом, используя информацию об относительной важности критериев, можно рассчитывать на сужение паретовой границы Y^*, при этом будут выполняться следующие включения: $Y^s \subset Y' \subset Y^*$.

Пример 8.2. Рассмотрим три вектора оценок качества решения $\mathbf{y}_1 = (4;3;4;3)$, $\mathbf{y}_2 = (5;3;3;3)$, $\mathbf{y}_5 = (4;4;3;4)$, которые остались несравнимыми в примере 8.1. Допустим, что ЛПР считает первый критерий f_1 более важным, чем третий критерий f_3, с долевым коэффициентом относительной важности $t_{13} = 0{,}5$. Пересчитаем третью компоненту каждого вектора $\mathbf{y}_i$ по формуле $f_3'(A_i) = 0{,}5 f_1(A_i) + 0{,}5 f_3(A_i)$. Получим новые векторы $\mathbf{y}_1' = (4;3;4;3)$, $\mathbf{y}_2' = (5;3;4;3)$, $\mathbf{y}_5' = (4;4;3,5;4)$. Очевидно, что вектор $\mathbf{y}_2'$ доминирует вектор $\mathbf{y}_1'$. Поэтому в суженной паретовой границе Y' останутся два вектора $\mathbf{y}_2'$ и $\mathbf{y}_5'$, соответствующие эффективным вариантам A_2 и A_5, из которых и следует осуществлять итоговый выбор. Если ЛПР считает третий критерий f_3 важнее первого критерия f_1 с таким же долевым коэффициентом относительной важности $t_{31} = 0{,}5$, то, пересчитав первую компоненту каждого вектора $\mathbf{y}_i$ по формуле $f_1'(A_i) = 0{,}5 f_3(A_i) + 0{,}5 f_1(A_i)$, получим векторы $\mathbf{y}_1' = (4;3;4;3)$, $\mathbf{y}_2' = (4;3;3;3)$, $\mathbf{y}_5' = (3,5;4;3;4)$. В таком случае в суженной паретовой границе Y' останутся два вектора $\mathbf{y}_1'$ и $\mathbf{y}_5'$, которые соответствуют эффективным вариантам A_1 и A_5. ■

8.5. Свертка критериев

Столкнувшись с необходимостью учета многокритериальности, исследователи стали искать возможные подходы к решению задач оптимального выбора при многих критериях.

Простейшим способом устранения многокритериальности целей является перевод задачи выбора в русло однокритериальности, например, путем объединения всех частных (локальных) показателей эффективности $f_j(x)$ в один общий (глобальный) критерий качества $f(x) = F(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_h(x))$. Подобный прием носит название свертки критериев.

Каждый частный критерий отражает какое-то отдельное качество варианта решения. Наилучший вариант должен характеризоваться наиболее удачным сочетанием всех этих отдельных качеств. Таким образом, поиск лучшего варианта решения сводится к отысканию экстремума единственной функции $f(x)$

$$x^* \in \arg\max_{x \in X^a} f(x).$$

Остается только установить, как глобальное качество решения зависит от локальных качеств. Вид функции $f(x)$ определяется тем, каким образом можно представить вклад каждого частного критерия $f_j(x)$ в общий критерий качества. Заметим, что для этого должна существовать возможность содержательного сопоставления критериев.

Достаточно популярным способом служит запись глобального критерия в виде суммы локальных критериев (так называемая *аддитивная свертка*)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{h} f_j(x) \tag{8.2}$$

или в виде их произведения (*мультипликативная свертка*)

$$f(x) = \prod_{j=1}^{h} f_j(x). \tag{8.3}$$

Формула (8.2) выражает принцип *равномерной оптимальности*. Им обычно пользуются, когда частные критерии эффективности имеют одинаковую размерность, например выражены в денежных единицах. Тогда глобальный критерий качества решения будет представлять собой общую ценность варианта, которая слагается из ценностей его отдельных составляющих.

Формула (8.3) отражает принцип *справедливого компромисса*, в соответствии с которым общее качество решения должно равняться нулю, если хотя бы один из частных критериев эффективности принимает нулевое значение. Подобный подход применяется, например, для оценки общей надежности функционирования сложной системы, состоящей из многих частей, узлов и блоков. Интересно, что принцип справедливого компромисса был сформулирован еще английским математиком Ч. Доджсоном (более известным как английский писатель Льюис Кэрролл) в книге «История с узелками».

Существенным недостатком указанных способов свертки критериев является равная важность или значимость критериев для ЛПР, при которой низкие оценки по одним критериям можно компенсировать только за счет высоких оценок по другим критериям. Вследствие этого лучшим может оказаться вариант решения, сочетающий не самые лучшие критериальные оценки.

Чтобы избежать такого несоответствия, часто используют взвешенные свертки частных критериев эффективности вида

$$
\begin{gathered}
f(x)=\sum_{j=1}^{h} w_j f_j(x), \\
f(x)=\prod_{j=1}^{h} w_j f_j(x), \quad f(x)=\prod_{j=1}^{h}[f_j(x)]^{w_j},
\end{gathered}
\tag{8.4}
$$

где $w_j \geq 0$ — вес частного критерия $f_j(x)$. Способ свертки частных критериев и значения их весов задаются ЛПР и отражают его предпочтения.

В ряде случаев частные критерии эффективности (особенно если они имеют разные единицы измерения) приводят к безразмерному виду или, как еще говорят, нормализуют, например, одним из следующих способов:

$$
f'_j(x)=f_j(x)/y_j^{\max}, \quad f'_j(x)=f_j(x)/(y_j^{\max}-y_j^{\min}),
$$

$$
f'_j(x)=(f_j(x)-y_j^{\min})/(y_j^{\max}-y_j^{\min}),
$$

где $y_j^{\max}$ и $y_j^{\min}$ — максимальное и минимальное значения частного критерия $f_j(x)$.

Пример 8.3. Обратимся к задаче выбора лучшего проекта строительства предприятия, приведенной в примере 8.1. По результатам экспертизы пять имевшихся вариантов A_1 — A_5 получили следующие оценки по частным критериям эффективности:

$$
\mathbf{y}_1=(4,3,4,3), \quad \mathbf{y}_2=(5,3,3,3), \quad \mathbf{y}_3=(2,4,2,4),
$$

$$
\mathbf{y}_4=(5,3,2,3), \quad \mathbf{y}_5=(4,4,3,4).
$$

Будем определять общую значимость $f(A_i)$ варианта решения для ЛПР взвешенной суммой $f(A_i)=\sum\limits_{j=1}^{h} w_j f_j(A_i)$ всех оценок по частным критериям. При равной важности критериев ($w_j = 0{,}25$) лучшим будет проект A_5, имеющий максимальную общую значимость $f(A_5) = 3{,}75$. Если считать наиболее важным критерием величину экологического ущерба от строительства f_3 (например, $w_1 = 0{,}3$; $w_2 = 0{,}2$; $w_3 = 0{,}4$; $w_4 = 0{,}1$), то лучшим окажется проект A_1, имеющий максимальную общую значимость $f(A_1) = 3{,}7$. Если наиболее важным критерием является величина ожидаемой прибыли f_1 (например, $w_1 = 0{,}4$; $w_2 = 0{,}3$; $w_3 = 0{,}2$; $w_4 = 0{,}1$), то лучшими будут проекты A_2 и A_5, имеющие максимальную общую значимость $f(A_2)=f(A_5)=3{,}8$.

Сделать окончательный выбор в пользу одного из вариантов невозможно без привлечения дополнительной информации от ЛПР. ■

Наиболее просто выполнить аддитивную свертку критериев в многокритериальной задаче линейного программирования с линейными локальными целевыми функциями $f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i$, $j = 1, \ldots h$, где c_{ji} — заданные постоянные. Когда глобальный критерий качества решения $f(\mathbf{x})$ представляет собой сумму локальных критериев $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_h(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{h} w_j f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{h} w_j c_{ji})x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i,$$

с известными или назначенными ЛПР весовыми коэффициентами $w_1, \ldots, w_h$, многокритериальная задача линейного программирования сводится к традиционной однокритериальной задаче (7.4). Когда такой поход невозможен, прибегают к другим процедурам решения.

Отметим, что использование весовых коэффициентов важности частных критериев также не свободно от недостатков, поскольку веса назначаются из разных и не всегда обоснованных соображений. Важность критерия может, например, определяться «размахом» шкалы критерия по формуле $w_j = 1/(y_j^{\max} - y_j^{\min})$, а может задаваться ЛПР из некоторых соображений или рассчитываться одним из способов, рассмотренных в подразд. 8.3.

Таким образом, даже в этих сравнительно простых случаях нахождение оптимального решения многокритериальной задачи выбора неизбежно связано с необходимостью учета предпочтений ЛПР, выраженных в той или иной форме. Неоднозначность формулировки общего показателя эффективности и назначения весов важности частных критериев оказывает заметное влияние на получаемое оптимальное значение результата.

8.6. Векторная оптимизация

Другой возможный подход к учету многокритериальности в задаче оптимального выбора состоит в задании общего показателя качества решения в виде вектора $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_h(x))$, компонентами которого служат оценки варианта по отдельным частным критериям эффективности $y_j = f_j(x)$, $j = 1, \ldots, h$, в многомерном пространстве целей. Напомним, что варианту A_i соответствует либо скаляр x_i, либо вектор $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$.

Однако формулировать задачу поиска оптимального решения как задачу «максимизации» векторной целевой функции эффективности $\mathbf{f}(x) \to \max\limits_{x \in X^a}$, вообще говоря, не имеет смысла. Во-первых, компоненты векторного критерия эффективности могут иметь разное качество и измеряться в разных единицах. Например, скорость и грузоподъемность самолета, дальность полета, стоимость перевозки груза и т. п. Во-вторых, в многомерном пространстве, как правило, нельзя однозначно указать одну или несколько «абсолютно лучших» точек, их надо как-то еще дополнительно определить.

У последнего правила могут быть исключения, если окажется, что существует оптимальное решение

$$x* \in \arg\max_{x \in X^a} f_j(x),$$

где все отдельные частные критерии $y_j = f_j(x)$, $j = 1, \ldots, h$, одновременно достигают максимума. Однако такая ситуация, когда решение выгодно сразу со всех точек зрения, редко встречается на практике.

Возможные способы решения задачи векторной оптимизации зависят от того, соизмеримы ли частные критерии или нет, а если соизмеримы, то насколько они одинаково важны для ЛПР. Рассмотрим некоторые подходы к нахождению оптимального решения задачи векторной оптимизации, позволяющие тем или иным образом сузить множество допустимых вариантов или установить компромисс между частными критериями качества решения.

Равномерная оптимизация основана на принципе, постулирующем равенство всех частных критериев качества

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_h(x),$$

который обеспечивает улучшение общего качества решения за счет гармоничного повышения качества по всем частным критериям. Тогда допустимое множество X^a сужается до множества $X^1 = \{x | f_1(x) = \ldots = f_h(x)\}$.

Оптимальный вариант решения определяется условием

$$x^* \in \arg\max_{x \in X^1} f_j(x)$$

для произвольного j. Оптимальному решению соответствует наиболее «удаленная» от начала координат точка $\mathbf{y}^* = (f_1(x^*), \ldots, f_h(x^*))$, лежащая на пересечении биссектрисы многогранного угла, образованного осями координат в пространстве критериев, с границей множества достижимости $Y^a = f(X^a)$ (рис. 8.1, *а*).

Однако равенство всех частных критериев $f_j(x)$ является достаточно сильным условием, которое может оказаться невыполнимым. Более слабым требованием является квазиравенство частных критериев, например, в виде условия $|f_j(x) - f_k(x)| \leq z_{jk}$, где $z_{jk} > 0$ — некоторая уступка, определяющая «коридор» $2z_{jk}$ (рис. 8.1, *б*), в котором могут находиться оптимальные значения частных критериев $y_j^* = f_j(x^*)$. Можно дополнительно считать, что для всех пар критериев уступки z_{jk} одинаковы и равны z. Условие квазиравенства частных критериев сужает множество допустимых вариантов X^a до множества $X^2 = \{x||f_j(x) - f_k(x)| \leq z\}$.

Неравномерная оптимизация разрешает устанавливать различную важность w_j частных критериев качества $f_j(x)$ и основывается на равенствах

$$w_1 f_1(x) = w_2 f_2(x) = \ldots = w_h f_h(x).$$

В остальном сохраняются все особенности подхода равномерной векторной оптимизации к сужению множество допустимых вариантов и поиску оптимального варианта решения, исходя из условия

$$x^* \in \arg\max_{x \in X^3} w_j f_j(x)$$

для произвольного $j \in 1, \ldots, h$ при $X^3 = \{x|w_1 f_1(x) = \ldots = w_h f_h(x)\}$.

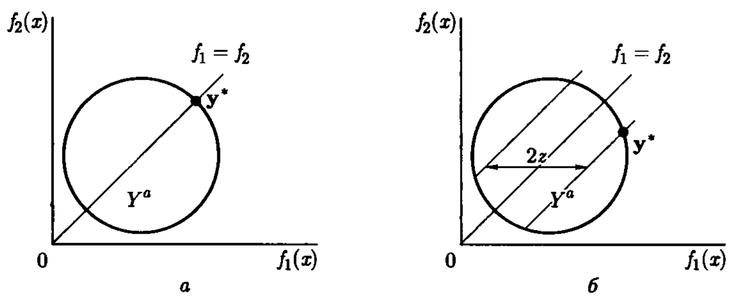


Рис. 8.1. Равномерная оптимизация:
а — равенство частных критериев; *б* — квазиравенство частных критериев

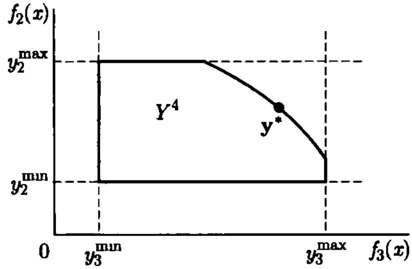


Рис. 8.2. Условная оптимизация

Условная оптимизация предполагает, что один из частных критериев эффективности, например первый критерий $y_1 = f_1(x)$, выделяется в качестве главного критерия, а на остальные частные критерии налагаются какие-то дополнительные условия. Одна из имеющихся возможностей состоит в переводе всех остальных частных критериев $y_j = f_j(x)$, $j = 2, \ldots, h$, в ограничения, которые можно задать, например, в виде равенства $f_j(x) = y_j^0 = \text{const}$ или неравенств $f_j(x) \geq y_j^{\min}$, $f_j(x) \leq y_j^{\max}$ (рис. 8.2). В таком случае задача векторной оптимизации сводится к нахождению условного экстремума функции

$$x^* \in \arg \max_{x \in X^4} f_1(x)$$

при дополнительных ограничениях на область допустимых вариантов решений $X^4 = \{x | y_j^{\min} \leq f_j(x) \leq y_j^{\max}, j = 2, \ldots, h\}$ и область достижимых целей $Y^4 = f(X^4)$.

Другая возможность — установить допустимые предельные уступки по каждому из частных критериев качества z_j, на которые ЛПР соглашается пойти, чтобы улучшить общее качество решения. Тогда оптимальное решение ищется при дополнительных ограничениях $f_j(x) \geq y_j^{\max} - z_j$, $j = 1, \ldots, h$. Лучший вариант решения обеспечивает наибольшее увеличение глобального критерия эффективности, заданного в виде аддитивной или мультипликативной свертки частных критериев качества (точка $\mathbf{y}^*$ на рис. 8.2).

Последовательная оптимизация предполагает, что все частные критерии эффективности могут быть упорядочены ЛПР, например, по их важности или в лексикографическом порядке. Процедура решения задачи многокритериальной оптимизации состоит тогда в последовательном решении однокритериальных задач оптимизации на постепенно сужаемом множестве допустимых значений.

Пусть наиболее важным для ЛПР частным критерием будет первый критерий f_1. Тогда сначала решается задача

$$f_1(x) \to \max_{x \in X^a}$$

и находятся оптимальные варианты $x^*_{(1)}$, которые образуют множество $X_1 \subset X^a$. Оставляют только варианты $x^*_{(1)}$, а остальные варианты исключают из дальнейшего рассмотрения. Затем решается задача

$$f_2(x) \to \max_{x \in X_1}$$

при условии $y_1^* = f_1(x^*_{(1)})$, находятся оптимальные варианты $x^*_{(2)}$, составляющие множество $X_2 \subset X_1$, и т. д., пока не будут рассмотрены все остальные частные критерии. В качестве окончательного результата принимается множество X_h, состоящее из вариантов

$$x_h^* \in \arg \max_{x \in X_{h-1}} f_h(x).$$

Обычно оптимизация уже по первым наиболее важным критериям эффективности приводит к результату, практически являющемуся окончательным.

Описанный подход основан на установлении так называемого *жесткого приоритета* частных критериев. ЛПР может также установить *гибкий приоритет*, задав по каждому из частных критериев эффективности допустимые уступки z_j, $j = 1, \ldots, h$, на которые можно пойти для улучшения общего качества решения. Схема нахождения оптимального решения остается такой же, но появляются дополнительные ограничения на критерии $f_j(x) \geq y_j^* - z_j$, которые должны учитываться при сужении множества допустимых значений и поиске оптимального варианта.

8.7. Поиск вариантов с заданными характеристиками

Как видим, существуют задачи выбора, в которых можно заранее указать желательные для ЛПР значения частных критериев качества y_k^0, или границы их изменения. Эти особенности задачи могут либо вытекать из объективных требований к оптимальному решению, например быть нормативно установленными параметрами конструируемого оборудования, либо субъективно назначаться ЛПР. Такие желательные значения частных критериев y_k^0 называются *уровнями притязания*, а их совокупность $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, \ldots, y_h^0)$ — *опорной точкой*. Двумя характерными опорными точками являются, в частности, $\mathbf{y}^{\max} = (y_1^{\max}, \ldots,$

$y_h^{\max})$ и $\mathbf{y}^{\min} = (y_1^{\min}, \ldots, y_h^{\min})$, которые носят название соответственно точек *утопии* и *антиутопии*.

Вектор признаков варианта $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, соответствующий опорной точке $\mathbf{y}^0$, может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X^a допустимых значений. В первом случае говорят о достижимой цели, а во втором — о недостижимой цели. Если цель достижима и опорная точка $\mathbf{y}^0$ сама принадлежит множеству достижимых целей $Y^a = f(X^a)$, то, очевидно, вариант $\mathbf{x}^0$ и является наилучшим решением. Однако, как правило, этого не бывает. Поэтому для нахождения оптимального решения приходится вводить дополнительные требования.

Оптимальный вариант решения можно искать, например, как вариант, *наиболее близкий к опорной точке*. Для этого в многомерном пространстве оценок по частным критериям эффективности задается некоторая мера близости $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$ между точками $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_h(\mathbf{x}))$ и $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \ldots, y_h^0)$. Тогда оптимальным будет вариант, для которого

$$\mathbf{x}^* \in \arg\max_{x \in X^a} d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0].$$

Обычно в качестве меры близости выбирается одна из метрик h-мерного векторного пространства $(\mathbf{R}^h, d_p)$:

- взвешенная метрика Чебышева

$$d_\infty[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0] = \max_{1 \leqslant j \leqslant h} w_j |f_j(\mathbf{x}) - y_j^0|, \tag{8.5}$$

- взвешенная метрика Хемминга

$$d_1[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0] = \sum_{j=1}^{h} w_j |f_j(\mathbf{x}) - y_j^0|, \tag{8.6}$$

- взвешенная метрика Евклида

$$d_2[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0] = \left[\sum_{j=1}^{h} w_j (f_j(\mathbf{x}) - y_j^0)^2\right]^{1/2}, \tag{8.7}$$

где w_j — коэффициенты важности j-го частного критерия $f_j(\mathbf{x})$. *Метрикой* на множестве X называется неотрицательная действительная функция $d\colon X \times X \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая для любых $x, y, z \in X$ условиям: *симметрии* $d(x, y) = d(y, x)$; *тождества* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; *треугольника* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Множество X с определенной на нем метрикой d называется *метрическим пространством* и обозначается (X, d).

Задание той или иной меры близости $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$ представляет собой еще один возможный способ свертки частных критериев и преобразования многокритериальной задачи к однокритериальной. Однако при всей распространенности, привлекательности и прозрачности такого подхода у него имеется ряд недостатков. Первый и самый главный состоит в невозможности строго и аргументированно обосновать справедливость утверждения о существовании меры близости $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$, или, иными словами, о метризуемости множества достижимых целей Y^a.

Кроме того, саму меру близости можно задавать по-разному. Вводя различные метрики $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$, будем получать, вообще говоря, разные оптимальные варианты $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Тем самым задача поиска наилучшего варианта заменяется решением не менее сложной задачи выбора наилучшей метрики. Вместе с тем, даже подобрав подходящую метрику и упорядочив все варианты по близости к опорной точке, можно все-таки не получить лучшее окончательное решение.

Другого рода дополнительные требования к характеристикам окончательного решения представляют собой *принципы гарантированного результата*. Среди них наиболее популярными являются критерии максимина и минимакса. Оптимальный вариант решения в первом случае обеспечивает получение наибольшей эффективности в самых худших условиях

$$\mathbf{x}^* \in \arg \max_{x \in X^a} \min_{1 \leqslant j \leqslant h} f_j(\mathbf{x}), \tag{8.8}$$

а во втором — наименьшей эффективности в самых лучших условиях.

$$\mathbf{x}^* \in \arg \min_{x \in X^a} \max_{1 \leqslant j \leqslant h} f_j(\mathbf{x}). \tag{8.9}$$

Вводят также ослабленные требования к качеству решения, которое может отличаться от оптимального значения на некоторую величину уступки z_j, $j = 1, \ldots, h$, а вместо $f_j(\mathbf{x})$ используют нормализованные частные критерии качества, к примеру $f_j'(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x})/y_j^0$, $f_j'(\mathbf{x}) = (f_j(\mathbf{x}) - y_j^{\min})/(y_j^{\max} - y_j^{\min})$, или $f_j'(\mathbf{x}) = |f_j(\mathbf{x}) - y_j^0|/(y_j^{\max} - y_j^{\min})$. В последнем случае критерий минимакса (8.9) содержательно совпадает с критерием близости к опорной точке по метрике Чебышева (8.5).

Несмотря на отмеченные недостатки, эти и подобные им эвристические механизмы оптимального выбора вариантов с заданными оценками качества находят широкое применение при решении практических задач.

8.8. Условия парето-оптимальности решения

Обратимся к вопросу о строгих формальных основаниях, гарантирующих существование парето-оптимальных решений. Как оказалось, необходимые условия парето-оптимальности тесно связаны с определенными свойствами частных показателей эффективности $y_j = f_j(x)$, $j = 1, \ldots, h$, а также с особенностями множества допустимых значений X^a и множества достижимых целей Y^a.

Простейшее необходимое условие парето-оптимальности определяется возможностью построить в любой эффективной точке $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_h^*) = \mathbf{f}(x^*)$ гиперплоскость, опорную к множеству Y^a. Напомним, что множество векторов оценок качества вариантов, доминирующих вариант x по Эджворду — Парето, совпадает с пересечением множества достижимых целей Y^a и внутренней части неотрицательного ортанта $C(x)$ с вершиной в точке $\mathbf{y}_C = \mathbf{f}(x_C)$. Для парето-оптимального варианта решения x^* неотрицательный ортант $C(x^*)$ состоит из одной-единственной эффективной точки $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(x^*)$.

Возможность построить опорную гиперплоскость к множеству достижимых целей Y^a имеется, в частности, в случае, когда множество Y^a является строго выпуклым (рис. 8.3, *а*), т. е. таким множеством, которое содержит внутри себя отрезок, соединяющий две любые точки этого множества. Пусть, кроме того, множество целей Y^a ограничено и замкнуто, что гарантирует существование парето-оптимальных вариантов. Для парето-оптимальности варианта $x^* \in X^a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные числа $w_1 \geq 0, \ldots, w_h \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{h} w_j = 1$, для которых неравенство

$$\sum_{j=1}^{h} w_j f_j(x^*) \geq \sum_{j=1}^{h} w_j f_j(x)$$

выполняется для любого варианта $x \in X^a$. Условие $\sum\limits_{j=1}^{h} w_j = 1$ позволяет избежать тривиального случая $w_1 = \ldots = w_h = 0$.

Сформулированное утверждение является теоремой С. Карлина, устанавливающей условия парето-оптимальности варианта x^*. Эта теорема, гарантирующая возможность построения опорной гиперплоскости к множеству Y^a, была доказана Карлиным в другой постановке, когда множество допустимых зна-

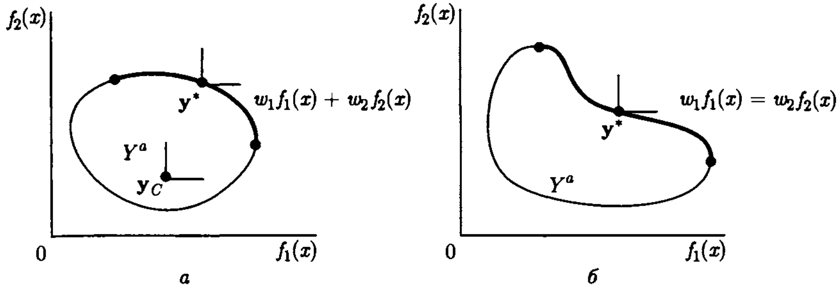


Рис. 8.3. Условия парето-оптимальности:
а — выпуклый случай; *б* — невыпуклый случай

чений X^a выпукло, а все частные критерии $y_j = f_j(x)$ — строго вогнутые функции. При этом множество достижимых целей Y^a может и не быть выпуклым. К классу таких задач относятся, например, многокритериальные задачи линейного программирования, в которых область допустимых значений X^a представляет собой выпуклый многогранник.

При невыпуклом множестве достижимых целей Y^a для получения парето-оптимального решения x^* уже не удается воспользоваться аддитивной сверткой частных критериев эффективности в виде линейной функции. В этом случае (рис. 8.3, *б*) для точки $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(x^*)$ нет других доминирующих ее точек $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$. В то же время нельзя построить линейную функцию $w_1f_1(x) + w_2f_2(x)$, которая достигала бы в точке $\mathbf{f}(x^*)$ максимума.

Установим теперь условия парето-оптимальности варианта x^* для невыпуклого множества целей Y^a. Пусть, как и выше, множество Y^a ограничено, замкнуто и, кроме того, целиком лежит внутри неотрицательного ортанта $\mathbf{R}^h_+$. Первое условие гарантирует существование парето-оптимальных вариантов, а последнее введено для удобства, поскольку любое ограниченное множество можно передвинуть в ортант $\mathbf{R}^h_+$, не изменяя отношения доминирования векторов оценок по частным показателям эффективности. Совокупность указанных требований означает, что выполняется неравенство

$$\min_{x\in X^a} \min_{1\leqslant j\leqslant h} f_j(x) > 0.$$

Для любой прямой линии, лежащей в ортанте $\mathbf{R}^h_+$ и проходящей через начало координат, справедливо условие неравномерной оптимизации

$$w_1f_1(x) = w_2f_2(x),$$

где $w_1 > 0$, $w_2 > 0$, $w_1 + w_2 = 1$. Для прямой, проходящей через эффективную точку $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(x^*)$, которая является единственной точкой ортанта $C(x^*)$, очевидно, имеем $w_1 f_1(x^*) = w_2 f_2(x^*)$. Положим $w_j f_j(x^*) = g^*$. Тогда точки, лежащие на сторонах угла $C(x^*)$ выше и правее точки $\mathbf{y}^*$, удовлетворяют соотношениям:

$$f_1(x) \geq f_1(x^*), \quad w_2 f_2(x) = w_2 f_2(x^*) = g^*;$$

$$f_2(x) \geq f_2(x^*), \quad w_1 f_1(x) = w_1 f_1(x^*) = g^*.$$

Соответственно в точках, лежащих под прямой, задаваемой соотношением $w_1 f_1(x^*) = w_2 f_2(x^*)$, выполняется неравенство $w_1 f_1(x) \geq w_2 f_2(x)$, а в точках, лежащих над прямой, — неравенство $w_1 f_1(x) \leq w_2 f_2(x)$. Поэтому функция $g(x) = \min\limits_j w_j f_j(x)$ достигает своего максимального значения $g^* = w_j f_j(x^*)$ в точке

$$x^* \in \arg \max_{x \in X^a} \min_{1 \leqslant j \leqslant h} w_j f_j(x).$$

Способ поиска такого варианта в направлении $w_j f_j(x) = \text{const}$ был назван «*подтягиванием самого отстающего*».

Обобщая изложенное на h-мерный случай, получаем, что для парето-оптимальности варианта $x^* \in X^a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные числа $w_1 > 0, \ldots, w_h > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{h} w_j = 1$, для которых неравенство

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant h} w_j f_j(x^*) \geq \min_{1 \leqslant j \leqslant h} w_j f_j(x)$$

выполняется для любого варианта $x \in X^a$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f_j(x) = f_j(x^*)$, а $w_j(x^*) = \prod\limits_{i \neq j} f_i(x^*) / \sum\limits_{k=1}^{h} \prod\limits_{i \neq k} f_i(x^*)$, $j = 1, \ldots, h$.

Приведенное утверждение есть теорема Ю. Б. Гермейера, справедливая также для выпуклого множества достижимых целей Y^a. Она, в частности, полезна, когда необходимо выяснить, является ли данный вариант решения парето-оптимальным. Установлены и другие условия парето-оптимальности решения, например для недифференцируемых функций $y_j = f_j(x)$, для нелинейных сверток частных критериев.

ГЛАВА 9

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

9.1. Итеративный подход к оценке вариантов

Решение задачи многокритериальной оптимизации, как видели ранее, можно в значительной мере облегчить, если учесть следующие важные обстоятельства. Во-первых, найти оптимальный вариант зачастую невозможно без получения дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Эта информация может касаться, например, требований к виду общего показателя качества решения, важности отдельных частных критериев эффективности, возможной степени компенсации изменений качества решения по разным критериям и других содержательных аспектов задачи. Во-вторых, поиск оптимального решения идет быстрее, когда на основе такой информации можно последовательно сужать область допустимых значений и/или множество достижимых целей.

Совместное использование этих двух особенностей задач многокритериальной оптимизации составляет основу большой группы эвристических методов их решения, получивших название итеративных человеко-машинных методов. Процесс решения задачи разбивается на ряд последовательно выполняемых циклических шагов (итераций), состоящих из чередующихся фаз, которые попеременно выполняются человеком (ЛПР) и компьютером (ЭВМ).

Компьютер реализует *фазу расчетов*, на которой, исходя из первоначально имеющейся информации или информации, полученной от ЛПР на предыдущем этапе решения задачи, формируется область допустимых значений X^i, вычисляются признаки $\mathrm{x}^i = (\mathrm{x}_1^i, \ldots, \mathrm{x}_n^i)$ некоторого варианта, оценивается качество варианта по целевым функциям $y_j^i = f_j(\mathrm{x}^i)$ и вырабатывается некоторая вспомогательная информация для ЛПР. Верхний индекс обозначает номер итерации.

Человек осуществляет *фазу анализа*, на которой, исходя из характера информации, полученной путем расчетов на ЭВМ, и своих субъективных предпочтений, оценивает приемлемость признаков варианта $\mathrm{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$ и значений целевых функций $y_j^i = f_j(\mathrm{x}^i)$. Если они удовлетворяют ЛПР, то процедура решения задачи заканчивается. В противном случае ЛПР целенаправленно изменяет параметры задачи оптимизации. На основе измененных данных компьютер выполняет новый вариант расчетов на следующем этапе решения задачи.

Различные итеративные человеко-машинные методы отличаются характером и способами выполнения указанных выше фаз, содержанием, количеством и качеством информации, которой обмениваются ЛПР и ЭВМ. В зависимости от вида информации, сообщаемой человеком для проведения вычислений компьютером, принято выделять методы прямого назначения параметров, поиска удовлетворительных значений критериев, сравнительной оценки вариантов решения. Рассмотрим несколько итеративных человеко-машинных методов.

9.2. Приближенное построение паретовой границы

Метод последовательного нахождения недоминируемых векторов целей, приближенно определяющих паретову границу Y^* в множестве достижимых целей $Y^a = f(X^a)$, относится к наиболее известным методам прямого назначения параметров. Метод включает в себя следующие шаги.

1. ЛПР задает некоторые начальные значения локальных целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y_j^0$, $j = 1, \ldots, h$, после чего находятся оптимальные решения h однокритериальных задач

$$f_j(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a},$$

$$f_k(\mathbf{x}) = y_k^0, \quad k \neq j, \quad k = 1, \ldots, h,$$

которые определяют h векторов $\mathbf{x}_{(j)}^{*1} = (x_{(j)1}^{*1}, \ldots, x_{(j)n}^{*1})$, принадлежащих множеству допустимых значений переменных X^a, и соответствующие им векторы целей $\mathbf{y}_{(j)}^{*1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{(j)}^{*1}) = (y_1^0, \ldots, f_j(\mathbf{x}_{(j)}^{*1}), \ldots, y_h^0)$ из множества достижимости Y^a.

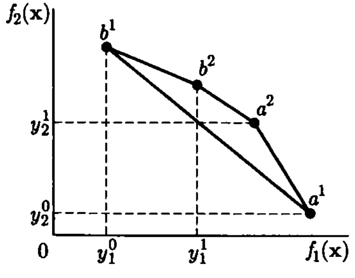


Рис. 9.1. Приближенное построение паретовой границы

Если соединить точки $\mathbf{y}^{*1}_{(j)}$, получится простейшая аппроксимация паретовой границы Y^* в множестве достижимости Y^a. В случае двух критериев оптимальным решениям $\mathbf{x}^{*1}_{(1)}$ и $\mathbf{x}^{*1}_{(2)}$ соответствуют цели $\mathbf{y}^{*1}_{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*1}_{(1)}) = (f_1(\mathbf{x}^{*1}_{(1)}), y^0_2)$ и $\mathbf{y}^{*1}_{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*1}_{(2)}) = (y^0_1, f_2(\mathbf{x}^{*1}_{(2)}))$, которые на рис. 9.1 обозначены точками a^1 и b^1. Прямая линия a_1b_1 представляет первое приближение паретовой границы Y^*.

2. ЛПР анализирует полученное решение и задает новые значения локальных целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y^1_j$, например $y^1_j > y^0_j$, $j = 1, \ldots, h$, после чего снова решается h задач однокритериальной оптимизации

$$f_j(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a},$$

$$f_k(\mathbf{x}) = y^1_k, \quad k \neq j, \quad k = 1, \ldots, h.$$

Находятся h векторов $\mathbf{x}^{*2}_{(j)} = (\mathbf{x}^{*2}_{(j)1}, \ldots, \mathbf{x}^{*2}_{(j)n})$ из множества значений X^a и соответствующие им векторы целей $\mathbf{y}^{*2}_{(j)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*2}_{(j)}) = (y^1_1, \ldots, f_j(\mathbf{x}^{*2}_{(j)}), \ldots, y^1_h)$ из множества достижимости Y. Соединяя точки $\mathbf{y}^{*2}_{(j)}$, получают следующую аппроксимацию паретовой границы Y^* во множестве достижимости Y^a.

В случае двух критериев оптимальным решениям $\mathbf{x}^{*2}_{(1)}$ и $\mathbf{x}^{*2}_{(2)}$ соответствуют векторы целей $\mathbf{y}^{*2}_{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*2}_{(1)}) = (f_1(\mathbf{x}^{*2}_{(1)}), y^1_2)$ и $\mathbf{y}^{*2}_{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*2}_{(2)}) = (y^1_1, f_2(\mathbf{x}^{*2}_{(2)}))$, обозначенные на рис. 9.1 точками a^2 и b^2. Ломаная линия $a^1a^2b^2b^1$ представляет второе приближение паретовой границы Y^*. Процедура продолжается до получения приближения к множеству парето-оптимальных решений, удовлетворяющего ЛПР.

9.3. Замещение критериев по важности

Метод замещения критериев по важности принадлежит к числу методов прямого назначения параметров. Первый вариант метода был предложен для двух критериев С. Гассом и Т. Саати (США). Позднее метод был обобщен на многокритериальный случай. Основные шаги метода состоят в следующем.

1. Вводится аддитивная свертка $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{h} w_j f_j(\mathbf{x})$ локальных целевых функций $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, h$, с неопределенными коэффициентами важности $w_j \geq 0$ локальных критериев, кото-

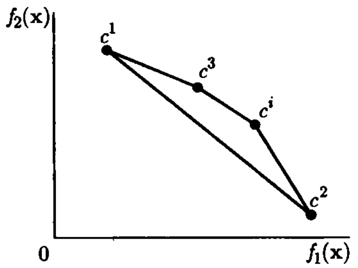


Рис. 9.2. Аппроксимация паретовой границы ломаной линией

рые удовлетворяют условию нормировки $\sum\limits_j w_j = 1$. ЛПР задает некоторые начальные значения весов, например $w_k^1 = 1$, $w_j^1 = 0$, $j \neq k$, $j = 1, \dots, h$, после чего решается задача однокритериальной оптимизации

$$f(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a}. \tag{9.1}$$

Варианту решения $\mathbf{x}^{*1} = (\mathrm{x}_1^{*1}, \dots, \mathrm{x}_n^{*1})$, принадлежащего множеству значений переменных X^a, соответствует вектор целей $\mathbf{y}^{*1} = (f_1(\mathbf{x}^{*1}), \dots, f_h(\mathbf{x}^{*1}))$, представленный во множестве достижимости Y^a точкой c^1.

2. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*1} = (x_1^{*1}, \dots, x_n^{*1})$ и вектор целей $\mathbf{y}^{*1} = (f_1(\mathbf{x}^{*1}), \dots, f_h(\mathbf{x}^{*1}))$ и задает новые значения весов $0 \leq w_j^2 \leq 1$ локальных критериев, например $w_k^2 = v$, $w_l^2 = 1 - v$, $w_j^2 = 0$, $j \neq k, l$, $j = 1, \dots, h$, или какие-то иные. Решается новая задача однокритериальной оптимизации (9.1), которой будет соответствовать вектор $\mathbf{y}^{*2} = (f_1(\mathbf{x}^{*2}), \dots, f_h(\mathbf{x}^{*2}))$ из множества целей Y^a.

На i-й итерации находится вектор целей $\mathbf{y}^{*i} = (f_1(\mathbf{x}^{*i}), \dots, f_h(\mathbf{x}^{*i}))$. Процедура оканчивается, когда ЛПР будет удовлетворено полученным результатом. Соединяя после каждой итерации точки c^i, соответствующие векторам $\mathbf{y}^{*i}$, получаем ломаную линию $c_1 c_2 \dots c_i$ (рис. 9.2), которая аппроксимирует паретову границу.

С помощью описанной процедуры можно последовательно находить недоминируемые векторы целей $\mathbf{y}^*$, причем ЛПР получает представление о том, насколько улучшится значение одной из локальных целевых функций, если ухудшить значение другой. Однако с ростом числа локальных целевых функций начинают сильно усложняться процедуры расчетов из-за увеличения размерности задачи и появления неоднозначности при переборе недоминируемых решений. Одновременно с этим информация, предъявляемая ЛПР для анализа, становится менее обозримой и более трудной для понимания.

9.4. Допустимое ограничение значений критериев

Методы, основанные на последовательном изменении допустимых пороговых уровней локальных целевых функций, относятся к группе процедур поиска удовлетворительных значений критериев. Метод удовлетворительных целей Р. Бенсона (США) состоит из следующих шагов.

1. ЛПР устанавливает минимально допустимые пороговые уровни y_j^0 для каждой локальной целевой функции $f_j(\mathbf{x})$ так, чтобы были выполнены условия $f_j(\mathbf{x}) \geq y_j^0$, $j = 1, \ldots, h$, и указывает наименее удовлетворяющий его критерий $f_k(\mathbf{x})$.

2. Ищется решение задачи однокритериальной оптимизации

$$\mathbf{x}^{*1} \in \arg\max_{x \in X^a} f_k(\mathbf{x})$$

при дополнительных ограничениях $f_j(\mathbf{x}) \geq y_j^0$, $j \neq k$.

3. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*1} = (x_1^{*1}, \ldots, x_n^{*1})$ и глобальную целевую функцию $\mathbf{y}^{*1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*1}) = (f_1(\mathbf{x}^{*1}), \ldots, f_h(\mathbf{x}^{*1}))$. Если их значения удовлетворяют ЛПР, то задача решена и процедура оканчивается. Если их значения не удовлетворяют ЛПР, то процедура решения продолжается.

4. ЛПР ослабляет требования к локальным критериям, вводя меньшие значения пороговых уровней $y_j^1 \leq y_j^0$, $j = 1, \ldots, h$. Повторяются шаги 2 — 4 до тех пор, пока не будет получена глобальная целевая функция $\mathbf{y}^{*i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*i}) = (f_1(\mathbf{x}^{*i}), \ldots, f_h(\mathbf{x}^{*i}))$, удовлетворяющая ЛПР. Если такую целевую функцию получить не удается, возвращаются к шагу 1.

5. ЛПР указывает другую наименее удовлетворяющую его локальную целевую функцию, например $f_s(\mathbf{x})$. Снова повторяются шаги 2 — 4. Процедура продолжается до получения приемлемого для ЛПР результата.

В эту же группу входит метод отсекающих порогов, предложенный В. С. Михалевичем и В. Л. Волковичем (СССР).

1. ЛПР устанавливает минимально допустимые пороговые уровни y_j^0 по каждой локальной целевой функции $f_j(\mathbf{x})$ так, чтобы были выполнены условия $f_j(\mathbf{x}) \geq y_j^0$, $j = 1, \ldots, h$. Варианты решения $\mathbf{x}$, имеющие оценки по локальным критериям ниже пороговых, рассматриваются как нежелательные.

2. Ищется решение задачи однокритериальной оптимизации:

$$\mathbf{x}^{*1} \in \arg\max_{x \in X^a} \min_j (f_j(\mathbf{x}) - y_j^0)$$

при дополнительных ограничениях $f_j(\mathbf{x}) \geq y_j^0$.

Шаги 3 — 4 совпадают с приведенными ранее. Процедура продолжается до получения приемлемого для ЛПР результата.

Если локальные целевые функции $f_j(\mathbf{x})$ имеют для ЛПР разную важность, выражаемую весом $w_j > 0$, то оптимальный вариант ищется как решение задачи $\mathbf{x}^{*1} \in \arg\max_{x \in X^a} w_k f_k(\mathbf{x})$ или $\mathbf{x}^{*1} \in \arg\max_{x \in X^a} \min_j w_j(f_j(\mathbf{x}) - y_j^0)$.

9.5. Последовательное ограничение значений критериев

Метод последовательного ограничения значений локальных целевых функций СТЕМ (STEM — STEp Method, пошаговый метод) принадлежит к группе процедур поиска удовлетворительных значений критериев. Метод разработан Р. Бенайюн, Ж. де Монгольфье, Ж. Терни (Франция) и О. И. Ларичевым (СССР) и состоит из следующих шагов.

1. Предварительно, чтобы показать ЛПР допустимые уровни притязания, проводится анализ максимально возможных уровней достижимости по всем частным критериям. Решается h задач однокритериальной оптимизации:

$$\mathbf{x}_{(j)}^* \in \arg\max_{x \in X^a} f_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \ldots, h, \tag{9.2}$$

и находится h векторов $\mathbf{x}_{(j)}^* = (x_{(j)1}^*, \ldots, x_{(j)n}^*)$, которые определяют локально-оптимальные решения по каждому критерию $f_j(\mathbf{x})$ на множестве допустимых значений переменных X^a. Каждому локально-оптимальному решению $\mathbf{x}_{(j)}^*$ соответствует своя векторная целевая функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(j)}^*)$, характеризующая общее качество решения. Всего получается h векторов вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(1)}^*) = (f_1(\mathbf{x}_{(1)}^*), \ldots, f_h(\mathbf{x}_{(1)}^*)) = (y_{11}, \ldots, y_{1h}),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(h)}^*) = (f_1(\mathbf{x}_{(h)}^*), \ldots, f_h(\mathbf{x}_{(h)}^*)) = (y_{h1}, \ldots, y_{hh}).$$

Полная совокупность значений локальных целевых функций для всех локально-оптимальных решений образует матрицу $\mathrm{Y} =$

$= (y_{jk})$, $y_{jk} = f_k(\mathbf{x}^*_{(j)})$, элементы которой характеризуют множество достижимых целей Y^a. Значение диагонального элемента матрицы $y_{kk} = f_k(\mathbf{x}^*_{(k)})$ определяет предельно достижимый уровень оценки по k-му локальному критерию.

Для удобства значения элементов y_{jk} матрицы Y нормируются по столбцам путем их деления на значение соответствующего диагонального элемента y_{kk}. Таким образом, получается преобразованная матрица $\mathrm{Y}' = (y'_{jk})$, $y'_{jk} = y_{jk}/y_{kk}$, где максимальные значения диагональных элементов $y'_{kk} = 1$.

2. Проводится анализ матрицы локальных критериев, который может дать ЛПР полезную информацию. Если значения оценок по локальным критериям в каких-то двух столбцах отличаются мало, то можно предположить, что эти два локальных критерия как-то взаимно связаны, так как остальные критерии одинаково влияют на них. Если значения оценок сильно различаются, то соответствующие критерии, скорее всего, противоречивы.

Для каждой локальной целевой функции $f_j(\mathbf{x})$ вычисляется ее вес $w_j \geq 0$, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$w_j/w_k = (1 - v_j)/(1 - v_k), \quad v_j = \sum_{l=1, l\neq j}^{h} y'_{jl}/(h-1), \quad \sum_{j=1}^{h} w_j = 1.$$

Чем меньше вес w_j локального критерия $f_j(\mathbf{x})$, тем ближе среднее значение всех его оценок v_j к максимально возможному. Значит, этот критерий $f_j(\mathbf{x})$ относится к числу удовлетворительных, и ЛПР может не обращать на него внимание. Если вес критерия w_k велик, а среднее значение оценок v_k мало, то локальный критерий $f_k(\mathbf{x})$ сильно зависит от изменения остальных критериев, и этот критерий $f_k(\mathbf{x})$ должен привлечь внимание ЛПР.

3. Ищется решение задачи однокритериальной оптимизации с глобальной целевой функцией $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{h} w_j f_j(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}^{*1} \in \arg \max_{x \in X^a} f(\mathbf{x}),$$

где веса w_j локальных критериев $f_j(\mathbf{x})$ вычислены на этапе 2.

4. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*1} = (x_1^{*1}, \ldots, x_n^{*1})$, значения локальных критериев $f_j(\mathbf{x}^{*1})$ и глобального критерия $f(\mathbf{x}^{*1}) = \sum_{j=1}^{h} w_j f_j(\mathbf{x}^{*1})$. Если эти значения удовлетворяют ЛПР,

то задача решена и процедура оканчивается. Если их значения не удовлетворяют ЛПР, то процедура решения продолжается.

5. ЛПР указывает локальный критерий $f_k(\mathbf{x})$, в наименьшей степени его удовлетворяющий, и устанавливает для этого критерия некоторый минимальный пороговый уровень y_k^0, выше которого решение может устроить ЛПР. Условие $f_k(\mathbf{x}) \geq y_k^0$ добавляется в число ограничений исходной задачи, которые в совокупности определяют новую область допустимых значений переменных X^1. Шаги $1-4$ повторяются для этой новой области X^1. Процедура продолжается до получения приемлемого для ЛПР результата по всем локальным критериям.

В модификации метода, предложенной Д. Лауксом (США), ЛПР может неоднократно изменять ранее установленные пороги по любому из критериев, что позволяет ему устранять возможные ошибки. В. Михаловски (Канада) предложил поменять в методе порядок фаз расчета и анализа и начинать очередную итерацию с действий ЛПР, а также ввел более гибкую процедуру задания ограничений на критерии. ЛПР может назначать пороговые уровни одновременно по нескольким критериям, улучшая значения одних критериев, ухудшая значения других и не меняя значения третьих.

9.6. Последовательное приближение к опорной точке

Методы, основанные на последовательном приближении к опорной точке, относятся к группе процедур сравнительной оценки вариантов решений. Приведем основные шаги метода А. Вержбицкого (Польша).

1. Совпадает с шагом 1 метода последовательного ограничения значений критериев СТЕМ и состоит в построении матрицы $\mathrm{Y} = (y_{jk})$, $y_{jk} = f_k(\mathbf{x}^*_{(j)})$, $j, k = 1, \ldots, h$, всех значений векторов локальных целевых функций, которые соответствуют h локально-оптимальным решениям однокритериальных задач линейного программирования (9.2) на множестве допустимых значений переменных X^a.

Значения диагональных элементов $y_{kk} = f_k(\mathbf{x}^*_{(k)})$ матрицы Y представляют собой максимально возможные оценки по каждому локальному критерию, которые в принципе могут быть достигнуты, но, конечно, не все одновременно. Все эти оценки вместе определяют идеальную точку $\mathbf{y}^{*0} = (y_1^{*0}, \ldots, y_h^{*0})$ с координатами $y_k^{*0} = y_{kk} = f_k(\mathbf{x}_{(k)}^*)$, $k = 1, \dots, h$, которая задает предельно достижимые уровни в пространстве целей Y^a. Сравнивая текущее решение с предельно достижимым, ЛПР может оценить достижимость желаемой глобальной цели.

2. ЛПР указывает в пространстве целей Y^a желательную опорную точку $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_h^0)$, может быть, практически и не достижимую. В качестве опорной точки можно выбрать идеальную точку с координатами $y_k^0 = y_k^{*0} = f_k(\mathbf{x}_{(k)}^*)$ или точку с координатами $y_k^0 = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant h} f_k(\mathbf{x}_{(j)}^*)$, или точку с любыми другими координатами по усмотрению ЛПР.

3. ЛПР задает в пространстве целей Y^a некоторую меру близости между векторами целевых функций (точками) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и опорной точкой $\mathbf{y}^0$, используя метрику $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0]$ вида (8.5) — (8.7), которая играет роль показателя эффективности решения. Аналогично подходу, примененному для поиска варианта с заданными оценками качества (см. разд. 8.7), в области допустимых значений переменных X^a ищется решение оптимизационной задачи:

$$\mathbf{x}^{*1} \in \arg \min_{x \in X^a} d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$$

и находится точка $\mathbf{y}^{*1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*1})$, ближайшая к опорной точке $\mathbf{y}^0$.

4. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*1} = (x_1^{*1}, \dots, x_n^{*1})$ и глобальную целевую функцию $\mathbf{y}^{*1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*1}) = (f_1(\mathbf{x}^{*1}), \dots, f_h(\mathbf{x}^{*1}))$. Если их значения удовлетворяют ЛПР, то задача решена и процедура оканчивается. Если их значения не удовлетворяют ЛПР, то процедура решения продолжается.

5. Вблизи опорной точки $\mathbf{y}^0$ по каждому значению локального критерия y_j^0 ЛПР задает небольшое отклонение z, в результате чего получается h «возмущенных» точек $\mathbf{y}_{(j)}^0 = (y_1^0, \dots, y_j^0 + z, \dots, y_h^0)$, близких к исходной опорной точке $\mathbf{y}^0$. ЛПР анализирует векторы отклонений от опорной точки $\mathbf{y}^0$, выбирает среди «возмущенных» точек наиболее предпочтительную, например $\mathbf{y}_{(s)}^0 = (y_1^0, \dots, y_s^0 + z, \dots, y_h^0)$ и назначает ее новой опорной точкой $\mathbf{y}_{(s)}^0 = \mathbf{y}^1$.

6. Повторяются шаги 3 и 4. Ищется решение оптимизационной задачи:

$$\mathbf{x}^{*2} \in \arg \min_{x \in X^a} d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^1]$$

и находится точка $\mathbf{y}^{*2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*2})$, ближайшая к опорной точке $\mathbf{y}^1$.

7. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*2} = (x_1^{*2}, \ldots, x_n^{*2})$ и глобальную целевую функцию $\mathbf{y}^{*2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{*2}) = (f_1(\mathbf{x}^{*2}), \ldots, f_h(\mathbf{x}^{*2}))$. Если они удовлетворяют ЛПР, то процедура решения оканчивается. Если нет, процедура продолжается до получения приемлемого результата.

В методе целевого программирования А. Чарнса и В. Купера (США) ЛПР находит удовлетворяющий его результат, варьируя коэффициенты важности w_j частных критериев $f_j(\mathbf{x})$, входящие в выражение для взвешенной метрики Хемминга $d_1[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$, заданной формулой (8.6). В методе М. Е. Салуквадзе (СССР) используется взвешенная метрика Евклида $d_2[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$, определяемая выражением (8.7) с коэффициентами важности критериев $w_j = 1/y_j^{*0}$. В модифицированном варианте метода целевого программирования (В. Д. Ногин, Россия) сначала производится сужение области допустимых значений X^a на основе получаемой от ЛПР информации об относительной важности частных критериев $f_j(\mathbf{x})$, а затем ищется вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, наиболее близкий к идеальной точке $\mathbf{y}^0$.

К методам последовательного приближения к опорной точке примыкает и метод максимизации эффективности, разработанный В. В. Хоменюком (СССР).

В этом методе шаги 1 и 2 те же, что и ранее. Мера близости к идеальной точке $\mathbf{y}^*$ в пространстве целей Y^a определяется не абсолютным, а относительным показателем достижимости (критерием эффективности):

$$l_j(\mathbf{x}) = \frac{d[f_j(\mathbf{x}), y_j^{\min}]}{d[y_j^{*0}, y_j^{\min}]} = \frac{f_j(\mathbf{x}) - y_j^{\min}}{y_j^{*0} - y_j^{\min}},$$

где $y_j^{\min}$ — минимальная (наихудшая) оценка по j-й локальной целевой функции $f_j(\mathbf{x})$, вычисляемая или задаваемая ЛПР.

Оптимальное решение ищется далее аналогичным образом как решение задачи:

$$\mathbf{x}^* \in \arg\max_{x \in X^a} \min_j l_j(\mathbf{x}),$$

или задачи однокритериальной оптимизации с глобальным критерием

$$\mathbf{x}^* \in \arg\max_{x \in X^a} \sum_{j=1}^{h} w_j l_j(\mathbf{x}).$$

Процедура решения продолжается до тех пор, пока не будет получен приемлемый для ЛПР результат.

9.7. Визуализация множества достижимых целей

Технические возможности современной вычислительной техники позволяют сделать процедуру решения задачи многокритериальной оптимизации наглядной для человека. Разработан ряд итеративных человеко-машинных методов, реализованных в виде компьютерных систем поддержки принятия решений, где ход решения задачи многокритериальной оптимизации, промежуточные и окончательные результаты отображаются на экране дисплея в графической форме.

Одним из таких методов является метод достижимых целей, или метод Парето СТЕП (Pareto Step, шаг Парето), разработанный А. В. Лотовым с коллегами (Россия), который обеспечивает визуализацию паретовой границы и сочетает процедуры прямого назначения параметров и поиска удовлетворительных значений критериев. Метод основан на последовательном приближении к паретовой границе Y^*, аппроксимируемой выпуклым многогранником, который определяется системой линейных неравенств $\sum\limits_{j=1}^{h} c_{lj}y_j \leq c_l$, $l = 1, \ldots, L$. Паретова граница Y^* графически изображается с помощью наборов специальных *карт решений* в пространстве достижимых целей Y^a. Каждая карта решений представляет собой несколько плоских двумерных сечений многомерной паретовой границы по паре выделенных так называемых координатных критериев при различных фиксированных значениях третьего критерия, задающего эти сечения. Метод включает в себя следующие основные шаги.

1. ЛПР устанавливает некоторые начальные значения локальных целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y_j^1$, $j = 1, \ldots, h$, по которым строится первая аппроксимация паретовой границы Y^* в множестве достижимости Y^a — вектор целей $\mathbf{y}^{*1} = (y_1^{*1}, \ldots, y_h^{*1})$.

2. Вектор целей $\mathbf{y}^{*1} = (y_1^{*1}, \ldots, y_h^{*1})$ предъявляется ЛПР, выбирающему три критерия, значения которых он хочет изменить, например $f_i(\mathbf{x})$, $f_j(\mathbf{x})$ и $f_s(\mathbf{x})$. Критерии $f_i(\mathbf{x})$ и $f_j(\mathbf{x})$ назначаются координатными критериями, а $f_s(\mathbf{x})$ — критерием, задающим сечения. Шаг изменения значений критерия $f_s(\mathbf{x})$ определяется ЛПР и для удобства обычно принимается постоянным.

3. На экране дисплея высвечивается карта решений, на которой в координатах $(f_i(\mathbf{x}), f_j(\mathbf{x}))$ представлены сечения первой аппроксимации паретовой границы Y^* для различных значений критерия $f_s(\mathbf{x})$, и выделена лежащая на одном из сечений точка, соответствующая вектору $\mathbf{y}^{*1}$ (рис. 9.3).

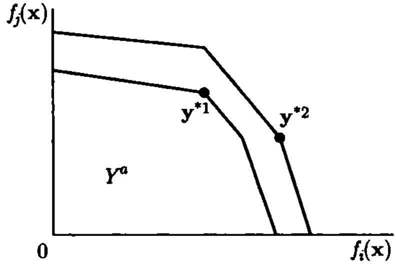


Рис. 9.3. Карта решений (двумерное сечение паретовой границы)

4. ЛПР анализирует построенное решение и указывает на паретовой границе другие более предпочтительные значения критериев $f_i(\mathbf{x}) = y_i^{*2}$, $f_j(\mathbf{x}) = y_j^{*2}$, $f_s(\mathbf{x}) = y_s^{*2}$, в результате чего получается следующая итерация паретовой границы

$$\mathbf{y}^{*2} = (y_1^{*1}, \ldots, y_i^{*2}, \ldots, y_j^{*2}, \ldots, y_s^{*2}, \ldots, y_h^{*1}).$$

5. Аналогичные карты решений строятся для других пар координатных критериев $f_p(\mathbf{x})$, $f_q(\mathbf{x})$ и критериев $f_r(\mathbf{x})$, задающих сечения. Наборы разных карт решений отображаются на экране дисплея (каждая карта показывается своим цветом) и дают ЛПР наглядное представление об аппроксимации многомерной паретовой границы Y^* в множестве достижимых целей. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет получен удовлетворяющий ЛПР результат.

Приемлемая быстрота построения карт решений при изменении значений критериев обеспечивается используемым в методе способом аппроксимации паретовой границы Y^*. Метод позволяет накладывать изображения сечений друг на друга, что облегчает их визуальное сравнение и анализ структуры паретовой границы. В результате ЛПР может проанализировать различные варианты решения и выбрать наиболее предпочтительный для себя вариант.

ГЛАВА 10

МНОГОЭТАПНЫЙ ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

10.1. Транспортная задача

В ряде случаев процессы принятия решений можно естественным или искусственным образом разделить на этапы, которые выполняются параллельно и/или последовательно. Обычно это задачи оптимального планирования или управления динамическими процессами. Тогда возникает задача многоэтапного оптимального выбора, решение которой можно упростить, разбив исходную задачу на ряд менее сложных задач оптимизации.

Рассмотрим один весьма важный частный случай динамической задачи оптимального выбора в условиях определенности — задачу транспортного типа, которая относится к классу задач линейного программирования и содержательно формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, условно называемых складами, где сосредоточены запасы однородного груза в объемах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц, и n пунктов назначения B_1, $B_2, \ldots, B_n$, условно называемых базами, которые вмещают b_1, $b_2, \ldots, b_n$ единиц груза. Обозначим через $x_{ij} \geq 0$ количество единиц груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Предполагается, что стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в любой пункт B_j равна c_{ij}, а расходы на перевозку груза из произвольного пункта отправления A_i в любой пункт назначения B_j пропорциональны объему груза $z_{ij} = c_{ij}x_{ij}$. Требуется выбрать такие маршруты перевозок, чтобы груз был перевезен со складов на базы, а суммарные расходы z на транспортировку грузов были минимальными. Этапом в такой задаче служит решение о перевозке груза из пункта A_i в пункт B_j.

Модель транспортной задачи относится к числу так называемых сетевых моделей, широко применяемых на практике, что еще раз подчеркивает ее особую прикладную важность. Модель транспортной задачи удобно изображать в виде транспортной сети с m начальными пунктами A_i и n конечными пунктами B_j, которые соединены дугами x_{ij}, соответствующими маршрутам перевозки грузов (рис. 10.1). Графически такая сеть представля-

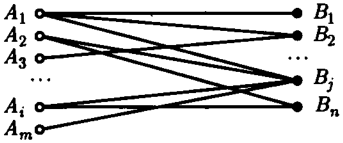


Рис. 10.1. Транспортная сеть

ет собой двудольный граф или другого вида ациклический граф с ориентированными дугами.

Задача линейного программирования заключается в следующем: необходимо минимизировать общие расходы на транспортировку груза

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{10.1}$$

на объемы перевозимого груза при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, j = 1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Первое из ограничений-неравенств указывает, что суммарный объем груза, отправляемого с i-го склада, не может превышать имеющийся там запас a_i, а второе, — что суммарный объем груза, поступившего на j-ю базу, должен обеспечивать полную загрузку существующей вместимости базы b_j.

Транспортная задача в стандартной форме удовлетворяет ограничениям-равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{10.3}$$

которые означают, что весь груз должен быть перевезен со складов на базы, причем объем вывезенного груза в точности равен имевшемуся на складе запасу, а объем ввезенного груза равен существующей вместимости базы. Такая постановка транспортной задачи называется *сбалансированной*. Необходимым и достаточным условием для разрешимости сбалансированной транспортной задачи является выполнение условия баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{10.4}$$

При решении сбалансированной транспортной задачи требуется найти $k = mn$ переменных $x_{ij} \geq 0$ (объемы перевозок из пунктов A_i в пункт B_j), которые минимизируют функцию z

(общие расходы на транспортировку груза), заданную выражением (10.1), и удовлетворяют $m + n$ ограничениям-равенствам (10.3). Так как величины a_i и b_j связаны дополнительным условием баланса (10.4), то общее число линейно независимых уравнений в системе (10.3), а значит, и число базисных переменных $r = m + n - 1$. Тогда число свободных переменных $s = k - r = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$.

Совокупность всех переменных x_{ij} образует матрицу $\mathrm{X} = (x_{ij})_{m\times n}$, называемую *планом перевозок*, строки которой соответствуют пунктам отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, столбцы — пунктам назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$. План перевозок, удовлетворяющий ограничениям (10.3), называют *допустимым*. Будем называть допустимый план *опорным*, если в плане отличны от нуля не более $r = m+n-1$ базисных переменных x_{ij} (перевозок), а остальные $s = (m-1)(n-1)$ свободных переменных x_{ij} равны 0. Допустимый план, обеспечивающий минимум целевой функции $z^* = \min z$, называется *оптимальным*.

Условия, задающие сбалансированную транспортную задачу, представляются с помощью транспортной таблицы размером $(m + 1) \times (n + 1)$. Транспортная таблица включает в себя план перевозок $\mathrm{X} = (x_{ij})_{m\times n}$, к которому добавляется столбец, указывающий величину запаса a_i на складе A_i, и строка, указывающая вместимость b_j базы B_j. В левом верхнем углу каждой клетки транспортной таблицы проставляется стоимость c_{ij} перевозки из пункта A_i в пункт B_j.

10.2. Методы решения задач транспортного типа

Специфические особенности транспортной задачи позволили разработать для ее решения значительно более простые и эффективные алгоритмы, чем, например, симплекс-метод, хотя транспортная задача, как и всякая задача линейного программирования, может быть решена и любым общим методом.

Проиллюстрируем на следующем примере решение сбалансированной транспортной задачи так называемым *методом северо-западного угла*, который основан на заполнении транспортной таблицы.

Пример 10.1. Транспортная таблица перевозок из пунктов A_1, A_2, A_3, A_4 в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 приведена в табл. 10.1. Стоимость c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами указана в рамке в левом верхнем углу соответствующей клетки таблицы.

Таблица 10.1

Транспортная матрица (1-й опорный план, $z_1 = 1\,442$ ед., 2-й опорный план, $z_2 = 1\,398$ ед.)

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас
A_1	$\boxed{13}$ 18	$\boxed{7}$ 12	$\boxed{14}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	$a_1 = 30$
A_2	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{12}$ −(22) 33	$\boxed{6}$ + (11) 0	$\boxed{8}$	$a_2 = 48$
A_3	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ +(20) 9	$\boxed{8}$ − (0) 11	$\boxed{11}$	$a_3 = 20$
A_4	$\boxed{14}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{15}$ 26	$a_4 = 30$
Вмести-мость	$b_1 = 18$	$b_2 = 27$	$b_3 = 42$	$b_4 = 15$	$b_5 = 26$	$\sum = 128$

1. Заполнение транспортной таблицы для составления опорного плана перевозок начинается с левого верхнего (северо-западного) угла. Первой базисной переменной x_{11} придается максимально возможное значение, одновременно допускаемое ограничениями на запас склада и вместимость базы. После этого вычерчивается соответствующий столбец или строка. Это означает, что остальные переменные такого столбца или строки являются свободными и полагаются равными нулю. Если ограничения по столбцу или строке совпадают, то можно вычеркнуть или столбец, или строку. В данном случае имеем $x_{11} = b_1 = 18$ ед. груза. Считая $x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$, вычеркиваем первый столбец B_1.

2. После вычеркивания первой группы свободных переменных, стоящих в первом столбце B_1, переходят к ближайшей по строке или столбцу невычеркнутой базисной переменной, которая допускается заданными ограничениями на запасы и вместимость. Если одновременно и по строке, и по столбцу запасы и емкости окажутся полностью исчерпанными, то значение очередной переменной принимается равным нулю. В данном примере в первой строке A_1 остались неиспользованными $a_1 - x_{11} = 30 - 18 = 12$ ед. груза, которые приписываются базисной переменной $x_{12} = 12$. Остальные переменные первой строки считаются свободными $x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$, и первая строка A_1 вычеркивается.

3. Во втором столбце B_2 остаток составляет $b_2 - x_{12} = 27 - 12 = 15$ ед. груза. Припишем его базисной переменной $x_{22} = 15$,

а остальные переменные второго столбца положим свободными $x_{32} = x_{42} = 0$. Второй столбец B_2 вычеркивается.

4. Процесс продолжается до полного использования всех запасов и вместимостей транспортной матрицы. Получим базисные переменные $x_{23} = 33$, $x_{33} = 9$, $x_{34} = 11$, $x_{44} = 4$, $x_{45} = 26$ и свободные переменные во второй строке A_2 $x_{24} = x_{25} = 0$; в третьем столбце B_3 $x_{43} = 0$; в третьей строке A_3 $x_{35} = 0$. Итак, построен удовлетворяющий ограничениям допустимый план с базисными переменными $x_{11} = 18$, $x_{12} = 12$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 33$, $x_{33} = 9$, $x_{34} = 11$, $x_{44} = 4$, $x_{45} = 26$. Общие расходы на транспортировку всего груза составляют:

$$z_1 = 13 \cdot 18 + 7 \cdot 12 + 8 \cdot 15 + 12 \cdot 33 + 10 \cdot 9 +$$
$$+ 8 \cdot 11 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 26 = 1\,442 \text{ ед.}$$

Количество базисных переменных, отличных от нуля, $r = m + n - 1 = 8$. Поэтому план будет также и опорным. Однако этот план не будет оптимальным.

5. Если проанализировать транспортную таблицу, то нетрудно убедиться, что можно построить более выгодный план с меньшими расходами, если по-другому перераспределить перевозимые грузы. Для этого нужно уменьшить количество груза, перевозимого по высокой стоимости, и увеличить количество груза, перевозимого по низкой стоимости. Так, если везти 11 единиц груза в пункт B_4 не из пункта A_3 по стоимости 8 единиц, а из пункта A_2 по стоимости 6 единиц, то общие расходы станут меньше.

Составим новый опорный план перевозок, переместив 11 единиц груза из клетки [3, 4] в клетку [2, 4] и из клетки [2, 3] в клетку [3, 3], т. е., сделав циклическую перестановку. Получим новые значения базисных переменных $x_{23} = 22$, $x_{24} = 11$, $x_{33} = 20$, а бывшая базисная переменная x_{34} станет свободной, т. е. будет $x_{34} = 0$. (В табл. 10.1 эти новые значения переменных указаны в круглых скобках.) Таким образом, объемы перевозок, указанные в клетках таблицы с номерами, сумма цифр которых нечетна, уменьшатся (для обозначения этого в вершинах цикла ставится знак минус), а объемы перевозок, указанные в клетках таблицы с номерами, сумма цифр которых четна, увеличатся (в вершинах цикла ставится знак плюс). Стоимость перевозки единицы груза по циклу $[2,4] \to [2,3] \to [3,3] \to [3,4] \to [2,4]$ равняется $6 - 12 + 10 - 8 = -4$ ед. поэтому общие расходы на транспортировку всего груза уменьшатся на $\Delta z_2 = 4 \cdot 11 = 44$ ед. и составят $z_2 = 1\,398$ ед. ■

Таблица 10.2

Транспортная матрица (3-й опорный план, $z_3 = 1\,332$ ед.)

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас
A_1	$\boxed{13}$ 18	$\boxed{7}$ −	$\boxed{14}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ + 12	$A_1 = 30$
A_2	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$ + 27	$\boxed{12}$ − 21	$\boxed{6}$ +	$\boxed{8}$	$a_2 = 48$
A_3	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ 20	$\boxed{8}$	$\boxed{11}$	$a_3 = 20$
A_4	$\boxed{14}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ + 1	$\boxed{10}$ 15	$\boxed{15}$ − 14	$a_4 = 30$
Вместимость	$b_1 = 18$	$b_2 = 27$	$b_3 = 42$	$b_4 = 15$	$b_5 = 26$	$\sum = 128$

Пример 10.2. Определим, нельзя ли улучшить полученный новый опорный план, т. е. проверим, нет ли какой-либо свободной переменной, имеющей более низкую стоимость перевозки, которую можно сделать новой базисной переменной так, чтобы образовался цикл с отрицательным значением стоимости перевозки единицы груза. В рассматриваемом примере такая переменная есть — это x_{15}, стоящая в клетке $[1,5]$ с четной суммой цифр номера. Эта клетка принимается за положительную вершину цикла. Очевидно, что можно построить несколько различных циклов, проходящих через клетку $[1,5]$.

Наибольшая выгода получается, если в качестве следующей отрицательной вершины цикла взять клетку с наибольшей по столбцу B_5 стоимостью перевозки груза — клетку $[4,5]$. С учетом заданных ограничений на запасы и емкости следующими положительными вершинами цикла будут клетки $[4,3]$ и $[2,2]$, отрицательными вершинами — клетки $[2,3]$ и $[1,2]$. Таким образом, новый опорный план перевозок (табл. 10.2) образуется с помощью циклической перестановки $[1,5] \to [4,5] \to [4,3] \to \to [2,3] \to [2,2] \to [1,2] \to [1,5]$. Стоимость перевозки единицы груза по этому циклу отрицательна и составляет $5 - 15 + 10 - -12 + 8 - 7 = -11$ ед., а общие расходы на транспортировку всего груза будут равны

$$z_3 = 13 \cdot 18 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot 27 + 12 \cdot 21 + 10 \cdot 20 +$$
$$+ 10 \cdot 1 + 10 \cdot 15 + 15 \cdot 14 = 1\,332 \text{ ед.} \qquad \blacksquare$$

Последовательно отыскивая свободные клетки, имеющие отрицательные стоимости перевозки груза, и уменьшая общие расходы z за счет перераспределения перевозок, можно получить в итоге оптимальный план $z^* = \min z$.

Описанный метод северо-западного угла необязательно сразу дает «хорошее» решение сбалансированной транспортной задачи и требует выполнения дополнительных процедур для получения оптимального решения. Однако этот метод легко можно улучшить различными способами.

Например, в *методе наименьшей стоимости* в качестве первой базисной переменной следует выбирать не x_{11}, а переменную, которой соответствует наименьшая во всей таблице стоимость перевозки грузов, и придавать этой переменной возможно большее значение, допускаемое заданными ограничениями на запасы и вместимости. Если таких переменных несколько, то берется любая из них. Вычеркивается соответствующий столбец или строка. Если ограничения по столбцу и строке выполняются одновременно, то вычеркивается или столбец, или строка. В качестве следующей базовой переменной выбирается та из невычеркнутых переменных, которой соответствует минимальное значение стоимости перевозок, и процесс продолжается. Процедура завершается после исчерпания всех запасов и вместимостей.

Пример 10.3. Опорный план перевозок, составленный с помощью метода наименьшей стоимости для примера 10.1, приведен в табл. 10.3. Этот план характеризуется такими базисными переменными: $x_{15} = 26$, $x_{24} = 15$, $x_{31} = 18$, $x_{12} = 4$, $x_{22} = 23$,

Таблица 10.3

Транспортная матрица (оптимальный план, $z_4 = 980$ ед.)

Пункт	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас
A_1	$\boxed{13}$	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{14}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ 26	$a_1 = 30$
A_2	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$ 23	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{8}$	$a_2 = 48$
A_3	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{8}$	$\boxed{11}$	$a_3 = 20$
A_4	$\boxed{14}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$a_4 = 30$
Вместимость	$b_1 = 18$	$b_2 = 27$	$b_3 = 42$	$b_4 = 15$	$b_5 = 26$	$\sum = 128$

$x_{21} = 10$, $x_{33} = 2$, $x_{43} = 30$. Общие расходы на транспортировку груза равны

$$z_4 = 7\cdot4+5\cdot26+8\cdot23+12\cdot10+6\cdot15+6\cdot18+10\cdot2+10\cdot30 = 980 \text{ ед.},$$

что существенно меньше расходов, полученных по методу северо-западного угла. Можно показать, что данное решение и будет оптимальным $z_4 = z^* = \min z$. ■

Итак, для уменьшения расходов и построения оптимального плана перевозок нужно перераспределить перевозки по циклам, имеющим отрицательные стоимости перевозки единицы груза. При этом одна из свободных переменных станет базисной, а какая-то из базисных переменных — свободной. Направление обхода клеток транспортной таблицы несущественно. В теории линейного программирования доказано, что для каждой свободной переменной в опорном плане перевозок существует единственный цикл, одна вершина которого (первая) лежит в данной клетке транспортной таблицы, а остальные — в клетках с базисными переменными. При оптимальном плане в транспортной таблице не останется свободных переменных с циклом, имеющим отрицательную стоимость перевозки единицы груза.

10.3. Разновидности транспортной задачи

В стандартной постановке транспортной задачи предполагается, что все грузы сразу перевозятся из пунктов отправления в пункты назначения, причем эти пункты связаны кратчайшими маршрутами. На практике предварительно приходится находить такие кратчайшие маршруты, прежде чем определять стоимость перевозок груза между пунктами. Чтобы избежать решения дополнительной задачи о выборе кратчайшего пути, можно видоизменить транспортную задачу и допустить перевозку груза через промежуточные пункты. Введение таких промежуточных пунктов позволяет перевозить весь груз транзитом через любой пункт отправления или назначения, рассматривая их как дополнительные вершины транспортной сети.

Для перехода к стандартной постановке транспортной задачи общее число промежуточных пунктов принимается равным сумме $m+n$ пунктов отправления и назначения, поскольку априори неизвестно, через какие пункты пройдет маршрут. В этом случае стоимость перевозки единицы груза между двумя транзитными пунктами в прямом и обратном направлениях может оказаться различной, если будут использоваться разные маршруты.

Чтобы учесть транзитные перевозки, в каждом пункте отправления и назначения вводится дополнительный буфер вместимостью $b_0 \geq \sum\limits_i a_i = \sum\limits_j b_j$. Эти буферы располагаются в диагональных клетках расширенной транспортной таблицы размером $(m+n+1) \times (m+n+1)$ и имеют нулевую стоимость перевозки $c_{ij} = 0$.

В итоговое решение транспортной задачи войдут только переменные, стоящие в недиагональных клетках таблицы.

В реальных ситуациях не всегда выполняется условие (10.4) баланса между объемами запасов груза a_i на складах A_i и вместимостями b_j баз B_j. Однако такую транспортную задачу, называемую *открытой*, всегда можно сбалансировать. Если общий объем запасов превосходит общую вместимость баз, т. е. $\sum\limits_i a_i > \sum\limits_j b_j$, то вводится фиктивный пункт назначения B_{n+1}, имеющий вместимость $b_{n+1} = \sum\limits_i a_i - \sum\limits_j b_j$ и нулевую стоимость перевозки единицы груза $c_{i,n+1} = 0$. В противоположном случае вводится фиктивный пункт отправления A_{m+1} с запасом $a_{m+1} = \sum\limits_j b_j - \sum\limits_i a_i$ и нулевой стоимостью перевозки $c_{m+1,i} = 0$. Тем самым открытая транспортная задача сводится к сбалансированной.

Еще одно обобщение стандартной транспортной задачи — многоиндексная задача, в которой учитывается неоднородность перевозимого груза или выпускаемой продукции и неоднородность транспортных средств. В этом случае многоиндексная задача сводится к стандартной с помощью разбиения каждого пункта отправления и/или назначения на несколько отдельных пунктов по числу видов груза и/или продукции.

Задачи транспортного типа имеют многообразные приложения — составление наиболее экономичного плана перевозок грузов из нескольких пунктов отправки в пункты доставки (отсюда собственно и появилось название задачи), управление запасами разного вида, распределение работ между исполнителями, назначение претендентов на должности, регулирование расхода ресурсов, оборот наличного капитала и др.

Одна из возможных интерпретации транспортной задачи состоит в том, что пункты отправления считаются пунктами производства, где выпускается однотипная продукция, а пункты назначения — пунктами потребления, где используется или реализуется выпущенная продукция.

Таблица 10.4

Задачи транспортного типа

Транспортная задача	Задача управления запасами	Задача о назначениях
A_i — пункт отправления	A_i — период производства	A_i — исполнитель
B_j — пункт назначения	B_j — период потребления	B_j — работа
a_i — запас на складе	a_i — объем выпуска изделий	$a_i = 1$ — назначение исполнителя
b_j — вместимость базы	b_j — объем реализации изделий	$b_j = 1$ — выполнение работы
x_{ij} — объем перевозимого груза	x_{ij} — количество выпускаемых изделий	x_{ij} — выполнение исполнителем определенной работы
c_{ij} — стоимость перевозки единицы груза	c_{ij} — стоимость хранения одного изделия	c_{ij} — стоимость выполнения исполнителем работы
z — расходы на перевозку груза	z — расходы на хранение изделий	z — расходы на выполнение работ

В задаче управления разнотипными запасами требуется составить оптимальный план выпуска нескольких видов продукции в течение заданного срока, минимизирующий суммарные расходы на производство и хранение изделий.

В задаче о назначениях необходимо так распределить различные виды работ между исполнителями, чтобы минимизировать суммарные расходы на выполнение работ. Эквивалентность этих задач отражена в табл. 10.4.

Известно много различных методов решения транспортных задач. При этом может создаться обманчивое впечатление, что все эти методы, в том числе и приведенные ранее, имеют какую-то специфику, отличающую их от общих методов решения задач линейного программирования.

Однако, по сути, все методы решения транспортных задач воспроизводят так или иначе принципиальные моменты симплекс-метода, обеспечивая нахождение оптимального плана перевозок путем последовательного улучшения опорных планов. В основе ряда методов лежит использование теорем двойственности и введение двойственных переменных и двойственной целевой функции.

10.4. Задача оптимального управления

Управление динамическими процессами также принадлежит к числу задач многоэтапного принятия решения. Например, при управлении запасами заказы новых порций продукта производятся через определенные промежутки времени, когда величина имеющегося запаса опускается до некоторого заданного уровня. При автоматическом управлении полетом самолета управляющие воздействия осуществляются в заранее определенных точках маршрута. В других случаях разбиение процесса на этапы можно ввести искусственно, причем необязательно по временно́му фактору. Так, при составлении плана сооружения сложного объекта этапы можно выделять по выполнению определенных видов или циклов строительных работ.

Применение различных управляющих воздействий оказывает разное влияние на управляемый процесс. Разумным представляется желание ЛПР достигнуть цели управления наилучшим из возможных способов. Так появляется задача оптимального управления. Приведем несколько примеров таких задач.

Пример 10.4. Владелец автомобиля стремится обеспечить его стабильную эксплуатацию. В начале каждого года владелец может принять одно из трех возможных решений: ОР — отказаться от проведения ремонта; ТР — провести небольшой текущий ремонт; КР — провести капитальный ремонт автомобиля. Нужно выбрать такую очередность решений, чтобы суммарные эксплуатационные расходы за несколько лет были наименьшими. В этой задаче имеются естественные этапы, соответствующие годовым периодам. ■

Пример 10.5. Между пунктами A и B планируется построить дорогу. Дорога будет проходить по пересеченной местности (значит, нужно сделать насыпи или выемки), через реки (нужно построить мосты) и леса (нужно прорубить просеки). Все расстояние между пунктами A и B разбивают на несколько участков, одинаковых по сложности строительства. При проектировании каждого участка выбирают направление трассы. Требуется так проложить дорогу, чтобы минимизировать суммарные расходы на строительство. В этой задаче искусственными этапами являются отдельные участки дороги. ■

Пример 10.6. Необходимо загрузить контейнер предметами, имеющими объем v_i и массу w_i таким образом, чтобы суммарная масса w загруженных предметов была максимальной, а общий объем не превысил вместимости контейнера v. Формально эти требования записываются так:

$$w = \sum_i w_i \to \max,$$

$$\sum_i v_i \leq v.$$

Данная задача носит особое название — задача об упаковке, или о рюкзаке. В этой задаче i-м этапом является решение: положить ли i-й предмет в контейнер или нет. ■

Сформулируем основную идею задачи оптимального управления. Пусть имеется система, объект или процесс, находящийся в начальном состоянии s_0, который нужно наиболее выгодным образом перевести в конечное состояние s_N. Разобьем всю процедуру перевода системы из начального состояния в конечное состояние на несколько простых дискретных и однотипных этапов (шагов), выполняемых последовательно.

Считается, что на каждом i-м этапе или в t_i-й момент времени ($i = 1, \ldots, N$) система мгновенно переходит из состояния s_{i-1} в новое состояние s_i при изменении некоторого параметра x_i, который называется *шаговым управлением*. Обычно предполагается, что «последствия» управления отсутствуют. Совокупность всех шаговых управлений $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ задает управление системой. Эффективность каждого этапа перехода характеризуется целевой функцией $y_i = f_i(s_{i-1}, x_i)$. Требуется найти такое оптимальное управление $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, которое на множестве допустимых управлений X^a обеспечивает экстремум (как правило, максимум) общего выигрыша, заданного в виде аддитивной свертки локальных целевых функций

$$y = \sum_{i=1}^{m} f_i(s_{i-1}, x_i) \to \max.$$

В примерах 10.4 — 10.6 шаговым управлением было решение о ремонте автомобиля в i-й период времени, направление прокладки i-го участка дороги, загрузка i-го предмета в контейнер. Заметим попутно, что в последнем случае шаговое управление бинарно, т. е. $x_i = 1$ (если предмет загружается) или $x_i = 0$ (если предмет не загружается), а сама задача оптимального управления становится еще и задачей целочисленного программирования.

Особенности задачи оптимального управления зависят от характера целевой функции $f_i(s_{i-1}, x_i)$. Если целевая функция задает однозначное отображение $f_i\colon S \times X \to S$, где $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$ — множество состояний системы; X — конечное множество возможных значений шаговых управлений, то имеется задача многоэтапного оптимального выбора в условиях определенности, а система называется *детерминированной*. Состояние s_i детерминированной системы на i-м этапе (в момент t_i) однозначно определяется состоянием системы s_{i-1} и управлением x_i. Если целевая функция задает однозначное отображение $f_i\colon S \times X \to \mathsf{P}(S)$, где $\mathsf{P}(S)$ — совокупность распределений вероятностей на множестве состояний системы S, то имеется задача многоэтапного оптимального выбора в условиях вероятностной неопределенности, а система называется *стохастической*. Состояние s_i стохастической системы на i-м этапе (в момент t_i) однозначно определяется состоянием системы s_{i-1}, управлением x_i и вероятностью этого состояния p_{i-1} и/или вероятностью перехода системы из одного состояния в другое. Рассмотрим задачу оптимального управления детерминированной системой.

10.5. Метод динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой специальный математический метод, предназначенный для решения задач многоэтапной оптимизации в условиях определенности, которые можно разложить на ряд повторяющихся и менее сложных однотипных оптимизационных подзадач.

В основе метода динамического программирования лежит *принцип оптимальности*, предложенный Р. Беллманом (США, 1957). Принцип оптимальности Беллмана — правило поэтапного оптимального выбора, которое состоит в следующем. Независимо от того, в каком состоянии находится система на текущем этапе, шаговое управление на данном этапе нужно выбирать так, чтобы этот и все последующие шаги были наиболее выгодными. Иначе говоря, суммарный выигрыш должен быть максимальным на данном и на всех остальных этапах. Таким образом, управление, оптимальное для всего процесса в целом, находится путем последовательного вычисления на каждом этапе локальных оптимальных управлений.

Общая схема решения задачи динамического программирования с конечным числом этапов состоит из следующих основных стадий.

1. Прежде всего процесс управления системой необходимо разделить на N этапов (шагов). Это разбиение выполняется естественным или искусственным образом, исходя из конкретных особенностей задачи. Выбираются состояния $s_0, s_1, \ldots, s_N$ управляемой системы на каждом этапе, шаговое управление x_i для каждого этапа и налагаемые на шаговые управления ограничения, определяющие множество допустимых управлений X_i^a на каждом этапе.

2. Задается соотношение, связывающее переход системы из одного состояния в другое под действием шагового управления. Поскольку отсутствуют «последствия» управления, то состояние s_i системы на i-м этапе зависит только от предыдущего состояния s_{i-1} и шагового управления x_i на данном этапе

$$s_i = h_i(s_{i-1}, x_i). \tag{10.5}$$

3. Задается целевая функция, характеризующая эффективности этапа перехода системы из предыдущего состояния s_{i-1} в данное состояние s_i,

$$y_i = f_i(s_{i-1}, x_i) = f_i(s_0, x_i, x_{i-1}, \ldots, x_1). \tag{10.6}$$

4. В соответствии с принципом оптимальности Беллмана оптимальное управление x_i на i-м этапе должно обеспечивать максимум суммарного выигрыша на данном и всех последующих этапах. Воспользовавшись этим принципом, легко получить основное рекуррентное соотношение динамического программирования, называемое *уравнением Беллмана.* Оно связывает условный оптимальный выигрыш $g_i(s_{i-1})$ на i-м этапе с условным оптимальным выигрышем $g_{i+1}(s_i)$ на следующем $(i+1)$-м этапе:

$$\begin{aligned} g_i(s_{i-1}) &= \max_{x_i}\{y_i + g_{i+1}(s_i)\} = \\ &= \max_{x_i}\{f_i(s_{i-1}, x_i) + g_{i+1}[h_i(s_{i-1}, x_i)]\}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Максимум ищется по всем допустимым на i-м этапе управлениям x_i. Оптимальный выигрыш $g_i(s_{i-1})$ является условным, так как зависит от возможных состояний системы s_{i-1} на предыдущем этапе.

5. Среди всех этапов есть единственный, на котором выбор оптимального управления не влияет на все последующие этапы, — последний N-й этап. Поэтому можно задать условный оптимальный выигрыш на N-м этапе соотношением

$$g_N(s_{N-1}) = \max_{x_N}\{f_N(s_{N-1}, x_N)\}, \tag{10.8}$$

где максимум ищется по всем допустимым на N-м этапе управлениям x_N. Из соотношения (10.8) находится условное оптимальное управление $x_N = x_N(s_{N-1})$ для всех возможных состояний системы s_{N-1} на предпоследнем $(N-1)$-м этапе.

6. Осуществляется переход от конечного состояния s_N системы к начальному s_0. Ищутся условные оптимальные выигрыши и условные оптимальные управления на $(N-1)$-м, $(N-2)$-м этапах и т. д. в соответствии с формулой (10.7). Пройдя все этапы, находят все условные оптимальные выигрыши $g_1(s_0), g_2(s_1), \ldots,$ $g_N(s_{N-1})$ и все условные оптимальные управления $x_1(s_0), x_2(s_1),$ $\ldots, x_N(s_{N-1})$. После этого можно решить исходную задачу динамического программирования, найти оптимальное управление и общий безусловный оптимальный выигрыш.

7. Производится обратный переход из начального состояния системы s_0 в конечное. Согласно принципу оптимальности общий оптимальный выигрыш y^* определяется с учетом формулы (10.7) соотношением

$$y^* = g_1(s_0) = \max_{x_1}\{f_1(s_0, x_1) + g_2[h_1(s_0, x_1)]\}. \tag{10.9}$$

Начальное состояние системы s_0 обычно задано. Поэтому шаговое управление $x_1(s_0)$ варьировать не нужно, и оптимальное управление $x_1^* = x_1(s_0)$ находится из требования безусловной оптимизации функции (10.9).

8. Воспользовавшись уравнением (10.5), определяется состояние $s_1 = h_1(s_0, x_1^*)$, в которое перейдет система на первом этапе, а условное оптимальное управление $x_2(s_1)$ уже известно. Пройдя все этапы, последовательно вычисляются величины $x_1^* = x_1(s_0)$, $x_2^* = x_2(s_1), \ldots, x_N^* = x_N(s_{N-1})$ и тем самым получается итоговое оптимальное управление $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$. А общий безусловный оптимальный выигрыш y^* определен формулой (10.9).

Отметим две важные особенности метода динамического программирования. Во-первых, решение задачи может оказаться не единственным, так как оптимальными могут быть несколько шаговых управлений и появляется несколько различных вариантов перехода системы из начального состояния в конечное. Однако все эти варианты равноценны и оптимальны с точки зрения общего выигрыша. Поэтому можно выбирать любой из вариантов. От этого будет зависеть только окончательное оптимальное управление, но не величина общего выигрыша. Во-вторых, с помощью метода динамического программирования фактически решается не одна конкретная задача для какого-то начального состояния системы s_0, а сразу целый набор однотипных задач для любых произвольных начальных состояний.

Метод динамического программирования применим и к задачам с мультипликативной целевой функцией $y = \prod_i f_i(x_i)$, $f_i(x_i) > 0$. Основное рекуррентное соотношение (10.7) заменяется тогда на соотношение

$$g_i(s_{i-1}) = \max_{x_i}\{y_i \cdot g_{i+1}(s_i)\} = \max_{x_i}\{f_i(s_{i-1}, x_i) \cdot g_{i+1}[h_i(s_{i-1}, x_i)]\}$$

с сохранением общей схемы решения задачи.

10.6. Задача распределения ресурсов

Проиллюстрируем работу метода динамического программирования на примере задачи оптимального распределения ресурсов, допустим инвестиций, выделяемых на развитие производства. Пусть для расширения производственных мощностей трех предприятий A, B, C предполагается выделить $x_0 = 5$ условных единиц инвестиций. Для простоты предположим, что объем инвестиций, выделяемых предприятию, выражается числом 0, 1, 2, 3, 4 или 5, а нулевые вложения означают отказ от развития какого-либо предприятия. Вкладывая в развитие i-го предприятия x_i единиц, можно получать доход y_i единиц. Для каждого предприятия существуют разные варианты $k = 1, \ldots, K$ вложения инвестиций $x_i(k)$, приносящие разные доходы $y_i(k)$. Возможные варианты развития предприятий приведены в табл. 10.5. Цель состоит в максимизации общего дохода $y = \sum\limits_i y_i(k)$ от вложения инвестиций.

Самый простой способ решения поставленной задачи — полный перебор допустимых вариантов. В данном примере всего

Таблица 10.5

Варианты развития предприятий

Вариант k	Предприятие A		Предприятие B		Предприятие C	
	$x_A(k)$	$y_A(k)$	$x_B(k)$	$y_B(k)$	$x_C(k)$	$y_C(k)$
1	0	0	0	0	0	0
2	1	4	2	5	1	3
3	2	6	3	7	2	5
4	—	—	4	10	—	—

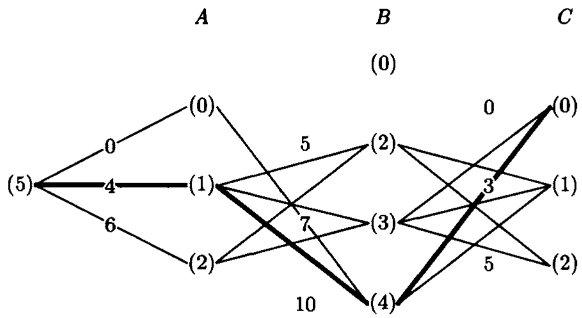


Рис. 10.2. Допустимые варианты распределения инвестиций

имеется $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ возможных вариантов распределения инвестиций, из которых только 17 вариантов допустимы, т.е. удовлетворяют ограничению на общий объем имеющихся в наличии средств $\sum\limits_i x_i(k) = x_0$. Вариант 1 одновременно для всех предприятий рассматривать не имеет смысла, так как он не дает никакого дохода и введен лишь для удобства вычислений.

Допустимые варианты распределения инвестиций можно представить в виде сетевой модели, или ориентированного графа (рис. 10.2), где цифра в круглых скобках обозначает инвестиции $x_i(k)$, выделенные i-му предприятию по k варианту, цифра на линии — доход $y_i(k)$ от вложения средств.

Перебрав все допустимые варианты вложения инвестиций, нетрудно найти, что максимальный общий доход $y^* = 14$ единиц можно получить, например, если реализовать на предприятии A второй вариант, на предприятии B — четвертый, а на предприятии C — первый (не расширять производственные мощности). Этот оптимальный вариант решения выделен на рис. 10.2 жирной линией. Ему соответствует самый длинный путь между крайними узлами сети (вершинами графа).

Вместе с тем полный перебор даже допустимых вариантов при большом их числе требует значительных затрат времени и вычислительных ресурсов. Применим для решения задачи метод динамического программирования.

В рассматриваемом примере управляемой системой является распределение инвестиций между предприятиями, а принятие решения о выделении средств некоторому предприятию соответствует этапу (шагу) управления. Очевидно, что таких этапов три (по числу предприятий). Крайне важно правильно определить показатели s_i, которыми характеризуется состояние системы на каждом этапе, и шаговые управления x_i. Конструктивное определение состояния системы должно позволять принимать решение на каждом этапе без учета решений, принятых на предыдущих этапах.

Выберем в качестве шагового управления x_i на i-м этапе объем инвестиций, выделяемых i-му предприятию. Для каждого i-го этапа множество X_i^a допустимых управлений определяется заданными объемами предполагаемых вложений $x_i(1), \ldots, x_i(K)$, а любой возможный набор шаговых управлений связан ограничением на общий объем имеющихся инвестиций: $\sum\limits_i x_i(k) \le x_0$.

Состояние s_i системы на i-м этапе удобно определить объемом имеющихся в распоряжении инвестиций, оставшихся не распределенными к данному этапу. Тогда уравнение, связывающее два соседних состояния системы, можно записать как $s_{i-1} - s_i = x_i(k)$. Отсюда следует естественное ограничение на величину выделяемых инвестиций: $x_i(k) \le s_{i-1}$, поскольку на i-м этапе можно выделить средств не больше, чем осталось на предыдущем этапе.

Условно оптимальное управление $x_i(k) = x_i(s_{i-1})$ на i-м этапе ищется как решение рекуррентного уравнения Беллмана (10.7) для выигрыша, которое в нашем случае принимает вид

$$g_i(s_{i-1}) = \max_k \{f_i[s_{i-1}, x_i(k)] + g_{i+1}[s_{i-1} - x_i(k)]\}.$$

Условно оптимальное управление на последнем этапе $x_N(k) = x_N(s_{N-1})$ находится как решение уравнения (10.8):

$$g_N(s_{N-1}) = \max_k f_N[s_{N-1}, x_N(k)].$$

Очевидно, что для k разных вариантов вложения инвестиций получаются разные значения условно-оптимального выигрыша g_i и условно-оптимального управления $x_i(k)$.

Начальное состояние системы s_0 характеризуется наличием исходного объема x_0 еще не распределенных инвестиций. Максимальный общий доход от вложения инвестиций или общий безусловный оптимальный выигрыш составит согласно (10.9)

$$y^* = g_1(s_0) = \max_k \{f_1[x_0, x_1(k)] + g_2[x_0 - x_1(k)]\},$$

а соответствующее оптимальное управление на 1-м этапе будет равно $x_1(x_0) = x_1(k_1^*) = x_1^*$. После выделения первому предприятию x_1^* ед. на долю второго предприятия останется $x_2(x_0 - x_1^*) = x_2(k_2^*) = x_2^*$ ед. и т. д.

При решении задачи теоретически можно использовать любую последовательность этапов, т. е. распределять инвестиции между предприятиями в произвольном порядке, например так: $A \to B \to C$. На практике объем вычислений можно сократить, если при выделении инвестиций последним считать предприятие, где существует меньшее число вариантов использования средств, предпоследним — второе по числу имеющихся вариантов, и т. д.

В рассматриваемом примере сопоставим 1-й этап операции с выделением инвестиций предприятию B, 2-й этап — предприятию A, 3-й этап — предприятию C. В таком случае процедура вычисления оптимальных выигрышей и управлений задается последовательностью $C \to A \to B$ и возможными состояниями системы (объемами нераспределенных инвестиций), которые могут принимать целочисленные значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. В табл. 10.6—10.8 приведены результаты поэтапных расчетов соответствующих показателей операции.

Начнем рассмотрение процедуры решения поставленной задачи с последнего (3-го) этапа, на котором инвестиции выделяются предприятию C. Условно оптимальное управление на 3-м этапе ищется как решение уравнения

$$g_C(s_2) = \max_k f_C[s_2, x_C(k)], x_C(k) \le s_2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Имеется три возможности вложения средств — три шаговых управления $x_C(1) = 0$ ед., $x_C(2) = 1$ ед., $x_C(3) = 2$ ед., и шесть теоретически возможных состояний системы s_2, предшествующих выделению средств предприятию C, — объемы не распределенных к 3-му этапу инвестиций: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ед.

Предположим, что система находилась в состоянии $s_2 = 0$. Тогда единственное допустимое шаговое управление есть $x_C(1) = 0$, которое и будет оптимальным для этого состояния, дающим условно максимальный выигрыш $g_C(s_2) = 0$. Если система находилась в состоянии $s_2 = 5$, то допустимы все шаговые управления $x_C(1) = 0$, $x_C(2) = 1$, $x_C(3) = 2$, а оптимальным будет управление $x_C(3) = 2$, которое обеспечивает условно максимальный выигрыш $g_C(s_2) = 5$. Аналогично рассматриваются все возможные состояния, предшествующие 3-му этапу. Оптимальные значения показателей выделены в таблицах жирным шрифтом.

Далее таким же образом рассматривается 2-й этап, состоящий в выделении инвестиций предприятию A. На 2-м этапе общий выигрыш складывается из выигрышей, получаемых на 3-м и 2-м этапах, и задается соотношением:

Таблица 10.6

Условно-оптимальные решения (3-й этап)

Состояние s_2	$f_C[s_2, x_C(k)]$			Управление		Выигрыш $g_C(s_2)$
	$x_C(1)=0$	$x_C(2)=1$	$x_C(3)=2$	k_C^*	x_C^*	
0	**0**	—	—	1	0	0
1	0	**3**	—	2	1	3
2	0	3	**5**	3	2	5
3	0	3	**5**	3	2	5
4	0	3	**5**	3	2	5
5	0	3	**5**	3	2	5

Таблица 10.7

Условно-оптимальные решения (2-й этап)

Состояние s_1	$f_A[s_1, x_A(k)] + g_C[s_1 - x_A(k)]$			Управление		Выигрыш $g_A(s_1)$
	$x_A(1)=0$	$x_A(2)=1$	$x_A(3)=2$	k_A^*	x_A^*	
0	$0+0=$ **0**	—	—	1	0	0
1	$0+3=3$	$4+0=$ **4**	—	2	1	4
2	$0+5=5$	$4+3=$ **7**	$6+0=6$	2	1	7
3	$0+5=5$	$4+5=$ **9**	$6+3=$ **9**	2 или 3	1 или 2	9
4	$0+5=5$	$4+5=9$	$6+5=$ **11**	3	2	11
5	$0+5=5$	$4+5=9$	$6+5=$ **11**	3	2	11

Таблица 10.8

Безусловно-оптимальные решения (1-й этап)

Состояние s_0	$f_B[s_0, x_B(k)] + g_A[s_0 - x_B(k)]$				Управление		Выигрыш $g_B(s_0)$
	$x_B(1)=0$	$x_B(2)=2$	$x_B(3)=3$	$x_B(4)=4$	k_B^*	x_B^*	
5	$0+11=$ $=11$	$5+9=$ $=$ **14**	$7+7=$ $=$ **14**	$10+4=$ $=$ **14**	2, 3 или 4	2, 3 или 4	14

$$g_A(s_1) = \max_k \{f_A[s_1, x_A(k)] + g_C[s_1 - x_A(k)]\},$$

$$x_A(k) \le s_1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь могут возникнуть ситуации, при которых оптимальное решение будет не единственным. Например, в состоянии $s_1 = 3$ условно-оптимальными будут шаговые управления $x_A(2) = 1$ и $x_A(3) = 2$, дающие один и тот же выигрыш $g_A(s_1) = 9$.

На 1-м этапе — выделении инвестиций предприятию B — есть только одно предшествующее состояние системы, соответствующее начальному состоянию $s_0 = 5$. Безусловно-оптимальный выигрыш определяется выражением:

$$y^* = g_B(s_0) = \max_k \{f_B[s_0, x_B(k)] + g_A[s_0 - x_B(k)]\},$$

$$x_B(k) \le s_0 = x_0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Безусловно-оптимальные управления, обеспечивающие максимальный доход, очевидно, могут быть разными.

Итоговое оптимальное решение (распределение инвестиций между предприятиями B, A и C) определяется, если рассмотреть табл. 10.6—10.8 в обратном порядке и воспользоваться уже полученными результатами. В данной задаче получается четыре равнозначных способа распределения инвестиций, дающих одинаковый максимальный общий доход $y^* = 14$ ед. Для удобства эти распределения сведены в табл. 10.9.

Схема нахождения всех оптимальных вариантов распределения инвестиций между предприятиями $\mathbf{x}^* = (x_B, x_A, x_C)$, приведенных в табл. 10.9, представлена на рис. 10.3. В рамках указаны объемы инвестиций, имеющиеся в наличии на соответствующем этапе, в круглых скобках — выделенные инвестиции $x_i(k)$. Цифра на стрелке обозначает доход $y_i(k)$ от вложения средств.

Таблица 10.9

Оптимальные распределения инвестиций

Распределение инвестиций	Общий доход y^*
$x_B(2) = 2,\ x_A(2) = 1,\ x_C(3) = 2$	$y_B(2) + y_A(2) + y_C(3) = 14$
$x_B(2) = 2,\ x_A(3) = 2,\ x_C(2) = 1$	$y_B(2) + y_A(3) + y_C(2) = 14$
$x_B(3) = 3,\ x_A(2) = 1,\ x_C(2) = 1$	$y_B(3) + y_A(2) + y_C(2) = 14$
$x_B(4) = 4,\ x_A(2) = 1,\ x_C(1) = 0$	$y_B(4) + y_A(2) + y_C(1) = 14$

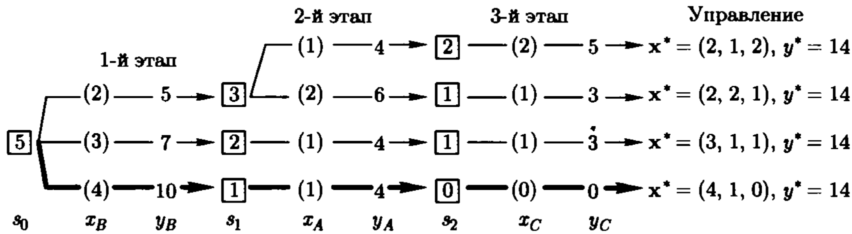


Рис. 10.3. Схема оптимального распределения инвестиций между предприятиями

Последний четвертый вариант представляет оптимальный вариант распределения инвестиций, который изображен на рис. 10.2 жирной линией.

Лицо, принимающее решение о распределении инвестиций, может выбрать любой из перечисленных оптимальных вариантов. Однако если все-таки нужно выбрать единственный вариант, то для обоснования выбора необходима дополнительная информация, отсутствующая в исходном описании проблемной ситуации и формулировке математической модели.

В заключение укажем, что задача динамического программирования, вообще говоря, может сразу решаться и в «прямом» направлении, если иначе определить состояния системы и связать их между собой другими рекуррентными соотношениями. Для рассмотренной задачи развития предприятий состояние системы на i-м этапе можно охарактеризовать, например, объемом не оставшихся, а уже распределенных инвестиций. Общая схема решения задачи останется той же.

Опыт практического применения методов динамического программирования показывает, что алгоритмы «обратной прогонки» в целом являются более эффективными с вычислительной точки зрения, чем алгоритмы «прямой прогонки». Это различие оказывается весьма существенным в задачах поэтапного принятия решений, где нумерация этапов производится в хронологической последовательности, как, например, в задачах управления запасами и планирования производства.

В ряде случаев схема динамического программирования используется для решения задач с непрерывными переменными, несмотря на то что сама задача динамического программирования сформулирована для дискретных процессов.

С помощью динамического программирования можно также решать задачи линейного программирования, если каждую переменную интерпретировать как этап операции.

ГЛАВА 11

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

11.1. Выбор в условиях неопределенности

В реальных условиях ЛПР почти всегда делает выбор в условиях дефицита информации, описывающей рассматриваемую проблемную ситуацию. Недостаток информации может быть обусловлен различными причинами, имеющими политическую, социальную, организационную, техническую, природную, персональную или иную основу. Недостаточная полнота и определенность данных, используемых при подготовке и принятии решений, должны учитываться при построении математических моделей оптимального выбора.

Качество решения задачи оптимального выбора в общем случае определяется значениями одного или нескольких показателей эффективности (целевых функций, функций ценности) $y_k = f_k(\mathbf{x}_i, \delta, \xi, \zeta)$, $k = 1, \ldots, h$. Числовые функции y_k зависят от переменных $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, характеризующих вариант A_i, $i = 1, \ldots, m$, детерминированных (δ) и неопределенных (ξ, ζ) факторов, отражающих степень информированности ЛПР о внешних условиях, в которых осуществляется выбор. Для случайных факторов ξ известны функции распределения вероятностей и их параметры. Неопределенные факторы ζ определены нечетко или неизвестны.

Задача поиска оптимального варианта A^* в условиях неопределенности ставится следующим образом: найти с учетом неопределенных факторов ξ и ζ такие значения вектора переменных $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, которые обеспечивают экстремальные значения показателей эффективности на множестве допустимых значений X^a:

$$f_k(\mathbf{x}, \delta, \xi, \zeta) \to \max_{x \in X^*}$$

и удовлетворяют ограничениям $g_q(\mathbf{x}, \delta, \xi, \zeta) \le b_q$, $q = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, h$.

Неопределенные факторы имеют различное происхождение.

Во-первых, неопределенность может быть вызвана активными действиями нескольких участников процесса принятия решения, каждый из которых преследует свои цели и стремится получить для себя максимальные преимущества (извлечь наибольшую выгоду) за счет других. Обычно подобные действия осуществляются в условиях, когда неизвестно, какие ответные действия могут предпринять соперники (противники или союзники). Наиболее простой ситуацией, в которой проявляется такого рода неопределенность, является конфликтная ситуация, где сталкиваются интересы разных сторон. Такие и подобные им задачи изучает теория игр.

Во-вторых, неопределенность может быть связана с принципиальной неизвестностью или недостаточной изученностью внешних обстоятельств, которые могут повлиять на выбор. Совокупность таких объективных обстоятельств принято называть природой, которая в данном контексте выступает в качестве нейтрального, не обладающего «разумом» участника, безразличного к действиям ЛПР и не пытающегося получить выгоду или причинить ущерб. Соответствующие ситуации называются играми с природой, или статистическими играми, и составляют предмет теории статистических решений, изложенной далее.

В-третьих, неопределенность может быть обусловлена невозможностью четкого описания на естественном языке ситуации выбора, анализируемых вариантов, ограничений на область допустимых значений, целевых показателей качества решения, предпочтений ЛПР, имеющихся зависимостей между элементами задачи выбора. Нечеткость доступной информации может вызываться как объективными, так и субъективными причинами. Задачи оптимального выбора в нечеткой среде рассматриваются в гл. 12.

Для исследования неопределенной проблемной ситуации используется математический аппарат, который опирается на теорию вероятностей и теорию нечетких множеств, где разработаны специфические средства для формализации, представления и обработки вероятностной и нечеткой информации. В основе вероятностного подхода лежит функция плотности распределения вероятностей, определяющая возможность реализации случайного события. Основой нечеткого подхода служит функция принадлежности, с помощью которой оценивается степень выраженности некоторого свойства у элемента нечеткого множества.

Наконец, переменные, описывающие варианты решения проблемы, и неопределенные факторы, характеризующие возможные состояния рассматриваемых объектов и окружающей среды, в свою очередь зависят от многих параметров, которые подразделяются на наблюдаемые и вычисляемые. Наблюдаемые параметры могут быть получены путем непосредственных измерений или оценок рассматриваемых признаков. Очевидно, что при измерении возможны различные ошибки и погрешности. Вычисляемые параметры получаются в результате обработки информации, в ходе которой могут возникать новые ошибки и вноситься новые неточности. Указанные обстоятельства порождают дополнительную неопределенность в задаче оптимального выбора, которая также должна приниматься во внимание.

11.2. Теория статистических решений

Теория статистических решений имеет дело с ситуациями оптимального выбора в предположении, что отсутствует какое-либо противодействие лицу, принимающему решения, а неопределенность ситуации обусловлена лишь недостаточным знанием объективной действительности. В этих условиях и набор частных критериев, используемых для оценки качества решения, и принимаемые ими значения основываются на неполной информации.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда ЛПР способно перечислить все возможные состояния внешней среды, однако в каком конкретном состоянии находится среда ЛПР, доподлинно неизвестно. Пусть существует всего d таких состояний среды $E_1, \ldots, E_d$, а из имеющихся вариантов $A_1, \ldots, A_m$ требуется выделить наиболее предпочтительный вариант. Считается, что ЛПР самостоятельно или, привлекая экспертов, может каким-либо способом численно оценить так называемую частную эффективность или полезность $y_{ij} = f_j(A_i)$ варианта A_i для каждого j-го состояния среды E_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, d$.

Модель оптимального выбора в условиях полной неопределенности представляется матрицей частной эффективности $\mathrm{Y} = (y_{ij})_{m\times d}$, где $y_{ij} = f_j(A_i)$, а i-я строка матрицы соответствует вектору $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{id})$, составленному из значений функций частной эффективности y_{ij} варианта A_i (табл. 11.1). Нередко частную эффективность нормируют, переводя ее значения в пределы $0 \le y'_{ij} \le 1$ путем замены переменных, например $y'_{ij} = (y_{ij} - y_j^{\min})/(y_j^{\max} - y_j^{\min})$, или $y'_{ij} = y_{ij}/\sum\limits_{k=1}^{m} y_{kj}$.

Функция частной эффективности $f_j(A_i)$ варианта A_i в j-м состоянии среды E_j характеризует возможность достижения цели, возможный доход или выигрыш, получаемые при выборе варианта A_i. Иногда, исходя из существа задачи, вместо функции

Таблица 11.1

Матрица частной эффективности вариантов

Y	E_1	E_2	...	E_d
A_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1d}
A_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2d}
...	...	...	...	...
A_m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{md}

эффективности удобнее ввести противоположную ей по смыслу функцию потерь $z_j(A_i)$, которая отражает возможные расходы, проигрыш или ущерб, возникающие при реализации варианта A_i.

Модель оптимального выбора в условиях полной неопределенности, по существу, идентична модели многокритериальной векторной оптимизации, если частную эффективность $y_{ij} = f_j(A_i)$ варианта A_i в j-м состоянии внешней среды отождествить с частным критерием оптимальности. Как и в случае векторной оптимизации, сведем задачу многокритериального выбора к однокритериальной задаче, где обобщенный критерий качества решения конструируется из функций частной эффективности. Согласно принципу гарантированного результата (см. разд. 8.7), наиболее предпочтительный для ЛПР вариант A^* определяется экстремальным значением обобщенного критерия качества решения, в роли которого выступает один из следующих критериев:

- критерий равнозначности Лапласа

$$A^* \in \arg\max_i y_i^{\text{сред}} = \arg\max_i [(1/d) \sum_{j=1}^{d} f_i(A_i)];$$

- критерий оптимизма

$$A^* \in \arg\max_i \max_j f_j(A_i);$$

- критерий осторожности

$$A^* \in \arg\min_i \max_j f_j(A_i);$$

- критерий пессимизма Вальда

$$A^* \in \arg\max_i \min_j f_j(A_i);$$

- критерий риска Сэвиджа

$$A^* \in \arg\min_i \max_j r_j(A_i), \quad r_j(\mathrm{A}_i) = \max_k f_j(A_k) - f_j(A_i);$$

- критерий взвешенного оптимизма-пессимизма Гурвица

$$A^* \in \arg\max_i[(1-\gamma)\max_j f_j(A_i) + \gamma \min_j f_j(A_i)],$$

где величина параметра γ задается ЛПР в пределах $0 \le \gamma \le 1$.

Перечисленные критерии качества решения отражают в числовой форме субъективную точку зрения ЛПР на ситуацию выбора. Критерий Лапласа выражает *принцип недостаточной обоснованности*, который ведет к выбору в качестве лучшего варианта, обеспечивающего наибольшую среднюю эффективность. По критерию оптимизма лучшим признается вариант, имеющий максимально возможную частную эффективность. Минимаксный критерий осторожности рекомендует ЛПР выбирать наихудший из всех наилучших вариантов. Пользуясь максиминным критерием Вальда, ЛПР стремится уменьшить возможные потери, выбирая наилучший из всех наихудших вариантов.

Критерий Сэвиджа минимизирует максимальный риск r_{ij} или так называемые «сожаления», связанные с отказом от выбора варианта, лучшего по каждому частному критерию. Заметим, что использование понятия риска позволяет по-иному представить сравнительную значимость вариантов для ЛПР. Наконец, критерий Гурвица устанавливает баланс между наиболее оптимистичным и наиболее пессимистичным мнениями, вводя взвешенную комбинацию лучшего и худшего вариантов. Выбор величины параметра γ также субъективен и отражает меру оптимизма/пессимизма ЛПР. Чем больше ЛПР стремится подстраховаться, тем ближе к единице он будет задавать параметр γ.

Пример 11.1. Рассмотрим задачу выбора лучшего проекта строительства предприятия, приведенную в примере 8.1. Пять имевшихся вариантов A_1 — A_5 были оценены экспертами по четырем критериям: f_1 — величина ожидаемой прибыли, которую будет давать предприятие, f_2 — стоимость реализации проекта, f_3 — величина экологического ущерба от строительства, f_4 — заинтересованность жителей района в строительстве. Оценки по каждому критерию давались по шкале от 0 до 5 баллов.

Будем считать, что каждый частный критерий выражает некоторое состояние внешней среды, а экспертная оценка по со-

Таблица 11.2

Матрица оценок частной эффективности проектов

Y	E_1	E_2	E_3	E_4	$y_i^{\text{ср}}$	$\max\limits_j y_{ij}$	$\min\limits_j y_{ij}$	$\max\limits_j r_{ij}$	u_i
A_1	4	3	4	3	3,50	4	3	1	3,50
A_2	5	3	3	3	3,50	5	3	1	4,00
A_3	2	4	2	4	3,00	4	2	3	3,00
A_4	5	3	2	3	3,25	5	2	2	3,50
A_5	4	4	3	4	3,75	4	3	1	3,50

ответствующему критерию характеризует частную эффективность проекта. Матрица $Y = (y_{ij})$ частной эффективности проектов приведена в табл. 11.2. Здесь величина $u_i = (1-\gamma)\max\limits_j y_{ij} + \gamma \min\limits_j y_{ij}$ рассчитана при параметре $\gamma = 0{,}5$. Лучшими вариантами решения будут: по критерию Лапласа — A_5; по критерию оптимизма — A_2, A_4; по критерию осторожности — A_1, A_3, A_5; по критерию Вальда — A_1, A_2, A_5; по критерию Сэвиджа — A_1, A_2, A_5; по критерию Гурвица — A_2. ■

Таким образом, разные обобщенные критерии качества решения приводят к неодинаковым результатам. Проанализировав ситуацию с различных точек зрения, используя разные обобщенные критерии и варьируя величину параметра γ, ЛПР может более обдуманно и взвешенно сделать свой выбор.

Пусть теперь ЛПР располагает более детальной информацией о внешней среде и ему известны не только численное значение $f_j(A_i)$ функции частной эффективности каждого варианта A_i для любого состояния среды E_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, d$, но и вероятность p_j каждого состояния E_j. При этом сумма вероятностей всех состояний удовлетворяет условию $\sum\limits_j p_j = 1$.

Как и в первой ситуации, для выбора наиболее предпочтительного варианта ЛПР может воспользоваться разными обобщенными критериями качества решения, зависящими от частных функций полезности. Таковыми являются:

- критерий Байеса — Лапласа

$$A^* \in \arg\max_i B(A_i), \quad B(A_i) = \sum_{j=1}^{d} p_j f_j(A_i);$$

• критерий минимума среднеквадратического отклонения

$$A^* \in \arg\min_i C(A_i), \quad C(A_i) = \left\{ \sum_{j=1}^{d} [f_j(A_i) - \sum_{k=1}^{d} p_k f_k(A_i)]^2 \right\}^{1/2};$$

• критерий минимума энтропии

$$A^* \in \arg\min_i H(A_i), \quad H(A_i) = -\sum_{j=1}^{d} p_{ij} \log p_{ij},$$

$$p_{ij} = p_j f_j(A_i)/B(A_i);$$

• критерий Гермейера

$$A^* \in \arg\max_i \min_j p_j z_j(A_i),$$

где $z_j(A_i) = a - f_j(A_i) < 0$ — частная функция потерь, получаемых при реализации варианта A_i в j-м состоянии среды E_j.

Применяются и другие обобщенные критерии оптимальности, например комбинированный критерий, представляющий собой линейную комбинацию (свертку) критериев Байеса — Лапласа и среднеквадратического отклонения

$$A^* \in \arg[(1 - \lambda) \max_i B(A_i) + \lambda \min_i C(A_i)],$$

где величина параметра λ выбирается ЛПР.

Критерий Байеса — Лапласа задает только усредненные значения частных функций эффективности. Поэтому лучшее решение максимизирует математическое ожидание функции эффективности по апостериорным вероятностям состояний среды без учета диапазона изменения эффективности. Рассеивание случайных значений частных функций эффективности учитывается критерием среднеквадратического отклонения, которое в ряде задач ассоциируется с величиной риска.

Энтропийный критерий достаточно часто используется для оценки неопределенности. Энтропия $H(A_i)$ достигает минимально возможного значения $H_{\min}(A_i) = 0$, когда ситуация полностью определена и имеется единственное состояние среды E_j с вероятностью $p_j = 1$, и максимально возможного значения $H_{\max}(A_i) = d \log d$, когда все состояния среды $E_1, \ldots, E_d$ равновероятны и $p_j = 1/d$. Лучший вариант минимизирует величину энтропии при известных апостериорных вероятностях состояний среды. Согласно критерию Гермейера лучшим является вариант с минимальными частными потерями $z_j(A_i)$. По своему смыслу критерий Гермейера обратен критерию оптимизма.

Для формирования обобщенного критерия качества решения нужна также достоверная информация о распределении вероятностей p_j состояний внешней среды. Если это априорные или так называемые субъективные вероятности, то они, по сути, ничем не отличаются от показателей важности (весов) w_j частных критериев, назначаемых ЛПР из некоторых соображений. Для оценки значений апостериорных вероятностей ЛПР должно располагать статистическими данными, которые можно получить либо в результате многократных наблюдений за состоянием окружающей среды в течение продолжительного времени, либо в результате экспериментальных исследований или статистических испытаний. Получить же такие данные бывает достаточно трудно, а иногда и невозможно.

Отметим, что не существует общепринятого способа определения решающего правила для оптимального выбора лучшего варианта. ЛПР задает тот или иной обобщенный критерий качества решения, величины параметров γ или λ, исходя из субъективных предпочтений. Однако сделать выбор, основываясь на одном из указанных критериев, человеку столь же трудно, как и непосредственно определить наиболее предпочтительный для него вариант.

11.3. Дерево решений

Ранее уже встречались проблемы выбора с представлением решения в виде многоэтапной процедуры, в которой поиск наиболее предпочтительного для ЛПР варианта разбивается на ряд взаимосвязанных однотипных этапов (шагов), выполняемых последовательно.

Рассмотрим один из подходов к многоэтапному оптимальному выбору в условиях вероятностной неопределенности, который носит название *дерева решений* (decision tree), где проблема подразделяется сначала на отдельные задачи, те в свою очередь на более частные задачи и т. д. В этой динамической процедуре выбора на каждом этапе имеется два типа событий: одни полностью определяются решениями ЛПР (его стратегией выбора), другие характеризуются средой и не могут контролироваться человеком (происходят случайно).

Графически дерево решений представляет собой иерархический ветвящийся граф, имеющий корневую вершину (проблему, требующую решения), вершины-решения и вершины-случаи. В каждой n-й вершине-решении (она обозначается знаком □) ЛПР делает детерминированный выбор одного из частных вариантов решения x_{in} из множества допустимых решений X^n. В каждой n-й вершине-случае (она обозначается знаком ☐) возможны разные случайные события $s_1(x_i^n), \ldots, s_j(x_i^n), \ldots$, связанные с реализацией частного варианта x_i^n. Таким образом, динамическая процедура принятия решений обладает последствием, поскольку каждое последующее решение зависит от предыдущих.

Частная эффективность или полезность $f(x_i^n)$, характеризующая возможные последствия реализации варианта x_i^n на n-м этапе, оценивается как

$$f(x_i^n) = \sum_{j=1}^{m_i^n} p_j(x_i^n) f_j(x_i^n), \tag{11.1}$$

где $p_j(x_i^n)$ — вероятность случайного события $s_j(x_i^n)$; $f_j(x_i^n)$ — ожидаемый денежный доход (если $f_j(x_i^n) > 0$) или убыток (если $f_j(x_i^n) < 0$); m_i^n — число возможных последствий на n-м этапе.

Вероятность $p_j(x_i^n)$ события $s_j(x_i^n)$ может быть либо известна заранее, либо получена путем многократных наблюдений, экспериментальных измерений или статистического моделирования и расчета. Сумма вероятностей в любой n-й вершине-случае полагается равной единице: $\sum\limits_j p_j(x_i^n) = 1$.

Каждый интегральный вариант решения проблемы A_i образует одну из ветвей дерева решений, которая представляет собой совокупность последовательно принимаемых решений и происходящих случаев, рассматриваемых от корня дерева к каждой конечной вершине. Общая эффективность $f(A_i)$ интегрального варианта A_i выражается суммарным денежным доходом, полученным на всех этапах реализации варианта A_i, который подсчитывается по формуле

$$f(A_i) = \sum_{n=1}^{N_i} f(x_i^n), \tag{11.2}$$

где N_i — число этапов реализации i-го интегрального варианта A_i, состоящего из многих частных вариантов $x_i^1, \ldots, x_i^n, \ldots, x_i^{N_i}$.

Для нахождения лучшего интегрального варианта решения проблемы ЛПР должно придерживаться оптимальной стратегии, руководствуясь следующими правилами. Решение ищется, последовательно переходя от последнего этапа (конечных вершин дерева решений) к начальному этапу (корню дерева). В каждой вершине-случае вычисляется частная эффективность варианта $f(x_i^n)$ с учетом всех возможных последствий его реализации. В каждой вершине-решении выбирается вариант x_i^{n*}, имеющий наибольшую частную эффективность $y_i^{n*} = f(x_i^{n*})$. Остальные варианты (ветви дерева решений) отсекаются.

Передвигаясь по неотсеченным ветвям в обратном направлении от начала дерева к его концу и последовательно объединяя частные оптимальные решения, получаем интегральный оптимальный вариант решения проблемы A^*, который дает максимально возможный доход $y^* = \max\limits_i \sum\limits_n y_i^{n*}$. Такая процедура выбора оптимального варианта, аналогичная процедуре обратного вывода в динамическом программировании, получила название *сворачивание дерева решений.*

Приведем пример одного из этапов процедуры поиска лучшего варианта, которая представлена деревом решений.

Пример 11.2. Требуется выбрать лучший вариант модернизации предприятия, обеспечивающий выпуск новой имеющей спрос продукции. На одном из этапов среди возможных путей модернизации предприятия рассматривается модернизация технологии (вершина-решение). Имеются следующие частные варианты модернизации технологии: x_1^n — переход на технологию 1; x_2^n — переход на технологию 2; x_3^n — отказ от модернизации технологии (рис. 11.1).

Возможные характеристики продукции, производимой по одной или другой технологии, являются случайными (вершины-случаи). При использовании технологии 1 выпускаемая продукция может иметь высокое качество и высокую себестоимость; среднее качество и низкую себестоимость. Продукция, выпускаемая по технологии 2, может иметь высокое качество и высокую себестоимость; среднее качество и среднюю себестоимость; среднее качество и низкую себестоимость. Эти свойства обозначены на рис. 11.1 буквами В, С, Н.

Результатом перехода на одну из технологий на n-м этапе будет выпуск новой продукции, обладающей определенными уровнями качества и себестоимости. Продукция разного качества и себестоимости будет иметь разный спрос, а значит, и давать разный дополнительный доход. Величины вероятностей $p_j(x_i^n)$ ожидаемого спроса и возможных доходов/убытков $f_j(x_i^n)$ в случае разных способов модернизации указаны на рис. 11.1. При отка-

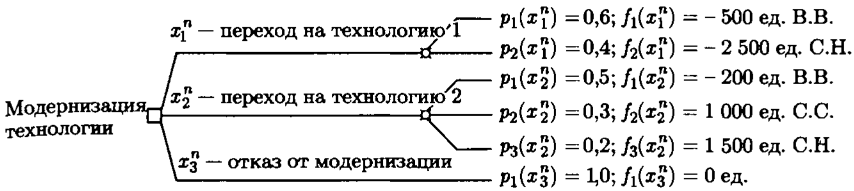


Рис. 11.1. Часть дерева решений по модернизации предприятия

зе от модернизации технологии новая продукция выпускаться не будет, дополнительный доход $f_1(x_3^n)$ будет равен нулю, а вероятность такого события равна $p_1(x_3^n) = 1,0$.

Общие эффективности вариантов модернизации технологии:

$$f(x_1^n) = 0{,}6(-500) + 0{,}4 \cdot 2\,500 = 700 \text{ ед.};$$

$$f(x_2^n) = 0{,}5(-200) + 0{,}3 \cdot 1\,000 + 0{,}2 \cdot 1\,500 = 500 \text{ ед.};$$

$$f(x_3^n) = 1{,}0 \cdot 0 = 0 \text{ ед.}$$

Лучшей будет технология 1, переход на которую сможет принести наибольший дополнительный доход $y_1^{n*} = f(x_1^{n*}) = 700$ ед. ■

В дерево решений можно легко включать новые вершины. Например, в зависимости от изменения спроса на продукцию появляются новые вершины-случаи. Это может потребовать расширения ассортимента и увеличения объемов выпуска продукции, и тогда добавляются новые вершины-решения и т. д. В таких ситуациях лучшими могут оказаться другие варианты модернизации и технологии и предприятия в целом.

Построение дерева решений является полезным приемом последовательного структурного анализа рассматриваемой проблемы, позволяющим находить лучший интегральный вариант решения. Можно строить достаточно сложные деревья решений, учитывающие неопределенности оценок денежных доходов, неоднозначности и ошибки в назначении вероятностей событий, различную склонность ЛПР к риску при осуществлении выбора, возможности привлечения дополнительной информации. Вместе с тем остаются открытыми ответы на вопросы: «Как заранее определить все возможные варианты решения и все последствия реализации каждого варианта? Как оценить вероятности их осуществления и соответствующие денежные эквиваленты?»

Из примера 11.2 видно, что функции, оценивающие эффективность различных вариантов модернизации предприятия, являются, по существу, функциями нескольких переменных.

В рассмотренном случае частная эффективность $f_j(x_i^n)$ варианта x_i^n зависит от двух показателей: качества продукции x_{i1}^n и себестоимости продукции x_{i2}^n, описывающих разные последствия реализации варианта x_i^n. Эти факторы можно считать частными критериями, которыми ЛПР оценивает предпочтительность того или иного варианта. Фактически, как видно из формул (11.1), (11.2), частная эффективность варианта $f_j(x_i^n)$ на n-м этапе, а значит, и общая эффективность интегрального варианта определяются оценками $f_j(x_{i1}^n, x_{i2}^n)$ вариантов по двум частным критериям. Тем самым, по сути, имеем дело с многокритериальной оценкой эффективности вариантов.

11.4. Марковские задачи принятия решений

Рассмотрим другой подход к многоэтапному оптимальному выбору в условиях вероятностной неопределенности — *марковский процесс принятия решений*, связанный с именем известного российского математика А. А. Маркова. Основная особенность марковской модели принятия решений заключается в том, что «будущее» и «прошлое» случайного управляемого процесса не влияют друг от друга. Иначе говоря, в такой динамической процедуре выбора каждое из принимаемых решений не зависит от предшествующих решений и не оказывает влияния на последующие решения, т. е. управление не имеет последействия.

Марковский процесс принятия решений представляется следующим образом. Имеется система, объект или процесс, которые в каждый момент времени могут находиться в одном из m возможных дискретных состояний $s_1, \ldots, s_m$. Примем некоторый момент времени t_1 за начальный. В определенные фиксированные моменты $t_2, t_3, \ldots (t_n < t_{n+1}, n = 1, \ldots, N)$ система вследствие какого-то принятого шагового решения (управления) мгновенно переходит из имеющегося состояния в некоторое другое состояние или остается в том же самом состоянии.

Введем случайное событие s_i^n, означающее, что в момент t_n (на n-м этапе) система находится в состоянии s_i, $i = 1, \ldots, m$. В соответствии со сделанными допущениями условная вероятность p_{ij} перехода системы в любое возможное в момент t_{n+1} состояние s_j^{n+1} определяется только состоянием системы s_i^n в предыдущий момент t_n и принятым на k-м этапе шаговым решением $x_i^n(k)$ из множества допустимых решений $X_i^n = \{x_i^n(1), \ldots, x_i^n(k_i)\}$:

$$p_{ij}(x_i^n(k)) = \mathsf{P}(s_j^{n+1} | s_i^n, x_i^n(k)), \qquad (11.3)$$

$i,\ j = 1, \ldots, m,\ n = 1, \ldots, N$. Предполагается, что $\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, $p_{ij}(x_i^n(k)) \geq 0$ при $x_i^n(k) \in X_i^n$.

Эффективность перехода системы из состояния s_i^n в другое состояние s_j^{n+1} характеризуется частной функцией полезности $f_{ij}(x_i^n(k))$, которая зависит от принятого k-го шагового решения $x_i^n(k)$ и имеет смысл возможного дохода при $f_{ij}(x_i^n(k)) > 0$ или убытка при $f_{ij}(x_i^n(k)) < 0$. Общая полезность на n-м этапе, если система находится в состоянии s_i^n, определяется выражением

$$f_i(x_i^n(k)) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i^n(k)) f_{ij}(x_i^n(k)). \tag{11.4}$$

Математическая модель марковского процесса принятия решений включает в себя наборы матриц переходных вероятностей $\mathrm{P}^n(k) = (p_{ij}^n(k))_{m\times m}$, $p_{ij}^n(k) = p_{ij}(x_i^n(k))$ и матриц частных полезностей $\mathrm{Y}^n(k) = (y_{ij}^n(k))_{m\times m}$, $y_{ij}^n(k) = f_{ij}(x_i^n(k))$, где i-я строка матрицы $\mathrm{P}^n(k)$ или $\mathrm{Y}^n(k)$ есть соответственно m-мерный вектор переходных вероятностей $\mathbf{p}_i^n(k) = (p_{i1}^n(x_i^n(k)), p_{i2}^n(x_i^n(k)), \ldots, p_{im}^n(x_i^n(k)))$ или частных полезностей $\mathbf{y}_i^n(k) = (f_{i1}(x_i^n(k)), f_{i2}(x_i^n(k)), \ldots, f_{im}(x_i^n(k)))$ на n-м этапе.

Каждый из векторов $\mathbf{p}_i^n(k)$ и $\mathbf{y}_i^n(k)$ задан на множестве допустимых шаговых решений $X^{a,n} = X_1^n \times \ldots \times X_m^n$, которое называется *пространством стратегий*. Стратегия управления представляет собой последовательность решений $\mathbf{x}^1(k), \ldots, \mathbf{x}^n(k), \ldots, \mathbf{x}^N(k)$, где вектор решений $\mathbf{x}^n(k) = (x_1^n(k), \ldots, x_i^n(k), \ldots, x_m^n(k)) \in X^{a,n}$ состоит из всех допустимых шаговых решений, принимаемых в момент t_n. Требуется найти такие шаговые решения $x_i^n(k^*)$ и оптимальную стратегию $\mathbf{x}^{1*}, \ldots, \mathbf{x}^{n*}, \ldots, \mathbf{x}^{N*}$, которые максимизируют суммарную эффективность перехода системы из некоторого начального состояния в конечное состояние за N этапов.

Марковские задачи принятия решения имеют свою специфику в зависимости от конечности или бесконечности числа этапов. В таких случаях говорят о конечном или бесконечном горизонте планирования. Эффективность стратегии управления при конечном горизонте можно оценить суммарной полезностью (доходом) за весь промежуток времени, а при бесконечном горизонте — суммарной полезностью (доходом) в единицу времени.

Существуют также задачи, где ЛПР принимает только какое-то одно фиксированное решение, зависящее от фактического со-

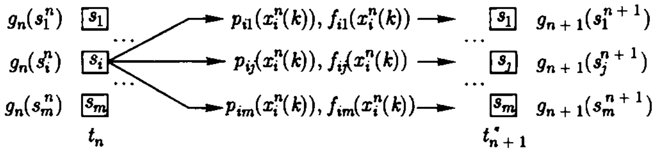


Рис. 11.2. Возможные переходы из состояния s_i^n на $(n+1)$-м этапе

стояния системы, безотносительно к тому, на каком конкретном этапе процедуры это случилось. В этом случае говорят, что принятие решений характеризуется стационарной стратегией. При стационарной стратегии принятия решений выражения (11.3), (11.4) для условных вероятностей $p_{ij}(x_i^n(k))$ и частных функций полезности $f_{ij}(x_i^n(k))$ упрощаются, поскольку их значения на любом этапе будут определяться только единственным допустимым для i-го состояния шаговым решением $x_i^n(k_i^0)$.

Марковскую задачу принятия решений с конечным числом этапов можно представить как задачу динамического программирования (см. разд. 10.5). Обозначим через $g_n(s_i^n)$ условный оптимальный выигрыш, который может быть получен на этапах с номерами $n, n+1, \ldots, N$ при условии, что в момент t_n (на n-м этапе) система находится в состоянии s_i^n. Возможные переходы из состояния s_i^n на n-м этапе изображены на рис. 11.2.

Обратные рекуррентные уравнения Беллмана (10.7), (10.8), связывающие условные оптимальные выигрыши $g_n(s_i^n)$ и $g_{n+1}(s_j^{n+1})$, принимают тогда вид:

$$g_n(s_i^n) = \max_k [f_i(x_i^n(k)) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i^n(k)) g_{n+1}(s_j^{n+1})], \qquad (11.5)$$

$$g_N(s_i^N) = \max_k f_i(x_i^N(k)), \qquad (11.6)$$

где полезность $f_i(x_i^n(k))$ на n-м этапе задается выражением (11.4). Максимум ищется по всем допустимым на n-м этапе шаговым решениям $x_i^n(k)$. Так как горизонт планирования конечен, то условные оптимальные выигрыши на $(N+1)$-м этапе должны быть равны $g_{N+1}(s_i^{N+1}) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (11.5) представляет собой полезность на n-м этапе. Второе слагаемое характеризует суммарный эффект после перехода системы на $(n+1)$-й этап, который определяется совокупностью условных оптимальных выигрышей $g_{n+1}(s_j^{n+1})$, имеющих вероятности $p_{ij}(x_i^n(k))$.

Поиск оптимального решения задачи динамического программирования по уравнениям (11.5), (11.6) иногда называют методом *итерации по стратегиям*, так как оптимальные выигрыши определяются итеративно.

Оптимальная стратегия обеспечивает получение максимальной суммарной полезности за все N этапов процесса, которая в данном случае равна значению оптимального выигрыша на первом этапе $g_1^* = g_1(s_i^1)$. Размер оптимального суммарного выигрыша g_1^* зависит от того, в каком i-м состоянии s_i^1 находилась система в начале процесса в момент времени t_1.

Пример 11.3. Необходимо составить оптимальный план обслуживания оборудования, который обеспечит максимальный доход от выпуска продукции за счет поддержания оборудования в работоспособном состоянии. По регламенту профилактический осмотр оборудования проводится трижды в течение смены. В любой момент осмотра (на n-м этапе) оборудование может работать или простаивать (находиться в состоянии s_1^n или s_2^n). За период между осмотрами работающее оборудование приносит доход $f_{11}(x_1^n(k)) = 300$ ед. Неработающее оборудование не дает никакого дохода и $f_{12}(x_1^n(k)) = 0$ ед.

Если на n-м этапе оборудование работает (состояние s_1^n), то ремонт делать не надо. Тем самым в этом состоянии есть только одно-единственное решение $x_1^n(1)$. Для состояния s_1^n множество допустимых решений $X_1^n = \{x_1^n(1)\}$. Вероятность того, что к следующему осмотру (на $(n+1)$-м этапе) работающее оборудование останется работоспособным (s_1^{n+1}) равна $p_{11}(x_1^n(k)) = 0{,}7$, а вероятность оказаться неработающим $(s_2^{n+1}) - p_{12}(x_1^n(k)) = 0{,}3$. Общий доход от работающего на n-м этапе оборудования

$$f_1(x_1^n(1)) = 0{,}7 \cdot 300 + 0{,}3 \cdot 0 = 210 \text{ ед.}$$

Если на n-м этапе оборудование простаивает (s_2^n), то его можно отремонтировать двумя способами, и, значит, на этом этапе есть два возможных решения $x_2^n(1)$ и $x_2^n(2)$. Для состояния s_2^n множество допустимых решений $X_2^n = \{x_2^n(1), x_2^n(2)\}$. Первый способ ремонта обеспечивает переход оборудования в работоспособное состояние (s_1^{n+1}) с вероятностью $p_{21}(x_2^n(1)) = 0{,}6$ и требует затрат $f_{21}(x_2^n(1)) = -150$ ед. Второй способ ремонта характеризуется вероятностью $p_{21}(x_2^n(2)) = 0{,}4$ и затратами $f_{21}(x_2^n(2)) = -100$ ед. Общий доход, а фактически, расход, связанный с ремонтом оборудования на n-м этапе, составляет для каждого из способов ремонта:

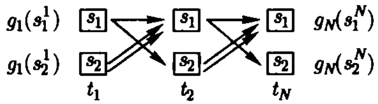


Рис. 11.3. Часть процесса принятия решений по ремонту оборудования

$$f_2(x_2^n(1)) = 0{,}6 \cdot (-150) + 0{,}4 \cdot 0 = -90 \text{ ед.},$$
$$f_2(x_2^n(2)) = 0{,}4 \cdot (-100) + 0{,}6 \cdot 0 = -40 \text{ ед.}$$

Возможные состояния оборудования и переходы между ними представлены на рис. 11.3.

Так как в состоянии s_1^n можно принять только одно шаговое решение $x_1^n(1)$, а в состоянии s_2^n допустимы два шаговых решения $x_2^n(1), x_2^n(2)$, то на любом n-м этапе имеется только два допустимых вектора решений $\mathbf{x}_n(1) = (x_1^n(1), x_2^n(1))$ и $\mathbf{x}_n(2) = (x_1^n(1), x_2^n(2))$. Матрицы переходных вероятностей и частных полезностей имеют следующий вид:

$$\mathrm{P}^n(1) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y}^n(1) = \begin{pmatrix} 300 & 0 \\ -150 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{P}^n(2) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y}^n(2) = \begin{pmatrix} 300 & 0 \\ -100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами (11.6) и (11.7), рассчитаем величину условно-оптимального выигрыша $g_n(s_i^n)$ для каждого этапа, состояния и допустимого шагового решения (табл. 11.3). Поскольку на втором этапе можно воспользоваться любым способом ремонта $x_2^2(1)$ или $x_2^2(2)$, то имеется две равноценные оптимальные стратегии обслуживания оборудования $\mathbf{x}^1(1), \mathbf{x}^2(1), \mathbf{x}^3(2)$ или $\mathbf{x}^1(1), \mathbf{x}^2(2), \mathbf{x}^3(2)$, дающие одинаковый оптимальный суммарный выигрыш, равный 20 ед. Если при первом осмотре оборудование работает, то выигрыш будет равен $g_1^* = g_1(s_1^1) = 457{,}5$ ед., а если оборудование не работает, то выигрыш равен $g_1^* = g_1(s_2^1) = 125$ ед. ■

При достаточно большом горизонте планирования начальное состояние системы оказывает незначительное влияние на марковский процесс принятия решений. При бесконечном числе этапов ($N = \infty$) приходится находить установившееся состояние системы и изучать переходный период, предшествующий установившемуся состоянию. Для решения марковской задачи оптимального выбора с бесконечным числом этапов применяют методы итерации по стратегиям и полного перебора. Один из мето-

Таблица 11.3

Условно-оптимальные поэтапные выигрыши

Этап	Состояние, решение	$f_i(x_i^n(k)) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i^n(k))g_{n+1}(s_j^{n+1})$	Выигрыш $g_n(s_i^n) = \max_k$
1	$s_1^3, x_1^3(1)$	210	210
	$s_2^3, x_2^3(1)$	-90	—
	$s_2^3, x_2^3(2)$	-40	-40
2	$s_1^2, x_1^2(1)$	$210 + 0{,}7 \cdot 210 + 0{,}3 \cdot (-40) = 345$	345
	$s_2^2, x_2^2(1)$	$-90 + 0{,}6 \cdot 210 + 0{,}4 \cdot (-40) = 20$	20
	$s_2^2, x_2^2(2)$	$-40 + 0{,}4 \cdot 210 + 0{,}6 \cdot (-40) = 20$	20
3	$s_1^1, x_1^1(1)$	$210 + 0{,}7 \cdot 345 + 0{,}3 \cdot 20 = 457{,}5$	457,5
	$s_2^1, x_2^1(1)$	$-90 + 0{,}6 \cdot 345 + 0{,}4 \cdot 20 = 125$	125
	$s_2^1, x_2^1(2)$	$-40 + 0{,}4 \cdot 345 + 0{,}6 \cdot 20 = 110$	—

дов позволяет найти оптимальную стратегию за небольшое число итераций и не требует существенных вычислительных затрат. Полный перебор оправдан лишь при малом числе стационарных стратегий и небольшой размерности задачи выбора.

Примерами марковских задач принятия решений служат практические проблемы, где конечный результат зависит от начальной ситуации и влияния случайных факторов — управление запасами при стохастическом выполнении заказов, управление финансовыми операциями, управление водными ресурсами, ремонт и замена оборудования, планирование экспериментов.

ГЛАВА 12

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПРИ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

12.1. Выбор в нечеткой среде

Применение детерминированного и вероятностного подходов для решения задачи оптимального выбора оправдано при условии, что информации, которая имеется в распоряжении ЛПР, достаточно, чтобы поведение анализируемой системы, объекта или процесса могло считаться полностью определенным или статистически устойчивым. Иными словами, должна существовать многократная повторяемость ситуации выбора и воспроизводимость результатов при заданных условиях и/или состояниях окружающей среды.

При недостатке количественных данных, необходимых для четкого и полного описания проблемной ситуации, при отсутствии возможности их получения, при трудностях, связанных со всесторонним и точным учетом влияния известных факторов на функционирование системы, ЛПР может воспользоваться качественной вербальной информацией. Такая информация носит нечеткий, расплывчатый характер и может быть либо дана самим ЛПР и/или экспертами, либо получена независимо от них с помощью вычислений или технических средств.

Нечеткость качественной информации, обусловленная неточностью выражения на естественном языке представлений, суждений, оценок, касающихся свойств предметов или явлений, формализуется при помощи математического аппарата теории нечетких множеств, родоначальником которой является Л. Заде (США) [18, 26, 43, 67, 69]. Понятие нечеткости определяется либо с помощью задаваемой степени принадлежности $\mu_A(x)$ элемента $x \in X$ к нечеткому множеству $A = \{\mu_A(x)/x\}$ (символ «/» обозначает нечеткость), которая может варьироваться от полной принадлежности ($\mu_A(x) = 1$) до полной непринадлежности ($\mu_A(x) = 0$), либо с помощью совокупности специальных четких множеств — так называемых множеств α-уровня $A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha \geq 0\}$.

Заметим, что нечеткое или размытое значение какого-то показателя или параметра, характеризующего некоторое свойство элемента (варианта, объекта), означает степень выраженности

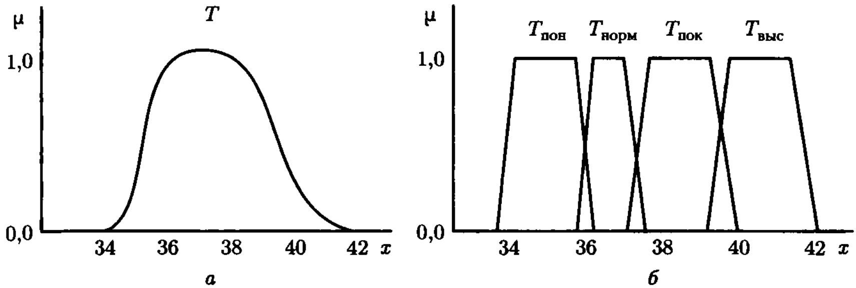


Рис. 12.1. Функции принадлежности нечетких множеств «Температура»:

а — нечеткое множество; *б* — лингвистическая переменная

или интенсивности этого свойства и не является ни синонимом неточности (ошибки) измерения значения данного показателя, ни синонимом вероятности (частоты) реализации этого значения как случайного события.

Пример 12.1. Одним из показателей оценки состояния здоровья человека служит температура его тела. Температуру можно измерить с помощью термометра и указать ее четкое числовое значение по шкале термометра. Для здорового человека нормальной считается температура 36,6 °C, точность измерения которой определяется градацией шкалы термометра (обычно ±0,1 °C). При этом весьма вероятно, что у значительного числа здоровых людей нормальная температура именно 36,6 °C, хотя для других нормальной будет температура и 36,3 °C, и 36,9 °C.

Когда же под рукой нет термометра, можно, прикоснувшись к человеку, сказать, что у него «пониженная», «нормальная», «повышенная» или «высокая» температура, т. е. указать ее нечеткое вербальное значение по шкале оценок температуры типа рассмотренной в разд. 3.5. Если каждой градации оценок на шкале температуры X присвоить число из интервала $[0,1]$, то получим нечеткое множество T «Температура» с непрерывной функцией принадлежности $\mu_T\colon X \to [0,1]$, дающей нечеткую оценку степени нагретости тела (рис. 12.1, *а*).

Если каждую градацию на шкале X рассматривать в свою очередь как нечеткое число, то получим лингвистическую переменную «Температура» (рис. 12.1, *б*), значениями которой являются самостоятельные нечеткие переменные — нечеткие терм-множества $T_{пон}$ «Пониженная температура», $T_{норм}$ «Нормальная температура», $T_{пов}$ «Повышенная температура», $T_{выс}$

«Высокая температура» со своими функциями принадлежности $\mu_{T_{\text{пон}}}(x)$, $\mu_{T_{\text{норм}}}(x)$, $\mu_{T_{\text{пов}}}(x)$, $\mu_{T_{\text{выс}}}(x)$, $x \in X$. К примеру, функция принадлежности $\mu_{T_{\text{норм}}}(x)$ нечеткого множества $T_{\text{норм}}$ «Нормальная температура» может быть задана трапециевидной функцией, лежащей в пределах [36,0; 37,2] и принимающей максимальное значение $\mu_{T_{\text{норм}}}(x) = 1$ при $36{,}3 \leq x \leq 36{,}9$. Значение нечетко определенной температуры, в отличие от четко измеренной, представляет собой уже не объективную инструментальную оценку, а субъективную оценку, данную индивидуумом. ■

Практически все рассмотренные ранее задачи оптимального выбора типа (6.1), (7.1) и (10.1) допускают нечеткую формулировку. Нечетко могут описываться любые элементы задачи оптимизации и их сочетания: переменные $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, характеризующие рассматриваемый вариант, объект, процесс или систему; условия $g_q(\mathbf{x}) \leq b_q$, $q = 1, \ldots, p$, задающие ограничения на множество допустимых значений переменных X^a; скалярные или векторные показатели эффективности (целевые функции, критерии) $y_j = f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, h$, и их весовые важности w_j; состояния окружающей среды $E_1, \ldots, E_d$; операции максимизации и минимизации целевых функций; бинарные отношения между вариантами, переменными, функциями, в частности, отношения «равно», «больше», «меньше».

Основное внимание при постановке и решении задач нечеткого оптимального выбора уделяется описанию нечетких предпочтений ЛПР, построению функций принадлежности нечетких множеств, выполнению операций над нечеткими множествами и нечеткими отношениями.

С помощью нечетких алгоритмов и операторов можно определять новые нечеткие понятия через уже известные, устанавливать нечеткие отношения между нечеткими понятиями, задавать нечеткие функции нечетких переменных, находить нечеткое решение поставленной задачи.

Для решения задач нечеткого оптимального выбора применяются известные методы оптимизации, в частности человеко-машинные процедуры многокритериальной оптимизации (см. гл. 9), модифицированные и адаптированные к нечеткой среде, а также разрабатываются новые методы и алгоритмы. Наиболее распространенные подходы к решению задач нечеткого выбора базируются на двух упомянутых возможностях выражения нечеткости. В первом случае реализуется принцип нечеткой оптимальности Беллмана—Заде, состоящий в нахождении нечеткого решения, которое является общей частью нечеткого множества достижимых целей и нечеткого множества ограничений. Во втором случае исходная постановка задачи нечеткой оптимизации заменяется эквивалентным набором задач детерминированной оптимизации (7.1), записанных в терминах множеств α-уровня.

12.2. Получение нечеткого гарантированного результата

Одна из наиболее распространенных задач нечеткого оптимального выбора — получение гарантированного результата — была сформулирована Р. Беллманом и Л. Заде (1970) как задача достижения нечетко определенной цели. Необходимо в максимально возможной степени обеспечить достижение поставленной цели F и в наибольшей мере удовлетворить имеющимся ограничениям G, которые задают множество допустимых решений X^a. Нечеткость задания цели и/или степени ее достижения означает приблизительность оценки результата выбора варианта или отклика системы при воздействии на нее.

Особенность такой постановки задачи состоит в том, что цель F и ограничения G являются нечеткими подмножествами некоторого универсального множества вариантов X, из которого делается выбор. Нечеткая цель F описывается функцией принадлежности $\mu_F\colon X \to [0,1]$, а нечеткие ограничения G — функцией принадлежности $\mu_G\colon X \to [0,1]$. Нечетким решением задачи достижения нечетко определенной цели F будет нечеткое множество D, которое представляет собой общую часть нечетких множеств целей F и ограничений G, образованную пересечением $D = F \cap G$ с функцией принадлежности

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}. \tag{12.1}$$

При нескольких целях $F_1, \ldots, F_h$ и нескольких ограничениях $G_1, \ldots, G_p$ общая цель определяется как $F = F_1 \cap \ldots \cap F_h$, а множество допустимых вариантов — как $G = G_1 \cap \ldots \cap G_p$. В таком случае нечеткое решение D описывается функцией принадлежности

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{F_1}(x), \ldots, \mu_{F_h}(x), \mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_p}(x)\}.$$

Если каждая частная цель F_j и ограничение G_q имеют для ЛПР разную важность, которую можно охарактеризовать весом

Таблица 12.1

Функции принадлежности нечетких множеств F, G_1, G_2, D

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_F(x)$	0,0	0,2	0,5	0,8	**1,0**	0,8	0,5	0,2	0,0	0,0
$\mu_{G_1}(x)$	0,1	0,4	0,7	**1,0**	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,1
$\mu_{G_2}(x)$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	**1,0**	0,7	0,4	0,1
$\mu_D(x)$	0,0	0,2	0,5	0,7	**0,8**	**0,8**	0,5	0,2	0,0	0,0

цели w_j и весом ограничения v_q, где $\sum_j w_j = 1$, $\sum_q v_q = 1$, то общую цель F и общие ограничения G можно представить как взвешенные пересечения вида $F = w_1F_1 \cap \ldots \cap w_hF_h$, $G = v_1G_1 \cap \cap \ldots \cap v_pG_p$ или как $F = F_1^{w_1} \cap \ldots \cap F_h^{w_h}$, $G = G_1^{v_1} \cap \ldots \cap G_p^{v_p}$. Такого рода операции, невозможные для четких множеств, допустимы для нечетких множеств в силу существования операции умножения $b \cdot A$ любого нечеткого множества A на число b, $0 \le b \le 1$, и возведения A^c любого нечеткого множества A в степень c, $0 \le c \le 1$. Функция принадлежности решения D принимает тогда вид

$$\mu_D(x) = \min\{w_1\mu_{F_1}(x), \ldots, w_h\mu_{F_h}(x), \quad v_1\mu_{G_1}(x), \ldots, v_p\mu_{G_p}(x)\},$$

или

$$\mu_D(x) = \min\{[\mu_{F_1}(x)]^{w_1}, \ldots, [\mu_{F_h}(x)]^{w_h}, [\mu_{G_1}(x)]^{v_1}, \ldots, [\mu_{G_p}(x)]^{v_p}\}.$$

В качестве наилучшего варианта решения задачи достижения нечетко поставленной цели принимается так называемый *максимизирующий вариант*, который имеет наибольшую степень принадлежности нечеткому решению D:

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}. \qquad (12.2)$$

Пример 12.2. Пусть универсальное множество вариантов есть множество целых чисел $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Требуется выбрать число, примерно равное 5, которое должно лежать приблизительно между 4 и 7. Цель F и ограничения G_1 и G_2 можно выразить, например, такими словами: F = «x должно быть числом, примерно равным 5»; G_1 = «x должно быть числом, приблизительно большим, чем 4»; G_2 = «x должно быть числом, приблизительно меньшим, чем 7».

Дискретные функции принадлежности нечетких множеств цели F, ограничений G_1 и G_2, решения D приведены в табл. 12.1. Наилучшими вариантами x^* будут числа 5 и 6, значения функции принадлежности которых равны $\mu_D(x^*) = \max \mu_D(x) = 0{,}8$. Нечеткое решение записывается как D = «x должно быть числом, близким к 5 и 6». ■

В общем случае эффективность достижения цели может оцениваться нечеткой целевой функцией $y = \tilde{f}(x)$, которая каждому варианту $x \in X$ ставит в соответствие нечеткую оценку $y \in Y$, где X — универсальное множество вариантов, Y — универсальное множество оценок. Нечеткая целевая функция $y = \tilde{f}(x)$ задается нечетким однозначным отображением $\tilde{f}\colon X \to Y$, которое описывается функцией принадлежности $\mu_{\tilde{f}}\colon X \times Y \to [0,1]$. Нечеткая цель F определяется тогда как нечеткое подмножество множества оценок Y и характеризуется функцией принадлежности $\mu_F\colon Y \to [0,1]$.

В таком случае нечетким решением задачи достижения нечеткой цели F на нечетком множестве вариантов G является нечеткое множество D, которое обладает следующими свойствами: допустимостью решения, т. е. $D \subseteq G$; достижимостью нечеткой цели, т. е. $\tilde{f}(D) \subseteq F$, где $\tilde{f}(D)$ — образ нечеткого множества D при нечетком отображении $\mu_{\tilde{f}}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{f}(D)}(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_{\tilde{f}}(x,y), \mu_D(x)\}.$$

Максимальное среди всех подмножеств нечеткое множество H, представляющее собой прообраз $\tilde{f}^{-1}(F)$ нечеткого множества F при нечетком отображении $\mu_{\tilde{f}}$, имеет функцию принадлежности $\mu_H(x) = \inf\limits_{y \in W(x)} \mu_F(y)$ при $x \in X_0$, $\mu_H(x) = 1$ при $x \in X \setminus X_0$. Здесь $W(x) = \{y \in Y | (x,y) \in W\}$, $W = \{(x,y) \in X \times Y | \mu_{\tilde{f}}(x,y) > \mu_F(y)\}$, $X_0 = \{x \in X | W(x) \neq \varnothing\}$. Таким образом, функция принадлежности нечеткого решения D есть

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_H(x), \mu_G(x)\} \tag{12.3}$$

при $x \in X_0$ и $\mu_D(x) = \mu_G(x)$ при $x \in X \setminus X_0$.

Когда целевая функция $y = f(x)$ определяется четким однозначным отображением $f\colon X \to Y$ и отображение μ_f также является четким, т. е. $\mu_f(x,y) = 1$ при $y = f(x)$ и $\mu_f(x,y) = 0$ при $y \neq f(x)$, тогда, как несложно убедиться, $\mu_H(x) = \mu_F(f(x))$.

В этом случае выражение (12.3) для функции принадлежности нечеткого решения D совпадает с ранее найденным выражением (12.1):

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_F(f(x)), \mu_G(x)\}.$$

Подход Беллмана—Заде к нечеткому выбору в существенной мере использует возможность описания целей и ограничений в виде нечетких подмножеств одного и того же исходного множества вариантов. Это позволяет представить результат решения задачи в более простой форме, реализующей известный максиминный принцип наилучшего гарантированного результата. Выражение (12.1) можно трактовать как нечеткую инструкцию, выполнение которой обеспечивает достижение нечетко поставленной цели. Однако такому подходу не хватает гибкости при учете предпочтений ЛПР, поскольку теряется значительная часть информации о нечетко описанных множествах достижимых целей и допустимых вариантов. Кроме того, не всегда удается задать цель в виде нечетного подмножества множества вариантов.

12.3. Нечеткое математическое программирование с четкой целевой функцией

Задача математического программирования, сформулированная в общей форме (7.3), состоит в нахождении таких переменных — компонент вектора $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$, характеризующего оптимальный вариант, — которые обеспечивают максимум целевой функции $y = f(\mathbf{x})$ на множестве допустимых решений X^a, заданном системой равенств или неравенств:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^* \in \arg\max_{x \in X^a} f(\mathbf{x}), \\ g_q(\mathbf{x}) \leq 0, \quad q = 1, \ldots, p, \end{gathered} \tag{12.4}$$

где $\mathbf{x} \in X^a \subseteq X$, $f\colon X \to \mathbf{R}$ и $g_q\colon X \to \mathbf{R}$ — действительные функции.

В нечеткой среде при дефиците доступной информации, имеющейся в распоряжении ЛПР, любой элемент задачи математического программирования может иметь нечеткое описание. Нечеткими могут быть целевая функция $f(\mathbf{x})$, множество допустимых вариантов X^a, ограничения $g_q(\mathbf{x})$ на допустимое множество, отдельные параметры в функциях $g_q(\mathbf{x})$, отношения равенства и неравенства в постановке задачи (12.4). Различные комбинации четких и нечетких элементов в формулировке задачи дают разные задачи нечеткого математического программирования. Рассмотрим сначала задачи нечеткого математического программирования с четко поставленной целью.

Задача А. Найти оптимальный вариант $\mathbf{x}^*$, который в максимально возможной степени обеспечивает достижение четкого целевого показателя y_0 при нечетко заданных ограничениях на множестве допустимых решений:

$$f(\mathbf{x})\tilde{\geq}y_0, \quad g(\mathbf{x})\tilde{\leq}0, \quad \mathbf{x}\in X^a,$$

где волнистая линия означает нечеткое неравенство.

Подобная постановка задачи А нечеткого математического программирования эквивалентна задаче достижения нечетко определенной цели (см. разд. 12.2), где степень достижения цели и степень выполнения ограничений описывается функциями принадлежности $\mu_F(\mathbf{x})$ и $\mu_G(\mathbf{x})$ нечетких множеств цели F и ограничений G.

Один из возможных способов введения таких функций принадлежности, предложенный Г. Циммерманном (1978), заключается в следующем:

$$\mu_F(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\mathbf{x}) \leq y_0 - a, \\ \mu_{F(a)}(\mathbf{x}, a), & \text{если } y_0 - a < f(\mathbf{x}) < y_0, \\ 1, & \text{если } f(\mathbf{x}) \geq y_0; \end{cases}$$

$$\mu_G(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(\mathbf{x}) \geq b, \\ \mu_{F(b)}(\mathbf{x}, b), & \text{если } 0 < g(\mathbf{x}) < b, \\ 1, & \text{если } g(\mathbf{x}) \leq 0. \end{cases}$$

Здесь a и b — два пороговых уровня или предельные уступки, которые задаются ЛПР так, что выполнение неравенств $f(\mathbf{x}) \leq y_0 - a$ и $g(\mathbf{x}) \geq b$ означает недопустимое, с точки зрения ЛПР, нарушение неравенств $f(\mathbf{x}) \geq y_0$ и $g(\mathbf{x}) \leq 0$; $\mu_{F(a)}\colon X \to [0,1]$ и $\mu_{F(b)}\colon X \to [0,1]$ — некоторые функции принадлежности, характеризующие степень допустимого, по мнению ЛПР, нарушения соответствующих неравенств (чем больше отклонение, тем меньше степень его допустимости).

Применив подход Беллмана—Заде, получим для оптимального варианта решения задачи А математического программирования значение функции принадлежности вида (12.2):

$$\mu_D(\mathbf{x}^*) = \max_{x\in X}\mu_D(\mathbf{x}) = \max_{x\in X}\min\{\mu_F(\mathbf{x}), \mu_G(\mathbf{x})\}.$$

Для задачи нечеткого линейного программирования можно, сформулировав соответствующую двойственную задачу, провести анализ чувствительности оптимального решений $\mathbf{x}^*$ по отношению к изменению значений пороговых уровней a, b и параметров линейных функций $\mu_{F(a)}(\mathbf{x}, a), \mu_{F(b)}(\mathbf{x}, b)$.

Задача Б. Найти оптимальный вариант $\mathbf{x}^*$, который обеспечивает максимум четкой целевой функции $f(\mathbf{x})$ на нечетком множестве допустимых решений G, описываемом функцией принадлежности $\mu_G\colon X \to [0,1]$. Эквивалентная формулировка этой задачи нечеткого математического программирования имеет вид:

$$z(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X}, \quad f(\mathbf{x}) \geq z, \quad \mu_G(\mathbf{x}) \geq z, \quad \mathbf{x} \in X^a.$$

Для простоты изложения будем считать далее, что $X^a = X$.

К. Негойта и Д. Ралеску (1975) предложили рассматривать задачу Б нечеткого математического программирования как задачу достижения нечетко поставленной цели, изложенную в разд. 12.2. Функция принадлежности нечеткой цели F задается нормированной функцией $\mu_F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) / \sup\limits_{x \in \operatorname{Supp} F} f(\mathbf{x})$, где четкое множество $\operatorname{Supp} F = \{\mathbf{x} \in X | \mu_F(\mathbf{x}) > 0\}$ является носителем нечеткого множества F. В этом случае нечеткое решение D задачи Б описывается функцией принадлежности $\mu_D(\mathbf{x})$ вида (12.1), а наилучший вариант $\mathbf{x}^*$ характеризуется функцией $\mu_D(\mathbf{x}^*)$, определяемой формулой (12.2).

Другой подход к решению задачи Б был предложен С. А. Орловским (СССР, 1977). Максимизация целевой функции f на нечетком множестве G может пониматься двояко. Максимизацию функции f можно рассматривать как поиск такого нечеткого подмножества $G_{(1)}$ нечеткого множества G, которому соответствует наилучшее в каком-то смысле нечеткое значение функции $f(\mathbf{x})$, являющееся результатом нечеткой операции $\widetilde{\max}$. Под максимизацией функции f можно понимать также поиск компромисса между желанием ЛПР одновременно получить максимально возможное значение целевой функции $f(\mathbf{x})$ на нечетком подмножестве допустимых вариантов, которые имеют наибольшее значение функции принадлежности $\mu_G(\mathbf{x})$.

В первом случае исходная задача Б нечеткого математического программирования сводится к набору задач оптимизации $f(\mathbf{x}) \to \max\limits_{x \in G_\alpha}$ на всевозможных четких множествах α-уровня $G_\alpha = \{\mathbf{x} \in X | \mu_G(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ нечеткого множества G. Обозначим через

$= \{\mathbf{x} \in X | \mu_G(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ нечеткого множества G. Обозначим через $X(\alpha) = \{\mathbf{x} \in X | f(\mathbf{x}) = \sup\limits_{x' \in G_\alpha} f(\mathbf{x}'), G_\alpha \neq \varnothing, \alpha > 0\}$ множество решений задачи максимизации функции $f(\mathbf{x})$, которое состоит из допустимых вариантов $\mathbf{x}$, имеющих степень принадлежности нечеткому множеству G не менее α.

Решением типа 1 задачи Б называется нечеткое подмножество $G_{(1)}$ нечеткого множества G, описываемое функцией принадлежности $\mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) = \sup\limits_{x \in X(\alpha)} \alpha$, которая задается следующим образом: $\mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) = \mu_G(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \bigcup_\alpha \mathrm{X}(\alpha)$, $\alpha > 0$, и $\mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) = 0$ в остальных случаях. Можно показать, что $\mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $\alpha > 0$, что $X(\alpha) \neq \varnothing$.

Нечеткому решению типа 1 $G_{(1)}$ соответствует нечеткий максимум $\tilde{\max}$ функции $f(\mathbf{x})$ — нечеткое наибольшее значение:

$$\mu_{f_{(1)}}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \sup_{x \in X(\alpha)} \alpha, \quad y \in \mathbf{R},$$

которое представляет собой образ нечеткого множества $G_{(1)}$ при отображении f. Функция $\mu_{f_{(1)}}(y)$ является монотонно убывающей на четком множестве $\operatorname{Supp} G_{(1)} = \{\mathbf{x} \in X | \mu_{G_{(1)}}(\mathbf{x}) > 0\}$ — носителе нечеткого множества $G_{(1)}$. Поэтому значение $\mu_{f_{(1)}}(y)$ для любого $y = f(\mathbf{x})$ есть максимальная степень принадлежности $\mu_G(\mathbf{x})$ варианта $\mathbf{x}$ нечеткому множеству G. Иными словами, во множестве допустимых решений X нет такого варианта $\mathbf{x}'$, для которого одновременно выполнялись бы неравенства $\mu_G(\mathbf{x}') > \mu_{f_{(1)}}(y') > 0$ и $f(\mathbf{x}') > y'$.

При выборе наиболее предпочтительного варианта рекомендуется сначала определить значение y^*, которое обеспечивает наибольшее значение $\mu_{f_{(1)}}(y^*)$ нечеткого максимума функции $y = f(\mathbf{x})$, удовлетворяющее ЛПР, а затем найти вариант $\mathbf{x}^* \in f^{-1}(y^*)$, который имеет наибольшую степень принадлежности $\mu_G(\mathbf{x}^*) = \max \mu_G(\mathbf{x})$ множеству допустимых решений G.

В описанном подходе к нахождению решения задачи Б практически не учитывается необходимость компромисса между значениями целевой функции $f(\mathbf{x})$ и степенью допустимости варианта $\mu_G(\mathbf{x})$. Второй подход к решению задачи Б опирается на идею поиска парето-оптимальных вариантов (см. разд. 4.3).

Вариант $\mathbf{x}_e \in X$ называется парето-оптимальным, или эффективным, при функциях $f(\mathbf{x})$ и $\mu_G(\mathbf{x})$, если не существует других таких вариантов $\mathbf{x} \in X$, что выполняются неравенства оптимальных вариантов через X_e.

Решением типа 2 задачи Б является нечеткое подмножество $G_{(2)}$ нечеткого множества G, описываемое функцией принадлежности $\mu_{G_{(2)}}(\mathbf{x})$, которая задается как $\mu_{G_{(2)}}(\mathbf{x}) = \mu_G(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X_e$, $\mu_{G_{(2)}}(\mathbf{x}) = 0$ в остальных случаях. Иными словами, в качестве лучшего решения ЛПР выбирает эффективный вариант. Нечеткому решению типа 2 $G_{(2)}$ соответствует нечеткое значение функции $f(\mathbf{x})$:

$$\mu_{f_{(2)}}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{G_{(2)}}(\mathbf{x}), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Доказано, что если функция f непрерывна, а функция μ_G полунепрерывна сверху на компактном множестве допустимых вариантов X, то при любом $y \in \mathbf{R}$ выражения для функций $\mu_{f_{(1)}}(y)$ и $\mu_{f_{(2)}}(y)$ совпадают. В этом случае первый и второй способы решения задачи Б дают одинаковый результат.

Заметим, что множество парето-оптимальных решений X_e может содержать много и, в частности, бесконечно много эффективных вариантов $\mathbf{x}_e$. Для выделения среди них наилучшего варианта, в наибольшей степени удовлетворяющего ЛПР, необходимо привлечение дополнительной информации, использование процедур компенсации и исключения подобно тому, как это делается в задачах многокритериальной оптимизации (см. гл. 8).

12.4. Нечеткое математическое программирование с нечеткой целевой функцией

Рассмотрим другие постановки задач нечеткого математического программирования, где цель задается нечеткой целевой функцией.

Задача В. Найти оптимальный вариант $\mathbf{x}^*$, который обеспечивает на четком множестве допустимых вариантов X^a четкий максимум нечеткой целевой функции $\tilde{f}(\mathbf{x})$, описываемой функцией принадлежности $\mu_{\tilde{f}}\colon X \times \mathbf{R} \to [0,1]$.

Функция $\mu_{\tilde{f}}(\mathbf{x}_0, y)$ для каждого фиксированного варианта $\mathbf{x}_0$ представляет собой нечеткую оценку этого варианта и характеризует некоторое нечеткое подмножество Y универсального множества оценок $\mathbf{R}$. Задано также нечеткое множество допустимых решений G с функцией принадлежности $\mu_G\colon X \to [0,1]$.

Для простоты будем считать, что множество допустимых вариантов X^a совпадает с универсальным множеством вариантов X.

Задачу В можно рассматривать как задачу отыскания варианта $\mathbf{x}$, недоминируемого со степенью принадлежности, не меньшей, чем β, что является задачей математического программирования

$$f(\mathbf{x}) \to \max, \quad \mu_{\tilde{f}}(\mathbf{x}, y) \geq \beta > 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Для поиска решения поставленной задачи вводится специальное нечеткое отношение доминирования $\tilde{R}_{dom}$, заданное на универсальном множестве вариантов X и имеющее функцию принадлежности $\mu_{\tilde{R}_{dom}} : X \times X \to [0, 1]$ вида

$$\mu_{\tilde{R}_{dom}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{y_1 \geq y_2} \min\{\mu_{\tilde{f}}(\mathbf{x}_1, y_1), \mu_{\tilde{f}}(\mathbf{x}_2, y_2)\}. \tag{12.5}$$

Заметим, что в обычной задаче математического программирования $f(\mathbf{x}) \to \max$ выполняются условия: $\mu_f(\mathbf{x}, y) = 1$ при $y = f(\mathbf{x})$ и $\mu_f(\mathbf{x}, y) = 0$ в остальных случаях. Тогда вместо (12.5) имеем $\mu_{R_{dom}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ при $f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_2)$ и $\mu_{R_{dom}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ в остальных случаях. Тем самым нечеткое отношение доминирования $\tilde{R}_{dom}$ становится четким отношением векторного доминирования R_{dom}, с помощью которого устанавливается предпочтительность вариантов:

$$\mathbf{x}_1 \succeq_X \mathbf{x}_2 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}_1) \geq_{\mathbf{R}} f(\mathbf{x}_2).$$

Решением задачи В нечеткого математического программирования является нечеткое подмножество недоминируемых вариантов ND, описываемое функцией принадлежности

$$\mu_{ND}(\mathbf{x}) = \min\{\mu_{\tilde{R}_{dom}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \mu_{NX}(\mathbf{x})\}.$$

Здесь

$$\mu_{NX}(\mathbf{x}) = 1 - \sup_{x' \in X} \{\mu_{\tilde{R}_{dom}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - \mu_{\tilde{R}_{dom}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\} -$$

функция принадлежности нечеткого подмножества недоминируемых вариантов NX по нечеткому отношению доминирования $\tilde{R}_{dom}$ на множестве X. Значение функции $\mu_{ND}(\mathbf{x})$ характеризует степень недоминируемости варианта $\mathbf{x}$. Если $\mu_{ND}(\mathbf{x}_0) \geq \beta$, то в множестве X отсутствуют варианты, которые доминируют вариант $\mathbf{x}_0$, со степенью принадлежности, большей, чем $1 - \beta$.

Задача Г — задача нечеткого математического программирования в наиболее общей постановке, которая описывается нечеткой целевой функцией $\tilde{f}(\mathbf{x})$ и нечеткими функциями $\tilde{g}_q(\mathbf{x})$, $q = 1, \ldots, p$, определяющими ограничения на нечеткое множество допустимых вариантов G. Решение обобщенной задачи Г ищется с применением разнообразных приемов решения задач типа А — В и их комбинаций. К задачам этого типа относится также задача нечеткого математического программирования с ограничениями в виде равенств и/или неравенств $g_q(\mathbf{x}) \le b_q$, в которых параметры функций $g_q(\mathbf{x})$ и постоянные b_q заданы как нечеткие множества.

При решении задачи Г, наряду с нечетким отношением доминирования $\tilde{R}_{dom}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_{dom}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ вида (12.5), необходимо принимать во внимание еще одно отношение — нечеткое отношение допустимости $\tilde{R}_{feas}$, заданное на множестве вариантов X с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_{feas}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ при $\mu_G(\mathbf{x}_1) \ge \mu_G(\mathbf{x}_2)$ и $\mu_{\tilde{R}_{feas}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ при $\mu_G(\mathbf{x}_1) < \mu_G(\mathbf{x}_2)$. Отношение $\tilde{R}_{feas}$ предписывает выбирать в первую очередь варианты, которые имеют бо́льшую степень допустимости, оцениваемую значением функции $\mu_G(\mathbf{x})$.

Для учета противоречивых требований, налагаемых нечеткими функциями ограничений $\tilde{g}_q(\mathbf{x})$, можно воспользоваться различными схемами компромисса, которые приняты в методах детерминированной многокритериальной оптимизации, рассмотренных в гл. 8 и 9. В их числе компенсация и разные виды свертки функций $\tilde{g}_q$ с учетом их относительной важности; введение жесткого и гибкого приоритета функций $\tilde{g}_q$ с установлением допустимых отклонений (уступок); взвешенное равенство и квазиравенство функций $\tilde{g}_q$; выделение главной функции; упорядочение функций $\tilde{g}_q$ по предпочтительности или в лексикографическом порядке; задание на множестве функций $\tilde{g}_q$ опорных точек с желательными для ЛПР значениями и другие процедуры. С помощью подобного рода приемов обеспечивается сужение множества допустимых вариантов, а также в ряде случаев выполняется трансформация многих нечетких ограничений в единственное ограничение.

В качестве примера использования четких множеств α-уровня рассмотрим, как снять нечеткость постановки задачи нечеткой скалярной оптимизации с одним нечетким ограничением:

$$f(\mathbf{x}, \tilde{c}_i) \to \max_{x \in X}, \quad g(\mathbf{x}, \tilde{a}_i) \le \tilde{b}. \tag{12.6}$$

В частности, в задаче нечеткого линейного программирования функции f и g линейны: $f(\mathbf{x}, \tilde{c}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{c}_i x_i$, $g(\mathbf{x}, \tilde{a}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_i x_i$. Здесь параметры (коэффициенты) $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}_i$ являются нечеткими числами, т. е. нечеткими множествами $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}_i$, описываемыми соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}_i}(\mathbf{x})$, $\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x})$, $\mu_{\tilde{C}_i}(\mathbf{x})$ на множестве вариантов X.

Перейдем от нечетких множеств $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}_i$ к четким множествам α-уровня. Тогда каждое нечеткое число заменяется совокупностью четких чисел. Так, нечеткому множеству $\tilde{B} = \{\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x})/\mathbf{x}\}$, $x_i \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$, $i = 1, \dots, n$, выражающему нечеткий параметр $\tilde{b}$, сопоставляется объединение четких чисел $b(\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot B_\alpha)$, $B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$. Аналогичным образом нечеткие параметры $\tilde{a}_i$ и $\tilde{c}_i$ заменяются объединениями четких чисел $a_i(\alpha)$ и $c_i(\alpha)$.

После всех замен единственная задача нечеткого математического программирования (12.6) сводится к набору обычных задач математического программирования вида (12.4), зависящих от выбранного уровня α:

$$\mathbf{x}^*(\alpha) \in \arg \max_{x \in X^a} \min_{c_i(\alpha)} f(\mathbf{x}, c_i(\alpha)),$$

$$X^a = \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{x} \in \arg[\max_{a_i(\alpha)} g(\mathbf{x}, a_i(\alpha)) \le \min_{b(a)} b(\alpha)]\},$$

где $f\colon X \to \mathbf{R}$ и $g\colon X \to \mathbf{R}$ — действительные функции.

Оптимальный вариант $\mathbf{x}^*(\alpha)$ реализует максиминный принцип гарантированного результата, обеспечивающий получение наилучшего решения задачи при наихудших значениях параметров $a_i(\alpha), b(\alpha), c_i(\alpha)$, где величина α служит оценкой точности аппроксимации исходной неточной информации.

Отметим, что описание нечеткости постановки задачи математического программирования при помощи функций принадлежности нечетких множеств позволяет применять для решения задачи обычные методы программирования. Использование же множеств α-уровня фактически превращает задачу нечеткого математического программирования в задачу многокритериального выбора. ЛПР должно сравнить разные оптимальные варианты $\mathbf{x}^*(\alpha)$, получающиеся при различной заданной точности аппроксимации α, и выбрать наилучший вариант. По существу одна сложная задача оптимального выбора заменяется другой, не менее сложной.

12.5. Нечеткая многокритериальная оптимизация

Задача нечеткой многокритериальной оптимизации в общем случае характеризуется несколькими частными целевыми функциями (критериями) $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, h$, и несколькими ограничениями — системой равенств и/или неравенств $g_q(\mathbf{x}) \leq b_q$, $q = 1, \ldots, p$, определяющих множество допустимых вариантов X^a. Как и в задачах А — Г нечеткого математического программирования, возможны различные комбинации четких и нечетких элементов задач нечеткой многокритериальной оптимизации, которые определяют разные виды таких задач.

Проблема многокритериальности оптимального выбора, состоящая в практической невозможности одновременной максимизации h различных функций:

$$f_j(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X^a},$$

$j = 1, \ldots, h$, $f_j \colon X \to \mathbf{R}$, обсуждалась в гл. 8 применительно к детерминированным условиям. Эта проблема сохраняет свою актуальность и в нечеткой среде. Как и в четкой постановке, чтобы найти оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ задачи нечеткой многокритериальной оптимизации, необходимо тем или иным образом переформулировать задачу, используя дополнительную информацию.

Если считать, что нечеткие множества целей $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_h$ определяются нечеткими целевыми функциями $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_h$, а нечеткие множества ограничений $\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_p$ — нечеткими функциями $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_p$, то задача многокритериального нечеткого выбора лучшего варианта совпадает с задачей достижения нечетко поставленной цели, решение которой дано формулами (12.1) и (12.2). Заметим, что выражение (12.2) по смыслу аналогично результатам решения задач многокритериального оптимального выбора (8.8).

При оперировании с несколькими нечеткими функциями цели $\tilde{f}_j$, $j = 1, \ldots, h$, и ограничений $\tilde{g}_q$, $q = 1, \ldots, p$, могут применяться также различные процедуры исключения и компенсации, аналогичные изложенным в гл. 8, 9. Часть таких схем и приемов компромисса, относящихся к ограничениям $\tilde{g}_q$, уже упоминалась в предыдущем разделе. Покажем, как будут выглядеть некоторые из постановок задач нечеткой многокритериальной оптимизации, ограничившись рассмотрением целевых функций $\tilde{f}_j$ и пока явно не учитывая ограничения $\tilde{g}_q$. Для простоты, там где это не вызовет разночтений, будем считать, что множество допустимых вариантов X^a совпадает с универсальным множеством вариантов X. Заметим, что сведение нечеткой задачи к четкой позволяет использовать для решения нечеткой задачи многие методы обычной многокритериальной оптимизации.

Нечеткое множество недоминируемых достижимых целей NF и соответствующее нечеткое множество недоминируемых вариантов NX строится (аналогично способам из разд. 8.2 и 9.2) следующим образом.

1. ЛПР задает либо некоторые начальные значения четких целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y_j^0$, либо начальные значения функций принадлежности $\mu_{f_j}(\mathbf{x}) = \mu_{f_j}^0$ нечетких целевых функций $\tilde{f}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, h$. После этого решается либо h однокритериальных задач нечеткого программирования типа А, Б, В или Г, либо задача

$$\mu_{f_j}(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X},$$

$$\mu_{f_k}(\mathbf{x}) = \mu_{f_k}^0, \quad k \neq j, \quad k = 1, \ldots, h,$$

решениями которых являются h вариантов $\mathbf{x}_{(j)}^{*1} = (x_{(j)1}^{*1}, \ldots, x_{(j)n}^{*1})$ и соответствующие целевые функции $\tilde{f}_j$ с функциями принадлежности $\mu_{f_j}(\mathbf{x}_{(j)}^{*1}) = \mu_{f_j}^1$, дающие первое приближение нечетких множеств NX^1 и NF^1.

2. ЛПР анализирует полученное решение задачи и задает новые значения либо частных целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y_j^1$, либо функций принадлежности $\mu_{f_j}(\mathbf{x}) = \mu_{f_j}^1$, $j = 1, \ldots, h$. Снова решается h однокритериальных задач оптимизации и находятся h вариантов $\mathbf{x}_{(j)}^{*2} = (x_{(j)1}^{*2}, \ldots, x_{(j)n}^{*2})$ и целевые функции $\tilde{f}_j$ с функциями принадлежности $\mu_{f_j}(\mathbf{x}_{(j)}^{*2}) = \mu_{f_j}^2$, которые дают второе приближение нечетких множеств NX^2 и NF^2. Процедура продолжается до получения множества достижимых целей NF и соответствующего множества вариантов NX, удовлетворяющих ЛПР.

При нечеткой условной оптимизации ЛПР устанавливает для каждой нечеткой частной целевой функции $\tilde{f}_j$ и ограничивающей функции $\tilde{g}_q$ минимально допустимые пороговые уровни функций принадлежности $\mu_{f_j}^0, \mu_{g_q}^0$ и указывает главный для себя критерий, например $\tilde{f}_k$. Аналогично четкому случаю (см. разд. 8.6, 9.4), ищется решение задачи однокритериальной оптимизации

$$\mathbf{x}^{*1} \in \arg \max_{x \in X_k} \mu_{f_k}(\mathbf{x})$$

на множестве X_k, которое задается дополнительными ограничениями $\mu_{f_j}(\mathbf{x}) \geq \mu^0_{f_j}$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots, h$, и $\mu_{g_q}(\mathbf{x}) \geq \mu^0_{g_q}$, $q = 1, \ldots, p$. ЛПР анализирует полученное решение $\mathbf{x}^{*1}_{(j)} = (x^{*1}_{(j)1}, \ldots, x^{*1}_{(j)n})$ и значения функций принадлежности частных целевых функций $\mu_{f_1}(\mathbf{x}^{*1}_{(j)}), \ldots, \mu_{f_h}(\mathbf{x}^{*1}_{(j)})$. Если они удовлетворяют ЛПР, то задача решена.

Если эти результаты не удовлетворяют ЛПР, то ЛПР ослабляет требования, вводя другие пороговые уровни $\mu^1_{f_j}, \mu^1_{g_q}$ и/или указывая иную частную целевую функцию $\tilde{f}_s$ в качестве главного критерия. Процедура решения продолжается до получения приемлемого для ЛПР результата.

При нечеткой последовательной оптимизации ЛПР упорядочивает все частные целевые функции $\tilde{f}_j$, $j = 1, \ldots, h$, и/или ограничения $\tilde{g}_q$, $q = 1, \ldots, p$, по важности или в лексикографическом порядке, например, как $\tilde{f}_1 \succ \tilde{f}_2 \succ \ldots \succ \tilde{f}_h$, $\tilde{g}_1 \succ \tilde{g}_2 \succ \ldots \succ \tilde{g}_p$. Как и в четком случае (см. разд. 8.6), решение задачи многокритериальной оптимизации заменяется последовательным решением однокритериальных задач вида $f_j(\mathbf{x}) \to \max\limits_{x \in X_{j-1}}$ или $\mu_{f_j}(\mathbf{x}) \to \max\limits_{x \in X_{j-1}}$ на постепенно сужаемом множестве X_{j-1} допустимых решений, которое образуется из оптимальных решений $\mathbf{x}^*_{(j)}$, полученных на предыдущем $(j-1)$-м шаге.

Рассмотрим теперь ситуацию нечеткого выбора, где общая целевая функция $\tilde{f}(\mathbf{x})$ задана как свертка нечетких частных целевых функций $\tilde{f}_j(\mathbf{x})$, имеющих для ЛПР разную важность $w_j > 0$, $\sum\limits_j w_j = 1$. В нечетком случае имеется большое разнообразие видов сверток. Так, возможна аддитивная свертка в виде взвешенной суммы $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{h} w_j \tilde{f}_j(\mathbf{x})$ с функцией принадлежности $\mu_f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^h w_j \mu_{f_j}(\mathbf{x})$, мультипликативная свертка в виде взвешенных произведений $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{j=1}^{h} w_j \tilde{f}_j(\mathbf{x})$ и $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \prod\limits_{j=1}^{h} [\tilde{f}_j(\mathbf{x})]^{w_j}$ с функциями принадлежности $\mu_f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^h w_j \mu_{f_j}(\mathbf{x})$, $\mu_f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^h [\mu_{f_j}(\mathbf{x})]^{w_j}$, свертка в виде взвешенных пересечений $\tilde{f}(\mathbf{x}) = w_1 \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \cap \ldots \cap w_h \tilde{f}_h(\mathbf{x})$ и $\tilde{f}(\mathbf{x}) = [\tilde{f}_1(\mathbf{x})]^{w_1} \cap \ldots \cap [\tilde{f}_h(\mathbf{x})]^{w_h}$ с функциями принадлежности

$$\mu_f(\mathbf{x}) = \min\{w_1\mu_{f_1}(x), \ldots, w_h\mu_{f_h}(x)\},$$
$$\mu_f(\mathbf{x}) = \min\{[\mu_{f_1}(x)]^{w_1}, \ldots, [\mu_{f_h}(x)]^{w_h}\}.$$

Здесь $\mu_{f_j}(\mathbf{x})$ — функция принадлежности частной целевой функции $\tilde{f}_j(\mathbf{x})$. Существование подобного рода нечетких функций $\tilde{f}(\mathbf{x})$ вытекает из операций взвешенного сложения и взвешенного умножения нечетких множеств, умножения любого нечеткого множества на число b, $0 \le b \le 1$, возведения нечеткого множества в степень $c > 0$.

Тогда задача нечеткой многокритериальной оптимизации сводится к следующей однокритериальной задаче:

$$\mu_f(\mathbf{x}) \to \max_{x \in X_e},$$

где множество недоминируемых решений NX ищется на множестве парето-оптимальных вариантов X_e, построенных с учетом четких или нечетких ограничений $g_q(\mathbf{x})$. Для определения важности частных критериев w_j можно воспользоваться одним их прямых способов (см. разд. 8.3) или человеко-машинной процедурой замещения критериев по важности (см. разд. 9.3). Полученный результат предъявляется ЛПР для анализа.

Поиск вариантов с заданными нечеткими характеристиками предполагает, что ЛПР заранее указывает желательные для него значения частных целевых функций $f_j(\mathbf{x}) = y_j^0$ или функций принадлежности $\mu_{f_j}(\mathbf{x}) = \mu_{f_j}^0$, $j = 1, \ldots, h$, которые определяют четкую $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \ldots, y_h^0)$ или нечеткую $\tilde{\mathbf{y}}^0$ опорную точку. В частности, такими точками могут быть точки утопии и антиутопии, которые имеют, соответственно, максимальные и минимальные значения координат $y_j^{\max}, y_j^{\min}$ и функций принадлежности $\mu_{f_j}^{\max}, \mu_{f_j}^{\min}$. Кроме этого ЛПР должно выбрать некоторую меру близости $d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0]$ между точками — одну из метрик действительного векторного пространства $\mathbf{R}^h$ вида (8.5) — (8.7).

Наиболее близкий к опорной точке вариант

$$\mathbf{x}^* \in \arg\min_{x \in X} d[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^0],$$

служащий решением задачи нечеткой многокритериальной оптимизации, ищется с учетом заданных ограничений на четком или нечетком множестве допустимых вариантов с помощью метода, аналогичного одному из методов последовательного приближения к опорной точке из разд. 9.6.

Для решения задач многокритериальной оптимизации в нечеткой среде часто используются итеративные человеко-машинные методы, в которых выявление предпочтений ЛПР происходит итеративно и одновременно с анализом множества допустимых значений и множества достижимых целей. Применение ЭВМ для сложных расчетов позволяет ЛПР получать дополнительную информацию, помогающую находить лучшие варианты решения.

12.6. Оптимальное управление в нечетких условиях

Рассмотрим одну из задач нечеткого многоэтапного выбора — задачу оптимального управления детерминированной системой в нечеткой среде, которая состоит в нахождении наиболее выгодного способа перевода системы из начального состояния s_0 в конечное состояние s_N. Эффективность перехода системы из одного состояния в другое определяется целевой функцией $y_i = f_i(s_{i-1}, x_i)$, зависящей от шагового управления x_i, которая задает однозначное отображение $f_i\colon S \times X \to S$, где $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$ — множество состояний системы; $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — множество управлений.

В нечетких условиях значение шагового управления x_i на i-м этапе или в t_i-й момент времени удовлетворяет нечеткому ограничению, которое является нечетким подмножеством G_i множества управлений X с функцией принадлежности $\mu_{G_i} : X \to [0, 1]$. Нечеткая цель управления, состоящая в переводе системы в конечное состояние s_N, представляет собой еще одно нечеткое ограничение на состояние s_N и задается нечетким подмножеством F_N множества состояний системы S с функцией принадлежности $\mu_{F_N} : S \to [0, 1]$. Требуется найти последовательность управлений $x_1, \ldots, x_N$, которая удовлетворяет нечетким ограничениям $G_1, \ldots, G_N$ и обеспечивает максимально возможную степень достижения нечеткой цели F_N.

Аналогично задаче четкого оптимального управления (см. разд. 10.4) конечное состояние системы можно выразить через все шаговые управления $s_N = h(s_0, x_1, \ldots, x_N)$ путем решения системы уравнений типа (10.5)

$$s_i = h_i(s_{i-1}, x_i). \tag{12.7}$$

В таком случае множество состояний системы S можно рассматривать как подмножество множества $X \times \ldots \times X$ (N раз), а нечеткое подмножество цели F_N считать нечетким подмножеством множества $X \times \ldots \times X$.

Согласно подходу Беллмана—Заде, нечеткое решение D задачи достижения нечеткой поставленной цели представляется функцией принадлежности вида

$$\mu_D(x_1, \ldots, x_N) = \min\{\mu_{F_N}(s_N), \mu_{G_1}(x_1), \ldots, \mu_{G_N}(x_N)\}.$$

Оптимальное управление $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, имеющее наибольшую степень принадлежности нечеткому решению, характеризуется значением

$$\mu_D(x_1^*, \ldots, x_N^*) = \max_{x_1, \ldots, x_N} \min\{\mu_{F_N}(s_N), \mu_{G_1}(x_1), \ldots, \mu_{G_N}(x_N)\}. \tag{12.8}$$

Для поиска оптимального управления $x_1^*, \ldots, x_N^*$ воспользуемся общей схемой метода динамического программирования. Запишем выражение (12.8) с учетом равенства (12.7) в виде

$$\mu_D(x_1^*, \ldots, x_N^*) = \max_{x_1 \ldots, x_{N-1}} \max_{x_N} \min\{\mu_{F_N}[h_N(s_{N-1}, x_N)], \mu_{G_1}(x_1), \ldots, \mu_{G_N}(x_N)\}. \tag{12.9}$$

Нетрудно убедиться, что для произвольной функции $\varphi(x)$ и любого ψ, не зависящего от x, справедливо следующее соотношение:

$$\max_x \min\{\varphi(x), \psi\} = \min\{\max_x \varphi(x), \psi\}.$$

С помощью этого соотношения перепишем (12.9) в форме:

$$\mu_D(x_1^*, \ldots, x_N^*) = \max_{x_1, \ldots, x_{N-1}} \min\{\mu_{F_{N-1}}(s_{N-1}), \mu_{G_1}(x_1), \ldots, \mu_{G_{N-1}}(x_{N-1})\}. \tag{12.10}$$

Здесь

$$\mu_{F_{N-1}}(s_{N-1}) = \max_{x_N}\{\mu_{F_N}[h_N(s_{N-1}, x_N)], \mu_{G_N}(x_N)\}$$

представляет собой функцию принадлежности нечеткой цели управления F_{N-1} на этапах $1, \ldots, N-1$, соответствующей цели управления F_N на этапах $1, \ldots, N$. Соотношение (12.10) определяет максимальную степень достижения нечеткой цели F_N при воздействии выбранного управления $x_N(s_{N-1})$ и условии, что на

$(N-1)$-м этапе система находилась в состоянии s_{N-1}. Выражение (12.10) является нечетким аналогом рекуррентного уравнения Беллмана (10.7), которое связывает условно оптимальные выигрыши на предыдущем и последующих этапах процесса управления детерминированной системой.

Поскольку $s_{N-1} = h_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1})$, то значение функции принадлежности $\mu_{F_{N-1}}[h_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1})]$ будет также оценкой максимальной степени достижения нечеткой цели F_N в результате выбора управления $x_{N-1}(s_{N-2})$ при условии, что на $(N-$ $-2)$-м этапе система была в состоянии s_{N-2}. Управление $x_{N-1}(s_{N-2})$ выбирается так, чтобы обеспечить наибольшее из возможных значение функции

$$\mu_{F_{N-2}}(s_{N-2}) = \max_{x_{N-1}}\{\mu_{F_{N-1}}[h_{N-1}(s_{N-2}, x_{N-1})], \mu_{G_{N-1}}(x_{N-1})\},$$

которое оценивает максимальную степень достижения заданной цели F_{N-1} из состояния s_{N-2}.

Продолжая эти рассуждения последовательно для этапов $N-2, \ldots, N-k, \ldots, 1$, получим набор рекуррентных соотношений вида

$$\mu_{F_{N-k}}(s_{N-k}) = \max_{x_{N-k+1}}\{\mu_{F_{N-k+1}}[h_{N-k+1}(s_{N-k}, x_{N-k+1})], \\ \mu_{G_{N-k+1}}(x_{N-k+1})\}, \tag{12.11}$$

с помощью которых определяется последовательность условно-оптимальных управлений

$$x_N(s_{N-1}), x_{N-1}(s_{N-2}), \ldots, x_1(s_0).$$

Двигаясь в обратном порядке от начального состояния s_0 к конечному состоянию s_N и пользуясь уравнением (12.7), находим оптимальное решение задачи управления:

$$x_1^* = x_1(s_0), \quad x_2^* = x_2(s_1) = x_2[h_1(s_0, x_1^*)],$$

$$x_3^* = x_3(s_2) = x_3[h_2(s_1, x_2^*)] = x_3[h_2(h_1(s_0, x_1^*), x_2^*)], \ldots$$

Максимально возможная степень достижения нечетко поставленной цели F_N задается значением функции принадлежности $\mu_D(x_1^*, \ldots, x_N^*)$.

12.7. Общая характеристика методов оптимального выбора

Понятия оптимальности и оптимального выбора, возникшие при решении специальных классов задач на поиск экстремума функции, сыграли важную роль в формировании современных системных представлений в различных сферах человеческой деятельности. Они широко распространились на практике и даже вошли в повседневную жизнь и обыденную речь. Основная идея оптимального выбора — поиск наилучшего в определенном смысле варианта решения при заданных ограничениях — содержит в себе одновременно и способ сравнения вариантов, исходя из вычисленных значений критерия или критериев качества решения, и правило выбора наилучшего варианта, заданное экстремальным значением критерия качества, и возможность замены лучшего варианта другим при изменении условий.

Оптимизационный подход обладает такими особенностями:

- для описания проблемы выбора используются математические модели, которые носят объективный характер, но в ряде случаев требуют учета субъективных оценок, которые даются человеком;
- существует один или несколько количественных показателей эффективности решения, по вычисляемым значениям которых можно сравнивать различные варианты и выбирать лучшие варианты;
- подход сравнительно прост при его применении и достаточно прозрачен. Он имеет теоретическое обоснование алгоритмов оптимизации и позволяет объяснить полученные результаты;
- интерактивные человеко-машинные методы оптимизации допускают непосредственное включение человека в процесс решения задачи выбора, поддерживают процедуры выявления и анализа предпочтений ЛПР, повышают доверие ЛПР к получаемым результатам.

Эти особенности оптимизационного подхода составляют его главные достоинства, но они же порождают и ряд недостатков, среди которых можно отметить следующие:

- содержательная постановка задачи оптимального выбора даже с единственным критерием эффективности по-прежнему остается скорее искусством, чем наукой. Одна и та же проблемная ситуация может быть представлена разными формальными моделями, при этом использование количественных критериев оптимальности не всегда адекватно отражает действительность;
- для определения области допустимых значений признаков требуется как можно более полно учесть все имеющиеся ограничения, что весьма затруднительно сделать на практике. Вместе с тем недостаточный учет ограничений может привести к непредсказуемым эффектам при решении задачи выбора;

- оптимальное решение хрупко и неустойчиво, оно сильно зависит от заданных ограничений, незначительное изменение которых может привести к другому оптимальному варианту, существенно отличающемуся от ранее полученного;
- локальная оптимизация по частным критериям не обязательно совпадает с глобальной оптимизацией в целом, а иногда может и не приводить к выбору глобально лучшего варианта;
- в задачах многокритериальной оптимизации ЛПР приходится выполнять не всегда обоснованные и трудные для человека операции, связанные с назначением весов критериев, выбором пороговых оценок по критериям, заданием величин отклонений оценок, сравнением векторов значений переменных и векторов целевых функций, учетом неопределенности и нечеткости используемой информации. При выборе наилучшего варианта нередко возникает необходимость компромисса, который не всегда может быть объективен и однозначен. В то же время человек практически лишен права на неточность или ошибку, наличие которых может заметно повлиять на окончательный результат;
- в эвристических человеко-машинных методах решения оптимизационных задач существует проблема сходимости итеративных процедур, связанная с неформализуемым характером изменений параметров задачи, которые производятся ЛПР. И поскольку весьма трудно предусмотреть все последствия таких действий, наилучшее решение может оказаться пропущенным в процессе поиска и вернуться к нему не всегда удается.

Несмотря на указанные недостатки, методы нахождения оптимальных решений остаются одними из самых мощных и наиболее развитых средств решения широкого круга задач индивидуального выбора, позволяя в количественной форме обосновать предпочтительность выбранного варианта. Для различных модификаций многих методов программирования разработаны разнообразные пакеты прикладных программ, многие из которых входят в стандартный набор программного обеспечения для современных персональных компьютеров и стали сейчас доступными через Интернет.

* * *

Рекомендуемая литература: [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [26], [27], [30], [33], [34], [42], [43], [46], [49], [50], [52], [53], [54], [55], [67], [68], [69].

ЧАСТЬ III
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 13
РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР

13.1. Понятие рационального выбора

Одним из краеугольных камней современной теории принятия решений служит постулат рациональности (от лат. *ratio* — разум) предпочтений человека при индивидуальном выборе лучшего варианта. Считается, что каждый человек должен иметь свое собственное (реальное или воображаемое, явное или неявное) представление о ценности сравниваемых вариантов, свой собственный «измеритель ценности». И ЛПР, делая свой выбор, интуитивно или осознанно стремится получить в конечном итоге наиболее выгодный для себя результат. Тем самым в понятие рационального выбора включается так или иначе понимаемое понятие оптимальности, хотя само это понятие уже не является определяющим.

Рациональность выбора предполагает также его субъективность. Вариант решения, наилучший или приемлемый для одного, может не быть таковым для другого. У каждого человека есть свои собственные предпочтения, на основании которых он сравнивает варианты и выбирает из них наиболее предпочтительный для себя вариант. С необходимостью учета субъективных предпочтений ЛПР при выборе лучшего варианта мы уже сталкивались в задачах многокритериальной оптимизации и вероятностного выбора.

Использование полученной от ЛПР информации о различных аспектах сравниваемых вариантов в процедурах исключения и компенсации критериев позволяет последовательно сужать область допустимых значений переменных и в ряде случаев находить наилучшие решения задачи. Аналогичные процедуры исключения и компенсации критериев широко используются и при рациональном выборе. Сначала из имеющегося множества вариантов тем или иным образом выделяется подмножество недоминируемых вариантов, а затем это подмножество последовательно сужается с учетом предпочтений ЛПР.

Вместе с тем ЛПР, как и любой человек, может вести себя непоследовательно, ошибаться в своих оценках и выводах, противоречить самому себе. Подобное поведение обусловлено различными причинами, в частности трудностью анализируемой ситуации, недостатком и/или недостоверностью имеющейся информации, дефицитом времени, недостаточной опытностью человека и/или ограниченностью его мышления, непреднамеренным заблуждением, усталостью и невнимательностью, индивидуальными склонностями человека завышать или занижать свои оценки, рисковать или быть осторожным в суждениях и т. п. Считается, что такого рода ошибки и противоречия не согласуются с понятием индивидуальной рациональности и потому должны выявляться и устраняться в процессе решения задачи. В то же время при групповом принятии решения необходимо стремиться к компромиссу при агрегировании несовпадающих предпочтений нескольких ЛПР.

13.2. Задача рационального выбора

Задачи рационального выбора обычно возникают в уникальных и повторяющихся проблемных ситуациях, обладающих особенностями плохо структурируемых проблем, а именно:

- отсутствует формализованная модель проблемной ситуации, которую бывает трудно или невозможно построить из-за сложности ситуации, отсутствии необходимой информации и т. п.;
- имеется большая неопределенность при формировании перечня всех возможных вариантов решения проблемы, а сами варианты могут описываться и количественными, и качественными показателями с преобладанием последних;
- отсутствуют одинаково понимаемые и формализуемые критерии для сравнения и выбора вариантов;
- наиболее предпочтительный (наилучший) результат выбора определяется субъективными предпочтениями ЛПР.

Задача рационального выбора состоит в следующем. Имеется несколько реально существующих или гипотетически возможных вариантов (объектов, альтернатив) $A, \dots, A_m$, число которых может быть как конечным, так и бесконечным. Варианты заданы изначально или могут появляться в процессе решения задачи. Каждый вариант оценивается по единственному или многим критериям $K_1, \ldots, K_n$, имеющим числовые или вербальные, непрерывные или дискретные шкалы оценок $X_q = \{x_q^1, \ldots, x_q^s\}$, $q = 1, \ldots, n$. Порядковые шкалы обычно предполагаются упорядоченными, например от лучших градаций оценок к худшим. Варианту A_i сопоставляется n-мерный вектор или кортеж оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, либо одна $v(x_i)$ или n целевых функций $v_q(\tilde{x}_{iq})$, где $x_{iq} = K_q(A_i)$ — оценка варианта A_i по q-му критерию K_q. Совокупности вариантов соответствует допустимое множество $X^a = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $X^a \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Основываясь на предпочтениях ЛПР и используя всю имеющуюся информацию, требуется решить одну из следующих задач: 1) выделить лучшие варианты; 2) упорядочить все варианты от лучшего к худшему; 3) отнести каждый вариант к одному из заранее указанных классов решений. Главная сложность при решении задачи рационального выбора заключается в выявлении и формализации предпочтений ЛПР.

Модель рационального выбора отражает предпочтения конкретного ЛПР и тем самым всегда носит субъективный характер. Эта модель может иметь формализованное представление и состоять из некоторых определенных требований или правил описания вариантов, процедур их сравнения и выделения лучших вариантов, может задаваться функциональными зависимостями либо быть неформальной. Обычно предполагается, что для вариантов выполняется *условие постоянства свойств*, или *аксиома независимости* от посторонних вариантов, а именно: оценки каждого варианта и/или результаты сравнения двух вариантов не должны зависеть от наличия или отсутствия других вариантов.

В ряде случаев задается условие независимости критериев $K_1, \ldots, K_n$ по предпочтению, устанавливающее независимость результатов попарного сравнения вариантов по отдельным критериям от одинаковых оценок по другим критериям. Это условие состоит в следующем. Пусть два варианта различаются оценками по некоторому критерию K_q, причем $x_q^s \succ x_q^t$, а по остальным критериям оценки вариантов совпадают. Если из доминирования векторов/кортежей оценок

$$(x_1, \ldots, x_q^s, \ldots, x_p^u, \ldots, x_n) \geq_X (x_1, \ldots, x_q^t, \ldots, x_p^u, \ldots, x_n)$$

для оценок x_q^s, x_q^t по критерию K_q и оценки x_p^u по какому-то другому критерию K_p следует доминирование векторов

$$(x_1, \ldots, x_q^s, \ldots, x_p^v, \ldots, x_n) \geq_X (x_1, \ldots, x_q^t, \ldots, x_p^v, \ldots, x_n)$$

для всех других оценок x_p^v и любых критериев K_p, $p = \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$, то критерий K_q называется *независимым по предпочтению* от остальных критериев. Здесь знаком $\geq$ обозначено отношение доминирования и векторов, и кортежей.

Имеются разные подходы к формализации модели рационального выбора. Одной из наиболее распространенных является функциональная модель рационального выбора, выражаемая монотонной действительной функцией ценности или полезности, которая достигает минимального и максимального значений на множестве допустимых вариантов. Лучшим считается тот вариант, чья полезность выше. Тот или иной вид функции полезности определятся аксиомами общего характера и аксиомами рациональности суждений ЛПР. В теории экономического поведения Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна (1944) постулируется аксиоматика, обеспечивающая существование числовой функции, которая ассоциируется с мерой потребительских благ для ЛПР. П. Фишберн доказал (1964), что если на конечном множестве вариантов задан строгий слабый порядок (асимметричное и отрицательно транзитивное отношение), то существует аддитивная действительная функция, определяющая многомерную ценность (в случае определенности) или полезность (в случае неопределенности) вариантов. Аналогичное утверждение для бесконечного множества вариантов было доказано Г. Дебрё (1959). Ясно, что такая функция не является единственной.

Вместе с тем, как оказалось, не всегда возможно построить функциональную модель рационального выбора, которая и выражает, и количественно измеряет качество варианта. На практике и в многочисленных экспериментах было обнаружено, что принимаемые людьми решения не всегда соответствуют тем или иным аксиомам рациональности. Нередко люди ведут себя непоследовательно, противоречиво, прибегают при выборе к различным эвристикам.

Поэтому были предложены иные модели рационального выбора, не использующие понятие числовой функции ценности или полезности. Сформулированная Б. Руа аксиома ограниченной сравнимости (1968) позволяет сравнивать варианты, имеющие многокритериальные числовые оценки, по отношению к ограниченной пороговой предпочтительности. При этом допускается существование некоторых зон неопределенности, отличающихся оценками по критериям, в пределах которых предпочтения ЛПР сохраняют свой характер.

В методах вербального анализа решений, разработанных О. И. Ларичевым и другими, рациональность индивидуума означает транзитивность и непротиворечивость его суждений, которые проверяются по результатам многократных сравнений вариантов, отличающихся своими многокритериальными оценками на вербальных порядковых шкалах. Для построения решающих правил выбора применяются только такие операции преобразования информации, которые сохраняют качественный характер данных и допустимы с точки зрения их выполнимости человеком.

В теории функций выбора сужение исходного множества вариантов до небольшого числа приемлемых осуществляется по определенным правилам с учетом имеющейся информации о свойствах вариантов и предпочтениях ЛПР. Возможность конструирования разнообразных механизмов выбора позволяет описывать как классически рациональные, так и иные модели выбора, допускающие, в частности, нетранзитивность предпочтений и отказ от выбора.

13.3. Классификация задач и методов рационального выбора

Классификация задач рационального выбора во многом сходна с классификацией задач оптимального выбора. Для описания проблемной ситуации, вариантов ее решения, критериев их оценки и предпочтений ЛПР используется *числовая* и *вербальная*, *объективная* и *субъективная*, *детерминированная*, *вероятностная* и *нечеткая* информация. По числу критериев различаются *однокритериальные* и *многокритериальные* задачи рационального выбора.

Существенное влияние на метод решения задачи оказывает принятая модель рациональности выбора. В зависимости от характера информации, используемой для измерения параметров вариантов, способов агрегирования и преобразования данных можно условно выделить следующие группы методов, основанных на измерении:

- количественных показателей и сравнении вариантов по числовому значению ценности вариантов;
- качественных показателей, которые переводятся в числовые оценки вариантов и числовые ценности вариантов;
- количественных показателей и сравнении вариантов без вычисления их числовой ценности;

• качественных показателей и сравнении вариантов без вычисления их числовой ценности.

К первой группе методов относятся эвристические и аксиоматические методы оценки ценности или полезности решений, представленные в гл. 14 и 15. В эту же группу можно условно включить и человеко-машинные методы многокритериальной оптимизации, описанные в гл. 9. Во вторую группу входят методы аналитической иерархии, изложенные в гл. 16. В первую и вторую группы можно условно отнести методы, основанные на использовании нечетких множеств (см. гл. 12). В третью группу включены методы многокритериального сравнения вариантов по ограниченной пороговой предпочтительности с применением специальных индексов согласованности предпочтений ЛПР, приведенные в гл. 17. Четвертую группу составляют методы вербального анализа решений, рассмотренные в гл. 18. Методы, использующие функции выбора, которым посвящена гл. 19, относятся к третьей и к четвертой группам.

Отмеченные особенности задач рационального выбора позволяют сформулировать следующие требования к методам их решения:

• максимальная приближенность к естественному языку описания проблемной ситуации и выражения предпочтений ЛПР;

• математическая корректность, использование только таких математических и логических процедур при обработке соотношений и зависимостей, которые являются допустимыми для соответствующих количественных и качественных переменных;

• психологическая обоснованность, соответствие возможностям и особенностям человека при переработке информации, в частности проверка полученной от человека субъективной информации на противоречивость, поиск и исключение противоречий при индивидуальном выборе, учет и использование противоречивых субъективных суждений при коллективном выборе;

• «прозрачность» для ЛПР, возможность с его стороны контролировать все этапы процесса решения задачи, получать объяснения конечного и промежуточных результатов.

Многие из современных методов рационального выбора реализуются в виде интерактивных и итеративных человеко-машинных процедур, попеременно выполняемых ЛПР и ЭВМ. Это обусловлено необходимостью обязательного участия человека в процессе решения задачи и сложностью используемых для обработки информации операций.

ГЛАВА 14
ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

14.1. Эвристический подход к выбору вариантов

Достаточно широкое распространение на практике получили эвристические методы рационального выбора, основанные на функциональной модели в виде действительной функции, которая характеризует в случае определенности ценность $v(A_i)$ или в случае вероятностной неопределенности полезность $u(A_i)$ варианта A_i для ЛПР.

Предполагается, что ЛПР может оценить ценность/полезность каждого варианта $A_1, \ldots, A_m$ по многим количественным критериям $K_1, \ldots, K_n$ с помощью частных числовых функций ценности $v_q(A_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, n$. Общая ценность $v(A_i)$ варианта A_i либо количественно оценивается непосредственно самим ЛПР или группой экспертов, либо тем или иным образом вычисляется, используя полученную от ЛПР информацию. При этом никак не обосновывается ни вид общей функциональной зависимости $v(A_i) = F(v_1(A_i), \ldots, v_n(A_i))$ ценности $v(A_i)$ от оценок по частным критериям, ни способы измерения входящих в функцию показателей.

Сопоставление каждому варианту A_i его числовой ценности $v(A_i)$ позволяет ЛПР очень просто проводить сравнение вариантов по предпочтительности: вариант A_i предпочтительнее варианта A_j ($A_i \succ A_j$), тогда и только тогда, когда $v(A_i) > v(A_j)$, и варианты A_i и A_j равноценны ($A_i \approx A_j$), если $v(A_i) = v(A_j)$.

Сравнивая варианты A_i по их ценности $v(A_i)$, можно упорядочить варианты или найти лучший вариант, имеющий максимальную ценность.

Если задана ранжировка $r_1 < r_2 < \ldots < r_m$ вариантов $A_1, \ldots, A_m$, то функция $m - r_i$, где r_i — ранг варианта A_i, определяемый формулой (3.1), является одной из простейших функцией ценности. Действительно, если $m - r_i \leq m - r_j$, то $A_i \succeq A_j$.

В зависимости от способа определения общей ценности варианта выделим группы методов прямой оценки вариантов:

- вычисление общей ценности по заданной формуле;
- поиск компромисса между отдельными частными ценностями.

14.2. Вычисление общей ценности по заданной формуле

Вычисление общей ценности $v(A_i)$ варианта A_i как некоторого функционала

$$v(A_i) = F(v_1(A_i), v_2(A_i), \ldots, v_n(A_i)),$$

зависящего от многих частных функций ценности $v_q(A_i)$, вид которого и все его параметры задаются ЛПР или экспертами, является одним из самых популярных эвристических подходов, широко применяемым на практике.

Часто общая функция ценности задается с помощью *аддитивной свертки* частных функций ценности в виде так называемой взвешенной суммы

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} w_q v_q(A_i), \tag{14.1}$$

с помощью *мультипликативной свертки*

$$v(A_i) = \prod_{q=1}^{n} [a_q v_q(A_i)]^{w_q} \tag{14.2}$$

или *аддитивно-мультипликативной свертки* в виде полилинейной функции

$$\begin{aligned} v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} l_q v_q(A_i) + \sum_{q=1}^{n} \sum_{p>q} l_{qp} v_q(A_i) v_p(A_i) + \ldots + \\ + l_{1\ldots n} v_1(A_i) v_2(A_i) \ldots v_n(A_i). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Здесь $w_q > 0$ — вес q-го критерия, характеризующий его важность или значимость для ЛПР; $a_q > 0, l_q, l_{q\ldots p}$ — шкалирующие коэффициенты. Числовые значения $w_q, a_q, l_q, l_{q\ldots p}$ могут либо назначаться непосредственно ЛПР, либо рассчитываться по некоторой процедуре на основе оценок ЛПР. Обычно при аддитивной свертке считается, что веса частных критериев нормированы условием $\sum_q w_q = 1$.

Во многих задачах выбора задается простейший вид частной функции ценности $v_q(A_i) = x_{iq}$, полагая ее просто равной числовой оценке $x_{iq} = K_q(A_i)$ варианта A_i по q-му частному критерию

K_q. Когда оценки варианта x_{iq} измеряются целыми числами, а все веса $w_q = 1$, метод взвешенной суммы называют балльным методом. В иных случаях полагают $v_q(A_i) = h \exp\{kx_{iq}\}$.

Типичными примерами общей функции ценности для $n = 2$ являются:

$$v(A_i) = w_1 v_1(x_{i1}) + w_2 v_2(x_{i2}), \quad v(A_i) = [v_1(x_{i1})]^a [v_2(x_{i2})]^b,$$

$$v(A_i) = w_1 v_1(x_{i1}) + w_2 v_2(x_{i2}) + c[v_1(x_{i1})]^a [v_2(x_{i2})]^b.$$

Часто удобно перейти к величинам v'_q, нормированным в пределах $0 \le v'_q \le 1$, воспользовавшись, например, преобразованием $v'_q = (v_q - v_q^{\min})/(v_q^{\max} - v_q^{\min})$.

В ряде методов функция общей ценности варианта вводится в виде так называемой штрафной функции, оценивающей отклонение от заданных параметров, например от лучших значений $x_{iq}^{\max}$ по частным критериям:

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} [(x_{iq}^{\max} - x_{iq})/x_{iq}^{\max}],$$

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} [(x_{iq}^{\max} - x_{iq})/x_{iq}^{\max}]^2$$

или от худших значений $x_{iq}^{\min}$.

Для аргументации вывода о справедливости той или иной формулы, задающей общую функцию ценности варианта, обычно ссылаются на выполнение определенных условий, аналогичных используемым в методах многокритериальной оптимизации. В их числе могут выступать принципы равномерности, справедливого компромисса, выделения главного критерия, установления допустимых уступок и допустимых пороговых уровней, указания предельно возможных оценок (уровней притязания, идеальных точек) и др.

Так, при объяснении использования аддитивной свертки частные ценности трактуются как «весомость» отдельных составляющих некоторого целого. Применение мультипликативной свертки объясняют тем, что частные ценности можно ассоциировать с вероятностями достижения определенных целевых показателей. Однако во всех этих случаях, в том числе и в рассмотренных выше, ЛПР достаточно трудно обосновать выбор вида общей зависимости функции ценности от частных критериев, а сам выбор также не является однозначным.

14.3. Поиск компромисса между частными ценностями

Один из наиболее наглядных и простых способов задания ценности варианта — *прямое построение* частной функции ценности $v_q(A_i)$ по каждому q-му критерию K_q, взятому отдельно и независимо от других, которое проводится на основе получаемой от ЛПР информации. ЛПР указывает для числовой оценки $x_{iq} = K_q(A_i)$ каждого варианта A_i по q-му критерию K_q значение частной функции ценности $v_q(A_i) = v_q(x_{iq})$. Отмечая эти точки на плоскости (x_q, v_q) и соединяя их линией (рис. 14.1), строится график частной функции ценности v_q.

Чтобы найти общую функцию ценности $v(A_i)$ варианта A_i, можно воспользоваться одним из приведенных выше способов свертки частных функций ценности. Более сложные способы построения функции ценности основаны на поиске компромисса между оценками вариантов по частным критериям путем взаимной компенсации (замещения) их достоинств и недостатков.

Пусть некоторые варианты A_i и A_j эквивалентны для ЛПР по предпочтительности $A_i \approx A_j$, т. е. ЛПР все равно, какой из двух вариантов выбрать. В многокритериальном пространстве $K_1 \times \ldots \times K_n$ (рис. 14.2) варианты A_i и A_j, имеющие равные ценности $v(A_i) = v(A_j)$, представляются точками $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ и $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$. Соединив все точки, соответствующие эквивалентным вариантам, получим так называемые *поверхности (линии) безразличия*, или *поверхности равных ценностей/полезностей.*

Задание поверхностей безразличия определяет структуру предпочтений ЛПР в пространстве критериев. Для более предпочтительного варианта $A_k \succ A_i$ будет выполняться условие

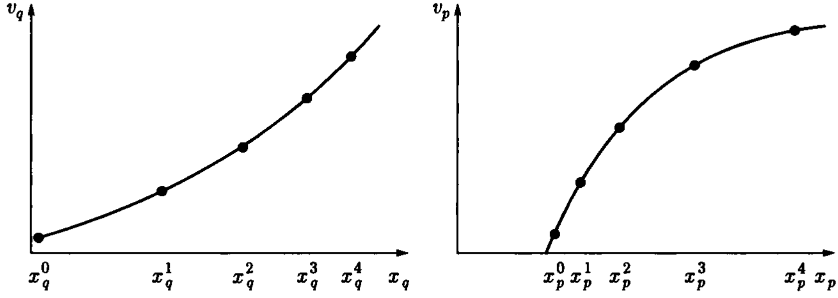
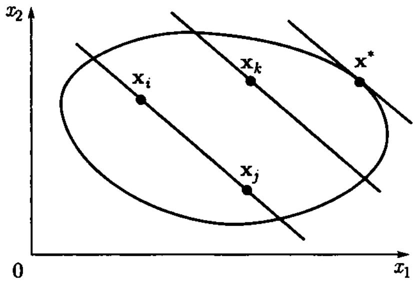


Рис. 14.1. Графики частных функций ценности

Рис. 14.2. Поверхности безразличия



$v(A_k) > v(A_i)$, а соответствующая ему точка $\mathbf{x}_k$ будет располагаться на более отдаленной от начала координат поверхности безразличия, чем точка $\mathbf{x}_i$ (считая, что оценки по частным критериям упорядочены от худших к лучшим). Если любые два варианта сравнимы и отношения $\approx$, $\succ$, $\succeq$, выражающие предпочтения ЛПР, транзитивны, то при заданной структуре предпочтений можно легко найти лучший вариант решения как вариант, лежащий на наиболее отдаленной от начала координат поверхности безразличия. Здесь наблюдается полная аналогия с парето-оптимальными решениями задач многокритериальной оптимизации, где ищется точка $\mathbf{x}^*$, максимизирующая значение целевой функции или показателя эффективности $f(\mathbf{x})$.

Функции ценности, имеющие поверхности безразличия одного и того же вида и дающие одно и то же упорядочение вариантов, называются *стратегически эквивалентными*. Так, стратегически эквивалентны функции

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} w_q x_{iq}, \quad v(A_i) = \left(\sum_{q-1}^{n} w_q x_{iq}\right)^{1/2},$$

$$v(A_i) = \ln\left(\sum_{q=1}^{n} w_q x_{iq}\right)$$

при условии, что критериальные оценки x_{iq} варианта A_i и веса w_q положительны для всех номеров критериев q.

Знание структуры предпочтений ЛПР позволяет проводить непосредственное построение функции ценности, используя *замещение критериев* по ценности. Укажем один из таких способов построения функции ценности, который получил название процедуры «зубья пилы», или двойной стандартной последовательности (рис. 14.3).

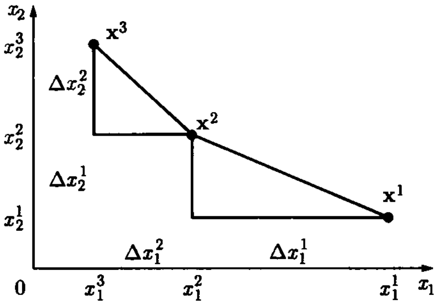


Рис. 14.3. Процедура «зубья пилы» для построения функции ценности

Для простоты рассмотрим случай двух критериев K_1 и K_2. Процедура построения функции ценности состоит из следующих этапов.

1. На плоскости двух критериев (x_1, x_2) ЛПР выбирает исходный вариант — точку $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$.

2. Один из критериев, например K_1, выделяется как основной, и ЛПР задает отклонение $\Delta x_1^1 = x_1^2 - x_1^1$ по этому критерию.

3. ЛПР указывает такое отклонение $\Delta x_2^1 = x_2^2 - x_2^1$ по второму критерию K_2, чтобы вариант $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2)$ был эквивалентен по предпочтению варианту $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$, т. е. чтобы $v(x_1^1, x_2^1) = v(x_1^2, x_2^2)$. Это означает, что точки $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ лежат на одной и той же линии безразличия.

4. ЛПР задает отклонение $\Delta x_1^2 = x_1^3 - x_1^2$ по первому критерию и ищет такое отклонение $\Delta x_2^2 = x_2^3 - x_2^2$ по второму критерию K_2, чтобы были эквивалентны варианты $(x_1^2, x_2^2) \approx (x_1^3, x_2^3)$ и $v(x_1^2, x_2^2) = v(x_1^3, x_2^3)$, и т. д.

5. Соединяются все точки, соответствующие эквивалентным вариантам, которые образуют линию безразличия.

Отношение $l^k = \Delta x_1^k / \Delta x_2^k$ называется *коэффициентом замещения*. Коэффициент замещения равен «количеству единиц», которое ЛПР согласно «заплатить» за увеличение Δx_2 по критерию K_2, чтобы компенсировать уменьшение Δx_1 по критерию K_1. Если коэффициенты замещения $l^k = l_0 = \text{const}$ и не зависят от выбора вариантов $\mathbf{x}^k$, то общая функция ценности имеет линейный вид:

$$v(A_i) = v(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1} + l_0 x_{i2}.$$

Линии безразличия будут тогда параллельными прямыми. Если коэффициенты замещения не зависят от оценок по первому критерию K_1, но зависят от оценок по второму критерию K_2, то общая функция ценности

$$v(A_i) = v(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1} + v_2(x_{i2}).$$

В этом случае линии безразличия будут параллельно сдвинутыми кривыми.

Построение функций ценности путем замещения критериев по ценности по своей идее аналогично компенсации критериев по относительной важности в методах многокритериальной оптимизации.

14.4. Совместное построение функций ценности

Более трудоемким для ЛПР является *совместное построение* функций ценности. Предполагается, что общая функция ценности варианта задается аддитивной функцией

$$v(A_i) = v(x_{i1}, x_{i2}) = v_1(x_{i1}) + v_2(x_{i2}).$$

Процедура построения функции ценности состоит из следующих этапов.

1. Устанавливается начало отсчета для измерений. Обозначаются наименьшие оценки по критериям $x_1^{\min} = x_1^0$, $x_2^{\min} = x_2^0$ и полагается $v(x_0) = v_1(x_1^0) = v_2(x_2^0) = 0$.

2. Устанавливается единица измерения. Выбирается бóльшая оценка x_1^1 по критерию K_1, чем оценка x_1^0, и полагается $v_1(x_1^1) = 1$.

3. Строится эквивалентный вариант. ЛПР указывает такое значение оценки x_2^1 по критерию K_2, чтобы варианты $(x_1^1, x_2^0) \approx$ $\approx (x_1^0, x_2^1)$ были эквивалентны по предпочтительности (рис. 14.4). В этом случае $v_2(x_2^1) = 1$.

4. ЛПР указывает такие значения оценок x_1^2 и x_2^2 по критериям K_1 и K_2, чтобы варианты $(x_1^2, x_2^0) \approx (x_1^1, x_2^1) \approx (x_1^0, x_2^2)$ были эквивалентны по предпочтительности. Полагается $v_1(x_1^2) =$ $= v_2(x_2^2) = 2$.

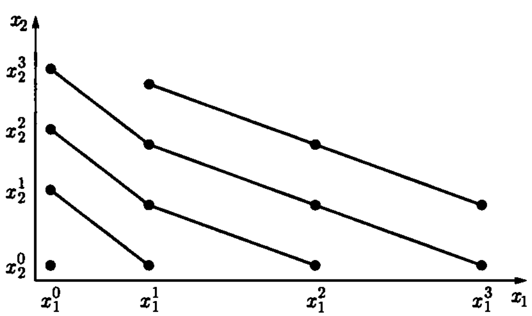


Рис. 14.4. Проверка эквивалентности вариантов

5. Поверяется эквивалентность по предпочтительности вариантов $(x_1^2, x_2^1) \approx (x_1^1, x_2^2)$. Если условие эквивалентности этих вариантов не выполняется, то, изменяя значения оценок x_1^2 и x_2^2, добиваются справедливости шагов 4 и 5.

6. Если шаги 4 и 5 выполнены, то ЛПР указывает такие значения оценок x_1^3 и x_2^3, чтобы варианты $(x_1^3, x_2^0) \approx (x_1^2, x_2^1) \approx$ $\approx (x_1^1, x_2^2) \approx (x_1^0, x_2^3)$ были эквивалентны по предпочтительности. Полагается $v_1(x_1^3) = v_2(x_2^3) = 3$.

7. Проверяется эквивалентность вариантов $(x_1^3, x_2^1) \approx$ $\approx (x_1^2, x_2^2) \approx (x_1^1, x_2^3)$. Если условие эквивалентности этих вариантов не выполняется, то, изменяя значения оценок x_1^3 и x_2^3, ЛПР добивается справедливости шагов 6 и 7.

8. Процедура продолжается до достижения максимальных значений $x_1^{\max}$ и $x_2^{\max}$ оценок по критериям K_1 и K_2.

9. Строятся графики частных функций ценности $v_q = v_q(x_q)$, $q = 1, 2$, по точкам $x_q^0, x_q^1, x_q^2, x_q^3, \ldots$, например, такие, как изображенные на рис. 14.1.

10. Выполняется контрольная проверка эквивалентности вариантов. Выбирается несколько значений оценок x_1^k и x_2^k таких, чтобы $v_1(x_1^k) = v_2(x_2^k) = k$, и проверяется эквивалентность для ЛПР вариантов $(x_1^k, x_2^0) \approx (x_1^0, x_2^k)$ при нескольких разных значениях k. Если условие эквивалентности этих вариантов в каких-либо случаях окажется нарушенным, то ЛПР нужно изменить значения функций ценности $v_1(x_1^k)$ и $v_2(x_2^k)$ на соответствующих графиках.

Используются и другие способы совместного построения функций ценности вариантов, например путем нахождения средней по ценности точки, лежащей в некотором интервале значений оценок по критерию.

Когда имеется больше двух критериев, проводится сравнение двух вариантов, которые различаются оценками только по двум каким-то критериям, а оценки по остальным критериям считаются одинаковыми. Тем самым от ЛПР требуется многократно устанавливать эквивалентность вариантов на плоскостях различных пар критериев, что является сложной для человека процедурой.

14.5. Способ Франклина, метод СМАРТ

Приведем примеры простых эвристических методов нахождения лучшего варианта решения. Первый способ применял Бенджамин Франклин, американский государственный деятель, один из авторов Декларации независимости США, философ, естествоиспытатель и журналист. Он известен также как автор многих афоризмов, в том числе такого: «Если ты за день не заработал ни цента, считай, что ты потратил день зря», который трансформировался теперь в популярный лозунг «Время — деньги!».

В способе Б. Франклина, который может считаться одним из первых методов принятия решений, выделение лучшего варианта производится путем исключения достоинств и недостатков различных вариантов, взаимно компенсирующих друг друга, и последующего анализа оставшейся информации. Вот что писал Б. Франклин в сентябре 1772 г., советуя своему другу, как следует принимать решения:

«Когда встречаются трудные случаи, то они трудны, главным образом, потому, что при их рассмотрении все доводы «за» и «против» не присутствуют в уме одновременно. Иногда присутствует одна часть, в другое время — иная, причем первая исчезает из вида. Следовательно, различные цели или склонности по очереди берут «верх» и появляется неопределенность, которая озадачивает нас. Мой путь преодоления этого состоит в том, чтобы разделить половину листа бумаги линией на два столбца: в одном писать доводы «за», а в другом — «против». Затем, после размышления в течение трех или четырех дней, я излагаю под другими заголовками короткие намеки на разные побуждения, которые в различные моменты времени приходят мне в голову и говорят «за» или «против» варианта действий.

Когда я имею все это вместе в поле зрения, я пытаюсь оценить их соответствующие веса. Если я найду два, каждый на другой стороне, которые кажутся равными, я их вычеркиваю. Если я нахожу довод «за», равный двум доводам «против», я вычеркиваю все три. Если я считаю, что некоторые два довода «за» равны трем доводам «против», я вычеркиваю все пять. Продолжая таким образом, я нахожу со временем, где находится баланс. И если через день или два дальнейших размышлений ничего нового не появляется на каждой стороне, я прихожу к соответствующей определенности»[1].

Еще один эвристический метод — СМАРТ (SMART — Simple Multi-Attribute Rating Technique, простой способ многомерно-

---

[1]Русский перевод письма Б. Франклина цитируется по книге: *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. — М. : Логос, 2002. — С. 106.

го упорядочения) предложен В. Эдвардсом (Великобритания, 1971). Метод основан на использовании взвешенной суммы частных ценностей и включает следующие этапы.

1. Формируется перечень $A_1, \ldots, A_m$ всех возможных вариантов решения проблемы и задается набор критериев их оценки $K_1, \ldots, K_n$, которые имеют одинаковую балльную шкалу в пределах от 1 до 5 (до 10, до 100).

2. ЛПР упорядочивает все критерии $K_1, \ldots, K_n$ по важности и указывает значимость s_q каждого критерия K_q в баллах. Самый важный критерий получает максимальный балл, а остальные критерии — меньшие баллы в зависимости от их важности.

3. Вычисляется вес q-го критерия K_q по формуле $w_q = s_q / \sum\limits_{j=1}^{n} s_j$.

4. ЛПР оценивает частные ценности $v_q(A_i)$ каждого варианта A_i по каждому q-му критерию K_q, используя введенную балльную шкалу.

5. Вычисляется общая ценность $v(A_i)$ каждого варианта A_i как взвешенная сумма частных ценностей, определяемая формулой (14.1): $v(A_i) = \sum\limits_{q=1}^{n} w_q v_q(A_i)$.

6. Варианты $A_1, \ldots, A_m$ упорядочиваются по значениям общей ценности $v(A_i)$. Вариант, имеющий наибольшую общую ценность $v(A_i)$, выбирается в качестве лучшего.

7. ЛПР оценивает чувствительность результата к изменениям весов отдельных критериев.

В. Эдвардс и Ф. Баррон в 1994 г. разработали модифицированный вариант метода — СМАРТЕР (SMARTER — SMART Exploiting Ranking, СМАРТ, использующий ранжирование), в котором используется нелинейная функция общей ценности варианта $v(A_i)$ вместо линейной. Вместо вычисления веса w_q q-го критерия K_q по его прямой оценке ЛПР ранжирует критерии по важности, и вес w_q рассчитывается по специальной процедуре на основании рангов критериев. Р. Робертс и П. Гудвин (США, 2002) предложили рассчитывать вес критерия как $w_q = r_q / \sum\limits_{j=1}^{n} r_j$, где r_q — ранг критерия.

Метод СМАРТ дает целостную оценку вариантам, прост и удобен при практическом применении. Проверка чувствительности общей ценности к изменениям весов позволяет оценить влияние неточностей оценок. Метод весьма популярен в западных странах. Вместе с тем во всех разновидностях метода не учитываются возможная зависимость между частными критериями и их неаддитивность. СМАРТЕР менее «прозрачен» для ЛПР, чем СМАРТ, а также усиливает различие между наиболее и наименее важными для ЛПР критериями.

14.6. Особенности эвристических методов

Эвристические методы входят в первую группу методов рационального выбора, которые основаны на количественных показателях и числовой оценке ценности вариантов. Методы прямой оценки ценности вариантов относятся к числу наиболее распространенных методов принятия решений, имеющих огромное число практических применений. Многие из них реализованы в виде компьютерных систем. Так, метод СМАРТ положен в основу компьютерной системы «Логическое решение» (Logical Decision).

Обычная аргументация в пользу практического применения эвристических методов состоит в их наглядности, простоте и очевидности («так делают многие», «задачу следует решить именно таким способом», «это удобно и просто»). И как считают создатели этих методов, если пока еще нет достаточно надежных средств и способов для точного измерения ценности, то лишь потому, что человеческие знания несовершенны. Различные варианты методов оценки ценности, действительно, выглядят вполне привлекательно. Однако эти методы не имеют какого-либо строгого теоретического обоснования.

В целом эвристические методы предъявляют достаточно высокие требования к человеку (ЛПР, эксперту), который должен каким-то образом определять ценность разных вариантов, оценивать важность и вес частных критериев, выбирать вид общей функции ценности, строить поверхности безразличия. В то же время эти методы весьма чувствительны к небольшим изменениям параметров функции ценности и ошибкам человека при их измерении, что может приводить к совершенно другим итоговым результатам. Заметим, что в случае зависимости частных критериев, а проверить это на практике бывает достаточно трудно, применение приведенных ранее формул для вычисления общей ценности вариантов становится некорректным.

ГЛАВА 15

ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ

15.1. Аксиоматический подход к выбору вариантов

Аксиоматические теории полезности возникли из потребности дать теоретическое обоснование понятию рационального выбора, совершаемого человеком при сравнении вариантов решения проблемы. Эти теории отражают игровую точку зрения на экономическое поведение человека и принимают во внимание «неопределенность природы», «неопределенность человека» и «неопределенность целей». Человек делает свой выбор, например, на что потратить деньги, под влиянием различных факторов, многие из которых от него не зависят и носят случайный характер. Зная или предполагая вероятности возможных результатов выбора при воздействии случайных факторов, рациональный человек старается выбрать такую последовательность своих действий, чтобы получить максимально возможную выгоду.

В *аксиоматическом подходе* считается, что заданы оценки вариантов и известны вероятности осуществления вариантов. В первом случае (выбор при определенности) каждому варианту A_i ставится в соответствие значение числовой функции ценности $v(A_i)$. Во втором случае (выбор при вероятностной неопределенности) — значение числовой функции полезности $u(A_i)$, зависящей от вероятностей различных способов реализации варианта A_i и других вариантов. Выбирая те или иные варианты, рационально поступающий человек стремится максимизировать общую ценность или полезность, по которой он оценивает получаемые им материальные блага.

Функция ценности/полезности определенного вида порождается некоторой постулируемой системой аксиом. Справедливость этих аксиом устанавливается на основе получаемой от ЛПР информации о предпочтительности сравниваемых им вариантов. Возможность построения функции полезности базируется на предположении, что ЛПР может сравнивать по предпочтительности не только варианты решения, но и их вероятностные смеси. Дадим этому понятию содержательную трактовку.

Лотереей, или *вероятностной смесью вариантов*, будем называть совокупность различных вариантов (исходов) $A_1, \ldots,$

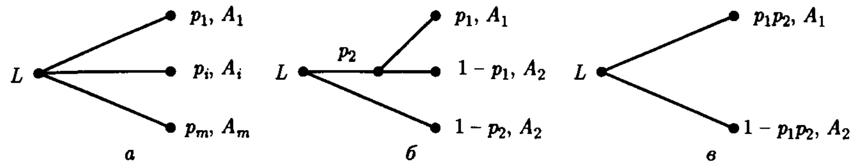


Рис. 15.1. Лотереи:

а — простая; *б* — составная; *в* — простая лотерея, эквивалентная составной лотерее *б*

A_m и вероятностей их реализации (осуществления) $p_1, \ldots, p_m$, $0 \le p_i \le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и записывать лотерею в виде

$$L = (p_1, A_1; \ldots; p_i, A_i; \ldots; p_m, A_m).$$

Лотереи различаются своими наборами вероятностей $\{p_1, \ldots, p_m\}$ и исходов $\{A_1, \ldots, A_m\}$. Простая лотерея (рис. 15.1, *а*) состоит только из исходов и их вероятностей. В простейшем случае двух исходов ее можно представить как

$$L = (p_1, A_1; p_2, A_2) = (p_1, A_1; 1 - p_1, A_2) = (A_1, p_1, A_2).$$

Если одним из исходов лотереи вместо варианта A_i будет какая-либо другая лотерея L_i, то такая лотерея является составной

$$L = (p_1, A_1; \ldots; p_i, L_i; \ldots; p_m, A_m).$$

В простейшем случае двух исходов составную лотерею (рис. 15.1, *б*) можно представить следующей простой лотереей (рис. 15.1, *в*):

$$L = (p_2, (A_1, p_1, A_2); 1 - p_2, A_2) =$$

$$= ((A_1, p_1, A_2), p_2, A_2) = (A_1, p_1p_2, A_2).$$

15.2. Теории одномерной полезности

На необходимости явного учета неопределенности в предпочтениях ЛПР акцентируется внимание во всех разновидностях теории полезности. Одной из первых была теория экономического поведения Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна (США, 1944). В ней сформулирован ряд требований к рациональности поведения человека в виде аксиом общего характера и аксиом рациональности суждений ЛПР, исходя из которых доказывается существование аддитивной действительной функции полезности, реализующей функциональную модель рационального выбора.

Для всех вариантов решения A_i из некоторого заданного множества $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$, имеющих вероятности $p_1, \ldots, p_m$ реализации, постулируется выполнение следующих утверждений.

ОП1. *Аксиома полной сравнимости.* При сравнении любых двух вариантов A_i и A_j между ними выполняется одно и только одно бинарное отношение: либо $A_i \approx A_j$ (эквивалентность), либо $A_i \succ A_j$, либо $A_i \prec A_j$ (строгое превосходство).

ОП2. *Аксиома транзитивности.* Отношения эквивалентности и строгого превосходства между вариантами транзитивны: если $A_i \approx A_j$ и $A_j \approx A_k$, то $A_i \approx A_k$; если $A_i \succ A_j$ и $A_j \succ A_k$, то $A_i \succ A_k$.

ОП3. *Аксиома непрерывности.* Для любых вариантов A_i, A_j, A_k таких, что $A_i \succ A_j \succ A_k$, найдется вероятность p такая, что вариант A_j и простая лотерея (A_i, p, A_k) эквивалентны: $A_j \approx \approx (A_i, p, A_k)$.

ОП4. *Аксиома замещения или упрощения лотерей.* Для любых вариантов A_i и A_j, эквивалентных соответственно простым лотереям $A_i \approx (A_u, p, A_k)$ и $A_j \approx (A_v, p, A_k)$, выполняются соотношения:

$$A_i \approx A_j \Leftrightarrow (A_u, p, A_k) \approx (A_v, p, A_k);$$

$$A_i \succ A_j \Leftrightarrow (A_u, p, A_k) \succ (A_v, p, A_k).$$

Аксиома замещения ОП4 представляет собой аналог уже упоминавшегося условия независимости результатов сравнения двух вариантов от сравнения остальных пар вариантов.

Доказано (теорема Неймана — Моргенштерна), что при выполнении аксиом ОП1 — ОП4 существует действительная *функция полезности* $u(A)$, заданная на множестве вариантов A, такая, что

$$u(L) = u(A_i, p, A_j) = pu(A_i) + (1 - p)u(A_j).$$

Вариант A_i предпочтительнее для ЛПР варианта A_j ($A_i \succ A_j$) тогда и только тогда, когда $u(A_i) > u(A_j)$, варианты эквивалентны для ЛПР ($A_i \approx A_j$), когда $u(A_i) = u(A_j)$.

При вычислении значений функции полезности для разных вариантов можно воспользоваться методом стандартной игры, предложенным Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном. Суть этого метода заключается в следующем. ЛПР каким-либо образом упорядочивает все варианты решения проблемы по предпочтительности, например $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_m$. Первому варианту A_1 приписывается максимальное значение полезности $u(A_1) = u^{\max}$, а последнему варианту A_m — минимальное значение $u(A_m) = u^{\min}$.

Для каждого из оставшихся вариантов A_i ставится следующий мысленный эксперимент: сравниваются по предпочтительности вариант A_i и простая лотерея $L_i = (A_1, p_i, A_m)$, в которой вариант A_1 может выпасть с вероятностью p_i, а вариант A_m — с вероятностью $1 - p_i$. Изменяя величину вероятности p_i, ЛПР стремится установить эквивалентность варианта A_i и лотереи L_i, т. е. найти точку безразличия $A_i \approx L_i$. В этом случае функция полезности для варианта A_i равна

$$u(A_i) = p_i u^{\max} + (1 - p_i) u^{\min} = u(L_i). \qquad (15.1)$$

Информация, полученная от ЛПР об упорядоченности вариантов и параметрах функции полезности (величинах вероятностей p_i), позволяет задать вид функциональной зависимости полезности. Из приведенного соотношения (15.1) следует, что

$$\frac{u^{\max} - u(A_i)}{u(A_i) - u^{\min}} = \frac{1 - p_i}{p_i}. \qquad (15.2)$$

Это означает, что функция полезности $u(A_i)$, выражающая предпочтения ЛПР, измеряется в шкале интервалов и инвариантна относительно положительного линейного преобразования (выбора масштаба и точек отсчета $u^{\max}$ и $u^{\min}$). Заметим, что метод стандартной игры позволяет также согласовать качественные и количественные измерения предпочтений ЛПР, сделанные в порядковой шкале и шкале интервалов.

Помимо ставшей классической аксиоматики Неймана — Моргенштерна, были сформулированы и другие системы аксиом рационального выбора, которые позволяют устанавливать не только вид функции полезности, но и определять вероятности событий. Были также разработаны разные варианты теории полезности, опирающиеся не на объективные, а на субъективные вероятности, которые назначаются ЛПР и отражают степень его субъективной уверенности в осуществлении вариантов решения. Одним из первых такой субъективистский подход к взаимосвязанным понятиям вероятности и полезности предложил Ф. Рамсей (Великобритания), работа которого появилась в 1926 г., т. е. значительно раньше теории Неймана — Моргенштерна. В методе анализа решений Г. Райфы (США) условные субъективные вероятности исходов в лотереях находятся как результаты статистических испытаний (опирающихся на байесовскую методологию) на разных ветвях дерева решений.

15.3. Теория многомерной полезности

В общем случае полезность каждого варианта зависит от его оценок по многим частным критериям. С подобной ситуацией мы уже неоднократно встречались, например, при построении деревьев решений в разд. 11.3. Необходимость учета этого обстоятельства привела к созданию аксиоматической теории многомерной полезности (Multi-Attribute Utility Theory — MAUT), существенный вклад в построение которой внесли Р. Кини, Г. Райфа, П. Фишберн (США).

Теория опирается на формальные допущения (аксиомы), характеризующие предпочтения ЛПР и задающие определенный вид функции полезности. Предложены разные системы таких аксиом. Представим одну из наиболее известных аксиоматик многомерной полезности, которая включает в себя аксиомы, аналогичные используемым в теории одномерной полезности, и ряд дополнительных аксиом, устанавливающих независимость предпочтений ЛПР.

МП1. *Аксиома полной сравнимости.* При сравнении любых двух вариантов A_i и A_j выполняется одно и только одно бинарное отношение между полезностями вариантов $u(A_i)$ и $u(A_j)$: либо равенство $u(A_i) = u(A_j)$, либо строгий порядок $u(A_i) > u(A_j)$ или $u(A_i) < u(A_j)$.

МП2. *Аксиома транзитивности.* Отношения равенства и строгого порядка между полезностями вариантов транзитивны: если $u(A_i) = u(A_j)$ и $u(A_j) = u(A_k)$, то $u(A_i) = u(A_k)$; если $u(A_i) > u(A_j)$ и $u(A_j) > u(A_k)$, то $u(A_i) > u(A_k)$.

МП3. *Аксиома растворимости.* Для любых вариантов A_i, A_j, A_k, таких, что $u(A_i) > u(A_j) > u(A_k)$, найдется такая вероятность p, что полезности варианта A_j и простой лотереи (A_i, p, A_k) равны:

$$u(A_j) = u(A_i, p, A_k) = pu(A_i) + (1-p)u(A_k).$$

МП4. *Аксиома Архимеда.* Для любых вариантов A_i, A_j, A_k, таких, что $u(A_i) > u(A_j) > u(A_k)$, найдутся вероятности p и q такие, что полезности варианта A_j и простых лотерей (A_i, p, A_k), (A_i, q, A_k) удовлетворяют неравенствам

$$u(A_i, p, A_k) > u(A_j) > u(A_i, q, A_k).$$

МП5. *Аксиома независимости по предпочтению.* Для любых вариантов A_i и A_j, таких, что $u(A_i) \geq u(A_j)$, найдется такая вероятность p, что полезности простых лотерей (A_i, p, A_k) и (A_j, p, A_k) при любом варианте A_k удовлетворяют неравенству

$$u(A_i, p, A_k) \geq u(A_j, p, A_k).$$

МП6. *Аксиома независимости по полезности.* Для любых простых лотерей L_i и L_j, таких, что $u(L_i) \geq u(L_j)$, найдется такая вероятность p, что полезности составных лотерей (L_i, p, A_k) и (L_j, p, A_k) при любом варианте A_k удовлетворяют неравенству

$$u(L_i, p, A_k) \geq u(L_j, p, A_k).$$

Аксиомы МП1 и МП2 совпадают с аксиомами ОП1 и ОП2. Аксиомы МП3 и МП4 в совокупности аналогичны аксиомам ОП3 и ОП4. Аксиомы независимости по предпочтению МП5 и полезности МП6 означают, что на результаты сравнения двух конкретных вариантов или лотерей не влияет присутствие каких-либо третьих вариантов. На критериальном языке это звучит так: предпочтительность вариантов и лотерей, которые различаются лишь значениями оценок по отдельным частным критериям, не зависит от одинаковых фиксированных значений оценок по остальным частным критериям.

Доказано, что при выполнении аксиом МП1 — МП6 существует действительная *многомерная функция полезности* $u(A_i)$, заданная на множестве вариантов $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ в виде полилинейной функции

$$u(A_i) = \sum_{q=1}^{n} l_q u_q(x_{iq}) + k \sum_{q=1}^{n} \sum_{p>q} l_p l_q u_q(x_{iq}) u_p(x_{ip}) + \ldots + \\ + k^{n-1} l_1 \ldots l_n u_1(x_{i1}) u_2(x_{i2}) \ldots u_n(x_{in}). \tag{15.3}$$

Здесь $u_q(x_{iq})$ — полезность оценки x_{iq} варианта A_i по q-му частному критерию K_q, удовлетворяющая условию нормировки $0 \leq u_q \leq 1$, причем $u_q(x_q^{\min}) = 0$, $u_q(x_q^{\max}) = 1$, $x_q^{\min}$ — худшая и $x_q^{\max}$ — лучшая оценка по шкале критерия K_q; $0 < l_q < 1$ — частный шкалирующий параметр, который определяется значением функции полезности $l_q = u(x_1^{\min}, \ldots, x_{q-1}^{\min}, x_q^{\max}, x_{q+1}^{\min}, \ldots, x_n^{\min})$. Общая шкалирующая константа $k > -1$ находится из характеристического уравнения

$$k + 1 = \prod_{q=1}^{n} (kl_q + 1).$$

При $\sum\limits_{q=1}^{n} l_q = 1$ функция полезности $u(A_i)$ приобретает аддитивную форму

$$u(A_i) = \sum_{q=1}^{n} l_q u_q(x_{iq}), \tag{15.4}$$

а при $\sum\limits_{q=1}^{n} l_q \neq 1$ — мультипликативную форму

$$ku(A_i) + 1 = \prod_{q=1}^{n} [kl_q u_q(x_{iq}) + 1]. \tag{15.5}$$

При $k = 0$ мультипликативная функция полезности (15.5) сводится к аддитивной функции (15.4). Как и в одномерном случае, вариант A_i предпочтительнее для ЛПР варианта A_j ($A_i \succ \succ A_j$) тогда и только тогда, когда $u(A_i) > u(A_j)$, варианты эквивалентны для ЛПР ($A_i \approx A_j$), когда $u(A_i) = u(A_j)$.

На практике нахождение численных значений шкалирующих констант k, l_q и конкретного выражения для функции многомерной полезности сопряжено со значительными трудностями. Это связано с большими расхождениями, которые может допускать ЛПР при выражении своих предпочтений.

15.4. Метод аддитивной разности оценок

Существуют и более сложные подходы к сравнению вариантов, основанные на использовании функций полезности, в которых сначала варианты оцениваются по отдельным частным критериям, а затем проводится их сопоставление по некоторому интегральному показателю. Согласно одному из таких методов — *методу аддитивной разности оценок* — вариант A_i считается предпочтительнее варианта A_j, если

$$D(A_i, A_j) = \sum_{q=1}^{n} f_q[u_q(x_{iq}) - u_q(x_{jq})] \geq 0. \tag{15.6}$$

Здесь $u_q(x_{iq})$ — нормированная полезность оценки x_{iq} варианта A_i по q-му частному критерию; $f_q[z_q(A_i, A_j)]$ — возрастающая функция, характеризующая предпочтительность одного из вариантов по q-му критерию, $z_q(A_i, A_j) = u_q(x_{iq}) - u_q(x_{jq})$.

А. Тве́рский (США, 1969) доказал, что если все функции $f_q(z_q)$ линейны, то предпочтения ЛПР, выраженные результатами сравнения вариантов по аддитивной разности оценок (15.6) и по взвешенной сумме частных полезностей (15.4), совпадают. Транзитивность отношений между вариантами будет выполняться: при $q = 1$ — всегда; при $q = 2$ — тогда и только тогда, когда $f_1(z_1) = f_2(wz_2)$, $w > 0$; при $q \geq 3$ — тогда и только тогда, когда $f_q(z_q) = w_q z_q$, $w_q > 0$. В последнем случае показатель $D(A_i, A_j)$ является аналогом взвешенной метрики Хемминга вида (8.6) в метрическом пространстве частных функций полезности, а коэффициенты w_q суть веса этих функций. Для нелинейных функций $f_q(z_q)$ результаты сравнения вариантов по показателю $D(A_i, A_j)$ могут оказаться нетранзитивными.

Метод аддитивной разности оценок обладает определенными преимуществами по сравнению с другими методами полезности. Человеку легче проводить сравнение достоинств и недостатков вариантов по отдельным частным критериям. Число таких попарных сравнений меньше, чем при непосредственной оценке каждого варианта по всем частным критериям с последующим вычислением и сравнением многомерных функций полезностей.

Вместе с тем практическое применение аксиоматических методов оценки полезности и специально проведенные многочисленные эксперименты показали, что люди, решая свои задачи, зачастую используют упрощенные эвристические подходы, не укладывающиеся в аксиоматику рационального выбора. Были построены примеры такого нерационального поведения. Одним из них является известный парадокс М. Алле́ (Франция), согласно которому люди, сравнивая различные лотереи, чаще предпочитают варианты, которые дают больший выигрыш и/или исключают какой-либо проигрыш, хотя субъективная полезность этих вариантов меньше максимально возможной. В аксиоматических теориях полезности нет средств, позволяющих избегать появления таких парадоксов.

15.5. Теория проспектов

Теория проспектов Д. Канемана и А. Тве́рского (США, 1979) ориентирована на учет ряда особенностей реального поведения людей при выборе предпочтительного варианта по его субъективной полезности. К числу таких особенностей относятся

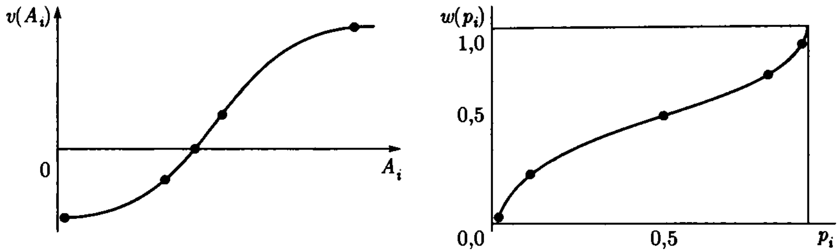


Рис. 15.2. Графики функций:

а — полезности $u(A_i)$; *б* — важности вероятности $w(p_i)$

стремление придавать детерминированным вариантам бо́льшую важность, чем стохастическим, изменение предпочтений при замене выигрышей на проигрыши, исключение одинаковых составляющих из вариантов решения проблемы.

Проспектом называется простая лотерея $L = (p_i, A_i; p_j, A_j; 1 - (p_i + p_j), A_k)$ с тремя вариантами: A_i и A_j — выигрыши с вероятностями p_i и p_j; A_k — отсутствие выигрыша (нулевой вариант). Полезность лотереи определяется выражением

$$u(L) = w(p_i)u(A_i) + w(p_j)u(A_j),$$

где $u(A_i)$ — полезность варианта A_i; $w(p_i)$ — важность вероятности p_i варианта A_i. Лучшим считается вариант A^*, имеющий наибольшую полезность $u^{\max} = u(A^*)$.

В теории проспектов предполагается, что полезность $u(A_i)$ и важность вероятности $w(p_i)$ варианта A_i являются нелинейными монотонно возрастающими выпукло-вогнутыми функциями. Примеры таких функций приведены на рис. 15.2. Функция полезности $u(A_i)$ положительна для выигрышей и отрицательна для проигрышей. Функция важности вероятности $w(p_i)$ обладает следующими свойствами: $w(0) = 0$; $w(0{,}5) = 0{,}5$; $w(1) = 1$; $w(p_i) > p_i$ при $0 < p_i < 0{,}5$; $w(p_i) < p_i$ при $0{,}5 < p_i < 1{,}0$; $w(p_i) + w(1 - p_i) \le 1$. Как видно из графика, функция $w(p_i)$ плохо определена у своих предельных значений и не соответствует всем постулатам теории вероятностей.

При применении теории проспектов на практике рекомендуется выполнить так называемое редактирование проспектов. Эта процедура включает в себя исключение наименее предпочтительных вариантов; исключение вариантов, имеющих одинаковые вероятности; объединение вариантов, имеющих разные вероятности, в один вариант с суммарной вероятностью; округление значений полезностей и вероятностей при их вычислении.

Введение функций важности вероятности $w(p_i)$ при оценке полезности лотереи позволяет, по мнению авторов теории проспектов, лучше, чем это делается в теориях полезности, учесть нерациональность и другие особенности поведения человека, а также устранить некоторые парадоксы выбора (например, парадокс Алле). Вместе с тем используемые процедуры для оценки значений функций полезности и важности вероятности вариантов являются трудными для человека. Кроме того, ряд положенных в основу теории проспектов предположений допускает неоднозначные толкования, что может приводить к противоречивости получаемых результатов.

15.6. Особенности аксиоматических методов

Аксиоматические методы оценки полезности вариантов достаточно распространены за рубежом. Их принято считать (в основном среди американских специалистов) чуть ли не единственным «научно обоснованным подходом» к решению задач рационального выбора. Выражения для многомерной функции полезности, полученные на основе аксиоматики, служат теоретическим обоснованием приведенных ранее эвристических формул.

Проработанность способов выявления предпочтений ЛПР относится к числу важных достоинств аксиоматических методов оценки полезности вариантов. Использование количественных показателей и общей числовой оценки полезности вариантов обеспечивают полную сравнимость всех имеющихся вариантов и выделение лучших по предпочтительности вариантов. В то же время аксиоматические методы весьма чувствительны к неточностям и ошибкам измерения параметров функций полезности.

При практическом использовании аксиоматических методов оценки полезности требуется проверять выполнение систем аксиом ОП1 – ОП4 или МП1 – МП6 и в особенности аксиом независимости по предпочтению и полезности. Проверка осуществляется путем поиска точек безразличия вариантов и лотерей. На практике такая проверка представляет собой сложную задачу, которая требует от ЛПР существенных трудозатрат. Поэтому проверка аксиом независимости проводится лишь выборочно и по отдельным точкам функции полезности. Кроме того, установление эквивалентности между детерминированным вариантом и вероятностной лотереей — психологически трудная задача. При оценке значений субъективных вероятностей человек может часто ошибаться, допускать большие неточности, давать несогласованные ответы.

Известны также случаи, когда некоторые аксиомы вообще не выполняются. Так, показано, что аксиома Архимеда МП4 нарушается при лексикографическом упорядочении критериев.

Если аксиомы независимости по предпочтению и/или полезности не выполняются, то рекомендуется либо перегруппировать или агрегировать зависимые критерии и заново решить задачу, либо воспользоваться каким-либо из способов компенсации, позволяющим уравновесить полезности вариантов по частным критериям. Однако построение поверхностей безразличия при большом числе критериев — достаточно трудоемкая для человека процедура.

Вместе с тем при нарушении условий независимости и/или отсутствии проверки выполнения этих условий (а это часто случается в практических задачах) аксиоматические методы теряют свою математическую обоснованность и становятся двойниками эвристических методов со всеми присущими им достоинствами и недостатками.

ГЛАВА 16
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ

16.1. Иерархический подход к выбору вариантов

Важным методологическим приемом решения сложных проблем рационального выбора является декомпозиция задачи на ряд более простых и меньших по размерности составляющих. С подобным приемом уже встречались ранее в многоэтапном выборе, где задача оптимального управления или планирования разлагалась на несколько повторяющихся однотипных и менее сложных подзадач. Разложение комплексной проблемы на отдельные компоненты позволяет полнее отразить разнообразные факторы, характеризующие проблемную ситуацию, помогает всесторонне проанализировать проблему с учетом взаимного влияния выделенных факторов, облегчает поиск лучших путей решения проблемы. Такой подход соответствует естественной способности человека к системному логическому исследованию и решению сложных задач.

Один из примеров иерархического подхода к структуризации проблемы — метод деревьев решений — излагался в разд. 11.3. Другим примером служит *метод аналитической иерархии* (Analytic Hierarchy Process — AHP), разработанный Т. Саати (США, 1980) и развитый другими учеными. Метод аналитической иерархии предназначен для упорядочения реально имеющихся вариантов, оцененных по многим количественным и качественным критериям, исходя из значений общей ценности этих вариантов, которые представляют собой численно выраженные предпочтения ЛПР. Вариант, имеющий наибольшую общую ценность, выбирается в качестве оптимального. Для вычисления общей ценности вариантов используется специальная процедура нахождения и агрегирования частных ценностей вариантов. Таким образом, метод аналитической иерархии принадлежит ко второй группе методов рационального выбора.

Принципиальные моменты многоэтапной процедуры, составляющей содержание метода аналитической иерархии, сводятся к следующему: иерархическая декомпозиция проблемы; сравнительная многоаспектная оценка элементов каждого уровня иерархии, основанная на предпочтениях ЛПР; синтез ценности (приоритетов) вариантов решения; оценка согласованности предпочтений ЛПР. Обоснование метода аналитической иерархии базируется на теории графов, матричной алгебре. Рассмотрим основные этапы метода более подробно.

16.2. Декомпозиция проблемы выбора

Иерархическая декомпозиция сложной проблемы состоит в ее структуризации «сверху вниз» и выделении базовых элементов проблемы путем последовательного перехода от более общих и, как правило, слабо формализованных уровней иерархии к более частным и конкретным уровням. Количество уровней декомпозиции проблемы не формализуется и обычно определяется ЛПР из содержательных соображений. Иерархичность может быть обусловлена иерархией целей, способов их достижения, используемых ресурсов и т. п.

В методе аналитической иерархии в качестве базового элемента верхнего (первого) уровня выступает цель F, выражающая содержание проблемы, которая формально состоит в упорядочении вариантов решения по их общей ценности. Базовыми элементами нижнего (последнего) уровня являются имеющиеся варианты (объекты, ресурсы, альтернативы) $A_1, \ldots, A_m$. Базовыми элементами средних уровней служат различные критерии $K_1, \ldots, K_n$, которые характеризуют цели и варианты и определяют их признаки. Критерии обеспечивают взаимную связь между элементами верхнего и нижнего уровней иерархии. Сами критерии, в свою очередь, также могут образовывать некоторую последовательно детализируемую иерархическую структуру. Простейшим случаем является трехуровневая иерархическая структура «цель — критерии — варианты» с единственным уровнем детализации критериев. Заметим, что в методе аналитической иерархии не требуется, чтобы критерии задавались шкалами оценок. Достаточно дать критериям, где необходимо, только содержательные формулировки.

Проиллюстрируем суть метода аналитической иерархии на примере задачи покупки загородного дома с приусадебным участком. Предположим, что есть три конкретных дома A_1, A_2, A_3, из которых нужно выбрать один, самый лучший. Критерии имеют содержательные описания или шкалы оценок. Для сравнения имеющихся вариантов ЛПР (покупатель дома) определил следующие критерии, которые он счел для себя важными при оценке дома и участка:

K_1. Величина дома (число этажей, общая жилая площадь, количество и размеры комнат, наличие и размеры веранды, кухни, подсобных помещений).

K_2. Комфортабельность жилища (удобство планировки помещений, наличие электричества, газа, водопровода, канализации, других бытовых удобств).

K_3. Состояние дома (состояние строительных конструкций и инженерных коммуникаций, необходимость текущего или капитального ремонта).

K_4. Состояние и планировка участка (размеры и форма участка, его ухоженность, озелененность и обустроенность, характер почвы, наличие хозяйственных построек, посадок фруктовых деревьев и кустарников, огорода, близость соседних домов).

K_5. Окрестности (общий вид и состояние прилегающей к участку территории, наличие поблизости от участка лесных массивов и водоемов, промышленных и сельскохозяйственных предприятий, других населенных пунктов).

K_6. Транспортное сообщение (близость участка к основному месту жительства, время, затрачиваемое на поездку, используемые виды транспорта, развитость транспортной инфраструктуры, состояние автомобильных дорог, интенсивность движения, наличие поблизости железнодорожной станции и/или автобусной остановки).

K_7. Условия продажи (затраты, связанные с оформлением сделки, возможность получения кредита и/или оплаты в рассрочку, необходимость дополнительных затрат на благоустройство дома и участка, необходимость решения дополнительных организационных вопросов и т. п.).

K_8. Цена участка (измеренная в рублях или по шкале качественных оценок: высокая, умеренная, средняя, низкая).

Очевидно, что некоторые критерии из приведенного перечня могут оказаться зависимыми. Например, состояние дома и состояние участка (критерии K_3 и K_4) могут повлечь дополнительные расходы на их благоустройство, что приведет к фактическому увеличению стоимости покупки (критерий K_8).

С учетом введенных критериев каждый из рассматриваемых вариантов загородных домов получил такое описание.

Вариант A_1. Большой дом с большим количеством комнат, мансардой, верандой, но не очень удобной планировкой. В доме имеются все основные удобства. Дом старый, требует капитального ремонта. Большой и в целом ухоженный участок,

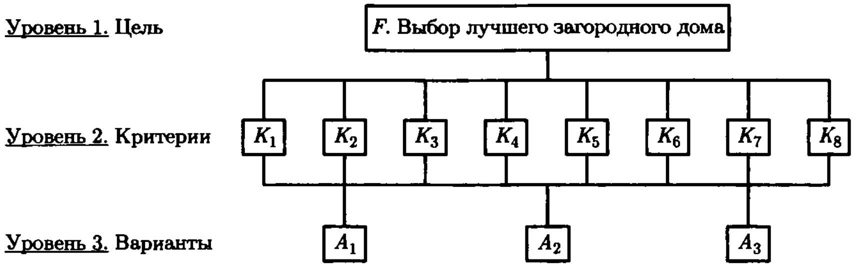


Рис. 16.1. Иерархическая структура проблемы выбора

на котором имеется фруктовый сад. Недалеко есть лес и река, рядом расположен небольшой поселок. Дом находится относительно недалеко от города, но поездка на автомобиле занимает больше 1 ч. Условия продажи вполне приемлемые, деньги можно выплатить в рассрочку, однако потребуются дополнительные затраты на благоустройство участка. Цена достаточно высокая.

Вариант A_2. Средний по размерам одноэтажный дом с достаточно удобной планировкой и верандой. Имеется электричество и возможности подключения к водопроводу. Газа нет. Дом нестарый, находится в хорошем состоянии, но требуется ремонт электрооборудования. Участок небольшой и малообработанный. Участок расположен в большом лесном массиве, где много грибов и ягод, есть озеро, однако недалеко имеется функционирующий цементный завод. Дом находится далеко от города, добираться туда надо на электричке и автобусе около 2 ч. Условия продажи участка приемлемые, но для его приобретения необходимо вступить в члены садового товарищества. Цена близка к средней.

Вариант A_3. Небольшой по размерам дом без веранды. Имеется электричество, водопровод и возможность подключения к магистральному газопроводу. Дом новый, но требуется замена дверей и оконных рам. Участок среднего размера, на котором имеется хозяйственный блок и баня, но нет сада и огорода. Поблизости от участка нет лесов и крупных водоемов, а также отсутствуют промышленные предприятия. Дом находится близко от города, транспортное сообщение удобное. Условия продажи приемлемые, оформление сделки не потребует существенных затрат. Цена умеренная.

Иерархическая декомпозиция (структуризация) проблемы покупки загородного дома представлена на рис. 16.1.

16.3. Оценка важности элементов структуры

Сравнительная оценка важности всех базовых элементов иерархической структуры по отношению к вышележащему уровню выполняется на каждом уровне иерархии, начиная со второго, в целях вычисления частных ценностей этих элементов и их вклада в общую ценность каждого варианта решения проблемы. Оценка относительной важности элементов иерархии H_i и H_j осуществляется путем их попарного сравнения по каждому k-му аспекту более высокого уровня и заполнения матриц парных сравнений $\mathrm{A}^k = (a_{ij}^k)_{h\times h}$, h — число сравниваемых базовых элементов на рассматриваемом уровне иерархии. Для измерения предпочтений ЛПР используется унифицированная шкала отношений.

Элемент a_{ij}^k матрицы парных сравнений элементов H_i и H_j любого иерархического уровня определяется выражением $a_{ij}^k = s_i/s_j$, где $s_i > 0$ — показатель сравнительной важности элемента H_i, $i, j = 1, 2, \ldots, h$. Напомним, что такой подход к вычислению весов критериев по их относительной важности изложен в разд. 8.3. Показатель s_i сравнительной важности элемента иерархии по соответствующему аспекту является субъективной оценкой, которая задается ЛПР или экспертом и измеряется целым числом 1,3,5,7,9 по порядковой балльной шкале, приведенной в табл. 16.1. Каждая числовая градация важности имеет здесь определенное смысловое объяснение. Для большей точно-

Таблица 16.1

Оценка сравнительной важности s_i элемента иерархии

Оценка	Градация важности	Объяснение важности
1	Равная	Одинаковый вклад элементов в вышележащий уровень
3	Умеренная	Небольшое преимущество вклада одного из элементов
5	Существенная	Большое преимущество вклада одного из элементов
7	Превосходящая	Значительное преимущество вклада одного из элементов
9	Наивысшая	Подавляющее преимущество вклада одного из элементов

Таблица 16.2

Матрицы парных сравнений загородных домов

А^1	A_1	A_2	A_3	v_i^1	А^2	A_1	A_2	A_3	v_i^2
A_1	1	6	8	0,754	A_1	1	8	6	0,747
A_2	1/6	1	4	0,181	A_2	1/8	1	1/5	0,060
A_3	1/8	1/4	1	0,065	A_3	1/6	5	1	0,193
А^3	A_1	A_2	A_3	v_i^3	А^4	A_1	A_2	A_3	v_i^4
A_1	1	1/2	1/2	0,200	A_1	1	5	4	0,674
A_2	2	1	1	0,400	A_2	1/5	1	1/3	0,101
A_3	2	1	1	0,400	A_3	1/4	3	1	0,225
А^5	A_1	A_2	A_3	v_i^5	А^6	A_1	A_2	A_3	v_i^6
A_1	1	8	6	0,754	A_1	1	7	1/5	0,233
A_2	1/8	1	1/4	0,065	A_2	1/7	1	1/8	0,054
A_3	1/6	4	1	0,181	A_3	5	8	1	0,713
А^7	A_1	A_2	A_3	v_i^7	А^8	A_1	A_2	A_3	v_i^8
A_1	1	1	1	0,333	A_1	1	1/7	1/5	0,072
A_2	1	1	1	0,333	A_2	7	1	3	0,650
A_3	1	1	1	0,333	A_3	5	1/3	1	0,278

Таблица 16.3

Матрица парных сравнений критериев

А^0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	w_q
K_1	1	6	1/3	6	3	5	7	1/4	0,175
K_2	1/6	1	1/5	2	1/4	1/3	4	1/6	0,042
K_3	3	5	1	5	1/6	5	7	1/2	0,167
K_4	1/6	1/2	1/5	1	1/3	1/3	3	1/6	0,036
K_5	1/3	4	6	3	1	3	6	1/5	0,149
K_6	1/5	3	1/5	3	1/3	1	5	1/7	0,063
K_7	1/7	1/4	1/7	1/3	1/6	1/5	1	1/8	0,019
K_8	4	6	2	6	5	7	8	1	0,350

сти сравнения элементов допускается использование промежуточных числовых оценок 2,4,6,8.

Набор матриц парных сравнений элементов на всех уровнях иерархической структуры представляет собой субъективную модель рационального выбора, где предпочтительность элементов для ЛПР имеет следующее выражение: $H_i \succ H_j$, если $a_{ij}^k > 1$; $H_i \approx H_j$, если $a_{ij}^k = 1$; $H_i \prec H_j$, если $a_{ij}^k < 1$. Заметим, что такие бинарные отношения между элементами иерархии могут быть и нетранзитивными. В модель рационального выбора входит также оценка степени влияния элемента H_i нижележащего уровня на элементы вышележащего уровня, которая характеризуется частной ценностью (локальным приоритетом) v_i^k этого элемента по k-му аспекту, определяемой выражением (8.1):

$$v_i^k = v^k(H_i) = c_i^k / \sum_{j=1}^{h} c_j^k, \quad c_i^k = \left(\prod_{j=1}^{h} a_{ij}^k \right)^{1/h}. \tag{16.1}$$

По определению значения локальных приоритетов всех элементов иерархии нормированы в пределах от 0 до 1.

Вычислим теперь относительную важность v_i^q каждого имеющегося варианта загородного дома с точки зрения критериев их оценки. Для этого построим матрицы $\mathrm{A}^q = (a_{ij}^q)_{3\times3}$ парных сравнений домов A_1, A_2, A_3 по каждому критерию K_q в соответствии с приведенными выше описаниями (табл. 16.2).

Далее определяется относительная важность w_q каждого из критериев оценки вариантов с точки зрения стоящей цели F выбора лучшего загородного дома. Для этого аналогичным образом строится матрица $\mathrm{A}^0 = (a_{ql}^0)_{8\times8}$ парных сравнений критериев $K_1, \ldots, K_n$, приведенная в табл. 16.3.

16.4. Вычисление ценности вариантов

Общая ценность (глобальный приоритет) каждого варианта решения стоящей проблемы выбора характеризует значимость варианта для ЛПР с точки зрения цели высшего уровня и служит основой для итогового упорядочения исходного множества вариантов. Общая ценность варианта определяется в соответствии с принципом иерархического синтеза. Согласно этому принципу для всех элементов на каждом из уровней иерархической структуры рассчитываются частные ценности (локальные приоритеты) элементов, которые затем агрегируются «снизу вверх», начиная с последнего (самого нижнего) уровня и кончая первым (самым верхним) уровнем.

В простейшем случае трехуровневой иерархической структуры «цель — критерии — варианты» частная ценность (локальный приоритет) v_i^q варианта A_i по каждому q-му критерию оценки K_q и относительная важность (вес) w_q критерия K_q, рассчитанные по формуле (16.1), имеют вид:

$$v_i^q = v^q(A_i) = c_i^q / \sum_{j=1}^{m} c_j^q, \quad c_i^q = \left(\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^q \right)^{1/m}, \tag{16.2}$$

$$w_q = w(K_q) = c_q^0 / \sum_{l=1}^{n} c_l^0, \quad c_q^0 = \left(\prod_{l=1}^{n} a_{ql}^0 \right)^{1/n}, \tag{16.3}$$

где a_{ij}^q и a_{ql}^0 — суть элементы соответственно матриц парных сравнений вариантов A^q и критериев оценки A^0; m — число сравниваемых вариантов; n — число сравниваемых критериев оценки.

Общая ценность $v(A_i)$ варианта A_i определяется взвешенной суммой частных ценностей (локальных приоритетов), которая получается путем их последовательной аддитивной свертки по всем уровням иерархии:

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} w_q v^q(A_i). \tag{16.4}$$

Варианты решения проблемы ранжируются по вычисленным значениям общей ценности $v(A_i)$, и выделяется лучший вариант.

Вычислим частную ценность загородных домов A_1, A_2, A_3 и относительную важность критериев K_q. Значения частной ценности $v_i^q = v^q(A_i)$ домов A_i по соответствующему критерию K_q, рассчитанные по формуле (16.2) при $m = 3$, указаны в правом столбце каждой матрицы A^q (см. табл. 16.2). Относительная важность (вес) w_q критерия K_q, рассчитанная по формуле (16.3) при $n = 8$, указана в правом столбце матрицы A^0 (см. табл. 16.3).

Относительная важность критерия выражает его предпочтительность для ЛПР при выборе участка. Как следует из табл. 16.3, наиболее важным ЛПР считает критерий K_8 «Цена участка», который почти в два раза важнее критериев K_5 «Окрестности», K_1 «Величина дома», K_3 «Состояние дома». Наименее важными оказались критерии K_7 «Условия продажи»,

Таблица 16.4

Ценности загородных домов

Вариант	Частная ценность варианта								Общая ценность $v(A_i)$
	v_i^1	v_i^2	v_i^3	v_i^4	v_i^5	v_i^6	v_i^7	v_i^8	
A_1	0,754	0,747	0,200	0,674	0,754	0,233	0,333	0,072	0,379
A_2	0,181	0,060	0,400	0,101	0,065	0,054	0,333	0,650	0,351
A_3	0,065	0,193	0,400	0,225	0,181	0,713	0,333	0,278	0,270
Вес w_q	0,175	0,042	0,167	0,036	0,149	0,063	0,019	0,350	—

K_4 «Состояние и планировка участка», K_2 «Комфортабельность жилища», K_6 «Удобство транспортного сообщения», которые заметно уступают по важности остальным критериям.

Вычислим теперь общую ценность $v(A_i)$ каждого из загородных домов A_1, A_2, A_3, воспользовавшись формулой (16.4). Для удобства расчетов локальные ценности вариантов $v_i^q = v^q(A_i)$ по каждому q-му критерию K_q из табл. 16.2 и веса критериев w_q из табл. 16.3 сведены в единую табл. 16.4.

Итак, получаем такие значения общей ценности дома: $v(A_1) = 0{,}379$; $v(A_2) = 0{,}351$; $v(A_1) = 0{,}270$, что дает следующие итоговое упорядочение вариантов: $A_1 \succ A_2 \succ A_3$. Наиболее предпочтительным для ЛПР является вариант A_1, имеющий наивысшую общую ценность. Может возникнуть желание упростить процедуру оценки домов, оставив только те критерии, которые оказывают наибольшее влияние на выбор лучшего варианта. Это возможно, например, сделать, введя скорректированные значения весов критериев $w'_q = w_q / \sum\limits_{q=1}^{n} w_q$ для $q = 1, 3, 5, 8$ и $w'_q = 0$ для $q = 2, 4, 6, 7$. Однако делать этого не следует, поскольку исключение отдельных критериев может оказать влияние на итоговый результат.

Действительно, наиболее предпочтительный для ЛПР вариант A_1 наименее ценен с точки зрения самого важного для покупки критерия K_8 «Цена участка», так как частные ценности вариантов по этому критерию равны $v^8(A_1) = 0{,}072$; $v^8(A_2) = 0{,}650$; $v^8(A_3) = 0{,}278$. Вместе с тем вариант A_1 полностью превосходит остальные варианты по четырем критериям K_1, K_2, K_4, K_5, полностью уступает только по двум критериям K_3, K_8, а по одному критерию K_7 все варианты эквивалентны. Поэтому следует быть крайне осторожным, желая исключить какие-либо критерии из рассмотрения после первых шагов вычислений.

16.5. Оценка согласованности предпочтений ЛПР

Как известно, при большом числе попарно сравниваемых объектов человек может вести себя непоследовательно, ошибаться, допускать нетранзитивность сравнений. Поэтому метод включает в себя проверку согласованности оценок, даваемых ЛПР при попарном сравнении элементов иерархии на всех этапах получения промежуточных и окончательных результатов. В первую очередь в процессе решения задачи требуется контролировать, чтобы при заполнении всех матриц парных сравнений $\mathrm{A} = (a_{ij})_{h\times h}$ для элементов матрицы выполнялись условия обратной симметричности $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ и совместимости $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$.

Для оценки согласованности субъективных сравнений элементов иерархической структуры вводятся специальные показатели: индекс согласованности

$$I_h = (\lambda_h^{\max} - h)/(h-1) \qquad (16.5)$$

и отношение согласованности $R_h = I_h / I_h^{\text{ср}}$, которые рассчитываются для каждого уровня иерархии.

Параметр $\lambda_h^{\max}$, входящий в показатели согласованности I_h и R_h, определяется для каждого уровня иерархической структуры по следующей формуле:

$$\lambda_h^{\max} = \sum_{i=1}^{h} a_i^k v_i^k, \quad a_i^k = \sum_{j=1}^{h} a_{ij}^k, \qquad (16.6)$$

где a_{ij}^k — суть элементы матрицы A^k парных сравнений элементов H_i и H_j по k-му аспекту более высокого уровня.

Величина $I_h^{\text{ср}}$ называется индексом средней согласованности. Значения $I_h^{\text{ср}}$ были вычислены экспериментальным путем по формулам (16.5), (16.6) для обратно симметричных матриц ранга h, элементы $a_{ij}^{\text{ср}}$ которых генерировались случайным образом

Таблица 16.5

Эмпирические индексы средней согласованности

h	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$I_h^{\text{ср}}$	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51

из набора чисел $1/9, 1/8, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9$. В табл. 16.5 указаны эмпирические значения индекса средней согласованности $I_h^{\text{ср}}$, полученные для матриц разных рангов.

В матричной алгебре показано, что если элементы $a_{ij} = s_i/s_j$ квадратной матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})_{h \times h}$ удовлетворяют условиям положительности $a_{ij} > 0$, обратной симметричности $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ и совместимости $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, h$, то число h есть максимальное собственное значение, а вектор-столбец $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_h)^T$, составленный из чисел s_i, — соответствующий правый собственный вектор матрицы A. Иными словами, выполняется равенство

$$\mathrm{A}\mathbf{s} = h\mathbf{s}. \tag{16.7}$$

С математической точки зрения, чем ближе величина $\lambda_h^{\max}$ к собственному значению h идеальной матрицы A, тем более согласованными будут элементы a_{ij}^k реальной матрицы A^k, а сама матрица A^k будет ближе к матрице A. На практике условия обратной симметричности элементов матрицы обычно соблюдаются, а выполнение условия совместимости не обеспечивается. Поэтому индекс согласованности I_h характеризует также нарушение условия совместимости.

Окончательное вычисление общей ценности $v(A_i)$ вариантов по формуле (16.4) проводится только после того, как будут получены согласованные оценки элементов на всех уровнях иерархической структуры, удовлетворяющие ЛПР. Субъективные предпочтения при сравнении элементов иерархии принято считать согласованными, если отношение согласованности R_h лежит в эмпирически установленных пределах 0,1—0,15. Если величина R_h на каком-то этапе выходит за эти пределы, то это служит сигналом для ЛПР к проверке своих оценок. При неудовлетворительной согласованности оценок возможна частичная или полная реструктуризация всей проблемы. Полезными приемами, улучшающими согласованность оценок, являются группировка однотипных элементов, объединение зависимых критериев.

Выполним проверку согласованности субъективных попарных сравнений элементов иерархической структуры и полученных на их основе результатов выбора лучшего загородного дома. Значения соответствующих индексов согласованности I_h и отношений согласованности R_h для сравнений вариантов по критериям и различных критериев между собой указаны в табл. 16.6.

Параметр $\lambda_h^{\max}$ рассчитывается для каждого уровня иерархии

Таблица 16.6

Показатели согласованности сравнений элементов структуры

Матрица	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
Параметр $\lambda_h^{\max}$	3,136	3,197	3,000	3,086	3,136
Индекс I_h	0,068	0,099	0,000	0,043	0,068
Отношение R_h	0,117	0,170	0,000	0,074	0,117

Матрица	A^6	A^7	A^8	A^0
Параметр $\lambda_h^{\max}$	3,247	3,000	3,065	9,863
Индекс I_h	0,123	0,000	0,032	0,266
Отношение R_h	0,213	0,000	0,056	0,189

по следующим формулам, вытекающим из формулы (16.6):

$$\lambda_q^{\max} = \sum_{i=1}^{m} a_i^q v_i^q, \quad a_i^q = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^q,$$

$$\lambda_0^{\max} = \sum_{q=1}^{n} a_q^0 w_q, \quad a_q^0 = \sum_{l=1}^{n} a_{ql}^0.$$

Здесь a_{ij}^q и a_{ql}^0 — суть элементы соответственно матриц парных сравнений вариантов A^q и критериев оценки A^0; m — число сравниваемых вариантов; n — число сравниваемых критериев оценки. Индекс средней согласованности для матриц $A^1 - A^8$ равен $I_3^{\text{ср}} = 0{,}58$ $(h = 3)$, для матрицы A^0 — $I_8^{\text{ср}} = 1{,}41$ $(h = 8)$.

В рассматриваемом примере полностью согласованными являются оценки загородных домов по критериям K_3 «Состояние дома» и K_7 «Условия продажи», для которых отношения согласованности $R_3 = R_7 = 0{,}000$. Наименее согласованы, а значит, содержат большое число неточностей и нарушений, оценки по критериям K_6 «Удобство транспортного сообщения» и K_2 «Комфортабельность жилища». Заметим, что при парных сравнениях вариантов ЛПР считает критерий K_3 более важным, а критерии K_2, K_4, K_6, K_7 относит к наименее важным (см. табл. 16.3). Согласованность оценок при сравнении критериев друг с другом не очень высокая: $R_0 = 0{,}189$, но близкая к приемлемой.

Оценим теперь согласованность всей иерархической структуры в целом, вычислив для нее индекс согласованности I и отношение согласованности R:

$$I = \sum_{q=1}^{8} w_q I_q = 0{,}175 \cdot 0{,}068 + 0{,}042 \cdot 0{,}099 + 0{,}167 \cdot 0{,}000 +$$

$$+ 0{,}036 \cdot 0{,}043 + 0{,}149 \cdot 0{,}068 + 0{,}063 \cdot 0{,}123 + 0{,}019 \cdot 0{,}000 +$$

$$+ 0{,}350 \cdot 0{,}032 = 0{,}047;$$

$$R = I/I_3^{\text{ср}} = 0{,}047/0{,}58 = 0{,}081.$$

Таким образом, отношение согласованности R для иерархической структуры имеет приемлемое значение 0,081, которое меньше предельного 0,100. Поэтому некоторую несогласованность критериев можно во внимание не принимать. Итак, решение о выборе дома A_1 в качестве лучшего можно считать в целом достаточно обоснованным.

16.6. Упрощенный метод аналитической иерархии

Естественным является желание уменьшить или полностью исключить несогласованность оценок при попарном сравнении базовых элементов иерархической структуры, особенно когда число таких сравнений достаточно велико. Вычисление собственных значений квадратных матриц большого размера при наличии несогласованности парных сравнений вариантов также представляет существенные вычислительные трудности.

Один из вариантов метода аналитической иерархии, разработанный В. Д. Ногиным (Россия, 2004), позволяет заметно упростить процедуру вычисления относительных приоритетов сколь угодно большого числа элементов структуры и тем самым облегчить нахождение общей ценности вариантов. Предлагается следующий способ построения матрицы парных сравнений элементов H_i и H_j любого иерархического уровня (вариантов, критериев).

Вначале ЛПР выделяет некоторый элемент в качестве так называемого эталона, с которым будут сравниваться все остальные элементы данного уровня иерархии. Этому элементу присваивается первый номер. Остальным элементам даются произвольные номера. Далее производится попарное сравнение каждого из элементов H_i, $i = 2, 3, \ldots, h$, с первым элементом H_1, и элементу H_i сопоставляется некоторое положительное число b_{1i}, показывающее субъективную значимость этого элемента для ЛПР по отношению к элементу H_1. В результате всем элементам H_i будут сопоставлены положительные числа $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1h}$. Очевидно, что $b_{11} = 1$.

Примем последовательность чисел $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1h}$ за первую строку квадратной матрицы парных сравнений $\mathrm{B} = \|b_{ij}\|_{h \times h}$ ранга h. Будем с самого начала строить матрицу B как согласованную, т. е. так, чтобы ее элементы b_{ij} удовлетворяли условиям обратной симметричности $b_{ij} \cdot b_{ji} = 1$ и совместимости $b_{ij} \cdot b_{jk} = b_{ik}$. Благодаря этим свойствам для всех номеров $i, j = 2, \ldots, h$ выполняются равенства $b_{ij} = b_{i1} \cdot b_{1j} = b_{1j}/b_{1i}$, с помощью которых однозначно находятся все элементы матрицы парных сравнений B.

Введем показатель сравнительной важности элемента иерархии H_i в виде

$$s_i = b_{i1}/b_{h1} = b_{1h}/b_{1i}. \tag{16.8}$$

Тогда локальный приоритет элемента H_i (частная ценность варианта, вес критерия) будет определяться выражением $v_i^k = v^k(H_i) = s_i / \sum_{j=1}^{h} s_j$.

Нетрудно убедиться, что для произвольного элемента b_{ij} матрицы B выполняется соотношение $b_{ij} = s_i/s_j$, аналогичное правилу задания элементов матрицы парных сравнений A в основном методе аналитической иерархии Саати. Вектор-столбец $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_h)^T$, составленный из значений показателей сравнительной важности (16.8), является собственным вектором матрицы B, а ее собственное значение равно h. Тем самым равенство (16.7) оказывается справедливым и для матрицы B.

Упростить метод аналитической иерархии можно также, взяв за основу не элементы первой строки матрицы парных сравнений B, а определенные наборы, состоящие из $h - 1$ элементов разных строк. Сначала подбирается элемент, наиболее подходящий для сравнения с эталонным элементом H_1, которому присваивается второй номер. В результате сравнения элементов H_1 и H_2 получаем число b_{12}. Затем для второго элемента H_2 ищется наиболее подходящий элемент H_3 и находится число b_{23} и так далее, пока не будет получен набор чисел $b_{11}, b_{12}, b_{23}, \ldots, b_{h-1,h}$. Формула для вычисления всех элементов матрицы парных сравнений B имеет тогда вид $b_{ij} = b_{i,j-1} \cdot b_{j-1,j}$, где $i = 1, \ldots, h - 2$, $j > i + 1$.

При использовании упрощенного метода аналитической иерархии для построения матрицы парных сравнений на каждом уровне иерархии достаточно выполнить только $h - 1$ сравнение элементов по отношению к выделенному элементу вместо $h(h-1)/2$ при полном сравнении всех пар. Таким образом, упрощенный вариант оказывается в $h/2$ раз эффективнее основного.

16.7. Метод мультипликативной аналитической иерархии

Предложено несколько разновидностей метода аналитической иерархии, в которых используются иные способы сравнительной оценки элементов иерархии и агрегирования локальных приоритетов. Одна из наиболее интересных и известных модификаций метода — мультипликативная аналитическая иерархия (Multiplicative AHP) — разработана Ф. Лутсма (Нидерланды, 1993) применительно к трехуровневым иерархическим структурам.

Первое существенное отличие мультипликативного метода состоит в способе определения сравнительной предпочтительности для ЛПР элементов иерархической структуры. Предлагается оценивать элементы иерархии по показательной шкале вместо шкалы отношений. В обоснование такого подхода к измерению субъективных предпочтений ЛПР выдвигается его аналогия с экспериментально обнаруженными психофизическими зависимостями между объективными значениями физических факторов, таких как яркость света, громкость звука, и субъективными оценками восприятия этих факторов человеком.

Сравнительная предпочтительность элементов H_i и H_j, принадлежащих одному и тому же иерархическому уровню, по каждому k-му аспекту по отношению к элементам вышележащего уровня иерархии характеризуется матрицей парных сравнений $\mathrm{A}^k = (a_{ij}^k)$, элементы которой определяются выражением $a_{ij}^k = \exp\{\gamma^k g_{ij}^k\}$. Здесь γ^k — параметр шкалы, g_{ij}^k — числовая оценка вербальной градации сравнительной предпочтительности i-го и j-го элементов одного уровня, взятая из табл. 16.7.

Как и в основном методе, элементы матрицы парных сравнений устанавливают предпочтительность элементов иерархической структуры для ЛПР: $H_i \succ H_j$, если $a_{ij}^k > 1$; $H_i \approx H_j$, если $a_{ij}^k = 1$; $H_i \prec H_j$, если $a_{ij}^k < 1$. Для более точной оценки предпочтительности элементов могут задаваться и промежуточные числовые значения градаций.

Ценность $v_i^k = v^k(H_i)$ i-го элемента иерархии H_i по k-му аспекту выражается через среднее геометрическое величин a_{ij}^k:

$$v_i^k = v^k(H_i) = \left(\prod_{j=1}^{h} a_{ij}^k\right)^{1/h}, \tag{16.9}$$

Таблица 16.7

Оценка сравнительной предпочтительности g_{ij} элементов иерархии

Оценка	Градация предпочтительности
8	Очень сильное превосходство i-го элемента над j-м элементом
6	Сильное превосходство i-го элемента над j-м элементом
4	Определенное превосходство i-го элемента над j-м элементом
2	Слабое превосходство i-го элемента над j-м элементом
0	Безразличие между i-м и j-м элементами
−2	Слабое превосходство j-го элемента над i-м элементом
−4	Определенное превосходство j-го элемента над i-м элементом
−6	Сильное превосходство j-го элемента над i-м элементом
−8	Очень сильное превосходство j-го элемента над i-м элементом

где h — общее число элементов рассматриваемого уровня иерархии. В этом случае частная ценность варианта A_i и сравнительная важность (вес) q-го критерия K_q определяются соответственно выражениями

$$v_i^q = v^q(A_i) = \left(\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^q\right)^{1/m} = \left(\prod_{j=1}^{m} \exp\{\gamma^v g_{ij}^q\}\right)^{1/m} = \\ = \exp\{(\gamma^v/m)\sum_{j=1}^{m} g_{ij}^q\}, \quad (16.10)$$

$$w_q = w(K_q) = \left(\prod_{l=1}^{n} a_{ql}^0\right)^{1/n} = \left(\prod_{l=1}^{n} \exp\{\gamma^w g_{ql}^0\}\right)^{1/n} = \\ = \exp\{(\gamma^w/n)\sum_{l=1}^{n} g_{ql}^0\}, \quad (16.11)$$

где рекомендуется (без особой аргументации) положить $\gamma^v = \ln 2$, $\gamma^w = 0{,}5 \ln 2$.

Вторым важным отличием мультипликативной модификации метода служит использование вместо взвешенной аддитивной свертки мультипликативной свертки частных ценностей для получения общей ценности варианта:

$$v(A_i) = \prod_{q=1}^{n} [v^q(A_i)]^{w_{ij}}. \qquad (16.12)$$

Частные ценности варианта и веса критериев обычно нормируются:

$$\sum_{i=1}^{m} v^q(A_i) = 1, \quad \sum_{q=1}^{n} w_q = 1.$$

Однако последнее, вообще говоря, не является обязательным.

Еще одна важная особенность метода мультипликативной аналитической иерархии — согласованность сравнительных оценок предпочтительности элементов, не требующая специальных дополнительных проверок. Основной и мультипликативный варианты метода сопоставимы по трудоемкости.

Отметим определенное методологическое сходство методов многомерного упорядочения СМАРТ (см. разд. 14.5) и мультипликативной аналитической иерархии. И в том и в другом методах ЛПР задает важность критериев и частную ценность вариантов, пользуясь одной и той же балльной системой оценок (в каждом из методов своей). Логарифмируя формулу (16.12), получим для общей ценности варианта выражение

$$\ln v(A_i) = \sum_{q=1}^{n} w_q \ln v_q(A_i),$$

которое с точностью до переобозначения $v'(A_i) = \ln v(A_i)$ совпадает со взвешенной суммой частных функций ценности (14.1), как в методе СМАРТ. Напомним, что такие функции ценности называют стратегически эквивалентными.

16.8. Особенности иерархических методов

Методы аналитической иерархии применимы для решения разнообразных практических задач, где требуется выделить лучший вариант или упорядочить варианты на основе многих качественных показателей, которые переводятся в количественные значения субъективной многомерной ценности вариантов.

Иерархические методы относятся ко второй группе методов рационального выбора.

Методы аналитической иерархии характеризуются гибкостью и сравнительной простотой использования. Поэтому и сам основной метод Саати, и его различные модификации получили в настоящее время широкое распространение в мире, приобрели большую популярность среди исследователей и практиков. Существует международное общество приверженцев подхода аналитической иерархии, которое регулярно проводит международные конференции.

Разработаны компьютерные реализации методов аналитической иерархии в виде систем поддержки принятия решений «Экспертный выбор» (Expert Choice) и «Критерий» (Criterium), где используется аддитивная свертка приоритетов, РЕМБРАНДТ (REMBRANDT — Ratio Estimation in Magnitudes or deciBels to Rate Alternatives, which are Non-DominaTed, вычисление соотношения в величинах или децибелах для оценивания недоминируемых альтернатив), где применяются мультипликативная свертка приоритетов.

Методы предлагают пользователю (ЛПР, экспертам, консультантам) универсальную схему анализа и структуризации сложной комплексной проблемы в виде иерархической структуры, в которой рассматриваемая проблема разбивается на меньшие составные части разной степени общности. Методы включают в себя достаточно простую систематизированную процедуру выявления предпочтений ЛПР и прямого измерения взаимной связи элементов разных уровней иерархии и их вклада в достижение глобальной цели. Относительная интенсивность взаимодействия элементов иерархической структуры вычисляется на основе последовательного учета предпочтений ЛПР путем попарного многоаспектного сравнения элементов каждого уровня иерархии.

Иерархические методы позволяют ЛПР контролировать и, если нужно, корректировать процесс достижения цели на разных стадиях процедуры. Методы не требуют обязательной транзитивности предпочтений ЛПР, что часто считается синонимом рациональности выбора. В рамках методов можно одновременно учитывать количественные и качественные факторы, влияющие на достижение глобальной цели, интегрировать различные, в том числе взаимозависимые и несогласованные, точки зрения, а также оценивать степень их согласованности по «горизонтали» и «вертикали».

Принципиальная методологическая ограниченность метода аналитической иерархии, снижающая его выразительные возможности, состоит, прежде всего, в замене сравнительных вербальных оценок разнохарактерных элементов иерархии — целей, критериев, вариантов — на однотипные числа. Это, во-первых, навязывает несвойственный человеку единообразный язык для выражения предпочтений ЛПР. Во-вторых, может сильно исказить (усилить или ослабить) предпочтения ЛПР. Кроме того, при большом числе сравниваемых элементов высока вероятность несогласованности и нетранзитивности оценок.

Например, при сравнении домов A_1 и A_3 по критерию K_1 «Величина дома» имеем согласно табл. 16.2, что дом A_1 предпочтительнее (больше) дома A_3 в $a_{13}^1 = s_1/s_3 = 8$ раз. В то же время, воспользовавшись другими сравнениями, получим, что $A_1 \succ A_2$ в $a_{12}^1 = s_1/s_2 = 6$ раз, а $A_2 \succ A_3$ в $a_{23}^1 = s_2/s_3 = 4$ раза. Тогда $A_1 \succ A_2 \succ A_3$ и дом A_1 предпочтительнее (больше) дома A_3 в $(s_1/s_2) \cdot (s_2/s_3) = 24$ раза, что в три раза превышает результат непосредственного сравнения домов A_1 и A_3.

Еще одно слабое место методов аналитической иерархии связано с отсутствием убедительных аргументов в пользу выбора аддитивной или мультипликативной свертки частных ценностей при вычислении скалярного показателя общей ценности вариантов. Использование того или иного способа агрегирования локальных приоритетов оказывает сильное влияние на то, какой вариант будет выделен в итоге как наилучший, что в ряде случаев может приводить к результатам, противоречащим здравому смыслу.

Среди существенных недостатков иерархических методов, основанных на агрегировании оценок с использованием среднего арифметического, отметим сильную зависимость конечного результата от контекста. Исключение или добавление нового варианта, изменение набора или относительной важности критериев оценки может заметно изменить вычисленные ценности вариантов, а значит, привести к совершенно иному упорядочению вариантов. Этого недостатка лишен мультипликативный метод, основанный на агрегировании оценок с использованием среднего геометрического.

ГЛАВА 17

ОГРАНИЧЕННАЯ ПОРОГОВАЯ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОСТЬ

17.1. Пороговый подход к выбору вариантов

Методы рационального выбора, рассмотренные в предыдущих разделах, обеспечивают субъективную оценку и сравнение вариантов решения проблемы, исходя из значений числовой функции ценности/полезности $v(A_i)$. Функция ценности представляет собой функциональную модель предпочтений ЛПР, в соответствии с которой ЛПР имеет только две возможности при попарном сравнении вариантов A_i и A_j: либо указать на сходство обоих вариантов $A_i \approx A_j$, если $v(A_i) = v(A_j)$, либо предпочесть один из них $A_i \succ A_j$, если $v(A_i) > v(A_j)$.

Вместе с тем на практике столь же часто встречаются и две другие вполне реалистические ситуации, которые нельзя охарактеризовать с помощью понятия функции ценности или полезности. Одна из них — ситуация несравнимости вариантов, когда ЛПР не может или затрудняется сделать выбор в пользу одного из них. Другая — ситуация слабой предпочтительности (нестрогого превосходства), когда ЛПР колеблется в определенном выборе одного из вариантов. Она занимает промежуточное положение между сходством и сильным различием вариантов.

Наличие таких четырех возможностей для выражения предпочтений ЛПР было сформулировано Б. Руа (Франция) как аксиома ограниченной сравнимости.

Потребность в иной модели предпочтений ЛПР, которая соответствовала бы аксиоме ограниченной сравнимости и описывала все указанные выше ситуации выбора, привела к созданию специального подхода к многокритериальному сравнению вариантов, называемого за рубежом «outranking approach», что дословно означает «подход внешнего ранжирования». По причинам, которые станут понятными позднее, будем называть его пороговым подходом.

Пороговый подход предназначен для упорядочения или сортировки конечного множества вариантов $A_1, \ldots, A_m$, оцененных по многим критериям $K_1, \ldots, K_n$. Каждый вариант A_i представляется вектором его оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, где $x_{il} = K_l(A_i)$, $l = 1, \ldots, n$ — оценка варианта A_i по критерию K_l, имеющему количественную шкалу X_l, которая упорядочена от худших (минимальных) оценок к лучшим (максимальным).

Пороговый подход основан на бинарном «отношении внешнего ранжирования» («outranking relation») S_{out}, которое назовем *отношением ограниченной предпочтительности*, или *отношением Руа*. Это отношение определяется следующим образом. Будем говорить, что вариант A_i ограниченно предпочтительнее варианта A_j, и писать $A_i S_{out} A_j$, если ЛПР считает, что по большинству критериев вариант A_i, по крайней мере, такой же хороший или «желательный», как и вариант A_j, или что по меньшинству критериев вариант A_i не хуже, чем вариант A_j.

Формально отношение ограниченной предпочтительности является объединением $S_{out} = R_g \bigcup R_h$ двух отношений: R_g — «по большинству критериев такой же хороший, как и» и R_h — «по меньшинству критериев не хуже, чем», которое задает на множестве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ оценок по критериям нестрогий слабый порядок (полное и транзитивное отношение).

Такое определение отношения S_{out} позволяет одновременно выразить разнообразные виды предпочтений ЛПР: безразличие (сходство) $J_{out} = S_{out} \bigcap S_{out}^{-1}$, нестрогое (слабое) превосходство $Q_{out} = \bar{S}_{out} \bigcap S_{out}^{-1}$, строгое (сильное) превосходство $P_{out} = S_{out} \bigcap \bar{S}_{out}^{-1}$, несравнимость $T_{out} = \bar{S}_{out} \bigcap \bar{S}_{out}^{-1}$ вариантов. Заметим, что в общем случае вышеприведенные отношения нетранзитивны.

Таким образом, пороговый подход реализует реляционную модель субъективного выбора, основанную на отношении ограниченной предпочтительности.

17.2. Измерение согласованности предпочтений ЛПР

Реляционная модель ограниченной предпочтительности вариантов, принятая в пороговом подходе для описания предпочтений ЛПР, опирается на основополагающие принципы согласия и разногласия и понятие порогов различимости предпочтений. Принципы согласия и разногласия служат для проверки выполнения условий «по крайней мере, такой же хороший, как и» и «не хуже, чем» и звучат так.

Принцип согласия (*принцип достаточного большинства*) — справедливость утверждения о выполнении отношения S_{out} поддерживается по «достаточному большинству» критериев.

Принцип несущественного разногласия (*принцип незначительного меньшинства*) — справедливость утверждения о выполнении отношения S_{out} не слишком строго отвергается по «незначительному меньшинству» критериев.

Применение принципов согласия и разногласия, как будет показано далее, позволяет измерить степень согласованности предпочтений ЛПР при сравнительной оценке вариантов с помощью специальных индексов. Это первая характерная черта порогового подхода.

При практическом сравнении вариантов человеку бывает трудно указать точные границы значений оценок по критериям, в пределах которых его предпочтения четко различаются. Кроме того, сами предпочтения могут быть в какой-то степени нестабильными. Они могут незначительно отличаться при изменении обстановки, в которой происходит выбор, особенно в ситуациях, трудных для оценки вариантов.

В рамках порогового подхода постулируется, что небольшие различия в оценках вариантов не изменяют характер отношения между этими вариантами. Тем самым по каждому виду отношения для каждого критерия вводятся некоторые буферные зоны неразличимости предпочтений ЛПР, которые определяются соответствующими порогами. Это вторая весьма важная черта порогового подхода.

Предпочтения ЛПР по каждому критерию K_l характеризуются информацией о его относительной важности (весе) w_l, интервалах неразличимости предпочтений, которые для отношений безразличия и строгого превосходства задаются соответственно пороговыми функциями безразличия $q_l(x_l)$ и превосходства $p_l(x_l)$ критериальных оценок x_l, и пороге вето $y_l(x_l)$, устанавливающем предел оценок, при превышении которого нарушается справедливость утверждения о выполнении отношения ограниченной предпочтительности S_{out} для данного критерия K_l, даже если оно остается верным для остальных критериев.

Для пороговых функций выполняются следующие соотношения:

$$0 \le q_l(x_{il}) \le p_l(x_{il}) \le y_l(x_{il});$$

$$x_{jl}+q_l(x_{jl}) \le x_{il}+q_l(x_{il}); \quad x_{jl}+p_l(x_{jl}) \le x_{il}+p_l(x_{il}) \text{ при } x_{jl} < x_{il}.$$

Значения пороговых функций можно вычислить по формулам: $q_l(x_{il}) = q_l + a_l x_{il}$; $p_l(x_{il}) = p_l + b_l x_{il}$. В практических приложениях пороги часто считаются постоянными: $q_l(x_{il}) = q_l$, $p_l(x_{il}) = p_l$, $y_l(x_{il}) = y_l$ или даже $q_l(x_{il}) = q_0$, $p_l(x_{il}) = p_0$,

$y_l(x_{il}) = y_0$. Величины порогов для каждого критерия K_l задаются ЛПР.

Тройка $(x_{il}, q_l(x_{il}), p_l(x_{il}))$ носит название *псевдокритерия*. С помощью псевдокритерия можно выразить все разновидности отношений между вариантами по каждому из критериев $K_1, \ldots, K_n$. Пороговые функции выделяют такие зоны неопределенности предпочтений ЛПР, в пределах которых по отдельному критерию сохраняется характер отношения между сравниваемыми вариантами:

$A_i J_{out(l)} A_j$ — варианты A_i и A_j безразличны по критерию K_l, если $|x_{il} - x_{jl}| \le q_l(x_{jl})$;

$A_i Q_{out(l)} A_j$ — вариант A_i слабо превосходит вариант A_j по критерию K_l, если $q_l(x_{jl}) < x_{il} - x_{jl} \le p_l(x_{jl})$;

$A_i P_{out(l)} A_j$ — вариант A_i сильно превосходит вариант A_j по критерию K_l, если $p_l(x_{jl}) < x_{il} - x_{jl} \le y_l(x_{jl})$;

$A_i P_{dom(l)} A_j$ — вариант A_i очень сильно превосходит (доминирует) вариант A_j по критерию K_l, если $y_l(x_{jl}) < x_{il} - x_{jl}$.

Используя понятия пороговых функций, можно следующим образом формализовать понятия «гармония» и «дисгармония» каждого критерия с отношением ограниченной предпочтительности S_{out}, которые определяются принципами согласия и разногласия. Говорят, что критерий K_l:

полностью согласован с утверждением $A_i S_{out} A_j$, если $x_{jl} - x_{il} \le q_l(x_{il})$;

частично согласован с утверждением $A_i S_{out} A_j$, если $q_l(x_{il}) < x_{jl} - x_{il} \le p_l(x_{il})$;

частично не согласован с утверждением $A_i S_{out} A_j$, если $p_l(x_{il}) < x_{jl} - x_{il} \le y_l(x_{il})$;

полностью не согласован с утверждением $A_i S_{out} A_j$, если $y_l(x_{il}) < x_{jl} - x_{il}$.

17.3. Метод ЭЛЕКТРА ранжирования вариантов

Исторически первым методом, появившимся в рамках порогового подхода, был метод ЭЛЕКТРА (ELECTRE — ELimination Et Choix Traduisant la Realité, исключение и выбор, отражающие реальность), разработанный Б. Руа (Франция, 1968). Позднее были созданы многочисленные модификации, образовавшие целое семейство методов ЭЛЕКТРА (ELECTRE Iv, Is, II, III, IV, A, TRI, GD), а также другие пороговые методы.

Различные варианты методов состоят из следующих типовых этапов:

• *конструкционный этап*, где определяются отношения превосходства, используемые для попарного сравнения вариантов по всем критериям, и рассчитываются специальные индексы согласованности предпочтений ЛПР;

• *операционный* (*эксплуатационный*) *этап*, где на основе введенных отношений превосходства и индексов согласованности предпочтений строится последовательно сужаемое множество недоминируемых вариантов и находится искомое множество наиболее предпочтительных вариантов, которое будет существенно меньшим, чем множество парето-оптимальных решений.

Варианты в методе ЭЛЕКТРА I ранжируются, исходя из отношений сильного превосходства одного из вариантов или их безразличия (сходства). На конструкционном этапе первоначально удаляются из рассмотрения все доминируемые варианты. Для остальных проверяется справедливость утверждения об ограниченной предпочтительности одного из вариантов или, говоря иными словами, выполнимость отношения $A_i S_{out} A_j$.

Проверка проводится на основе специальных индексов согласия и разногласия, которые рассчитываются для каждой пары вариантов A_i и A_j. Для этого множество критериев оценки $K_1, \ldots, K_n$ разбивается на три подмножества: $L_{ij}^{>}$ — группа критериев, по которым вариант A_i сильно превосходит вариант A_j ($A_i P_{out(l)} A_j$); $L_{ij}^{=}$ — группа критериев, по которым варианты A_i и A_j безразличны ($A_i J_{out(l)} A_j$); $L_{ij}^{<}$ — группа критериев, по которым вариант A_j сильно превосходит вариант A_i ($A_j P_{out(l)} A_i$).

Индекс согласия (*конкорданса*) вариантов A_i и A_j определяется отношением сумм показателей важности критериев

$$c_{ij} = c(A_i, A_j) = \left(\sum_{l \in L_{ij}^{>}} w_l + \sum_{l \in L_{ij}^{=}} w_l \right) / \sum_{l=1}^{n} w_l \qquad (17.1)$$

и характеризует соотношение критериев, по которым первый вариант такой же хороший, как и второй вариант, или не хуже второго и второй вариант лучше первого. Вес w_l критерия K_l назначается ЛПР и трактуется как число голосов, поданных избирателями на выборах за кандидата.

Индекс разногласия (*дискорданса*) вариантов A_i и A_j устанавливается как относительная разность оценок по самому неблагоприятному критерию:

$$d_{ij} = d(A_i, A_j) = \max_{l \in L_{ij}^{<}} (x_{jl} - x_{il})/M, \qquad (17.2)$$

где $M = \max_l M_l$, $M_l = x_l^{\max} - x_l^{\min}$ — длина шкалы l-го критерия, равная максимальной разности оценок по этому критерию. Очевидны следующие свойства индексов согласия и разногласия: $0 \le c_{ij} \le 1$, $0 \le d_{ij} \le 1$, причем $c_{ij} = 1$, $d_{ij} = 0$, если $A_i \succ A_j$ по всем критериям $K_1, \ldots, K_n$, $c_{ij} = 0$, $d_{ij} = 1$ в противоположном случае.

Обобщенную информацию об ограниченной предпочтительности всех вариантов можно представить в виде матриц согласия $\mathrm{C} = (c_{ij})_{m \times m}$ и разногласия $\mathrm{D} = (d_{ij})_{m \times m}$, элементами которых являются соответствующие индексы. Индексы согласия носят некомпенсаторный характер: они не замещают «потери» по одним критериям за счет «выигрышей» по другим. Индексы согласия зависят только от соотношений весов отдельных критериев и измеряют предпочтения ЛПР в шкале отношений. Индексы разногласия, напротив, зависят от разности оценок по отдельным критериям и измеряют предпочтения ЛПР в шкале интервалов. Заметим, что достаточно одного дисгармонирующего критерия, чтобы нарушить отношение ограниченной предпочтительности.

На операционном этапе для ранжирования вариантов ЛПР задает для индексов согласия и разногласия два пороговых значения $c_1 > 0$ и $d_1 > 0$. Считается, что вариант A_i превосходит вариант A_j, если $c_{ij} \ge c_1$ и $d_{ij} \le d_1$. Иными словами, вариант A_i ограниченно предпочтительнее варианта A_j $(A_i S_{out} A_j)$, если совокупность критериев, по которым сравнивается предпочтительность вариантов A_i и A_j, является достаточно большой, а оценки по остальным критериям не дают основания для возражений против такой предпочтительности. Заданные пороговые уровни индексов c_1 и d_1 выделяют первое ядро X^1 предпочтительных вариантов, куда входят недоминируемые варианты.

Далее вводятся новые пороговые уровни, которые уменьшают порог согласия $c_2 < c_1$ и увеличивают порог разногласия $d_2 > d_1$, в результате происходит сужение множества недоминируемых вариантов и выделяется второе ядро X^2 предпочтительных вариантов. После чего процедура сужения множества вариантов продолжается. В последнее ядро войдут самые «непредпочтительные» и совершенно непохожие варианты. Образовавшаяся последовательность сужающихся ядер $X^1, X^2, \ldots, X^f$ определяет нестрогую ранжировку вариантов по отношению ограниченной предпочтительности S_{out}. ЛПР, задавая пороговые уровни согласия и разногласия, получает возможность для гибкого анализа имеющегося множества вариантов решения проблемы.

17.4. Семейство методов ЭЛЕКТРА

В последующих модификациях метода ЭЛЕКТРА I использовались более разнообразные способы выражения и агрегирования предпочтений ЛПР, учитывающие разные виды отношений между вариантами.

Метод ЭЛЕКТРА II (1973) опирается на отношение ограниченной предпочтительности S_{out}, включающее отношения сильного P_{out} и слабого Q_{out} превосходства, безразличия J_{out} и несравнимости T_{out} вариантов. Дополнительно к индексам согласия c_{ij} и разногласия d_{ij} вводится индекс несравнимости вариантов A_i и A_j

$$t_{ij} = t(A_i, A_j) = \sum_{l \in L_{ij}^{>}} w_l / \sum_{l \in L_{ij}^{<}} w_l. \qquad (17.3)$$

Для каждого из индексов задаются пороговые уровни, определяющие отношения ограниченной предпочтительности для каждой пары вариантов: $0 < c_3 < c_2 < c_1 < 1$; $0 < d_1 < d_2 < 1$. Варианты A_i и A_j считаются сравнимыми, если $t_{ij} \geq 1$. При этом вариант A_i слабо превосходит вариант A_j $(A_i Q_{out} A_j)$, если $c_{ij} \geq c_3$ и $d_{ij} \leq d_2$, и сильно превосходит $(A_i P_{out} A_j)$, если $c_{ij} \geq c_1$ и $d_{ij} \leq d_2$, либо $c_{ij} \geq c_2$ и $d_{ij} \leq d_1$. При $0 < t_{ij} < 1$ варианты A_i и A_j несравнимы $(A_i T_{out} A_j)$.

В отличие от метода ЭЛЕКТРА I в методе ЭЛЕКТРА II формируются две последовательности ядер, сужающихся по отношению ограниченной предпочтительности S_{out} вариантов. Одна из последовательностей содержит недоминируемые варианты и строится от лучших вариантов к худшим, другая содержит недоминирующие варианты и строится в обратном направлении — от худших вариантов к лучшим. Очевидно, что нестрогие ранжировки вариантов Z^+ и Z^- в общем случае не совпадают. Если ранги вариантов в этих ранжировках не слишком различаются, то в качестве окончательного результата принимается пересечение этих ранжировок $Z = Z^+ \bigcap Z^-$, которое задает предпорядок на множестве вариантов.

Процедура сравнения предпочтительности вариантов в методе ЭЛЕКТРА III (1978) использует в явном виде пороги безразличия $q_l(x_{il})$, строгого превосходства $p_l(x_{il})$ и вето $y_l(x_{il})$, которые задаются ЛПР для оценок $x_{il} = K_l(A_i)$ по каждому критерию K_l. На конструкционном этапе индекс согласия для двух вариантов A_i и A_j рассчитывается по формуле

$$c_{ij} = c(A_i, A_j) = \sum_{l=1}^{n} w_l c_l(A_i, A_j) / \sum_{l=1}^{n} w_l, \qquad (17.4)$$

где показатель согласия $c_l(A_i, A_j)$ для пары вариантов A_i и A_j по критерию K_l в простейшем случае постоянных порогов q_l, p_l и y_l определяется соотношениями:

$$\begin{array}{ll} c_l(A_i, A_j) = 1, & \text{если } x_{jl} - x_{il} \le q_l; \\ c_l(A_i, A_j) = (x_{il} - x_{jl} + p_l)/(p_l - q_l), & \text{если } q_l < x_{jl} - x_{il} \le p_l; \\ c_l(A_i, A_j) = 0, & \text{если } p_l < x_{jl} - x_{il}. \end{array}$$

При индексе согласия $c(A_i, A_j) = 1$ нет критериев, по которым вариант A_j лучше варианта A_i, при $c(A_i, A_j) = 0$ вариант A_i хуже варианта A_j по всем критериям.

Индекс разногласия для двух вариантов A_i и A_j по каждому критерию K_l полагается равным:

$$\begin{array}{ll} d_l(A_i, A_j) = 0, & \text{если } x_{jl} - x_{il} \le p_l; \\ d_l(A_i, A_j) = (x_{jl} - x_{il} - p_l)/(y_l - p_l), & \text{если } p_l < x_{jl} - x_{il} \le y_l; \\ d_l(A_i, A_j) = 1, & \text{если } y_l < x_{jl} - x_{il}. \end{array} \qquad (17.5)$$

Значение индекса разногласия $d_l(A_i, A_j) = 0$ означает, что вариант A_j не лучше варианта A_i, а $d_l(A_i, A_j) = 1$, что A_j существенно лучше варианта A_i по критерию K_l.

Степень доверия $f(A_i, A_j)$ к утверждению о выполнимости бинарного отношения ограниченной предпочтительности S_{out} для каждой пары вариантов A_i и A_j вводится следующим образом. Если согласие двух вариантов «не слабее» их разногласия, т. е. $c(A_i, A_j) \ge d_l(A_i, A_j)$, то

$$f_{ij} = f(A_i, A_j) = c(A_i, A_j). \qquad (17.6)$$

В противоположном случае

$$f_{ij} = f(A_i, A_j) = c(A_i, A_j) \prod_{l \in L_{ij}^0} [1 - d_j(A_i, A_j)]/[1 - c(A_i, A_j)], \qquad (17.7)$$

где L_{ij}^0 — подмножество критериев, для которых $c(A_i, A_j) <$ $< d_l(A_i, A_j)$. Если для некоторого критерия индекс разногласия $d_l(A_i, A_j) = 1$, то степень доверия $f(A_i, A_j) = 0$. Совокупность всех степеней доверия образует матрицу доверия $\mathrm{F} = (f_{ij})_{m\times m}$, которая характеризует выполнимость бинарного отношения ограниченной предпочтительности S_{out} для рассматриваемой совокупности вариантов.

Далее, аналогично методу ЭЛЕКТРА II, на операционном этапе формируются две последовательности сужающихся ядер и строятся две соответствующие им ранжировки вариантов: нисходящая Z^+ и восходящая Z^-. Опишем процедуру построения нисходящей ранжировки вариантов Z^+. Определяется максимальное значение степени доверия — элемент матрицы $f_0 =$ $= \max f_{ij}$, и ЛПР устанавливает некоторый порог доверия $e(f_0)$. Строится вспомогательная матрица $\mathrm{B} = (b_{ij})_{m\times m}$, элементы которой задаются условиями $b_{ij} = 1$, если $f_{ij} \geq f_0 - e(f_0)$; $b_{ij} = 0$ в противоположном случае. Вычисляются суммы элементов матрицы B по строке $s_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij}$ и столбцу $r_i = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{kl}$, равные соответственно числу вариантов, которые хуже варианта A_i (уступают варианту A_i по отношению S_{out}), и числу вариантов, которые лучше варианта A_i (превосходят вариант A_i по отношению S_{out}).

Подмножество вариантов, имеющих наибольшее значение разности $\max(s_i - r_i)$, образуют первое по предпочтительности ядро вариантов X^1. Если в ядре X^1 содержится только один вариант, он исключается из рассмотрения, и процедура повторяется вне ядра X^1 на суженном множестве вариантов $X \setminus X^1$. Если в ядре X^1 содержится больше одного варианта, то процедура повторяется внутри ядра X^1 до тех пор, пока в последнем самом малом подмножестве ядра X^1 останется единственный вариант. После чего ядро X^1 исключается из рассмотрения, и процедура повторяется вне ядра X^1 на суженном множестве вариантов $X \setminus X^1$. В результате появляется нисходящая последовательность ядер $X^1, X^2, \ldots, X^f$, составляющая первую ранжировку Z^+.

Аналогичным образом для другого порога доверия $e(f_0)$ строится вторая ранжировка Z^-, в которой восходящая последовательность ядер образуется из вариантов, имеющих наименьшее значение разности $\min(s_i - r_i)$. Итоговый результат в виде нестрогого упорядочения вариантов находится как пересечение нисходящей и восходящей ранжировок $Z = Z^+ \bigcap Z^-$.

Метод ЭЛЕКТРА IV (1982) близок к методу ЭЛЕКТРА III. В нем также используются пороги безразличия, строгого предпочтения и вето, но показатели относительной важности критериев явно не вводятся. Вместо них для разных групп критериев задаются четыре вида бинарных отношений, в совокупности определяющих отношение ограниченной предпочтительности S_{out}, по которому строится предпорядок на множестве вариантов.

Метод ЭЛЕКТРА TRI (1993) предназначен для сортировки вариантов в заранее заданные классы решений, упорядоченные от худшего к лучшему. Каждый класс характеризуется своим так называемым профилем, определяемым нижней и верхней границами класса. Вариант относится к соответствующему классу решений, если верхняя граница класса и этот вариант находятся в отношении ограниченной предпочтительности S_{out}, выполнение которого проверяется путем вычисления степени доверия, как это делается в методе ЭЛЕКТРА III. Существуют другие модификации методов ЭЛЕКТРА, а также иные пороговые методы упорядочения заданного множества вариантов.

17.5. Задача формирования портфеля проектов

Рассмотрим в качестве примера решение задачи формирования портфеля проектов для инвестиций с помощью метода ЭЛЕКТРА III. Допустим, имеется пять предприятий $A_1 - A_5$, где предполагается модернизировать производство. Руководитель, отвечающий за распределение средств на выполнение проектов, заинтересован в упорядочении предприятий, позволяющем ему выбрать лучший вариант инвестиций.

1. Предварительно проводится структуризация проблемы. При участии ЛПР и экспертов были сформулированы следующие критерии оценки проектов:

K_1. Финансовая устойчивость предприятия.

K_2. Обоснованность предлагаемого плана модернизации.

K_3. Возможность неудачной реализации проекта.

K_4. Риск экологического ущерба при использовании новой технологии.

K_5. Обеспеченность предприятия сырьем для работы по новой технологии.

Каждый из критериев объединяет несколько заранее отобранных показателей, характеризующих соответствующий аспект проекта. Так, финансовый критерий K_1 включает в себя величины расходов и доходов, налоговые платежи, показатели амортизации оборудования, дисконтирования и ряд других

Таблица 17.1

Матрица оценок проектов по критериям

X	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1	−15	90	0	40	100
A_2	130	100	0	0	0
A_3	−10	50	0	10	100
A_4	45	90	0	5	20
A_5	−15	100	0	20	40

стоимостных показателей, рассчитанных за период окупаемости проекта.

Значения выделенных показателей для каждого из предприятий задаются экспертами, а затем агрегируются в числовые оценки по соответствующим критериям. Оценка по критерию K_1 представляет собой величину, соотнесенную с чистым дисконтированным доходом (ЧДД) предприятия. Оценки по остальным критериям $K_2 - K_5$ даются по балльным шкалам от 0 до 100. Полученные предприятиями оценки по критериям $X = (x_{il})_{m \times n}$ указаны в табл. 17.1.

Заметим, что процедура отбора критериев и назначения оценок по критериям носит сугубо субъективный характер. Как видно из табл. 17.1, оценки по критерию K_3 «Возможность неудачной реализации проекта» имеют нулевое значение для всех проектов. Однако, как убедимся ниже, исключать критерий K_3 из списка рассматриваемых критериев нельзя.

2. Следующим и также субъективным шагом является конструкционный этап процедуры. ЛПР устанавливает показатели

Таблица 17.2

Индикаторы предпочтений ЛПР

Индикатор	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Показатель важности w_l	1	1	1	1	1
Порог безразличия q_l	25	15	0	10	10
Порог превосходства p_l	50	30	1	25	20
Порог вето y_l	100	60	2	50	90

важности критериев w_l, пороги безразличия q_l, строгого превосходства p_l и вето y_l, которые выражают его предпочтения. Значения этих показателей приведены в табл. 17.2. Для простоты все критерии приняты одинаково важными для ЛПР.

Воспользовавшись данными табл. 17.1 и 17.2, вычисляются значения индексов согласия $c(A_i, A_j)$ и разногласия $d_l(A_i, A_j)$ для каждой пары проектов A_i и A_j по формулам (17.4) и (17.5).

Например, для проектов A_2 и A_5 результаты этих вычислений выглядят следующим образом.

Индексы согласия:

$$\begin{aligned}
&c_1(A_2, A_5) = 1, && \text{так как } -15 - 130 \le 25;\\
&c_2(A_2, A_5) = 1, && \text{так как } 100 - 100 \le 15;\\
&c_3(A_2, A_5) = 1, && \text{так как } 0 - 0 \le 0;\\
&c_4(A_2, A_5) = 0{,}333, && \text{так как } 10 < 20 - 0 \le 25 \text{ и}\\
& && (0 - 20 + 25)/(25 - 10) = 1/3;\\
&c_5(A_2, A_5) = 0, && \text{так как } 20 < 40 - 0;
\end{aligned}$$

$$c_{25} = c(A_2, A_5) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 +$$
$$+ 1 \cdot 0{,}333 + 1 \cdot 0)/(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 0{,}667.$$

Индексы разногласия:

$$\begin{aligned}
&d_1(A_2, A_5) = 0, && \text{так как } -15 - 130 \le 50;\\
&d_2(A_2, A_5) = 0, && \text{так как } 100 - 100 \le 30;\\
&d_3(A_2, A_5) = 0, && \text{так как } 0 - 0 \le 1;\\
&d_4(A_2, A_5) = 0, && \text{так как } 20 - 0 \le 25;\\
&d_5(A_2, A_5) = 0{,}286, && \text{так как } 20 < 40 - 0 < 90 \text{ и}\\
& && (40 - 0 - 20)/(90 - 20) = 2/7.
\end{aligned}$$

Матрица согласия $\mathrm{C} = (c_{ij})_{m \times m}$ представлена в табл. 17.3.

Вычисленные таким образом индексы согласия и разногласия для всех пар проектов и всех критериев используются для измерения степени доверия к выполнимости отношения ограниченной предпочтительности S_{out}. Так, поскольку $c(A_2, A_5) > d_l(A_2, A_5)$ для всех критериев K_1 — K_5, то степень доверия к выполнимости отношения $A_2 S_{out} A_5$, согласно формуле (17.6), $f_{25} = 0{,}667$. Если сравнить варианты A_1 и A_2 по критерию K_1, то индекс разногласия составит $d_1(A_1, A_2) = 1$, так как $100 < 130 - (-15)$. В этом случае степень доверия к выполнимости отношения $A_1 S_{out} A_2$ по формуле (17.7) равна $f_{12} = 0$. Матрица доверия

Таблица 17.3

Матрица согласия C

C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1,00	0,80	1,00	0,80	1,00
A_2	0,60	1,00	0,80	0,80	0,67
A_3	0,60	0,60	1,00	0,60	0,80
A_4	0,60	0,80	0,80	1,00	0,73
A_5	0,67	0,80	0,80	0,80	1,00

F $= (f_{ij})$, рассчитанная для рассматриваемого примера, приведена в табл. 17.4.

3. Матрица доверия F используется на операционном этапе для построения итоговой ранжировки проектов $A_1 - A_5$ по отношению ограниченной предпочтительности S_{out}. Максимальное значение степени доверия, согласно табл. 17.4, $f_0 = 1{,}0$. Положим порог доверия равным $e(f_0) = 0{,}1 f_0$. Вспомогательная матрица B для нисходящей последовательности дана в табл. 17.5.

Нисходящая ранжировка проектов имеет вид

$$Z^+ \Leftrightarrow (A_1) \succ (A_2 \approx A_3 \approx A_4 \approx A_5).$$

Аналогичным образом строится восходящая ранжировка проектов, которая при пороге доверия $e(f_0) = 0{,}2 f_0$ имеет такой вид:

$$Z^- \Leftrightarrow (A_1 \approx A_2) \succ (A_3 \approx A_5) \succ A_4.$$

Ядра вариантов выделены круглыми скобками. Проекты, попавшие в одно и то же ядро, получают одинаковые ранги. Учитывая эти ранги, легко найти итоговую ранжировку проектов:

$$Z = Z^+ \cap Z^- \Leftrightarrow A_1 \succ A_2 \succ (A_3 \approx A_5) \succ A_4.$$

Таблица 17.4

Матрица доверия F

F	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1,00	0,00	1,00	0,80	1,00
A_2	0,00	1,00	0,00	0,80	0,67
A_3	0,60	0,00	1,00	0,60	0,80
A_4	0,21	0,80	0,57	1,00	0,73
A_5	0,67	0,00	0,80	0,80	1,00

Таблица 17.5

Вспомогательная матрица B

B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	s_i	$s_i - r_i$
A_1	1	0	1	0	1	3	2
A_2	0	1	0	0	0	1	0
A_3	0	0	1	0	0	1	−1
A_4	0	0	0	1	0	1	0
A_5	0	0	0	0	1	1	−1
r_i	1	1	2	1	2	—	—

После получения итоговой ранжировки необходимо провести анализ чувствительности результата к изменению значений весов критериев и порогов индексов согласованности предпочтений ЛПР. В рассмотренном примере согласованность итоговых результатов оказалась приемлемой для ЛПР.

17.6. Особенности пороговых методов

Пороговые методы многокритериального сравнения вариантов достаточно часто применяются на практике, особенно в странах Западной Европы. Здесь сложилась так называемая европейская школа принятия решений, главенствующее место в которой занимают именно пороговые методы. Эти методы позволяют гибко выражать различные виды предпочтений ЛПР: сильные, слабые, нейтральные, а также учитывать несравнимость вариантов, используя специальные числовые индикаторы согласованности и неопределенности предпочтений.

Основное содержание пороговых методов заключается в последовательном сужении множества допустимых вариантов, особом способе согласования оценок вариантов по отдельным количественным критериям и специфическом подходе к агрегированию предпочтений ЛПР. Результат применения методов — либо частичное или полное упорядочение, либо порядковая классификация заданного множества вариантов на основе специального отношения ограниченной предпочтительности без вычисления ценности вариантов. Таким образом, пороговые методы входят в третью группу методов рационального выбора.

Одно из важных достоинств пороговых методов — возможность ЛПР активно участвовать и вмешиваться в ход решения задачи, влиять на полученный результат. Это может осуществляться различными средствами: путем определения весов критериев, задания порогов отношений безразличия, превосходства и доминирования, установления пороговых уровней индексов согласия и разногласия, последовательного выделения ядер предпочтительных вариантов. Существенно, что предпочтения ЛПР не задаются априорно, а формируются и уточняются в процессе поэтапного анализа и решения проблемы.

Использование принципов согласия и разногласия предотвращает возможность компенсации существенного недостатка по одному из критериев за счет нескольких незначительных достоинств по другим критериям, как это, например, производится в методах, основанных на функции ценности. Вместе с тем применение этих принципов приводит к бинарным отношениям, которые могут быть нетранзитивными и/или неполными, что усложняет процедуры полного ранжирования вариантов. В ряде случаев возможно возникновение циклов на множестве вариантов, что требует введения в метод специальных процедур для их исключения. Сильное влияние на конечный результат оказывает назначение весов критериев. При решении практических проблем выяснилось, что для одного и того же набора реальных исходных данных разные модификации методов ЭЛЕКТРА дают хотя и близкие, но различающиеся результаты, что обусловливает необходимость проведения дополнительного анализа чувствительности результатов.

Первоначально пороговый подход был эвристическим. В последние годы стали публиковаться работы, где дается его теоретическое обоснование, использующее теорию графов и упорядоченных множеств. Появились также пороговые методы для группового принятия решений при наличии нескольких независимых ЛПР. Разнообразие и обилие показателей, вычисление которых связано с непосредственным участием ЛПР, делает применение пороговых методов сравнительно сложным и трудоемким для человека. Для их практического использования разработано несколько компьютерных систем поддержки принятия решений, реализующих разные варианты методов ЭЛЕКТРА, которые обеспечивают интерактивность процедур взаимодействия человека и ЭВМ.

ГЛАВА 18
ВЕРБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

18.1. Вербальный подход к выбору вариантов

В реальной жизни встречается немало ситуаций субъективного выбора, варианты решения которых характеризуются главным образом не числовыми, а вербальными (словесными) признаками. Подобный подход больше соответствует присущим людям способам описания проблемы и выражения их предпочтений. С одной из таких проблем, связанных с покупкой загородного дома, уже встречались в гл. 16. Для оценки имевшихся вариантов там использовались качественные критерии с развернутыми содержательными описаниями.

Однако в тех же иерархических методах при сравнении вариантов друг с другом и последующем вычислении ценности вариантов качественные оценки по критериям переводились в числовые показатели, причем это делалось по единственной и единой для всех критериев шкале. Очевидно, что при таком преобразовании качественной информации в количественную возможны существенные погрешности и большой произвол в измерениях предпочтений ЛПР, что может приводить к их заметному искажению.

Среди требований, предъявляемых к методам рационального выбора, большое значение имеют математическая корректность и психологическая обоснованность методов, их приближенность к естественному языку, более удобному для описания конкретной проблемной ситуации и выражения предпочтений ЛПР. Этим требованиям в значительной мере удовлетворяют методы *вербального анализа решений*, становление и развитие которых связано с именем О. И. Ларичева (СССР, Россия). Методы базируются на результатах психологических экспериментов по исследованию возможностей человека обрабатывать нечисловую информацию.

Вербальный анализ решений реализует реляционную модель предпочтений ЛПР, основанную на многокритериальной символьной оценке и сравнении вариантов. Определения числовой ценности вариантов не требуется. Собственно говоря, именно поэтому методы и получили название «вербальные».

18.2. Выявление предпочтений ЛПР

В вербальном анализе решений используются оригинальные процедуры выявления предпочтений ЛПР. Свойства вариантов измеряются с помощью многих качественных критериев $K_1, \ldots,$ K_n, имеющих небольшое число четко различающихся градаций на шкалах $X_q = \{x_q^1, x_q^2, \ldots, x_q^{h_q}\}$, $q = 1, \ldots, n$. Перечень критериев и содержание их шкал определяется при непосредственном участии ЛПР и отражают его цели и предпочтения. Градации шкал критериев имеют развернутые словесные формулировки на обычном для ЛПР языке. Варианты $A_1, \ldots, A_m$ представляются n-мерными кортежами $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, где компонента $x_{iq} = K_q(A_i)$ является оценкой варианта A_i по q-му критерию K_q, а сам кортеж оценок принадлежит декартовому произведению шкал критериев: $\mathbf{x}_i \in X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Одна из отличительных особенностей вербального анализа решений — специальный способ выявления предпочтений ЛПР. Вначале, исходя из своих субъективных предпочтений, ЛПР определяет некоторые порядки градаций оценок на шкалах всех критериев $X_1, \ldots, X_n$. Тем самым на множестве X задается транзитивное отношение доминирования кортежей R_{dom}, по которому можно упорядочить часть кортежей, не обращаясь к ЛПР. В рамках вербального подхода будем называть такое упорядочение объективным.

Далее пары формально несравнимых по отношению доминирования R_{dom} кортежей предъявляются ЛПР для сравнения. ЛПР задается вопрос о предпочтительности для него одного из вариантов, который формулируется на естественном языке в развернутом виде, где присутствуют словесные формулировки градаций шкал сравниваемых сочетаний оценок по критериям.

Пример такого вопроса к ЛПР приведен ниже в задаче отбора проектов. Отвечая на поставленный вопрос, ЛПР выражает свои предпочтения, устанавливая между кортежами оценок одно из следующих бинарных отношений: субъективное строгое превосходство одного из вариантов $\mathbf{x}_i P_{sub} \mathbf{x}_j$, субъективное нестрогое превосходство одного из вариантов $\mathbf{x}_i R_{sub} \mathbf{x}_j$, субъективная эквивалентность вариантов $\mathbf{x}_i I_{sub} \mathbf{x}_j$ или их несравнимость $\mathbf{x}_i T \mathbf{x}_j$.

При измерении свойств вариантов и агрегировании предпочтений ЛПР используются только такие психологически допустимые процедуры, как сравнение двух кортежей, различающихся оценками либо по одному, либо по двум критериям при одинаковых оценках по остальным критериям; отнесение кортежей оценок к заданным классам решений. При сравнении кортежей оценок считается, что выполняется аксиома независимости свойств вариантов, а критерии независимы по предпочтению.

В методах вербального анализа решений предполагается также непротиворечивость предпочтений единственного ЛПР, т. е. транзитивность отношений субъективного превосходства P_{sub}, R_{sub} и эквивалентности I_{sub}. При появлении нетранзитивных циклов они должны исключаться. С этой целью в вербальных методах выполняется специальная проверка получаемой от ЛПР информации на непротиворечивость.

Несогласованность суждений ЛПР может проявляться в виде ошибок, неточностей и противоречий, допускаемых человеком при сравнении вариантов по многим критериям, их упорядочении и/или классификации. Подобные ошибки и противоречия выявляются, предъявляются ЛПР для анализа и затем устраняются. Обычно это производится в интерактивном режиме. Осуществляется прямая и косвенная проверка ответов ЛПР, вопросы частично дублируются, а ответы многократно сравниваются с предыдущими ответами. Такие процедуры были названы *замкнутыми*.

Полученные итоговые результаты или решающие правила описываются с помощью вербальных признаков (оценок по критериям), что позволяет дать их объяснение на привычном для ЛПР языке. Таким образом, вербальный анализ решений в наибольшей степени отвечает требованиям, предъявляемым к методам решения плохо структурируемых задач рационального выбора.

18.3. Метод последовательного сужения множества вариантов

Опишем разработанный С. В. Емельяновым, О. И. Ларичевым, В. М. Озерным (СССР, 1972) метод, который относится к вербальным методам принятия решений. Метод предназначен для выделения небольшого числа наиболее предпочтительных вариантов из очень большого (содержащего несколько тысяч) числа вариантов, оцененных по многим (несколько десятков) критериям. Множество вариантов X^a представлено кортежами оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$. Дискретные вербальные шкалы всех качественных критериев упорядочены от лучших оценок к худшим. Метод обеспечивает последовательное сужение исходного множества вариантов на основе нескольких бинарных отношений векторного доминирования и состоит из следующих этапов.

1. Варианты решения $A_1, \dots, A_m$ оцениваются экспертами по всем критериям. На множестве вариантов X^a вводится первое отношение предпочтительности — доминирование R_1, в соответствии с которым из всего множества допустимых вариантов формируется подмножество наиболее предпочтительных вариантов $X^1 \subset X^a$, куда входят недоминируемые по отношению R_1 кортежи.

2. Все критерии разбиваются на группы, содержащие одинаково важные критерии. Из двух критериев более важным для ЛПР считается тот критерий, ухудшение оценки по которому на одну градацию шкалы менее желательно. Группы критериев упорядочиваются по важности. Для каждой s-й группы критериев вводится единая шкала, состоящая из трех вербальных оценок x_s^1, x_s^2, x_s^3, также упорядоченных от лучшей оценки x_s^1 к худшей x_s^3.

3. Вводится второе отношение предпочтительности R_2, которое устанавливает следующее правило сравнения вариантов по числу оценок на группах критериев.

Вариант A_i считается предпочтительнее варианта A_j, если хотя бы по одной группе критериев вариант A_i имеет больше лучших оценок, чем вариант A_j, а по остальным группам критериев вариант A_i не уступает варианту A_j.

Варианты A_i и A_j эквивалентны, если по каждой группе критериев равны числа одинаковых оценок. Варианты A_i и A_j несравнимы, если ни один из вариантов не является доминирующим и если они неэквивалентны.

В соответствии с отношением R_2 из подмножества X^1 выделяется суженное подмножество наиболее предпочтительных вариантов $X^2 \subset X^1$, куда входят недоминируемые по отношению R_2 кортежи оценок.

4. Несравнимость вариантов по отношению R_2, связанную с оценками по одной группе критериев, можно устранить, если по всем критериям перейти от порядковых шкал оценок к интервальным. Этот переход выполняется следующим образом. Варианту A_i, имеющему оценки по одному из критериев s-й группы, приписывается некоторый численный штраф: за наличие оценки x_s^1 — штраф p_s^1, за наличие оценки x_s^2 — штраф p_s^2, за наличие оценки x_s^3 — штраф p_s^3, причем полагается $p_s^3 > p_s^2 > p_s^1 \geq 0$.

5. Вводится третье отношение предпочтительности R_3, которое устанавливает правило сравнения вариантов по величине штрафа на группах критериев.

Вариант A_i считается предпочтительнее варианта A_j, если хотя бы по одной группе критериев вариант A_i имеет штраф меньший, чем вариант A_j, а по остальным группам критериев вариант A_i не имеет штрафов больших, чем вариант A_j.

Варианты A_i и A_j эквивалентны, если по каждой группе критериев они имеют одинаковые штрафы. Варианты A_i и A_j несравнимы, если один из них имеет меньшие штрафы по одним группам критериев, а другой — по другим.

В соответствии с отношением R_3 из подмножества X^2 выделяется суженное подмножество наиболее предпочтительных вариантов $X^3 \subset X^2$, куда входят недоминируемые по отношению R_3 кортежи оценок, которые затем рассматриваются ЛПР на заключительном этапе.

Заметим, что выбор видов бинарных отношений предпочтения, а также последовательность их применения оказывает существенное влияние на итоговый результат.

Метод был применен для отбора рациональных технологических схем шахт. Из более чем 7 000 допустимых вариантов, оцененных по 25 критериям, было отобрано около двух десятков вариантов для более детального анализа.

18.4. Метод ЗАПРОС упорядочения вариантов

Метод ЗАПРОС I (ЗАмкнутые ПРоцедуры у Опорных Ситуаций, 1978) принадлежит к числу первых методов, разработанных в рамках вербального анализа решений, и предназначен для упорядочения относительно большой (несколько десятков) совокупности реальных вариантов $A_1, \ldots, A_m$, которые оценены по многим качественным критериям $K_1, \ldots, K_n$, имеющим порядковые шкалы $X_q = \{x_q^1, x_q^2, \ldots, x_q^{h_q}\}$ вербальных оценок. Решающее правило для сравнения и выбора вариантов формулируется на множестве всех гипотетически возможных комбинаций критериальных оценок еще до появления реально рассматриваемых вариантов.

Градации оценок порядковых шкал считаются упорядоченными от лучших к худшим $x_q^1 \succ x_q^2 \succ \ldots \succ x_q^{h_q}$. Сочетания самых лучших и самых худших оценок по всем критериям образуют кортежи $\mathbf{x}^l = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ и $\mathbf{x}^h = (x_1^{h_1}, x_2^{h_2}, \ldots, x_n^{h_n})$, которые задают две *опорные ситуации*: лучшую и худшую. В ряде случаев для их обозначения удобно пользоваться векторами, представленными номерами оценок по критериям $\mathbf{l} = (1, 1, \ldots, 1)$ и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. Опорные ситуации могут соответствовать или не соответствовать реально имеющимся вариантам.

Метод ЗАПРОС I основан на использовании единой порядковой шкалы (ЕПШ) оценок, задающей линейный предпорядок на множестве возможных оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. ЕПШ оценок формируется исходя из предпочтений ЛПР при помощи многократных парных сравнений гипотетических вариантов у лучшей $\mathbf{x}^l$ и худшей $\mathbf{x}^h$ опорных ситуаций.

Вначале строятся единые порядковые шкалы для всех возможных пар критериев. При построении таких парных ЕПШ и сравнении различных пар кортежей оценок проводится проверка условия независимости критериев по предпочтению, выявление и устранение несогласованности предпочтений ЛПР.

Затем все парные ЕПШ объединяются в одну общую ЕПШ Q^l оценок у лучшей опорной ситуации $\mathbf{x}^l$. Аналогичным образом строится вторая общая ЕПШ Q^h оценок у худшей опорной ситуации $\mathbf{x}^h$.

Построенные две общие ЕПШ представляют собой, по сути, решающие правила, с помощью которых можно сравнить и упорядочить реальные варианты, представленные кортежами оценок, а также объяснить ЛПР полученные результаты.

Если две нестрогие ранжировки вариантов Z^l и Z^h, полученные с использованием обеих общих ЕПШ, совпадут или будут мало различаться, то это будет свидетельствовать о независимости критериев.

При большом различии или противоречии ранжировок вариантов нужно либо получить дополнительную информацию от ЛПР, либо переформулировать постановку задачи, чтобы исключить зависимость критериев.

Рассмотрим детально основные этапы метода ЗАПРОС I.

1. Предварительно формируется подмножество X^l гипотетических вариантов — кортежей $\mathbf{x}^{f_s} = (x_1^1, \ldots, x_s^{f_s}, \ldots, x_n^1)$, которые отличаются от лучшей опорной ситуации $\mathbf{x}^l = (x_1^1, \ldots, x_s^1, \ldots, x_n^1)$ только одной оценкой $x_s^{f_s}$ по какому-либо s-му критерию K_s, т. е. $f_s = 2, \ldots, h_s$; $s = 1, \ldots, n$. Переход от лучшей опорной ситуации к кортежам с худшими оценками влечет понижение общего качества решения.

2. Проводится сравнение пар кортежей $\mathbf{x}^{f_s}$ и $\mathbf{x}^{f_t}$, имеющих разные оценки по одному критерию: либо по s-му, либо по t-му, и одинаковые (лучшие) оценки x_q^1 $(q \neq s, t)$ по всем осталь-

ным критериям. Часть таких кортежей оценок можно объективно упорядочить по отношению доминирования R_{dom} без участия ЛПР. Действительно, имеем

$$(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^1, \ldots) \geq \ldots \geq (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^{f_t}, \ldots) \geq \ldots \geq$$

$$\geq (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^{h_t}, \ldots),$$

$$(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^1, \ldots) \geq \ldots \geq (\ldots, x_s^{f_s}, \ldots, x_t^1, \ldots) \geq \ldots \geq$$

$$\geq (\ldots, x_s^{h_s}, \ldots, x_t^1, \ldots),$$

где одинаковые оценки по остальным критериям для простоты опущены.

Пары кортежей, имеющих другие сочетания оценок по s-му и t-му критериям, останутся несравнимыми, например $(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^2, \ldots)$ и $(\ldots, x_s^2, \ldots, x_t^1, \ldots)$, $(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^3, \ldots)$ и $(\ldots, x_s^3, \ldots, x_t^1, \ldots)$, и подобные им пары. Такие пары кортежей предъявляются ЛПР для сравнения в виде подробных словесных формулировок, включающих все оценки сравниваемых вариантов по критериям.

3. В соответствии со своими предпочтениями ЛПР устанавливает между формально несравнимыми кортежами одно из двух отношений: или отношение субъективной эквивалентности I_{sub}, т. е. $(\ldots, x_s^a, \ldots, x_t^b, \ldots) \approx (\ldots, x_s^b, \ldots, x_t^a, \ldots)$, или отношение субъективного нестрогого превосходства R_{sub}, т. е. либо $(\ldots, x_s^a, \ldots, x_t^b, \ldots) \succeq (\ldots, x_s^b, \ldots, x_t^a, \ldots)$, либо $(\ldots, x_s^a, \ldots, x_t^b, \ldots) \preceq$ $\preceq (\ldots, x_s^b, \ldots, x_t^a, \ldots)$.

4. Проводится сравнение остальных пар кортежей оценок по их предпочтительности для ЛПР. Выбор следующей сравниваемой пары осуществляется в зависимости от данного ЛПР ответа. Пусть ЛПР выразил свои предпочтения так, как показано ниже:

$$\begin{tikzcd}
 & (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^2, \ldots) \arrow[r] \arrow[dd, Rightarrow] & (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^3, \ldots)\ldots \arrow[dd, Rightarrow] \\
(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^1, \ldots) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & (\ldots, x_s^2, \ldots, x_t^1, \ldots) \arrow[r] \arrow[uur, Rightarrow] & (\ldots, x_s^3, \ldots, x_t^1, \ldots)\ldots
\end{tikzcd}$$

Здесь одинарная стрелка $\rightarrow$ изображает отношение доминирования R_{dom}, двойная стрелка $\Rightarrow$ — отношение субъективного превосходства R_{sub} вариантов для ЛПР. Объединив все сравнения, получим следующее упорядочение пар кортежей, отличающихся только оценками по s-му и t-му критериям:

$$(\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^1, \ldots) \geq (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^2, \ldots) \succeq$$
$$\succeq (\ldots, x_s^2, \ldots, x_t^1, \ldots) \succeq (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^3, \ldots) \succeq$$
$$\succeq (\ldots, x_s^3, \ldots, x_t^1, \ldots) \geq \ldots \geq$$
$$\geq (\ldots, x_s^1, \ldots, x_t^{h_t}, \ldots) \approx (\ldots, x_s^{h_s}, \ldots, x_t^1, \ldots),$$

где отношение доминирования R_{dom} обозначено знаком $\geq$, отношение превосходства R_{sub} — знаком $\succeq$, отношение эквивалентности I_{sub} — знаком $\approx$.

Запишем это упорядочение кортежей оценок в более компактной форме, указывая только индексы сравниваемой пары критериев, номера оценок по этим критериям и опуская значок нестрогости неравенства (нижнюю черту):

$$s^1t^1 > s^1t^2 \succ s^2t^1 \succ s^1t^3 \succ s^3t^1 > \ldots \succ s^1t^{f_t} \succ s^{f_s}t^1 > \ldots >$$
$$> s^1t^{h_t} \approx s^{h_s}t^1.$$

Приведенное выражение и есть *парная единая порядковая шкала* для критериев K_s и K_t у лучшей опорной ситуации. Обозначим парную ЕПШ для s-го и t-го критериев как Q_{st}^l. ЕПШ Q_{st}^l можно записать еще более простым образом, если указывать, кроме первой пары, только оценки, отличающиеся от лучших:

$$s^1t^1 > t^2 \succ s^2 \succ t^3 \succ s^3 > \ldots \succ t^{f_t} \succ s^{f_s} > \ldots > t^{h_t} \approx s^{h_s}. \tag{18.1}$$

5. Сравнивая все пары гипотетических кортежей $\mathbf{x}^{f_s}$ и $\mathbf{x}^{f_t}$ из подмножества X^l, которые отличаются от кортежа $\mathbf{x}^l$ только оценкой по одному из критериев, формируют все парные ЕПШ Q_{st}^l $s, t = 1, \ldots, n$ у лучшей опорной ситуации. Всего имеется $n(n-1)/2$ таких парных ЕПШ. Объединив все парные ЕПШ Q_{st}^l, получим *общую единую порядковую шкалу* Q^l оценок по критериям у лучшей опорной ситуации, на которой будут упорядочены все градации оценок по шкалам всех критериев, начиная с лучшей оценки $\mathbf{x}^l = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$.

Точно таким же образом строится общая ЕПШ Q^h у худшей опорной ситуации, на которой будут упорядочены все градации оценок по шкалам всех критериев, закончив худшей оценкой $\mathbf{x}^h = (x_1^{h_1}, x_2^{h_2}, \ldots, x_n^{h_n})$. Для этого формируется подмножество X^h гипотетических вариантов — кортежей $\mathbf{x}^{g_s} = (x_1^{h_1}, \ldots, x_s^{g_s}, \ldots, x_n^{h_n})$, которые отличаются от худшей опорной ситуации $\mathbf{x}^h = (x_1^{h_1}, \ldots, x_s^{h_s}, \ldots, x_n^{h_n})$ только одной оценкой $x_s^{g_s}$ по какому-либо критерию K_s, т. е. $g_s = 1, \ldots, h_s - 1$; $s = 1, \ldots, n$.

Совокупность всех парных ЕПШ Q^l_{st} можно представить в виде ориентированного графа, вершинами которого служат пары критериальных оценок (одна из них — лучшая). Построение общей ЕПШ Q^l производится с помощью стандартной процедуры разборки графа — определения недоминируемых вершин. Аналогичным ориентированным графом представляется совокупность всех парных ЕПШ Q^h_{st} у худшей опорной ситуации, а общая ЕПШ Q^h строится путем определения недоминирующих вершин.

18.5. Ранжирование вариантов с помощью единой шкалы

В ходе сравнения кортежей оценок для разных пар критериев и построения парных ЕПШ у лучшей Q^l_{st} и худшей Q^h_{st} опорных ситуаций проводится многократная проверка ранее высказанных предпочтений ЛПР на непротиворечивость и транзитивность. Если при построении общей ЕПШ Q^l или Q^h недоминируемая или недоминирующая вершина графа не выделяется, значит, имеется несогласованность отдельных частей в некоторых парных ЕПШ, связанная с нарушением условия независимости критериев по предпочтению. Например, если на каком-то этапе процедуры при сопоставлении парных ЕПШ Q^l_{su} и Q^l_{tu} окажется, что

$$\ldots t^2 > t^3 \succ s^2 > s^3 \ldots \quad \text{или} \quad \ldots t^2 > t^3 \approx s^2 > s^3 \ldots,$$

то это вступит в противоречие с порядком оценок (18.1), установленным по парной ЕПШ Q^l_{st}.

Такие несогласованности выявляются и представляются ЛПР для анализа. Для их устранения выполняется повторный опрос ЛПР с помощью замкнутых процедур для соответствующих пар критериев. Результаты специальных психологических исследований показывают, что человек допускает мало противоречий при $n = 7-8$ критериях, имеющих $h = 3-4$ оценки на шкалах.

Помимо условия независимости критериев по предпочтению проверяется также возможная зависимость критериев от изменения качества решения у двух опорных ситуаций. Для этого для каждой пары критериев K_s и K_t сравнивают парные единые порядковые шкалы Q^l_{st} и Q^h_{st}, построенные у лучшей и худшей опорных ситуаций. Если ЕПШ Q^l_{st} и Q^h_{st} непротиворечивы, то критерии K_s и K_t можно считать независимыми. В противоположном случае критерии K_s и K_t зависят от изменения качества.

Как правило, зависимость критериев от изменения качества обусловлена влиянием оценки по одному из критериев на оценки по другим критериям. При наличии такой зависимости или исключают оказывающее влияние оценку из рассмотрения, или объединяют зависимые критерии в один критерий с новой шкалой. После этого формируются новые опорные ситуации и строятся новые общие ЕПШ Q^l или Q^h, которые для независимых критериев должны совпадать.

Построенная общая ЕПШ оценок Q^l используется для ранжирования реально имеющихся вариантов решения. В соответствии с общей ЕПШ каждому сочетанию оценок, начиная с лучшей опорной ситуации, можно присвоить свой ранг. Так, если в общей ЕПШ Q^l присутствует начальная часть условия (18.1), то кортежи оценок получат следующие ранги:

$$
\begin{aligned}
&(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_s^1, \ldots, x_t^1, \ldots, x_n^1) \text{ — ранг } 1,\\
&(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_s^1, \ldots, x_t^2, \ldots, x_n^1) \text{ — ранг } 2,\\
&(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_s^2, \ldots, x_t^1, \ldots, x_n^1) \text{ — ранг } 3,\\
&(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_s^1, \ldots, x_t^3, \ldots, x_n^1) \text{ — ранг } 4,\\
&(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_s^3, \ldots, x_t^1, \ldots, x_n^1) \text{ — ранг } 5
\end{aligned}
$$

и т. д. Таким образом, каждой градации $x_u^{k_u}$ на шкале каждого критерия K_u будет соответствовать свой собственный ранг $r_u^{k_u}$ по общей ЕПШ Q^l. Например, все лучшие оценки x_u^1, $u = 1, \ldots, n$, имеют ранг 1, оценка x_t^2 — ранг 2, оценка x_s^2 — ранг 3 и т. д.

Сопоставим каждому реально имеющемуся варианту A_i, представленному кортежем оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, вектор $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, \ldots, r_{in})$, составленный из рангов соответствующих критериальных оценок, а затем расставим эти ранги по возрастанию их значений. Все реальные варианты можно теперь сравнить и упорядочить по отношению доминирования ранговых векторов.

Если реальных вариантов много, то сначала выделяются все доминирующие и несравнимые варианты, которые составят первое ядро X^1 наиболее предпочтительных вариантов. Ядро X^1 удаляется из рассмотрения, а из оставшихся вариантов выделяется второе ядро X^2, затем третье ядро X^3 и т. д. Получающаяся последовательность ядер $X^1, X^2, \ldots, X^f$ образует частично упорядоченное по предпочтительности множество вариантов.

Общие ЕПШ Q^l и Q^h, построенные у лучшей и худшей опорных ситуаций, представляют собой агрегированные предпочтения ЛПР. Они позволяют упорядочить кортежи оценок, компонентами которых являются лучшие и худшие оценки по критериям. При этом кортежи, составленные из комбинаций средних оценок, отличающихся от лучших и худших, окажутся вне рамок общих ЕПШ. А значит, соответствующие им варианты останутся несравненными.

Описанная процедура ранжирования с помощью общей ЕПШ оценок позволяет объяснить ЛПР получившееся превосходство или несравнимость вариантов на привычном для него языке. Кроме того, появляется возможность показать ЛПР, какие из его ответов привели к соответствующим рангам отдельных оценок на общей ЕПШ.

18.6. Задача отбора проектов

Применим метод ЗАПРОС I к решению задачи отбора научно-исследовательских проектов для финансирования, которая по своему содержанию аналогична задаче формирования портфеля инвестиционных проектов, изложенной в разд. 17.5, и состоит в упорядочении проектов, оцененных по многим качественным критериям.

1. На предварительном этапе структуризации проблемы для сравнения проектов были определены с участием ЛПР следующие критерии и их шкалы.

K_1. Перспективность проекта

a^1 — получение принципиально новых методов, технологий, материалов;
a^2 — существенное совершенствование методов, технологий, материалов;
a^3 — определенное улучшение методов, технологий, материалов.

K_2. Новизна подхода к решению задачи

b^1 — новый оригинальный подход;
b^2 — модернизация существующих подходов;
b^3 — повторение известных подходов.

K_3. Квалификация исполнителей

c^1 — одна из самых высоких в данной области;

c^2 — достаточна для выполнения проекта;
c^3 — недостаточна для выполнения проекта.

K_4. Ресурсное обеспечение

d^1 — достаточно для выполнения проекта;
d^2 — в основном достаточно, требуется незначительное пополнение ресурсов;
d^3 — недостаточно, требуется значительное пополнение ресурсов.

K_5. Возможность практического использования результатов

e^1 — результаты будут полностью пригодны к практическому применению;
e^2 — потребуется дополнительная работа для доведения результатов до практической пригодности;
e^3 — возможность практического применения результатов не ясна.

Согласно введенным шкалам, лучшей опорной ситуации соответствует кортеж $\mathbf{x}_l = (a^1, b^1, c^1, d^1, e^1)$, а худшей — $\mathbf{x}^h = (a^3, b^3, c^3, d^3, e^3)$, которые можно записать так же, как векторы номеров оценок $\mathbf{l} = (11111)$ и $\mathbf{h} = (33333)$. Здесь и далее будем опускать для простоты записи запятые между компонентами векторов номеров оценок.

2. Для построения общих единых порядковых шкал оценок Q^l и Q^h у лучшей $\mathbf{x}^l$ и худшей $\mathbf{x}^h$ опорных ситуаций формируется два вспомогательных подмножества X^l и X^h. В первое подмножество X^l входят векторы оценок, у которых значение одной из компонент отличается от 1, т. е., может быть 2 или 3. Во второе подмножество X^h — векторы оценок, где все значения компонент, кроме одной, равны 3, а эта компонента принимает значение 1 или 2.

Рассмотрим процедуру построения ЕПШ Q^l у лучшей опорной ситуации. Сначала множество X^l оценок упорядочивается по отношению доминирования R_{dom}. Оставшиеся несравнимыми по отношению R_{dom} кортежи предъявляются для субъективного сравнения ЛПР.

Типовой вопрос к ЛПР о сравнимости двух кортежей, отличающихся оценками по паре критериев, формулируется следующим образом:

«Сравните два проекта, которые выполняются специалистами самой высокой квалификации, имеющими достаточное для выполнения проекта ресурсное обеспечение, а ожидаемые результаты будут полностью пригодны к практическому применению. Какой из проектов вы предпочитаете:

- предполагающий получение принципиально новых методов, технологий, материалов и использующий модернизацию существующих подходов к решению задачи;
- предполагающий существенное совершенствование методов, технологий, материалов и использующий новый оригинальный подход к решению задачи».

Возможные ответы на вопрос:

- первый проект лучше второго;
- второй проект лучше первого;
- проекты равноценны.

Здесь ЛПР предлагается сравнить два варианта $\mathbf{x}_i = (a^1, b^2, c^1, d^1, e^1)$ и $\mathbf{x}_j = (a^2, b^1, c^1, d^1, e^1)$, которые отличаются оценками по первому и второму критериям, и выразить свое субъективное предпочтение $\mathbf{x}_i R_{sub} \mathbf{x}_j$ или $\mathbf{x}_i I_{sub} \mathbf{x}_j$. Пусть ЛПР ответил, что оба проекта равноценны. Это означает, что на парной ЕПШ оценок Q_{12}^l для критериев K_1 и K_2 сочетания оценок a^2b^1 и a^1b^2 эквивалентны. Дальше сравниваются варианты $(a^1, b^2, c^1, d^1, e^1)$ и $(a^3, b^1, c^1, d^1, \mathrm{e}^1)$ и т. д. В результате по ответам ЛПР строится парная ЕПШ Q_{12}^l, имеющая, например, такой вид:

$$Q_{12}^l - a^1b^1 > a^2 \approx b^2 \succ a^3 \succ b^3. \tag{18.2}$$

Сравнив при участии ЛПР все объективно не сравнимые пары кортежей из подмножества X^l, которые отличаются только одной компонентой от лучшей оценки по соответствующему критерию, образуют все парные ЕПШ Q_{st}^l у лучшей опорной ситуации $\mathbf{x}_l$. Допустим, что результаты сравнений кортежей по отношениям R_{dom}, R_{sub} и I_{sub} дали следующие парные ЕПШ оценок:

$$Q_{13}^l - a^1c^1 > c^2 > c^3 \succ a^2 > a^3;$$
$$Q_{14}^l - a^1d^1 > d^2 \succ a^2 \succ d^3 \succ a^3;$$
$$Q_{15}^l - a^1e^1 > a^2 \succ e^3 \succ a^3 \succ e^3;$$
$$Q_{23}^l - b^1c^1 > c^2 > c^3 \succ b^2 > b^3;$$
$$Q_{24}^l - b^1d^1 > d^2 \succ b^2 \succ d^3 \succ b^3;$$
$$Q_{25}^l - b^1e^1 > b^2 \succ e^2 > e^3 \approx b^3;$$
$$Q_{34}^l - c^1e^1 > c^2 \approx d^2 \succ c^3 \succ d^3;$$
$$Q_{35}^l - c^1e^1 > c^2 > c^3 \succ e^2 > e^3;$$
$$Q_{45}^l - d^1e^1 > d^2 > d^3 \succ e^2 > e^3.$$

При построении парных ЕПШ Q^l_{st} новые ответы ЛПР сопоставляются с ранее данными. При появлении противоречий в предпочтениях ЛПР они предъявляются ЛПР для анализа и устраняются. При непротиворечивости всех парных ЕПШ Q^l_{st} их можно легко объединить в одну общую порядковую шкалу оценок Q^l у лучшей опорной ситуации, которая в нашем случае выглядит так:

$$\begin{aligned} Q_l - a^1b^1c^1d^1e^1 > c^2 \approx d^2 \succ c^3 \succ a^2 \approx \\ \approx b^2 \succ d^3 \succ e^2 \succ a^3 \succ b^3 \approx e^3. \end{aligned} \tag{18.3}$$

3. Аналогичным образом, выполнив по отношениям R_{dom} и R_{sub} парные сравнения кортежей оценок из подмножества X^h, которые отличаются от худшей оценки $\mathbf{x}^h$ только одной компонентой, получаем все парные ЕПШ Q^h_{st} и общую ЕПШ Q^h у худшей опорной ситуации, например, следующего вида:

$$\begin{aligned} Q^h - a^1 \succ c^1 \succ e^1 \succ d^1 \succ b^1 \succ c^2 \succ d^2 \succ \\ \succ a^2 \succ b^2 \succ e^2 > a^3b^3c^3d^3e^3. \end{aligned} \tag{18.4}$$

4. После построение парных ЕПШ Q^l_{st} и Q^h_{st} у лучшей и худшей опорных ситуаций выполняется дополнительная проверка условия независимости критериев от изменения качества. Например, для критериев K_1 и K_2 парные ЕПШ непротиворечивы:

$$\begin{aligned} &Q^l_{12} - a^1b^1 > a^2 \succ b^2 \succ a^3 \succ b^3, \\ &Q^h_{12} - a^1 \succ b^1 \succ a^2 \succ b^2 \succ a^3b^3. \end{aligned}$$

Значит, в данном случае критерии K_1 и K_2 независимы.

Сопоставляя выражения для общих ЕПШ Q^l (18.3) и Q^h (18.4), можно увидеть, что оценка c^3 «квалификация исполнителей недостаточна для выполнения проекта» не согласована с оценками a^2 «существенное совершенствование методов, технологий, материалов» и b^2 «модернизация существующих подходов к решению задачи», а оценка d^3 «ресурсное обеспечение недостаточно для выполнения проекта» не согласована с оценкой e^2 «потребуется дополнительная работа для доведения ожидаемых результатов до практической пригодности». Это указывает на влияние критерия K_3 «Квалификация исполнителей» на критерии K_1 «Перспективность проекта» и K_2 «Новизна подхода к решению задачи», а также на зависимость между критерием K_4 «Ресурсное обеспечение» и критерием K_5 «Возможность практического использования результатов».

Таблица 18.1

Ранжировка векторных оценок

Оценка	Ранг
11111	1
11**2**11 111**2**1	2
11**3**11	3
21111 1**2**111	4
111**3**1	5
1111**2**	6
31111	7
1**3**111 1111**3**	8

Поскольку зависимость критериев от изменения качества наблюдается лишь для оценок, близких к худшим, то реальные проекты, имеющие такие оценки, скорее всего будут относиться к ядрам, которые находятся в конце ранжировки, а значит, их ранг будет не очень важен для итогового результата. Обычно на практике градации зависимых оценок (в нашем случае c^2 и c^3, d^2 и d^3 на шкалах критериев K_3 и K_4) соединяют в единые интегральные градации с соответствующими развернутыми формулировками. В итоге все критерии станут независимыми от изменения качества.

5. Общая единая порядковая шкала Q^l у лучшей опорной ситуации определяет линейный предпорядок на множестве оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_5$ и набор рангов, соответствующий градациям оценок на шкалах критериев. Ранжировка комбинаций векторных оценок, заданная формулой (18.3), приведена в табл. 18.1, где градации оценок выделены жирным шрифтом.

Пример 18.1. Пусть имеется три реальных проекта A_1, A_2, A_3, которые несравнимы по отношению доминирования R_{dom}. Векторные оценки проектов по критериям, ранговым оценкам, упорядоченным рангам указаны в табл. 18.2.

Таблица 18.2

Векторные оценки проектов

Проект	Критериальная оценка	Ранговая оценка	Упорядоченные ранги
A_1	12121	14121	11124
A_2	21212	41216	11246
A_3	31113	71118	11178

Проект A_1 предпочтительнее проектов A_2 и A_3, которые остаются несравнимыми. При этом проект A_1 будет находиться в более высоком ядре, чем проекты A_2 и A_3. Если проекты A_2 и A_3 попадут в разные ядра, то тем самым можно установить предпочтительность одного из них. В противоположном случае проекты A_2 и A_3 окажутся равноценными для ЛПР. ■

Заметим, однако, что используемое в методе ЗАПРОС упорядочение компонент вектора ранговых оценок по возрастанию приводит к «перемешиванию» компонент, имеющих различные «содержания». Поэтому сравнивать такие векторы по отношению доминирования, строго говоря, математически некорректно. Вместо этого можно принять во внимание, например, сумму рангов, агрегирующую неравноценные для ЛПР ранговые оценки и играющую роль функции ценности, по которой и определять предпочтительность вариантов. Лучшему варианту будет соответствовать меньшая сумма рангов. При таком подходе получаем, что проекты A_1, A_2, A_3 имеют суммы рангов, равные соответственно 9, 14 и 18, а значит, проекты ранжируются так: $A_1 \succ A_2 \succ A_3$.

18.7. Группа методов ЗАПРОС

Методы семейства ЗАПРОС, куда наряду с методом ЗАПРОС I (1978) входят и его усовершенствованные варианты — методы ЗАПРОС II (1995) и ЗАПРОС III (2001), составляют группу методов вербального анализа решений, использующих специальные процедуры измерения и агрегирования предпочтений ЛПР. Первая и вторая версии метода ЗАПРОС базируются на понятиях ЕПШ оценок. Общие ЕПШ Q^l и Q^h, построенные в методе ЗАПРОС I у лучшей и худшей опорных ситуаций, задают в случае независимых критериев линейный предпорядок на множестве оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, на основе которого получаются нестрогие ранжировки реально имеющихся вариантов.

В методе ЗАПРОС II предложена модифицированная процедура, позволяющая работать с зависимыми критериями, а также введены различные способы построения итоговой ранжировки вариантов. ЛПР может выбрать по своему усмотрению различные способы формирования ядер. В ядро можно включать доминирующие варианты; доминируемые варианты; варианты, доминирующие наибольшее число других вариантов; варианты, доминируемые наименьшим числом других вариантов. Внутри ядер можно провести дополнительные сравнения вариантов между собой, привлекая добавочную информацию об изменении качества решения по отдельным критериям. В отличие от метода ЗАПРОС I сравнения кортежей оценок у худшей опорной ситуации $\mathbf{x}^h$ используются здесь лишь для проверки независимости критериев, а не для построения второй общей ЕПШ оценок.

В нестрогой ранжировке вариантов, получаемой в методах ЗАПРОС I и II, заметная часть вариантов остается несравнимой. Это касается главным образом вариантов, которые имеют «средние» оценки по критериям, занимающие промежуточное положение между лучшими и худшими оценками.

В методе ЗАПРОС III реализована иная процедура выявления предпочтений ЛПР, в которой ЛПР сравнивает изменения качества вариантов при переходе от одной оценке к другой по шкале каждого из критериев. Результатом является построение единственной единой шкалы изменений качества (ЕШИК), задающей линейный порядок на множестве оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. В процессе построения шкалы производится многократная проверка условий независимости критериев по предпочтению и изменению качества, выявление и устранение возможных нарушений этих условий, а также нетранзитивности суждений ЛПР.

Общая шкала изменений качества используется для ранжирования реальных вариантов и объяснения полученного результата. Ранжировка вариантов остается по-прежнему нестрогой, но число несравнимых вариантов становится существенно меньшим, чем в методах ЗАПРОС I и ЗАПРОС II, поскольку теперь ранжировка определяется линейным порядком, а не линейным предпорядком.

Самым простым для практического применения является метод ЗАПРОС II, где ЛПР непосредственно сравнивает кортежи оценок. В методе ЗАПРОС I сравниваются изменения качества вариантов, отсчитываемые от опорных ситуаций, а в методе ЗАПРОС III — изменения качества на шкалах всех критериев, что требует большего объема информации от ЛПР. Метод

ЗАПРОС III имеет самую большую разрешающую силу среди методов этой группы.

18.8. Метод ОРКЛАСС классификации вариантов

Метод ОРКЛАСС (ОРдинальная КЛАССификация, 1986) предназначен для построения решающего правила, которое позволяет распределять имеющиеся многопризнаковые варианты (объекты, альтернативы) $A_1, \ldots, A_m$ по небольшому числу (2—5) заранее заданных классов решений $C_1, \ldots, C_u$, упорядоченных по убыванию некоторого свойства.

Представим рассмотренную в разд. 18.7 задачу отбора проектов для финансирования как задачу порядковой классификации. Варианты A_i характеризуются n-мерными кортежами $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ оценок $x_{iq} = K_q(A_i)$ по критериям. Критерии K_q и их порядковые шкалы X_q — те же, что и ранее.

Возможными классами решений о финансировании научно-исследовательских проектов могут быть, например, такие классы, которые приведены ниже.

C_1. Выделить запрашиваемые на проект средства в полном объеме.

C_2. Выделить запрашиваемые на проект средства в меньшем объеме.

C_3. Рассмотреть возможность выделения средств после доработки проекта.

C_4. Не выделять средства на проект.

Решающие правила классификации формулируются до появления рассматриваемых вариантов. Решающие правила представляют собой комбинации значений оценок, которые устанавливают границы классов в многокритериальном пространстве признаков $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Декартово произведение шкал критериев X_q определяет множество всех гипотетически возможных кортежей оценок. Так как для каждого кортежа оценок можно указать его принадлежность к конкретному классу, то классификация является *полной*.

Строить такую полную классификацию непосредственно путем отнесения каждого из кортежей к тому или иному классу неэффективно, так как даже при небольшом числе критериев и градаций оценок на шкалах общее число сочетаний оценок может быть достаточно велико.

Для этих целей в методе ОРКЛАСС предложен оригинальный подход к построению полной порядковой классификации кортежей оценок вариантов по относительно небольшому числу ответов ЛПР с выявлением и устранением возможных противоречий в предпочтениях. Основная идея подхода состоит в следующем. Во-первых, на множестве кортежей оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ имеется отношение доминирования R_{dom}, порожденное упорядочением градаций оценок на шкалах критериев от лучшей к худшей. Во-вторых, имеется упорядоченность классов решений $C_1, \ldots, C_u$ по степени выраженности свойства, которая означает, что любой многопризнаковый вариант (кортеж оценок) из каждого класса с более выраженным свойством предпочтительнее любого варианта из класса, обладающего менее выраженным свойством. Наличие двух таких упорядочений позволяет построить специальную процедуру опроса ЛПР для выявления его предпочтений.

Изначально принимается, что кортеж оценок $\mathbf{x}_l = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, соответствующий лучшей опорной ситуации, принадлежит к первому, наиболее предпочтительному классу решений C_1, а кортеж $\mathbf{x}^h = (x_1^{h_1}, x_2^{h_2}, \ldots, x_n^{h_n})$, соответствующий худшей опорной ситуации, — к последнему, наименее предпочтительному классу C_u. Выбрав некоторый кортеж с промежуточными оценками и предъявив его ЛПР для отнесения к определенному классу, можно затем распространить эту принадлежность к классу на все остальные кортежи, которые доминируют данный. Напомним, что вопрос к ЛПР формулируется в виде развернутого словесного описания варианта на языке критериальных оценок.

Для сокращения числа обращений к ЛПР каждый раз ему следует предъявлять наиболее информативный кортеж оценок, т. е. такой кортеж, исходя из принадлежности которого к какому-то классу можно дополнительно классифицировать максимально возможное число других кортежей.

18.9. Информативные кортежи оценок

Для иллюстрации процедуры классификации кортежей рассмотрим ситуацию, в которой задано только два класса решений C_1 и C_2, к которым нужно отнести варианты, оцененные по трем критериям, имеющим три градации качества: $K_1 = \{a^1, a^2, a^3\}$, $K_2 = \{b^1, b^2, b^3\}$, $K_3 = \{c^1, c^2, c^3\}$. Представим все возможные кортежи оценок (всего их $3 \times 3 \times 3 = 27$) в виде трех матриц, каждая из которых содержит комбинации оценок по критериям K_1 и K_2 (табл. 18.3). Левая матрица соответствует лучшей оценке c^1, средняя — средней оценке c^2, правая — худшей оценке c^3.

Таблица 18.3

Распространение ответа ЛПР на другие сочетания оценок

	b^1	b^2	b^3
a^1	**1**		
a^2	1		
a^3	1		

	b^1	b^2	b^3
a^1	1		
a^2	1		
a^3	1|2	2	2

	b^1	b^2	b^3
a^1			
a^2			
a^3	2	2	**2**

Полная классификация кортежей оценок будет построена, если в каждой клетке всех матриц будет указан номер класса, к которому относится соответствующий кортеж. Очевидно, что всегда $\mathbf{x}^l = (a^1, b^1, c^1) \in C_1$, $\mathbf{x}^h = (a^3, b^3, c^3) \in C_2$. Таким образом, остается расклассифицировать еще 25 кортежей.

Предположим, что ЛПР был предъявлен кортеж (a^3, b^1, c^2), представленный левой нижней клеткой средней матрицы, и ЛПР отнесло его к классу C_1. Тогда, распространяя принадлежность кортежа к классу по отношению доминирования, получим, что к этому же классу принадлежат кортежи (a^2, b^1, c^2), (a^1, b^1, c^2), (a^3, b^1, c^1), (a^2, b^1, c^1), представленные левыми столбцами первой и второй матриц, которые имеют лучшие оценки, чем кортеж (a^3, b^1, c^2). Тем самым по одному ответу ЛПР удалось расклассифицировать сразу пять кортежей (см. табл. 18.3).

Если бы ЛПР отнесло кортеж (a^3, b^1, c^2) к классу C_2, то в этот же класс вошли кортежи (a^3, b^2, c^2), (a^3, b^3, c^2), (a^3, b^1, c^3), (a^3, b^2, c^3), представленные нижними строками второй и третьей матриц, которые имеют худшие оценки, чем кортеж (a^3, b^1, c^2). И в этом случае пять кортежей оказались отнесенными к конкретному классу.

Индексом информативности кортежа оценок, предъявленного ЛПР для классификации, назовем два числа кортежей, которые будут классифицированы при двух вариантах ответа ЛПР. В рассмотренном случае индекс информативности кортежа (a^3, b^1, c^2) есть 5 ± 5. Смысл знака $\pm$ объясняется далее. В табл. 18.4 указаны индексы информативности для всех кортежей оценок[1], где первая составляющая индекса относится к классу C_1, а вторая — к классу C_2.

Сформулируем теперь, что такое наиболее информативный кортеж оценок. Во-первых, желательно обеспечить одновременную классификацию возможно большего числа кортежей. Во-вторых, нужно стремиться к наибольшей информативности лю-

[1]Примеры индексов взяты из работы [32].

Таблица 18.4

Индексы информативности различных комбинаций оценок

	b^1	b^2	b^3
a^1	1 ± 0	1 ± 17	2 ± 8
a^2	1 ± 17	3 ± 11	5 ± 5
a^3	2 ± 8	5 ± 5	8 ± 2

c^1

	b^1	b^2	b^3
a^1	1 ± 17	3 ± 11	5 ± 5
a^2	3 ± 11	$\mathbf{7 \pm 7}$	11 ± 3
a^3	5 ± 5	11 ± 3	17 ± 1

c^2

	b^1	b^2	b^3
a^1	2 ± 8	5 ± 5	8 ± 2
a^2	5 ± 5	11 ± 3	17 ± 1
a^3	8 ± 2	17 ± 1	0 ± 1

c^3

бого возможного ответа ЛПР, которая достигается при наименьшем различии числа кортежей, отнесенных к разным классам. Таким образом, наиболее информативным будет кортеж, имеющий максимальную величину суммы и минимальную величину разности составляющих индекса информативности. Эти условия и обозначены знаком $\pm$ в табл. 18.4.

На каждом шаге классификации кортежей лицу, принимающему решение, должен предъявляться наиболее информативный кортеж оценок. Если таких кортежей несколько, можно предъявить любой из них. В рассматриваемом случае самым информативным кортежем до начала процедуры классификации является кортеж (a^2, b^2, c^2). Величина разности составляющих индекса информативности для кортежа (a^2, b^2, c^2) равна нулю, а любой ответ ЛПР позволяет сразу классифицировать 7 кортежей оценок, отнеся их к классу C_1 или к классу C_2.

Пример 18.2. Допустим, что ЛПР отнесло кортеж (a^2, b^2, c^2), обозначенный в табл. 18.5 номером N_1, к классу C_1, тем самым классифицировав семь кортежей оценок. Остались неклассифицированными $25 - 7 = 18$ кортежей. Для каждого из них заново рассчитывается индекс информативности, с учетом которого ЛПР предъявляется для классификации новый наиболее информативный кортеж. В данном случае таким будет кортеж (a^2, b^2, c^3), обозначенный номером N_2. ЛПР отнесло его к клас-

Таблица 18.5

Последовательность наиболее информативных кортежей

	b^1	b^2	b^3
a^1	1	1	$1(N_{10})$
a^2	1	1	$2(N_7)$
a^3	1	$2(N_9)$	$2(N_3)$

c_1

	b^1	b^2	b^3
a^1	1	1	$2(N_4)$
a^2	1	$1(N_1)$	2
a^3	$1(N_5)$	2	2

c_2

	b^1	b^2	b^3
a^1	$2(N_{11})$	$2(N_8)$	2
a^2	$2(N_6)$	$2(N_2)$	2
a^3	2	2	2

c_3

су C_2, что позволило классифицировать еще 3 кортежа. На следующем шаге ЛПР предъявляется кортеж (a^3, b^3, c^1) с номером N_3 и т. д. Последовательность пересчета индексов информативности и предъявления кортежей указана в табл. 18.5 номерами N_k. Предъявив ЛПР всего 11 кортежей и задав всего 11 вопросов, оказалось возможным полностью классифицировать все 25 возможных сочетаний значений оценок. ■

Если классов решений больше двух, то индекс информативности кортежа оценок, предъявляемого ЛПР для классификации, рассчитывается более сложным способом. Было разработано несколько различных модификаций правил для выбора наиболее информативного кортежа оценок.

18.10. Решающие правила классификации

Определяя на некотором шаге процедуры принадлежность рассматриваемого кортежа оценок к какому-либо классу, ЛПР может указать класс, который окажется в противоречии с построенной ранее классификацией других кортежей. В методе предусмотрена возможность выявления таких ошибочных ответов ЛПР и устранения противоречий или после построения полной классификации, или в ходе ее построения по мере появления ошибок (последний способ более эффективен).

При возникновении противоречивой ситуации ЛПР предъявляются последний и ранее классифицированные кортежи оценок, которые не соответствуют друг другу. Например, ЛПР указало, что $(a^2, b^1, c^3) \in C_2$, а ранее было сказано, что $(a^2, b^2, c^3) \in$ $\in C_1$. Здесь по критерию K_2 оценка b^1 лучше оценки b^2, хотя класс решений C_2 менее предпочтительнее класса C_1. В таком случае ЛПР предлагается либо изменить последний ответ, либо, если последний ответ его устраивает, проанализировать ситуацию и изменить ранее данные ответы о принадлежности кортежей оценок к соответствующим классам.

Для этого ЛПР выдаются все противоречивые пары кортежи оценок (а их может оказаться много, иногда даже все) для повторной классификации. Вновь проклассифицированные кортежи снова проверяются на непротиворечивость с предыдущими результатами. Процедура заканчивается построением полной и непротиворечивой классификации всех сочетаний оценок.

Получив полную и непротиворечивую порядковую классификацию, можно сформулировать достаточно компактные решающие правила для отнесения реальных вариантов к заданным классам, выраженные комбинациями значений оценок по критериям. Для наглядного представления решающих правил используются понятия граничных комбинаций оценок, которыми удобно охарактеризовать классы решений.

Верхней границей класса называется совокупность наиболее предпочтительных кортежей, не доминируемых другими кортежами данного класса. Соответственно *нижней границей класса* называется совокупность наименее предпочтительных кортежей, не доминирующих другие кортежи данного класса. Все кортежи, которые относятся к этому классу, имеют значения оценок, лежащие между верхней и нижней граничными оценками.

Граничные значения оценок позволяют экономно и наглядно описать решающие правила, с помощью которых можно легко и быстро классифицировать реально имеющиеся многопризнаковые варианты, а также объяснить ЛПР полученную классификацию. При задании границ класса отпадает необходимость хранить информацию о принадлежности каждого кортежа оценок к определенному классу решений.

Пример 18.3. Границы классов C_1 и C_2, построенных в примере 18.2 (см. табл. 18.5), имеют следующий вид:

Класс C_1. Верхняя граница: (a^1, b^1, c^1).

Нижняя граница: $(a^1, b^3, c^1), (a^3, b^1, c^2), (a^2, b^2, c^2)$.

Класс C_2. Верхняя граница: $(a^3, b^2, c^1), (a^2, b^3, c^1), (a^1, b^3, c^2), (a^1, b^1, c^3)$.

Нижняя граница: (a^3, b^3, c^3). ■

Для иллюстративного примера по отбору проектов для финансирования были найдены по ответам ЛПР такие границы классов:

Класс C_1. Верхняя граница: (11111).

Нижняя граница: (23131), (23221).

Класс C_2. Верхняя граница: (11113), (11121), (11212).

Нижняя граница: (23232).

Класс C_3. Верхняя граница: (11131).

Нижняя граница: (22333), (23233), (23332).

Класс C_4. Верхняя граница: (31111), (23333).

Нижняя граница: (33333).

Обычно классифицируемые варианты заранее не известны. На практике может оказаться, что реальные варианты будут присутствовать лишь в отдельных классах или даже вообще только в одном, а остальные классы будут пустыми. Это один из недостатков метода. В таком случае нужно модифицировать решающие правила, уточнив число классов, изменив уровни требований по некоторым или всем критериям, построив новые границы новых классов. При этом фактически придется заново выполнить всю процедуру классификации.

Другой недостаток метода связан с вычислительной сложностью при выборе наиболее информативных кортежей, которая определяется размерностью множества гипотетически возможных оценок $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Процесс построения новой полной и непротиворечивой порядковой классификации можно ускорить, если ЛПР сможет сразу указать граничные значения оценок, которые затем следует проверить на непротиворечивость.

Наряду с методом ОРКЛАСС были разработаны и другие методы вербальной классификации многопризнаковых вариантов: ДИФКЛАСС (ДИФференциальная КЛАССификация), СТЕПКЛАСС (STEPCLASS — пошаговая классификация), ЦИКЛ (Цепная Интерактивная КЛассификация), КЛАНШ (КЛАссификация по Непорядковым Шкалам), КЛАРА (КЛАссификация Реальных Альтернатив), которые различаются способами выявления предпочтений ЛПР и построения решающих правил классификации.

18.11. Метод ПАРК выбора лучшего варианта

Метод ПАРК (ПАРная Компенсация, 1995) предназначен для решения так называемых задач стратегического выбора — выделения наиболее предпочтительного (лучшего) варианта решения проблемы из сравнительно небольшого (3—10) числа имеющихся и, как правило, несравнимых вариантов $A_1, \ldots, A_m$. Каждый из вариантов представлен своим кортежем оценок $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $x_{iq} = K_q(A_i)$ по критериям K_q с порядковыми шкалами вербальных оценок $X_q = \{x_q^1, x_q^2, \ldots, x_q^{h_q}\}$. Так как число рассматриваемых вариантов невелико, не имеет смысла ранжировать все сочетания оценок с помощью единой порядковой шкалы, как в методах ЗАПРОС, или классифицировать все гипотетически возможные сочетания оценок, как в методе ОРКЛАСС.

Метод ПАРК идейно напоминает способ Франклина (см. разд. 14.5), в котором у сравниваемых вариантов взаимно исключаются компенсирующие друг друга достоинства и недостатки. Содержание метода ПАРК заключается в следующем. Первоначально формируется набор гипотетических вариантов, незначительно отличающихся от реально существующих, которые затем попарно сравниваются ЛПР. Определяются недостатки этих вариантов, ищутся условия взаимной компенсации недостатков по группам признаков и выделяется лучший вариант. Проверяется независимость пар критериев от изменения качества, выявляются и устраняются возможные противоречия в предпочтениях ЛПР. Если не удается указать лучший вариант, необходимо провести реструктуризацию рассматриваемой проблемы.

Проиллюстрируем применение метода ПАРК на примере задачи выбора загородного дома, описанной в гл. 16, где эта задача решалась методом аналитической иерархии. Для оценки дома и участка воспользуемся теми же критериями, которым дадим шкалы оценок, упорядоченных от лучших к худшим.

K_1. Величина дома
a_1 — большая;
a_2 — средняя;
a_3 — небольшая;
a_4 — малая.

K_2. Комфортабельность жилища
b_1 — высокая;
b_2 — средняя;
b_3 — ниже средней;
b_4 — низкая.

K_3. Состояние дома
c_1 — отличное;
c_2 — хорошее;
c_3 — удовлетворительное;
c_4 — неудовлетворительное.

K_4. Состояние участка
d_1 — отличное;
d_2 — хорошее;
d_3 — удовлетворительное;
d_4 — неудовлетворительное.

K_5. Окрестности
e_1 — очень привлекательные;
e_2 — привлекательные;
e_3 — не очень привлекательные;
e_4 — непривлекательные.

K_6. Транспортное сообщение
f_1 — очень удобное;
f_2 — удобное;
f_3 — не очень удобное;
f_4 — неудобное.

K_7. Условия продажи
g_1 — выгодные;
g_2 — приемлемые;
g_3 — удовлетворительные;
g_4 — неудовлетворительные.

K_8. Цена участка
h_1 — низкая;
h_2 — средняя;
h_3 — умеренная;
h_4 — высокая.

Каждый из трех рассматриваемых вариантов загородных домов характеризуется следующими кортежами оценок, которые совпадают по смыслу с содержательными описаниями домов, приведенными в разд. 16.2:

$$\mathbf{x}_1 = (a^1, b^1, c^3, d^2, e^1, f^2, g^2, h^4),$$
$$\mathbf{x}_2 = (a^2, b^3, c^2, d^4, e^3, f^4, g^2, h^2),$$
$$\mathbf{x}_3 = (a^3, b^2, c^2, d^3, e^4, f^1, g^2, h^3).$$

Очевидно, что эти варианты формально несравнимы по сочетаниям оценок. Поэтому, чтобы выявить предпочтения ЛПР и выбрать лучший из имеющихся вариантов, вместо часто используемого сужения исходной совокупности вариантов в методе ПАРК увеличивают число рассматриваемых вариантов путем добавления других гипотетически возможных вариантов, которые формируются по специальной процедуре при участии ЛПР.

18.12. Формирование множества рекомендуемых вариантов

Вначале задаются два так называемых *базовых варианта*: потенциально лучший $\mathbf{x}^v$ и потенциально худший $\mathbf{x}^w$, которые составляются соответственно из самых лучших и самых худших значений оценок, присутствующих в кортежах оценок рассматриваемых вариантов. Базовые варианты выступают аналогами опорных ситуаций $\mathbf{x}^l$ и $\mathbf{x}^h$. В данном примере базовыми являются варианты

$$\mathbf{x}^v = (a^1, b^1, c^2, d^2, e^1, f^1, g^2, h^2),$$
$$\mathbf{x}^w = (a^3, b^3, c^3, d^4, e^4, f^4, g^2, h^4).$$

Для каждого из базовых вариантов формируется множество гипотетически возможных *рекомендуемых вариантов*, которые будут сравниваться ЛПР. Рекомендуемые варианты строятся следующим образом. В каждом реально имеющемся варианте выделяют его относительные недостатки по сравнению с лучшим базовым вариантом. Эти недостатки характеризуются значениями оценок, по которым реальный вариант уступает базовому. Так, для вариантов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ такими недостатками являются соответственно

$$[\mathbf{x}_1] - c^3, f^2, h^4; \quad [\mathbf{x}_2] - a^2, b^3, d^4, e^3, f^4; \quad [\mathbf{x}_3] - a^3, b^2, d^3, e^4, h^3.$$

Недостатки вариантов предъявляются ЛПР для того, чтобы упорядочить их по значимости (важности) от наиболее существенного к наименее существенному. Допустим, упорядочения этих недостатков имеют такой вид:

$$[\mathbf{x}_1] - h^4, c^3, f^2; \quad [\mathbf{x}_2] - f^4, e^3, b^3, d^4, a^2; \quad [\mathbf{x}_3] - e^4, a^3, h^3, d^3, b^2.$$

Затем оценки в лучшем базовом варианте последовательно заменяются на соответствующие оценки-недостатки каждого из реальных вариантов в порядке их следования в полученных упорядочениях. В результате для каждого исходного варианта получается набор рекомендуемых вариантов, которые отличаются друг от друга по нескольким показателям. В рассматриваемом примере получаем следующие рекомендуемые варианты:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1^{(1)} &= (a^1, b^1, c^2, d^2, e^1, f^1, g^2, \underline{h}^4),\\
\mathbf{x}_1^{(2)} &= (a^1, b^1, \underline{c}^3, d^2, e^1, f^1, g^2, \underline{h}^4),\\
\mathbf{x}_1^{(3)} &= (a^1, b^1, \underline{c}^3, d^2, e^1, \underline{f}^2, g^2, \underline{h}^4),\\
\mathbf{x}_2^{(1)} &= (a^1, b^1, c^2, d^2, e^1, \underline{f}^4, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_2^{(2)} &= (a^1, b^1, c^2, d^2, \underline{e}^3, \underline{f}^4, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_2^{(3)} &= (a^1, \underline{b}^3, c^2, d^2, \underline{e}^3, \underline{f}^4, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_2^{(4)} &= (a^1, \underline{b}^3, c^2, \underline{d}^4, \underline{e}^3, \underline{f}^4, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_2^{(5)} &= (\underline{a}^2, \underline{b}^3, c^2, \underline{d}^4, \underline{e}^3, \underline{f}^4, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_3^{(1)} &= (a^1, b^1, c^2, d^2, \underline{e}^4, f^1, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_3^{(2)} &= (\underline{a}^3, b^1, c^2, d^2, \underline{e}^4, f^1, g^2, h^2),\\
\mathbf{x}_3^{(3)} &= (\underline{a}^3, b^1, c^2, d^2, \underline{e}^4, f^1, g^2, \underline{h}^3),\\
\mathbf{x}_3^{(4)} &= (\underline{a}^3, b^1, c^2, \underline{d}^3, \underline{e}^4, f^1, g^2, \underline{h}^3),\\
\mathbf{x}_3^{(5)} &= (\underline{a}^3, \underline{b}^2, c^2, \underline{d}^3, \underline{e}^4, f^1, g^2, \underline{h}^3).
\end{aligned}$$

Оценки-недостатки выделены подчеркиванием.

Совокупность всех наборов рекомендуемых вариантов $\mathbf{x}_i^{(r)}$ для каждого из исходных вариантов $\mathbf{x}_i$ образует множество рекомендуемых вариантов $X^v = \{\mathbf{x}_i^{(r)}\}$ у лучшего базового варианта $\mathbf{x}^v$.

18.13. Сравнение рекомендуемых вариантов

Рекомендуемые варианты из множества X^v, представленные в виде развернутых словесных формулировок, предъявляются ЛПР для их попарного сравнения. ЛПР может дать один из четырех возможных ответов:

- варианты $\mathbf{x}_i^{(r)}$ и $\mathbf{x}_j^{(s)}$ равноценны;
- вариант $\mathbf{x}_i^{(r)}$ предпочтительнее варианта $\mathbf{x}_j^{(s)}$;
- вариант $\mathbf{x}_j^{(s)}$ предпочтительнее варианта $\mathbf{x}_i^{(r)}$;
- варианты $\mathbf{x}_i^{(r)}$ и $\mathbf{x}_j^{(s)}$ сравнить затруднительно.

Выбор того или иного ответа определяет, в какой мере различные недостатки вариантов компенсируют друг друга.

Предположим, что ЛПР сравнивает рекомендуемые варианты $\mathbf{x}_1^{(1)}$ и $\mathbf{x}_2^{(1)}$. Если эти варианты для ЛПР равноценны, т.е. $\mathbf{x}_1^{(1)} \approx \mathbf{x}_2^{(1)}$, то это означает, что, по мнению ЛПР, недостаток $\underline{h}^4$ «высокая цена» первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ компенсирует недостаток $\underline{f}^4$ «неудобное сообщение» второго варианта $\mathbf{x}_2$. Если ЛПР считает, что вариант $\mathbf{x}_1^{(1)}$ предпочтительнее варианта $\mathbf{x}_2^{(1)}$, т.е. $\mathbf{x}_1^{(1)} \succ \mathbf{x}_2^{(1)}$, то недостаток $\underline{h}^4$ реального варианта $\mathbf{x}_1$ менее существен для ЛПР, чем недостаток $\underline{f}^4$ реального варианта $\mathbf{x}_2$.

Чтобы оценить, можно ли уравновесить последний недостаток, ЛПР предъявляется для сравнения с вариантом $\mathbf{x}_2^{(1)}$ рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_1^{(2)}$, который содержит недостатки $\underline{h}^4$ «высокая цена» и $\underline{c}^3$ «удовлетворительное состояние дома». Если ЛПР указывает, что $\mathbf{x}_1^{(2)} \approx \mathbf{x}_2^{(1)}$, то это значит, что два недостатка $\underline{h}^4$ и $\underline{c}^3$ первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ компенсируют один недостаток $\underline{f}^4$ второго реального варианта $\mathbf{x}_2$. Если $\mathbf{x}_1^{(2)} \prec \mathbf{x}_2^{(1)}$, то два недостатка $\underline{f}^4$ и $\underline{c}^3$ варианта $\mathbf{x}_1$ более существенны для ЛПР, чем один недостаток $\underline{f}^4$ варианта $\mathbf{x}_2$, и процедуру сравнения можно остановить, считая, что недостатки $\underline{h}^4$ и $\underline{c}^3$ приблизительно компенсируют недостаток $\underline{f}^4$. Если же для ЛПР $\mathbf{x}_1^{(2)} \succ \mathbf{x}_2^{(1)}$, то два недостатка $\underline{h}^4$ и $\underline{c}^3$ варианта $\mathbf{x}_1$ менее существенны, чем один недостаток f^4 варианта $\mathbf{x}_2$, и значит, с вариантом $\mathbf{x}_2^{(1)}$ надо сравнивать следующий рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_1^{(3)}$.

Процедура сравнения продолжается, пока несколько недостатков первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ не компенсируют один недостаток $\underline{f}^4$ второго реального варианта $\mathbf{x}_2$, или не будут исчерпаны все недостатки первого варианта $\mathbf{x}_1$.

Вернемся теперь к началу процедуры сравнения рекомендуемых вариантов $\mathbf{x}_1^{(1)}$ и $\mathbf{x}_2^{(1)}$ и рассмотрим ситуацию, когда ЛПР указало, что вариант $\mathbf{x}_2^{(1)}$ предпочтительнее варианта $\mathbf{x}_1^{(1)}$, т. е. $\mathbf{x}_1^{(1)} \prec \mathbf{x}_2^{(1)}$. Это означает, что недостаток $\underline{h}^4$ первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ более существен для ЛПР, чем недостаток $\underline{f}^4$ второго реального варианта $\mathbf{x}_2$. Тогда ЛПР предъявляется для сравнения с вариантом $\mathbf{x}_1^{(1)}$ рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_2^{(2)}$. Если варианты $\mathbf{x}_1^{(1)}$ и $\mathbf{x}_2^{(2)}$ равноценны, то недостаток $\underline{h}^4$ первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ уравновешивается двумя недостатками $\underline{f}^4$ и $\underline{e}^3$ второго реального варианта $\mathbf{x}_2$. Если же рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_1^{(1)}$ менее предпочтителен, чем рекомендуемый $\mathbf{x}_2^{(2)}$, т. е. $\mathbf{x}_1^{(1)} \prec \mathbf{x}_2^{(2)}$, то один недостаток $\underline{h}^4$ не компенсируется двумя недостатками $\underline{f}^4$ и $\underline{e}^3$. И ЛПР предъявляют следующий рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_2^{(3)}$.

Если недостаток $\underline{h}^4$ первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ не компенсируется всеми недостатками второго реального варианта $\mathbf{x}_2$, то ЛПР должно перейти к сравнению двух недостатков варианта $\mathbf{x}_1$ с двумя недостатками варианта $\mathbf{x}_2$, т. е. сравнить рекомендуемый вариант $\mathbf{x}_1^{(2)}$ с рекомендуемым вариантом $\mathbf{x}_2^{(2)}$, затем с $\mathbf{x}_2^{(3)}$ и т. д. Если не удастся установить равноценность рекомендуемых вариантов $\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_1^{(3)}$ ни с каким из рекомендуемых вариантов $\mathbf{x}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_2^{(5)}$, то недостаток $\underline{h}^4$ первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ является очень существенным для ЛПР и его нельзя компенсировать никакими недостатками второго реального варианта $\mathbf{x}_2$. И значит, варианты $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ для ЛПР несравнимы.

ЛПР имеет также возможность на любом шаге ответить, что рекомендуемые варианты $\mathbf{x}_1^{(r)}$ и $\mathbf{x}_2^{(s)}$ несравнимы, и тем самым остановить процедуру сравнения. В этом случае, а также когда не удается компенсировать все недостатки одного варианта всеми недостатками другого варианта, реальные варианты $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ признаются несравнимыми.

Подобным образом проводится сравнение всех возможных пар рекомендуемых вариантов и ищутся условия компенсации их недостатков. В итоге по ответам ЛПР на множестве X^v задаются отношения субъективного строгого превосходства P_{sub}, субъективной эквивалентности I_{sub} и несравнимости T рекомендуемых вариантов. Таким образом, образуются упорядоченные совокупности оценок, составленные из «кусочков» оценок компенсирующих друг друга пар рекомендуемых вариантов, которые аналогичны единым парным порядковым шкалам у лучшей опорной ситуации в методе ЗАПРОС I. Эти совокупности «кусочных» оценок можно использовать вместо ЕПШ для сравнения и ранжирования реальных вариантов.

18.14. Нахождение лучшего варианта

Прежде чем переходить к выделению лучшего варианта, следует, как и в других вербальных методах, убедиться в непротиворечивости предпочтений ЛПР. Частично такая проверка делается при поиске сочетаний недостатков вариантов, взаимно компенсирующих друг друга. Кроме этого необходимо проверить выполнение условия независимости критериев от изменения качества у двух базовых вариантов.

Для этого формируется второе множество гипотетически возможных рекомендуемых вариантов X^w, которые получаются из худшего базового варианта $\mathbf{x}^w$ путем замены его оценок на оценки-достоинства реальных вариантов, упорядоченные ЛПР по предпочтительности. По процедуре, аналогичной описанной выше, выполняется сравнение и компенсация достоинств рекомендуемых вариантов и строятся упорядоченные совокупности «кусочных» оценок у худшего базового варианта $\mathbf{x}^w$. Если две последовательности «кусочных» оценок, построенные у лучшего и худшего базовых вариантов, совпадают, то можно считать критерии независимыми от изменения качества.

Если упорядочения «кусочных» оценок заметно различаются, то предпочтения ЛПР противоречивы, и требуется провести дополнительный анализ. Среди возможных причин несоответствия оценок укажем следующие. Сравниваемые варианты решения достаточно близки, а ЛПР указало, что они неравноценны. Тогда ЛПР нужно изменить результаты сравнения этих вариантов. Некоторые пары критериев зависимы. Тогда нужно либо объединить зависимые оценки и/или критерии, удалить один из критериев, либо дополнительно ввести новый критерий и заново выполнить всю процедуру сравнения вариантов.

Полученная информация о взаимной компенсации недостатков и достоинств реальных вариантов решения по отдельным критериям используются для выбора лучшего варианта. Если исходных вариантов относительно много (больше десяти) и все они несравнимы, целесообразно уменьшить их число, например, введя ограничения (пороги) на значения оценок по некоторым критериям или выделив группу лучших вариантов с помощью метода ОРКЛАСС.

Если компенсация недостатков позволяет указать наиболее предпочтительный вариант с удовлетворяющим ЛПР набором оценок по критериям, то задача будет решена. Допустим, что в данном примере недостатки первого реального варианта $\mathbf{x}_1$ ($\underline{h}^4$ «высокая цена», $\underline{c}^3$ «удовлетворительное состояние дома») полностью компенсируются недостатками второго реального варианта $\mathbf{x}_2$ ($\underline{f}^4$ «неудобное сообщение», $\underline{e}^3$ «не очень привлекательные окрестности», $\underline{b}^3$ «комфортабельность жилища ниже средней») и третьего реального варианта $\mathbf{x}_3$ ($\underline{e}^4$ «непривлекательные окрестности», $\underline{a}^3$ «небольшая величина дома»), а недостаток $\underline{f}^2$ «удобное сообщение» варианта $\mathbf{x}_1$ менее существен, чем все остальные недостатки вариантов $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$. Тем самым первый вариант $\mathbf{x}_1$ будет лучшим. Аналогичным образом, считая, что недостатки $\underline{f}^4$ и $\underline{e}^3$ второго варианта $\mathbf{x}_2$ менее существенны, чем недостатки $\underline{e}^4$ и $\underline{a}^3$ третьего варианта $\mathbf{x}_3$, устанавливается предпочтительность второго варианта $\mathbf{x}_2$. Таким образом, получаем следующее итоговое упорядочение загородных домов $A_1 \succ A_2 \succ A_3$, что совпадает с результатом, полученным методом аналитической иерархии.

Когда недостатки рекомендуемых вариантов скомпенсировать не удается, реальные варианты остаются несравнимыми. Тогда предлагается реструктурировать задачу. Возможны следующие дальнейшие действия.

Если несравнимость вариантов обусловлена наличием очень существенных недостатков, то нужно уменьшить число критериев, агрегировав их в менее подробные. Если несравнимость вариантов обусловлена большим числом ответов ЛПР о несравнимости рекомендуемых вариантов, то нужно увеличить число критериев оценки, дезагрегировав их в более подробные. Если ЛПР не считает возможным агрегирование/дезагрегирование критериев, то либо шкалы критериев изменяются путем добавления новых градаций оценок или объединения несколько прежних градаций в одну, либо список критериев дополняется новыми критериями. После внесения изменений и реструктуризации задачи нужно заново провести сравнение обновленных вариантов.

Если с помощью модификации задачи не удается выделить наиболее предпочтительный вариант решения, то ЛПР вынуждено будет ослабить свои предпочтения и выбрать реальный вариант, наиболее близкий к желаемому. ЛПР может также сконструировать из оценок по критериям новый гипотетический вариант, который будет соответствовать его предпочтениям, и проанализировать возможности его практической реализации. Если ЛПР сконструирует несколько новых желательных вариантов, то их можно либо сравнить тем же методом, либо привлечь дополнительную информацию. Таким образом, метод ПАРК позволяет ЛПР проводить детальный и подробный анализ имеющихся вариантов, уточнять свои предпочтения в ходе решения задачи, формулировать требования к новым желательным вариантам решения сложной проблемы.

18.15. Особенности вербальных методов

Ведение диалога на привычном для человека языке, максимально приближенном к его профессиональной деятельности, — характерная особенность вербального анализа решений. Для описания проблемной ситуации и измерения предпочтений ЛПР используются только словесные (качественные) оценки вариантов решения по многим разнообразным критериям, которые не заменяются числами. Не вычисляются и не применяются никакие числовые коэффициенты важности критериев и ценности вариантов. Таким образом, вербальные методы относятся к четвертой группе методов рационального выбора.

Основное содержание вербальных методов состоит в последовательном выявлении предпочтений ЛПР путем попарного сравнения многокритериальных описаний вариантов. Оценка и сравнение могут выполняться как для всех гипотетически возможных вариантов, так и для любого заданного их подмножества. Для получения информации от ЛПР и экспертов используются процедуры, надежность которых подтверждена психологическими экспериментами.

Получаемая от ЛПР информация проверяется на согласованность. Выявленные ошибки и противоречия предъявляются ЛПР для анализа и устранения. Тем самым, используя только качественные измерения, на множестве возможных оценок задаются транзитивные отношения превосходства и эквивалентности вариантов, с помощью которых классифицируются или упорядочиваются варианты, выделяются лучшие.

Вербальные методы реализованы в виде интерактивных человеко-машинных процедур и систем поддержки принятия решений, обеспечивающих диалоговый режим работы с ЛПР. Методы отличаются активным участием ЛПР в анализе и решении стоящей проблемы, позволяя разносторонне и достаточно подробно выражать предпочтения ЛПР, уточнять и корректировать их в ходе решения задачи, генерировать новые варианты. Построенные решающие правила обеспечивают четкое и понятное объяснение получаемых результатов, основанное на выявленных предпочтениях ЛПР.

В целом вербальные методы более «прозрачны», мало чувствительны к ошибкам измерения и менее трудоемки для человека. Вместе с тем по сравнению с методами теории полезности, аналитической иерархии, сравнения вариантов по ограниченной предпочтительности методы вербального анализа решений имеют меньшую «разрешающую способность», так как относительно бóльшая часть вариантов остается несравнимой. Успешность и эффективность применения вербального подхода во многом определяются удачной и «правильной» структуризацией рассматриваемой проблемы, что зависит от опыта и профессионализма консультанта-аналитика, активно участвующего в постановке и решении задачи.

Методы вербального анализа решений использовались в основном в нашей стране для решения важных прикладных проблем. Так, методы ранжирования ЗАПРОС применялись для формирования планов научных исследований в АН СССР. Методы вербальной классификации использовались для построения баз экспертных знаний, решения задач медицинской диагностики, оценки кредитоспособности заемщиков. Метод выбора лучшей многокритериальной альтернативы ПАРК был использован при экспертной оценке разных вариантов прокладки трассы газопровода на полуострове Ямал.

ГЛАВА 19
ФУНКЦИИ ВЫБОРА

19.1. Формализованный подход к выбору вариантов

Рассмотренные методы принятия решений основывались на реляционной или функциональных моделях предпочтений ЛПР. Согласно этим моделям выбор предпочтительных вариантов осуществляется путем их сравнения друг с другом либо непосредственно по бинарным отношениям, заданным на допустимом множестве, либо опосредованно с помощью числовых функций ценности или полезности, специальных индикаторов. При этом ЛПР стремится в той или иной мере максимизировать получаемую им выгоду. Рациональность поведения ЛПР предписывает транзитивность его субъективных индивидуальных предпочтений.

Вместе с тем имеется достаточно много практических задач субъективного выбора, которые не укладываются в рамки этих ограничений. Приведем несколько характерных примеров, иллюстрирующих формально нерациональное поведение людей при принятии решения, но вполне естественное и разумное с содержательной точки зрения. В этих примерах результат выбора существенно зависит от условий, в которых делается выбор, или, как еще говорят, от контекста ситуации выбора.

Покупка товаров — типичный пример контекстно зависимого индивидуального выбора. Предположим, что дама желает обновить свой гардероб и отправляется в магазины за покупками. Дама пока еще не решила, что она купит — брючный ли костюм или костюм с юбкой, платье, а может быть, отдельно жакет, а к нему блузку, юбку или брюки. Ясно, что сделанная дамой покупка сильно зависит от ассортимента товаров, причем, скорее всего, в разных магазинах будут различные наборы вещей.

Вещи оцениваются покупателем по разнообразным объективным и субъективным критериям, таким, как назначение вещи, модность фасона, сочетаемость с другими вещами, обувью и аксессуарами, изготовитель, качество пошива, вид ткани, стоимость вещи и еще многими-многими другими. При этом каждый из покупателей обычно имеет собственные критерии оценки, индивидуальные предпочтения и правила для выбора товара. Для одного покупателя цена вещи не имеет значения и не является критерием (главное, «чтобы костюмчик сидел» и «он мне нравится»), для другого цена — основной критерий покупки («заплатить поменьше»), для третьего цена выступает как ограничение («потратить не больше, чем»).

На сделанный выбор может повлиять и то обстоятельство, в комплекте с какими другими вещами данная вещь рассматривается и оценивается покупателем. Так, если к имеющемуся набору блузок добавить еще какие-то блузки, то выбранной может оказаться совсем иная блузка, нежели выбранная из первого набора вещей. Причем выбранная во втором случае «лучшая» блузка необязательно будет из числа добавленных.

И наконец, даже найдя что-либо подходящее, покупатель может совсем ничего не купить. Налицо явная непоследовательность поведения ЛПР, противоречивость его предпочтений. Тем не менее тот или иной выбор все-таки делается. Даже отказ от покупки (отказ от выбора) — это тоже один из возможных вариантов решения проблемы выбора.

Другой пример контекстно зависимого выбора — определение абсолютного победителя конкурса. Допустим, требуется выбрать лучшую группу университета. Конкурс можно организовать по-разному. Можно сначала выбрать лучшую группу на каждом курсе, а из них — лучшую группу университета. Можно поступить и иначе: сначала выбрать лучшую группу каждого факультета, а затем — лучшую группу университета. Очевидно, что итоги конкурса сильно зависят от реализуемой схемы отбора победителей и конкретного состава участников, прошедших на следующий тур по каждой из номинаций. Поэтому победителями могут оказаться совершенно разные группы.

Большим разнообразием способов выявления победителей (выбора лучших вариантов) отличаются спортивные соревнования. Победители могут либо определяться по индивидуальным показателям, которые характеризуют каждого участника в отдельности, либо вычисляться как общие показатели, складывающиеся из показателей членов команды. Показатели оценки результативности участников состязаний могут быть и объективными, измеренными приборами или вычисленными по определенным правилам, и субъективными, данными одним или несколькими судьями.

Победители могут определяться и по результатам взаимных встреч (матчей, игр, партий, схваток, ...) друг с другом, которые, в свою очередь, могут быть организованы различным образом. Например, все участники встречаются со всеми в один или несколько кругов (турнирная схема); или все участники разбиваются на пары, из которых победители выходят на следующую ступень (кубковая схема); или все участники разбиваются на несколько групп, где встречаются друг с другом, а затем победители встречаются между собой по турнирной или кубковой схеме и т. д.

Во всех приведенных выше примерах производится сужение исходного множества имеющихся вариантов (объектов, альтернатив) на основе тех или иных правил выбора. При этом итоговый результат во многом определяется принятой процедурой выбора. При таком подходе предпочтения ЛПР выражаются в виде некоторой функции выбора, указывающей, какие именно варианты следует считать предпочтительными в заданном множестве допустимых решений.

Главное достоинство формализованного подхода — возможность построения более сложных и разнообразных моделей выбора лучших вариантов, в особенности если этот выбор не осуществим с помощью парных сравнений вариантов, экстремизации критериев оптимальности решения или вообще нерационален в классическом понимании (нетранзитивен), хотя и вполне приемлем для ЛПР.

19.2. Формальная модель выбора

Теория функций выбора (К. Эрроу, П. Фишберн, А. Сен, М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров, А. В. Малишевский, Б. Г. Миркин и др.), опирается на следующую формальную модель выбора. Имеется некоторое заданное множество допустимых вариантов (объектов, альтернатив) $X^a = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, которое в теории выбора принято обозначать строчными буквами. Множество X^a содержит не менее двух вариантов $|X^a| \geq 2$ и предполагается конечным. Любое подмножество вариантов $X \subseteq X^a$, на котором производится выбор, называется *предъявлением*.

Результатом выбора, или просто *выбором*, из предъявления X называется некоторое подмножество предпочтительных вариантов $Y \subseteq X$, выделенных ЛПР тем или иным образом. *Функцией выбора* C будем называть правило, или набор правил, ставящих в соответствие каждому предъявлению X результат выбора Y. Формально функция выбора $Y = C(X)$ представляет собой множество пар $\{(X, Y)\}$ и является отображением вида $C\colon A \to A$, заданным на семействе A всех непустых подмножеств предъявлений X из исходного множества X^a и сужающим множество всех возможных вариантов до подмножества Y. Заметим, что в отличие от обычной функции функция выбора устанавливает соответствие между множествами, а не между элементами множеств.

Выбор называется *пустым*, или отказом от выбора, если $Y = C(X) = \varnothing, |Y| = 0$; *одиночным*, если $Y = C(X) = \{x\}$, $|Y| = 1$; и *множественным*, если $|Y| > 1$ при любом $X \in A$. Вариант $x \in X^a$ называется *приемлемым*, если он принадлежит результату выбора $x \in Y = C(X)$. Если предъявляется единственный приемлемый вариант x, то этот вариант x и выбирается. В этом случае выполняется условие $\{x\} = C(\{x\})$.

Схематически формальную модель выбора можно изобразить в виде преобразователя, на вход которого поступает предъявление X, а на выходе имеется результат выбора Y (рис. 19.1). Функцию выбора $Y = C(X)$ можно определить двояко:

• поэлементным заданием совокупности всех вариантов y из множества X, удовлетворяющих некоторым условиям $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, ..., т. е.

$$C(X) = \{y \in X | \Phi_1(y), \quad \Phi_2(y), \ldots\};$$

• путем целостного задания единственного подмножества Y множества вариантов X, удовлетворяющего некоторым условиям $\Psi_1(Y), \Psi_2(Y)$, ..., т. е.

$$C(X) = \{Y \subseteq X | \Psi_1(Y), \Psi_2(Y), \ldots\}.$$

Требования $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ и $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$, обусловливающие выбор, могут быть описаны содержательно на естественном языке или представлены формально логически. Различные условия будут порождать, вообще говоря, разные функции выбора.

В реальных ситуациях выбора совокупность предъявляемых наборов вариантов не произвольна, а ограниченна, и образует некоторое подсемейство A_p семейства A всех возможных подмножеств множества X, которое будем называть *семейством допустимых предъявлений*. Функция выбора $C(X) \subseteq X$ будет определена тогда только для предъявлений $X \in A_p$ и задавать отображение $C\colon A_p \to A$. Назовем ее *частичной функцией выбора*. При $A_p = A$ функция выбора называется *всюду определенной*.

Рис. 19.1. Формальная модель выбора

Часто в задачах выбора бывает трудно рассмотреть все варианты, имеющиеся в исходном множестве X^a, и поэтому часть из вариантов может остаться не предъявленной для выбора. В подобной же ситуации оказываются и уже просмотренные варианты, если не решено принять их, либо отвергнуть. Выбор, при котором для некоторых из существующих вариантов не сделано никакого определенного решения или это решение неизвестно, называется *неполным*. Неполный выбор задается на семействе A_p допустимых предъявлений функциями выбора $C^1(X)$ и $C^0(X)$, такими, что для любого $X \in A_p$ выполняется

$$C^1(X) \subseteq X, \quad C^0(X) \subseteq X, \quad C^1(X) \cap C^0(X) = \varnothing.$$

Варианты $x \in C^1(X)$ называются *принятыми*, а $x \in C^0(X)$ — *отвергнутыми*. Одно из множеств $C^1(X), C^0(X)$ и оба эти множества могут оказаться пустыми. Если $C^1(X) \cup C^0(X) = X$, то говорят, что выбор в предъявлении X *полностью определен*.

Задание частичной функции выбора $C(X)$ на семействе A_p соответствует ситуации, когда выбор в любом предъявлении $X \in A_p$ полностью определен. В этом случае частичная функция выбора совпадает с множеством принятых вариантов $C_1(X) = C(X)$, а множество отвергнутых вариантов представляет ее дополнение $C^0(X) = X \setminus C^1(X)$.

Построение функции выбора производится на основе информации о выборе, сделанном на ограниченном семействе A_p допустимых предъявлений. Как и всякая другая функция, функция выбора может быть задана различными способами. При табличном задании функции выбора для каждого допустимого предъявления X приводятся множества принятых $C^1(X)$ и отвергнутых $C^0(X)$ вариантов. При аналитическом задании функции выбора используются формальные аппараты теории множеств, алгебры логики, функционального анализа, теории оптимального управления.

19.3. Механизмы выбора

Выбор осуществляется по определенным правилам на основе имеющейся информации о вариантах. В совокупности они детализируют внутреннее устройство преобразователя, реализующего функцию выбора, и носят название *механизма выбора*. Механизм выбора задается парой $M = \langle \sigma, \pi \rangle$, где σ — некоторая *структура* на семействе вариантов A; π — *правило выбора*, указывающее, каким образом из предъявления X на основе структуры σ выделяется множество $Y = C(X)$ выбираемых вариантов.

Первая компонента механизма выбора — структура σ — отражает особенности всех вариантов из множества X^a, которые позволяют сопоставить варианты друг с другом или с группами вариантов и произвести выбор. Если выбор осуществляется лишь на основе информации о попарном сравнении вариантов, то структура представляет собой набор бинарных отношений и результаты сравнения. Если варианты сравниваются по многим критериям, то в качестве структуры выступают критерии, их шкалы и критериальные оценки вариантов.

Иногда указываются либо эталонные варианты (опорные, или идеальные, точки), к которым желательно максимально приблизиться при выборе, либо варианты определенного уровня, не ниже которого должны быть выбранные варианты. В структуру могут включаться также сведения о важности бинарных отношений или критериев, или об их упорядоченности по относительной важности, если эта информация существенна для выбора. Используются и другие разновидности структур. При рассмотрении конкретных механизмов выбора обычно указывается составляющая их структура.

Вторая компонента механизма выбора — правило выбора π — является набором инструкций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ или $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ для отбора желательных вариантов. В соответствии с двумя возможными способами определения функции выбора $C(X)$ правило выбора π также допускает поэлементное и целостное описания условий, при которых вариант y включается в выбранное множество Y. Очевидно, что при одной и той же структуре σ могут использоваться различные правила выбора π. Укажем некоторые из них.

Одни из наиболее распространенных — правила, предписывающие выбирать из предъявления X лишь лучшие варианты по отношению R либо нехудшие варианты, для которых в предъявлении X нет лучших вариантов. В первом случае (правило разрешения) функция выбора $C(X)$ имеет вид

$$C_R(X) = \{y \in X | yRx, \forall x \in X\},$$

а во втором (правило запрещения) —

$$C_R(X) = \{y \in X | \overline{\exists} x \in X, xRy\}.$$

Структура σ должна содержать в первом случае информацию, что отношение R рефлексивно, а во втором — антирефлексивно, иначе второй способ выбора при $x = y$ даст тождественно пустой выбор.

Правило экстремального выбора при наличии числового критерия качества решения (показателя эффективности) $f(x)$ есть процедура вычисления переменных $y \in \arg\max\limits_{x \in X} f(x)$, которые экстремизируют критерий оптимальности на множестве X, что эквивалентно следующей форме записи:

$$C_{opt}(X) = \{y \in X | f(y) \geq f(x), \forall x \in X\}.$$

При совокупно-экстремальном выборе по многим критериям качества $f_1(x), \dots, f_n(x)$ лучшими считаются варианты, не уступающие всем остальным вариантам хотя бы по одному из критериев:

$$C_{extr}(X) = \{y \in X | \exists k \in \{1, \dots, n\}, f_k(y) \geq f_k(x), \forall x \in X\},$$

а при мажоритарном выборе — варианты, превосходящие остальные варианты по бóльшему числу критериев:

$$C_{maj}(X) = \{y \in X | \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sign}(f_j(y) - f_j(x)) > 0, \forall x \in X\}.$$

Структура σ описывает здесь соотношения между критериями качества решения и шкалы критериев.

Выбор парето-оптимальных вариантов осуществляется по правилу

$$C_{par}(X) = \{y \in X | f_j(y) \geq f_j(x) \text{ и }$$
$$\exists k \in \{1, \dots, n\}, f_k(y) > f_k(x), \forall x \in X\},$$

а лексикографический выбор по правилу

$$C_{lex}(X) = \{y \in X | f_1(y) < f_1(x),$$
$$\text{или } f_1(y) = f_1(x), f_2(y) < f_2(x), \dots,$$
$$\text{или } \quad f_1(y) = f_1(x), \dots, f_{k-1}(y) =$$
$$= f_{k-1}(x), f_k(y) < f_k(x), \forall k, \forall x \in X\}.$$

В первом случае структура σ устанавливает строгий частичный порядок на множестве критериев качества, во втором — лексикографический порядок.

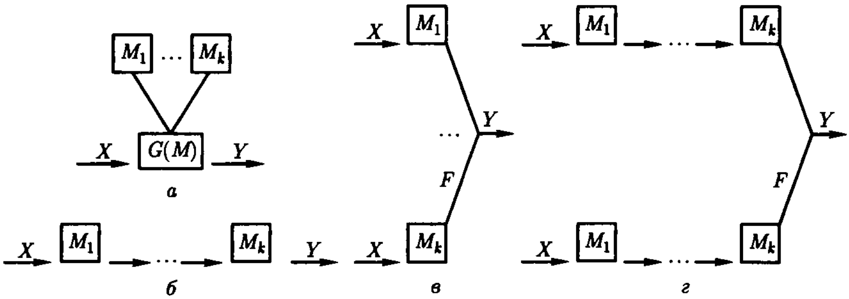


Рис. 19.2. Схемы механизмов выбора:

а — агрегированный; *б* — последовательный; *в* — параллельный; *г* — последовательно-параллельный

Перечисленные механизмы выбора достаточно просты и опираются на рассмотренные ранее способы выражения предпочтений ЛПР с помощью бинарных отношений и многокритериальных оценок. Вместе с тем представление предпочтений ЛПР функциями выбора позволяет строить и более сложные механизмы, которые можно представить в виде многоступенчатых схем.

При агрегированном выборе (рис. 19.2, *а*) дополнительно задается правило агрегирования, позволяющее построить новый агрегированный механизм, в соответствии с которым и будет осуществляться выбор. Обычно это некоторая операция G, сопоставляющая набору механизмов выбора $M = (M_1, M_2, \ldots, M_k)$ новый агрегированный механизм $M_{agg} = G(M) = G(M_1, M_2, \ldots, M_k)$. Агрегированный выбор характеризуется функцией

$$C_{agg}(X) = C_{G(M)}(X).$$

Примером агрегированного выбора может служить паретооптимальный выбор.

При последовательном выборе (рис. 19.2, *б*), использующем набор механизмов $M = (M_1, M_2, \ldots, M_k)$, вначале производится выбор по механизму M_1, из отобранных вариантов выбираются варианты по механизму M_2 и т. д. Последовательный выбор описывается функцией

$$C_{seq}(X) = C_{M_k}(\ldots C_{M_2}(C_{M_1}(X))\ldots).$$

Примером последовательного выбора является лексикографический выбор, где механизм M_j определяет правило выбора по соответствующему критерию f_j.

Параллельный выбор (рис. 19.2, *в*) формируется из множеств выбранных вариантов $C_{M_1}(X), C_{M_2}(X), \ldots, C_{M_k}(X)$ с помощью некоторой операции F и задается функцией

$$C_{par}(X) = F(C_{M_1}(X), C_{M_2}(X), \ldots, C_{M_k}(X)).$$

Примерами параллельного выбора служат многокритериальный и мажоритарный выборы, где механизм M_j определяет правило выбора по соответствующему критерию f_j. Используя различные сочетания разных механизмов выбора, можно строить более сложные функции выбора для реальных ситуаций (рис. 19.2, *г*).

Каждый конкретный механизм выбора M порождает определенную функцию выбора $C_M(X)$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: одна и та же функция выбора может порождаться различными механизмами. Механизмы, отличающиеся структурами σ, правилами выбора π или же и тем и другим, но порождающие одну и ту же функцию выбора, называются *эквивалентными*. Чем проще механизм выбора, тем меньше информации требуется для построения этого механизма. И наоборот, для конструирования более сложных механизмов нужна более детальная информация.

При построении сложных механизмов выбора в виде многоступенчатых схем «составная» функция выбора $C_M(X)$ образуется в результате агрегирования или комбинирования нескольких «простых» функций выбора. Такие преобразования функций выбора можно формально представить как операции над функциями выбора, среди которых простейшие — операции суперпозиции, объединения и пересечения, частичного объединения и пересечения, заданные на множестве функций выбора. Использование этих операций позволяет построить результирующую функцию выбора из набора исходных функций.

19.4. Свойства функции выбора

Рассмотрим самые общие условия, которые налагаются на функции выбора, и покажем, как изменяется множество выбираемых вариантов $Y = C(X)$ при различных ограничениях на предъявление X. Отдельные свойства функции выбора проиллюстрируем на примерах покупки товаров и определения лучших групп университета. Обозначим через X исходное множество всех вещей или групп, X_k — некоторое подмножество вещей или групп, $C(X)$ и $C(X_k)$ — вещи или группы, выбранные соответственно из X и X_k. Свойства функции выбора определяются следующими условиями.

Независимость выбора *от исключения отвергнутых вариантов* (**O**): если $C(X) \subseteq X_k \subseteq X$, то $C(X_k) = C(X)$. Варианты, выбранные из исходного множества, совпадают с вариантами, выбранными из суженного множества, полученного путем исключения невыбранных вариантов (рис. 19.3, *о*). Примеры: удаление из ассортимента невыбранных товаров не влияет на результаты выбора; исключение из числа участников конкурса групп, не являющихся лучшими на факультетах, не меняет состав лучших групп университета.

Монотонность выбора (**М**): если $X_k \subseteq X$, то $C(X_k) \subseteq C(X)$. Варианты, выбранные из суженного множества, входят в число вариантов, выбранных из исходного множества (рис. 19.3, *м*). Примеры: товары, выбранные из ограниченного ассортимента, будут среди выбранных и из широкого ассортимента; лучшие группы факультета будут среди лучших групп университета.

Наследование выбора (**Н**): если $X_k \subseteq X$, то $C(X_k) \supseteq C(X) \bigcap \bigcap X_k$. Варианты, выбранные из исходного множества и имеющиеся в суженном множестве, входят в число вариантов, выбранных из суженного множества (рис. 19.3, *н*). Примеры: товары, выбранные из широкого ассортимента и имеющиеся в ограниченном ассортименте, будут среди выбранных и из ограниченного ассортимента; лучшие группы университета, относящиеся к некоторому факультету, будут среди лучших групп этого факультета.

Константность (*сильное наследование*) выбора (**К**): если $X_k \subseteq X$ и $C(X) \bigcap X_k \neq \varnothing$, то $C(X_k) = C(X) \bigcap X_k$. Только варианты, выбранные из исходного множества и имеющиеся в суженном множестве, будут выбраны из суженного множества (рис. 19.3, *к*). Примеры: только те товары, которые выбраны из широкого ассортимента и имеются в ограниченном ассортименте, будут выбраны и из ограниченного ассортимента; только лучшие группы университета, относящиеся к некоторому факультету, будут лучшими группами этого факультета.

Согласие (*слабое наследование*) выбора (**С**): если $X = X_k \bigcup X_h$, то $C(X_k) \bigcap C(X_h) \subseteq C(X) = C(X_k \bigcup X_h)$. Варианты, входящие одновременно в число выбранных из всех суженных множеств, входят в число вариантов, выбранных из расширенного множества, которое объединят все варианты, и в общее число вариантов, выбранных из всех суженных множеств (рис. 19.3, *с*). При-

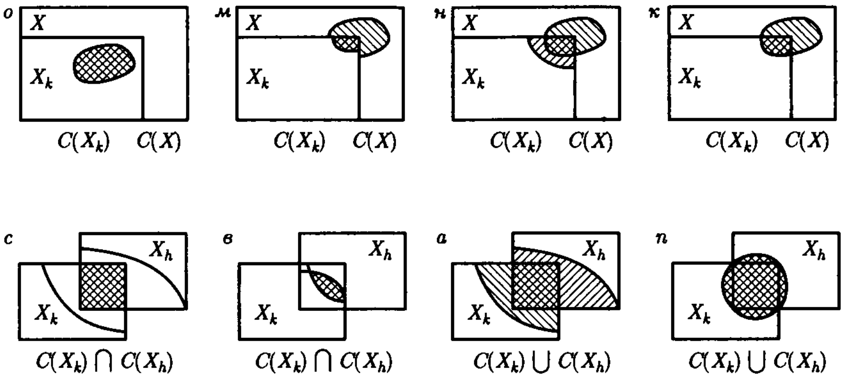


Рис. 19.3. Свойства функции выбора:

о — независимость от исключения отвергнутых вариантов; *м* — монотонность; *н* — наследование; *к* — константность; *с* — согласие; *в* — совмещенность; *а* — агрегируемость; *п* — независимость от пути

меры: товары, одновременно выбранные во всех ограниченных ассортиментах, будут среди выбранных и из расширенного ассортимента; лучшие группы всех факультетов будут среди лучших групп университета.

Совмещенность (*мультипликаторность*) выбора (**В**): $C(X_k)\bigcap C(X_h) = C(X_k \bigcap X_h)$. Варианты, входящие одновременно в число выбранных из всех суженных множеств, совпадают с вариантами, выбранными из множества, которое состоит из общей части всех суженных множеств (рис. 19.3, *в*). Примеры: товары, одновременно выбранные во всех ограниченных ассортиментах, будут среди выбранных и из общей части ограниченных ассортиментов; лучшие группы всех факультетов будут лучшими среди групп, общих для всех факультетов (если таковые имеются).

Агрегируемость (*сумматорность*) выбора (**А**): если $X = X_k \bigcup X_h$, то $C(X) = C(X_k \bigcup X_h) = C(X_k) \bigcup C(X_h)$. Варианты, выбранные из объединения всех суженных множеств, совпадают с вариантами, выбранными из всех суженных множеств (рис. 19.3, *а*). Примеры: товары, выбранные из всех ограниченных ассортиментов, будут выбраны и из расширенного ассортимента; лучшие группы всех факультетов будут лучшими группами университета.

Независимость выбора *от пути* (**П**): если $X = X_k \bigcup X_h$, то $C(X) = C(X_k \bigcup X_h) = C(C(X_k) \bigcup C(X_h))$. Варианты, выбранные из объединения всех суженных множеств, совпадают с вариантами, выбранными из множества, которое состоит из всех вариантов, выбранных из всех суженных множеств (рис. 19.3, *п*). Примеры: товары, выбранные из расширенного ассортимента, будут выбраны и из множества товаров, объединяющего товары, выбранные из всех ограниченных ассортиментов; лучшие группы университета будут группами, выбранными из множества лучших групп всех факультетов.

К функции выбора можно предъявить и другие виды требований. Каждое из сформулированных условий и их сочетание определяют некоторый класс функций выбора. Так, условие константности **К** характеризует классически рациональный выбор по скалярному критерию оптимальности или функции ценности/полезности и усиливает каждое из свойств **Н**, **О**, **С**. Совместное выполнение условий наследования **Н**, независимости от отвергнутых вариантов **О** и согласия **С** ведет к многокритериальному выбору по Эджворту—Парето и, в частности, обеспечивает выполнение свойства **К**. Условие агрегируемости **А** эквивалентно совместному выполнению свойств **М** и **С**, а условие независимости от пути **П** — совместному выполнению свойств **Н** и **О**. В то же время существуют и функции выбора, не обладающие какими-то из указанных выше свойств.

19.5. Турнирный выбор

В качестве одного из известных примеров функции выбора, для которой не выполняются некоторые из указанных выше свойств, определяющих рациональный выбор, рассмотрим функцию турнирного выбора. Эта функция, как следует из ее названия, используется для описания, например, результатов спортивных состязаний, в которых все участники поочередно встречаются друг с другом по одному или несколько раз (в один или несколько кругов). В этом случае множество $X^a = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ допустимых вариантов представляет собой общий перечень всех игроков или команд, принимающих участие в состязании; предъявление X — любое подмножество участников, например, по какому-либо виду спорта; результат выбора (выбор) Y — один или несколько победителей всего состязания или одного из видов состязания. Функция турнирного выбора порождается механизмом турнирного выбора, который задается структурой σ и правилом выбора π.

Структура σ содержит информацию о множестве всех рассматриваемых вариантов и представляется квадратной матрицей $T = (t_{ij})_{m \times m}$. Строки и столбцы турнирной матрицы T соответствуют участникам $x_1, \ldots, x_m$, а элементы t_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, обозначают результаты встреч между соперниками. Для удобства считается, что t_{ij} суть целые неотрицательные числа (очки). Например, участнику начисляется 2 очка за победу, 1 очко — за ничью и 0 очков — за поражение. Используются и иные правила начисления очков. Поскольку участник сам с собой не встречается, диагональные элементы t_{ii} полагаются равными нулю или бесконечности либо вообще исключаются из турнирной матрицы. Этим турнирная матрица отличается от матрицы парных сравнений. Семейство всех возможных матриц T определяет специальный класс турнирных структур.

Турнирная матрица задает на множестве X^a участников или подмножестве $X \subseteq X^a$ бинарное отношение W, которое называется *мажоритарным*, или *турнирным*, и интерпретируется в данном случае как отношение «быть победителем». Мажоритарное отношение W определяется для $x_i \neq x_j$ условием

$$x_i W x_j \Leftrightarrow t_{ij} > t_{ji} \tag{19.1}$$

и обладает свойствами антирефлексивности, асимметричности, связности. В общем случае мажоритарное отношение W нетранзитивно.

Для выявления победителя (или лучших участников) соревнования на структуре σ вводится некое правило выбора π. Как мы знаем, правила выбора могут быть разными. Хорошо известно и широко применяется правило определения победителя по наибольшей сумме набранных очков $S(x_i) = \sum\limits_j t_{ij}$. Правило «суммы очков» π_S выглядит следующим образом:

$$x_i \succeq x_k \Leftrightarrow S(x_i) \geq S(x_k), \quad i, k = 1, \ldots, m.$$

Функция турнирного выбора по правилу «суммы очков» π_S имеет вид

$$C_S(X) = \{y \in X | S(y) = \max_{x \in X} S(x)\}.$$

Согласно этому правилу победителем становится участник, набравший максимальную сумму очков. Разумеется, такой выбор не пуст, но он не всегда единственен, так как несколько участников может набрать одинаковое число очков.

Можно определять победителя соревнования и по-другому. По правилу «гарантированного результата» победителем объявляется участник, который имеет максимальное значение наименьшего числа очков $N(x_i) = \min\limits_{j \neq i} t_{ij}$, набранных во всех парных встречах. Правило «гарантированного результата» (правило максимина) π_N выглядит следующим образом:

$$x_i \succeq x_k \Leftrightarrow N(x_i) \geq N(x_k), \quad i, k = 1, \ldots, m,$$

а функция турнирного выбора —

$$C_N(X) = \{y \in X | N(y) = \max_{x \in X} N(x)\}.$$

Как и в первом случае, здесь также может оказаться несколько победителей. В качестве правила «гарантированного результата» можно применять и правило минимакса.

В многокруговом турнире победитель определяется по итоговой турнирной матрице, которая образуется как результат сложения всех турнирных матриц для каждого круга соревнования.

Пример 19.1. Рассмотрим однокруговой турнир, в котором принимают участие шесть команд $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Результаты встреч между ними представлены в турнирной матрице (табл. 19.1). Все варианты сравнимы по мажоритарному отношению W. В матрице есть нетранзитивная цепочка $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ$ $\succ x_1$. В двух последних столбцах турнирной матрицы в строке i-го участника указаны сумма очков $S(x_i)$ и минимальное число очков $N(x_i)$. По правилу «суммы очков» победителем соревнования является участник x_4, набравший большее число очков и одержавший больше побед, а по правилу «гарантированного результата» — участник x_5, не проигравший ни одной встречи. ■

Для функций турнирного выбора всегда выполняется условие агрегируемости **A**, а условия наследования **H**, независимо-

Таблица 19.1

Турнирная матрица

T	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$S(x_i)$	$N(x_i)$
x_1	*	0	2	0	1	2	5	0
x_2	2	*	0	0	1	0	3	0
x_3	0	2	*	0	1	1	4	0
x_4	2	2	2	*	0	2	8	0
x_5	1	1	1	2	*	1	6	1
x_6	0	2	1	0	1	*	4	0

сти от исключения отвергнутых вариантов **О** и согласия **С** иногда выполняются, а иногда и нет.

19.6. Особенности методов функций выбора

Функции выбора являются достаточно универсальным средством решения сложных задач выбора, которое дает возможность построить сложные модели выбора, сочетающие разные методы и механизмы выбора, включая бинарные отношения и многокритериальные оценки. Выбираемые варианты могут описываться и количественными, и качественными признаками. Тем самым методы, основанные на функциях выбора, входят в третью и четвертую группы методов рационального выбора.

Использование функций выбора позволяет оценивать каждый вариант решения по отдельности и сравнивать их между собой. Оценка, сравнение и поиск лучших вариантов могут проводиться как в целом, без детализации свойств вариантов, так и по отдельно выделенным характеристикам вариантов. Поиск наиболее предпочтительных вариантов осуществляется путем последовательного сужения исходного множества альтернативных вариантов. При этом задание самой функции выбора фактически предопределяет и вид окончательного результата, и способ его получения.

Функции выбора являются удобным языком для формулировки различных содержательных моделей выбора, способных учитывать зависимость результатов выбора от состава конкретно имеющихся вариантов, наличия или отсутствия определенных вариантов. С помощью функций выбора можно формально описать разные логики выбора, выразить многообразие индивидуальных предпочтений единственного ЛПР и коллективных предпочтений нескольких ЛПР, в том числе не укладывающиеся в рамки классической рациональности, например нетранзитивные предпочтения. В процедурах выявления предпочтений ЛПР имеется возможность отказа от выбора.

В то же время функции выбора остаются во многом теоретической конструкцией, не получившей пока широкого практического применения. Для функций выбора характерна некоторая заформализованность языка, усложняющая в ряде случаев содержательную интерпретацию полученных результатов. Могут также появляться ситуации, когда понятие предпочтения ЛПР лишается смысла, а сам выбор становится невозможным.

19.7. Общая характеристика методов рационального выбора

Потребность в создании методов рационального выбора обусловлена необходимостью решения сложных и плохо формализуемых практических проблем, для которых трудно установить объективные критерии качества или эффективности решения, находя экстремумы которых можно выделить лучший вариант. Рациональный выбор, как правило, осуществляется в ситуациях, где присутствуют неопределенности природы, человека и целей. «Снятие» этих неопределенностей производится с помощью неформального упрощения задачи выбора.

Возможными путями такого упрощения служат введение многих показателей, как количественных, так и качественных, содержательно описывающих рассматриваемую проблемную ситуацию; использование специальных способов измерения и агрегирования предпочтений ЛПР с помощью функций ценности, бинарных отношений, решающих правил; сведение рационального выбора к поиску оптимума некоторых субъективно задаваемых показателей качества решения. В методах рационального выбора часто применяются многие идеи оптимизационного подхода. Однако существенное значение для определения, какой же вариант решения считать лучшим или наиболее предпочтительным, имеют субъективные предпочтения ЛПР.

Методы рационального выбора характеризуются такими особенностями:

- для описания проблемной ситуации используются модели, сочетающие объективные и субъективные факторы при преобладании последних;
- сравнение вариантов осуществляется на основе одного или нескольких числовых и/или вербальных показателей, выражающих субъективные предпочтения ЛПР;
- результатом решения задачи выбора является выделение предпочтительных вариантов, упорядочение или классификация вариантов.

К недостаткам методов рационального выбора относят следующее:

- содержательная постановка задачи рационального выбора в еще большей степени, чем в случае оптимального выбора, является искусством. Еще более неоднозначна структуризация проблемной ситуации;
- отсутствуют убедительные аргументы в пользу того или

иного метода решения практической задачи. Нет строгого теоретического обоснования многих методов, широко применяемых на практике. Многие из них носят эвристический характер;

- относительно высокой остается трудоемкость многих методов, предъявляющих большие требования к ЛПР при измерении его предпочтений. Не все методы обеспечивают полную сравнимость вариантов, часть из них может остаться несравнимой. В ряде методов может появляться нетранзитивность предпочтений ЛПР;
- при решении одной и той же задачи даже при применении методов, относящихся к одной и той же группе, возможна неоднозначность получаемых результатов. Многие методы обладают большой чувствительностью результата к незначительным изменениям исходных данных, к ошибкам в ответах ЛПР.

Лишь в некоторых методах предусмотрены специальные возможности для объяснения полученных результатов. В других методах такие возможности отсутствуют, что порождает недостаточную прозрачность методов.

В целом методы рационального выбора позволяют решать более широкий круг задач выбора, чем методы оптимизации. В них используются разнообразные средства для описания решаемой проблемы, выражения, измерения и агрегирования предпочтений ЛПР. Методы предоставляют в распоряжение ЛПР различные возможности для обоснования и в ряде случаев аргументированного объяснения сделанного выбора. Многие методы рационального выбора реализованы в виде интерактивных человеко-машинных процедур, которые позволяют ЛПР активно участвовать в процессе решения задачи, контролировать и вмешиваться в ход ее решения, проводить анализ полученных результатов.

Человеко-машинные методы оказались успешными при решении сложных задач многокритериальной оптимизации и многих других многокритериальных задач. Однако чем сложнее решаемая проблема, чем труднее она формализуется, тем с большей осторожностью и тщательностью нужно подходить к выбору соответствующего метода ее решения.

* * *

Рекомендуемая литература: [6], [7], [11], [16], [23], [25], [28], [29], [31], [32], [36], [39], [41], [42], [45], [47], [48], [51], [55], [58], [61], [62], [63], [64], [65], [66].

ЧАСТЬ IV
КОЛЛЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 20
КОЛЛЕКТИВНЫЙ ВЫБОР

20.1. Понятие коллективного выбора

Задачи принятия решений, в которых результаты выбора определяются мнениями или действиями не одного человека, а многих людей, столь же распространены на практике, как и задачи индивидуального выбора. В качестве отдельных лиц, принимающих решения, выступают руководители и члены выборных органов, жюри, комитетов, судьи, эксперты, избиратели и т. п. Совокупность таких действующих лиц будем называть *группой, принимающей решение* (ГПР) независимо от роли и значимости каждого члена группы в процессе решения задачи выбора. Таким образом, под *коллективным*, или *групповым, выбором* понимается процедура принятия решения, основанная на совместном учете и/или согласовании индивидуальных предпочтений членов ГПР.

Групповой выбор сочетает в себе субъективные и объективные аспекты. Предпочтение каждого конкретного ЛПР субъективно и зависит от присущей данному человеку системы ценностей. В то же время объединение нескольких индивидуальных предпочтений в одно коллективное предпочтение должно осуществляться по возможности более объективным способом с помощью явно определенных формальных процедур, разделяемых всеми членами группы и не подверженных, в идеале, влиянию отдельных членов группы.

С содержательной точки зрения проблема коллективного выбора состоит в том, как наиболее «правильно», «справедливо» и «разумно» осуществить переход от вариантов, лучших для индивидуумов, к вариантам, лучшим для всего коллектива. При этом предполагается, что должно быть выработано общее для членов ГПР понимание, что считать «правильным», «справедливым», «разумным» и «лучшим» коллективным решением. Групповой выбор включает две категории проблем: как агрегировать индивидуальные предпочтения в интегральные оценки качества решения, на основе которых ищется наиболее предпочтительное решение, и как организовать саму процедуру выработки коллективного решения, т. е. технологию работы ГПР.

Когда имеется много лиц, принимающих решения, проблема агрегирования предпочтений распадается на две составляющие. Во-первых, при оценке варианта отдельным ЛПР по многим показателям (критериям) качества необходимо синтезировать единую многокритериальную оценку, обобщенно выражающую предпочтения данного лица. Во-вторых, нужно каким-то образом соизмерить и объединить различные индивидуальные суждения отдельных ЛПР в одно общее коллективное мнение. Разнообразные аспекты первой, «внутренней», составляющей проблемы агрегирования индивидуальных предпочтений ЛПР рассматривались в предыдущих частях книги. Вторая, «внешняя», составляющая проблемы агрегирования индивидуальных предпочтений ЛПР и представляет, собственно говоря, коллективный выбор.

В зависимости от контекста рассматриваемой ситуации индивидуальные предпочтения могут агрегироваться различным образом: суммированием и усреднением индивидуальных суждений ЛПР независимо от совпадения мнения членов группы; согласованием разных точек зрения с учетом баланса интересов членов группы и поиском компромиссного варианта решения; выработкой коллективной точки зрения, учитывающей различные, в том числе несогласованные и противоречивые, мнения всех членов группы без поиска компромисса между ними. Таким образом, конструирование механизма агрегирования индивидуальных предпочтений — важнейший элемент коллективного принятия решений.

Технология коллективной работы ГПР требует учета разнообразных содержательных, организационных и психологических факторов. На поведение членов группы, их предпочтения и, в конечном счете, на результат коллективного выбора оказывают влияние характер решаемой проблемы, уровень знаний и опыт участников, их эмоциональное состояние, регламент обсуждения проблемы, открытость и последовательность высказывания мнений, возможность создания коалиций, особенности процедур голосования и многое другое.

Кроме того, каждый член ГПР может обладать разной степенью влияния на принятие решения, источником которого служат личностные качества, административное положение, имущественное состояние индивидуума. Выделяются следующие виды влиятельности: вознаграждающая (движущие мотивы — награды, премии, поощрения, побуждения); устрашающая (движущие мотивы — насилие, угрозы, наказание); обусловленная (движущие мотивы — образование, культурные традиции, религиозные вероучения, внушение). Многие из перечисленных аспектов относятся к трудным и мало изученным вопросам и нередко не учитываются в моделях коллективного принятия решений.

20.2. Задача коллективного выбора

Под *задачей коллективного выбора* будем понимать следующее. Имеется ГПР, состоящая из t человек, которые рассматривают возможные варианты решения проблемы (альтернативы, объекты, способы действия, кандидаты) $A_1, \ldots, A_m$, число которых может быть как конечным, так и бесконечным. Каждый из членов ГПР независимо от остальных оценивает все варианты в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями. Предполагается, что выработаны общие для всех членов ГПР правила организации и проведения процедур сравнения и выбора вариантов.

Основываясь на индивидуальных предпочтениях всех членов группы и учитывая степень их влиятельности, требуется решить одну из задач: 1) выделить лучшие варианты; 2) упорядочить все варианты; 3) отнести каждый из вариантов к одному из заранее заданных классов решений. Типичными примерами задач коллективного выбора служат определение победителей на выборах путем голосования, конкурсный отбор исполнителей для выполнения заказных работ.

Каждый индивидуум, вообще говоря, преследует свои собственные интересы и цели, имеет свои собственные правила и критерии выбора лучшего варианта, которые могут не совпадать и/или конфликтовать с предпочтениями других членов ГПР. Поскольку каждый член ГПР принимает решения независимо от других, исходя из своих собственных интересов и целей, максимально возможное число индивидуальных предпочтений равно числу членов ГПР. При коллективном принятии решений могут также возникать коалиции, куда входят участники, имеющие совпадающие интересы. Тогда каждая коалиция может рассматриваться как самостоятельный член группы, принимающей решения, и общее число индивидуальных предпочтений уменьшается.

При принятии коллективного решения и индивидуумы, и коалиции могут придерживаться различных стилей поведения, а именно: статус-кво, конфронтация, рациональность. В случае статус-кво участники слабо взаимодействуют друг с другом, стараются сохранять сложившуюся ситуацию. Такие взаимоотношения характерны для поведения независимых участников экономического рынка. При конфронтации участники действуют так, чтобы нанести максимальный ущерб другим участникам, рассматривая их как противников. При этом они могут навредить и самим себе. Такие взаимоотношения характерны для локальных военных действий, конфликтных ситуаций, спортивных игр. Участники, ведущие себя рационально, стремятся действовать в своих интересах так, чтобы получить максимальную для себя выгоду, необязательно нанося ущерб другим участникам. В ряде случаев участникам выгодно объединяться, становясь союзниками, иногда выгоднее оставаться противниками. Такие взаимоотношения присущи крупным компаниям, действующим в одном и том же секторе экономики; странам, вовлеченным в глобальный конфликт.

Приведенная выше задача коллективного выбора во многом повторяет рассмотренную ранее задачу индивидуального рационального выбора, однако существенно отличается от последней наличием нескольких действующих лиц. Основная сложность задачи индивидуального рационального выбора, связанная с выявлением предпочтений отдельного ЛПР, дополнительно усугубляется сложностью агрегирования и согласования индивидуальных предпочтений нескольких ЛПР, неоднозначностью возможного перехода от индивидуальных суждений к коллективному мнению ГПР. Достаточно трудным является и ответ на вопрос: «Что считать рациональным коллективным решением?»

20.3. Принципы согласования индивидуальных предпочтений

Чтобы найти коллективное предпочтение, требуется каким-то образом объединить, а зачастую и согласовать друг с другом индивидуальные предпочтения членов ГПР. Для взаимного учета индивидуальных интересов устанавливается некоторый принцип согласования, который позволяет выделить наилучшие с коллективной точки зрения варианты. Укажем наиболее известные принципы согласования интересов участников при коллективном выборе.

• *Принцип Курно.* Все члены ГПР имеют различные собственные интересы и делают свой выбор независимо друг от друга, т. е. число коалиций равно числу членов ГПР. Тогда никакому участнику по отдельности не выгодно менять свое предпочтение, так как это может только ухудшить принятое решение.

• *Принцип Парето.* Все члены ГПР имеют общие интересы и делают свой выбор согласованно, т. е. имеется одна-единственная коалиция. Тогда всем участникам вместе не выгодно менять свои предпочтения, так как это может только ухудшить принятое решение.

• *Принцип Эджворта.* Все члены ГПР входят в коалиции, число которых может быть любым (от одного до равного числу членов ГПР), и делают свой выбор в интересах своей коалиции. Тогда никакой коалиции не выгодно менять свои предпочтения, так как это может только ухудшить принятое решение.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий принципы согласования интересов, которые применяются во многих задачах принятия решений в экономике, технике, производстве.

Пример 20.1. Пусть группа, принимающая решение, состоит из двух участников, и имеется два варианта решения проблемы A_i и A_j. Каждый участник, исходя из своих предпочтений, может выбрать любой из вариантов. Поэтому возможны всего четыре комбинации группового выбора, представленные в табл. 20.1. Вариант, выбранный одним из участников, обозначен соответствующим верхним индексом в угловых скобках. Так, $A_i^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$ означает, что вариант A_i выбрал первый участник, а вариант A_j — второй участник. Члены ГПР выразили свои индивидуальные предпочтения, поставив каждую из комбинаций на первое, второе, третье или четвертое место (см. табл. 20.1).

Согласно принципу Курно наилучшим решением является ситуация $A_i^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$, где каждый член ГПР предпочитает вариант A_i. Действительно, если первый участник выбрал вариант A_i, то второму также выгодно принять такое же решение, и наоборот.

Таблица 20.1

Индивидуальные предпочтения участников

Участник	$A_i^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$	$A_i^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$	$A_j^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$	$A_j^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$
1	2	1	4	3
2	2	4	1	3

Ситуация $A_i^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$ более выгодна, чем ситуация $A_j^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$, но является неустойчивой. Если первый участник захочет улучшить свое положение за счет второго участника, выбрав более предпочтительную для себя комбинацию $A_i^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$, то второй участник может ответить тем же, выбрав комбинацию $A_j^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$ и ухудшив положение первого. Согласно принципу Парето лучшими ситуациями являются $A_i^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$, $A_i^{\langle 1\rangle} A_j^{\langle 2\rangle}$ и $A_j^{\langle 1\rangle} A_i^{\langle 2\rangle}$. Согласно принципу Эджворта лучшей ситуации не существует. ■

20.4. Классификация задач и методов коллективного выбора

Проблема коллективного выбора как задача голосования начала изучаться французскими учеными еще в конце XVII в. Однако, несмотря на свой солидный возраст, проблема группового выбора исследована гораздо хуже, чем проблема индивидуального выбора. Это обусловлено главным образом как трудностями содержательной постановки задачи группового выбора, так и сложностью построения формальных моделей агрегирования индивидуальных предпочтений в единое результирующее коллективное предпочтение.

По числу членов ГПР можно выделить задачи коллективного выбора с *двумя* и *многими* (больше двух) *участниками*. Когда существует необходимость и имеется возможность согласовать индивидуальные предпочтения участников, будем говорить о согласованном или компромиссном коллективном выборе. Когда индивидуальные предпочтения участников несогласованны и даже противоречивы, а компромисс по каким-то причинам невозможен, то такой коллективный выбор назовем несогласованным или бескомпромиссным.

По числу критериев, используемых для оценки вариантов, задачи коллективного выбора подразделяются на *однокритериальные* и *многокритериальные*. Когда качество вариантов оценивается числовыми целевыми функциями, функциями ценности, можно говорить об оптимальном коллективном выборе, соответствующем экстремальным значениям целевых функций.

В зависимости от того, описываются ли варианты и предпочтения участников детерминированными, вероятностными или нечеткими переменными, говорят о коллективном принятии решений *в условиях определенности*, *вероятностной*, *нечеткой* или *полной неопределенности*.

Устоявшейся классификации методов коллективного выбора нет. Условно выделяют методы голосования, аксиоматические, игровые и экспертные методы, групповые разновидности методов многокритериального выбора. Как и в случае индивидуального выбора, методы коллективного выбора можно также разделить на подгруппы в зависимости от характера измеряемых показателей (количественные или качественные) и последующего сравнения вариантов с вычислением или без вычисления их числовой ценности (см. разд. 13.3).

Голосование как широко используемый способ коллективного принятия решений, выражающий волю большинства, рассматривается в гл. 21. Избиратели отдают свои голоса, чтобы выбрать лучшего кандидата или альтернативный вариант. Существует значительное число разнообразных процедур голосования, которые отличаются формами организации и проведения, способами сбора голосов и обработки результатов, правилами выявления победителей.

Аксиоматические *теории коллективного выбора*, служащие обоснованию понятия коллективной рациональности, обсуждаются в гл. 22. В основе этих теорий лежат разные модели агрегирования и согласования индивидуальных предпочтений. Теории коллективного выбора сыграли важную роль в осмыслении возможностей создания «честной» и «справедливой» системы голосования как «объективного» способа для выражения общего мнения многих независимых индивидуумов.

Методы группового многокритериального выбора, которые основаны на агрегировании индивидуальных предпочтений членов ГПР, представленных функциями ценности, векторами или кортежами оценок вариантов, излагаются в гл. 23.

Для решения проблем группового выбора применяются также игровые и экспертные методы, обладающие своей спецификой. Эти методы коллективного принятия решений в данной книге не рассматриваются.

ГЛАВА 21
ГОЛОСОВАНИЕ

21.1. Механизмы и процедуры голосования

Голосование — один из наиболее распространенных, популярных и давно известных способов коллективного принятия решений, который применяется для выбора наиболее предпочтительного для всех варианта в различных по размеру группах. Если число избирателей достаточно велико, то такой выбор называют *социальным* или *общественным.*

Разные системы голосования отличаются используемыми процедурами сравнения вариантов, правилами подсчета голосов и определения победителей, формами организации и проведения выборов. «Честные» выборы предполагают независимость избирателей, свободу волеизъявления голосующих, отсутствие нарушений установленных процедур и правил голосования. Вместе с тем, как оказалось, разные системы голосования могут давать различные результаты даже при соблюдении всех условий «честности» выборов.

Обоснование процедур голосования и формализация правил подсчета голосов для определения победителей были одними из первых задач коллективного принятия решений, привлекших внимание исследователей. Еще в конце XVIII в. французские ученые Жан Бордá, математик, физик и морской штурман, и маркиз Жан де Кондорсé, общественный деятель, секретарь Французской академии, философ-просветитель, математик и социолог, приступили к систематическому изучению задачи голосования. Бордá доложил свои результаты по формам выборов на заседании Королевской академии наук в Париже в 1770 г. и опубликовал их в 1784 г., а Кондорсé — в 1785 г. В XIX в. проблемы голосования изучались французским математиком и физиком П. Лапласом и английским математиком Ч. Доджсоном. Первым же, кто предложил (1951) аксиоматику рационального коллективного выбора, был К. Эрроу, американский математик и экономист, впоследствии лауреат Нобелевской премии.

Голосование объединяет два механизма: индивидуальный выбор избирателей и подведение итогов выборов, которые обычно выполняются разными людьми. Индивидуальный выбор осуществляется всеми избирателями, которыми могут быть жители страны, области или города, члены комитета или жюри. Очевидно, механизмы голосования и волеизъявления должны быть простыми и понятными для всех избирателей. Для выявления индивидуальных предпочтений избирателей применяются две основные разновидности процедур: неранжирующая и ранжирующая.

В неранжирующей процедуре голосования каждый избиратель отдает свой голос за один или несколько имеющихся альтернативных вариантов. В одних процедурах следует голосовать только за определенное число вариантов, например за одного кандидата на парламентских выборах или за нескольких претендентов по числу лиц, избираемых в состав руководящего органа; в других допускается голосование за любое произвольное число вариантов. Голоса, поданные за каждый вариант, суммируются.

В ранжирующих процедурах голосования требуется, чтобы каждый избиратель оценивал все имеющиеся варианты. В одних случаях предлагается полностью или частично упорядочить все варианты по предпочтительности и расположить их в порядке убывания предпочтительности; в других необходимо провести парное сравнение вариантов и указать предпочтительность одного из них.

Результаты голосования подводит независимая избирательная комиссия по определенным правилам и под строжайшим наблюдением и контролем. Механизм подсчета голосов может быть и не очень простым по сравнению с механизмом голосования, но он должен быть прозрачным, точным и эффективным.

При подсчете голосов учитывается ряд дополнительных условий. Если все избиратели являются равноправными участниками, то обычно один голосующий имеет 1 голос или m голосов по числу сравниваемых вариантов при так называемом кумулятивном голосовании. В последнем случае голосующий должен по своему усмотрению распределить эти m голосов между произвольными вариантами. Если избиратели неравноправны, то каждый из них располагает определенным и, как правило, неравнозначным числом голосов. Например, председатель жюри или генеральный директор компании имеет право на два голоса при рассмотрении спорных ситуаций; акционер имеет число голосов, равное количеству принадлежащих ему акций; выборщики на выборах президента США имеют число голосов, равное числу избирателей штата, и все эти голоса отдаются одному кандидату, победившему в штате на промежуточных выборах.

21.2. Правила определения победителя

Для определения лучшего по итогам голосования варианта наиболее часто используются следующие правила:

- *один голос «за» или* 1-*большинство голосов* — лучшим считается вариант, за который проголосовал хотя бы один участник, а остальные участники воздержались от выбора;
- *относительное большинство голосов* — лучшим считается вариант, за который проголосовало большинство участников (больше, чем за любой другой вариант, но необязательно более половины от общего числа голосов);
- *простое большинство голосов* — лучшим считается вариант, за который проголосовало простое большинство участников (более половины от общего числа голосов);
- *абсолютное или квалифицированное большинство голосов* — лучшим считается вариант, за который проголосовало больше заранее заданного числа участников (например, более двух третей или более трех четвертей от общего числа голосов);
- (k_1, k_2)-*большинство голосов* — лучшим считается вариант, за который проголосовало не менее чем k_1 участников и против — не более чем k_2 участников;
- *единогласие* — лучшим считается вариант, за который проголосовали все участники;
- *вето* — вариант не выбирается, если против него проголосовал хотя бы один участник независимо от результатов голосования остальных участников.

Каждому из правил большинства голосов можно сопоставить некоторое мажоритарное отношение, по которому определяется победитель при попарном сравнении вариантов, аналогичное приведенному в разд. 19.5. Все правила большинства голосов можно объединить одним *правилом k-большинства*, где число k устанавливает порог большинства голосов или так называемую квоту. Участники, проголосовавшие одинаково, представляют собой коалицию.

В применяемых на практике системах голосования используются разные виды итогового коллективного выбора. В качестве основных результатов выбора укажем: выбор единственного варианта из имеющихся; выбор заданного числа вариантов; выбор произвольного числа вариантов; упорядочение всех или определенной части вариантов. Так, в системе *мягкого рейтинга* каждый участник может голосовать за любое произвольное число имеющихся вариантов. Победитель определяется по правилу относительного большинства голосов. Такая система голосования часто используется в парламентах.

Системы голосования различаются также формами своей организации (одно-, многотуровые), правилами определения победителей каждого тура. В *многотуровых процедурах* коллективного принятия решений процесс поиска победителя или итогового упорядочения вариантов разбивается на несколько туров или этапов, на каждом из которых может использоваться своя система голосования, свои правила подсчета голосов и определения победителей, выходящих в следующий тур выборов. Например, в системе голосования, основанной на процедуре *исключения худшего варианта*, каждый участник попарно сравнивает все варианты по предпочтительности. Вариант, признанный худшим большинством голосов участников, исключается из рассмотрения. Процедура повторяется до тех пор, пока не останется единственный лучший вариант. Эта система голосования используется в конгрессе США.

Победители *конкурсов* определяются коллективным решением жюри, которое обычно также принимается голосованием. Если конкурс проводится в несколько туров и по разным группам участников (например, в музыкальном конкурсе принимают участие пианисты, скрипачи, виолончелисты и другие музыканты), то вначале специализированные по номинациям жюри проводят последовательный отсев участников, допуская к следующему туру только часть лучших исполнителей. На заключительном туре определяются победители по каждому виду конкурса, занявшие первое, второе и третье места. На окончательное распределение мест могут повлиять оценки, полученные участниками на каждом из туров, а также состав участников. Часто фавориты получают завышенные оценки независимо от показанных результатов. Кроме того, на каждом отдельном туре и по каждому виду конкурса могут использоваться свои процедуры и правила для определения лучших участников и победителей, что тоже оказывает свое влияние на итоговые результаты конкурса.

Для оценки применимости той или иной системы голосования весьма существенно установить, какие правила необходимы и достаточны в реальных условиях, чтобы адекватно упорядочить кандидатов и/или определить победителя. Оказалось, что использование того или иного способа обработки и подсчета поданных голосов может заметно повлиять на итоговые результаты голосования и дать разных победителей выборов. Такие ситуации получили название парадоксов голосования. Первый парадокс голосования был обнаружен де Кондорсе (1785) и впоследствии получил его имя. Позднее были найдены и другие парадоксы коллективного выбора.

Рассмотрим наиболее известные процедуры голосования.

21.3. Процедуры Борда

Процедура Борда (1770) была исторически первой системой голосования, где использовалась ранжирующая процедура учета мнений голосующих. Она является естественным и корректным способом коллективного выбора, который обеспечивает всем участникам возможность выразить индивидуальные предпочтения и позволяет учесть интересы меньшинства. Процедура состоит из следующих шагов.

1. Каждый участник ранжирует все варианты $A_1, \ldots, A_m$ по предпочтительности.

2. В каждом s-м индивидуальном строгом упорядочении первый вариант получает $m - 1$ баллов, второй вариант — $m - 2$ баллов, последний вариант — 0 баллов. Очевидно, что в s-м упорядочении балл Борда $b^{\langle s\rangle}(A_i)$ каждого варианта A_i равен числу $\sum\limits_{j\neq i} r^{\langle s\rangle}(A_i, A_j)$ вариантов A_j, которые уступают варианту A_i. Здесь величина $r^{\langle s\rangle}(A_i, A_j) = 1$, если $A_i \succ A_j$, и $r^{\langle s\rangle}(A_i, A_j) = 0$, если $A_i \prec A_j$.

3. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции Борда

$$f_B(A_i) = \sum_{s=1}^{t} b^{\langle s\rangle}(A_i),$$

равное сумме баллов Борда $b^{\langle s\rangle}(A_i)$, присвоенных варианту A_i во всех индивидуальных упорядочениях.

4. Упорядочение вариантов строится по убыванию значения функции Борда $f_B(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальным значением функции Борда

$$A^* \in \arg\max_{1\leq i\leq m} f_B(A_i).$$

Отметим, что балл Борда $b^{\langle s\rangle}(A_i)$ связан с рангом $r_i^{\langle s\rangle}$ варианта A_i, введенным формулой (3.1), соотношением: $b^{\langle s\rangle}(A_i) + r_i^{\langle s\rangle} = m$. Тем самым убывающая последовательность баллов

Борда $m-1 > m-2 > \ldots > 0$ эквивалентна возрастающей последовательности рангов вариантов $r_1 < r_2 < \ldots < r_m$.

Пример 21.1[1]. Предположим, что 60 избирателей должны выбрать одного из трех кандидатов A, B и C. Пусть при использовании ранжирующей процедуры учета мнения избирателей их индивидуальные предпочтения распределились следующим образом:

$$A \succ B \succ C \text{ — 23 чел.;}$$
$$B \succ C \succ A \text{ — 17 чел.;}$$
$$B \succ A \succ C \text{ — 2 чел.;}$$
$$C \succ A \succ B \text{ — 10 чел.;}$$
$$C \succ B \succ A \text{ — 8 чел.}$$

Вычислим значение функции Борда f_B для каждого из кандидатов, полагая, что в индивидуальном упорядочении первому кандидату присваивается 2 балла, второму — 1 балл, третьему — 0 баллов.

Тогда получаем:
для кандидата A

$$f_B(A) = 2 \cdot (23) + 1 \cdot (2+10) + 0 \cdot (17+8) = 58;$$

для кандидата B

$$f_B(B) = 2 \cdot (17+2) + 1 \cdot (23+8) + 0 \cdot (10) = 69;$$

для кандидата C

$$f_B(C) = 2 \cdot (10+8) + 1 \cdot (17) + 0 \cdot (23+2) = 53.$$

Упорядочение кандидатов в соответствии со значениями функции Борда f_B имеет вид: $B \succ A \succ C$, поскольку $f_B(B) > f_B(A) > f_B(C)$. Лучшим является кандидат B. ■

Модифицированная процедура Борда учитывает возможные различия индивидуальных предпочтений избирателей.

1. Каждый участник ранжирует все варианты $A_1, \ldots, A_m$ по предпочтительности.

2. Подсчитывается количество индивидуальных строгих упорядочений одного и того же вида.

---

[1]Примеры оценок кандидатов взяты из работы Ж. Кондорсе (1785).

3. Для каждого варианта A_i подсчитывается общее число $g(A_i, A_j)$ участников, предпочитающих данный вариант A_i всем остальным вариантам A_j при парных сравнениях во всех полученных упорядочениях.

4. Для каждого варианта A_i вычисляется значение модифицированной функции Борда

$$f_{BM}(A_i) = \sum_j [g(A_i, A_j) - g(A_j, A_i)].$$

5. Упорядочение вариантов строится по убыванию значения модифицированной функции Борда $f_{BM}(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальным значением функции Борда

$$A^* \in \arg \max_{1 \le i \le m} f_{BM}(A_i).$$

Вместо шагов 1, 2 каждый голосующий может попарно сравнить все варианты друг с другом и по результатам сравнений построить упорядочение вариантов (см. разд. 4.1).

Нетрудно убедиться, что функция Борда $f_B(A_i)$ представляет собой общее число $g(A_i, A_j)$ участников, предпочитающих данный вариант A_i всем остальным вариантам A_j $(j \neq i)$ при парных сравнениях:

$$f_B(A_i) = \sum_{j \neq i} g(A_i, A_j).$$

Пример 21.2. Пусть выполняются условия примера 21.1. Вычислим значения функций Борда для каждого из кандидатов A, B и C. Если во всех упорядочениях рассматривать только парные сравнения кандидатов A и B, то $g(A, B) = 23 + 10 = 33$ избирателя считают кандидата A предпочтительнее кандидата B, а $g(B, A) = 17 + 2 + 8 = 27$ избирателей — кандидата B предпочтительнее кандидата A. Аналогичным образом, сравнивая остальные пары кандидатов, получим

$$g(B,C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C,B) = 10 + 8 = 18;$$
$$g(C,A) = 17 + 10 + 8 = 35, \quad g(A,C) = 23 + 2 = 25.$$

Значения функции Борда f_B для кандидатов:

$$f_B(A) = g(A,B) + g(A,C) = 33 + 25 = 58;$$
$$f_B(B) = g(B,A) + g(B,C) = 27 + 42 = 69;$$
$$f_B(C) = g(C,A) + g(C,B) = 35 + 18 = 53.$$

Таблица 21.1

Групповая матрица G парных сравнений, функции Борда f_B, f_{BM} кандидатов

G	A	B	C	f_B	f_{BM}
A	—	33	25	58	−4
B	27	—	42	69	18
C	35	18	—	53	−14

Значения модифицированной функции Борда f_{BM}:

$$f_{BM}(A) = g(A,B) - g(B,A) + g(A,C) - g(C,A) = \\ = (33 - 27) + (25 - 35) = -4;$$
$$f_{BM}(B) = g(B,A) - g(A,B) + g(B,C) - g(C,B) = \\ = (27 - 33) + (42 - 18) = 18;$$
$$f_{BM}(C) = g(C,A) - g(A,C) + g(C,B) - g(B,C) = \\ = (35 - 25) + (18 - 42) = -14.$$

Представим распределение числа избирателей при парных сравнениях кандидатов A, B и C групповой матрицей $\mathrm{G} = (g_{ij})_{m \times m}$, где $g_{ij} = g(A_i, A_j)$. Значения элементов матрицы G и функций Борда f_B, f_{BM} указаны в табл. 21.1. Упорядочение кандидатов в соответствии со значениями модифицированной функции Борда f_{BM} имеет вид: $B \succ A \succ C$, поскольку $f_{BM}(B) > f_{BM}(A) > f_{BM}(C)$. Лучшим является кандидат B. Тот же результат дает применение функции Борда f_B. ■

21.4. Процедура Кондорсе

Анализируя различные системы голосования, Кондорсе сформулировал принцип, обеспечивающий, по его мнению, честные и справедливые результаты выборов. Как писал Кондорсе, «существует только один правильный путь выяснения мнения большинства на выборах. Он состоит в попарном сравнении соответствующих достоинств кандидатов... Тот, кто действительно получает предпочтение большинства голосов на выборах, должен казаться наиболее превосходящим своих конкурентов и, таким образом, является тем, кто утверждается большинством голосов, как превосходящий всех»[1]. Другими словами, принцип Кондорсе гласит: победителем на выборах объявляется кандидат, превосходящий при попарном сравнении всех остальных кандидатов по правилу простого большинства голосов. В таком случае нет необходимости проводить многократное баллотирование кандидатов.

Процедура Кондорсе (1785), реализующая этот принцип, базируется на ранжирующей процедуре учета мнений голосующих и состоит из следующих шагов.

1 — 3. Совпадают с шагами 1 — 3 модифицированной процедуры Борда и состоят в построении группового распределения участников, попарно сравнивающих предпочтительность вариантов по отношению друг к другу во всех полученных индивидуальных строгих упорядочениях.

4. Лучший вариант при попарном сравнении вариантов определяется по правилу простого большинства голосов.

Пример 21.3. Пусть выполняются условия примера 21.1 и предпочтения избирателей при попарном сравнении кандидатов A, B и C распределились так:

$$\begin{aligned} g(A,B) &= 33, \quad & g(B,A) &= 27; \\ g(B,C) &= 42, \quad & g(C,B) &= 18; \\ g(C,A) &= 35, \quad & g(A,C) &= 25. \end{aligned}$$

По мнению большинства избирателей, кандидат A превосходит кандидата B, поскольку $g(A,B) > g(B,A)$. Аналогично, кандидат B превосходит кандидата C, так как $g(B,C) > g(C,B)$, а кандидат C — кандидата A, так как $g(C,A) > g(A,C)$. Таким образом, получается несогласованное коллективное предпочтение: $A \succ B \succ C \succ A$, содержащее цикл, вследствие чего нельзя выбрать лучшего кандидата. ■

Причина возникшего противоречия — так называемого *парадокса Кондорсе* — состоит в том, что результаты парных сравнений вариантов, полученные путем суммирования количества индивидуальных упорядочений, являются взаимозависимыми. Если индивидуум утверждает, что $A \succ B$ и $B \succ C$, то должно быть и $A \succ C$. Однако когда правило большинства применяется

[1]Цитируется по русскому переводу отрывка из опубликованной в 1847 г. работы Ж. Кондорсе о способах оценки мнения выборного органа, который приведен в сборнике: Математические методы в социальных науках / Под ред. П. Лазарсфельда и Н. Генри. — М. : Прогресс, 1973, — С. 198.

к совокупности этих индивидуальных утверждений, результаты могут оказаться другими, в том числе и несогласованными.

Действительно, в примере 21.3 кандидат A предпочтительнее кандидата B по большинству голосов («за» — 33 голоса), B предпочтительнее C («за» — 42 голоса), C предпочтительнее A («за» — 35 голосов). Но эти три множества избирателей, голосовавших «за» своего кандидата, совершенно различны. Более того, эти множества даже не пересекаются, поскольку нет ни одного участника, который одновременно входил бы во все три множества голосующих «за».

Если воспользоваться правилом абсолютного большинства, то победителем станет кандидат B, набравший 42 голоса при парных сравнениях с остальными кандидатами. В то же время согласно правилу относительного большинства при неранжирующей процедуре учета мнений избирателей лучшим кандидатом должен быть признан кандидат A, за которого высказались 23 голосовавших, тогда как за кандидата B было подано $17 + 2 = 19$ голосов, а за кандидата C — $10 + 8 = 18$ голосов. Как видно, результаты выборов существенно зависят от принятой системы голосования. Итак, может оказаться, что у группы участников не будет единственного обоснованного коллективного предпочтения.

Заметим также, что в общем случае вариант, лучший по процедуре Кондорсе, может не совпадать с вариантом, лучшим по процедуре Борда.

21.5. Процедуры Симпсона

Процедура Симпсона (1965) позволяет избежать возникновения парадокса несогласованности Кондорсе и состоит в следующем:

1 — 3. Совпадают с шагами 1 — 3 модифицированной процедуры Борда и процедуры Кондорсе.

4. Для каждого варианта A_i определяется значение функции Симпсона

$$f_S(A_i) = \min_{1 \le j \le m} g(A_i, A_j),$$

равное минимальному числу участников, предпочитающих данный вариант A_i всем остальным вариантам $A_j (j \ne i)$ при всех парных сравнениях.

5. Упорядочение вариантов строится по убыванию значения функции Симпсона $f_S(A_i)$. Лучший вариант A^* определяет-

Таблица 21.2

Групповая матрица G парных сравнений, функции Симпсона f_S, f_T кандидатов

G	A	B	C	f_S	f_T
A	—	33	25	25	33
B	27	—	42	27	42
C	35	18	—	18	35

ся максимальным значением функции f_S или правилом максимина:

$$A^* \in \arg \max_{1 \le i \le m} f_S(A_i) = \arg \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le m} g(A_i, A_j).$$

В процедуре, двойственной процедуре Симпсона, для определения лучшего варианта A^* используется правило минимакса:

$$A^* \in \arg \min_{1 \le i \le m} f_T(A_i) = \arg \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le m} g(A_i, A_j).$$

В этих процедурах правила определения лучшего варианта A^* являются аналогами правил «гарантированного результата», выявляющего победителя группового турнира, а групповая матрица парных сравнений кандидатов $G = (g_{ij})_{m \times m}$, где $g_{ij} = g(A_i, A_j)$, аналогична турнирной матрице (см. разд. 19.5).

Пример 21.4. Пусть выполняются условия примера 21.1. Вычислим значения двойственных функций f_S и f_T для каждого из кандидатов A, B и C:

$$f_S(A) = g(A, C) = 25, \quad f_S(B) = g(B, A) = 27,$$
$$f_S(C) = g(C, B) = 18.$$
$$f_T(A) = g(A, B) = 33, \quad f_T(B) = g(B, C) = 42,$$
$$f_T(C) = g(C, A) = 35.$$

Групповая матрица парных сравнений кандидатов $G = (g_{ij})_{m \times m}$, $g_{ij} = g(A_i, A_j)$, и значения функций Симпсона f_S и f_T приведены в табл. 21.2.

Упорядочение кандидатов в соответствии со значениями функции f_S имеет вид: $B \succ A \succ C$, поскольку $f_S(B) > f_S(A) > f_S(C)$. Лучшим является кандидат B. Упорядочение кандидатов в соответствии со значениями функции f_T имеет вид:

$A \succ C \succ B$, поскольку $f_T(A) < f_T(C) < f_T(B)$. Лучшим является кандидат A. Таким образом, в общем случае лучшие варианты, выбранные по правилам максимина и минимакса, могут не совпадать друг с другом. ■

21.6. Процедура Доджсона

Процедура Доджсона (1877) представляет собой модификацию подхода Кондорсе, которая позволяет устранить несогласованность коллективного предпочтения при построении результирующего упорядочения вариантов. Основная идея процедуры Доджсона заключается в следующем: все варианты упорядочиваются по числу голосов, которых им не хватает для того, чтобы превосходить все остальные варианты по простому большинству (более половины от общего числа) голосов.

1 — 3. Совпадают с шагами 1 — 3 модифицированной процедуры Борда и процедуры Кондорсе.

4. Строится вспомогательная матрица $\mathrm{H} = (h_{ij})_{m\times m}$, где $h_{ij} = g(A_i, A_j)/g(A_j, A_i)$ — групповая матрица парных сравнений вариантов по числу поданных голосов. Для каждого варианта A_i по строке матрицы H находятся варианты A_j, для которых $h_{ij} < 1$. Это как раз и будут те варианты, в сравнении с которыми вариант A_i получил меньше половины от общего числа голосов. Обозначим совокупность таких вариантов через $\mathcal{A}_{1/2}$.

5. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции Доджсона

$$f_D(A_i) = \sum_{A_j \in \mathcal{A}_{1/2}} [g_{1/2} - g(A_i, A_j)],$$

где $g_{1/2} = t/2$, если число t избирателей четно, и $g_{1/2} = (t+1)/2$ при нечетном t.

6. Упорядочение вариантов строится по возрастанию значения функции Доджсона $f_D(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется минимальным значением функции Доджсона

$$A^* \in \arg\max_{1\le i\le m} f_D(A_i).$$

Пример 21.5. Пусть выполняются условия примера 21.1. Представим распределение числа голосов избирателей при попарном сравнении кандидатов A, B, C двумя групповыми матрицами $\mathrm{G} = (g_{ij})_{m\times m}$, $\mathrm{H} = (h_{ij})_{m\times m}$ (табл. 21.3).

Кандидат A превосходит кандидата B, а чтобы превосходить кандидата C по простому большинству голосов кандидату A не

Таблица 21.3

Групповые матрицы G и H парных сравнений, функция Доджсона f_D кандидатов

G	A	B	C	f_D
A	—	33	25	5
B	27	—	42	3
C	35	18	—	12

H	A	B	C
A	—	33/27	25/35
B	27/33	—	42/18
C	35/25	18/42	—

хватает $(t/2) - g(A, C) = 30 - 25 = 5$ голосов. Аналогично, кандидату B не хватает $(t/2) - g(B, A) = 30 - 27 = 3$ голосов, чтобы превосходить кандидата A по простому большинству голосов, а кандидату C не хватает $(t/2) - g(C, B) = 30 - 18 = 12$ голосов, чтобы превосходить кандидата B. Тогда значения функции Доджсона f_D для кандидатов будут равны: $f_D(A) = 5$, $f_D(B) = 3$, $f_D(C) = 12$.

Упорядочение кандидатов в соответствии со значениями функции Доджсона f_D имеет вид: $B \succ A \succ C$, поскольку $f_D(B) < f_D(A) < f_D(C)$. Лучшим является кандидат B. Заметим, что в данном примере для каждого варианта A_i есть только один превосходящий его вариант A_j. В общем случае это не так, т. е. вариантов A_j, превосходящих вариант A_i по простому большинству голосов, может быть несколько. ■

21.7. Процедуры Нансона и Кумбса

Процедура Нансона (1882) объединяет подход Борда и принцип Кондорсе. Основная идея процедуры состоит в последовательном сокращении множества вариантов путем исключения получивших минимальное число голосов до тех пор, пока не останутся неисключаемые варианты. Эти варианты и будут считаться результатом коллективного выбора.

1—3. Совпадают с шагами 1—3 процедуры Борда. Вместо шага 1 каждый участник может провести попарные сравнения всех вариантов $A_1, \ldots, A_m$ друг с другом и по матрице парных сравнений упорядочить все варианты.

4. Определяется вариант A_1^-, соответствующий минимальному значению функции Борда,

$$A_1^- = \arg\min_{1 \le i \le m} f_B(A_i).$$

Этот вариант A_1^- исключается из рассмотрения.

5. Повторяются шаги 1 — 4, и на суженном множестве $A_1 = A \backslash \{A_1^-\}$ вариантов находится следующий вариант A_2^-, имеющий минимальное число голосов, который исключается из рассмотрения.

6. Шаги 1 — 4 повторяются, пока не останется один или несколько вариантов, которые дальше нельзя исключить. Оставшиеся наиболее предпочтительные варианты составляют множество A^*, определяемое функцией Нансона:

$$f_N(A^*) = \lim_{k \to \infty} A_k = A_{k-1} \setminus \{A_k^-\}.$$

В модификации процедуры Нансона из рассмотрения исключается не единственный вариант, имеющий минимальную оценку Борда, а сразу несколько вариантов, оценки которых меньше среднего по всем вариантам значения функции Борда $f_B^{\text{сред}} = (1/\bar{m}) \sum_i f_B(A_i)$.

Процедура Кумбса (1950) аналогична процедуре Нансона, но в ней последовательно исключаются из рассмотрения варианты, которые считаются худшими по большинству голосов.

Пример 21.6. Пусть выполняются условия примера 21.1. Распределение голосов избирателей при упорядочении кандидатов A, B и C имеет вид:

$A \succ B \succ C$ — 23 чел.;
$B \succ C \succ A$ — 17 чел.;
$B \succ A \succ C$ — 2 чел.;
$C \succ A \succ B$ — 10 чел.;
$C \succ B \succ A$ — 8 чел.

Значения функции Борда для каждого кандидата: $f_B(A) = 58$, $f_B(B) = 69$, $f_B(C) = 53$. Кандидат C, имеющий наименьшее значение функции Борда, исключается. Индивидуальные предпочтения избирателей на оставшемся множестве кандидатов $A_1 = \{A, B\}$ выглядят следующим образом:

$A \succ B$ — 23 чел.;
$B \succ A$ — 17 чел.;
$B \succ A$ — 2 чел.;
$A \succ B$ — 10 чел.;
$B \succ A$ — 8 чел.

Вычислим новые значения функции Борда для каждого оставшегося кандидата A и B, полагая, что в каждом индивидуальном упорядочении первому кандидату присваивается 1 балл, а второму кандидату — 0 баллов:

$$f_B(A) = 1 \cdot (23 + 10) + 0 \cdot (17 + 2 + 8) = 33;$$
$$f_B(B) = 1 \cdot (17 + 2 + 8) + 0 \cdot (23 + 10) = 27.$$

Кандидат B, имеющий наименьшее значение функции Борда, исключается. Новое множество кандидатов A_2 состоит из единственного кандидата A, который и является лучшим. Упорядочение кандидатов в соответствии с функцией Нансона f_N имеет вид $A \succ B \succ C$ и отличается от результата, полученного с помощью функции Борда. ■

21.8. Процедуры Коупленда и Фишберна

Рассмотрим ряд процедур коллективного выбора, основанных на использовании неранжирующей процедуры учета мнений избирателей. В основе *процедуры Коупленда* (1950) лежит идея учета различия индивидуальных предпочтений участников, аналогичная идее модифицированной процедуры Борда. Однако здесь различие определяется не количеством голосов, поданных за более и менее предпочтительные варианты, а числом самих более или менее предпочтительных вариантов.

1. Каждый участник сравнивает все варианты $A_1, \ldots, A_m$ попарно друг с другом независимо от сравнений других пар вариантов.

2. Для каждого варианта A_i подсчитывается число $n(A_i, A_j)$ вариантов A_j, уступающих варианту A_i, и число $n(A_j, A_i)$ варианта A_j, превосходящих вариант A_i по простому большинству голосов.

3. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции Коупленда

$$f_C(A_i) = n(A_i, A_j) - n(A_j, A_i),$$

равное разности числа вариантов A_j, которые уступают варианту A_i, и числа вариантов A_j, которые превосходят вариант A_i по простому большинству голосов.

4. Упорядочение вариантов строится по убыванию значения функции Коупленда $f_C(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальным значением функции Коупленда

$$A^* \in \arg \max_{1 \le i \le m} f_C(A_i).$$

Заметим, что получающееся итоговое упорядочение может быть как строгим, так и нестрогим.

Процедура Фишберна (1970) объединяет идеи процедур Борда, Кондорсе и Коупленда, определяя предпочтительность каждого варианта по числу вариантов, которые данный вариант превосходит по простому большинству голосов.

1. Совпадает с шагом 1 процедуры Коупленда.

2. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции Фишберна

$$f_F(A_i) = n(A_i, A_j),$$

равное числу вариантов A_j, которые уступают варианту A_i по простому большинству голосов.

3. Упорядочение вариантов строится по убыванию значения функции Фишберна $f_F(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальным значением функции Фишберна

$$A^* \in \arg\max_{1 \le i \le m} f_F(A_i).$$

Пример 21.7. Пусть выполняются условия примера 21.1 и голоса избирателей при попарном сравнении кандидатов A, B и C распределились так:

$$\begin{aligned} g(A,B) &= 33, \quad & g(B,A) &= 27; \\ g(B,C) &= 42, \quad & g(C,B) &= 18; \\ g(C,A) &= 35, \quad & g(A,C) &= 25. \end{aligned}$$

Вычислим значения функции Коупленда f_C для каждого из кандидатов A, B и C. Кандидат A превосходит по простому большинству голосов (первая колонка) только одного кандидата B и уступает только одному кандидату C. Поэтому $f_C(A) = 1 - 1 = 0$. Кандидат B превосходит одного кандидата C и уступает одному кандидату A, поэтому $f_C(B) = 1 - 1 = 0$. Аналогично, для кандидата C имеем $f_C(C) = 1 - 1 = 0$. Таким образом, все три кандидата A, B и C эквивалентны. Лучшего кандидата по функции Коупленда f_C нет.

Вычислим значение функции Фишберна f_F для каждого из кандидатов A, B и C. Кандидат A превосходит по простому большинству голосов только одного кандидата B, и $f_F(A) = 1$. Аналогично, $f_F(B) = 1$ и $f_F(C) = 1$. Итак, все три кандидата A, B и C эквивалентны. Лучшего кандидата по функции Фишберна f_F нет. ■

21.9. Свойства процедур голосования

Рассмотренные ранее процедуры голосования, агрегирующие индивидуальные предпочтения участников, обладают в той или иной мере следующими свойствами:

- *результативностью*, позволяющей осуществлять групповой выбор и обеспечивающей получение итогового результата, — каждое индивидуальное предпочтение должно приводить к определенному и однозначно понимаемому коллективному решению;
- *анонимностью*, предотвращающей появления неравенства участников (избирателей), — все участники должны быть равноправными, каждый участник имеет равный вес (например, 1 человек — 1 голос), коллективный выбор не должен зависеть от перенумерации участников;
- *нейтральностью*, предотвращающей появление фаворитов среди вариантов (кандидатов), — все варианты должны быть равноценными, коллективный выбор не должен зависеть от перенумерации вариантов;
- *монотонностью* — если какая-то часть участников считает некоторый вариант предпочтительнее других вариантов, то предпочтительность этого варианта не должна уменьшаться при увеличении числа участников, придерживающихся такого же мнения;
- *единогласием* — если каждый участник считает некоторый вариант лучше или хуже других вариантов, то таким же должен быть и коллективный выбор;
- *однородностью* — если один из участников считает какой-то из вариантов лучше другого, а второй участник имеет про-

Таблица 21.4

Свойства процедур голосования

Свойство	f_B	f_{BM}	f_S	f_D	f_N	f_C	f_F
Результативность	•	•	•	•	•	•	•
Анонимность	•	•	•	•	•	•	•
Нейтральность	•	•	•	•	•		
Монотонность	•	•	•			•	•
Единогласие	•	•	•	•	•	•	•
Однородность	•	•	•	•	•	•	•

тивоположное мнение, то этих двух участников можно заменить третьим участником, для которого оба варианта одинаково предпочтительны (эквивалентны).

Сводка свойств процедур голосования приведена в табл. 21.4.

Можно построить много различных процедур голосования, причем их применение может давать разные результаты, в том числе и противоречивые. Естественно возникает вопрос, можно ли сформулировать такие требования к процедурам голосования, которые обеспечивали бы «честные», «объективные» и «разумные» итоги выборов. Поиск путей решения этой важной проблемы составляет содержание теорий коллективного выбора, рассмотренных далее.

21.10. Особенности систем голосования

В настоящее время разработано большое количество разнообразных систем голосования, получивших широкое распространение на практике. Голосование как способ коллективного принятия решений принято считать одним из наиболее объективных, если не самым объективным механизмом демократических выборов в общественной жизни, политике, экономике, управлении, судопроизводстве и многих других областях, поскольку опирается на волеизъявление большинства.

Голосование и правила большинства голосов часто используют для разрешения конфликтных ситуаций при наличии противоречивых интересов сторон. Вместе с тем опора только на мнение большинства нередко приводит к выбору не самого эффективного решения, так как не учитываются иные возможности для выбора, предлагаемые несогласным меньшинством.

Заметное влияние на итоги голосования могут оказывать и правила определения победителей, и способы подсчета голосов, которые даже в рамках одной и той же процедуры могут приводить к несовпадающим и противоречивым результатам. В ряде процедур голосования избиратели располагают неравнозначным числом голосов, что также может сильно отразиться на результатах выбора. Для повышения объективности выбора лучшего варианта иногда рекомендуют проводить голосование по разным системам, а затем сопоставлять получившиеся результаты и отбирать наиболее стабильные в качестве итоговых.

Вместе с тем использование любой системы голосования, а тем более комбинаций разных систем, оставляет возможности для манипулирования результатами выборов путем преднамеренного искажения предпочтений. Такое манипулирование может производиться и со стороны организаторов голосования, и со стороны избирателей, а также и организаторами, и избирателями одновременно. Как оказалось, полностью защищенным от манипулирования является только так называемый диктаторский выбор, когда в качестве коллективного предпочтения принимается точка зрения одного-единственного участника без учета интересов остальных избирателей.

Можно провести определенную аналогию между голосованием, как способом группового принятия решений, и индивидуальным многокритериальным выбором, основанным на понятии ценности сравниваемых вариантов. Каждый избиратель, делая свой выбор в пользу одного кандидата (варианта), явно или неявно опирается на свои представления о его значимости, которые могут быть целостными (например, «нравится» — «не нравится»), либо составляться из конкретных характеристик претендентов, важных для избирателя. Например, при выборах в парламент такими критериями могут быть принадлежность кандидата к определенной партии, порядочность, честность, наличие опыта работы и пр.

У разных людей наборы таких характеристик могут различаться, причем существенно, а значит, индивидуальная ценность каждого кандидата будет оцениваться, вообще говоря, разными функциями ценности. Коллективная ценность агрегирует индивидуальные (пусть даже неизвестные) ценности всех избирателей в общую оценку кандидата, которая выражается суммарным числом поданных за него голосов и по наибольшему значению которой определяется победитель.

Принципиальная трудность при агрегировании индивидуальных предпочтений состоит в формализации понятия рациональности применительно к коллективному решению, которое в случае индивидуального выбора трактуется как непротиворечивость, или транзитивность, предпочтений единственного ЛПР. В случае же многих независимых ЛПР агрегирование даже транзитивных индивидуальных предпочтений может приводить к несогласованности выбора уже при трех альтернативных вариантах. Несогласованность коллективного предпочтения может быть также обусловлена используемой процедурой подсчета голосов и принятым правилом определения победителя.

ГЛАВА 22

ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

22.1. Модели агрегирования индивидуальных предпочтений

Представление о рациональном, или «разумном» (reasonable), коллективном выборе сформировалось во многом под влиянием идей Борда́ и Кондорсе́.

Согласно идее Кондорсе́, относительная ценность выбираемого варианта (кандидата) для рационального индивидуума выявляется при непосредственном сравнении данного варианта с другими независимо от его ценности по отношению к остальным вариантам из заданного набора. Степень взаимной предпочтительности вариантов для индивидуума устанавливается путем прямого сопоставления их свойств. Назовем такую информацию *прямой*. В этом случае правилом коллективного выбора будет правило относительного большинства: $A_i \succ A_j$, если $g(A_i, A_j) > g(A_j, A_i)$, где $g(A_i, A_j)$ — число членов группы (избирателей), принимающей решение, которые предпочитают данный вариант A_i всем остальным вариантам A_j при попарных сравнениях. По Кондорсе́, наиболее предпочтительным для всех оказывается вариант, превосходящий по большинству голосов любого конкурента.

Борда́, в отличие от Кондорсе́, определяет предпочтительность каждого варианта, опираясь на информацию об относительной ценности всех вариантов из заданного набора. Для этого вводится специальный критерий ценности варианта — сумма баллов Борда́, величина которой выражает агрегированное коллективное предпочтение с учетом индивидуальных предпочтений всех членов ГПР. Назовем такую информацию *косвенной*.

Таким образом, одно из принципиальных расхождений между концепциями Борда́ и Кондорсе́ состоит в следующем. Борда́ использует для выбора всю имеющуюся информацию (прямую и косвенную), а Кондорсе́ — только прямую. Потеря части информации и приводит, собственно говоря, к известному парадоксу несогласованности Кондорсе́. Действительно, когда нет хотя бы одного участника, входящего одновременно во все группы избирателей, которые выбрали большинством голосов разные варианты, тогда мнение большинства вообще не выражает чье-либо мнение. Поэтому, хотя каждый индивидуум в отдельности поступает рационально по Кондорсé, вся группа в целом уже не обладает этим качеством. Напротив, индивидуумы, рациональные по Бордá, остаются такими же и при коллективном выборе.

Правило, по которому формируется общее коллективное предпочтение, исходя из имеющихся индивидуальных предпочтений, будем называть *моделью агрегирования предпочтений*. Возможны следующие модели синтеза коллективного предпочтения:

- *реляционная*, согласно которой индивидуальные предпочтения, представленные бинарными отношениями, преобразуются в коллективное бинарное отношение;
- *функциональная*, согласно которой индивидуальные предпочтения, описанные функциями выбора, преобразуются в коллективную функцию выбора;
- *реляционно-функциональная*, согласно которой индивидуальные предпочтения, выраженные бинарными отношениями, преобразуются в коллективную функцию выбора.

Проблему рациональности коллективного выбора можно решать двояко: 1) построить некоторую эвристическую модель агрегирования предпочтений и изучать, какими она обладает характерными свойствами (примером такого подхода служат процедуры голосования, рассмотренные в гл. 21); 2) модель агрегирования предпочтений ввести аксиоматически, сформулировав необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коллективное и индивидуальные предпочтения, чтобы коллективный выбор мог считаться разумным с точки зрения здравого смысла всеми членами ГПР. Главенствующую роль в формировании понятия коллективной рациональности на протяжении долгого времени играла концепция Кондорсé, лежащая в основе многих теорий коллективного выбора.

22.2. Реляционная модель агрегирования предпочтений

Проблема рационального коллективного выбора в рамках реляционной модели агрегирования индивидуальных предпочтений ставится следующим образом. Имеется несколько возможных вариантов $A_1, \ldots, A_m$ решения некоторой проблемы, которые рассматриваются группой лиц, ответственных за ее решение. Индивидуальное предпочтение каждого s-го члена ГПР $(s = 1, \ldots, t)$ выражается ранжировкой $r_1^{\langle s \rangle} < r_2^{\langle s \rangle} < \ldots < r_m^{\langle s \rangle}$

вариантов, $r_i^{\langle s\rangle}$ — ранг i-го варианта в s-й ранжировке, которую обозначим через $R^{\langle s\rangle}$.

Каждой ранжировке $R^{\langle s\rangle}$ соответствует некоторое упорядочение вариантов $Z^{\langle s\rangle}$, принадлежащее семейству $\mathsf{R} = \{Z_1, \ldots, Z_k\}$ всех возможных типов упорядочений. Упорядочение типа Z_k для k вариантов можно построить различными способами, количество которых зависит от числа рассматриваемых вариантов и общего числа вариантов m. Так, один вариант A есть единственно возможное упорядочение типа Z_1. Два варианта A и B можно упорядочить тремя способами: $A \succ B$, $B \succ A$ и $A \approx B$, т. е. имеется три возможные упорядочения типа Z_2. В случае трех вариантов A, B и C будет уже 13 возможных упорядочений типа Z_3, а именно:

$$A \succ B \succ C, \quad A \succ C \succ B, \quad B \succ C \succ A, \quad B \succ A \succ C,$$
$$C \succ A \succ B, \quad C \succ B \succ A,$$
$$A \succ B \approx C, \quad A \succ C \approx B, \quad B \succ C \approx A, \quad B \succ A \approx C,$$
$$C \succ A \approx B, \quad C \succ B \approx A, \quad A \approx B \approx C.$$

Реляционным профилем индивидуальных предпочтений, или *R-профилем*, называется t-мерный кортеж ранжировок $(R^{\langle 1\rangle}, \ldots, R^{\langle t\rangle})$, который является элементом прямого произведения семейств ранжировок $\mathsf{R}^t = \mathsf{R} \times \ldots \times \mathsf{R}$. *Реляционное правило агрегирования*, или R-оператор группового выбора, есть отображение $F\colon \mathsf{R}^t \to \mathsf{R}$, которое задано на множестве R-профилей R и имеет своим значением коллективную ранжировку R_{agg}, принадлежащую семейству R. Иными словами, реляционное правило агрегирования $R_{agg} = F(R^{\langle 1\rangle}, \ldots, R^{\langle t\rangle})$ представляет собой правило, по которому из семейства возможных ранжировок R выбирается ранжировка R_{agg} как наиболее предпочтительное коллективное решение, учитывающее индивидуальные ранжировки $R^{\langle 1\rangle}, \ldots, R^{\langle t\rangle}$ всех членов группы.

Требуется сформулировать условия, однозначно определяющие реляционное правило агрегирования, которое «честно» и «справедливо» объединяет индивидуальные предпочтения в коллективное предпочтение, разделяемое всеми членами ГПР. Очевидно, что разные наборы таких условий или аксиом будут порождать различные правила агрегирования. Рациональный коллективный выбор в рамках реляционной модели опирается на так называемую аксиому независимости, согласно которой результаты сравнения каждой пары вариантов не зависят от результатов сравнения остальных пар вариантов.

22.3. Условия рациональности выбора в реляционной модели

Концепции рационального коллективного выбора, основанные на реляционной модели агрегирования индивидуальных предпочтений, были независимо предложены А. Бергсоном и П. Самуэльсоном (1938). Позднее они были развиты К. Эрроу в теории голосования (1951), а затем обобщены П. Фишберном (1964) и А. Сеном (1970), лауреатом Нобелевской премии. Обсудим аксиоматические подходы к агрегированию индивидуальных предпочтений.

Основываясь на анализе различных процедур голосования, Эрроу предложил набор требований к рациональному коллективному выбору, которые должны, во-первых, быть естественными, понятными и приемлемыми для всех членов ГПР с точки зрения здравого смысла и, во-вторых, иметь четкую математическую формулировку.

Считается, что ГПР состоит, по крайней мере, из двух человек, а число возможных вариантов больше или равно трем. Если имеется только один участник, группа исчезает. Если есть только два варианта, то конфликт интересов отсутствует и нетранзитивность индивидуальных предпочтений не возникает.

Требования Эрроу включают следующие две аксиомы и пять условий.

Аксиомы Эрроу постулируют свойства полной сравнимости вариантов и транзитивности индивидуальных предпочтений.

А1. При сравнении любых двух вариантов всегда выполняется одно из бинарных отношений: либо A_iSA_j, либо A_jSA_i. Здесь S обозначает отношение строгого превосходства $\succ$ или отношение эквивалентности $\approx$.

А2. Каждое из отношений транзитивно: если A_iSA_j и A_jSA_k, то A_iSA_k.

Заметим, что две точно такие же аксиомы присутствуют в аксиоматике теории ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна и теории многомерной полезности Фишберна.

Условия Эрроу устанавливают требования к реляционному правилу агрегирования индивидуальных предпочтений, обеспечивающие рациональность коллективного выбора.

КВ1. *Определенность.* Реляционное правило агрегирования определено на множестве всех возможных R-профилей индивидуальных предпочтений, представленных кортежами ранжировок.

КВ2. *Положительная связь коллективной и индивидуальных предпочтений.* Коллективная предпочтительность для любой пары вариантов не должна ухудшаться при изменении любой индивидуальной ранжировки, которое не ухудшает предпочтительность каждого из вариантов.

КВ3. *Независимость выбора от посторонних вариантов.* При изменении R-профиля индивидуальных предпочтений на некотором подмножестве вариантов реляционное правило агрегирования должно давать на подмножестве остальных вариантов такую же результирующую ранжировку, что и на исходном множестве вариантов.

КВ4. *Суверенность участников.* Для каждой пары вариантов найдется такой R-профиль индивидуальных предпочтений, который обеспечивает предпочтительность одного из вариантов в коллективной ранжировке.

КВ5. *Отсутствие диктатора.* Среди участников нет ни одного, чьи индивидуальные предпочтения для любой пары вариантов определяют коллективный выбор независимо от индивидуальных предпочтений остальных участников.

Поясним смысл условий Эрроу. Первое условие КВ1 гарантирует получение результата при любых индивидуальных предпочтениях членов ГПР и совпадает со свойством результативности процедуры голосования из разд. 21.9. Первое условие называют также *условием универсальности.*

Второе условие КВ2 означает, что коллективное упорядочение вариантов не должно ухудшаться при изменении одной из индивидуальных ранжировок. Если по коллективному мнению и мнению одного из членов ГПР $A_i \succ A_j$ и этот участник меняет свое предпочтение на $A_i \approx A_j$, то имеющееся групповое отношение не изменится. Если по коллективному мнению и мнению одного из членов ГПР $A_i \approx A_j$ и этот участник меняет свое предпочтение на $A_i \succ A_j$, то имеющееся групповое отношение или не изменится, или станет $A_i \succ A_j$. Второе условие аналогично свойству монотонности процедуры голосования.

Третье условие КВ3 требует, чтобы коллективная предпочтительность для любых двух вариантов зависела только от их предпочтительности при индивидуальных сравнениях и не менялась при добавлении или исключении из результирующего упорядочения каких-то других вариантов. Третье условие называется также *условием локальности* правила агрегирования.

Согласно четвертому условию КВ4 процедура коллективного выбора не должна навязывать превосходство одного из вариантов, если хотя бы часть членов ГПР придерживается иного мнения. Реляционное правило агрегирования, не соответствующее условию КВ4, называется *навязывающим*. Условия КВ2 и КВ4 вместе эквивалентны так называемому условию парето-оптимальности правила агрегирования, которое аналогично свойству единогласия процедуры голосования.

Пятое условие КВ5, совпадающее со свойством анонимности процедуры голосования, устанавливает равноправие всех членов ГПР и исключает доминирование чьей-либо точки зрения. Реляционное правило агрегирования, не соответствующее условию КВ5, называется *диктаторским*.

К. Эрроу доказал две теоремы о возможности существования реляционного правила агрегирования. Согласно первой из теорем, при наличии двух вариантов реляционное правило агрегирования является правилом простого большинства голосов и удовлетворяет условиям КВ2 — КВ5. Вторая теорема утверждает, что при наличии трех и более вариантов реляционное правило агрегирования, удовлетворяющее аксиомам А1, А2 и условиям КВ1 — КВ3, должно быть либо навязывающим, либо диктаторским. Таким образом, не существует реляционного правила агрегирования, которое одновременно удовлетворяет всем условиям КВ1 — КВ5. Поэтому эти теоремы называют также теоремами о невозможности. Тем самым в силу теорем Эрроу невозможно построить правило коллективного выбора, которое рационально объединяет индивидуальные ранжировки, а значит, невозможно создать «справедливую» систему выборов, исключающую парадоксы голосования.

При решении практических проблем важно знать, насколько часто требования Эрроу не выполняются в реальной жизни. Специально проведенное вычислительное моделирование процедур голосования показало, что при нескольких выбираемых вариантах и большом числе голосующих (порядка нескольких тысяч человек) коллективный выбор противоречит выводам Эрроу примерно в 6 — 9 % случаев.

Парадокс Эрроу о невозможности построения справедливой системы голосования получил широкую известность и вызвал попытки изменить требования, налагаемые на реляционное правило агрегирования, чтобы избежать столь неприятных последствий.

Д. Блэк показал (1948), что если все индивидуальные предпочтения выражаются ранжировками, которые можно представить монотонными функциями, определенными на конечном множестве вариантов и имеющими единственный экстремум, то результирующее групповое предпочтение можно задать как транзитивное упорядочение. Было доказано, что при ограничении области определения множеством таких «однопиковых» функций реляционное правило агрегирования удовлетворяет условиям КВ1—КВ5 для произвольного, но конечного числа участников

П. Фишберн доказал (1970), что все условия КВ1—КВ5 будут согласованными при бесконечном множестве вариантов и возможности существования бесконечного числа участников, сколь угодно близких по предпочтениям к диктатору. Такая постановка формально отличается от теории Эрроу, где множество вариантов и участников предполагается конечным.

Р. Уилсон (1972) установил, что отказ в теории Эрроу от требования парето-оптимальности выбора (условия КВ2 и КВ4) приводит к недиктаторскому реляционному правилу агрегирования. При этом коллективное предпочтение будет задаваться бинарным отношением, обратным к бинарному отношению, выражающему индивидуальное предпочтение одного из членов ГПР.

Парадоксы голосования не возникают также, если в основу аксиоматики рационального коллективного выбора положить концепцию Борда, которая учитывает общую значимость каждого варианта, вычисленную по результатам индивидуальных парных сравнений всех вариантов. Соответствующие системы аксиом были предложены Н. Миллером (1980), В. С. Левченковым (СССР, 1987) и другими и включают следующие требования:

БВ1. *Определенность.*

БВ2. *Независимость выбора от посторонних вариантов.*

БВ3. *Парето-оптимальность.*

БВ4. *Отсутствие диктатора.*

Перечисленные условия определяют на множестве всех возможных R-профилей индивидуальных предпочтений другое реляционное правило агрегирования, названное правилом *демократического агрегирования.* Это правило обеспечивает выбор в качестве коллективного решения некоторого строгого упорядочения всех вариантов и позволяет преодолеть парадокс Эрроу.

Замена условия БВ3 парето-оптимальности на условие так называемой накрывающей парето-оптимальности расширяет возможности использования правила демократического агрегирования на случай нетранзитивных индивидуальных предпочтений, представленных *накрывающим* отношением. Говорят, что вариант A_i накрывает вариант $A_j \neq A_i$, когда вариант A_i превосходит вариант A_j по мажоритарному отношению W (19.1) и для всех вариантов $A_k \neq A_i$, A_j из условия $A_j W A_k$ следует, что $A_i W A_k$. Свойство накрывающей парето-оптимальности устанавливает прямое и косвенное превосходство варианта A_i над вариантом A_j. Это означает, что все члены ГПР не только единогласно признают вариант A_i строго превосходящим вариант A_j, но и считают вариант A_i не уступающим варианту A_j при косвенных сравнениях этих двух вариантов с любыми другими вариантами A_k из совокупности вариантов A.

22.4. Правила агрегирования по числовым показателям

Рассмотрим другие подходы к агрегированию индивидуальных предпочтений в рамках реляционной модели, основанные на использовании числовых показателей.

В процедуре Л. Гудмана и Г. Марковица (1952) в качестве правила агрегирования выступает *правило суммы мест*. Согласно этому правилу, ранг варианта A_i, который определяет его место в коллективной ранжировке R_{agg}, задается как общая сумма рангов $r_i^{\langle s \rangle}$ данного варианта во всех индивидуальных ранжировках $R^{\langle 1 \rangle}, \ldots, R^{\langle t \rangle}$ членов ГПР:

$$r_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} r_i^{\langle s \rangle}.$$

Вариант A_i предпочтительнее варианта A_j, если $r_{agg}(A_i) < r_{agg}(A_j)$.

Правило суммы мест удовлетворяет следующим условиям.

РВ1. *Парето-оптимальность*. Если вариант A_i не уступает варианту A_j для всех членов ГПР, а для кого-то из них вариант A_i предпочтительнее варианта A_j, то вариант A_i в целом предпочтительнее варианта A_j.

РВ2. *Независимость от сдвига*. Групповое отношение предпочтительности для двух вариантов A_i и A_j не изменится, если заменить индивидуальные ранги $r_i^{\langle s \rangle}$ и $r_j^{\langle s \rangle}$ соответственно на $r_i^{\langle s \rangle} + b$ и $r_j^{\langle s \rangle} + b$, где b — целочисленная константа.

РВ3. *Симметричность*. Коллективная ранжировка вариантов не изменится, если поменять местами строки матрицы $\mathrm{R} = (r_{is})_{t \times m}$, где $r_{is} = r_i^{\langle s \rangle}$.

Таблица 22.1

Матрица весов мест кандидатов

Количество голосов	Вариант		
	A	B	C
23	2	4	5
17	6	1	3
2	4	2	7
10	2	3	1
8	7	5	3

При исключении условия РВЗ можно ввести взвешенную сумму рангов

$$r_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} w_{si} r_i^{\langle s \rangle},$$

где вес $w_{si} > 0$ характеризует субъективную важность места, которое занимает вариант A_i в индивидуальной ранжировке участника s.

Пример 22.1. Пусть при выборе лучшего из трех кандидатов A, B, C индивидуальные предпочтения 60 избирателей распределились, как в примере 21.1:

$$A \succ B \succ C — 23 \text{ чел.};$$
$$B \succ C \succ A — 17 \text{ чел.};$$
$$B \succ A \succ C — 2 \text{ чел.};$$
$$C \succ A \succ B — 10 \text{ чел.};$$
$$C \succ B \succ A — 8 \text{ чел.},$$

а важность мест всех кандидатов определяется матрицей весов $\mathrm{W} = (w_{si})_{t \times m}$, представленной в табл. 22.1.

Вычислим взвешенные суммы рангов для кандидатов:

$$r_{agg}(A) = 2 \cdot 23 + 6 \cdot 17 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 8 = 232,$$
$$r_{agg}(B) = 4 \cdot 23 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 8 = 183,$$
$$r_{agg}(C) = 5 \cdot 23 + 3 \cdot 17 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 214.$$

Коллективное упорядочение кандидатов в соответствии со значениями суммы рангов r_{agg} имеет вид: $B \succ C \succ A$, поскольку $r_{agg}(B) < r_{agg}(C) < r_{agg}(A)$. Лучшим является кандидат B.

Данный результат отличается от результата $B \succ A \succ C$, полученного с помощью функции Борда́ в примере 21.1. ■

Отметим, что процедура коллективного выбора по правилу суммы мест практически совпадает с процедурой Борда́, так как сумма баллов Борда́ (см. разд. 21.3) полностью идентична сумме рангов. Вместе с тем назначение веса важности места варианта является «узким местом» способа Гудмана — Марковица, которое вызвало много возражений со стороны оппонентов.

Коллективный выбор может также основываться на числовой функции ценности $v(A_i)$ или полезности $u(A_i)$ варианта, которая характеризует предпочтительность варианта A_i для отдельного ЛПР. Варианты ранжируются по значениям их ценности/полезности: вариант A_i превосходит вариант A_j тогда и только тогда, когда $v(A_i) > v(A_j)$, варианты A_i и A_j эквивалентны, когда $v(A_i) = v(A_j)$. При наличии нескольких ЛПР агрегирование индивидуальных предпочтений задается функцией $v_{agg}(A_i) = F(v^{\langle 1\rangle}(A_i), \ldots, v^{\langle t\rangle}(A_i))$, которая зависит от функций ценности/полезности $v^{\langle s\rangle}(A_i)$, $s = 1, \ldots, t$, каждого из членов ГПР. Вид функции $v_{agg}(A_i)$ определяется дополнительными условиями, отражающими вклад каждого члена ГПР в коллективное предпочтение.

Агрегированное групповое предпочтение можно представить, например, при помощи вектора $\mathbf{v}_{agg}(A_i) = (v^{\langle 1\rangle}(A_i), \ldots, v^{\langle t\rangle}(A_i))$, компоненты которого суть функции индивидуальных полезностей $v^{\langle s\rangle}(A_i)$. Подобным образом коллективная полезность трактуется, в частности, в аксиоматической теории А. Сена. Коллективная предпочтительность варианта выражается тогда доминированием по Эджворту — Парето или по Слейтеру. Лучшими считаются либо парето-оптимальные, либо оптимальные по Слейтеру варианты.

Агрегировать индивидуальные предпочтения можно и иначе. Так, если функции коллективной $u_{agg}(A_i)$ и индивидуальной $u^{\langle s\rangle}(A_i)$ полезности удовлетворяют аксиоматике теории ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна и, кроме того, имеется положительная связь коллективной и индивидуальных полезностей, аналогичная условию КВ2 Эрроу, то коллективная полезность варианта определяется, согласно Дж. Харшаньи (1955), аддитивной функцией, которая является взвешенным средним индивидуальных полезностей варианта

$$u_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} b^{\langle s\rangle} u^{\langle s\rangle}(A_i),$$

где $b^{\langle s\rangle}$ — положительные константы. Вариант A_i предпочтительнее варианта A_j, если $u_{agg}(A_i) > u_{agg}(A_j)$, варианты A_i и A_j эквивалентны, если $u_{agg}(A_i) = u_{agg}(A_j)$. Заметим, что сумма рангов является простейшей функцией групповой ценности.

В процедурах голосования, рассмотренных в гл. 21, каждый голос, поданный за какого-то кандидата, можно считать индивидуальной оценкой полезности этого кандидата и отождествить его с результатом индивидуального выбора по единственному критерию, имеющему шкалу, которая состоит всего из двух оценок: «за» и «против». В таком случае процедура голосования представляет собой модель оптимального коллективного выбора лучшего варианта по аддитивной функции общей полезности.

Сходные с результатами Харшаньи дает теория многомерной полезности Кини—Райфа (1976), изложенная в разд. 15.4. В рамках этой теории, вообще говоря, природа многомерности функции полезности, заданной на множестве вариантов, не принципиальна. Многомерность общей полезности может быть обусловлена и использованием многих независимых критериев, по которым оцениваются частные полезности варианта, и наличием нескольких независимых ЛПР, каждый из которых дает индивидуальную оценку полезности варианта.

В случае группового выбора при выполнении соответствующих аксиом теории полезности коллективная полезность варианта A_i определяется значением полилинейной функции (15.3):

$$u_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} l^{\langle l\rangle} u^{\langle s\rangle}(A_i) + k \sum_{s=1}^{t} \sum_{p>s} l^{\langle s\rangle} l^{\langle p\rangle} u^{\langle s\rangle}(A_i) u^{\langle p\rangle}(A_i) + \ldots +$$
$$+ k^{t-1} l^{\langle 1\rangle} l^{\langle 2\rangle} \ldots l^{\langle t\rangle} u^{\langle 1\rangle}(A_i) u^{\langle 2\rangle}(A_i) \ldots u^{\langle t\rangle}(A_i).$$

Здесь $u^{\langle s\rangle}(A_i)$ — индивидуальная полезность варианта A_i для участника s, удовлетворяющая условию $0 \le u^{\langle s\rangle} \le 1$; $0 < l^{\langle s\rangle} <$ < 1 — частный шкалирующий параметр, который определяется значением функции полезности $l^{\langle s\rangle} = u_{agg}(A_i)$ при $u^{\langle s\rangle}(A_i) = 1$ и $u^{\langle r\rangle}(A_i) = 0$ для $r \neq s$. Общая шкалирующая константа $k > -1$ находится из характеристического уравнения

$$k + 1 = \prod_{s=1}^{t} (kl^{\langle s\rangle} + 1).$$

При $\sum\limits_{s=1}^{t} l^{\langle s\rangle} = 1$ функция полезности $u_{agg}(A_i)$ принимает аддитивную форму

$$u_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} l^{\langle s \rangle} u^{\langle s \rangle}(A_i),$$

а при $\sum\limits_{s=1}^{t} l^{\langle s \rangle} \neq 1$ — мультипликативную форму

$$k u_{agg}(A_i) + 1 = \prod_{s=1}^{t} [k l^{\langle s \rangle} u^{\langle s \rangle}(A_i) + 1].$$

Числовая функция многомерной коллективной полезности $u_{agg}(A_i)$, как правило агрегирования индивидуальных предпочтений, удовлетворяет всем условиям Эрроу. На практике нахождение числовых значений шкалирующих констант k, $l^{\langle s \rangle}$ и конкретного выражения для функции коллективной полезности сопряжено со значительными трудностями. Кроме того, могут существовать большие расхождения между предпочтениями отдельных ЛПР.

22.5. Оптимальное согласование индивидуальных ранжировок

В описанных ранее подходах к агрегированию индивидуальных предпочтений в рамках реляционной модели коллективные ранжировки вариантов строятся по правилу большинства голосов членов ГПР. Рассмотрим один из методов рационального коллективного выбора, состоящий в отыскании результирующей ранжировки, которая учитывает все индивидуальные предпочтения и в максимальной степени удовлетворяет всех участников.

Примем в качестве меры различия индивидуальных предпочтений расстояние $d(R^{\langle s \rangle}, R^{\langle p \rangle})$ между ранжировками $R^{\langle s \rangle}$ и $R^{\langle p \rangle}$ участников s и p, введенное на множестве всех индивидуальных ранжировок вариантов $R = \{R^{\langle 1 \rangle}, R^{\langle 2 \rangle}, \ldots, R^{\langle t \rangle}\}$. Максимально приемлемое для всех коллективное решение представляет собой оптимальную ранжировку $r_1^* < r_2^* < \ldots < r_m^*$, которая называется *медианой Кемени* R^* и определяется условием

$$R^* \in \arg\min_{p} \sum_{s=1}^{t} d(R^{\langle s \rangle}, R^{\langle p \rangle}).$$

Конкретное выражение для медианы Кемени R^* зависит от выбранного вида метрики и характера ранжировок (строгие, нестрогие). Медиана Кемени R^* наиболее близка ко всем индивидуальным ранжировкам вариантов $R^{\langle s\rangle}$ в смысле минимума расстояния и тем самым отражает возможный компромисс или консенсус между индивидуальными предпочтениями членов ГПР.

Можно показать, что мажоритарное отношение, выражающее правило простого большинства голосов, представимо медианой Кемени. Обратное утверждение верно не всегда: медиана Кемени может соответствовать, а может и не соответствовать мажоритарному отношению.

Для нахождения медианы Кемени применяют разные эвристические и точные комбинаторные методы дискретной оптимизации, среди которых отметим методы, разработанные Дж. Кемени (1959), Дж. Кемени и Дж. Снеллом (1972), В. Куком и Л. Сейфордом (1982). Приведем алгоритм Кука — Сейфорда.

1, 2. Совпадают с шагами 1, 2 модифицированной процедуры Борда и процедуры Кондорсе. Строятся все индивидуальные строгие или нестрогие ранжировки $R^{\langle 1\rangle}, \ldots, R^{\langle t\rangle}$ вариантов.

3. Задается расстояние между медианой Кемени R^* и s-й индивидуальной ранжировкой $R^{\langle s\rangle}$, используя метрику Хемминга вида (9.6):

$$d^{\langle s\rangle} = d_1(R^*, R^{\langle s\rangle}) = \sum_{i=1}^{m} |r_i^* - r_i^{\langle s\rangle}|,$$

где r_i^* и $r_i^{\langle s\rangle}$ — ранги i-го варианта A_i в ранжировках R^* и $R^{\langle s\rangle}$ соответственно. Расстояние $d^{\langle s\rangle}$ характеризует индивидуальное отличие предпочтений участника s от коллективного мнения.

4. Задается общая мера различия коллективного и индивидуальных предпочтений как сумма индивидуальных различий:

$$d = \sum_{s=1}^{t} d^{\langle s\rangle} = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} |r_i^* - r_i^{\langle s\rangle}|. \tag{22.1}$$

Меру различия коллективного и индивидуальных предпочтений можно записать также в ином виде. Для этого подсчитывается число g_l голосов, поданных на шаге 2 за каждый l-й вид ранжировки R_l, $l = 1, \ldots, n$, n — общее число индивидуальных ранжировок разных видов. Тогда расстояние d представляет собой взвешенную метрику Хемминга

$$d = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} g_l |r_i^* - r_{il}|, \tag{22.2}$$

где r_{il} — ранг i-го варианта A_i в ранжировке R_l.

Заметим, что ранг r_i^* может быть равен только одному какому-то целому числу k из множества номеров вариантов $\{1, \ldots, m\}$. Полагая $r_i^* = k$, определим взвешенное расстояние между рангом варианта A_i и коллективным рангом k

$$d_{ik} = \sum_{l=1}^{n} g_l |k - r_{il}|.$$

Расстояние d_{ik} отражает меру разногласия между мнениями экспертов, присвоивших варианту A_i ранг r_{il} в своих индивидуальных ранжировках, и коллективным мнением, согласно которому наилучшим для варианта A_i считается ранг k.

5. Вычисляется мера различия между коллективным и индивидуальными предпочтениями для каждого ранга k по всем вариантам:

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} d_{ik}.$$

6. Результирующая оптимальная ранжировка вариантов ищется как ранжировка R^*, минимизирующая общую меру различия коллективного и индивидуальных предпочтений для всех вариантов:

$$d = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} d_{ik} \to \min d = d^*.$$

Лучшим будет вариант, занимающий в медиане Кемени R^* первое место.

Так как расстояния d и d_{ik} принимают только целочисленные значения, то задача отыскания медианы Кемени сводится к следующей задаче целочисленного линейного программирования:

$$d = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} d_{ik} x_{ik} \to \min d = d^*,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = 1, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \sum_{k=1}^{m} x_{ik} = 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $x_{ik} = 1$, если объект A_i получает ранг k, и $x_{ik} = 0$ в противоположном случае.

Данная задача известна как задача о назначениях (транспортная задача), в которой необходимо наилучшим образом распределить исполнителей для выполнения работ. Тогда исполнители A_i суть варианты A_i; работы B_k — ранги k; стоимости c_{ik}

выполнения исполнителем работ — коэффициенты различия d_{ik}, образующие матрицу $\mathrm{D} = (d_{ik})_{m\times m}$; суммарные расходы на выполнение работ z — общая мера d различия коллективного и индивидуальных предпочтений. Наилучшему решению соответствует распределение работ, обеспечивающее минимум расходов, что и будет представлять наиболее приемлемую для всех членов ГПР оптимальную ранжировку — медиану Кемени.

Пример 22.2. Пусть выполняются условия примера 21.1 и голоса между пятью получившимися ранжировками кандидатов A, B и C распределились так:

$$
\begin{aligned}
&A \succ B \succ C - g_1 = 23 \text{ голоса},\\
&B \succ C \succ A - g_2 = 17 \text{ голосов},\\
&B \succ A \succ C - g_3 = 2 \text{ голоса},\\
&C \succ A \succ B - g_4 = 10 \text{ голосов},\\
&C \succ B \succ A - g_5 = 8 \text{ голосов}.
\end{aligned}
$$

Подсчитаем меру различия для кандидата A. Имеем соответственно:

для ранга $k = 1$

$$d_{A1} = 23\cdot|1-1|+17\cdot|1-3|+2\cdot|1-2|+10\cdot|1-2|+8\cdot|1-3| = 62;$$

для ранга $k = 2$

$$d_{A2} = 23\cdot|2-1|+17\cdot|2-3|+2\cdot|2-2|+10\cdot|2-2|+8\cdot|2-3| = 48;$$

для ранга $k = 3$

$$d_{A3} = 23\cdot|3-1|+17\cdot|3-3|+2\cdot|3-2|+10\cdot|3-2|+8\cdot|3-3| = 58.$$

Аналогичные меры различия для кандидатов B и C равны:

$$d_{B1} = 51, d_{B2} = 29, d_{B3} = 69; \quad d_{C1} = 67, d_{C2} = 43, d_{C3} = 53.$$

Групповая матрица $\mathrm{D} = (d_{ik})_{m\times m}$ различия индивидуальных ранжировок приведена в табл. 22.2.

В данном примере имеется всего шесть возможных коллективных решений — ранжировок кандидатов A, B и C, определяемых распределениями кандидатов по рангам. Минимальное расстояние $d^* = \min d$ можно легко найти простым перебором. Оно равно

$$d^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=i} d_{ik} = d_{A1} + d_{B2} + d_{C3} = 62 + 29 + 53 = 144$$

Таблица 22.2

Групповая матрица D различия индивидуальных ранжировок

Вариант	Ранг		
	1	2	3
A	62	48	58
B	51	29	69
C	67	43	53

и совпадает с суммой $\sum_i d_{ii}$ диагональных элементов матрицы D. Расстоянию d^* соответствует медиана Кемени R^*, дающая упорядочение $A \succ B \succ C$. Лучшим является кандидат A. Заметим, что такое же упорядочение кандидатов дает применение функции Нансона f_N. Последний столбец в матрице D различия индивидуальных ранжировок совпадает со значениями функции Борда f_B для каждого кандидата: $d_{A3} = f_B(A) = 58$, $d_{B3} = f_B(B) = 69$, $d_{C3} = f_B(C) = 53$. ■

22.6. Функциональная модель агрегирования предпочтений

Обсудим теперь проблему рационального коллективного выбора, сформулировав ее в рамках функциональной модели агрегирования индивидуальных предпочтений. Имеется несколько возможных вариантов, традиционно обозначаемых в теории функций выбора как $x_1, \ldots x_m$, из которых требуется выделить варианты, наиболее предпочтительные с общей точки зрения всех членов ГПР.

Индивидуальное предпочтение отдельного s-го члена ГПР ($s \in I = \{1, \ldots, t\}$) выражается функцией выбора $Y^{\langle s\rangle} = C^{\langle s\rangle}(X)$, рассмотренной в гл. 19. Функция выбора представляет индивидуальное правило, определяющее подмножество вариантов $Y^{\langle s\rangle}$, которые участник s считает для себя приемлемыми в произвольном множестве предъявленных вариантов X, взятых из множества допустимых вариантов X^a. Каждая функция выбора $C(X)$ принадлежит семейству C всех возможных функций выбора. Любой член ГПР осуществляет свой выбор независимо от выбора остальных участников, т. е. функции индивидуального выбора $C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X)$ отдельных участников независимы.

Функциональным профилем индивидуальных предпочтений, или *C-профилем*, назовем t-мерный кортеж функций выбора $(C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X))$, который является элементом прямого произведения семейств функций выбора $\mathcal{C}^t = \mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}$. Функциональное правило агрегирования, или C-оператор группового выбора, есть отображение $F\colon \mathcal{C}^t \to \mathcal{C}$, которое задано на множестве C-профилей $\mathcal{C}^t$ и имеет своим значением функцию коллективного выбора $Y_{agg} = C_{agg}(X)$, принадлежащую семейству $\mathcal{C}$. Иными словами, функциональное правило агрегирования $C_{agg}(X) = F(C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X))$ представляет собой правило, по которому из семейства возможных функций выбора $\mathcal{C}$ выбирается функция $C_{agg}(X)$ как наиболее предпочтительное коллективное решение, учитывающее функции индивидуального выбора $C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X)$ всех членов группы.

Функциональную модель агрегирования индивидуальных предпочтений (рис. 22.1) можно изобразить схематически, аналогично формальной модели выбора в разд. 19.2, как преобразователь, на вход которого поступает C-профиль индивидуальных предпочтений $(C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X))$, кратко обозначаемый через $\{C^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$, а на выходе имеется функция коллективного выбора $Y_{agg} = C_{agg}(X)$.

Функция коллективного выбора $C_{agg}(X)$ может реализовываться, в частности, параллельным механизмом выбора, описанным в разд. 19.3, где каждый отдельный механизм выбора представляет собой правило индивидуального выбора. Так, два правила, определяющих победителя на выборах из разд. 21.2, можно ввести для произвольных C-профилей следующим образом:

единогласие

$$C_{agg}(X) = \bigcap_{s=1}^{t} C^{\langle s\rangle}(X),$$

один голос «за»

$$C_{agg}(X) = \bigcup_{s=1}^{t} C^{\langle s\rangle}(X).$$

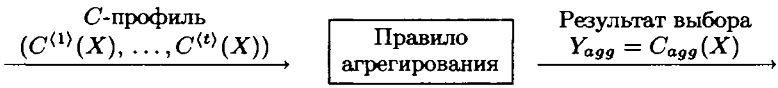


Рис. 22.1. Функциональная модель агрегирования индивидуальных предпочтений

22.7. Условия рациональности выбора в функциональной модели

Важную роль в функциональной модели агрегирования индивидуальных предпочтений играют локальные правила агрегирования, которые определяют возможность включения некоторого варианта x_i в коллективное решение $C_{agg}(X)$ в зависимости от того, считают ли члены ГПР этот вариант предпочтительным или нет. Функциональное правило агрегирования называется *локальным*, если для любых C-профилей $\{C'^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$ и $\{C''^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$, любого множества предъявляемых вариантов X и любого варианта x_i из предъявления X из условия одинаковости индивидуального выбора $x_i \in C'^{\langle s\rangle}(X) \Leftrightarrow x_i \in C''^{\langle s\rangle}(X)$ вытекает одинаковость коллективного выбора $x_i \in C'_{agg}(X) \Leftrightarrow x_i \in C''_{agg}(X)$. Условие локальности функционального правила агрегирования аналогично условию КВ3 независимости выбора от посторонних вариантов, введенному Эрроу.

Аксиоматические требования, которым должно удовлетворять функциональное правило агрегирования индивидуальных предпочтений, обеспечивающее рациональность коллективного выбора, были сформулированы М. А. Айзерманом и Ф. Т. Алескеровым (СССР, 1983) и состоят в следующем.

ФВ1. *Ненавязанность выбора, или суверенность участников.* Для любого множества предъявляемых вариантов X и любого варианта x_i из предъявления X существует такой C-профиль $\{C^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$, что возможно как включение варианта x_i в коллективный выбор $C_{agg}(X)$, т. е. $x_i \in C_{agg}(X)$, так и невключение этого же варианта в коллективный выбор, т. е. $x_i \notin C_{agg}(X)$.

Первая часть условия ФВ1 определяет так называемую положительную ненавязанность, а вторая часть — отрицательную ненавязанность.

ФВ2. *Монотонность.* Пусть заданы два C-профиля $\{C'^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$, $\{C''^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$ и для некоторого множества предъявляемых вариантов X и варианта $x_i \in X$ выполняются условия $x_i \in C'_{agg}(X)$ и $J[x_i, X; \{C'^{\langle s\rangle}(\cdot)\}] \subseteq J[x_i, X; \{C''^{\langle s\rangle}(\cdot)\}]$, где $J[x_i, X; \{C^{\langle s\rangle}(\cdot)\}]$ — множество членов ГПР, включивших вариант x_i в свой индивидуальный выбор $C^{\langle s\rangle}(X)$. Тогда $x_i \in C''_{agg}(X)$.

Условие монотонности ФВ2 представляет собой усиление условия локальности, поскольку гарантирует, что при расширении числа участников, которые выбрали вариант x_i, вошедший в коллективный выбор $C'_{agg}(X)$, этот вариант x_i войдет и в измененный коллективный выбор $C''_{agg}(X)$.

ФВ3. *Нейтральность по отношению к вариантам.* Пусть заданы два C-профиля $\{C'^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$, $\{C''^{\langle s\rangle}(\cdot)\}$ и для любых множеств предъявляемых вариантов X', X'' и вариантов $x'_i \in X', x''_i \in X''$ выполняется условие приемлемости вариантов $x'_i \in C'^{\langle s\rangle}(X') \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x''_i \in C''^{\langle s\rangle}(X'')$ при индивидуальном выборе участника s. Тогда вариант x'_i приемлем при коллективном выборе $x'_i \in C'_{agg}(X')$ в том и только том случае, если вариант x''_i приемлем при коллективном выборе $x''_i \in C''_{agg}(X'')$.

Условие ФВ3 нейтральности по отношению к вариантам состоит, по сути, из двух условий: независимость от варианта (если $x'_i \in X$, $x''_i \in X$) и независимость от контекста или предъявления (если $x_i \in X'$, $x_i \in X''$), каждое из которых является усилением условия локальности.

ФВ4. *Анонимность участников.* Функциональное правило агрегирования индивидуальных предпочтений не зависит от перенумерации членов ГПР: $F(C^{\langle 1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle t\rangle}(X)) = F(C^{\langle e_1\rangle}(X), \ldots, C^{\langle e_t\rangle}(X))$, $e_1, \ldots, e_t \in I = \{1, \ldots, t\}$.

Условие анонимности ФВ4 обеспечивает равноправность участников.

ФВ5. *Парето-оптимальность.* Если все члены ГПР считают вариант x_i предпочтительным, т. е. $x_i \in C^{\langle s\rangle}(X)$ для всех $s \in I$, то этот вариант x_i включается в коллективный выбор $C_{agg}(X)$. Если все члены ГПР не считают вариант x_i предпочтительным, т. е. $x_i \notin C^{\langle s\rangle}(X)$ для всех $s \in I$, то этот вариант x_i не включается в коллективный выбор $C_{agg}(X)$.

Первая часть условия ФВ5 определяет так называемое положительное условие Парето, а вторая часть — отрицательное.

Перечисленные выше нормативные требования к функциональным правилам агрегирования индивидуальных предпочтений аналогичны нормативным требованиям к реляционным правилам агрегирования индивидуальных предпочтений, приведенным в разд. 22.3.

При одновременном выполнении условий ФВ1 — ФВ3 выполняются локальные функциональные правила агрегирования индивидуальных предпочтений:

федерация

$$C_{agg}(X) = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcap_{s \in P_k} C^{\langle s\rangle}(X),$$

представительство

$$C_{agg}(X) = \bigcap_{k=1}^{q} \bigcup_{s \in Q_k} C^{\langle s \rangle}(X).$$

Здесь коалиция P_k — k-элементное ($k \geq 1$) подмножество множества членов ГПР $I = \{1, \ldots, t\}$, которые включают любой вариант x_i из любого предъявляемого множества X в функцию коллективного выбора $C_{agg}(X)$ в том и только том случае, если этот вариант x_i предпочитается всеми участниками, т. е. принадлежит всем функциям индивидуального выбора $C^{\langle 1 \rangle}(X), \ldots, C^{\langle t \rangle}(X)$; коалиция Q_k — k-элементное ($k \geq 1$) подмножество множества членов ГПР $I = \{1, \ldots, t\}$, которые включают любой вариант x_i из любого предъявляемого множества X в функцию коллективного выбора $C_{agg}(X)$ в том и только том случае, если этот вариант x_i предпочитается хотя бы одним участником, т. е. принадлежит хотя бы одной функции индивидуального выбора $C^{\langle s \rangle}(X)$, $s \in I$.

Таким образом, по агрегирующему правилу «федерация» в коллективное решение включается тот вариант, который единогласно выбирают все члены хотя бы одной коалиции P_k. Единогласный выбор одного из вариантов группой участников гарантирует непустоту пересечения функций индивидуального выбора $C^{\langle 1 \rangle}(X), \ldots, C^{\langle t \rangle}(X)$. По агрегирующему правилу «представительство» в коллективное решение включается тот вариант, который выбирает хотя бы один участник (представитель) в каждой из коалиций $Q_1, \ldots, Q_k$. Правило коллективного выбора по k-большинству голосов представляет собой частный случай агрегирующего правила «федерация», где коалиции $P_k, \ldots, P_p$ содержат только k-элементные подмножества участников и не содержит подмножества с меньшим, чем k, числом участников.

Локальные функциональные правила агрегирования:

олигархия

$$C_{agg}(X) = \bigcap_{s \in P_1} C^{\langle s \rangle}(X),$$

синдикат

$$C_{agg}(X) = \bigcup_{s \in Q_1} C^{\langle s \rangle}(X)$$

являются другими частными случаями соответственно агрегирующих правил «федерация» и «представительство» при единственных коалициях P_1 и Q_1. Агрегирующее правило «*диктатор*» или «*решающий участник*» соответствует коалиции P_1 или Q_1, состоящей из единственного участника.

Напомним, что классически рациональная функция выбора $C(X)$ обладает свойствами наследования выбора **Н**, независимости выбора от исключения отвергнутых вариантов **О**, согласия (слабого наследования) **С** или свойством константности (сильного наследования) выбора **К**, приведенными в разд. 19.4. По теореме Айзермана — Алескерова, служащей прямой аналогией теоремы Эрроу о невозможности, не существует локального функционального правила агрегирования индивидуальных предпочтений, которое бы удовлетворяло всем требованиям ФВ1 — ФВ4 и гарантировало классическую рациональность функции коллективного выбора в случаях, когда все участники используют классически рациональные функции индивидуального выбора.

Ответственным за несовместимость этих требований является условие ФВ4.

При нарушении условия ФВ4, как было показано Айзерманом и Алескеровым, появляются привилегированные группы участников, в частности это может быть единственная группа или даже единственный участник, которые, по существу, определяют коллективный выбор независимо от результата агрегирования индивидуальных предпочтений остальных участников. Преодолеть указанные трудности можно, только отказавшись от требования, чтобы все функции коллективного и индивидуального выбора были одновременно классически рациональными. Оказалось, что особую роль здесь играет свойство наследования **Н** функции выбора. Для функций выбора, имеющих только это характеристическое свойство, можно построить локальные правила агрегирования, для которых выполняются все требования ФВ1 — ФВ4.

22.8. Особенности аксиоматических подходов к агрегированию предпочтений

В аксиоматических теориях коллективного выбора постулируются некоторые нормативные требования к правилам агрегирования индивидуальных предпочтений, которые должны обеспечивать рациональность коллективного предпочтения членов ГПР. Были предложены различные модели синтеза группового предпочтения, в рамках которых построены различные аксиоматики рационального коллективного выбора.

Реляционная модель агрегирования индивидуальных предпочтений, представленных бинарными отношениями, исследована достаточно детально. Функциональная и реляционно-функциональная модели агрегирования изучены слабее.

Основной вывод теорий, основанных на концепции рационального выбора Кондорсе́, состоит в невозможности существования «справедливой» системы голосования, которая была бы одновременно результативной, единогласной, демократической (ненавязывающей) и равноправной (недиктаторской). Решения, принимаемые большинством голосов, не всегда выражают согласованное общее мнение, особенно если индивидуальные мнения сильно различаются или противоречат мнению большинства. Было также показано, что и условие независимости результатов сравнения вариантов, и правила большинства голосов при агрегировании индивидуальных предпочтений могут приводить как к транзитивному, так и нетранзитивному мажоритарному отношению, характеризующему групповое решение, несмотря на транзитивность отношений, задающих индивидуальные предпочтения.

Следуя концепции рационального выбора Борда, а также при ослаблении или модификации требований Кондорсе́ становится возможным построение более справедливых систем голосования, в которых при агрегировании индивидуальных предпочтений, заданных разными видами отношений, допустимо применять правила большинства. Групповое предпочтение останется при этом транзитивным, если таковыми были индивидуальные предпочтения.

Как и в случае рационального индивидуального выбора, при практическом применении теорий рационального коллективного выбора сохраняется необходимость проверки выполнимости вводимых аксиом, что представляет собой достаточно трудоемкую для человека процедуру.

ГЛАВА 23

ГРУППОВОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР

23.1. Многокритериальный подход к коллективному выбору

Многоаспектный анализ сложной, плохо формализованной проблемы обычно выполняется группой специально отобранных высококвалифицированных экспертов, которые выполняют функции членов ГПР. Эксперты анализируют возможные пути решения проблемы, формируют перечень альтернативных вариантов, дают свои независимые субъективные оценки вариантов по многим критериям. Эти оценки обрабатываются каким-либо методом, и ищется один лучший или несколько приемлемых вариантов решения. Полученные результаты обсуждаются всеми экспертами и могут быть дополнены и изменены с целью их улучшения.

В решении проблемы, как правило, принимает также участие руководитель более высокого ранга, который несет общую ответственность за ее решение. Такой руководитель называется суперЛПР. СуперЛПР определяет критерии оценки вариантов, рассматривает полученные от экспертов индивидуальные заключения и результаты предварительного анализа проблемы, делает окончательный выбор. Обычно суперЛПР отвечает и за подбор экспертов.

Задача *коллективного многокритериального выбора* состоит в следующем. Имеется m вариантов решения проблемы $A_1, \ldots,$ A_m, которые оценены независимо t членами ГПР или экспертами по n критериям $K_1, \ldots, K_n$. Каждый критерий K_q имеет свою собственную шкалу оценок X_q — непрерывную или дискретную, числовую или вербальную. Порядковые шкалы оценок обычно предполагаются упорядоченными, например, от наиболее предпочтительных значений к наименее предпочтительным. Вариант A_i представляется группой n-мерных векторов или кортежей оценок $\mathbf{x}_i^{\langle s \rangle} = (x_{i1}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s \rangle})$, либо группой целевых функций (функций ценности, полезности) $v_q^{\langle s \rangle}(A_i)$, где $x_{iq}^{\langle s \rangle} = K_q^{\langle s \rangle}(A_i)$ — индивидуальная оценка варианта A_i по критерию K_q, данная участником s, $s = 1, \ldots, t$. Основываясь на предпочтениях суперЛПР и/или учитывая экспертные оценки членов ГПР, требуется решить одну из следующих задач: 1) выделить один или несколько лучших вариантов; 2) упорядочить все варианты от лучшего к худшему; 3) распределить все варианты по классам решений.

Реальный процесс принятия решения зачастую не является одноразовой процедурой. Нередко выполняется несколько повторяющихся туров, в которых варианты, критерии, эксперты появляются, заменяются, исключаются до тех пор, пока не будет найдено приемлемое решение.

Коллективный многокритериальный выбор имеет ряд специфических особенностей. Эксперты, как члены ГПР, в общем случае могут быть неравноправными. Различная степень компетенции и/или влиятельности экспертов учитывается при агрегировании индивидуальных предпочтений. Допускается также, что разные критерии могут иметь, вообще говоря, различную индивидуальную важность (вес) для суперЛПР и для каждого участника. Важность критерия можно задать, воспользовавшись одним из способов, указанным в разд. 8.3.

При нахождении итогового агрегированного результата нередко используется формальная аналогия между множественностью индивидуальных предпочтений членов ГПР и множественностью критериев оценки вариантов. Сначала для каждого члена ГПР решается своя задача индивидуального многокритериального выбора. Полученные результаты решения t индивидуальных задач принимаются в качестве исходных при решении новой задачи группового многокритериального выбора, где члены ГПР выступают в роли новых критериев. В этом случае показатель компетентности и/или влиятельности участника выступает аналогом относительной важности критерия. Подобный подход применяется, например, в теории многомерной полезности.

Итоговый выбор, очевидно, не должен зависеть от очередности выполнения процедур обработки индивидуальных многокритериальных оценок (сначала по членам ГПР, а потом по критериям, или наоборот). Это условие независимости результата от очередности учета предпочтений индивидуумов или оценок по критериям представляется естественным «разумным» требованием рациональности коллективного выбора и может быть названо *принципом инвариантности агрегирования* индивидуальных многокритериальных предпочтений.

Одним из важных аспектов, на который необходимо обращать внимание при обработке и анализе информации в задачах коллективного многокритериального выбора, является проблема сопоставимости разнородных данных. Шкалы количественных критериев оценок имеют обычно разную размерность. Например, стоимость, длина, время, скорость измеряются соответственно в рублях, метрах, секундах, километрах в час. Как правило, именованные показатели приводят к безразмерным, а часто их еще и нормируют, используя один из способов, упомянутых в разд. 3.5.

Качественные критерии оценок имеют различное содержание и разнообразные шкалы. Для унификации качественных шкал можно использовать лингвистические переменные вида: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «плохо», «неудовлетворительно». Во многих методах применяется оцифровка лингвистических переменных, например с помощью балльных шкал. Однако такая квантификация качественных шкал может приводить к существенным искажениям индивидуальных предпочтений членов ГПР, а значит, оказывает влияние на результаты коллективного выбора.

Кроме того, следует учитывать «разнонаправленность» критериев, которая выражает разное качество решения. «Положительные» критерии, по которым бóльшие значения оценок считаются предпочтительными (лучшими), обычно ассоциируются с «доходами». «Отрицательные» критерии, для которых предпочтительными будут мéньшие значения оценок, уподобляют «расходам». Такая ситуация уже встречалась в задачах многокритериальной оптимизации, где оценки по одним целевым функциям нужно было максимизировать, а по другим — минимизировать.

23.2. Оценка компетентности экспертов

Привлечение нескольких экспертов к поиску решения проблемы порождает необходимость учета их индивидуальных интересов и мнений, которые не всегда могут быть одинаково значимы для суперЛПР. Компетентность эксперта как специалиста характеризуют его профессиональные знания и опыт, аналитичность и широта мышления, уровень квалификации в определенной области.

Компетентность эксперта можно оценить, вообще говоря, лишь опираясь на мнения других лиц или на результаты прошлой деятельности эксперта. Пусть список экспертов формируется путем опроса специалистов. По результатам опроса составляется матрица $N = (n_{sp})_{t \times t}$, в которой $n_{sp} = 1$, если эксперт p предложил включить эксперта s в группу, и $n_{sp} = 0$, в противоположном случае. Тогда показатель компетентности $k^{\langle s \rangle}$ эксперта s можно определить как число поданных за него голосов:

$$k^{\langle s \rangle} = \sum_{s=1}^{t} n_{sp} / \sum_{s=1}^{t} \sum_{p=1}^{t} n_{sp}. \tag{23.1}$$

Вместе с тем такой упрощенный подход к оценке компетентности не позволяет учесть всю многогранность и сложность этой характеристики эксперта.

Для вычисления показателя компетентности эксперта Л. Г. Евланов и В. А. Кутузов (СССР, 1978) предложили эвристическую итеративную процедуру, которая базируется на индивидуальных оценках $x_i^{\langle s \rangle}$, данных экспертом s i-му варианту A_i, $i = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, t$.

1. Первоначально показатели компетентности всех экспертов полагаются равными $k_{(0)}^{\langle s \rangle} = 1/t$.

2. На каждом последующем шаге показатель компетентности каждого эксперта s корректируется по формуле средней оценки

$$k_{(j)}^{\langle s \rangle} = (1/h_{(j)}) \sum_{i=1}^{m} x_i^{\langle s \rangle} x_{i(j)}, \quad h_{(j)} = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} x_i^{\langle s \rangle} x_{i(j)},$$

$$x_{i(j)} = \sum_{s=1}^{t} x_i^{\langle s \rangle} k_{(j-1)}^{\langle s \rangle}, \quad \sum_{s=1}^{t} k_{(j)}^{\langle s \rangle} = 1.$$

3. Процедура продолжается до получения приемлемого результата.

Таким образом, компетентность экспертов оценивается по степени согласованности их индивидуальных оценок с групповой экспертной оценкой. Однако данная процедура не всегда дает удовлетворительные результаты, а ее сходимость строго не обоснована.

Обычно принято считать экспертов достаточно точными генераторами и измерителями информации. В таком случае можно ожидать, что достоверность получаемой экспертной информации будет повышаться при увеличении числа экспертов. Вместе с тем возрастают временны́е и финансовые затраты на проведение экспертизы. Поэтому общее число экспертов должно определяться разумным компромиссом между степенью достоверности экспертных суждений и допустимой величиной расходов на экспертизу.

Для оценки достоверности суждений эксперта используется показатель $L^{\langle s\rangle} = M^{\langle s\rangle}/M$, где $M^{\langle s\rangle}$ — число случаев, в которых суждения эксперта s получили практическое подтверждение; M — общее число случаев участия эксперта в экспертизе. Тогда средняя достоверность суждений группы экспертов $L_{\text{сред}} = (1/t)\sum\limits_{s=1}^{t} L^{\langle s\rangle}$, а относительная достоверность суждений эксперта s в группе $L_{\text{отн}}^{\langle s\rangle} = L^{\langle s\rangle}/L_{\text{сред}}$.

Однако применение таких показателей достоверности экспертных суждений требует надежной статистической информации о результатах практического участия многих экспертов в различных экспертизах. А подобная информация, как правило, либо отсутствует, либо труднодоступна.

23.3. Статистический анализ экспертных суждений

Статистический анализ экспертных оценок позволяет извлечь полезную дополнительную информацию путем обработки массивов данных с помощью методов математической статистики. При этом часто возникает необходимость проверки выдвинутых предположений о справедливости того или иного утверждения или вывода, которые принято называть *гипотезами*. Традиционно рассматриваются две гипотезы *основная*, или *нуль-гипотеза* и *альтернативная*, или *противоположная*. Проверка истинности выдвинутых гипотез позволяет сделать выводы о различимости сравниваемых вариантов, оценить степень независимости анализируемых показателей, найти границы изменений неизвестных параметров, выявить расхождения между усредненными величинами и т. п.

При выработке группового решения желательно оценивать согласованность экспертных суждений, что означает их непротиворечивость и близость. Определение меры согласованности экспертных мнений позволяет при обработке результатов экспертизы определить расхождения в экспертных оценках и выявить возможные группировки в коллективе экспертов.

Непротиворечивость экспертных суждений рационального эксперта предполагает транзитивность его индивидуальных предпочтений при оценке вариантов. Допускаемые экспертом нарушения транзитивности необходимо выявлять и устранять. Это может производиться как непосредственно в ходе экспертного опроса, так и после его проведения. Хотелось бы, чтобы результирующее коллективное предпочтение также было транзитивным. Однако поиск компромисса и обеспечение непротиворечивости общего мнения на практике не всегда представляются возможными. Усреднение же противоречивых индивидуальных экспертных суждений ведет к определенной потере информативности результата и снижает его содержательную ценность.

Близость экспертных суждений ассоциируется со своего рода компактностью результатов измерений характеристик объектов экспертизы. При использовании числовых шкал экспертные оценки можно рассматривать как точки многомерного пространства признаков или параметров. В таком случае мерой согласованности экспертных мнений может служить степень разброса точек, которая определяется либо как среднеквадратическое отклонение от математического ожидания, либо как медиана случайной величины. Если точки, представляющие оценки всех экспертов, образуют компактную группу, то мнения экспертов считаются хорошо согласованными. Точки могут образовывать также две или несколько компактных групп. Это свидетельствует о наличии различающихся точек зрения на оцениваемые объекты.

В качестве меры согласованности экспертных суждений, представленных индивидуальными ранжировками вариантов $R^{\langle s\rangle}$, используются *коэффициенты конкордации*. Дисперсионный коэффициент конкордации Кендалла (1955) определяется как отношение оценки дисперсии случайной величины к ее максимальному значению и вычисляется по формуле

$$W = 12S/t^2(m^3 - m), \tag{23.2}$$

где $S = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{t} r_i^{\langle s\rangle} - r_{\text{ср}}\right)^2$; $r_{\text{ср}} = (1/m)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{t} r_i^{\langle s\rangle} = t(m+1)/2$; $r_{\text{ср}}$ — средний ранг (оценка математического ожидания); $r_i^{\langle s\rangle}$ — ранг, присвоенный варианту A_i экспертом s; t — общее число экспертов; m — общее число вариантов.

Если ранжировка вариантов нестрогая и допускаются связанные ранги вариантов, то коэффициент конкордации

$$W = 12S/[t^2(m^3 - m) - t\sum_{s=1}^{t} T^{\langle s\rangle}], \tag{23.3}$$

где

$$T^{\langle s\rangle} = \sum_{k=1}^{N^{\langle s\rangle}} [(n_k^{\langle s\rangle})^3 - n_k^{\langle s\rangle}], \tag{23.4}$$

$n_k^{\langle s\rangle}$ — число совпадающих рангов с кратностью n в s-й индивидуальной ранжировке; k — порядковый номер группы связанных рангов; $N^{\langle s\rangle}$ — число групп связанных рангов в s-й ранжировке.

Если в ранжировке $R^{\langle s\rangle}$ связанных рангов нет, то $k = 0$, $n_k^{\langle s\rangle} = 0$, и выражение (23.3) превращается в формулу (23.2). При полностью совпадающих предпочтениях экспертов коэффициент конкордации Кендалла $W = 1$, при полностью различающихся — $W = 0$.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена характеризует сходство двух ранжировок R_q и R_p (неважно по отдельным экспертам q и p или по частным критериям K_q и K_p) m вариантов и задается выражением

$$\rho_{qp} = 1 - \frac{6S_{qp}}{m^3 - m}, \tag{23.5}$$

где $S_{qp} = \sum\limits_{i=1}^{m}(r_{iq} - r_{ip})^2$; r_{iq} и r_{ip} — ранги варианта A_i в ранжировках R_q и R_p соответственно.

При наличии связанных рангов коэффициент ранговой корреляции Спирмена определяется как

$$\rho_{qp} = \frac{m^3 - m - [6S_{qp} + 3(T_q + T_p)]}{[(m^3 - m - T_q)(m^3 - m - T_p)]^{1/2}}, \tag{23.6}$$

где T_q и T_p вычисляются по формуле (23.4).

Коэффициент корреляции Спирмена $\rho_{qp} = 1$ при одинаковых ранжировках R_q и R_p вариантов, когда $r_{iq} = r_{ip}$; $\rho_{qp} = -1$ при противоположных ранжировках и $\rho_{qp} = 0$ при линейно независимых ранжировках. Гипотеза о наличии или отсутствии корреляционной связи между ранжировками и статистическая значимость величины коэффициента ρ_{qp} проверяются с использованием статистики χ^2-распределения Стьюдента, имеющим $m - 1$ степеней свободы.

23.4. Представление многопризнаковых вариантов

Обсудим теперь, какие существуют возможности для представления вариантов, которые описываются многими числовыми и вербальными признаками.

Свойства варианта A_i, $i = 1, \ldots, m$, оцененного одним экспертом по многим количественным и качественным критериям $K_1, \ldots, K_n$, характеризуются вектором или кортежем $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, состоящим из экспертных оценок $x_{iq} = K_q(A_i)$, $q = 1, \ldots, n$, которому соответствует точка $\mathbf{x}_i$ в n-мерном пространстве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ шкал $X_q = \{x_q^{e_q}\}$, $e_q = 1, \ldots, g_q$, g_q — число градаций оценок на шкале критерия K_q.

Когда многокритериальную оценку дают t экспертов, варианту A_i соответствует уже группа из t векторов/кортежей $\mathbf{x}_i^{\langle s \rangle} = (x_{i1}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s \rangle})$ с компонентами $x_{iq}^{\langle s \rangle} = K_q^{\langle s \rangle}(A_i)$, которые являются индивидуальными оценками варианта A_i по критерию K_q, проставленными участником s, $s = 1, \ldots, t$. Вариант A_i представляется теперь в n-мерном пространстве признаков $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ не одной-единственной точкой $\mathbf{x}_i$, а целой группой («облаком») из t точек $\{\mathbf{x}_i^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \mathbf{x}_i^{\langle t \rangle}\}$, которые должны рассматриваться как единое целое. При этом индивидуальные оценки, данные экспертами, могут быть похожими и различающимися, что в свою очередь может приводить к несравнимости n-мерных векторов/кортежей $\mathbf{x}_i^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \mathbf{x}_i^{\langle t \rangle}$, характеризующих один и тот же вариант A_i.

Анализировать совокупность вариантов $A_1, \ldots, A_m$, каждый из которых изображается в пространстве признаков $X = X_1 \times \times \ldots \times X_n$ своим «облаком», состоящим, строго говоря, из t различных точек, достаточно сложно. Поэтому информацию, описывающую многопризнаковые варианты, тем или иным образом упрощают, нормализуют и агрегируют.

Один из возможных способов упрощения описания варианта A_i, $i = 1, \ldots, m$, представленного группой векторов

$$\mathbf{x}_i^{\langle 1 \rangle} = (x_{i1}^{\langle 1 \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle 1 \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle 1 \rangle}), \ldots,$$
$$\mathbf{x}_i^{\langle s \rangle} = (x_{i1}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s \rangle}), \ldots,$$
$$\mathbf{x}_i^{\langle t \rangle} = (x_{i1}^{\langle t \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle t \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle t \rangle})$$

с числовыми компонентами $x_{iq}^{\langle s \rangle} = K_q^{\langle s \rangle}(A_i)$, $q = 1, \ldots, n$, состоит в следующем. Набор t различных векторов $\mathbf{x}_i^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \mathbf{x}_i^{\langle t \rangle}$ заменяется единственным вектором $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$, который в пространстве признаков $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ будет теперь соответствовать варианту A_i. Компонентами вектора $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ служат усредненные по всем экспертам оценки $y_{iq} = (1/t) \sum_{s=1}^{t} x_{iq}^{\langle s \rangle}$, в предположении, что все эксперты одинаково компетентны и/или влиятельны, или средневзвешенные оценки $y_{iq} = (1/t)\sum_{s=1}^{t} k^{\langle s\rangle} x_{iq}^{\langle s\rangle}$, если эксперт s обладает компетенцией $k^{\langle s\rangle}$.

На многокритериальные экспертные оценки, выраженные векторами $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle} = (x_{i1}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s\rangle})$ с числовыми компонентами $x_{iq}^{\langle s\rangle} = K_q^{\langle s\rangle}(A_i)$, можно посмотреть и иначе. Запишем индивидуальные оценки эксперта s вариантов $A_1, \ldots, A_m$ как совокупность векторов

$$\mathbf{x}_1^{\langle s\rangle} = (x_{11}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{1q}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{1n}^{\langle s\rangle}), \ldots;$$
$$\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle} = (x_{i1}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s\rangle}), \ldots;$$
$$\mathbf{x}_m^{\langle s\rangle} = (x_{m1}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{mq}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{mn}^{\langle s\rangle}).$$

Оценки всех m вариантов $A_1, \ldots, A_m$, данные экспертом s, образуют матрицу индивидуальных оценок $\mathrm{X}^{\langle s\rangle} = (x_{iq}^{\langle s\rangle})_{m\times n}$, строки которой являются векторами оценок $\mathbf{x}_1^{\langle s\rangle}, \ldots, \mathbf{x}_i^{\langle s\rangle}, \ldots, \mathbf{x}_m^{\langle s\rangle}$, отображающими предпочтения этого эксперта.

Коллективное предпочтение экспертов, проставивших многокритериальные оценки вариантам $A_1, \ldots, A_m$ и имеющих разную компетентность, представляется матрицей «объекты-признаки» $\mathrm{X} = (x_{iq})_{m\times n}$, которая является линейной комбинацией $\mathrm{X} = k^{\langle 1\rangle} \cdot \mathrm{X}^{\langle 1\rangle} + \ldots + k^{\langle t\rangle} \cdot \mathrm{X}^{\langle t\rangle}$ t матриц индивидуальных оценок $\mathrm{X}^{\langle 1\rangle} = (x_{iq}^{\langle 1\rangle})_{m\times n}, \ldots, \mathrm{X}^{\langle t\rangle} = (x_{iq}^{\langle t\rangle})_{m\times n}$. Элемент $x_{iq} = k^{\langle 1\rangle} \cdot x_{iq}^{\langle 1\rangle} + \ldots + k^{\langle t\rangle} \cdot x_{iq}^{\langle t\rangle}$. Строки матриц X и $\mathrm{X}^{\langle s\rangle}$, $s = 1, \ldots, t$, соответствуют вариантам $A_1, \ldots, A_m$, столбцы — критериям оценок $K_1, \ldots, K_n$. Так как каждый вариант A_i оценивается всеми t экспертами по всем n критериям, то в матрицах экспертных оценок X и $\mathrm{X}^{\langle s\rangle}$ не будет незаполненных клеток.

Указанные способы агрегирования данных применимы лишь к числовой информации. Для нечисловых (вербальных) и смешанных данных нужно использовать другие подходы. Обратим внимание на одну особенность, которой обладают многокритериальные оценки, представленные векторами или кортежами. Так как разные эксперты r и s могут использовать при оценке варианта A_i одну и ту же градацию $x_q^{e_q}$ по шкале любого из критериев K_q, то векторы/кортежи $\mathbf{x}_i^{\langle r\rangle}$ и $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle}$, представляющие вариант A_i, будут иметь одинаковые компоненты $x_{iq}^{\langle r\rangle} = x_q^{e_q}$ и $x_{iq}^{\langle s\rangle} = x_q^{e_q}$. И таких совпадений оценок в принципе может быть много. Иными словами, любое значение $x_q^{e_q}$ может неоднократно встречаться в компонентах разных векторов/кортежей экспертных оценок.

Введем вместо декартова произведения шкал критериев $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ единую развернутую обобщенную шкалу (гипершкалу) оценок в виде множества

$$G = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \\ = \{x_1^1, \ldots, x_1^{g_1}; x_2^1, \ldots, x_2^{g_2}; \ldots; x_n^1, \ldots, x_n^{g_n}\},$$

которое объединяет все градации оценок на шкалах всех критериев. Представим каждую числовую или вербальную оценку $x_{iq}^{\langle s \rangle}$, проставленную экспертом s варианту A_i по критерию K_q, выражением

$$c_{A_i}^{\langle s \rangle}(x_q^1) \circ x_q^1, \ldots, c_{A_i}^{\langle s \rangle}(x_q^{g_q}) \circ x_q^{g_q},$$

где $c_{A_i}^{\langle s \rangle}(x_q^{e_q}) = 1$, если $x_{iq}^{\langle s \rangle} = x_q^{e_q}$, т. е. эксперт s использовал для оценки варианта A_i градацию $x_q^{e_q}$ шкалы X_q, и $c_{A_i}^{\langle s \rangle}(x_q^{e_q}) = 0$, если $x_{iq}^{\langle s \rangle} \neq x_q^{e_q}$. Знак $\circ$ указывает, что элемент $x_q^{e_q}$ нужно рассматривать совместно с числом $c_{A_i}^{\langle s \rangle}(x_q^{e_q})$.

Совокупность индивидуальных экспертных оценок варианта A_i, данных всеми t экспертами, можно тогда записать как следующий набор:

$$\{x_{i1}^{\langle 1 \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle 1 \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle 1 \rangle}\} = \{c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_1^1) \circ x_1^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_1^{g_1}) \circ x_1^{g_1}; \\ c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_q^1) \circ x_q^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_q^{g_q}) \circ x_q^{g_q}; \ldots; c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_n^1) \circ x_n^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle 1 \rangle}(x_n^{g_n}) \circ x_n^{g_n}\},$$

$$\{x_{i1}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle s \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s \rangle}\} = \{c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_1^1) \circ x_1^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_1^{g_1}) \circ x_1^{g_1} \ldots; \\ c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_q^1) \circ x_q^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_q^{g_q}) \circ x_q^{g_q}; \ldots; c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_n^1) \circ x_n^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_n^{g_n}) \circ x_n^{g_n}\},$$

$$\{x_{i1}^{\langle t \rangle}, \ldots, x_{iq}^{\langle t \rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle t \rangle}\} = \{c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_1^1) \circ x_1^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_1^{g_1}) \circ x_1^{g_1}; \ldots; \\ c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_q^1) \circ x_q^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_q^{g_q}) \circ x_q^{g_q}; \ldots; c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_n^1) \circ x_n^1, \ldots, c_{Ai}^{\langle t \rangle}(x_n^{g_n}) \circ x_n^{g_n}\}.$$

Просуммируем теперь по всем экспертам числа $c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_q^{e_q})$, стоящие в каждом столбце $x_q^{e_q}$ правых частей равенств. Целое число $c_{Ai}(x_q^{e_q}) = \sum\limits_{s=1}^{t} c_{Ai}^{\langle s \rangle}(x_q^{c_q})$ показывает, сколько всего экспертов проставило варианту A_i по критерию K_q оценку вида $x_q^{e_q}$ в предположении, что все эксперты одинаково компетентны и/или влиятельны. При разной компетентности экспертов число $c_{Ai}(x_q^{e_q})$

вычисляется как взвешенная сумма $c_{Ai}(x_q^{e_q}) = \sum_{s=1}^{t} k^{\langle s\rangle} c_{Ai}^{\langle s\rangle}(x_q)^{e_q}$, где показатель компетентности $k^{\langle s\rangle}$ эксперта s должен оцениваться целым числом.

Каждому варианту A_i можно теперь сопоставить выражение

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_i = \{&c_{Ai}(x_1^1)\circ x_1^1, \ldots, c_{Ai}(x_1^{g_1})\circ x_1^{g_1}; \ldots; \\ &c_{Ai}(x_q^1)\circ x_q^1, \ldots, c_{Ai}(x_q^{g_q})\circ x_q^{g_q}; \ldots; \\ &c_{Ai}(x_n^1)\circ x_n^1, \ldots, c_{Ai}(x_n^{g_n})\circ x_n^{g_n}\}, \end{aligned}$$

которое представляет собой мультимножество (или множество с повторяющимися элементами) над порождающим множеством G [70, 71, 72]. Здесь знаком $\circ$ обозначено, что в мультимножестве $\boldsymbol{A}_i$ присутствует $c_{Ai}(x_q^{e_q})$ одинаковых элементов $x_q^{e_q}$, $q = 1, \ldots, n$. Функция $c_{Ai}\colon G \to \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ называется функцией кратности, или функцией числа экземпляров мультимножества $\boldsymbol{A}_i$. Всего в мультимножестве $\boldsymbol{A}_i$ имеется n групп элементов по числу критериев, в каждую группу элементов входят оценки $x_q^{e_q}$, относящиеся только к одному из критериев K_q.

Пример 23.1. Поясним смысл мультимножества $\boldsymbol{A}_i$ на примере избрания главы государства. Будем рассматривать варианты $A_1, \ldots, A_m$ как кандидатов на выборах, критерии $K_1, \ldots, K_n$ — как разные избирательные округа, а $x_q^{e_q}$ — как отдельный избирательный участок внутри округа K_q, где происходит голосование избирателей. Тогда при равноправии всех голосующих $c_{Ai}(x_q^{e_q})$ будет числом голосов, поданных за кандидата A_i на избирательном участке $x_q^{e_q}$ по округу K_q, а мультимножество $\boldsymbol{A}_i$ покажет распределение общего числа голосов, поданных на всех избирательных участках по всем округам $K_1, \ldots, K_n$. ■

Коллективное предпочтение членов ГПР при использовании формализма мультимножеств для представления многопризнаковых вариантов удобно выражать с помощью матрицы $\mathrm{C} = (c_{if})_{m\times g}$, $c_{if} = c_{Ai}(x_f)$, $f = 1, \ldots, g$, $g = g_1 + \ldots + g_q + \ldots + g_n$ — общее число всех градаций оценок на шкалах всех критериев. Строки матрицы C соответствуют вариантам $A_1, \ldots, A_m$, столбцы — градациям оценок $x_f = x_q^{e_q}$, $e_q = 1, \ldots, g_q$, $q = 1, \ldots, n$. Матрица «объекты-признаки» C называется также информационной таблицей и часто используется в теории принятия решений, распознавании образов, анализе данных, других приложениях.

Пример 23.2. Пусть имеется три варианта A_1, A_2, A_3, которые оцениваются тремя экспертами по двум критериям K_1,

K_2, имеющим шкалы оценок $X_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}$ и $X_2 = \{x_2^1, x_2^2\}$. В декартовом произведении шкал критериев $X = X_1 \times X_2$ каждому из вариантов соответствуют следующие группы кортежей, составленных из индивидуальных оценок экспертов:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1^{\langle 1\rangle} = (x_1^1, x_2^2), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 1\rangle} = (x_1^2, x_2^1), \quad \mathbf{x}_3^{\langle 1\rangle} = (x_1^2, x_2^2),\\
&\mathbf{x}_1^{\langle 2\rangle} = (x_1^2, x_2^2), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 2\rangle} = (x_1^2, x_2^1), \quad \mathbf{x}_3^{\langle 2\rangle} = (x_1^1, x_2^2),\\
&\mathbf{x}_1^{\langle 3\rangle} = (x_1^2, x_2^1); \quad \mathbf{x}_2^{\langle 3\rangle} = (x_1^2, x_2^2); \quad \mathbf{x}_3^{\langle 3\rangle} = (x_1^3, x_2^2).
\end{aligned}$$

Единая развернутая обобщенная шкала оценок, объединяющая все градации оценок на шкалах всех критериев, есть множество

$$G = X_1 \cup X_2 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3; x_2^1, x_2^2\}.$$

Каждому из вариантов соответствуют следующие мультимножества над порождающим множеством G, составленные из индивидуальных оценок экспертов:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1 &= \{1\circ x_1^1, 2\circ x_1^2, 0\circ x_1^3; 1\circ x_2^1, 2\circ x_2^2\},\\
\boldsymbol{A}_2 &= \{0\circ x_1^1, 3\circ x_1^2, 0\circ x_1^3; 2\circ x_2^1, 1\circ x_2^2\},\\
\boldsymbol{A}_3 &= \{1\circ x_1^1, 1\circ x_1^2, 1\circ x_1^3; 0\circ x_2^1, 3\circ x_2^2\}.
\end{aligned}$$

Матрица «объекты-признаки» $\mathrm{C} = (c_{if})_{m\times g}$, $g = g_1 + g_2 = 5$, $m = 3$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы C соответствуют вариантам A_1, A_2, A_3, столбцы — всем градациям оценок по критериям K_1 и K_2. Элемент матрицы C показывает, сколько раз градация оценки $x_q^{e_q}$ была проставлена экспертами данному варианту.

На рис. 23.1 изображены кортежи $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle}$ в декартовом пространстве шкал критериев $X = X_1 \times X_2$ и мультимножества $\boldsymbol{A}_i$, представляющие варианты A_1, A_2, A_3.

Если критерии K_1 и K_2 имеют числовые шкалы, например $X_1 = \{1, 2, 3\}$ и $X_2 = \{10, 20\}$, то вариантам будут соответствовать такие группы векторов:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1^{\langle 1\rangle} = (1, 20), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 1\rangle} = (2, 10), \quad \mathbf{x}_3^{\langle 1\rangle} = (2, 20),\\
&\mathbf{x}_1^{\langle 2\rangle} = (2, 20), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 2\rangle} = (2, 10), \quad \mathbf{x}_3^{\langle 2\rangle} = (1, 20),\\
&\mathbf{x}_1^{\langle 3\rangle} = (2, 10); \quad \mathbf{x}_2^{\langle 3\rangle} = (2, 20); \quad \mathbf{x}_3^{\langle 3\rangle} = (3, 20).
\end{aligned}$$

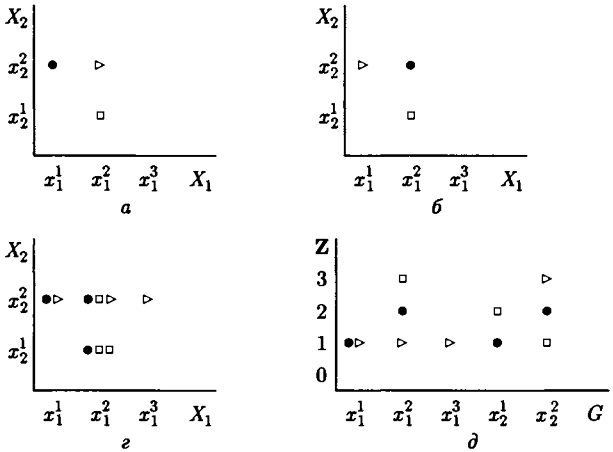


Рис. 23.1. Способы представления многопризнаковых вариантов:

а — кортежи оценок эксперта 1; *б* — кортежи оценок эксперта 2; *в* — кортежи оценок эксперта 3; *г* — кортежи оценок трех экспертов; *д* — мультимножества оценок трех экспертов; • — вариант A_1, □ — вариант A_2, ▷ — вариант A_3

Векторы оценок, усредненных по всем экспертам, равны соответственно:

$$\mathbf{y}_1 = (5/3, 50/3), \quad \mathbf{y}_2^{\langle 1\rangle} = (2, 40/3), \quad \mathbf{y}_3^{\langle 1\rangle} = (2, 20).$$

Группы векторов числовых оценок, данных каждым из экспертов, запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1^{\langle 1\rangle} = (1,20), \quad \mathbf{x}_1^{\langle 2\rangle} = (2,20), \quad \mathbf{x}_1^{\langle 3\rangle} = (2,10),\\
&\mathbf{x}_2^{\langle 1\rangle} = (2,10), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 2\rangle} = (2,10), \quad \mathbf{x}_2^{\langle 3\rangle} = (2,20),\\
&\mathbf{x}_3^{\langle 1\rangle} = (2,20); \quad \mathbf{x}_3^{\langle 2\rangle} = (1,20); \quad \mathbf{x}_3^{\langle 3\rangle} = (3,20).
\end{aligned}$$

Матрицы индивидуальных экспертных оценок $\mathrm{X}^{\langle s\rangle} = (x_{iq}^{\langle s\rangle})_{m\times n}$, $s = 1,2,3$, и матрица коллективной оценки $\mathrm{X} = (x_{iq})_{m\times n}$ имеют вид

$$\mathrm{X}^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 20\\ 2 & 10\\ 2 & 20 \end{pmatrix}, \mathrm{X}^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 20\\ 2 & 10\\ 1 & 20 \end{pmatrix}, \mathrm{X}^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 10\\ 2 & 20\\ 3 & 20 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 5 & 50\\ 6 & 40\\ 6 & 60 \end{pmatrix}.$$

Строки матриц $\mathrm{X}^{\langle s\rangle}$ и X соответствуют вариантам A_1, A_2, A_3, столбцы — критериям K_1 и K_2. Элемент матрицы $\mathrm{X}^{\langle s\rangle}$ показывает значение оценки $x_q^{e_q}$, проставленное экспертом s данному варианту, а элемент матрицы X — сумму всех экспертных оценок. ■

23.5. Метод усреднения индивидуальных оценок

Рассмотрим некоторые методы коллективного многокритериального анализа и выбора вариантов, которые проиллюстрируем на примере решения задачи упорядочения заданной совокупности проектов, оцененных несколькими экспертами по многим количественным и качественным критериям. Первый вариант в результирующей ранжировке принимается в качестве наиболее предпочтительного.

Один из простых методов коллективного упорядочения вариантов основан на вычислении групповой многокритериальной оценки путем усреднения индивидуальных оценок, выраженных баллами. Метод относится к первой группе методов рационального выбора и состоит из следующих этапов.

1. Каждый вариант из заданной совокупности $A_1, \dots, A_m$ оценивается каждым экспертом s $(s = 1, \dots, t)$ по всем критериям $K_1, \dots, K_n$, имеющим установленные шкалы оценок. Все количественные критерии имеют одинаковую балльную шкалу оценок, например от 0 до 10. Все качественные критерии имеют одинаковую вербальную шкалу оценок, например, с градациями: очень высокая (ов), высокая (в), средняя (с), низкая (н), очень низкая (он). Каждому варианту A_i ставится в соответствие группа из t кортежей $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle} = (x_{i1}^{\langle s\rangle}, \dots, x_{in}^{\langle s\rangle})$, где $x_{iq}^{\langle s\rangle} = K_q^{\langle s\rangle}(A_i)$ — оценка варианта A_i по критерию K_q, данная участником s.

2. Вербальные оценки по «положительным» качественным критериям, которые желательно максимизировать, преобразуются в числовые балльные оценки следующим образом: очень высокая — 9, высокая — 7, средняя — 5, низкая — 3, очень низкая — 1. Вербальные оценки по «отрицательным» качественным критериям, которые желательно минимизировать, преобразуются в числовые балльные оценки по следующему правилу: очень низкая — 9, низкая — 7, средняя — 5, высокая — 3, очень высокая — 1. Каждый вариант A_i представляется группой, состоящей из t векторов $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle} = (x_{i1}^{\langle s\rangle}, \dots, x_{in}^{\langle s\rangle})$, где $x_{iq}^{\langle s\rangle} = K_q^{\langle s\rangle}(A_i)$ — оценка варианта A_i, данная участником s по скорректированной шкале критерия K_q.

3. Если критерии $K_1, \dots, K_n$ имеют для эксперта s разную важность, то для каждого критерия K_q определяется его индивидуальный вес $w_q^{\langle s\rangle}$, используя, например, одну из процедур (см. разд. 8.3). Веса критериев обычно нормированы $\sum\limits_q w_q^{\langle s\rangle} = 1$.

4. Если эксперты обладают, по мнению суперЛПР, разной компетентностью и/или влиятельностью, то вычисляется показатель компетентности $k^{\langle s\rangle}$ эксперта s, например, по результатам опроса всех экспертов или итеративно по апостериорным результатам экспертизы, как в разд. 23.2. Показатели компетенции экспертов обычно нормированы $\sum\limits_s k^{\langle s\rangle} = 1$.

5. Для каждого варианта A_i вычисляется групповая многокритериальная экспертная оценка как взвешенная сумма оценок по всем экспертам и всем критериям:

$$u_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} k^{\langle s\rangle} x_i^{\langle s\rangle} = \sum_{s=1}^{t}\sum_{q=1}^{n} k^{\langle s\rangle} w_q^{\langle s\rangle} x_{iq}^{\langle s\rangle}, \tag{23.7}$$

где $x_{iq}^{\langle s\rangle} = K_q^{\langle s\rangle}(A_i)$ — индивидуальная оценка варианта A_i, данная экспертом s по скорректированному критерию K_q; $x_i^{\langle s\rangle} = \sum\limits_{q=1}^{n} w_q^{\langle s\rangle} x_{iq}^{\langle s\rangle}$ — взвешенная сумма индивидуальных многокритериальных оценок i-го варианта экспертом s.

6. Упорядочение вариантов по предпочтительности строится по убыванию значения групповой экспертной оценки $u_{agg}(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальной оценкой:

$$A^* \in \arg\max_{1\le i\le m} u_{agg}(A_i).$$

Пример 23.3. Рассмотрим задачу выбора лучшего проекта строительства предприятия, аналогичную описанной в примере 8.1. Пусть предложено девять проектов $A_1, \ldots, A_9$, которые предварительно оценены пятью экспертами по следующим 11 критериям.

K_1. Финансовая устойчивость предприятия.

K_2. Величина ожидаемой прибыли.

K_3. Объем выпуска продукции.

K_4. Количество дополнительных рабочих мест.

K_5. Обеспеченность предприятия сырьем.

K_6. Заинтересованность жителей в строительстве.

K_7. Обоснованность предлагаемого проекта.

K_8. Стоимость строительства предприятия.

K_9. Период окупаемости проекта.

K_{10}. Риск экологического ущерба от строительства.

K_{11}. Возможность неудачной реализации проекта.

Требуется упорядочить проекты $A_1, \ldots, A_9$ от лучшего к худшему.

Количественные критерии $K_1 - K_4$ имеют одинаковую балльную шкалу оценок в пределах от 0 до 10. Качественные критерии $K_5 - K_{11}$ имеют одинаковую вербальную шкалу оценок: ов, в, с, н, он. Лучшей по критериям $K_1 - K_7$ является более высокая оценка (оценки по этим критериям желательно максимизировать), а лучшей по критериям $K_8 - K_{11}$ является более низкая оценка (оценки желательно минимизировать).

Исходные оценки проектов $A_1 - A_9$ по критериям $K_1 - K_{11}$, полученные по результатам экспертизы, указаны в прил. П.1. Преобразованные экспертные оценки проектов, в которых вербальные значения заменены балльными, даны в прил. П.2. Экспертные оценки проектов, в которых скорректированы оценки по «отрицательным» критериям $K_8 - K_{11}$, приведены в прил. П.3. Такие же оценки проектов по этим критериям получаются, если вместо преобразованных оценок ввести новые оценки $z_{iq}^{\langle s \rangle} = 10 - x_{iq}^{\langle s \rangle}$, $q = 8 \div 11$.

Для простоты считаем, что все эксперты одинаково компетентны $k^{\langle s \rangle} = 1/5$, $s = 1 \div 5$, оценки всех экспертов равноценны, а индивидуальный вес каждого критерия для всех экспертов один и тот же: $w_q^{\langle s \rangle} = 1/11$, $q = 1 \div 11$.

Взвешенные суммы индивидуальных экспертных оценок первого проекта A_1 равны:

для эксперта 1

$$x_1^{\langle 1 \rangle} = (1/11)(5+6+4+6+5+5+7+7+5+5+5) = 60/11;$$

для эксперта 2

$$x_1^{\langle 2 \rangle} = (1/11)(6+2+4+3+7+5+5+5+5+3+3) = 48/11;$$

для эксперта 3

$$x_1^{\langle 3 \rangle} = (1/11)(6+6+4+8+7+9+5+3+7+5+7) = 67/11;$$

для эксперта 4

$$x_1^{\langle 4 \rangle} = (1/11)(5+2+4+7+5+9+5+5+5+5+5) = 57/11;$$

для эксперта 5

$$x_1^{\langle 5 \rangle} = (1/11)(3+8+4+3+7+7+7+7+7+5+3) = 61/11.$$

Групповая многокритериальная оценка первого проекта A_1, вычисленная по формуле (23.7), равна:

$$u_{agg}(A_1) = (1/55)(60+48+67+57+61) = 293/55 = 5{,}327.$$

Групповые многокритериальные оценки остальных проектов вычисляются аналогично:

$$u_{agg}(A_2) = 267/55 = 4{,}855; \quad u_{agg}(A_3) = 266/55 = 4{,}836;$$
$$u_{agg}(A_4) = 261/55 = 4{,}745; \quad u_{agg}(A_5) = 273/55 = 4{,}964;$$
$$u_{agg}(A_6) = 267/55 = 4{,}855; \quad u_{agg}(A_7) = 266/55 = 4{,}836;$$
$$u_{agg}(A_8) = 275/55 = 5{,}000; \quad u_{agg}(A_9) = 270/55 = 4{,}909.$$

Упорядочение проектов в соответствии с групповыми экспертными оценками имеет вид

$$A_1 \succ A_8 \succ A_5 \succ A_9 \succ A_2 \approx A_6 \succeq A_3 \approx A_7 \succ A_4.$$

Лучшим является проект A_1. Второй по предпочтительности — проект A_8, третий — проект A_9. Проекты A_2 и A_6, A_3 и A_7, имеющие одинаковые оценки, эквивалентны. Оценки проектов A_2 и A_6, A_3 и A_7 практически не отличаются, поэтому эти проекты можно считать условно эквивалентными друг другу. ■

Метод усреднения балльных экспертных оценок получил широкое применение. По своей идее данный метод аналогичен методу СМАРТ (см. разд. 14.5), а групповая оценка варианта идентична функции многомерной полезности. Метод приемлем для практического применения, если разброс индивидуальных оценок экспертов невелик. В реальных задачах это требование не всегда выполняется.

Нетрудно убедиться, что результаты вычисления групповых многокритериальных оценок проектов по формуле (23.7) не зависят от порядка суммирования (по экспертам или по критериям). Следовательно, метод усреднения балльных оценок удовлетворяет введенному выше принципу инвариантности агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений.

Если индивидуальные экспертные оценки $x_{iq}^{\langle s \rangle}$ представляют собой ранги $r_{iq}^{\langle s \rangle}$, присвоенные экспертом s варианту A_i, то групповая оценка u_i будет средневзвешенным рангом $r^{\text{сред}}(A_i)$ — аналогом ранговой функции агрегирования $r_{agg}(A_i)$ Гудмана — Марковица (см. разд. 22.4). Последний способ агрегирования индивидуальных предпочтений также достаточно часто используется на практике, однако может приводить к неудовлетворительным результатам.

23.6. Метод аддитивной свертки индивидуальных ценностей

Метод группового многокритериального упорядочения вариантов, основанный на вычислении значений агрегированной взвешенной функции многомерной ценности вариантов, относится к первой и второй группам методов рационального выбора. Метод включает следующие этапы.

1. Совпадает с шагом 1 метода усреднения индивидуальных оценок.

2. Вербальные оценки по качественным критериям преобразуются в числовые балльные оценки следующим образом: очень высокая — 9, высокая — 7, средняя — 5, низкая — 3, очень низкая — 1. Каждый вариант A_i представляется группой из t векторов $\mathbf{x}_i^{\langle s\rangle} = (x_{i1}^{\langle s\rangle}, \ldots, x_{in}^{\langle s\rangle})$, где $x_{iq}^{\langle s\rangle} = K_q^{\langle s\rangle}(A_i)$ — оценка варианта A_i, данная участником s по преобразованной шкале критерия K_q.

3, 4. Совпадают с шагами 3, 4 метода усреднения индивидуальных оценок.

5. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции индивидуальной ценности, заданной формулой (14.1) в виде аддитивной взвешенной свертки функций частных ценностей по критериям

$$v^{\langle s\rangle}(A_i) = \sum_{q=1}^{n} w_q^{\langle s\rangle} v_q^{\langle s\rangle}(A_i),$$

где функция частной ценности определяется как оценка варианта A_i по критерию K_q, данная экспертом s, $v_q^{\langle s\rangle}(A_i) = x_{iq}^{\langle s\rangle}$, или как экспертная оценка, усредненная по всем вариантам, $v_q^{\langle s\rangle}(A_i) = x_{iq}'^{\langle s\rangle} = x_{iq}^{\langle s\rangle} / \left[\sum_{i=1}^{m}(x_{iq}^{\langle s\rangle})\right]^{1/2}$. Значения соответствующих функций частных ценностей по «положительным» качественным критериям («доходы»), которые желательно максимизировать, считаются положительными, а по «отрицательным» качественным критериям («расходы»), которые желательно минимизировать, — отрицательными.

6. Для каждого варианта A_i вычисляется значение функции групповой ценности

$$v_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} k^{\langle s\rangle} v^{\langle s\rangle}(A_i) = \sum_{s=1}^{t}\sum_{q=1}^{n} k^{\langle s\rangle} w_q^{\langle s\rangle} v_q^{\langle s\rangle}(A_i), \qquad (23.8)$$

агрегирующей индивидуальные предпочтения экспертов с учетом их компетентности $k^{\langle s \rangle}$.

7. Упорядочение вариантов по предпочтительности строится по убыванию значения функции групповой ценности $v_{agg}(A_i)$. Лучший вариант A^* определяется максимальной ценностью

$$A^* \in \arg \max_{1 \le i \le m} v_{agg}(A_i).$$

Заметим, что индивидуальная ценность варианта $v^{\langle s \rangle}(A_i)$ аналогична баллу Борда $b^{\langle s \rangle}(A_i)$, а групповая ценность $v_{agg}(A_i)$ — функции Борда $f_B(A_i)$, введенным в разд. 21.3. Когда ценность варианта оценивается в баллах, рассматриваемый метод совпадает с методом упорядочения вариантов по усредненным индивидуальным экспертным оценкам.

Пример 23.4. Исходные и преобразованные многокритериальные экспертные оценки проектов строительства предприятия приведены в П.1 и П.2. Для простоты положим индивидуальные веса всех критериев одинаковыми для каждого эксперта и равными $w_q^{\langle s \rangle} = 1/11$.

Вычислим индивидуальные ценности проектов в случае, когда функция частной ценности задается как экспертная оценка $v_q^{\langle s \rangle}(A_i) = x_{iq}^{\langle s \rangle}$. Функции индивидуальной ценности первого проекта A_1 равны:

для эксперта 1

$$v^{\langle 1 \rangle}(A_1) = (1/11)[(5+6+4+6+5+5+7) - (3+5+5+5)] = 20/11;$$

для эксперта 2

$$v^{\langle 2 \rangle}(A_1) = (1/11)[(6+2+4+3+7+5+5) - (5+5+7+7)] = 8/11;$$

для эксперта 3

$$v^{\langle 3 \rangle}(A_1) = (1/11)[(6+6+4+8+7+9+5) - (7+3+5+3)] = 27/11;$$

для эксперта 4

$$v^{\langle 4 \rangle}(A_1) = (1/11)[(5+2+4+7+5+9+5) - (5+5+5+5)] = 17/11;$$

для эксперта 5

$$v^{\langle 5 \rangle}(A_1) = (1/11)[(3+8+4+3+7+7+7) - (3+3+5+7)] = 21/11.$$

При одинаковой компетентности всех экспертов $k^{\langle s\rangle} = 1/5$ получаем по формуле (23.8) для групповой ценности проекта A_1:

$$v_{agg}(A_1) = (1/55)(20+8+27+17+21) = 93/55 = 1{,}691.$$

Аналогичным образом вычисляются значения функции коллективной ценности для остальных проектов:

$$v_{agg}(A_2) = 67/55 = 1{,}218; \quad v_{agg}(A_3) = 66/55 = 1{,}200;$$
$$v_{agg}(A_4) = 61/55 = 1{,}109; \quad v_{agg}(A_5) = 73/55 = 1{,}327;$$
$$v_{agg}(A_6) = 67/55 = 1{,}218; \quad v_{agg}(A_7) = 66/55 = 1{,}200;$$
$$v_{agg}(A_8) = 75/55 = 1{,}364; \quad v_{agg}(A_9) = 70/55 = 1{,}273.$$

Упорядочение проектов в соответствии со значением функции групповой ценности v_{agg} имеет вид

$$A_1 \succ A_8 \succ A_5 \succ A_9 \succ A_2 \approx A_6 \succeq A_3 \approx A_7 \succ A_4.$$

Лучшим является проект A_1, вторым по предпочтительности — проект A_8. Проекты A_2 и A_6, A_3 и A_7 эквивалентны, так как имеют одинаковые оценки. Оценки проектов A_6 и A_3 практически не отличаются, поэтому эти проекты можно считать условно эквивалентными друг другу. Упорядочение проектов совпадает с полученным методом усреднения индивидуальных оценок. ■

Пример 23.5. Применим этот же метод для случая, когда функция частной ценности задается как экспертная оценка $v_q^{\langle s\rangle}(A_i) = x_{iq}^{\prime\langle s\rangle}$, усредненная по вариантам. Воспользовавшись прил. П.4, получим для первого проекта A_1 следующие значения функций индивидуальной и групповой ценности:

$$v^{\langle 1\rangle}(A_1) = (1/11)[(0{,}26+0{,}43+0{,}22+0{,}43+0{,}31+0{,}39+0{,}38)-$$
$$-(0{,}15+0{,}38+0{,}32+0{,}30)] = 1{,}27/11 = 0{,}115;$$
$$v^{\langle 2\rangle}(A_1) = (1/11)[(0{,}39+0{,}11+0{,}38+0{,}31+0{,}40+0{,}47+0{,}27)-$$
$$-(0{,}31+0{,}38+0{,}44+0{,}44)] = 0{,}76/11 = 0{,}069;$$
$$v^{\langle 3\rangle}(A_1) = (1/11)[(0{,}36+0{,}36+0{,}39+0{,}45+0{,}39+0{,}50+0{,}26)-$$
$$-(0{,}39+0{,}22+0{,}39+0{,}19)] = 1{,}52/11 = 0{,}138;$$
$$v^{\langle 4\rangle}(A_1) = (1/11)[(0{,}26+0{,}12+0{,}39+0{,}47+0{,}33+0{,}55+0{,}35)-$$
$$-(0{,}24+0{,}47+0{,}29+0{,}33)] = 1{,}14/11 = 1{,}04;$$

$$v^{\langle 5\rangle}(A_1) = (1/11)[(0{,}22 + 0{,}37 + 0{,}34 + 0{,}31 + 0{,}42 + 0{,}39 + 0{,}36) - $$
$$-(0{,}16 + 0{,}28 + 0{,}38 + 0{,}48)] = 1{,}11/11 = 1{,}01;$$
$$v_{agg}(A_1) = (1/55)(1{,}27 + 0{,}76 + 1{,}52 + 1{,}14 + 1{,}01) =$$
$$= 5{,}70/55 = 0{,}104.$$

Аналогичным образом вычисляются значения функции групповой ценности для остальных проектов:

$$v_{agg}(A_2) = 4{,}55/55 = 0{,}083; \quad v_{agg}(A_3) = 3{,}61/55 = 0{,}066;$$
$$v_{agg}(A_4) = 3{,}78/55 = 0{,}069; \quad v_{agg}(A_5) = 4{,}43/55 = 0{,}081;$$
$$v_{agg}(A_6) = 3{,}92/55 = 0{,}071; \quad v_{agg}(A_7) = 4{,}02/55 = 0{,}073;$$
$$v_{agg}(A_8) = 4{,}71/55 = 0{,}086; \quad v_{agg}(A_9) = 4{,}51/55 = 0{,}082.$$

Упорядочение проектов в соответствии со значением функции групповой ценности имеет вид

$$A_1 \succ A_8 \succ A_2 \succeq A_9 \succeq A_5 \succ A_7 \succeq A_6 \succ A_4 \succ A_3.$$

Лучшим является проект A_1, вторым по предпочтительности — проект A_8. Проекты A_2, A_9 и A_5, A_7 и A_6 можно считать условно эквивалентными, если пренебречь незначительными различиями в значениях функции ценности. ■

Как следует из этих результатов, ранжировки проектов, полученные путем агрегирования исходных $x_{iq}^{\langle s\rangle}$ и усредненных $x_{iq}'^{\langle s\rangle}$ индивидуальных экспертных оценок, не совпадают друг с другом. Таким образом, любые недостаточно обоснованные преобразования экспертной информации, которая характеризует свойства вариантов и предпочтения членов ГПР, оказывают заметное влияние на итоговый результат и могут его существенно изменить.

Упорядочение вариантов по их групповой ценности, вычисляемой по формуле (23.8), как и упорядочение по индивидуальным экспертным оценкам, усредненным по всем вариантам, удовлетворяет принципу инвариантности агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений.

23.7. Метод групповой аналитической иерархии

Иерархический подход к многокритериальному выбору вариантов, рассмотренный в гл. 16, применим и в коллективном принятии решений, например для многоаспектного анализа конфликтных ситуаций, при проведении переговоров и т. п.

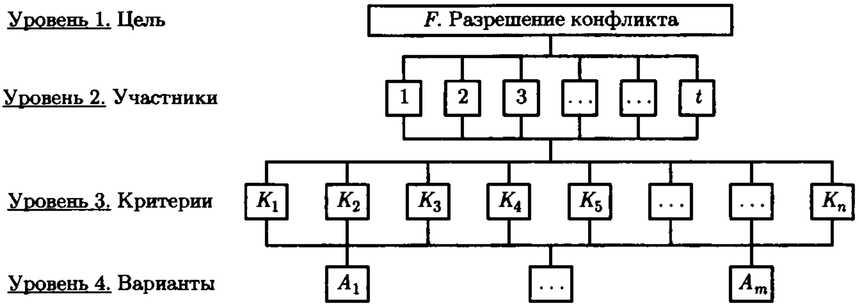


Рис. 23.2. Иерархическая структура проблемы группового выбора

Метод групповой аналитической иерархии, позволяющий упорядочивать варианты по многим критериям, и развивающий метод аналитической иерархии разработаны Т. Саати и Дж. Александером (США, 1981). Метод основан на вычислении агрегированной общей ценности вариантов, которая представлена взвешенными средними арифметическими значениями показателей, и входит во вторую группу методов рационального выбора.

Иерархическая структура проблемы группового выбора представлена на рис. 23.2. Верхний уровень иерархии в модели проблемной ситуации характеризует стоящую перед участниками (членами ГПР) основную цель F. Средние уровни иерархии включают в себя участников, обозначенных номерами $1, \ldots, t$, критерии оценки вариантов $K_1, \ldots, K_n$. Нижний уровень иерархии представляет альтернативные варианты действий, решения, сценарии поведения $A_1, \ldots, A_m$. Основные этапы процедуры группового выбора лучшего варианта те же, что и в случае индивидуального выбора.

Для измерения показателей сравнительной важности элементов иерархической структуры используется абсолютная девятибалльная шкала (см. табл. 16.1). Участники оцениваются («взвешиваются») по степени их влиятельности, критерии — по их относительной важности. Постулируется, что влиятельность участников является аддитивной величиной, которая распределена по всем уровням иерархии между участниками, критериями, вариантами.

Коллективная оценка общей ценности варианта A_i задается выражением

$$v_{agg}(A_i) = \sum_{s=1}^{t} k^{\langle s\rangle} v^{\langle s\rangle}(A_i) = \sum_{s=1}^{t}\sum_{q=1}^{n} k^{\langle s\rangle} w_q^{\langle s\rangle} v_q^{\langle s\rangle}(A_i). \qquad (23.9)$$

Здесь $v_q^{\langle s\rangle}(A_i)$ — индивидуальная локальная ценность варианта A_i, $i = 1, \ldots, m$, по критерию K_q для участника s, вычисляемая по формуле (16.2); $w_q^{\langle s\rangle}$ — индивидуальная относительная важность (вес) критерия K_q для участника s, вычисляемая по формуле (16.3); t — число участников; n — число критериев; m — число сравниваемых вариантов. Степень влиятельности участника s либо определяется выражением, аналогичным приведенному в гл. 16,

$$k^{\langle s\rangle} = b^{\langle s\rangle} / \sum_{r=1}^{t} b^{\langle r\rangle}, \quad b^{\langle s\rangle} = \left(\prod_{r=1}^{t} a_0^{sr}\right)^{1/t},$$

где a_0^{sr} — элемент A_0 матрицы парных сравнений участников, либо вычисляется по формуле (23.1).

Коллективная общая ценность характеризует приоритетность варианта с учетом влиятельности участников. Варианты упорядочиваются по вычисленным значениям общих ценностей $v_{agg}(A_i)$, и выделяется лучший вариант по максимальному значению общей ценности.

Метод групповой мультипликативной аналитической иерархии, разработанный Ф. Лутсма и Дж. Барзилай (1977), основан на агрегировании средних геометрических значений показателей для определения коллективной общей ценности варианта в иерархической структуре «цель — участники — критерии — варианты». Метод также относится ко второй группе методов рационального коллективного выбора и сохраняет все особенности метода (см. разд. 16.7), предназначенного для одного ЛПР.

Индивидуальная локальная ценность варианта A_i по критерию K_q и вес критерия K_q для участника s вычисляются по формулам (16.10) и (16.11):

$$v^{q\langle s\rangle}(A_i) = \left(\prod_{j=1}^{m} \exp\{\gamma^v g_{ij}^{q\langle s\rangle}\}\right)^{1/m} = \exp\{(\gamma^v/m) \sum_{j=1}^{m} g_{ij}^{q\langle s\rangle}\},$$

$$w_q^{\langle s\rangle} = \left(\prod_{l=1}^{n} \exp\{\gamma^w g_{ql}^{\langle s\rangle}\}\right)^{1/n} = \exp\{(\gamma^w/n) \sum_{l=1}^{n} g_{ql}^{\langle s\rangle}\},$$

где $g_{ij}^{q\langle s\rangle}$ — градация сравнительной предпочтительности i-го и j-го вариантов по критерию K_q для участника s; $g_{ql}^{\langle s\rangle}$ — градация сравнительной важности q-го и l-го критериев для участника s, которые берутся из табл. 16.7; γ^v и γ^w — параметры шкал критериев и весов, равные, как и ранее, $\gamma^v = \ln 2$, $\gamma^w = \ln 2/2$.

Степень влиятельности участников предлагается оценивать подобно тому, как это делается с весами критериев, и рассчитывать показатель влиятельности члена s ГПР по формуле:

$$k^{\langle s\rangle} = \left(\prod_{r=1}^{t} \exp\{\gamma^k g_0^{sr}\}\right)^{1/t} = \exp\{(\gamma^k/t)\sum_{r=1}^{t} g_0^{sr}\},$$

где g_0^{sr} — градация сравнительной предпочтительности участника s по сравнению с участником r, измеренная по шкале из табл. 16.7; γ^k — параметр шкалы. Рекомендуется, как и в случае шкалы весов, полагать $\gamma^k = \ln 2/2$. Аналогичным образом можно оценивать и влиятельность коалиций.

Идентичность методологического подхода к оценке сравнительной влиятельности участников и весов критериев аргументируется авторами метода тем, что обычно отбор членов ГПР и критериев оценки вариантов осуществляет некоторый руководитель высокого ранга (суперЛПР), ответственный за решение проблемы.

Коллективная оценка общей ценности варианта агрегируется по всем критериям и всем участникам и представляется как

$$v_{agg}(A_i) = \prod_{s=1}^{t}[v^{\langle s\rangle}(A_i)]^{k^{\langle s\rangle}} = \prod_{s=1}^{t}\prod_{q=1}^{n}[v^{q\langle s\rangle}(A_i)]^{w_q^{\langle s\rangle}k^{\langle s\rangle}}. \qquad (23.10)$$

Все варианты упорядочиваются по предпочтительности в соответствии со значениями их агрегированных ценностей $v_{agg}(A_i)$.

Иерархические методы группового принятия решения допускают определенную несогласованность предпочтений как отдельного ЛПР, так нескольких ЛПР и/или экспертов, независимо оценивающих элементы иерархической структуры. Объединение их оценок производится путем арифметического или геометрического усреднения индивидуальных суждений.

Как следует из выражений (23.9) и (23.10), очередность усреднения матриц парных сравнений элементов иерархической структуры — сначала по участникам, а потом по критериям или наоборот — не влияет на характер зависимости общей ценности от степени влиятельности участников и весов критериев. Этот вывод вытекает из арифметического и геометрического способов усреднения всех показателей. Таким образом, итоговое упорядочение вариантов не зависит от процедуры агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений членов ГПР.

А значит, метод групповой аналитической иерархии удовлетворяет условию рациональности коллективного выбора.

23.8. Метод агрегирования парных сравнений

Метод РАМПА (Ранжирование по Агрегированным Многокритериальным Парным сравнениям Альтернатив) предназначен для коллективного упорядочения вариантов (А. Б. Петровский и др., СССР, 1981). Метод основан на агрегировании индивидуальных предпочтений экспертов, которые представлены парными сравнениями вариантов по многим критериям. В методе предусмотрена проверка и оценка согласованности экспертных суждений на всех этапах построения коллективного решения. Метод РАМПА относится к третьей группе методов рационального выбора и включает следующие основные этапы.

1. Все варианты из заданной совокупности $A_1, \ldots, A_m$ сравниваются попарно друг с другом каждым экспертом s ($s=1, \ldots, t$) по каждому частному критерию $K_1, \ldots, K_n$ в отдельности. Результаты парных сравнений вариантов экспертом s по критерию K_q заносятся в матрицу индивидуальных парных сравнений $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle s\rangle} = (a_{[q]ij}^{\langle s\rangle})_{m\times n}$, элементы которой $a_{[q]ij}^{\langle s\rangle} = 2$, если $A_i \succ A_j$; $a_{[q]ij}^{\langle s\rangle} = 1$, если $A_i \approx A_j$ или эксперт затрудняется сделать сравнение этих вариантов; $a_{[q]ij}^{\langle s\rangle} = 0$, если $A_i \prec A_j$.

2. Матрицы $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle s\rangle}$ индивидуальных парных сравнений проверяются на транзитивность. Наличие нетранзитивных триад оценок свидетельствует о противоречивости суждений соответствующего эксперта. Этот эксперт либо опрашивается повторно, либо его оценки исключаются из дальнейшего рассмотрения.

3. По каждому частному критерию K_q для каждого эксперта s строится индивидуальное упорядочение $Z_q^{\langle s\rangle}$ вариантов по убыванию значений строчных сумм $a_{[q]i}^{\langle s\rangle} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{[q]ij}^{\langle s\rangle}$, вычисленных для каждой матрицы $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle s\rangle}$ индивидуальных парных сравнений.

4. Проверяется нуль-гипотеза о согласованности индивидуальных предпочтений экспертов. Для оценки близости индивидуальных упорядочений $Z_q^{\langle s\rangle}$ по каждому q-му частному критерию вычисляется дисперсионный коэффициент конкордации Кендалла W по формуле (23.2) или (23.3). Значение W сравнивается с χ^2-распределением Стьюдента, имеющим $m-1$ степеней

свободы. Если выполняется неравенство $Wt(m-1) \geq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$ при выбранном уровне значимости, например $\alpha = 0{,}05$, то коэффициент конкордации W значимо отличается от нуля и, следовательно, индивидуальные предпочтения экспертов по критерию K_q различаются мало.

5. Если эксперты обладают, по мнению суперЛПР, разной компетентностью и/или влиятельностью, то вычисляется показатель компетентности $k^{\langle s \rangle}$ эксперта s, например по результатам опроса всех экспертов или итеративно по апостериорным результатам экспертизы (см. разд. 23.2). Показатели компетенции экспертов обычно нормированы $\sum\limits_{s} k^{\langle s \rangle} = 1$.

6. По каждому критерию K_q строится коллективное упорядочение Z_q вариантов по убыванию значений взвешенных строчных сумм $a_{[q]i} = \sum\limits_{s=1}^{t} k^{\langle s \rangle} a^{\langle s \rangle}_{[q]i}$, вычисленных для каждой матрицы $\mathrm{A}_{[q]}$ агрегированных парных сравнений, которая получается путем сложения всех взвешенных матриц индивидуальных парных сравнений: $\mathrm{A}_{[q]} = k^{\langle 1 \rangle} \cdot \mathrm{A}^{\langle 1 \rangle}_{[q]} + \ldots + k^{\langle t \rangle} \cdot \mathrm{A}^{\langle t \rangle}_{[q]}$.

7. Проверяется нуль-гипотеза о согласованности коллективного предпочтения экспертов с помощью оценки близости коллективных упорядочений Z_q по каждому критерию K_q аналогично этапу 4.

8. Если критерии $K_1, \ldots, K_n$ имеют для суперЛПР разную важность, то для каждого критерия K_q определяется его вес w_q, используя одну из процедур, описанных в разд. 8.3. Веса критериев обычно нормированы $\sum\limits_{q} w_q = 1$.

9. Строится итоговое коллективное упорядочение Z вариантов по предпочтительности как объединение коллективных упорядочений по всем частным критериям $K_1, \ldots, K_n$. Это можно сделать различными способами. Например, упорядочить варианты по их средневзвешенным рангам (как в разд. 23.5). Или упорядочить варианты по значениям взвешенных строчных сумм $a_i = \sum\limits_{q=1}^{n} w_q a_{[q]i}$, вычисленных для агрегированной матрицы А парных сравнений, которая получается в результате сложения всех взвешенных матриц агрегированных парных сравнений по частным критериям: $\mathrm{A} = w_1 \cdot \mathrm{A}_{[1]} + \ldots + w_n \cdot \mathrm{A}_{[n]}$. Лучший вариант A^* занимает в итоговом упорядочении первое место.

10. Проверяется нуль-гипотеза об эквивалентности всех вариантов. По каждому частному критерию K_q вычисляется стати-

стика $H = (4/tm) \sum_{i=1}^{m} (a_i^q)^2 - (m-1)^2$, значение которой сравнивается с χ^2-распределением Стьюдента, имеющим $m-1$ степеней свободы. Если выполняется неравенство $H \geq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$ при выбранном уровне значимости, например $\alpha = 0{,}05$, то статистика H значимо отличается от нуля и, следовательно, варианты считаются различающимися.

11. Если этапы 7 и 9 не дают нужного результата, то матрицы $\mathrm{A}_{[q]}$ агрегированных парных сравнений по частным критериям проверяются на транзитивность. При выявлении нетранзитивности триад оценок матрицы $\mathrm{A}_{[q]}$ корректируются, полагая равными нетранзитивные элементы матрицы.

12. По каждому частному критерию K_q строятся скорректированные коллективные упорядочения Z_q вариантов и проверяется согласованность коллективного предпочтения аналогично этапам 6—9.

13. Проверяется нуль-гипотеза о наличии корреляционных связей между коллективными упорядочениями по разным частным критериям. Для каждой пары критериев K_q и K_p вычисляется коэффициент ранговой корреляции Спирмена ρ_{qp} упорядочений Z_q и Z_p по формуле (23.5) или (23.6), значение которого сравнивается с χ^2-распределением Стьюдента, имеющим $m-1$ степеней свободы. Если выполняется неравенство $\rho_{qp} \geq \chi^2_{1-\alpha}(m-1)$ при выбранном уровне значимости, например $\alpha = 0{,}05$, то коэффициент ранговой корреляции ρ_{qp} значимо отличается от нуля и, следовательно, упорядочения Z_q и Z_p мало зависимы.

Заметим, что упорядочение вариантов по убыванию значений строчных сумм матриц парных сравнений аналогично применяемому в процедуре Борда упорядочению по баллам Борда и значению функции Борда (см. разд. 21.3).

Пример 23.6. Смоделируем процедуру индивидуальных парных сравнений проектов строительства предприятия $A_1, \ldots, A_9$ по критериям $K_1, \ldots, K_{11}$, воспользовавшись исходными экспертными оценками проектов $x_{iq}^{\langle s\rangle}$, приведенными в прил. П.1. Примем во внимание, что оценки по критериям упорядочены от более предпочтительных к менее предпочтительным следующим образом: для критериев $K_1 - K_4$ как $x_q^{10} \succ x_q^9 \succ \ldots \succ x_q^0$, для критериев $K_5 - K_7$ как $x_q^{\text{ов}} \succ x_q^{\text{в}} \succ x_q^{\text{с}} \succ x_q^{\text{н}} \succ x_q^{\text{он}}$, для критериев $K_8 - K_{11}$ как $x_q^{\text{он}} \succ x_q^{\text{н}} \succ x_q^{\text{с}} \succ x_q^{\text{в}} \succ x_q^{\text{ов}}$. Будем также считать, что все эксперты одинаково компетентны $k^{\langle s\rangle} = 1$, а вес каждого критерия для всех экспертов один и тот же: $w_q = 1$.

Для примера в табл. 23.1 представлены матрицы $\mathrm{A}_{[1]}^{\langle s\rangle}$ индивидуальных парных сравнений для экспертов $s = 1, 2, 3, 4, 5$ и агрегированная матрица $\mathrm{A}_{[1]}$ парных сравнений проектов по критерию K_1. В правых столбцах матриц $\mathrm{A}_{[1]}^{\langle 1\rangle}$ – $\mathrm{A}_{[1]}^{\langle 5\rangle}$ и $\mathrm{A}_{[1]}$ указаны значения соответствующих строчных сумм $a_{[1]i}^{\langle s\rangle}$ и $a_{[1]i}$. Отметим, что значения строчных сумм агрегированной матрицы парных сравнений A_1 по критерию K_1 можно вычислить без построения самой матрицы.

Индивидуальные упорядочения проектов по критерию K_1, построенные по значениям строчных сумм $a_{[1]i}^{\langle s\rangle}$, выглядят следующим образом:

$$Z_1^{\langle 1\rangle} \Leftrightarrow A_4 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_1 \approx A_3 \approx A_7 \approx A_8 \succ A_5 \approx A_9,$$
$$Z_1^{\langle 2\rangle} \Leftrightarrow A_3 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_2 \approx A_7 \approx A_9 \succ A_8 \succ A_4 \approx A_6,$$
$$Z_1^{\langle 3\rangle} \Leftrightarrow A_8 \succ A_3 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_2 \approx A_7 \succ A_9 \succ A_4 \approx A_6,$$
$$Z_1^{\langle 4\rangle} \Leftrightarrow A_4 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_1 \approx A_3 \approx A_5 \approx A_7 \succ A_8 \approx A_9,$$
$$Z_1^{\langle 5\rangle} \Leftrightarrow A_4 \succ A_6 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \approx A_5 \approx A_7 \succ A_8 \succ A_9.$$

Таблица 23.1

Матрицы индивидуальных парных сравнений и агрегированная матрица парных сравнений проектов по критерию K_1

Эксперт 1

$\mathrm{A}_{[1]}^{\langle 1\rangle}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a_{[1]i}^{\langle 1\rangle}$
A_1	1	0	1	0	2	0	1	1	2	8
A_2	2	1	2	0	2	0	2	2	2	13
A_3	1	0	1	0	2	0	1	1	2	8
A_4	2	2	2	1	2	2	2	2	2	17
A_5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2
A_6	2	2	2	0	2	1	2	2	2	15
A_7	1	0	1	0	2	0	1	1	2	8
A_8	1	0	1	0	2	0	1	1	2	8
A_9	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2

Эксперт 2

$A_{[1]}^{\langle 2\rangle}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a_{[1]i}^{\langle 2\rangle}$
A_1	1	2	0	2	0	2	2	2	2	13
A_2	0	1	0	2	0	2	1	2	1	9
A_3	2	2	1	2	1	2	2	2	2	16
A_4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
A_5	2	2	1	2	1	2	2	2	2	16
A_6	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
A_7	0	1	0	2	0	2	1	2	1	9
A_8	0	0	0	2	0	2	0	1	0	5
A_9	0	1	0	2	0	2	1	2	1	9

Эксперт 3

$A_{[1]}^{\langle 3\rangle}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a_{[1]i}^{\langle 3\rangle}$
A_1	1	2	0	2	0	2	2	0	2	11
A_2	0	1	0	2	0	2	1	0	2	8
A_3	2	2	1	2	1	2	2	0	2	14
A_4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
A_5	2	2	1	2	1	2	2	0	2	14
A_6	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
A_7	0	1	0	2	0	2	1	0	2	8
A_8	2	2	2	2	2	2	2	1	2	17
A_9	0	0	0	2	0	2	0	0	1	5

Эксперт 4

$A_{[1]}^{\langle 4\rangle}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a_{[1]i}^{\langle 4\rangle}$
A_1	1	0	1	0	1	0	1	2	2	8
A_2	2	1	2	0	2	0	2	2	2	13
A_3	1	0	1	0	1	0	1	2	2	8
A_4	2	2	2	1	2	2	2	2	2	17
A_5	1	0	1	0	1	0	1	2	2	8
A_6	2	2	2	0	2	1	2	2	2	15
A_7	1	0	1	0	1	0	1	2	2	8
A_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
A_9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2

Эксперт 5

$A^{\langle 5\rangle}_{[1]}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a^{\langle 5\rangle}_{[1]i}$
A_1	1	0	2	0	2	0	2	2	2	11
A_2	2	1	2	0	2	0	2	2	2	13
A_3	0	0	1	0	1	0	1	2	2	7
A_4	2	2	2	1	2	2	2	2	2	17
A_5	0	0	1	0	1	0	1	2	2	7
A_6	2	2	2	0	2	1	2	2	2	15
A_7	0	0	1	0	1	0	1	2	2	7
A_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
A_9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2

Агрегированные оценки

$A_{[1]}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	$a_{[1]i}$
A_1	5	4	4	4	5	4	8	7	10	51
A_2	6	5	6	4	6	4	8	8	9	56
A_3	6	4	5	4	6	4	7	7	10	53
A_4	6	6	6	5	6	8	6	6	6	55
A_5	5	4	4	4	5	4	6	6	9	47
A_6	6	6	6	2	6	5	6	6	6	49
A_7	2	2	3	4	4	4	5	7	9	40
A_8	3	2	3	4	4	4	3	5	6	34
A_9	0	1	0	4	1	4	1	4	5	20

Коллективное упорядочение проектов по критерию K_1, построенное по значениям строчных сумм $a_{[1]i}$ и агрегирующее индивидуальные упорядочения экспертов, имеет вид

$$Z_1 \Leftrightarrow A_2 \succeq A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_6 \succ A_5 \succ A_7 \succ A_8 \succ A_2.$$

Лучшими по критерию K_1 являются проекты A_2 и A_4, оценки которых практически не отличаются. Поэтому эти проекты можно считать условно эквивалентными.

Аналогичным образом по агрегированным матрицам парных сравнений $A_{[q]}$, $q = 2 \div 11$ строятся коллективные упорядочения проектов по критериям $K_2 - K_{11}$:

$$Z_2 \Leftrightarrow A_6 \succeq A_7 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \approx A_8 \succeq A_4 \succ A_9 \succ A_3,$$

Таблица 23.2

Результирующая матрица парных сравнений проектов

A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	a_i
A_1	55	60	66	69	66	68	65	62	63	574
A_2	50	55	56	58	55	54	59	53	51	491
A_3	44	54	55	56	55	55	55	50	53	477
A_4	41	52	52	55	53	55	54	50	46	458
A_5	44	55	55	57	55	58	56	56	57	493
A_6	42	56	55	55	52	55	51	51	48	465
A_7	45	51	55	58	54	57	55	56	58	489
A_8	48	57	60	60	54	59	52	55	57	502
A_9	47	59	57	64	53	62	52	53	55	502

$$Z_3 \Leftrightarrow A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_8 \succ A_7 \succ A_3 \succ A_5 \approx A_6 \succ A_9,$$

$$Z_4 \Leftrightarrow A_1 \succ A_5 \succeq A_9 \succ A_8 \succ A_2 \succ A_6 \succ A_4 \approx A_7 \succ A_3,$$

$$Z_5 \Leftrightarrow A_1 \approx A_8 \approx A_9 \succ A_7 \succ A_3 \succeq A_5 \succeq A_6 \succ A_4 \succ A_2,$$

$$Z_6 \Leftrightarrow A_1 \succ A_3 \succ A_8 \approx A_9 \succ A_7 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_6 \succeq A_4,$$

$$Z_7 \Leftrightarrow A_3 \succ A_1 \approx A_5 \approx A_7 \approx A_8 \succ A_2 \succ A_9 \succ A_6 \succ A_4,$$

$$Z_8 \Leftrightarrow A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_6 \approx A_8 \succeq A_4 \succ A_7 \succ A_9,$$

$$Z_9 \Leftrightarrow A_9 \succ A_6 \succeq A_7 \succ A_2 \succ A_4 \approx A_5 \succeq A_1 \succ A_3 \succ A_8,$$

$$Z_{10} \Leftrightarrow A_8 \succ A_5 \succeq A_3 \approx A_9 \succ A_6 \succeq A_4 \succ A_1 \approx A_2 \succ A_7,$$

$$Z_{11} \Leftrightarrow A_7 \approx A_9 \succ A_3 \approx A_4 \succeq A_5 \succ A_2 \succ A_6 \succeq A_1 \succ A_8.$$

Результирующая матрица А, объединяющая результаты коллективных парных сравнений проектов по всем критериям, представлена в табл. 23.2. В правом столбце матрицы указаны значения соответствующих строчных сумм a_i. Итоговое коллективное упорядочение проектов, построенное по значениям строчных сумм результирующей матрицы А, имеет вид

$$Z \Leftrightarrow A_1 \succ A_8 \approx A_9 \succ A_5 \succeq A_2 \succeq A_7 \succ A_3 \succ A_6 \succ A_4.$$

Лучшим по всем критериям является проект A_1, вторыми по предпочтительности — проекты A_8 и A_9. Оценки проектов A_5, A_2 и A_7 практически одинаковы, поэтому эти проекты можно считать условно эквивалентными друг другу. Итоговое упорядочение проектов не очень сильно отличается от упорядочений проектов, полученных с помощью методов усреднения экспертных оценок (см. пример 23.3) и вычисления агрегированной ценности (см. пример 23.4). ■

При решении практических задач в результате сложения всех матриц индивидуальных парных сравнений $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle 1\rangle}+\ldots+\mathrm{A}_{[q]}^{\langle t\rangle}=\mathrm{A}_{[q]}$ нередко происходило своеобразное «поглощение» нетранзитивных триад оценок, присутствующих в разных матрицах $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle s\rangle}$, другими транзитивными триадами. Поэтому в матрицах агрегированных парных сравнений $\mathrm{A}_{[q]}$ фактически оказывалось значительно меньшее число нетранзитивных триад оценок, чем в исходных матрицах $\mathrm{A}_{[q]}^{\langle s\rangle}$. Обычно исключение нетранзитивных оценок одного или двух экспертов вело к улучшению статистических характеристик результата, однако существенно не влияло на коллективные упорядочения Z_q, порождаемые матрицами агрегированных парных сравнений $\mathrm{A}_{[q]}$.

Если итоговое коллективное упорядочение Z вариантов строится по результирующей матрице парных сравнений А, которая получается как результат сложения взвешенных матриц индивидуальных и агрегированных парных сравнений по частным критериям, то нетрудно проверить, что значения элементов матрицы А не зависят от порядка агрегирования (по экспертам или по критериям). Таким образом, метод РАМПА удовлетворяет принципу инвариантности агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений.

23.9. Метод оценки близости к опорной точке с усредненными оценками

Метод ТОПСИС (TOPSIS — Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution, способ для предпочтения упорядочений по сходству с идеальным решением), предназначенный для коллективного ранжирования вариантов, разработан К. Хванг и К. Юн (США, 1981). Метод основан на учете относительной близости вариантов к опорной точке, которая определяется индивидуальными многокритериальными экспертными оценками, усредненными по всем вариантам и всем экспертам. Метод входит в третью группу методов рационального выбора.

Основные этапы метода ТОПСИС состоят в следующем.

1, 2. Совпадают с шагами 1, 2 метода аддитивной свертки индивидуальных ценностей.

3. Для каждого варианта A_i вычисляются экспертные оценки по каждому критерию K_q, усредненные по всем вариантам

$$x'^{\langle s\rangle}_{iq} = x^{\langle s\rangle}_{iq} / \left[\sum_{i=1}^{m}(x^{\langle x\rangle}_{iq})\right]^{1/2},$$

и всем экспертам

$$y_{iq} = (1/t)\sum_{s=1}^{t} x'^{\langle s\rangle}_{iq} = (1/t)\sum_{s=1}^{t} x^{\langle s\rangle}_{iq} / \left[\sum_{i=1}^{m}(x^{\langle s\rangle}_{iq})\right]^{1/2}$$

в предположении, что все эксперты одинаково компетентны и/или влиятельны. Каждому варианту A_i ставится в соответствие вектор оценок $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$. Совокупность всех агрегированных оценок вариантов образует матрицу $\mathrm{Y} = \|y_{iq}\|_{m\times n}$, выражающую предпочтения экспертов.

4. Если критерии $K_1, \ldots, K_n$ имеют для суперЛПР разную важность, то для каждого критерия K_q вычисляется его вес w_q, используя, например, одну из процедур, описанных в разд. 8.3. Строится матрица взвешенных агрегированных оценок вариантов $\mathrm{Y}' = (y'_{iq})_{m\times n}$, где $y'_{iq} = w_q y_{iq}$. Веса критериев обычно нормированы $\sum_q w_q = 1$.

5. В n-мерном векторном пространстве оценок задаются две опорные точки, имеющие все лучшие оценки $\mathbf{y}^+ = (y_1^+, \ldots, y_n^+)$ и все худшие оценки $\mathbf{y}^- = (y_1^-, \ldots, y_n^-)$, которые соответствуют наилучшему варианту (идеальной ситуации) A^+ и наихудшему варианту (антиидеальной ситуации) A^-. Для «положительного» критерия K_q лучшей оценкой y_q^+ является оценка $y_q^{\max} = \max\limits_{1\le i\le n} y_{iq}$, а худшей оценкой y_q^- — оценка $y_q^{\min} = \min\limits_{1\le i\le n} y_{iq}$ по всем вариантам. Для «отрицательного» критерия K_q, наоборот, $y_q^{\min}$ будет лучшей оценкой y_q^+, а $y_q^{\max}$ — худшей оценкой y_q^-.

6. Для каждого варианта A_i в n-мерном пространстве оценок вычисляется по метрике Евклида (8.7) расстояние до наилучшего опорного варианта A^+

$$d_2^+(A_i) = d_2(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}^+) = \left[\sum_{q=1}^{n}(y_{iq} - y_q^+)^2\right]^{1/2} \qquad (23.11)$$

и расстояние до наихудшего опорного варианта A^-

$$d_2^-(A_i) = d_2(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}^-) = \left[\sum_{q=1}^{n}(y_{iq} - y_q^-)^2\right]^{1/2}. \qquad (23.12)$$

7. Для каждого варианта A_i задается показатель его удаленности от наихудшего опорного варианта A^- как

$$h(A_i) = d_2^-(A_i)/[d_2^+(A_i) + d_2^-(A_i)]. \qquad (23.13)$$

Очевидно, что для $A_i = A^+$ показатель $h(A^+) = 1$, а для $A_i = A^-$ показатель $h(A^-) = 0$.

tolerance=1000 8. Упорядочение вариантов по предпочтительности строится по убыванию значения показателя $h(A_i)$ относительной удаленности варианта A_i от наихудшего опорного варианта A^-. Лучший вариант A^* определяется максимальным значением показателя $h(A_i)$ удаленности от наихудшего опорного варианта

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} h(A_i).$$

Пример 23.7. Исходные и преобразованные многокритериальные экспертные оценки проектов строительства предприятия приведены в прил. П.1 и П.2. Считаем, что все эксперты равно компетентны, вес каждого критерия для всех экспертов один и тот же $w_q = 1$, и значит, матрицы агрегированных оценок Y и Y′ совпадают. Экспертные оценки проектов $A_1 - A_9$ по критериям $K_1 - K_{11}$, усредненные по всем проектам, и соответствующие этим проектам агрегированные оценки, усредненные по всем экспертам, указаны в прил. П.4.

Агрегированные векторные оценки проектов, усредненные по всем экспертам с учетом равной важности критериев и одинаковой компетентности экспертов, имеют следующий вид, где для удобства запятые между компонентами векторов опущены:

$\mathbf{y}_1$ = (0,30 0,28 0,34 0,39 0,37 0,46 0,32 0,25 0,35 0,36 0,35);
$\mathbf{y}_2$ = (0,35 0,35 0,46 0,34 0,16 0,23 0,32 0,29 0,31 0,36 0,32);
$\mathbf{y}_3$ = (0,31 0,27 0,28 0,17 0,30 0,38 0,35 0,32 0,38 0,30 0,32);
$\mathbf{y}_4$ = (0,39 0,31 0,36 0,24 0,27 0,21 0,30 0,34 0,34 0,33 0,32);
$\mathbf{y}_5$ = (0,30 0,37 0,27 0,38 0,30 0,23 0,32 0,34 0,34 0,30 0,32);
$\mathbf{y}_6$ = (0,35 0,36 0,27 0,28 0,30 0,19 0,32 0,33 0,28 0,33 0,35);
$\mathbf{y}_7$ = (0,26 0,32 0,28 0,23 0,39 0,32 0,32 0,36 0,28 0,39 0,29);

$$\mathbf{y}_8 = (0{,}26\ 0{,}30\ 0{,}30\ 0{,}35\ 0{,}37\ 0{,}38\ 0{,}32\ 0{,}33\ 0{,}41\ 0{,}25\ 0{,}34);$$
$$\mathbf{y}_9 = (0{,}21\ 0{,}28\ 0{,}24\ 0{,}38\ 0{,}37\ 0{,}33\ 0{,}31\ 0{,}37\ 0{,}26\ 0{,}30\ 0{,}29).$$

Наилучший и наихудший опорные проекты представляются векторами:

$$\mathbf{y}^+ = (0{,}39\ 0{,}37\ 0{,}46\ 0{,}39\ 0{,}39\ 0{,}46\ 0{,}34\ 0{,}25\ 0{,}26\ 0{,}25\ 0{,}29);$$
$$\mathbf{y}^- = (0{,}21\ 0{,}27\ 0{,}24\ 0{,}17\ 0{,}16\ 0{,}19\ 0{,}30\ 0{,}37\ 0{,}41\ 0{,}39\ 0{,}35).$$

Евклидовы расстояния между отдельными проектами A_i и наилучшим A^+ или наихудшим A^- опорными проектами, вычисленные по усредненным экспертным оценкам, равны соответственно:

$$\begin{array}{lll} d_2^+(A_1) = 0{,}250, & d_2^+(A_2) = 0{,}371, & d_2^+(A_3) = 0{,}381, \\ d_2^+(A_4) = 0{,}379, & d_2^+(A_5) = 0{,}356, & d_2^+(A_6) = 0{,}394, \\ d_2^+(A_7) = 0{,}367, & d_2^+(A_8) = 0{,}316, & d_2^+(A_9) = 0{,}357; \\ d_2^-(A_1) = 0{,}463, & d_2^-(A_2) = 0{,}356, & d_2^-(A_3) = 0{,}296, \\ d_2^-(A_4) = 0{,}283, & d_2^-(A_5) = 0{,}350, & d_2^-(A_6) = 0{,}296, \\ d_2^-(A_7) = 0{,}326, & d_2^-(A_8) = 0{,}383, & d_2^-(A_9) = 0{,}386. \end{array}$$

Значения показателя $h(A_i)$ относительной удаленности варианта A_i от наихудшего опорного варианта A^- задаются величинами:

$$\begin{array}{lll} h(A_1) = 0{,}649, & h(A_2) = 0{,}490, & h(A_3) = 0{,}437, \\ h(A_4) = 0{,}427, & h(A_5) = 0{,}496, & h(A_6) = 0{,}429, \\ h(A_7) = 0{,}470, & h(A_8) = 0{,}548, & h(A_9) = 0{,}520. \end{array}$$

Упорядочение проектов по уменьшению значения показателя относительной удаленности от наихудшего опорного варианта A^- имеет вид:

$$A_1 \succ A_8 \succ A_9 \succ A_5 \succeq A_2 \succ A_7 \succ A_3 \succeq A_6 \succeq A_4.$$

Лучшим является проект A_1, вторым по предпочтительности — проект A_8. Оценки проектов A_5, A_2 и A_3, A_6, A_4 практически не отличаются, поэтому проекты в каждой из этих групп можно считать условно эквивалентными друг другу. Упорядочение проектов почти полностью совпадает с упорядочением, полученным методом РАМПА (см. пример 23.6). ■

Для вычисления расстояний (23.11) и (23.12) между вариантами вместо метрики Евклида (8.7) можно воспользоваться и другими метриками, например метрикой Хемминга (8.6):

$$d_1^+(A_i) = d_1(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}^+),$$
$$d_1^-(A_i) = d_1(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}^-).$$

Соответственно изменятся выражение (23.13) для показателя $h(A_i)$ относительной удаленности варианта от наихудшего варианта A^-, а значит, может оказаться иным и итоговое упорядочение вариантов.

Как нетрудно установить из выражений (23.11) и (23.12), изменение порядка агрегирования оценок вариантов (по критериям и по экспертам) дает несовпадающие итоговые результаты. Тем самым метод ТОПСИС не удовлетворяет принципу инвариантности агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений. Упорядочения, полученные с использованием метода ТОПСИС, отличаются также от упорядочений по усредненным балльным оценкам и агрегированной ценности, хотя головные части всех этих упорядочений одинаковы.

23.10. Метод оценки близости к опорной точке с суммарными оценками

Метод АРАМИС (Агрегирование и Ранжирование Альтернатив около Многопризнаковых Идеальных Ситуаций), предназначенный для коллективного упорядочения многокритериальных вариантов, разработан А. Б. Петровским (Россия, 2001). Метод основан на оценке взвешенной близости вариантов к опорной точке, когда варианты описаны агрегированными индивидуальными экспертными оценками, представленными в виде мультимножеств. Метод АРАМИС принадлежит к четвертой группе методов рационального выбора и включает следующие этапы.

1. Каждый вариант из заданной совокупности $A_1, \ldots, A_m$ оценивается каждым экспертом s $(s = 1, \ldots, t)$ по всем критериям $K_1, \ldots, K_n$, имеющим установленные шкалы оценок. Каждый критерий может иметь свою собственную шкалу оценок. Например, количественный критерий — балльную шкалу от 0 до 10 или любую другую числовую шкалу. Шкала качественного критерия может быть вербальной, например: очень высокая оценка (ов), высокая (в), средняя (с), низкая (н), очень низкая (он), может быть символьной шкалой или какой-то иной.

2. Порядковая шкала критерия $X_q = \{x_q^{e_q}\}$, q=1, …, n, в зависимости от смыслового содержания критерия K_q упорядочивается от более предпочтительных оценок к менее предпочтительным оценкам как $x_q^{10} \succ x_q^9 \succ \ldots \succ x_q^0, x_q^{\text{ов}} \succ x_q^{\text{в}} \succ x_q^{\text{с}} \succ$ $\succ x_q^{\text{н}} \succ x_q^{\text{он}}$ или $x_q^0 \succ x_q^1 \succ \ldots \succ x_q^{10}, x_q^{\text{он}} \succ x_q^{\text{н}} \succ x_q^{\text{с}} \succ x_q^{\text{в}} \succ x_q^{\text{ов}}$.

3. Каждому варианту A_i ставится в соответствие мультимножество экспертных оценок вида:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_i =\{&c_{Ai}(x_1^{10})\circ x_1^{10}, c_{Ai}(x_1^9)\circ x_1^9, \ldots, c_{Ai}(x_1^0)\circ x_1^0; \ldots;\\
&c_{Ai}(x_p^0)\circ x_p^0, c_{Ai}(x_p^1)\circ x_q^1, \ldots, c_{Ai}(x_p^{10})\circ x_p^{10}; \ldots;\\
&c_{Ai}(x_q^{\text{ов}})\circ x_q^{\text{ов}}, c_{Ai}(x_q^{\text{в}})\circ x_q^{\text{в}}, c_{Ai}(x_q^{\text{с}})\circ x_q^{\text{с}},\\
&c_{Ai}(x_q^{\text{н}})\circ x_q^{\text{н}}, c_{Ai}(x_q^{\text{он}})\circ x_q^{\text{он}}; \ldots;\\
&c_{Ai}(x_n^{\text{он}})\circ x_n^{\text{он}}, c_{Ai}(x_n^{\text{н}})\circ x_n^{\text{н}}, c_{Ai}(x_n^{\text{с}})\circ x_n^{\text{с}},\\
&c_{Ai}(x_n^{\text{в}})\circ x_n^{\text{в}}, c_{Ai}(x_n^{\text{ов}})\circ x_n^{\text{ов}}\},
\end{aligned}
\tag{23.14}
$$

где $c_{Ai}(x_q^{e_q})$ — число экспертов, давших варианту A_i по критерию K_q оценку $x_q^{e_q}$.

4. Если критерии $K_1, \ldots, K_n$ имеют шкалы $X_q = \{x_q^{e_q}\}$ разной «длины» $|X_q|$, состоящие из неодинакового числа градаций, то для сопоставимости оценок вариантов по различным критериям и удобства последующей интерпретации полученных результатов целесообразно согласовать шкалы всех критериев и привести их к одному и тому же масштабу $|X'_q| = \text{const}$ для всех $q = 1, \ldots, n$. Для всех критериев вводится единая унифицированная шкала $X'_q = \{x_q^{e'_q}\}$, $e'_q = 1, \ldots, g'_q$, с одинаковыми по смыслу градациями оценок, упорядоченными от более предпочтительных к менее предпочтительным как $x_q^{1'} \succ \ldots \succ x_q^{e'_q} \succ$ $\succ \ldots \succ x_q^{g'_q}$. В зависимости от специфики задачи это можно сделать, или «сжимая» более «длинную» шкалу путем объединения нескольких соседних градаций оценок $x_q^{e_q(1)}, x_q^{e_q(2)}, \ldots$ в одну градацию $x_q^{e'_q}$, или «растягивая» более «короткую» шкалу за счет ввода фиктивных промежуточных градаций оценок $x_q^{e'_0}$ между существующими градациями и полагая $c_{Ai}(x_q^{e'_0}) = 0$. Можно применять оба эти способа согласования шкал оценок и одновременно.

5. Каждое мультимножество экспертных оценок $\boldsymbol{A}_i$ (23.14), соответствующее варианту A_i, записывается в следующем преобразованном виде:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_i =\{&c_{Ai}(x_1^{1'})\circ x_1^{1'}, \dots, c_{Ai}(x_1^{e_1'})\circ x_1^{e_1'}, \dots, c_{Ai}(x_1^{g_1'})\circ x_1^{g_1'}; \dots;\\ &c_{Ai}(x_q^{1'})\circ x_q^{1'}, \dots, c_{Ai}(x_q^{e_q'})\circ x_q^{e_q'}, \dots, c_{Ai}(x_q^{g_q'}) \circ x_q^{g_q'}; \dots;\\ &c_{Ai}(x_n^{1'})\circ x_n^{1'}, \dots, c_{Ai}(x_n^{e_n'})\circ x_n^{e_n'}, \dots, c_{Ai}(x_n^{g_n'})\circ x_n^{g_n'}\}.\end{aligned}$$

Здесь $c_{Ai}(x_q^{e_q'}) = \sum\limits_{q=q(1),q(2),\dots} c_{Ai}(x_q^{e_q})$ — общее число экспертов, которые дали варианту A_i оценки $x_q^{e_{q(1)}}, x_q^{e_{q(2)}}, \dots$ по старой шкале критерия K_q, и $c_{Ai}(x_q^{e_0'}) = 0$.

6. В пространстве мультимножеств оценок задаются две опорные точки — мультимножества

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+ =\{&t\circ x_1^{1'}, \dots, 0\circ x_1^{e_1'}, \dots, 0\circ x_1^{g_1'}; \dots;\\ &t\circ x_q^{1'}, \dots, 0\circ x_q^{e_q'}, \dots, 0\circ x_q^{g_q'}; \dots;\\ &t\circ x_p^{1'}, \dots, 0\circ x_p^{e_p'}, \dots, 0\circ x_p^{g_p'}; \dots;\\ &t\circ x_n^{1'}, \dots, 0\circ x_n^{e_n'}, \dots, 0\circ x_n^{g_n'}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^- =\{&0\circ x_1^{1'}, \dots, 0\circ x_1^{e_1'}, \dots, t\circ x_1^{g_1'}; \dots;\\ &0\circ x_q^{1'}, \dots, 0\circ x_q^{e_q'}, \dots, t\circ x_q^{g_q'}; \dots;\\ &0\circ x_p^{1'}, \dots, 0\circ x_p^{e_p'}, \dots, t\circ x_p^{g_p'}; \dots;\\ &0\circ x_n^{1'}, \dots, 0\circ x_n^{e_n'}, \dots, t\circ x_n^{g_n'}\},\end{aligned}$$

которые соответствуют наилучшему варианту (идеальной ситуации) A^+ и наихудшему варианту (антиидеальной ситуации) A^-. Наилучшему варианту A^+ все t экспертов поставили по всем критериям только лучшие оценки, а наихудшему варианту A^- — только худшие оценки. Для «положительного» критерия K_q лучшей оценкой $x_q^{1'} = x_q^+$ является оценка x_q^{10} или $x_q^{\text{ов}}$, а худшей оценкой $x_q^{g_q'} = x_q^-$ — оценка x_q^0 или $x_q^{\text{он}}$. Для «отрицательного» критерия K_q, наоборот, оценка x_q^0 или $x_q^{\text{он}}$ будет лучшей оценкой $x_q^{1'} = x_q^+$, а оценка x_q^{10} или $x_q^{\text{ов}}$ — худшей оценкой $x_q^{g_q'} = x_q^-$. Таким образом, в мультимножествах $\boldsymbol{A}^+$ и $\boldsymbol{A}^-$ числа $c_{A^+}(x_q^+) = t$, $c_{A^-}(x_q^-) = t$ и $c_{A^+}(x_q^{e_q'}) = 0$, $c_{A^-}(x_q^{e_q'}) = 0$ при всех остальных оценках $x_q^{e_q'}$, $q = 1, \dots, n$ $e_q' \neq +, -$.

7. Если критерии $K_1, \dots, K_n$ имеют для суперЛПР разную важность, то для каждого критерия K_q вычисляется его вес w_q,

используя одну из процедур, описанных в разд. 8.3. Веса критериев обычно нормированы: $\sum\limits_q w_q = 1$.

8. Для каждого варианта A_i в пространстве мультимножеств оценок по основной метрике вычисляется расстояние до наилучшего опорного варианта A^+

$$d_1^+(A_i) = d_1(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}^+) = \sum_{q=1}^{n} w_q \sum_{e'_q}^{g'_q} |c_{A_i}(x_q^{e'_q}) - c_{A^+}(x_q^{e'_q})| \quad (23.15)$$

и расстояние до наихудшего опорного варианта A^-

$$d_1^-(A_i) = d_1(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}^-) = \sum_{q=1}^{n} w_q \sum_{e'_q}^{g'_q} |c_{A_i}(x_q^{e'_q}) - c_{A^-}(x_q^{e'_q})|, \quad (23.16)$$

которые принимаются соответственно за показатель близости варианта A_i к наилучшему опорному варианту A^+ и показатель удаленности варианта A_i от наихудшего опорного варианта A^-.

9. Для каждого варианта A_i задается показатель его относительной близости к наилучшему опорному варианту A^+

$$l(A_i) = d_1^+(A_i)/[d_1^+(A_i) + d_1^-(A_i)]. \quad (23.17)$$

Очевидно, что для $A_i = A^+$ показатель $l(A^+) = 0$, а для $A_i = A^-$ показатель $l(A^-) = 1$.

10. Упорядочение вариантов по предпочтительности строится по возрастанию значения показателя $l(A_i)$ относительной близости варианта A_i к наилучшему опорному варианту A^+. Лучший вариант A^* определяется минимальным значением показателя близости к лучшему опорному варианту

$$A^* \in \arg \min_{1 \le i \le m} l(A_i).$$

Заметим, что, как и в методе ТОПСИС, выбор другой метрики для вычисления расстояний между вариантами может привести к их иному итоговому упорядочению.

Пример 23.8. Исходные и скорректированные многокритериальные экспертные оценки проектов строительства предприятия указаны в прил. П.1 и П.3. Будем считать, что все эксперты равно компетентны, вес каждого критерия для всех экспертов один и тот же: $w_q = 1$.

Введем единую для всех критериев унифицированную шкалу $X'_q = \{x_q^{e'_q}\}$, $e'_q = 1, \ldots, g'_q$, имеющую вербальные градации оценок: $x_q^{\text{ов}'}$ — очень высокая (ов′), $x_q^{\text{в}'}$ — высокая (в′), $x_q^{\text{с}'}$ — средняя (с′), $x_q^{\text{н}'}$ — низкая (н′), $x_q^{\text{он}'}$ — очень низкая (он′). Числовые оценки по шкалам количественных критериев $K_1 - K_4$, выраженные в баллах от 0 до 10, преобразуем в вербальные оценки следующим образом: 10, 9 — очень высокая $x_q^{\text{ов}'}$; 8, 7 — высокая $x_q^{\text{в}'}$; 6, 5, 4 — средняя $x_q^{\text{с}'}$; 3, 2 — низкая $x_q^{\text{н}'}$; 1, 0 — очень низкая $x_q^{\text{он}'}$. Шкалы «положительных» качественных критериев $K_5 - K_7$ совпадают с унифицированной шкалой X'_q. На шкалах «отрицательных» качественных критериев $K_8 - K_{11}$ более предпочтительными являются меньшие оценки, поэтому градации оценок преобразуются по правилам: он $=$ ов′ $= x_q^{\text{ов}'}$, н $=$ в′ $= x_q^{\text{в}'}$, с $=$ с′ $= x_q^{\text{с}'}$, в $=$ н′ $= x_q^{\text{н}'}$, ов $=$ он′ $= x_q^{\text{он}'}$. Преобразованные экспертные оценки проектов $A_1 - A_9$ по критериям $K_1 - K_{11}$, имеющим унифицированные шкалы, и соответствующие этим проектам мультимножества даны в прил. П.5.

Приведем для примера многокритериальные экспертные оценки проекта A_1, данные по критериям $K_1 - K_{11}$ с исходными и преобразованными шкалами, и мультимножество $\boldsymbol{A}_1$, соответствующее этому проекту:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\langle 1\rangle} &= (5\,6\,4\,6;\ \text{с с в};\ \text{н с с с}) = (\text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}';\ \text{с}'\,\text{с}'\,\text{в}';\ \text{в}'\,\text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}');\\
x_1^{\langle 2\rangle} &= (6\,2\,4\,3;\ \text{в с с};\ \text{с с в в}) = (\text{с}'\,\text{н}'\,\text{с}'\text{н}';\ \text{в}'\,\text{с}'\,\text{с}';\ \text{с}'\,\text{с}'\,\text{н}'\,\text{н}');\\
x_1^{\langle 3\rangle} &= (6\,6\,4\,8;\ \text{в ов с};\ \text{в н с н}) = (\text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}'\,\text{в}';\ \text{в}'\,\text{ов}'\,\text{с}';\ \text{н}'\,\text{в}'\,\text{с}'\,\text{в}');\\
x_1^{\langle 4\rangle} &= (5\,2\,4\,7;\ \text{с ов с};\ \text{с с с с}) = (\text{с}'\,\text{н}'\,\text{с}'\,\text{в}';\ \text{с}'\,\text{ов}'\,\text{с}';\ \text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}'\,\text{с}');\\
x_1^{\langle 5\rangle} &= (3\,8\,4\,3;\ \text{в в в};\ \text{н н с в}) = (\text{н}'\,\text{в}'\,\text{с}'\,\text{н}';\ \text{в}'\,\text{в}'\,\text{в}';\ \text{в}'\,\text{в}'\,\text{с}'\,\text{н}').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1 = \{&4\circ x_1^{\text{с}'}, 1\circ x_1^{\text{н}'}; 1\circ x_2^{\text{в}'}, 2\circ x_2^{\text{с}'}, 2\circ x_2^{\text{н}'}; 5\circ x_3^{\text{с}'}; 2\circ x_4^{\text{в}'}, 1\circ x_4^{\text{с}'},\\
&2\circ x_4^{\text{н}'}; 3\circ x_5^{\text{в}'}, 2\circ x_5^{\text{с}'}; 2\circ x_6^{\text{ов}'}, 1\circ x_6^{\text{в}'}, 2\circ x_6^{\text{с}'}; 2\circ x_7^{\text{в}'}, 3\circ x_7^{\text{с}'};\\
&2\circ x_8^{\text{в}'}, 2\circ x_8^{\text{с}'}, 1\circ x_8^{\text{н}'}; 2\circ x_9^{\text{в}'}, 3\circ x_9^{\text{с}'}; 4\circ x_{10}^{\text{с}'}, 1\circ x_{10}^{\text{н}'}; 1\circ x_{11}^{\text{в}'},\\
&2\circ x_{11}^{\text{с}'}, 2\circ x_{11}^{\text{н}'}\}.
\end{aligned}
$$

Мультимножества $\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_9$, соответствующие проектам $A_2 - A_9$, записываются аналогично.

Наилучший и наихудший проекты представляются мультимножествами

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+} =\{&5\circ x_1^{\text{ов}'}, 0\circ x_1^{\text{в}'}, 0\circ x_1^{\text{с}'}, 0\circ x_1^{\text{н}'}, 0\circ x_1^{\text{он}'}; \ldots;\\ &5\circ x_q^{\text{ов}'}, 0\circ x_q^{\text{в}'}, 0\circ x_q^{\text{с}'}, 0\circ x_q^{\text{н}'}, 0\circ x_q^{\text{он}'}; \ldots;\\ &5\circ x_n^{\text{ов}'}, 0\circ x_n^{\text{в}'}, 0\circ x_n^{\text{с}'}, 0\circ x_n^{\text{н}'}, 0\circ x_n^{\text{он}'}\},\\ \boldsymbol{A}^{-} =\{&0\circ x_1^{\text{ов}'}, 0\circ x_1^{\text{в}'}, 0\circ x_1^{\text{с}'}, 0\circ x_1^{\text{н}'}, 5\circ x_1^{\text{он}'}; \ldots;\\ &0\circ x_q^{\text{ов}'}, 0\circ x_q^{\text{в}'}, 0\circ x_q^{\text{с}'}, 0\circ x_q^{\text{н}'}, 5\circ x_q^{\text{он}'}; \ldots;\\ &0\circ x_n^{\text{ов}'}, 0\circ x_n^{\text{в}'}, 0\circ x_n^{\text{с}'}, 0\circ x_n^{\text{н}'}, 5\circ x_n^{\text{он}'}\}.\end{aligned}$$

Расстояния между отдельными проектами A_i и наилучшим A^+ или наихудшим A^- проектами, вычисленные по формулам (23.15), (23.16) равны соответственно:

$$\begin{aligned}&d_1^+(A_1) = 106,\ d_1^+(A_2) = 106,\ d_1^+(A_3) = 108,\\ &d_1^+(A_4) = 98,\ \ d_1^+(A_5) = 108,\ d_1^+(A_6) = 100,\\ &d_1^+(A_7) = 104,\ d_1^+(A_8) = 108,\ d_1^+(A_9) = 108;\\ &d_1^-(A_1) = 110,\ d_1^-(A_2) = 106,\ d_1^-(A_3) = 106,\\ &d_1^-(A_4) = 110,\ d_1^-(A_5) = 106,\ d_1^-(A_6) = 106,\\ &d_1^-(A_7) = 100,\ d_1^-(A_8) = 106,\ d_1^-(A_9) = 102.\end{aligned}$$

Значения показателя $l(A_i)$ относительной близости проекта A_i к наилучшему проекту A^+ (23.17) задаются величинами:

$$\begin{aligned}&l(A_1) = 0{,}491, \quad l(A_2) = 0{,}500, \quad l(A_3) = 0{,}505,\\ &l(A_4) = 0{,}471, \quad l(A_5) = 0{,}505, \quad l(A_6) = 0{,}485,\\ &l(A_7) = 0{,}510, \quad l(A_8) = 0{,}505, \quad l(A_9) = 0{,}514.\end{aligned}$$

Упорядочение проектов по увеличению значения показателя относительной близости к наилучшему проекту A^+ имеет вид

$$A_4 \succ A_6 \succ A_1 \succ A_2 \succeq A_3 \approx A_5 \approx A_8 \succ A_7 \succeq A_9.$$

Лучшим является проект A_4, вторым по предпочтительности — проект A_6. Оценки проектов A_2 и A_3, A_5, A_8; A_7 и A_9 практически не различаются, поэтому проекты в каждой из этих групп можно считать условно эквивалентными друг другу. Упорядочение проектов отличается от упорядочений, полученных другими методами (см. примеры 23.3 — 23.7). ■

В методе АРАМИС все мультимножества, представляющие варианты и опорные точки, а также расстояния между ними формируются только путем суммирования индивидуальных оценок по экспертам и критериям. Поэтому результаты вычислений по формулам (23.15)—(23.17) не зависят от порядка этого суммирования. Таким образом, метод АРАМИС удовлетворяет принципу инвариантности агрегирования индивидуальных многокритериальных предпочтений.

23.11. Особенности групповых многокритериальных методов

Современные методы многокритериального коллективного выбора носят в основном эвристический характер и сочетают подходы, присущие методам многокритериального индивидуального выбора, экспертного оценивания и агрегирования индивидуальных предпочтений.

Эти методы позволяют экспертам/членам ГПР индивидуально оценивать каждый вариант по многим критериям и находить наилучшее или приемлемое для всех решение задачи коллективного выбора. В процессе решения суперЛПР имеет возможность выражать свои предпочтения, устанавливая компетентность экспертов и задавая различную важность критериев, по которым оцениваются варианты. Наряду с этим, если необходимо, каждый эксперт также может вводить свои собственные индивидуальные веса критериев.

Характерная особенность принятия коллективных решений при наличии нескольких независимых ЛПР и/или экспертов заключается в неоднозначности их оценок, которая может быть обусловлена разнообразными причинами. Большие сложности решения задач группового многокритериального выбора создают множественность и повторяемость признаков, описывающих варианты. Дополнительные трудности связаны с необходимостью одновременного учета различных числовых и вербальных показателей, спецификой их обработки.

В групповых методах многокритериального анализа и выбора нередко используются такие известные приемы многокритериальной оптимизации, как усреднение показателей и свертка критериев, с помощью которых множественное представление рассматриваемых многопризнаковых вариантов сводится к более простому. Усреднение числовых оценок вариантов по экспертам позволяет объединить совокупность многих векторов оценок в единственный вектор, а усреднение по вариантам — сделать сопоставимыми оценки по разнородным количественным шкалам. Свертка критериев делает многокритериальную оценку однокритериальной. Подобные преобразования числовых данных облегчают поиск лучшего группового решения.

Вычисление средних значений экспертных оценок, в частности средних баллов, и свертка критериев являются весьма популярными на практике приемами для представления коллективного мнения. Вместе с тем стремление все усреднять ведет к нивелированию различий в индивидуальных суждениях экспертов, сглаживанию и устранению крайних точек зрения, в которых, быть может, и заключено рациональное зерно. Усредненные же оценки только выражают обезличенное коллективное мнение экспертов, которое либо может оказаться тривиальным, либо давать худшее, а иногда и совсем плохое решение стоящей проблемы.

Примечательно в этом отношении мнение А. Курно, который еще в 1843 г. отмечал ограниченность использования операции усреднения, указывая, что средние значения элементов сложной системы могут быть несовместимы друг с другом. Например, треугольник, имеющий стороны, длины которых суть средние арифметические длин соответствующих сторон нескольких прямоугольных треугольников, сам уже прямоугольным треугольником не будет.

Для обработки вербальных (не числовых) оценок вариантов нередко качественные шкалы превращают в числовые, что не всегда является допустимой операцией. Применение же для качественных признаков процедуры «усреднения» вообще некорректно.

Более обоснованным подходом представляется использование для описания многопризнаковых вариантов формализма теории мультимножеств, при котором не происходит «перемешивания» количественных и качественных признаков и усреднения их значений, а каждый из видов признаков сохраняет свою природу на протяжении всего процесса решения задачи. Разнообразие и бóльшее, чем у множеств, число допустимых для мультимножеств операций открывает новые возможности для агрегирования и дезагрегирования значений признаков, группирования и анализа многопризнаковых вариантов. Такого рода преобразования не вносят искажений в исходные данные и существенно упрощают процедуры обработки информации.

Методы принятия групповых многокритериальных решений в целом пока еще не получили широкого распространения, как из-за недостаточного числа практических задач, где возможно их использование, так и вследствие трудностей организации экспертизы вариантов, которая обеспечивала бы надежное получение необходимой для выбора информации. Существенно, что применение разных методов коллективного многокритериального выбора может давать разные итоговые результаты, что, впрочем, характерно не только для этих методов. Вместе с тем потребность в методах группового многокритериального выбора постоянно возрастает, привлекая к ним все большее внимание исследователей и практиков.

23.12. Общая характеристика методов коллективного выбора

Задачи коллективного выбора относятся к наиболее сложным и наименее изученным проблемам принятия решений. Эти задачи отличаются большим разнообразием, но центральной для них является проблема объединения многих индивидуальных предпочтений отдельных участников в общее групповое предпочтение. Необходимость разработки «справедливых» решающих правил и специальных процедур, которые позволили бы «разумным» образом агрегировать различные точки зрения избирателей, участвующих в голосовании, была осознана исследователями уже в XVIII в.

Переход от единственного ЛПР ко многим ЛПР порождает дополнительные сложности при разрешении проблемной ситуации. Вместо поиска наилучшего варианта решения, соответствующего предпочтениям единственного индивидуума, возникает необходимость учета совпадающих, различающихся или противоположных интересов многих участников, которые имеют разные цели, критерии выбора и т. п.

Информация, характеризующая проблему, может сильно различаться одной от ситуации к другой и от одного индивидуума к другому. В процессе решения проблемы участники могут вести себя по-разному, сообщать друг другу как достоверную, так и ложную информацию о проблеме, предпочтениях, целях. Поэтому задача коллективного выбора может трактоваться как сложная задача рационального перехода от заданных «индивидуальных наборов данных» к единственному «групповому набору данных».

Существующие методы группового выбора, основанные на подсчете голосов, отличаются большой «пестротой». Многие из них являются эвристическими и включают в себя идеи и приемы методов оптимального и рационального выбора. Аксиоматические теории коллективного выбора опираются на условия, которые характеризуют рациональность группового поведения участников, соответствующего интересам всех членов ГПР.

Основное внимание в методах группового выбора уделяется тому, какими свойствами должны обладать механизмы и правила выбора, какими должны быть процедуры выбора, как проводить согласование и агрегирование индивидуальных предпочтений, как выявить манипулирование результатами выбора. Однако согласованность общего мнения не гарантирует «правильность» конечного результата, а согласованный коллективный выбор может оказаться далеким от наилучшего, в то время как лучшим может являться выбор одного или нескольких несогласных, чьи точки зрения отличаются от мнения большинства. Построение методов нахождения общего коллективного решения, основанного на выявлении и учете несогласованых интересов участников, остается мало разработанным аспектом группового выбора.

Отметим следующие основные особенности методов рационального коллективного выбора:

- имеется группы лиц, которые действуют по определенным правилам, отвечающим их собственным целям. Члены группы могут быть либо заинтересованы в выработке согласованного решения, либо быть безразличными к этому, либо оказывать активное или пассивное противодействие принятию общего решения;
- каждая проблема может описываться многими количественными и/или качественными критериями и признаками. Каждый член ГПР может формировать свои наборы критериев и признаков, которые могут разделяться или не приниматься другими членами ГПР. Различные участники и критерии нередко конфликтуют друг с другом;
- сравнение вариантов и выбор среди них наиболее предпочтительных осуществляются на основе субъективных индивидуальных предпочтений членов ГПР, которые агрегируются в единое коллективное предпочтение;
- модели агрегирования индивидуальных предпочтений подразделяются на порядковые (ординальные) и количественные (кардинальные), которые опираются на бинарные отношения, функции и правила выбора.

Методы рационального коллективного выбора обладают и определенными недостатками. К ним относятся:

- неконструктивность многих аксиоматических подходов к коллективному выбору, не дающих механизмов для выработки группового решения;
- формальность моделей агрегирования индивидуальных предпочтений;
- слабая разработанность средств, позволяющих учитывать противоречивые суждения членов ГПР и находить на их основе общее решение без поиска компромисса между интересами сторон;
- неоднозначность результатов решения задачи коллективного выбора, полученных разными методами;
- слабая вовлеченность членов ГПР в процесс решения задачи выбора, отсутствие во многих методах возможностей для активного вмешательства участников в ход решения, аргументированного обоснования и содержательного объяснения полученных результатов.

Многие методы группового выбора требуют от человека выполнения трудных и не всегда обоснованных операций по оценке компетентности экспертов, назначению весов критериев, установлению правил подсчета голосов и определения лучшего варианта, которые в то же время оказывают существенное влияние на окончательный результат. Современные методы коллективного принятия решений достаточно сложны, связаны с обработкой больших объемов информации. Часто такие методы реализованы в виде компьютерных программ или систем поддержки принятия решений.

Результаты коллективного выбора, помимо методологических вопросов, сильно зависят еще и от организационной и психологической составляющих, которые определяются процедурами получения экспертных оценок и способами выявления индивидуальных предпочтений членов ГПР. Важно, чтобы членами ГПР были специалисты, имеющие высокую компетентность и способные быть надежным источником необходимой для принятия решения информации. Подбор экспертов, создание условий для высказывания независимых суждений, поиска общих точек зрения и согласования интересов участников — все это относится к неформализуемым, но важным аспектам групповых решений.

Методы коллективного принятия решений остаются в целом менее развитыми по сравнению с методами индивидуального принятия решений. Это обусловлено в первую очередь большей размерностью задачи группового выбора, необходимостью учитывать различные, в том числе противоречивые, интересы многих участников, разнообразием и несовпадением их целей, способов выражения их мнений, трудностью агрегирования их предпочтений. Возможности применения методов группового выбора в еще большей степени, чем в случае индивидуального выбора, ограничены неполнотой, неточностью, нечеткостью и недостаточной достоверностью исходных данных.

* * *

Рекомендуемая литература: [1], [11], [16], [23], [24], [35], [36], [37], [38], [40], [44], [56], [57], [59], [60], [66], [70], [71], [72].

Многокритериальные экспертные оценки для задачи группового выбора

П.1. Исходные экспертные оценки проектов

Эксперт 1

$x_1^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 4 6; с с в; н с с с);
$x_2^{\langle 1\rangle}$ = (7 3 2 4; он н с; в с с н);
$x_3^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 8 1; с н в; с с с с);
$x_4^{\langle 1\rangle}$ = (10 3 6 6; с н н; с с с с);
$x_5^{\langle 1\rangle}$ = (4 4 6 2; н он в; в с с в);
$x_6^{\langle 1\rangle}$ = (9 4 6 2; в н н; в н с с);
$x_7^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 7 6; ов он в; ов н с с);
$x_8^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 5 6; с ов в; в с в в);
$x_9^{\langle 1\rangle}$ = (4 5 8 5; с с в; ов н с в).

Эксперт 2

$x_1^{\langle 2\rangle}$ = (6 2 4 3; в с с; с с в в);
$x_2^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 5 5; он н в; н н в в);
$x_3^{\langle 2\rangle}$ = (7 3 3 2; в с с; с с с с);
$x_4^{\langle 2\rangle}$ = (2 7 4 2; с н ов; в с с с);
$x_5^{\langle 2\rangle}$ = (7 9 3 3; с он с; с с с с);
$x_6^{\langle 2\rangle}$ = (2 9 3 5; с он ов; в н с с);
$x_7^{\langle 2\rangle}$ = (5 6 3 1; ов н с; н с с с);
$x_8^{\langle 2\rangle}$ = (4 5 4 3; в с с; в с н с);
$x_9^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 2 3; н н н; с н с н).

Эксперт 3

$x_1^{\langle 3\rangle}$ = (6 6 4 8; в ов с; в н с н);
$x_2^{\langle 3\rangle}$ = (5 7 5 2; н с в; с с с н);
$x_3^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 4; н ов в; в н н с);
$x_4^{\langle 3\rangle}$ = (2 6 4 4; с н ов; в с н с);
$x_5^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 8; с с с; с с н с);
$x_6^{\langle 3\rangle}$ = (2 8 3 6; с с ов; в с с с);
$x_7^{\langle 3\rangle}$ = (5 5 3 3; в с с; с н в с);
$x_8^{\langle 3\rangle}$ = (8 4 3 7; в с с; в в н в);
$x_9^{\langle 3\rangle}$ = (4 3 2 8; ов с н; н н н в).

Эксперт 4

$x_1^{\langle 4\rangle}$ = (5 2 4 7; с ов с; с с с с);

$\mathbf{x}_2^{\langle 4\rangle}$ = (7 9 5 4; н н н; в н с в);
$\mathbf{x}_3^{\langle 4\rangle}$ = (5 3 3 2; с с с; в с с с);
$\mathbf{x}_4^{\langle 4\rangle}$ = (10 9 4 2; н н н; в н в с);
$\mathbf{x}_5^{\langle 4\rangle}$ = (5 8 3 7; в с с; в н в с);
$\mathbf{x}_6^{\langle 4\rangle}$ = (9 5 3 5; н н н; с н в с);
$\mathbf{x}_7^{\langle 4\rangle}$ = (5 4 3 2; с ов с; ов н в с);
$\mathbf{x}_8^{\langle 4\rangle}$ = (4 3 3 5; с он с; с н н с);
$\mathbf{x}_9^{\langle 4\rangle}$ = (4 4 2 7; в с в; ов н с н).

Эксперт 5
$\mathbf{x}_1^{\langle 5\rangle}$ = (3 8 4 3; в в в; н н с в);
$\mathbf{x}_2^{\langle 5\rangle}$ = (5 7 9 5; с н в; с н с с);
$\mathbf{x}_3^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 1 2; с в в; с с с с);
$\mathbf{x}_4^{\langle 5\rangle}$ = (9 2 4 2; с н н; с н с с);
$\mathbf{x}_5^{\langle 5\rangle}$ = (2 7 2 5; с в в; в н н н);
$\mathbf{x}_6^{\langle 5\rangle}$ = (8 6 2 1; с н с; с н н в);
$\mathbf{x}_7^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 2 3; н в в; ов н с н);
$\mathbf{x}_8^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 3 3; в в в; с с н н);
$\mathbf{x}_9^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 2 3; в в в; ов н с н).

Для удобства здесь и далее запятые между компонентами кортежей/векторов опущены. Оценки по группам критериев $K_1 - K_4$, $K_5 - K_7$, $K_8 - K_{11}$ отделены точками с запятыми.

Примеры исходных многокритериальных экспертных оценок проектов взяты из книги [60].

П.2. Преобразованные экспертные оценки проектов

Эксперт 1
$\mathbf{x}_1^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 4 6; с с в; н с с с) = (5 6 4 6; 5 5 7; 3 5 5 5);
$\mathbf{x}_2^{\langle 1\rangle}$ = (7 3 2 4; он н с; в с с н) = (7 3 2 4; 1 3 5; 7 5 5 3);
$\mathbf{x}_3^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 8 1; с н в; с с с с) = (5 5 8 1; 5 3 7; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_4^{\langle 1\rangle}$ = (10 3 6 6; с н н; с с с с) = (10 3 6 6; 5 3 3; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_5^{\langle 1\rangle}$ = (4 4 6 2; н он в; в с с в) = (4 4 6 2; 3 1 7; 7 5 5 7);
$\mathbf{x}_6^{\langle 1\rangle}$ = (9 4 6 2; в н н; в н с с) = (9 4 6 2; 7 3 3; 7 3 5 5);
$\mathbf{x}_7^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 7 6; ов он в; ов н с с) = (5 5 7 6; 9 1 7; 9 3 5 5);
$\mathbf{x}_8^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 5 6; с ов в; в с в в) = (5 6 5 6; 5 9 7; 7 5 7 7);
$\mathbf{x}_9^{\langle 1\rangle}$ = (4 5 8 5; с с в; ов н с в) = (4 5 8 5; 5 5 7; 9 3 5 7).

Эксперт 2
$\mathbf{x}_1^{\langle 2\rangle}$ = (6 2 4 3; в с с; с с в в) = (6 2 4 3; 7 5 5; 5 5 7 7);
$\mathbf{x}_2^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 5 5; он н в; н н в в) = (5 5 5 5; 1 3 7; 3 3 7 7);

$x_3^{\langle 2\rangle}$ = (7 3 3 2; в с с; с с с с) = (7 3 3 2; 7 5 5; 5 5 5 5);
$x_4^{\langle 2\rangle}$ = (2 7 4 2; с н ов; в с с с) = (2 7 4 2; 5 3 9; 7 5 5 5);
$x_5^{\langle 2\rangle}$ = (7 9 3 3; с он с; с с с с) = (7 9 3 3; 5 1 5; 5 5 5 5);
$x_6^{\langle 2\rangle}$ = (2 9 3 5; с он ов; в н с с) = (2 9 3 5; 5 1 9; 7 3 5 5);
$x_7^{\langle 2\rangle}$ = (5 6 3 1; ов н с; н с с с) = (5 6 3 1; 9 3 5; 3 5 5 5);
$x_8^{\langle 2\rangle}$ = (4 5 4 3; в с с; в с н с) = (4 5 4 3; 7 5 5; 7 5 3 5);
$x_9^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 2 3; н н н; с н с н) = (5 5 2 3; 3 3 3; 5 3 5 3).

Эксперт 3

$x_1^{\langle 3\rangle}$ = (6 6 4 8; в ов с; в н с н) = (6 6 4 8; 7 9 5; 7 3 5 3);
$x_2^{\langle 3\rangle}$ = (5 7 5 2; н с в; с с с н) = (5 7 5 2; 3 5 7; 5 5 5 3);
$x_3^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 4; н ов в; в н н с) = (7 5 3 4; 3 9 7; 7 3 3 5);
$x_4^{\langle 3\rangle}$ = (2 6 4 4; с н ов; в с н с) = (2 6 4 4; 5 3 9; 7 5 3 5);
$x_5^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 8; с с с; с с н с) = (7 5 3 8; 5 5 5; 5 5 3 5);
$x_6^{\langle 3\rangle}$ = (2 8 3 6; с с ов; в с с с) = (2 8 3 6; 5 5 9; 7 5 5 5);
$x_7^{\langle 3\rangle}$ = (5 5 3 3; в с с; с н в с) = (5 5 3 3; 7 5 5; 5 3 7 5);
$x_8^{\langle 3\rangle}$ = (8 4 3 7; в с с; в в н в) = (8 4 3 7; 7 5 5; 7 7 3 7);
$x_9^{\langle 3\rangle}$ = (4 3 2 8; ов с н; н н н в) = (4 3 2 8; 9 5 3; 3 3 3 7).

Эксперт 4

$x_1^{\langle 4\rangle}$ = (5 2 4 7; с ов с; с с с с) = (5 2 4 7; 5 9 5; 5 5 5 5);
$x_2^{\langle 4\rangle}$ = (7 9 5 4; н н н; в н с в) = (7 9 5 4; 3 3 3; 7 3 5 7);
$x_3^{\langle 4\rangle}$ = (5 3 3 2; с с с; в с с с) = (5 3 3 2; 5 5 5; 7 5 5 5);
$x_4^{\langle 4\rangle}$ = (10 9 4 2; н н н; в н в с) = (10 9 4 2; 3 3 3; 7 3 7 5);
$x_5^{\langle 4\rangle}$ = (5 8 3 7; в с с; в н в с) = (5 8 3 7; 7 5 5; 7 3 7 5);
$x_6^{\langle 4\rangle}$ = (9 5 3 5; н н н; с н в с) = (9 5 3 5; 3 3 3; 5 3 7 5);
$x_7^{\langle 4\rangle}$ = (5 4 3 2; с ов с; ов н в с) = (5 4 3 2; 5 9 5; 9 3 7 5);
$x_8^{\langle 4\rangle}$ = (4 3 3 5; с он с; с н н с) = (4 3 3 5; 5 1 5; 5 3 3 5);
$x_9^{\langle 4\rangle}$ = (4 4 2 7; в с в; ов н с н) = (4 4 2 7; 7 5 7; 9 3 5 3).

Эксперт 5

$x_1^{\langle 5\rangle}$ = (3 8 4 3; в в в; н н с в) = (3 8 4 3; 7 7 7; 3 3 5 7);
$x_2^{\langle 5\rangle}$ = (5 7 9 5; с н в; с н с с) = (5 7 9 5; 5 3 7; 5 3 5 5);
$x_3^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 1 2; с в в; с с с с) = (2 8 1 2; 5 7 7; 5 5 5 5);
$x_4^{\langle 5\rangle}$ = (9 2 4 2; с н н; с н с с) = (9 2 4 2; 5 3 3; 5 3 5 5);
$x_5^{\langle 5\rangle}$ = (2 7 2 5; с в в; в н н н) = (2 7 2 5; 5 7 7; 7 3 3 3);
$x_6^{\langle 5\rangle}$ = (8 6 2 1; с н с; с н н в) = (8 6 2 1; 5 3 5; 5 3 3 7);
$x_7^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 2 3; н в в; ов н с н) = (2 8 2 3; 3 7 7; 9 3 5 3);
$x_8^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 3 3; в в в; с с н н) = (1 8 3 3; 7 7 7; 5 5 3 3);
$x_9^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 2 3; в в в; ов н с н) = (1 8 2 3; 7 7 7; 9 3 5 3).

П.3. Скорректированные экспертные оценки проектов

Эксперт 1

$\mathbf{x}_1^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 4 6; с с в; н с с с) = (5 6 4 6; 5 5 7; 7 5 5 5);
$\mathbf{x}_2^{\langle 1\rangle}$ = (7 3 2 4; он н с; в с с н) = (7 3 2 4; 1 3 5; 3 5 5 7);
$\mathbf{x}_3^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 8 1; с н в; с с с с) = (5 5 8 1; 5 3 7; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_4^{\langle 1\rangle}$ = (10 3 6 6; с н н; с с с с) = (10 3 6 6; 5 3 3; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_5^{\langle 1\rangle}$ = (4 4 6 2; н он в; в с с в) = (4 4 6 2; 3 1 7; 3 5 5 3);
$\mathbf{x}_6^{\langle 1\rangle}$ = (9 4 6 2; в н н; в н с с) = (9 4 6 2; 7 3 3; 3 7 5 5);
$\mathbf{x}_7^{\langle 1\rangle}$ = (5 5 7 6; ов он в; ов н с с) = (5 5 7 6; 9 1 7; 1 7 5 5);
$\mathbf{x}_8^{\langle 1\rangle}$ = (5 6 5 6; с ов в; в с в в) = (5 6 5 6; 5 9 7; 3 5 3 3);
$\mathbf{x}_9^{\langle 1\rangle}$ = (4 5 8 5; с с в; ов н с в) = (4 5 8 5; 5 5 7; 1 7 5 3).

Эксперт 2

$\mathbf{x}_1^{\langle 2\rangle}$ = (6 2 4 3; в с с; с с в в) = (6 2 4 3; 7 5 5; 5 5 3 3);
$\mathbf{x}_2^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 5 5; он н в; н н в в) = (5 5 5 5; 1 3 7; 7 7 3 3);
$\mathbf{x}_3^{\langle 2\rangle}$ = (7 3 3 2; в с с; с с с с) = (7 3 3 2; 7 5 5; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_4^{\langle 2\rangle}$ = (2 7 4 2; с н ов; в с с с) = (2 7 4 2; 5 3 9; 3 5 5 5);
$\mathbf{x}_5^{\langle 2\rangle}$ = (7 9 3 3; с он с; с с с с) = (7 9 3 3; 5 1 5; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_6^{\langle 2\rangle}$ = (2 9 3 5; с он ов; в н с с) = (2 9 3 5; 5 1 9; 3 7 5 5);
$\mathbf{x}_7^{\langle 2\rangle}$ = (5 6 3 1; ов н с; н с с с) = (5 6 3 1; 9 3 5; 7 5 5 5);
$\mathbf{x}_8^{\langle 2\rangle}$ = (4 5 4 3; в с с; в с н с) = (4 5 4 3; 7 5 5; 3 5 7 5);
$\mathbf{x}_9^{\langle 2\rangle}$ = (5 5 2 3; н н н; с н с н) = (5 5 2 3; 3 3 3; 5 7 5 7).

Эксперт 3

$\mathbf{x}_1^{\langle 3\rangle}$ = (6 6 4 8; в ов с; в н с н) = (6 6 4 8; 7 9 5; 3 7 5 7);
$\mathbf{x}_2^{\langle 3\rangle}$ = (5 7 5 2; н с в; с с с н) = (5 7 5 2; 3 5 7; 5 5 5 7);
$\mathbf{x}_3^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 4; н ов в; в н н с) = (7 5 3 4; 3 9 7; 3 7 7 5);
$\mathbf{x}_4^{\langle 3\rangle}$ = (2 6 4 4; с н ов; в с н с) = (2 6 4 4; 5 3 9; 3 5 7 5);
$\mathbf{x}_5^{\langle 3\rangle}$ = (7 5 3 8; с с с; с с н с) = (7 5 3 8; 5 5 5; 5 5 7 5);
$\mathbf{x}_6^{\langle 3\rangle}$ = (2 8 3 6; с с ов; в с с с) = (2 8 3 6; 5 5 9; 3 5 5 5);
$\mathbf{x}_7^{\langle 3\rangle}$ = (5 5 3 3; в с с; с н в с) = (5 5 3 3; 7 5 5; 5 7 3 5);
$\mathbf{x}_8^{\langle 3\rangle}$ = (8 4 3 7; в с с; в в н в) = (8 4 3 7; 7 5 5; 3 3 7 3);
$\mathbf{x}_9^{\langle 3\rangle}$ = (4 3 2 8; ов с н; н н н в) = (4 3 2 8; 9 5 3; 7 7 7 3).

Эксперт 4

$\mathbf{x}_1^{\langle 4\rangle}$ = (5 2 4 7; с ов с; с с с с) = (5 2 4 7; 5 9 5; 5 5 5 5);
$\mathbf{x}_2^{\langle 4\rangle}$ = (7 9 5 4; н н н; в н с в) = (7 9 5 4; 3 3 3; 3 7 5 3);
$\mathbf{x}_3^{\langle 4\rangle}$ = (5 3 3 2; с с с; в с с с) = (5 3 3 2; 5 5 5; 3 5 5 5);
$\mathbf{x}_4^{\langle 4\rangle}$ = (10 9 4 2; н н н; в н в с) = (10 9 4 2; 3 3 3; 3 7 3 5);
$\mathbf{x}_5^{\langle 4\rangle}$ = (5 8 3 7; в с с; в н в с) = (5 8 3 7; 7 5 5; 3 7 3 5);

$x_6^{\langle 4\rangle}$ = (9 5 3 5; н н н; с н в с) = (9 5 3 5; 3 3 3; 5 7 3 5);
$x_7^{\langle 4\rangle}$ = (5 4 3 2; с ов с; ов н в с) = (5 4 3 2; 5 9 5; 1 7 3 5);
$x_8^{\langle 4\rangle}$ = (4 3 3 5; с он с; с н н с) = (4 3 3 5; 5 1 5; 5 7 7 5);
$x_9^{\langle 4\rangle}$ = (4 4 2 7; в с в; ов н с н) = (4 4 2 7; 7 5 7; 1 7 5 7).

Эксперт 5
$x_1^{\langle 5\rangle}$ = (3 8 4 3; в в в; н н с в) = (3 8 4 3; 7 7 7; 7 7 5 3);
$x_2^{\langle 5\rangle}$ = (5 7 9 5; с н в; с н с с) = (5 7 9 5; 5 3 7; 5 7 5 5);
$x_3^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 1 2; с в в; с с с с) = (2 8 1 2; 5 7 7; 5 5 5 5);
$x_4^{\langle 5\rangle}$ = (9 2 4 2; с н н; с н с с) = (9 2 4 2; 5 3 3; 5 7 5 5);
$x_5^{\langle 5\rangle}$ = (2 7 2 5; с в в; в н н н) = (2 7 2 5; 5 7 7; 3 7 7 7);
$x_6^{\langle 5\rangle}$ = (8 6 2 1; с н с; с н н в) = (8 6 2 1; 5 3 5; 5 7 7 3);
$x_7^{\langle 5\rangle}$ = (2 8 2 3; н в в; ов н с н) = (2 8 2 3; 3 7 7; 1 7 5 7);
$x_8^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 3 3; в в в; с с н н) = (1 8 3 3; 7 7 7; 5 5 7 7);
$x_9^{\langle 5\rangle}$ = (1 8 2 3; в в в; ов н с н) = (1 8 2 3; 7 7 7; 1 7 5 7).

П.4. Экспертные оценки, усредненные по проектам и экспертам

Проект A_1
$x_1'^{\langle 1\rangle}$ = (0,26 0,43 0,22 0,43; 0,31 0,39 0,38; 0,15 0,38 0,32 0,30);
$x_1'^{\langle 2\rangle}$ = (0,39 0,11 0,38 0,31; 0,40 0,47 0,27; 0,31 0,38 0,44 0,44);
$x_1'^{\langle 3\rangle}$ = (0,36 0,36 0,39 0,45; 0,39 0,50 0,26; 0,39 0,22 0,39 0,19);
$x_1'^{\langle 4\rangle}$ = (0,26 0,12 0,39 0,47; 0,33 0,55 0,35; 0,24 0,47 0,29 0,33);
$x_1'^{\langle 5\rangle}$ = (0,22 0,37 0,34 0,31; 0,42 0,39 0,36; 0,16 0,28 0,38 0,48);
y_1 = (0,30 0,28 0,34 0,39; 0,37 0,46 0,3; 0,25 0,35 0,36 0,35).

Проект A_2
$x_2'^{\langle 1\rangle}$ = (0,39 0,21 0,11 0,29; 0,06 0,23 0,27; 0,34 0,38 0,32 0,18);
$x_2'^{\langle 2\rangle}$ = (0,33 0,27 0,47 0,51; 0,06 0,28 0,38; 0,18 0,23 0,44 0,44);
$x_2'^{\langle 3\rangle}$ = (0,30 0,42 0,49 0,11; 0,17 0,28 0,36; 0,28 0,37 0,39 0,19);
$x_2'^{\langle 4\rangle}$ = (0,37 0,52 0,49 0,27; 0,20 0,18 0,21; 0,37 0,28 0,29 0,46);
$x_2'^{\langle 5\rangle}$ = (0,36 0,33 0,76 0,51; 0,30 0,17 0,36; 0,27 0,28 0,38 0,35);
y_2 = (0,35 0,35 0,46 0,34; 0,16 0,23 0,32; 0,29 0,31 0,36 0,32).

Проект A_3
$x_3'^{\langle 1\rangle}$ = (0,26 0,36 0,44 0,07; 0,31 0,23 0,38; 0,25 0,38 0,32 0,30);
$x_3'^{\langle 2\rangle}$ = (0,46 0,16 0,28 0,21; 0,40 0,47 0,27; 0,31 0,38 0,31 0,31);
$x_3'^{\langle 3\rangle}$ = (0,42 0,30 0,29 0,22; 0,17 0,50 0,36; 0,39 0,22 0,23 0,32);
$x_3'^{\langle 4\rangle}$ = (0,26 0,17 0,29 0,13; 0,33 0,31 0,35; 0,37 0,47 0,29 0,33);
$x_3'^{\langle 5\rangle}$ = (0,14 0,37 0,09 0,21; 0,30 0,39 0,36; 0,27 0,47 0,38 0,35);
y_3 = (0,31 0,27 0,28 0,17; 0,30 0,38 0,35; 0,32 0,38 0,30 0,32).

Проект A_4

$\mathbf{x}_4'^{(1)} = (0{,}53\ 0{,}21\ 0{,}33\ 0{,}43;\ 0{,}31\ 0{,}23\ 0{,}16;\ 0{,}25\ 0{,}38\ 0{,}32\ 0{,}30);$
$\mathbf{x}_4'^{(2)} = (0{,}13\ 0{,}38\ 0{,}38\ 0{,}21;\ 0{,}28\ 0{,}28\ 0{,}49;\ 0{,}43\ 0{,}38\ 0{,}31\ 0{,}31);$
$\mathbf{x}_4'^{(3)} = (0{,}12\ 0{,}36\ 0{,}39\ 0{,}22;\ 0{,}28\ 0{,}17\ 0{,}47;\ 0{,}39\ 0{,}37\ 0{,}23\ 0{,}32);$
$\mathbf{x}_4'^{(4)} = (0{,}53\ 0{,}52\ 0{,}39\ 0{,}13;\ 0{,}20\ 0{,}18\ 0{,}21;\ 0{,}37\ 0{,}28\ 0{,}40\ 0{,}33);$
$\mathbf{x}_4'^{(5)} = (0{,}65\ 0{,}09\ 0{,}34\ 0{,}21;\ 0{,}30\ 0{,}17\ 0{,}15;\ 0{,}27\ 0{,}28\ 0{,}38\ 0{,}35);$
$\mathbf{y}_4 \ = (0{,}39\ 0{,}31\ 0{,}36\ 0{,}24;\ 0{,}27\ 0{,}21\ 0{,}30;\ 0{,}34\ 0{,}34\ 0{,}33\ 0{,}32).$

Проект A_5

$\mathbf{x}_5'^{(1)} = (0{,}21\ 0{,}29\ 0{,}33\ 0{,}14;\ 0{,}18\ 0{,}08\ 0{,}38;\ 0{,}34\ 0{,}38\ 0{,}32\ 0{,}42);$
$\mathbf{x}_5'^{(2)} = (0{,}46\ 0{,}49\ 0{,}28\ 0{,}31;\ 0{,}28\ 0{,}09\ 0{,}27;\ 0{,}31\ 0{,}38\ 0{,}31\ 0{,}31);$
$\mathbf{x}_5'^{(3)} = (0{,}42\ 0{,}30\ 0{,}29\ 0{,}45;\ 0{,}28\ 0{,}28\ 0{,}26;\ 0{,}28\ 0{,}37\ 0{,}23\ 0{,}32);$
$\mathbf{x}_5'^{(4)} = (0{,}26\ 0{,}46\ 0{,}29\ 0{,}47;\ 0{,}47\ 0{,}31\ 0{,}35;\ 0{,}37\ 0{,}28\ 0{,}40\ 0{,}33);$
$\mathbf{x}_5'^{(5)} = (0{,}14\ 0{,}33\ 0{,}17\ 0{,}51;\ 0{,}30\ 0{,}39\ 0{,}36;\ 0{,}38\ 0{,}28\ 0{,}23\ 0{,}21);$
$\mathbf{y}_5 \ = (0{,}30\ 0{,}37\ 0{,}27\ 0{,}38;\ 0{,}30\ 0{,}23\ 0{,}32;\ 0{,}34\ 0{,}34\ 0{,}30\ 0{,}32).$

Проект A_6

$\mathbf{x}_6'^{(1)} = (0{,}47\ 0{,}29\ 0{,}33\ 0{,}14;\ 0{,}43\ 0{,}23\ 0{,}16;\ 0{,}34\ 0{,}23\ 0{,}32\ 0{,}30);$
$\mathbf{x}_6'^{(2)} = (0{,}13\ 0{,}49\ 0{,}28\ 0{,}51;\ 0{,}28\ 0{,}09\ 0{,}49;\ 0{,}43\ 0{,}23\ 0{,}31\ 0{,}31);$
$\mathbf{x}_6'^{(3)} = (0{,}12\ 0{,}47\ 0{,}29\ 0{,}33;\ 0{,}28\ 0{,}28\ 0{,}47;\ 0{,}39\ 0{,}37\ 0{,}39\ 0{,}32);$
$\mathbf{x}_6'^{(4)} = (0{,}47\ 0{,}27\ 0{,}29\ 0{,}33;\ 0{,}20\ 0{,}18\ 0{,}21;\ 0{,}24\ 0{,}28\ 0{,}40\ 0{,}33);$
$\mathbf{x}_6'^{(5)} = (0{,}58\ 0{,}28\ 0{,}17\ 0{,}10;\ 0{,}30\ 0{,}17\ 0{,}26;\ 0{,}27\ 0{,}28\ 0{,}23\ 0{,}48);$
$\mathbf{y}_6 \ = (0{,}35\ 0{,}36\ 0{,}27\ 0{,}28;\ 0{,}30\ 0{,}19\ 0{,}32;\ 0{,}33\ 0{,}28\ 0{,}33\ 0{,}35).$

Проект A_7

$\mathbf{x}_7'^{(1)} = (0{,}26\ 0{,}36\ 0{,}39\ 0{,}43;\ 0{,}55\ 0{,}08\ 0{,}38;\ 0{,}44\ 0{,}23\ 0{,}32\ 0{,}30);$
$\mathbf{x}_7'^{(2)} = (0{,}33\ 0{,}33\ 0{,}28\ 0{,}10;\ 0{,}51\ 0{,}28\ 0{,}27;\ 0{,}18\ 0{,}38\ 0{,}31\ 0{,}31);$
$\mathbf{x}_7'^{(3)} = (0{,}30\ 0{,}30\ 0{,}29\ 0{,}17;\ 0{,}39\ 0{,}28\ 0{,}26;\ 0{,}28\ 0{,}22\ 0{,}54\ 0{,}32);$
$\mathbf{x}_7'^{(4)} = (0{,}26\ 0{,}23\ 0{,}29\ 0{,}13;\ 0{,}33\ 0{,}55\ 0{,}35;\ 0{,}43\ 0{,}28\ 0{,}40\ 0{,}33);$
$\mathbf{x}_7'^{(5)} = (0{,}14\ 0{,}37\ 0{,}17\ 0{,}31;\ 0{,}18\ 0{,}39\ 0{,}36;\ 0{,}49\ 0{,}28\ 0{,}38\ 0{,}21);$
$\mathbf{y}_7 \ = (0{,}26\ 0{,}32\ 0{,}28\ 0{,}23;\ 0{,}39\ 0{,}32\ 0{,}32;\ 0{,}36\ 0{,}28\ 0{,}39\ 0{,}29).$

Проект A_8

$\mathbf{x}_8'^{(1)} = (0{,}26\ 0{,}43\ 0{,}28\ 0{,}43;\ 0{,}31\ 0{,}69\ 0{,}38;\ 0{,}34\ 0{,}38\ 0{,}44\ 0{,}42);$
$\mathbf{x}_8'^{(2)} = (0{,}26\ 0{,}27\ 0{,}38\ 0{,}31;\ 0{,}40\ 0{,}47\ 0{,}27;\ 0{,}43\ 0{,}38\ 0{,}19\ 0{,}31);$
$\mathbf{x}_8'^{(3)} = (0{,}49\ 0{,}24\ 0{,}29\ 0{,}39;\ 0{,}39\ 0{,}28\ 0{,}26;\ 0{,}39\ 0{,}52\ 0{,}23\ 0{,}45);$
$\mathbf{x}_8'^{(4)} = (0{,}21\ 0{,}17\ 0{,}29\ 0{,}33;\ 0{,}33\ 0{,}06\ 0{,}35;\ 0{,}24\ 0{,}28\ 0{,}17\ 0{,}33);$
$\mathbf{x}_8'^{(5)} = (0{,}07\ 0{,}37\ 0{,}25\ 0{,}31;\ 0{,}42\ 0{,}39\ 0{,}36;\ 0{,}27\ 0{,}47\ 0{,}23\ 0{,}21);$
$\mathbf{y}_8 \ = (0{,}26\ 0{,}30\ 0{,}30\ 0{,}35;\ 0{,}37\ 0{,}38\ 0{,}32;\ 0{,}33\ 0{,}41\ 0{,}25\ 0{,}34).$

Проект A_9

$\mathbf{x}_9'^{(1)} = (0{,}21\ 0{,}36\ 0{,}44\ 0{,}36;\ 0{,}31\ 0{,}39\ 0{,}38;\ 0{,}44\ 0{,}23\ 0{,}32\ 0{,}42).$
$\mathbf{x}_9'^{(2)} = (0{,}33\ 0{,}27\ 0{,}19\ 0{,}31;\ 0{,}17\ 0{,}28\ 0{,}16;\ 0{,}31\ 0{,}28\ 0{,}31\ 0{,}19).$

$\mathbf{x}_9'^{\langle 3\rangle} = (0{,}24\ 0{,}18\ 0{,}19\ 0{,}45;\ 0{,}50\ 0{,}28\ 0{,}16;\ 0{,}17\ 0{,}22\ 0{,}23\ 0{,}45).$
$\mathbf{x}_9'^{\langle 4\rangle} = (0{,}21\ 0{,}23\ 0{,}19\ 0{,}47;\ 0{,}47\ 0{,}31\ 0{,}49;\ 0{,}43\ 0{,}28\ 0{,}27\ 0{,}20).$
$\mathbf{x}_9'^{\langle 5\rangle} = (0{,}07\ 0{,}37\ 0{,}17\ 0{,}31;\ 0{,}42\ 0{,}39\ 0{,}36;\ 0{,}49\ 0{,}28\ 0{,}38\ 0{,}21).$
$\mathbf{y}_9 = (0{,}21\ 0{,}28\ 0{,}24\ 0{,}38;\ 0{,}37\ 0{,}33\ 0{,}31;\ 0{,}37\ 0{,}26\ 0{,}30\ 0{,}29).$

П.5. Преобразованные экспертные оценки по критериям с унифицированными шкалами

Проект A_1

$\mathbf{x}_1^{<1>} = (5\ 6\ 4\ 6;\ с\ с\ в;\ н\ с\ с\ с) = (с'\ с'\ с'\ с';\ с'\ с'\ в';\ в'\ с'\ с'\ с');$
$\mathbf{x}_1^{<2>} = (6\ 2\ 4\ 3;\ в\ с\ с;\ с\ с\ в\ в) = (с'\ н'\ с'\ н';\ в'\ с'\ с';\ с'\ с'\ н'\ н');$
$\mathbf{x}_1^{<3>} = (6\ 6\ 4\ 8;\ в\ ов\ с;\ в\ н\ с\ н) = (с'\ с'\ с'\ в';\ в'\ ов'\ с';\ н'\ в'\ с'\ в');$
$\mathbf{x}_1^{<4>} = (5\ 2\ 4\ 7;\ с\ ов\ с;\ с\ с\ с\ с) = (с'\ н'\ с'\ в';\ с'\ ов'\ с';\ с'\ с'\ с'\ с');$
$\mathbf{x}_1^{<5>} = (3\ 8\ 4\ 3;\ в\ в\ в;\ н\ н\ с\ в) = (н'\ в'\ с'\ н';\ в'\ в'\ в';\ в'\ в'\ с'\ н').$

$\boldsymbol{A}_1 = \{4\circ x_1^{с'}, 1\circ x_1^{н'}; 1\circ x_2^{в'}, 2\circ x_2^{с'}, 2\circ x_2^{н'}; 5\circ x_3^{с'}; 2\circ x_4^{в'}, 1\circ x_4^{с'}, 2\circ x_4^{н'};$
$3\circ x_5^{в'}, 2\circ x_5^{с'}; 2\circ x_6^{ов'}, 1\circ x_6^{в'}, 2\circ x_6^{с'}; 2\circ x_7^{в'}, 3\circ x_7^{с'};$
$2\circ x_8^{в'}, 2\circ x_8^{с'}, 1\circ x_8^{н'}; 2\circ x_9^{в'}, 3\circ x_9^{с'}; 4\circ x_{10}^{с'}, 1\circ x_{10}^{н'}; 1\circ x_{11}^{в'}, 2\circ x_{11}^{с'}, 2\circ x_{11}^{н'}\}.$

Проект A_2

$\mathbf{x}_2^{<1>} = (7\ 3\ 2\ 4;\ он\ н\ с;\ в\ с\ с\ н) = (в'\ н'\ н'\ с';\ он'\ н'\ с';\ н'\ с'с'\ в');$
$\mathbf{x}_2^{<2>} = (5\ 5\ 5\ 5;\ он\ н\ в;\ н\ н\ в\ в) = (с'\ с'\ с'\ с';\ он'\ н'\ в';\ в'\ в'н'\ н');$
$\mathbf{x}_2^{<3>} = (5\ 7\ 5\ 2;\ н\ с\ в;\ с\ с\ с\ н) = (с'\ в'\ с'\ н';\ н'\ с'\ в';\ с'\ с'\ с'\ в');$
$\mathbf{x}_2^{<4>} = (7\ 9\ 5\ 4;\ н\ н\ н;\ в\ н\ с\ в) = (в'\ ов'\ с'\ с';\ н'\ н'\ н';\ н'\ в'\ с'\ н');$
$\mathbf{x}_2^{<5>} = (5\ 7\ 9\ 5;\ с\ н\ в;\ с\ н\ с\ с) = (с'\ в'\ ов'\ с';\ с'\ н'\ в';\ с'\ в'\ с'\ с').$

$\boldsymbol{A}_2 = \{2\circ x_1^{в'}, 3\circ x_1^{с'}; 1\circ x_2^{ов'}, 2\circ x_2^{в'}, 1\circ x_2^{с'}, 1\circ x_2^{н'}; 1\circ x_3^{ов'},$
$3\circ x_3^{с'}, 1\circ x_3^{н'}; 4\circ x_4^{с'}, 1\circ x_4^{н'}; 1\circ x_5^{с'}, 2\circ x_5^{н'}, 2\circ x_5^{он'}; 1\circ x_6^{с'}, 4\circ x_6^{н'};$
$3\circ x_7^{в'}, 1\circ x_7^{с'}, 1\circ x_7^{н'}; 1\circ x_8^{в'}, 2\circ x_8^{с'}, 2\circ x_8^{н'}; 3\circ x_9^{в'}, 2\circ x_9^{с'}; 4\circ x_{10}^{с'},$
$1\circ x_{10}^{н'}; 2\circ x_{11}^{в'}, 1\circ x_{11}^{с'}, 2\circ x_{11}^{н'}.$

Проект A_3

$\mathbf{x}_3^{<1>} = (5\ 5\ 8\ 1;\ с\ н\ в;\ с\ с\ с\ с) = (с'\ с'\ в'\ он';\ с'\ н'\ в';\ с'\ с'\ с'\ с');$
$\mathbf{x}_3^{<2>} = (7\ 3\ 3\ 2;\ в\ с\ с;\ с\ с\ с\ с) = (в'\ н'\ н'\ н';\ в'\ с'\ с';\ с'\ с'\ с'\ с');$
$\mathbf{x}_3^{<3>} = (7\ 5\ 3\ 4;\ н\ ов\ в;\ в\ н\ н\ с) = (в'\ с'\ н'\ с';\ н'\ ов'\ в';\ н'\ в'в'\ с');$
$\mathbf{x}_3^{<4>} = (5\ 3\ 3\ 2;\ с\ с\ с;\ в\ с\ с\ с) = (с'\ н'\ н'\ н';\ с'\ с'\ с';\ н'\ с'\ с'\ с');$
$\mathbf{x}_3^{<5>} = (2\ 8\ 1\ 2;\ с\ в\ в;\ с\ с\ с\ с) = (н'\ в'\ он'\ н';\ с'\ в'\ в';\ с'\ с'\ с'\ с').$

$\boldsymbol{A}_3 = \{2\circ x_1^{в'}, 2\circ x_1^{с'}, 1\circ x_1^{н'}; 2\circ x_2^{в'}, 2\circ x_2^{с'}, 2\circ x_2^{н'}; 1\circ x_3^{в'}, 3\circ x_3^{н'}, 1\circ x_3^{он'};$
$1\circ x_4^{с'}, 3\circ x_4^{н'}, 1\circ x_4^{он'}; 1\circ x_5^{в'}, 3\circ x_5^{с'}, 1\circ x_5^{н'}; 1\circ x_6^{ов'}, 1\circ x_6^{в'}, 2\circ x_6^{с'}, 1\circ x_6^{н'};$
$3\circ x_7^{в'}, 2\circ x_7^{с'}; 3\circ x_8^{с'}, 2\circ x_8^{н'}; 1\circ x_9^{в'}, 4\circ x_9^{с'}; 1\circ x_{10}^{в'}, 4\circ x_{10}^{с'}; 5\circ x_{11}^{с'}\}.$

Проект A_4

$\mathbf{x}_4^{<1>} = (10\ 3\ 6\ 6;\ с\ н\ н;\ с\ с\ с\ с) = (ов'\ н'\ с'\ с';\ с'\ н'\ н';\ с'\ с'с'\ с');$
$\mathbf{x}_4^{<2>} = (2\ 7\ 4\ 2;\ с\ н\ ов;\ в\ с\ с\ с) = (н'\ в'\ с'\ н';\ с'\ н'\ ов';\ н'\ с'с'\ с');$
$\mathbf{x}_4^{<3>} = (2\ 6\ 4\ 4;\ с\ н\ ов;\ в\ с\ н\ с) = (н'\ с'\ с'\ с';\ с'\ н'\ ов';\ н'\ с'в'\ с');$
$\mathbf{x}_4^{<4>} = (10\ 9\ 4\ 2;\ н\ н\ н;\ в\ н\ в\ с) = (ов'\ ов'\ с'\ н';\ н'\ н'\ н';\ н'\ в'н'\ с');$
$\mathbf{x}_4^{<5>} = (9\ 2\ 4\ 2;\ с\ н\ н;\ с\ н\ с\ с) = (ов'\ н'\ с'\ н';\ с'\ н'\ н';\ с'\ в'\ с'\ с').$

$\boldsymbol{A}_4 = \{3\circ x_1^{ов'}, 2\circ x_1^{н'}; 1\circ x_2^{ов'}, 1\circ x_2^{в'}, 1\circ x_2^{с'}, 2\circ x_2^{н'}; 5\circ x_3^{с'}; 2\circ x_4^{с'}, 3\circ x_4^{н'};$

$4\circ x_5^{\text{с}'}, 1\circ x_5^{\text{н}'}; 5\circ x_6^{\text{н}'}; 2\circ x_7^{\text{ов}'}, 3\circ x_7^{\text{н}'}; 2\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{н}'}; 2\circ x_9^{\text{в}'}, 3\circ x_9^{\text{с}'}; 1\circ x_{10}^{\text{в}'}, 3\circ x_{10}^{\text{с}'}, 1\circ x_{10}^{\text{н}'}; 5\circ x_{11}^{\text{с}'}\}.$

Проект A_5

$\mathbf{x}_5^{<1>} = (4\,4\,6\,2;\ \text{н он в};\ \text{в с с в}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}';\ \text{н}'\ \text{он}'\ \text{в}';\ \text{н}'\ \text{с}'\text{с}'\ \text{н}');$

$\mathbf{x}_5^{<2>} = (7\,9\,3\,3;\ \text{с он с};\ \text{с с с с}) = (\text{в}'\ \text{ов}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{с}'\ \text{он}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{с}'\text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_5^{<3>} = (7\,5\,3\,8;\ \text{с с с};\ \text{с с н с}) = (\text{в}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{в}';\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_5^{<4>} = (5\,8\,3\,7;\ \text{в с с};\ \text{в н в с}) = (\text{с}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{в}';\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{н}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_5^{<5>} = (2\,7\,2\,5;\ \text{с в в};\ \text{в н н н}) = (\text{н}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{в}';\ \text{н}'\ \text{в}'\ \text{в}'\ \text{в}').$

$A_5 = \{2\circ x_1^{\text{в}'}, 2\circ x_1^{\text{с}'}, 1\circ x_1^{\text{н}'}; 1\circ x_2^{\text{ов}'}, 2\circ x_2^{\text{в}'}, 2\circ x_2^{\text{с}'}; 1\circ x_3^{\text{с}'}, 4\circ x_3^{\text{н}'}; 2\circ x_4^{\text{в}'}, 1\circ x_4^{\text{с}'}, 2\circ x_4^{\text{н}'}; 1\circ x_5^{\text{в}'}, 3\circ x_5^{\text{с}'}, 1\circ x_5^{\text{н}'}; 1\circ x_6^{\text{в}'}, 2\circ x_6^{\text{с}'}, 2\circ x_6^{\text{он}'}; 2\circ x_7^{\text{в}'}, 3\circ x_7^{\text{с}'}; 2\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{н}'}; 2\circ x_9^{\text{в}'}, 3\circ x_9^{\text{с}'}; 2\circ x_{10}^{\text{в}'}, 2\circ x_{10}^{\text{с}'}, 1\circ x_{10}^{\text{н}'}; 1\circ x_{11}^{\text{в}'}, 3\circ x_{11}^{\text{с}'}, 1\circ x_{11}^{\text{н}'}\}.$

Проект A_6

$\mathbf{x}_6^{<1>} = (9\,4\,6\,2;\ \text{в н н};\ \text{в н с с}) = (\text{ов}'\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{н}'\ \text{в}'\text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_6^{<2>} = (2\,9\,3\,5;\ \text{с он ов};\ \text{в н с с}) = (\text{н}'\ \text{ов}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{он}'\ \text{ов}';\ \text{н}'\ \text{в}'\text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_6^{<3>} = (2\,8\,3\,6;\ \text{с с ов};\ \text{в с с с}) = (\text{н}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{ов}';\ \text{н}'\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_6^{<4>} = (9\,5\,3\,5;\ \text{н н н};\ \text{с н в с}) = (\text{ов}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{н}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_6^{<5>} = (8\,6\,2\,1;\ \text{с н с};\ \text{с н н в}) = (\text{в}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{он}';\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{в}'\ \text{н}').$

$A_6 = \{2\circ x_1^{\text{ов}'}, 1\circ x_1^{\text{в}'}, 2\circ x_1^{\text{н}'}; 1\circ x_2^{\text{ов}'}, 1\circ x_2^{\text{в}'}, 3\circ x_2^{\text{с}'}; 1\circ x_3^{\text{с}'}, 4\circ x_3^{\text{н}'}; 3\circ x_4^{\text{с}'}, 1\circ x_4^{\text{н}'}, 1\circ x_4^{\text{он}'}; 1\circ x_5^{\text{в}'}, 3\circ x_5^{\text{с}'}, 1\circ x_5^{\text{н}'}; 1\circ x_6^{\text{с}'}, 3\circ x_6^{\text{н}'}, 1\circ x_6^{\text{он}'}; 2\circ x_7^{\text{ов}'}, 1\circ x_7^{\text{с}'}, 2\circ x_7^{\text{н}'}; 2\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{н}'}; 4\circ x_9^{\text{в}'}, 1\circ x_9^{\text{с}'}; 1\circ x_{10}^{\text{в}'}, 3\circ x_{10}^{\text{с}'}, 1\circ x_{10}^{\text{н}'}; 4\circ x_{11}^{\text{с}'}, 1\circ x_{11}^{\text{н}'}\}.$

Проект A_7

$\mathbf{x}_7^{<1>} = (5\,5\,7\,6;\ \text{ов он в};\ \text{ов н с с}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{с}';\ \text{ов}'\ \text{он}'\ \text{в}';\ \text{он}'\text{в}'\ \text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_7^{<2>} = (5\,6\,3\,1;\ \text{ов н с};\ \text{н с с с}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{он}';\ \text{ов}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{в}'\ \text{с}'\text{с}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_7^{<3>} = (5\,5\,3\,3;\ \text{в с с};\ \text{с н в с}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_7^{<4>} = (5\,4\,3\,2;\ \text{с ов с};\ \text{ов н в с}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{с}'\ \text{ов}'\ \text{с}';\ \text{он}'\ \text{в}'\text{н}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_7^{<5>} = (2\,8\,2\,3;\ \text{н в в};\ \text{ов н с н}) = (\text{н}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{н}'\ \text{в}'\ \text{в}';\ \text{он}'\ \text{в}'\text{с}'\ \text{в}').$

$A_7 = \{4\circ x_1^{\text{с}'}, 1\circ x_1^{\text{н}'}; 1\circ x_2^{\text{в}'}, 4\circ x_2^{\text{с}'}; 1\circ x_3^{\text{в}'}, 4\circ x_3^{\text{н}'}; 1\circ x_4^{\text{с}'}, 3\circ x_4^{\text{н}'}, 1\circ x_4^{\text{он}'}; 2\circ x_5^{\text{ов}'}, 1\circ x_5^{\text{в}'}, 1\circ x_5^{\text{с}'}, 1\circ x_5^{\text{н}'}; 1\circ x_6^{\text{ов}'}, 1\circ x_6^{\text{в}'}, 1\circ x_6^{\text{с}'}, 1\circ x_6^{\text{н}'}, 1\circ x_6^{\text{он}'}; 2\circ x_7^{\text{в}'}, 3\circ x_7^{\text{с}'}; 1\circ x_8^{\text{в}'}, 1\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{он}'}; 4\circ x_9^{\text{в}'}, 1\circ x_9^{\text{с}'}; 3\circ x_{10}^{\text{с}'}, 2\circ x_{10}^{\text{н}'}; 1\circ x_{11}^{\text{в}'}, 4\circ x_{11}^{\text{с}'}\}.$

Проект A_8

$\mathbf{x}_8^{<1>} = (5\,6\,5\,6;\ \text{с ов в};\ \text{в с в в}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{ов}'\ \text{в}';\ \text{н}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}');$

$\mathbf{x}_8^{<2>} = (4\,5\,4\,3;\ \text{в с с};\ \text{в с н с}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{н}'\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_8^{<3>} = (8\,4\,3\,7;\ \text{в с с};\ \text{в в н в}) = (\text{в}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{в}';\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{с}';\ \text{н}'\ \text{н}'\ \text{в}'\ \text{н}');$

$\mathbf{x}_8^{<4>} = (4\,3\,3\,5;\ \text{с он с};\ \text{с н н с}) = (\text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{он}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{в}'\ \text{с}');$

$\mathbf{x}_8^{<5>} = (1\,8\,3\,3;\ \text{в в в};\ \text{с с н н}) = (\text{он}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{в}'\ \text{в}';\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{в}').$

$A_8 = \{1\circ x_1^{\text{в}'}, 3\circ x_1^{\text{с}'}, 1\circ x_1^{\text{он}'}; 1\circ x_2^{\text{в}'}, 3\circ x_2^{\text{с}'}, 1\circ x_2^{\text{н}'}; 2\circ x_3^{\text{с}'}, 3\circ x_3^{\text{н}'}; 1\circ x_4^{\text{в}'}, 2\circ x_4^{\text{с}'}, 2\circ x_4^{\text{н}'}; 3\circ x_5^{\text{в}'}, 2\circ x_5^{\text{с}'}; 1\circ x_6^{\text{ов}'}, 1\circ x_6^{\text{в}'}, 2\circ x_6^{\text{с}'}, 1\circ x_6^{\text{он}'}; 2\circ x_7^{\text{в}'}, 3\circ x_7^{\text{с}'}; 2\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{н}'}; 1\circ x_9^{\text{в}'}, 3\circ x_9^{\text{с}'}, 1\circ x_9^{\text{н}'}; 4\circ x_{10}^{\text{в}'}, 1\circ x_{10}^{\text{н}'}; 1\circ x_{11}^{\text{в}'}, 2\circ x_{11}^{\text{с}'}, 2\circ x_{11}^{\text{н}'}\}.$

Проект A_9

$\mathbf{x}_9^{<1>} = (4\,5\,8\,5;\ \text{с с в};\ \text{ов н с в}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{с}';\ \text{с}'\ \text{с}'\ \text{в}';\ \text{он}'\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{н}');$

$\mathbf{x}_9^{<2>} = (5\,5\,2\,3;\ \text{н н н};\ \text{с н с н}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{н}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{с}'\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{в}');$

$\mathbf{x}_9^{<3>} = (4\ 3\ 2\ 8;\ \text{ов с н};\ \text{н н н в}) = (\text{с}'\ \text{н}'\ \text{н}'\ \text{в}';\ \text{ов}'\ \text{с}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{в}'\text{в}'\ \text{н}')$;
$\mathbf{x}_9^{<4>} = (4\ 4\ 2\ 7;\ \text{в с в};\ \text{ов н с н}) = (\text{с}'\ \text{с}'\ \text{н}'\ \text{в}';\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{в}';\ \text{он}'\ \text{в}'\ \text{с}'\ \text{в}')$;
$\mathbf{x}_9^{<5>} = (1\ 8\ 2\ 3;\ \text{в в в};\ \text{ов н с н}) = (\text{он}'\ \text{в}'\ \text{н}'\ \text{н}';\ \text{в}'\ \text{в}'\ \text{в}';\ \text{он}'\ \text{в}'\text{с}'\ \text{в}')$.
$\boldsymbol{A}_9 = \{4\circ x_1^{\text{с}'}, 1\circ x_1^{\text{он}'}; 1\circ x_2^{\text{в}'}, 3\circ x_2^{\text{с}'}, 1\circ x_2^{\text{н}'}; 1\circ x_3^{\text{в}'}, 4\circ x_3^{\text{н}'}; 2\circ x_4^{\text{в}'},$
$1\circ x_4^{\text{с}'}, 2\circ x_4^{\text{н}'}; 1\circ x_5^{\text{ов}'}, 2\circ x_5^{\text{в}'}, 1\circ x_5^{\text{с}'}, 1\circ x_5^{\text{н}'}; 1\circ x_6^{\text{в}'}, 3\circ x_6^{\text{с}'}, 1\circ x_6^{\text{н}'};$
$3\circ x_7^{\text{в}'}, 2\circ x_7^{\text{н}'}; 1\circ x_8^{\text{в}'}, 1\circ x_8^{\text{с}'}, 3\circ x_8^{\text{он}'}; 5\circ x_9^{\text{в}'}; 1\circ x_{10}^{\text{в}'}, 4\circ x_{10}^{\text{с}'};$
$3\circ x_{11}^{\text{в}'}, 2\circ x_{11}^{\text{н}'}\}$.

Оценки в мультимножествах по каждому из критериев $K_1 - K_{11}$ отделены точками с запятыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Алескеров Ф. Т.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. — М. : Издательский дом ГУ ВШЭ, 2006.

2. *Андрейчиков А. В.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. — М. : Финансы и статистика, 2000.

3. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. — М. : Наука, 1981.

4. *Волков И. К.* Исследование операций / И. К. Волков, Е. А. Загоруйко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.

5. *Волошин Г. Я.* Методы оптимизации в экономике. — М. : Дело и сервис, 2004.

6. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. — М. : Логос, 2006.

7. *Ногин В. Д.* Принятие решений при многих критериях. — СПб. : Изд-во «ЮТАС», 2007.

8. *Ногин В. Д.* Основы теории оптимизации / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. — М. : Высшая школа, 1986.

9. *Перегудов Ф. И.* Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. — М. : Высшая школа, 1989.

10. *Перегудов Ф. И.* Основы системного анализа / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. — Томск : Изд-во НТЛ, 1997.

11. *Рыков А. С.* Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация. — М. : МИСИС, Издательский дом «Руда и металлы», 2005.

12. Теория прогнозирования и принятия решений / под ред. С. А. Саркисяна. — М. : Высшая школа, 1977.

13. Теория выбора и принятия решений / [И. М. Макаров и др.]. — М. : Наука, 1977.

14. *Черноруцкий И. Г.* Методы принятия решений. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005.

15. *Anderson D. R.* An introduction to management science: a quantitative approach to decision making / D. R. Anderson, D. J. Sweeney, T. A. Williams. — Minneapolis : West Publishing Company, 2001.

Научные издания

16. *Айзерман М. А.* Выбор вариантов: основы теории / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров. — М. : Наука, 1990.

17. *Березовский Б. А.* Многокритериальная оптимизация: Математические аспекты / [Б. А. Березовский и др.]. — М. : Наука, 1989.

18. *Борисов А. И.* Принятие решений на основе нечетких моделей / А. И. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. — М.: Наука, 1990.

19. *Вагнер Г.* Основы исследования операций : в 3 т. — Т. 1. — М. : Мир, 1972; Т. 2, 3. — М. : Мир, 1973.

20. *Венцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М. : Наука, 1988.

21. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. — М. : Наука, 1971.

22. *Дубов Ю. А.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. — М. : Наука, 1986.

23. *Евланов Л. Г.* Теория и практика принятия решений. — М. : Экономика, 1984.

24. *Евланов Л. Г.* Экспертные оценки в управлении / Л. Г. Евланов, В. А. Кутузов. — М. : Экономика, 1978.

25. *Емельянов С. В.* Многокритериальные методы принятия решений / С. В. Емельянов, О. И. Ларичев. — М. : Знание, 1986.

26. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М. : Мир, 1976.

27. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М. : Мир, 1964.

28. *Кини Р. Л.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. — М. : Радио и связь, 1981.

29. *Ларичев О. И.* Наука и искусство принятия решений. — М. : Наука, 1979.

30. *Ларичев О. И.* Объективные модели и субъективные решения. — М. : Наука, 1987.

31. *Ларичев О. И.* Вербальный анализ решений. — М. : Наука, 2006.

32. *Ларичев О. И.* Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ решений / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. — М. : Наука, Физматлит, 1996.

33. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М. : Наука, 1984.

34. *Лотов А. В.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей / А. В. Лотов, В. А. Бушенков, Г. К. Каменев, О. Л. Черных. — М. : Наука, 1997.

35. *Левченков В. С.* Два принципа рациональности в теории выбора: Борда против Кондорсе. — М. : Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2002.

36. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. — М. : Радио и связь, 1982.

37. *Литвак Б. Г.* Экспертные оценки и принятие решений. — М. : Патент, 1996.

38. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М. : Наука. Физматлит, 1974.

39. *Миркин Б. Г.* Анализ качественных признаков и структур. — М. : Статистика, 1980.

40. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений : аксиомы и модели. — М. : Мир, 1991.

41. *Нейман Дж.* Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. — М. : Наука, 1970.

42. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде : количественный подход. — М. : Физматлит, 2002.

43. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М. : Наука, 1981.

44. *Панкова Л. А.* Организация экспертизы и анализ экспертной информации / Л. А. Панкова, А. М. Петровский, М. В. Шнейдерман. — М. : Наука, 1984.

45. *Подиновский В. В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М. : Физматлит, 2007.

46. *Подиновский В. В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М. : Физматлит, 2007.

47. *Райфа Г.* Анализ решений (введение в проблему выбора в условиях неопределенности). — М. : Наука, 1977.

48. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М. : Радио и связь, 1993.

49. *Таха Х.* Введение в исследование операций: в 2 кн. — М. : Мир, 1985.

50. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М. : Наука, 1981.

51. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М. : Наука, 1978.

52. *Хоменюк В. В.* Элементы теории многоцелевой оптимизации. — М. : Наука, 1983.

53. *Шикин Е. В.* Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. — М. : Издательство «Дело», 2000.

54. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. — М. : Радио и связь, 1992.

55. *Юдин Д. Б.* Вычислительные методы теории принятия решений. — М. : Наука, 1989.

56. *Aleskerov F.* Arrovian aggregation models. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999.

57. *Arrow K. J.* Social choice and individual values. — New York : Wiley, 1951.

58. *Edwards W.* Utility theories: Measurements and applications. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992.

59. *Harsanyi J. C.* Rational behavior and bargaining equilibrium in gaimes and social situations. — Cambridge : Cambridge University Press, 1976.

60. *Hwang Ch.-L.* Group decision making under multiple criteria. Methods and applications / Ch.-L. Hwang, M.-J. Lin. — Berlin : Springer-Verlag, 1987.

61. *Kahnemann D.* Choice, values and frames / D. Kahnemann, A. Tversky. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

62. *Roubens M.* Preference modelling / M. Roubens, Ph. Vincke. — Berlin : Springer-Verlag, 1985.

63. *Roy B.* Multicriteria methodology for decision aiding. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996.

64. *Saaty T.* Multicriteria decision making. The analytic hierarchy process. — Pittsburgh : RWS Publications, 1990.

65. *Vincke Ph.* Multicriteria decision aid. — Chichester : Wiley, 1992.

66. *Yu P. L.* Multiple criteria decision making: concepts, techniques, and extensions. — New York : Plenum Press, 1985.

67. *Zimmerman H. J.* Fuzzy sets and decision analysis / H. J. Zimmerman, L. A. Zadeh, B. R. Gaines. — Amsterdam : North-Holland, 1984.

Дополнительная литература

68. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Физматлит, 2006.

69. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М. : Радио и связь, 1982.

70. *Петровский А. Б.* Основные понятия теории мультимножеств. — М. : Едиториал УРСС, 2002.

71. *Петровский А. Б.* Пространства множеств и мультимножеств. — М. : Едиториал УРСС, 2003.

72. *Суходольский Г. В.* Математические методы психологии. — СПб. : Изд-во С.-Петербургского ун-та.

73. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. — М. : Наука, 1971.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Учебное издание

Петровский Алексей Борисович

Теория принятия решений

Учебник

Редактор *М. В. Макарова*
Технический редактор *О. Н. Крайнова*
Компьютерная верстка: *Т. А. Клименко*
Корректоры *Г. Н. Петрова*, *В. А. Жилкина*

Изд. № 101113320. Подписано в печать 12.02.2009. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 25,0.
Тираж 2 000 экз. Заказ № 7442.

Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.007496.07.04 от 20.07.2004.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (495) 334-8337, 330-1092.

Отпечатано с электронных носителей издательства
ОАО "Тверской полиграфический комбинат" 170024, г Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон· (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru